

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р



СЕРИЯ «НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА»

Серия основана в 1959 г.

РЕДКОЛЛЕГИЯ СЕРИИ
«НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА»
И ИСТОРИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ КОМИССИЯ
ИНСТИТУТА ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ АН СССР
ПО РАЗРАБОТКЕ НАУЧНЫХ БИОГРАФИЙ ДЕЯТЕЛЕЙ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ:

*Л. Я. Бляхер, А. Т. Григорьян, В. И. Кузнецов, А. И. Купцов,
Б. В. Левшин, С. Р. Микулинский, Д. В. Ознобишин,
Э. К. Соколовская (ученый секретарь),
В. Н. Сокольский, Ю. И. Соловьев,
А. С. Федоров (заместитель председателя),
Н. А. Фигуровский (заместитель председателя),
А. П. Юшкевич, А. Л. Яншин (председатель).
М. Г. Ярошевский*

А. Л. Цыкало

**Александр Михайлович
ЛЯПУНОВ**

1857—1918

**Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР
И. И. НОВИКОВ**



**МОСКВА
«НАУКА»
1988**

ББК 22.1 г
Ц 94
УДК 51(091)

Рецензенты:

академик АН БССР ЕРУГИН Н. П.,
доктора физико-математических наук
АСЛАНОВ С. К., МИХАЙЛОВ Г. К., ФИШЕР И. З.

Цыкало А. Л.

Ц 94 Александр Михайлович Ляпунов. 1857 — 1918.
М.: Наука, 1988. — 244 с., ил. — (Научно-биографическая литература).

ISBN 5—02—000073—6

В книге освещена жизнь и научная деятельность выдающегося русского ученого академика Петербургской академии наук Александра Михайловича Ляпунова, основоположника ряда важных направлений математики и механики. Результаты его исследований в области теории устойчивости нашли широкое применение при разработке и создании многих современных технических систем, в развитии традиционных и новых направлений науки.

Книга предназначена для читателей, интересующихся историей отечественной математики и механики.

Ц $\frac{1702020000-223}{054(02)-88}$ 46—87 НП

ББК 22.1 г

ISBN 5—02—000073—6 © Издательство «Наука», 1988

Предисловие

Назначение человека состоит не в том только, чтобы быть счастливым. Он должен создать для человечества нечто великое.

Эрнест Ренан

Люблю бывать в сквере Одесского университета. Этот ухоженный маленький уголок с высокими деревьями и густым кустарником стиснут учебными и административными зданиями университета, корпусами научных лабораторий. Влекут сюда не только покой этого островка природы в большом городе и контраст с напряженным ритмом жизни находящихся рядом аудиторий и лабораторий. Привлекает образ того, чей памятник здесь установлен, чья преданность науке и величие духа поражали и современников, и потомков. Проницательный взгляд строгих глаз будто спрашивает каждого: «Достоин ли ты звания студента, преподавателя, ученого? Что ты сделал для науки, для своего народа?». На постаменте надпись: «Великий русский математик Александр Михайлович Ляпунов».

... В те времена детская смертность была очень высокой, и из семерых детей известного русского астронома Михаила Васильевича Ляпунова в живых остались только три сына. Младший, Борис, впоследствии стал видным филологом, действительным членом Академии наук СССР; средний, Сергей — ученик М. А. Балакирева — прославился как композитор, пианист и дирижер; старший, Александр, стал великим математиком, гордостью мировой науки.

Ляпуновым посвящены целые страницы Большой Советской Энциклопедии. Этот славный род русских интеллигентов дал стране ряд выдающихся деятелей науки и искусства. Тесные дружеские и родственные узы связывали Ляпуновых с великим физиологом И. М. Сеченовым, с академиками А. Н. Крыловым, А. А. Марковым, В. А. Стекловым, В. П. Филатовым и рядом других замечательных представителей русской интеллигенции и научной мысли.

Становление юного А. М. Ляпунова проходило сначала под влиянием отца, который был учеником и товарищем Н. И. Лобачевского по Казанскому университету и обогатил астрономическую науку исследованием туманности Ориона. На математическом отделении Петербургского университета Александр Ляпунов с увлечением слушал лекции П. Л. Чебышева. Молодой Ляпунов оказался в кругу людей, близких к И. М. Сеченову, одно время он даже давал уроки математики великому физиологу. На умы передовой интеллигенции, в среде которой прошла молодость А. М. Ляпунова, оказывали влияние идеи Д. И. Писарева, Н. А. Добролюбова, Н. Г. Чернышевского. Не случайно А. М. Ляпунов — и молодой подающий надежды ученый, и зрелый профессор и академик — всегда выступал против попыток правительственных кругов царской России и церковников использовать в своих целях авторитет науки и ее результаты, против косности, реакции и бюрократизма во всех их проявлениях.

Основным научным достижением А. М. Ляпунова, принесшим ему мировую известность, было создание общего метода решения задачи об устойчивости движения — одной из важнейших проблем механики и физики. Решению этой проблемы А. М. Ляпунов отдал все свое замечательное математическое дарование, самоотверженный труд, энергию ума и сердца. Трудно переоценить значение полученных А. М. Ляпуновым результатов. Методы Ляпунова используются не только в математике и механике, но и в химии, термодинамике, синергетике и других старых и новых направлениях науки. Очень большую роль играет решение проблемы устойчивости движения в небесной механике, космологии и космогонии. Ряд других известных работ А. М. Ляпунова относится к области дифференциальных уравнений, теории вероятностей и основ гидродинамики.

Выдающийся вклад А. М. Ляпунова в науку был оценен еще при его жизни. В 1900 г. он был избран членом-корреспондентом, а год спустя — действительным членом Петербургской академии наук. Он являлся почетным доктором и профессором Харьковского, Казанского, Петербургского и Новороссийского (Одесского) университетов. Кроме того, А. М. Ляпунов был избран членом-корреспондентом Парижской академии наук, членом Академии наук Деи Линчеи в Риме, ряда научных обществ.

Наиболее напряженным и драматичным стал одесский период жизни ученого. В Одессу А. М. Ляпунов приехал летом 1917 г. вместе с тяжело больной туберкулезом женой Натальей Рафаиловной, урожденной Сеченовой. С детских лет их связывали узы дружбы и любви. С исключительной самоотверженностью отдавал А. М. Ляпунов свое время и силы уходу за больной женой. Вместе с тем ученый продолжал исследовать задачу о фигурах равновесия вращающейся жидкости, поставленную еще его учителем П. Л. Чебышевым. С осени 1918 г. А. М. Ляпунов начал читать курс лекций в Одесском университете о форме небесных тел. Однако этот курс оборвался на седьмой лекции. . .

Надежды на выздоровление любимой жены и ближайшего друга не оправдались. Наталья Рафаиловна медленно угасала. Потерявший всякую надежду на спасение жены, практически лишенный возможности продолжать научную работу, отрезанный ходом событий от Академии наук, А. М. Ляпунов находился в очень угнетенном состоянии.

В конце октября 1918 г. Наталья Рафаиловна умерла. В тот же день Ляпунов выстрелил в себя. Два дня спустя Александр Михайлович, не приходя в сознание, скончался. Похоронили его вместе с женой, как он просил в оставленной записке.

Труды А. М. Ляпунова оказали огромное влияние на все дальнейшее развитие математики и механики. Недаром его называли «Лапласом XX века» и признали еще при жизни ведущим ученым в области точного природоведения. Идеи А. М. Ляпунова получили широкое развитие в работах крупнейших советских математиков и механиков — В. А. Стеклова, В. И. Смирнова, А. Н. Крылова, оказали большое влияние на исследования видных представителей зарубежной науки — А. Пуанкаре, Ж. Адамара, Дж. Дарвина.

А. М. Ляпунов всегда стремился довести свои работы до конца, до конкретных результатов, не избегал трудоемких выкладок и вычислений. Характерный пример: известный английский ученый Дж. Дарвин в одном из своих исследований, требовавших выполнения очень сложных и громоздких вычислений, допустил неточности, выявить которые не сумел. А. М. Ляпунов, затратив огромный труд, довел все вычисления до конца и получил точные результаты.

Советские люди чтут память великого математика.

В Одессе А. М. Ляпунову поставлен памятник, его именем назван переулок в центральной части города. На доме, где он жил (ул. Софиевская, ныне — Короленько, 10), установлена мемориальная доска. Перу крупных советских математиков, механиков, историков науки принадлежит ряд трудов, посвященных творческому наследию А. М. Ляпунова. Но лучшим памятником великому математику является широкое развитие в нашей стране ключевых направлений математики и механики, основоположником которых он являлся, издание и переиздание его научных трудов, обогащающих мировую науку.

В настоящее время имеется большое количество источников, посвященных жизни и творчеству А. М. Ляпунова. Первыми биографами ученого стали его брат Б. М. Ляпунов, а также В. А. Стеклов, А. Н. Крылов и В. И. Смирнов. Изучением творчества Ляпунова занимались также Н. Г. Четаев, Н. П. Еругин, А. Ю. Ишлинский, С. Н. Киро, В. В. Румянцев, Н. И. Гаврилов, В. П. Цесевич, Б. В. Гнеденко, А. Т. Григорьян, Я. Л. Геронимус, В. А. Добровольский, С. Л. Соболев, А. П. Юшкевич, А. М. Шульберг, Н. Д. Моисеев, А. Д. Мышкис, И. Б. Погребысский, Г. Н. Дубошин, В. С. Сологуб, Л. Н. Сретенский, Б. Н. Фрадлин, И. М. Раппопорт, В. М. Старжинский, А. С. Шибанов, М. Г. Крейн. Работы этих и других авторов используются в настоящей книге. Однако и сегодня изучение жизненного и творческого пути великого математика не завершено. Поэтому помимо обобщения имеющихся сведений и данных автор стремился уделить в книге особое внимание мало известным страницам жизни Ляпунова. Для того чтобы читатель имел возможность ознакомиться с кратким и квалифицированным изложением основных научных результатов Ляпунова (многие из которых настолько опередили свое время, что не перекрыты до сих пор несмотря на бурное развитие науки и техники), в книге приведены обзоры В. И. Смирнова и В. С. Сологуба «Исследования А. М. Ляпунова по теории устойчивости движения» [93], «Работы А. М. Ляпунова по теории фигур равновесия вращающейся жидкости» [94] и «Работы А. М. Ляпунова по теории потенциала, теории вероятностей и другие» [95]. Кроме того, приведены ссылки на исследования и обзоры последних лет, посвященные современному развитию идей А. М. Ляпунова.

. . . Не всегда задумчив и тих университетский сквер в старом одесском дворе. Знает он и молодое веселье, праздники посвящения вчерашних школьников в студенты, дни математика и физика. Но часто веселые стайки студентов останавливаются в молчании у памятника, отдавая дань глубокого уважения Ученому — человеку сложной и трагической судьбы. И хочется верить, что из среды этих юношей и девушек скоро в большую науку придут новые Ляпуновы, Чебышевы, Ковалевские. . .

Автор считает своим приятным долгом выразить сердечную благодарность всем тем, без чьей помощи подготовка настоящей книги была бы невозможной. Среди них — преподаватели и научные сотрудники Ленинграда, Харькова и Одессы Е. И. Рюмцев, Г. Д. Купченко, Г. Б. Литинский, Л. Г. Вайнштейн, Т. Я. Баянкина, Н. И. Хуторнова, С. В. Авротинская, которые помогли в сборе материалов об А. М. Ляпунове и в подготовке рукописи. Большое содействие в работе оказала мне В. И. Кофман, выполнившая переводы с английского, немецкого и французского языков. Трудно переоценить помощь специалистов Ленинградского отделения Архива АН СССР В. И. Александровой и И. А. Шафран, а также сотрудника Государственной Публичной библиотеки им. М. Е. Салтыкова-Щедрина (г. Ленинград) Н. И. Крайневой. Я благодарен также С. В. Бодюлу и Я. А. Шандруку, выполнившим основную работу по подготовке фотоиллюстраций.

Часть первая

Глава 1

Семья и род Ляпуновых

Фамилия «Ляпунов» происходит от старинного русского слова «ляпун», «ляпунок» — «мотылек», и упоминания о русских людях, носивших эту фамилию, встречаются во многих древнерусских источниках — летописях, актах, родословицах. Среди этих людей — Ляпун Борисович Осинин, посол к римскому цесарю (1527 г.), Савва Семенович Ляпунов, родоначальник известной рязанской фамилии Ляпуновых (сер. XVI в.) [149]. В «Родословной книге» мы также находим сведения о представителях старинного рода Ляпуновых, которые служили в Новгороде, Костроме, Рязани, Москве [206].

Согласно данным «Русского биографического словаря» Ляпуновы происходят от галицкого князя Константина Ярославича, младшего брата Александра Невского [208, с. 830]. Потомки Константина княжили в Галиче Костромском. Однако Дмитрий Донской в 1362—1363 гг. присоединил Галицкое княжество к своим владениям, изгнав из Галича князя Дмитрия Ивановича. Один из потомков этого князя, уже упоминавшийся Ляпун Борисович Осинин, бывший у новгородского архиепископа Пимена боярином, оставил своим потомкам фамилию «Ляпуновы».

Василий Александрович Ляпунов — дед Александра Михайловича — служил в Казанском университете более 20 лет. С апреля 1825 г. он занимал должность бухгалтера Правления университета. Сохранились сведения о подготовке В. А. Ляпуновым отчета о финансовой деятельности университета. В августе 1837 г. В. А. Ляпунов был назначен синдиком¹ Правления университета [189, с. 256, 643, 758].

Семья Ляпуновых размещалась в одном из университетских корпусов, в которых жили ректор Н. И. Ло-

¹ Синдик — официальный представитель университета, уполномоченный на ведение его дел.

бачевский, члены строительного комитета и некоторые канцелярские чиновники. Здания эти сильно пострадали во время пожара 24 августа 1842 г., и Ляпуновы переселились в каменный трехэтажный дом на Проломной улице, нанятый университетом [189, с. 460, 461].

За длительную беспорочную службу В. А. Ляпунов был награжден знаком отличия [189, с. 449]. 4 октября 1846 г.² по прошению он был уволен. Сохранились сведения о том, что зрение В. А. Ляпунова непрерывно ухудшалось, и к концу жизни он полностью его утратил. 8 октября 1847 г. он умер.

Среди сыновей и дочерей Василия Александровича и Анастасии Евсеевны Ляпуновых был Михаил — отец великого математика, родившийся 25 сентября (по другим данным — 30 сентября) 1820 г. в селе Плетнихе Васильевского уезда Нижегородской губернии. Девятнадцати лет он окончил Казанский университет с серебряной медалью и был утвержден кандидатом философского факультета. В следующем, 1840 г. был назначен астрономом-наблюдателем при Казанском университете и старшим учителем математики казанской гимназии. С 1850 г. М. В. Ляпунов — заведующий обсерваторией университета и руководитель студентов в практических занятиях астрономией. Ученая деятельность его в Казанском университете продолжалась по 1855 г.

Научная жизнь Казанского университета того времени была озарена гением Н. И. Лобачевского — великого русского математика, создателя неевклидовой геометрии, в ту пору ректора университета. «Ни одно событие университета, ни один сколько-нибудь важный факт его истории с самого начала . . . не могут быть упомянуты без имени Лобачевского. Его благородная жизнь тесно и неразлучно сплеталась с историей Казанского университета, она есть живая летопись университета, его надежд и стремлений, его возрастания и развивания», — писал Н. Н. Булич [189, с. 438]. Не случайно историки Казанского университета называли Лобачевского «великим строителем» [159], подчеркивая, что в устроенных Лобачевским университетских зданиях и учреждениях «езде был виден ум, обдуманность и даже роскошь».

² Даты до 1918 г. приводятся по старому стилю, а после 1918 г. — по новому.

Сказанное в большой степени относится и к делу строительства новой обсерватории Казанского университета, в создании которой Лобачевский принимал самое деятельное участие. Постройка новой обсерватории была закончена в 1836 г., и она и начала действовать в 1838 г. (на год раньше Пулковской), заменив собою старую крошечную обсерваторию, действовавшую с самого основания университета в 1805 г. Даже сегодня вызывает удивление посетителей оригинальная остроумная планировка здания обсерватории, придуманная Лобачевским. Николаю Ивановичу были столь понятны и близки интересы астрономии, что он непосредственно занимался расстановкой основных меридианных инструментов. Он поставил эти инструменты не по оси здания, как повсеместно принято, а своеобразно — в прорезях, под углом к вестибюлю и главному входу с учетом того, что ось здания обсерватории, выходящего фасадом на улицу Чернышевского, не совпадает с меридианом места, а наклонена к нему примерно на 45 градусов [161, с. 412—413].

Известно, что Н. И. Лобачевский увлеченно читал лекции по астрономии, наблюдал знаменитую комету 1811 г. и комету Энке 1832 г. А в его основополагающей работе 1829 г. «О началах геометрии» обсуждаются вопросы, связанные с расстоянием неподвижных звезд и с бесконечностью Вселенной. Поэтому хотя успехи Лобачевского в астрономии не могут идти, разумеется, ни в какое сравнение с его замечательными результатами в области геометрии, он оказал несомненное влияние на становление М. В. Ляпунова как астронома.

В связи с ожидавшимся 26 июня 1842 г. солнечным затмением основатель и первый директор Главной (Пулковской) обсерватории академик В. Я. Струве предложил осуществить астрономические наблюдения в Пензе, где затмение было полным. В состав экспедиции были включены профессора Н. И. Лобачевский, Э. А. Кнорр и астроном-наблюдатель М. В. Ляпунов. Известно, что значительная часть работы по подготовке и обеспечению этой экспедиции была выполнена М. В. Ляпуновым. Сохранились предписания ректора университета Н. И. Лобачевского М. В. Ляпунову об определении сметы расходов, о контроле за подготовкой и укладкой инструментов, заботе о сохранении их от повреждения и порчи. Для того чтобы успеть выбрать удобное место и приготовить все необходимое для наблюдений



Михаил Васильевич
Ляпунов



Софья Александровна
Ляпунова

М. В. Ляпунов выехал в Пензу заранее, 10 июня, взяв с собой нужное оборудование и инструменты [163, с. 311; 189, с. 447].

С этой экспедицией связан забавный эпизод, описанный выпускником Казанского университета 1846 г. П. П. Перцовым: «Для наблюдения над солнцем была устроена особая палатка в Ботаническом саду, недалеко от Пензы, и в то же время прошел в народе слух, что приехал какой-то колдун, который хочет украсть солнце на все время ярмарки, так что во время ярмарки в течение 10 дней постоянно будет ночь. Слухи настолько были упорны, что Лобачевский просил губернатора поставить около палатки усиленный караул: „А то, — смеясь говорил Лоб[ачевский], — в меня, как колдуна, вобьют осиновый кол в затылок, и прощай все наблюдения“. Потом стали говорить, что между губернатором и колдуном идет торг, чтобы за известную сумму колдун не воровал солнце во время ярмарки, ну и, наконец, поладили; но все-таки колдун сказал, что на несколько минут он солнце украдет, чтобы доказать, что он не обманщик!

На ярмарку в Пензу съезжается много народа со всех концов Пензенской губ. к Петрову дню, как раз в то время должно было быть и солнечное затмение,

в самый разгар ярмарки, и когда солнце действительно закрылось луною и наступила почти ночная темнота, то народ на площади так испугался, что пал на колени, и многие люди стали молиться богу, предполагая, что наступил конец мира, а старушки в домах стали зажигать свечи перед иконами!» [189, с. 624].

Кроме астрономических наблюдений Академия наук поручила членам экспедиции провести и физические наблюдения «над постепенностью уменьшения теплоты во время затмения, над положением магнитных полюсов, над магнитным наклоном и силою магнитного притяжения земли» [189, с. 447].

По возвращении в Казань все три члена экспедиции занялись составлением отчетов о ней. Хотя многие записки и бумаги были уничтожены пожаром 24 августа, было тем не менее подготовлено два отчета: первый, составленный Лобачевским и Кнорром, содержал общее описание затмения³; второй, содержащий преимущественно астрономические выкладки, был составлен М. В. Ляпуновым.

В июне 1843 г. Н. И. Лобачевский изложил подробные сведения об экспедиции в Пензу на ученом собрании профессоров Казанского университета. В этом докладе Лобачевский изложил также свои взгляды на природу солнечной короны [189, с. 458—460].

Пожар 1842 г. повредил многие инструменты обсерватории Казанского университета, в том числе новый экваториал. М. В. Ляпунову было поручено отправить их для починки в Пулковскую обсерваторию. Во время своего пребывания в Пулкове М. В. Ляпунов активно занимался астрономией под руководством лучших астрономов того времени. В этот период он был приглашен для участия в хронометрических экспедициях, имевших целью определение разности долгот между Пулковым и Альтоною, а также определение положения ряда географических пунктов России.

Возвратившись в Казань в 1845 г., М. В. Ляпунов продолжал астрономические исследования, вел наблюдения с помощью меридианного (венского) круга и рефрактора. Для приемки и доставки в Казань меридианного круга Репсольда М. В. Ляпунов был вновь командирован в Пулково в 1847 г.

³ Этот отчет был опубликован в Ученых записках Казанского университета (Казань, 1842. Кн. 3. С. 51—83).

В том году умерли от холеры отец и сестра Наталия Васильевна Зайцева [73, с. 3]. Старший брат Виктор, врач, был уже давно женат и имел свою семью, младший Андрей скончался от сердечного приступа в 1842 г. во время казанского пожара. Поэтому Михаил Васильевич взял на свое попечение мать и незамужних сестер, хотя его материальное положение было весьма скромным.

В 1852 г. М. В. Ляпунов женился на Софье Александровне Шипиловой, дочери помещика Курмышского уезда Симбирской губернии. У них родились две дочери, скончавшиеся в младенчестве, а затем три сына — Александр, Сергей и Борис. Позже — в 1864 и 1867 г. родились еще сын и дочь, которые умерли в юном возрасте, первый — при жизни отца, а вторая — почти через два года после его кончины.

С 1850 г. М. В. Ляпунов — заведующий обсерваторией Казанского университета и руководитель практических занятий студентов астрономией. Серьезное внимание (в 1847—1851 гг.) он уделил наблюдениям звезд туманности Ориона. Эту работу специалисты ставят М. В. Ляпунову в особую заслугу, учитывая высокую тщательность измерений, и то, что наблюдения эти можно производить только зимой, при низких температурах. С 1852 по 1854 г. М. В. Ляпунов вел наблюдения звезд зоны от $+20^{\circ}$ до $+24^{\circ}$, относя их положения к более ярким, определенным в Пулковской обсерватории [208, с. 833—834].

(После увольнения Н. И. Лобачевского с должности ректора и профессора в 1846 г. Казанский университет вступил в тяжелый период своего существования. Это было тесно связано с дальнейшим усилением реакции, которая приобрела особый разгул в последние годы царствования Николая I. Не случайно попечителем Казанского учебного округа был назначен не гениальный Лобачевский, с огромным успехом управлявший университетом в течение двадцати лет, а старый казанский помещик генерал В. П. Молоствов.)

В 1855 г. М. В. Ляпунова избрали членом-корреспондентом университета. Однако разногласия, возникшие между ним и профессором астрономии М. А. Ковальским, привели к тому, что Ляпунов был вынужден подать в отставку. По свидетельству Бориса Михайловича, определенную роль в уходе из университета сыграла и

возрастающая слабость зрения Михаила Васильевича [73, с. 2].

По выходе из университета М. В. Ляпунов занялся чисто педагогической деятельностью. С 1856 по 1864 г. он занимал должность директора Демидовского лицея в Ярославле, представлявшего в то время особый тип высшего общеобразовательного учебного заведения.

Это учебное заведение было основано в 1803 г. на пожертвованные П. Г. Демидовым средства [152]. Под названием «Ярославское Демидовское высших наук училище» оно открылось в апреле 1805 г. По первоначальному уставу училище занимало место непосредственно после университетов. Семь профессоров вели преподавание словесности древних языков и русского красноречия, философии, права, математики, истории, химии, финансов. Уже в 1811 г. аттестаты училища были приравнены к аттестатам университетов. В 1833 г. училище было преобразовано в Демидовский лицей, который был подчинен Московскому университету; управлял лицеем Совет под председательством директора, назначаемого министром народного просвещения по представлению Московского университета. Университет же избирал профессоров. Трехлетний курс обучения включал математику, физику, химию, технологию, русскую и латинскую словесность, философию, историю, право и судопроизводство, политическую экономию и финансы, статистику, немецкий и французский языки. По уставу 1842 г. лицей был освобожден от подчинения Московскому университету и Совету лицея было предоставлено право избирать профессоров по конкурсу. К прежде изучаемым наукам были присоединены сельскохозяйственные (сельское хозяйство, лесоводство, земледелие) и бухгалтерия.

Таким образом, в период работы М. В. Ляпунова в лицее велась разносторонняя подготовка учащихся, связанная с развитием естественных наук и с практикой. Большую известность получила уникальная библиотека Демидовского лицея. К последнему десятилетию XIX в. библиотека включала около 40 тысяч книг. Однако позднее направленность подготовки в лицее была изменена. В 1870 г., уже после выхода М. В. Ляпунова в отставку и его смерти это учебное заведение было преобразовано в Юридический лицей.

«Служба отца в общеобразовательном учебном заведении могла иметь некоторое значение в деле воспи-

тания детей, — вспоминал сын М. В. Ляпунова Борис Михайлович. — Конечно я, оставшись по смерти отца шестилетним мальчиком, не могу судить о характере его научных интересов по личным воспоминаниям, но для меня свидетельством разнообразия его интересов могла служить сохранившаяся в нашем, построенном отцом доме, но сгоревшая, к сожалению, вместе с домом в ноябре 1917 г. библиотека. . . И судьбе было угодно, чтобы блестяще начатая научная деятельность отца в области точных наук проявилась с необычайной силой уже после его смерти в его старшем сыне в области тех же наук» [73, с. 4].

Мать Александра Михайловича — Софья Александровна Ляпунова (урожденная Шпилова) была образованной женщиной с любящей и чуткой душой. Семья, воспитание детей всегда были в центре ее внимания. Значительное место среди ее духовных интересов занимали музыка и литература.

Брат А. М. Ляпунова Сергей Михайлович впоследствии вспоминал: «Мать моя была любительницей музыки и очень недурно играла на фортепьяно. По крайней мере, я не знаю, чтобы кто-нибудь из числа родных или знакомых мог с ней в этом сравниться. Репертуар ее был небольшой, но в нем были пьесы первоклассной трудности, как транскрипции и фантазии на оперы Листа и Тальберга, концерт а-толл Гуммеля, Патетическая соната Бетховена и т. п. Надо при этом сказать, что свое музыкальное образование она получила дома, если не считать несколько уроков, взятых ею у Лангера, когда она уже взрослой девушкой гостила в Нижнем Новгороде у родных»⁴. «Она вообще выказывала более интереса к музыке и знакомству с музыкальной литературой, чем это обыкновенно в то время среди любителей бывало», — писал С. М. Ляпунов [110]. Музыкой занималась и тетка братьев Ляпуновых по отцовской линии. Что же касается Михаила Васильевича, то он был, по-видимому, равнодушен к музыкальному искусству.

Об отношении М. В. Ляпунова к жене, об атмосфере взаимной любви и заботы друг о друге ярко свидетельствуют строки одного из сохранившихся писем М. В. Ляпунова к Софье Александровне [111].

⁴ Воспоминания С. М. Ляпунова приведены в статье А. Ляпуновой [180].

5 апреля 1862 г.

Дорогой мой дружок Сонюшка! . . . Не знаю, как тебе и выразить, моя душа, как я об тебе скучаю и забочусь и как ожидаюсь радостного свидания, до которого считаю дни и часы. Дай бог, чтобы не было вперед надобности расставаться нам с тобою на такое продолжительное время. Вот приходит и праздник; не знаю, как я буду проводить его в моем одиночестве. Но что делать, когда это было нужно. Молю только бога, чтобы ты и дети были здоровы. Прошу тебя, мой Ангел, не скучай и не расстраивай себя мрачными мыслями. Тебе всего нужнее теперь быть покойной и в хорошем расположении духа. Бог милостив. Все устроится благополучно и мы увидимся с тобою в радости. Обо мне не беспокойся: я, слава богу, здоров; только все занят и не могу много и часто писать. . . Столько было дела, сверх обыкновенного в нынешнем году, что и теперь еще немало предстоит труда и на праздники. . . Много у нас было совещаний о разных проектах: и гимназии, и училища, все предполагается передавать в министерство.

Обнимаю тебя, дорогой мой друг, и детей и да благословит и сохранит вас бог. В великий праздник к тебе будет обращена первая моя мысль и первое поздравление. Будь покойна, милый мой Ангел и береги свое здоровье. Перецелуй за меня детей.

Остаюсь навсегда преданный тебе друг
М. Ляпунов.

Расстроенное здоровье вынудило М. В. Ляпунова в 1863 г. выйти в отставку, после чего он с семьей поселился в имении жены в селе Болобоново Курмышского уезда Симбирской губернии⁵. В ночь на 20 ноября 1868 г. он внезапно умер от сердечного приступа.

Многие из близких и дальних родственников А. М. Ляпунова прославили свое имя в различных областях науки и культуры. Среди них братья Александра Михайловича Ляпунова — Сергей и Борис.

Сергей Михайлович Ляпунов — известный русский композитор, пианист и дирижер родился 18 ноября 1859 г. в Ярославле. Первой учительницей музыки маленького Сережи была мать. После переезда в Нижний Новгород Сергей вместе со старшим братом поступил в гимназию, а когда в городе открылось отделение Русского музыкального общества С. М. Ляпунов продолжил в его классах свое музыкальное образование. Большую роль в становлении юного музыканта сыграли постоянные симфонические концерты, в которых принимал участие Н. Г. Рубинштейн.

Замечательное творчество корифеев русской музыки — П. И. Чайковского и Н. Г. Рубинштейна при-

⁵ Ныне Пильнинский р-н Горьковской области.

влекло С. М. Ляпунова в Московскую консерваторию, где он учился с 1878. В 1883 г. С. М. Ляпунов окончил консерваторию с малой золотой медалью как композитор и пианист.

Характерно, что С. М. Ляпунов отклонил заманчивое предложение директора остаться работать в Московской консерватории и в 1883 г. выехал в Петербург для того, чтобы познакомиться и сблизиться с М. А. Балакиревым и другими членами «могучей кучки». Через Балакирева С. М. Ляпунов познакомился с Н. А. Римским-Корсаковым, А. П. Бородиным, Ц. А. Кюи, А. К. Глазуновым, А. К. Лядовым и братьями В. В. и Д. В. Стасовыми.

В 1885 г. С. М. Ляпунов переезжает в Петербург на постоянное жительство. Он преподает здесь музыкальные предметы в Николаевском кадетском корпусе, а летом 1893 г. по заданию Русского географического общества совершает поездку по Вологодской, Вятской, Костромской и Ярославской губерниям для собирания любимых им с детства народных песен. Материалы этой экспедиции были положены в основу сборника «Песни русского народа» (1899 г.).

Огромное влияние на творчество С. М. Ляпунова оказал М. А. Балакирев. Как отмечал сам Сергей Михайлович, это выражалось в выработке вкуса и стиля, в избегании всего пошлого, рутинного и сухого. Балакирев принимал большое участие и в устройстве служебных и материальных дел молодого музыканта. Так, при содействии Балакирева С. М. Ляпунов занял место помощника управляющего Певческой капеллой (1894); велика была помощь Балакирева в организации исполнения и издания многих произведений Ляпунова.

С. М. Ляпунов выполнил основную работу по подготовке нового издания сочинений М. И. Глинки (редактирование и переложения). Это издание, общее руководство подготовкой которого взял на себя Балакирев, было для своего времени наиболее полным и совершенным. Большое участие принимал С. М. Ляпунов в организации и деятельности музыкальных классов имени Глинки при городских начальных школах, неоднократно подчеркивая, что они могут послужить «ступенью, через которую музыкальное развитие будет иметь возможность проникнуть в широкие народные массы» [180, с. 93]. Кроме того, в его руках находилось практическое ведение дел Бесплатной музыкаль-

ной школы, директором которой он был назначен официально в 1908 г.

С 1910 г. до конца жизни С. М. Ляпунов был профессором Петербургской консерватории. Кроме того, в Институте истории искусств он читал курсы истории русской музыки, истории фортепианной музыки в России, русской песни.

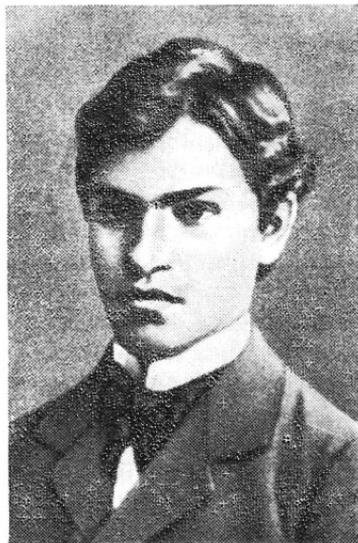
Огромную работу выполнил С. М. Ляпунов по разбору архива, подготовке и опубликованию материалов М. А. Балакирева, который назначил Ляпунова своим душеприказчиком и наследником, завещал ему свои авторские права, рукописи, музыкальные инструменты. С. М. Ляпунов закончил фортепианный концерт Балакирева и издал этот концерт; завершил оркестровую сюиту, ряд романсов и пьес, опубликовал переписку М. А. Балакирева с Римским-Корсаковым и Чайковским. В 1911 г. Ляпунов написал краткую биографию Балакирева. В последний период своей жизни С. М. Ляпунов начал подготовку большой монографии, посвященной жизни и творчеству своего учителя и друга, однако смерть (8 ноября 1924 г.) не дала ему завершить эту работу.

Среди важнейших и наиболее известных музыкальных произведений С. М. Ляпунова — две симфонии (1887 и 1917), концертная увертюра (1883), торжественная увертюра на русские темы (1898), рапсодия на украинские темы (1909), концерт для скрипки с оркестром (1915), фортепианные пьесы, прелюдии, этюды, вальсы, вариации, произведения для хора, романсы и песни, в том числе на слова А. С. Пушкина, Г. Гейне, М. Ю. Лермонтова, А. Н. Майкова, А. В. Кольцова, А. А. Голенищева-Кутузова. Признание получили симфоническая поэма «Железова Воля» для большого оркестра, посвященная памяти Ф. Шопена, фортепианный цикл «Двенадцать этюдов высшего исполнительского мастерства» и другие произведения.

Младший брат А. М. Ляпунова Борис Михайлович родился 25 июля 1862 г. в селе Болобоново. В 1885 г. он окончил Петербургский университет. Основной областью научной работы Б. М. Ляпунова была сравнительная грамматика славянских языков, история праславянского языка и отдельных славянских языков и языковых групп. Б. М. Ляпунов изучал формирование и взаимоотношение диалектов праславянского языка, генезис форм склонения, вопросы фонетики. Он вы-



**Сергей Михайлович
Ляпунов**



**Борис Михайлович
Ляпунов**

ступил против учения о членении праславянского языка на праязыки отдельных ветвей. Б. М. Ляпунов вел большую преподавательскую работу: был профессором Новороссийского (Одесского) университета (1903—1923 гг.) и Ленинградского университета (1924—1929 гг.). Работы Б. М. Ляпунова получили широкое признание в СССР и за рубежом. Он был избран действительным членом АН СССР, академиком Польской академии наук, членом-корреспондентом Болгарской и Чешской академий наук. Умер Б. М. Ляпунов 22 февраля 1943 г. в с. Боровое Акмолинской области.

Глава 2

Детство и юность

В 60-х годах прошлого столетия вся Россия зачитывалась описаниями родных городов и сел, замечательной среднерусской природы, принадлежащими перу выдающегося педагога-демократа К. Д. Ушинского. Вот что он писал на основе своих впечатлений от поездки

по Волге летом 1860 г. о старинном русском городе Ярославле.

«Наконец мы у Ярославля. Какой это хорошенький, чистенький городок, когда смотришь на него с Волги! Над широкой рекой возвышается крутой берег, словно высокий крепостной вал. Шесть лощин. По этим лощинам, выложенным камнем, очень удобно подыматься в город: через них по набережной перекинута красивые мостики. С Волги из-за деревьев бульвара, идущего по набережной, видна только передняя часть города с красивыми строениями, над которыми царят высокие колокольни пятидесяти двух церквей, по большей части очень старинных. На крутом мысу, который образуется при впадении реки Которосли в Волгу, белеет в зелени деревьев красивое здание Демидовского лицея. На левом, луговом берегу Волги видна еще значительная часть Ярославля; говорят, что во время разлива по улицам этой части можно плавать на лодках. . . Улицы Ярославля красивы, но ни на улицах, ни на хорошеньком бульваре почти не видать людей; посреди огромной пустынной площади, которую окружают лицей и присутственные места, стоят старинный собор и сильно попорченный памятник основателю лицея, Демидову. . . Ярославль — торговый и промышленный город, замечателен своими полотняными фабриками и обширной торговлей. . .» [221, с. 87].

Здесь, в Ярославле, 25 мая 1857 года в семье известного астронома, директора Демидовского лицея Михаила Васильевича Ляпунова родился сын — Александр Михайлович Ляпунов — будущий великий русский математик и механик.

Первоначальное воспитание маленький Александр Ляпунов и его братья Сергей и Борис получили под руководством матери — Софьи Александровны. Однако систематическим ученьем с семилетнего возраста двух старших сыновей занимался отец.

Михаил Васильевич, выйдя в отставку в 1863 г. поселился вначале в усадьбе своих родителей в Васильевском уезде Нижегородской губернии. Два года спустя семья переселилась в одноэтажный пятикомнатный дом, построенный Михаилом Васильевичем в усадьбе жены в селе Болобонове Курмышского уезда Симбирской губернии, в 3—4 верстах от усадьбы родителей.

Интересы Михаила Васильевича, ранее направленные преимущественно в область астрономии, сущест-

венно расширились в связи со службой в общеобразовательном учебном заведении, каковым являлся Демидовский лицей. О широте интересов М. В. Ляпунова свидетельствует чрезвычайно разнообразный перечень книг его библиотеки, о которой впоследствии неоднократно вспоминали сыновья, использовавшие эти книги каждый по своей специальности. Среди бумаг М. В. Ляпунова хранились выписки из сочинений по истории, философии, географии, его личные заметки о значении классического образования.

Родители стремились не только дать детям полезные знания и навыки, но и привить им вкус к разным сторонам духовной деятельности — музыке, искусству, литературе, философии, точным наукам. И не случайно все три сына Ляпуновых столь блестяще проявили себя на разных поприщах.

«Я помню, какое сильное впечатление производили на меня ежедневные занятия отца с братьями в его кабинете, и я с любопытством смотрел, как братья гусиными перьями выводили крупные буквы между линейками, — писал Борис Михайлович. — Для приучения к быстрому счету отец заставлял братьев писать цифры, прибавляя сначала по одному, на следующей странице по два, затем по три и т. д. Сам отец, по свидетельству матери и других, хорошо помнивших его, обладал удивительно быстрой способностью счета. Для развития интереса к географии отец поощрял игры, состоявшие в путешествиях по различным странам, а также черчение географических карт, за которыми дети просиживали долгие зимние вечера. Но мне не суждено было учиться у отца, так как мне исполнилось в день его кончины только 6 лет и 4 месяца, и удалось воспользоваться лишь библиотекой, отдельные части которой мы постепенно вывозили каждый по своей специальности» [73, с. 3].

Время сохранило для нас фотографию маленького Александра в возрасте около 7 лет. Одетый по-праздничному, но вместе с тем скромно, мальчик, пожалуй слишком серьезный для своего возраста, внимательно смотрит в объектив.

Александрю было 11 с половиной лет, когда умер его отец. Встал вопрос о дальнейшем образовании. К счастью, занятия удалось продолжить в семье Рафаила Михайловича Сеченова, женой которого была родная тетка Александра — Екатерина Васильевна Ля-



Дом Сеченовых в селе Теплый Стан
(ныне с. Сеченово)

пунова. В семье Сеченовых жили также брат Рафаила Андрей Михайлович и три сестры Екатерины Васильевны — Глафира, Марфа и Елизавета. У Рафаила Михайловича была единственная дочь Наташа.

Жили Сеченовы в селе Теплый Стан Курмышского уезда Симбирской губернии (ныне с. Сеченово). Село имело в ту пору около 200 дворов и тянулось примерно на полторы версты. Восточную половину села называли «сеченовской», а западную половину — «филатовской» — по фамилии дальних родственников Ляпуновых. Сюда часто приезжали родственники Сеченовых и Ляпуновых: Николай Александрович Крылов и его жена Софья Викторовна, двоюродная сестра Александра Михайловича. Нередко во время каникул сюда приезжал и их сын Алексей Николаевич Крылов — будущий знаменитый математик, механик и кораблестроитель. В семье Сеченовых царил атмосфера высокой культуры. Почетное место в доме занимала библиотека русских писателей, украшением которой были произведения классиков русской литературы, прогрессивных критиков.

О Ляпуновых, Рафаиле Михайловиче Сеченове, его братьях Андрее и Иване Михайловичах и о его до-

чери Наташе, о духе взаимной любви и дружбы, о глубоко уважении к людям науки очень живо рассказал в своих воспоминаниях академик А. Н. Крылов.

«Летом в Теплый Стан наезжал гостить к братьям профессор Иван Михайлович Сеченов, знаменитый физиолог. Иногда он читал собравшимся родным и знакомым лекции о лягушках, которых мне поручалось наловить в прудах филатовского сада, за что я тоже допускался на эти лекции, о чем в свою очередь, я читал лекции мальчишкам многочисленной сеченовской дворни, препарируя лягушек перочинным ножом по своему. < . . . »

Иван Михайлович приехал не один, а со своим другом, профессором хирургии Пелехиным. О приезде знаменитого хирурга скоро узнали в округе, и к Сеченовым повалили больные из ближних и дальних мест. Пелехин никому не отказывал в помощи; большая беседка в сеченовском саду была обращена в больницу, где лежали больные после тяжелых операций (извлечение камней), как я помню, так как эти камни затем с интересом рассматривались, и их доводилось видеть и мне. Особенно же прославился тогда в нашей местности Пелехин несколькими удачными операциями по снятию катаракты: „Слепых зрячими делает, вот это доктор, не толстопузому Кастену чета, который кроме касторки, других лекарств не знает“.

. . . Летом гостили у Сеченовых братья Александр, Сергей и Борис Михайлович Ляпуновы с их матерью Софьей Александровной и младшей сестрой. Это были дети покойного профессора астрономии Михаила Васильевича Ляпунова; замечательно, что все три брата стали впоследствии знамениты: Александр как математик, Сергей как музыкант-композитор, Борис как филолог-славист. . .

У Рафаила Михайловича была единственная дочь Наташа. . . У Наташи было три тетеньки, да гувернантка, а я считался разбойником, так как кинул в тетю Марфу чуркой, и Наташу от меня прятали и играть с ней не позволяли» [71].

Когда Александр Ляпунов оказался в семье Сеченовых, его двоюродная сестра и будущая жена Наталья Рафаиловна Сеченова готовилась под руководством Глафиры Васильевны Ляпуновой и учительниц по предметам гимназического курса и новым языкам. Вместе с нею продолжил свои занятия, начатые при

отце, и юный Александр. Не тогда ли в юных душах зародилась горячая взаимная привязанность, перешедшая с годами в чувство глубокой и светлой любви?

Небольшая уютная комната с простой мебелью. Комнатные цветы. На фотографическом снимке той поры запечатлен Александр Ляпунов, сидящий возле стола, подперев голову рукой. Быть может, он впервые задумался о мире и любви, о науке и жизни, о назначении человека на земле. . .

В 1870 г. Александр с матерью и братьями переезжает в Нижний Новгород, где проживали родственники Софьи Александровны. По-видимому, этот переезд был вызван необходимостью продолжения образования мальчиков в среднем учебном заведении. Для Софьи Александровны были несомненны незаурядные способности сыновей, и она стремилась обеспечить условия для возможности дальнейшей учебы Александра и Бориса в университете, Сергея — в консерватории.

В уже упоминавшемся очерке «Путешествие по Волге» К. Д. Ушинский дает живописную картину Нижнего Новгорода того времени: «Это было ранним утром. Какой-то прозрачный пар стоял над Волгой, и сквозь него заблестели главы множества старинных церквей и верхушки крепостных башен. Скоро показался и весь город, стоящий на довольно высокой и крутой горе, у подошвы которой сливаются две большие реки — Волга и Ока; последняя показалась мне здесь намного уже Волги. Целый лес мачт, дымящиеся трубы пароходов, множество пристаней, толпы народа, суетившегося на берегу — все это придавало чрезвычайно оживленный вид Нижнему. Странно только, что у Нижнего почти не существует искусственной набережной и что люди и лошади на пристани тонут в грязи. . .

Внизу под горой, на которой стоит кремль, расположен нижний город, показавшийся мне гораздо оживленнее верхнего. Устья Оки почти не видно за множеством судов. На другом, плоском берегу ее расположены ярмарочные здания, между которыми шевелилось множество народа, хотя знаменитая ярмарка еще не начиналась.

Но какой очаровательный вид открывается вдаль, вниз и вверх по Волге и на ее луговую сторону, которой, кажется, и конца нет! Какое обилие воды, какие синие волны, какой прозрачный воздух и как его много! . .



Александр Ляпунов (1870)

В первый раз в моей жизни я видел такую даль, такое обилие воды и зеленых лугов, и потому не удивительно, что, усевшись между крепостными зубцами, я не мог оторвать взора от очаровательной картины» [221, с. 93—95].

Эти наблюдения К. Д. Ушинского дополняют сведения жителей Нижнего Новгорода, согласно которым несмотря на непрерывно растущее экономическое значение города он благоустривался очень медленно. Многие улицы и переулки утопали в грязи, мощеными были лишь улицы, радиусами сходящиеся к кремлю, к Благовещенской площади, на которой возвышалось здание губернской мужской гимназии.

В Нижнем было по тому времени много учебных заведений. Ведь этот город был центром одной из наиболее промышленно развитых губерний России. Кроме упомянутой гимназии здесь был дворянский институт, в котором обучение велось на правах гимназии, женское

училище, институт благородных девиц, духовная семинария и четыре начальных училища. А в 1866 г. сюда был переведен Аракчеевский кадетский корпус, преобразованный затем в военную гимназию.

Нижний Новгород был оживленным и бойким лишь в период навигации; в остальное время это был тихий и малолюдный город. Как вспоминал бывший преподаватель дворянского института А. Н. Овсянников, город осенью и зимой «погружался в мертвый сон». По вечерам купцы и чиновники разбредались по клубам для карточной игры и кутежей.

Таким увидели Нижний Новгород переехавшие сюда Ляпуновы. В том же 1870 г. юный Александр поступил в третий класс Нижегородской гимназии.

Это был период, когда правящие круги царской России предприняли решительные меры, чтобы воспрепятствовать проникновению материалистического учения в школу, отвлечь молодежь от прогрессивных воззрений, от идеалов демократии и свободы. В гимназиях вводилась система классического образования с двумя древними языками — латинским и греческим, а преподавание естественных наук практически отменялось.

Летом 1866 г. министром народного просвещения был назначен обер-прокурор синода граф Дмитрий Толстой. Как говорил К. Д. Ушинский, Толстой «давит народное образование тяжестью двух министерств». Новоиспеченный министр начал с того, что одну за другой закрыл ряд реальных гимназий, в которых относительно много внимания уделялось естественнонаучным дисциплинам.

В 1865 г. среди нижегородских учителей и чиновников разгорелась дискуссия по важному вопросу: какой гимназии быть в городе — классической или реальной? Сторонники реальной гимназии основывались на учете местных условий — наличии фабрик, промыслов, ярмарки. Они указывали, что по развитию промышленности и торговли ни одна из губерний, входящих в Казанский учебный округ, не может сравниться с Нижегородской губернией. Основным доводом сторонников классической гимназии было то, что реальная гимназия не даст права выпускникам на поступление в университет. Фактически же дискуссия шла между приверженцами старой системы образования и сторонниками естественнонаучного образования. Однако ре-

шающим стало указание попечителя Казанского округа: вопрос был решен в пользу классической гимназии.

В гимназическом преподавании началась серьезная ломка. Математике и естественным наукам отводилось теперь намного меньше времени, ведение уроков во всем этим дисциплинам возлагалось на учителей математики. Историю и географию стал преподавать один учитель. Зато латинский язык вводился с первого класса. По предписанию попечителя учебного округа из библиотеки гимназии были изъяты сочинения В. Г. Белинского, Н. А. Добролюбова, Ч. Дарвина, И. М. Сеченова, работы В. Вундта и Я. Молешотта.

В этот сложный период (1863—1869 гг.), непосредственно предшествовавший поступлению А. М. Ляпунова в гимназию, здесь вел активную педагогическую и общественно-просветительскую работу замечательный просветитель-демократ, талантливый педагог Илья Николаевич Ульянов, который много занимался вопросами методики преподавания, разработкой учебных программ, оснащением учебных кабинетов.

В противовес реакционно настроенным преподавателям и чиновникам, стремившимся низвести преподаваемую в гимназии математику на описательно-ознакомительный уровень, учитель физики и математики И. Н. Ульянов настаивал на том, чтобы математику преподавать систематически и непременно учить доказывать математические теоремы. И. Н. Ульянов возглавил группу учителей, выдвинувших предложение о расширении программы по математике, введении в учебный курс сведений по сферической геометрии и даже элементов высшей математики, в частности, начал аналитической геометрии.

В архивах сохранилось три варианта учебных программ, разработанных Ильей Николаевичем. Среди них — программы по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии, физике и космографии для всех классов гимназии. Сохранились также документы, свидетельствующие о заботах И. Н. Ульянова, связанных с приобретением литературы по физике и математике, покупкой и ремонтом приборов и инструментов для физического кабинета.

Математику и физику И. Н. Ульянов читал так, что многие из его учеников посвятили этим наукам свою

жизнь. «Обаяние личности Ильи Николаевича оказывало на нас благотворное влияние: некоторые из нас полюбили математику настолько, что впоследствии в университете избрали ее своей специальностью, в том числе и я», — писал в своих воспоминаниях профессор М. А. Карякин [137, с. 65].

Примечательная деталь: на странице классного журнала, заполненной рукой И. Н. Ульянова, второй в списке стоит фамилия А. П. Грузинцева — впоследствии учителя А. М. Ляпунова в старших классах гимназии. Такой была связь этих поколений: факел знаний, принятый из рук своего учителя — И. Н. Ульянова А. П. Грузинцев позднее передал своему ученику — Александру Ляпунову.

К сожалению, к концу пребывания И. Н. Ульянова в Нижнем Новгороде от многих его прогрессивных начинаний пришлось отказаться: обер-прокурорское «давление» было очень ощутимо в гимназии. И все же именно благодаря И. Н. Ульянову и некоторым другим прогрессивным педагогам к моменту поступления в гимназию А. М. Ляпунова там все еще преподавали элементарное естествознание, уделяли определенное внимание математике. А фундаментальная библиотека гимназии считалась одной из лучших во всем Казанском учебном округе (более 1900 книг). Многие нижегородцы — люди разных сословий и разного достатка жертвовали средства на оснащение гимназии, пополнение ее библиотеки.

Внешний вид гимназии вполне соответствовал мрачному периоду усиления реакционных тенденций в деле народного образования. О том, как выглядела гимназия, рассказал писатель-нижегородец П. Д. Боборыкин в автобиографическом романе «В путь-дорогу».

«Гимназия — большое двухэтажное здание, с флюгером на крыше — обставляла площадь справа и, вместе с почтовой конторой, стояла у въезда в улицу к острогу.

Она была выкрашена дикой, сумрачной краской, и флюгер ее очень внушительно торчал в небесном пространстве, он придавал зданию педантский вид, говоря проходящим и проезжающим о своем ученом звании. От палки ко всем четырем сторонам шли железные прутья, на концах которых приделаны буквы Ю. В. С. З. Один из учителей математики, отъявленный остряк, переводил эти буквы на понятный язык: а это

значит, говорил он, юношей велено сечь
з е л о . . .

Ученический подъезд очень загрязнился; ступеньки крыльца провалились, дверь полиняла, а замка давным-давно не было. Ветхий сторож . . . заведовал крыльцом и никогда не мел его. Жены сторожей, учительские кухарки, девчонки и мальчишки всякого рода то и дело показывались в дверях; а по вечерам, в хорошие ясные дни, все крыльцо облеплялось жителями кухонь и сторожевых, и шла долгая беседа; все учительские, инспекторские и директорские тайны выплывали на свет божий, и часто разговоры разрешались песнями . . .

С крыльца налево шел темный сторожевый коридор . . . Нижний коридор имел немалое значение в школьной жизни — это было вместилище всего тайного и противозаконного . . .

Длинный ученический коридор с чугунным полом смотрел сумрачно. Звонко раздавались по нему шаги входящих гимназистов. Сторож посматривал в стеклянную дверь 7-го класса на большие часы» [146].

Об учебе А. М. Ляпунова в гимназии сведений сохранилось немного. Известно, что математику и физику преподавал ему Алексей Петрович Грузинцев — талантливый педагог и ученый, о котором упоминалось выше. Позднее А. П. Грузинцев стал магистром, приват-доцентом¹ и исполняющим дела экстраординарного профессора² по кафедре физики Харьковского университета. Его перу принадлежит труд «Электромагнитная теория света» и ряд других работ по математической физике. Впоследствии он стал коллегой А. М. Ляпунова по Харьковскому университету. Другим учителем, преподававшим Ляпунову математику, был Дмитрий Константинович Гик, высоко оценивший математическое дарование юного Ляпунова. Большое влияние на постановку дела обучения воспитанников гимназии оказывали учитель физики и математики Иван

¹ Ученое звание внештатного преподавателя в университетах и некоторых других высших учебных заведениях дореволюционной России. Введено университетским уставом 1863 г. для расширения круга преподавателей, имеющих право ведения лекционных курсов наряду с профессорами и доцентами. По университетскому уставу 1884 г. званием приват-доцента было заменено упраздненное звание доцента.

² Должность, которую занимал сверхштатный профессор.

Станиславович Родзевич и инспектор, а позднее — директор гимназии Николай Николаевич Овсянников. А. М. Ляпунов сохранил на всю жизнь чувство благодарности и глубокого уважения к этим своим учителям.

По свидетельству Б. М. Ляпунова Александр Михайлович в гимназии «успешно занимался по всем предметам и читал много книг по русской и европейской литературе, истории и естествознанию, причем в старших классах гимназии он все более отдавался изучению точных наук, да и из области исторических сочинений наиболее ценил те, которые, в противовес буржуазному национализму, выдвигали борьбу за существование и экономический материализм, как главные факторы прогресса и развития человечества. . . Конечно, с годами его взгляды менялись, и он сумел критически отнестись и к крайним экономистам и материалистам, но во время прохождения гимназического курса, пресытившись неумело навязываемым идеализмом, он заметно увлекался в сторону материализма» [73, с. 5].

Вполне вероятно, что выработке подобного мировоззрения во многом способствовало общение с И. М. Сеченовым, а позднее — влияние лекций Д. И. Менделеева и других корифеев отечественной науки, стоявших на материалистических позициях.

Юный А. М. Ляпунов во время учебы в гимназии зачитывался, по свидетельству брата, «Историей человеческой культуры» Г. Ф. Кольба, «Историей цивилизации в Англии» Г. Т. Бокля, «Историей умственного развития Европы» Д. В. Дрейпера, изучал «Землю» Элизе Реклю, а также работы Ф. К. Шлоссера, А. Гумбольдта, К. Риттера.

Осенью 1876 г. А. М. Ляпунов окончил гимназию с золотой медалью.

Разносторонняя подготовка в домашних условиях, годы напряженной учебы в гимназии дали свои плоды: девятнадцатилетний Александр Ляпунов был хорошо подготовлен к учебе в университете, владел несколькими языками. Кроме традиционно изучавшихся в гимназии латинского и древнегреческого, А. М. Ляпунов знал и современные языки: он свободно владел французским (на этом языке написаны многие его научные работы); переписка Александра Михайловича свидетельствует о том, что он знал также английский и немецкий языки. Он был знаком с важнейшими работами в области истории, философии, географии и других

наук. Однако свою дорогу, замечательную дорогу математической науки, которая привела выпускника нижегородской гимназии к мировой славе, Александру Ляпунову еще предстояло избрать. . .

Глава 3

Учеба в университете. Первые шаги в науке

I

Окончив гимназию, А. М. Ляпунов осенью 1876 г. поступил на отделение естественных наук физико-математического факультета Петербургского университета. Чувствуя, однако, особую склонность к математическим наукам, он уже через месяц перешел на математическое отделение.

Петербургский университет в ту пору переживал определенный подъем, последовавший после периода реакции. Совет университета принимал самостоятельные смелые решения, выступая иногда против правительственных постановлений. Крупнейшие ученые страны вели здесь преподавательскую и научную работу. В Петербургском университете в период обучения в нем А. М. Ляпунова или незадолго перед этим работали гениальные П. Л. Чебышев, Д. И. Менделеев и И. М. Сеченов, знаменитые профессора, математики и механики А. Н. Коркин, О. И. Сомов, Д. К. Бобылев, К. А. Поссе, Е. И. Золотарев, астроном А. Н. Савич, физик Ф. Ф. Петрушевский, химики А. М. Бутлеров и Н. А. Меншуткин, зоолог К. Ф. Кесслер, ботаники А. Н. Бекетов и А. С. Фаминцын, физиолог Ф. В. Овсянников.

Яркую характеристику Петербургского университета второй половины 70-х годов прошлого века дал И. М. Сеченов в «Автобиографических записках». «К Петербургскому университету того времени и к его физико-математическому факультету в особенности я преисполнен по сие время глубокого уважения. Не говоря о том, что сидеть рядом с такими людьми, как Чебышев, Менделеев и Бутлеров, было для меня большой честью, — университетская коллегия того времени представляла поразительный пример дружеского единодушия по всем насущным вопросам универ-



А. М. Ляпунов
в студенческие годы

ситетской жизни. Посещая аккуратно заседания факультета и Совета, я за все одиннадцать лет не был свидетелем ни там, ни здесь ни единого враждебного столкновения, ни единого грубого слова» [210].

С первых дней учебы в университете А. М. Ляпунов усердно занимался химией и увлеченно слушал лекции Д. И. Менделеева. И даже после перехода на математическое отделение он продолжал изучение химии. Интерес к астрономии, физике и химии сохранился у А. М. Ляпунова на всю жизнь, и можно предположить,

что это в значительной степени влияло на характер математических работ ученого, связанных с вполне конкретными задачами практики. Нужно сказать, что черта эта была типичной для работ всех математиков и механиков, испытавших влияние П. Л. Чебышева.

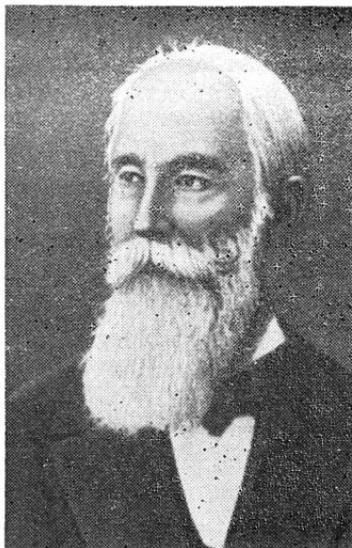
Лекции и консультации Чебышева во многом определили характер всей последующей научной и преподавательской деятельности А. М. Ляпунова. О том, с каким восхищением он слушал Чебышева, Александр Михайлович рассказал в краткой автобиографии. Впоследствии памяти своего великого учителя А. М. Ляпунов посвятил очерк, в котором была дана, вероятно, наиболее полная и меткая характеристика П. Л. Чебышева как ученого и преподавателя. Касаясь профессорской деятельности П. Л. Чебышева в Петербургском университете, А. М. Ляпунов писал: «Гениальный ученый и изобретатель, П. Л. Чебышев был в то же время образцовым профессором. Его профессорская деятельность началась с 1847 года и затем продолжалась непрерывно до 1882 года, когда П. Л. Чебышев оставил университет и исключительно предан своим ученым изысканиям, не прекращавшимся до последних дней его жизни. В различные периоды своей профес-

сорской деятельности П. Л. Чебышев читал различные курсы. В то время, как я был студентом, в конце 70-х годов он читал теорию чисел, теорию определенных интегралов и исчисление конечных разностей студентам III курса и теорию вероятностей студентам IV курса.

Курсы его не были обширными, и при изложении их он заботился не столько о количестве сообщаемого материала, сколько о выяснении принципиальных сторон трактуемых вопросов. Отличаясь живым и увлекательным изложением, лекции его сопровождалась

множеством интересных замечаний относительно значения и важности тех или иных вопросов или научных методов. Замечания эти высказывались иногда мимоходом по поводу какого-нибудь конкретного случая, но всегда глубоко западали в умах его слушателей. Вследствии этого лекции его имели высокое развивающее значение, и слушатели его после каждой лекции выносили нечто существенно новое в смысле большей широты взглядов и новизны точек зрения.

П. Л. Чебышев почти не пропускал лекций. По крайней мере за два года, в течение которых я был его слушателем, я не помню, чтобы хотя один раз его лекция не состоялась. В аудитории он появлялся всегда точно в назначенное время и тотчас же, не теряя ни секунды, приступал к продолжению выводов, начатых в предшествующую лекцию. Вычисления он производил чрезвычайно быстро, вследствие чего, несмотря на то, что был прекрасным калькулятором, часто делал ошибки в выкладках, и за ходом вычислений нужно было следить очень внимательно, чтобы вовремя предупредить его о сделанной ошибке, о чем он всегда просил своих слушателей. Когда наконец получался желаемый вывод, П. Л. Чебышев садился, но не на кафедру, а на



Пафнутий Львович
Чебышев

кресло, ставившееся для него всегда у первой парты, и вот тут-то и начинались те разнообразные замечания, которые придавали особенный интерес его лекциям и которых с нетерпением ждала вся аудитория. Весьма часто по поводу только что решенного вопроса П. Л. Чебышев высказывал свои мнения о тех или других работах, относящихся к тому же вопросу. Иногда он вспоминал при этом некоторые эпизоды из своих заграничных поездок и рассказывал о беседах по поводу того же вопроса с кем-либо из иностранных ученых. После более или менее продолжительной беседы этого рода, служившей для него отдыхом, П. Л. Чебышев, быстрый как в речи, так и во всех своих действиях, быстро вставал, брался за мел и приступал к дальнейшим выводам. К характеристике внешней стороны его лекций должно прибавить, что он никогда не оставался в аудитории по окончании времени, назначенного для лекции, и бросал мел в тот же момент, когда раздавался звонок, на каком бы месте при этом ни пришлось оборвать начатые вычисления.

Продолжительная профессорская деятельность П. Л. Чебышева, в течение 35 лет принадлежавшая С.-Петербургскому университету, не могла не отразиться самым благотворным образом на всем составе математического факультета, кафедры которого замещались наиболее талантливыми из его учеников. Отсюда понятно то высокое положение, которого давно уже достиг этот факультет. . .» [178, с. 8—9].

Ученик П. Л. Чебышева Егор Иванович Золотарев подчеркнул другую характерную черту Чебышева. «В математике найти и верно поставить вопрос несравненно труднее, чем его решить, — сказал однажды Золотарев. — Как скоро вопрос поставлен и поставлен верно — решение так или иначе отыщется. Пафнутий Львович отличается изумительной способностью и умением ставить новые вопросы в математике. Это умение ученого-математика служит несомненным признаком его гениальности» [197, с. 25].

Как писал Б. М. Ляпунов, Александр Михайлович очень часто впоследствии вспоминал профессора А. Н. Коркина, «большого оригинала, уроженца одной из северных губерний, сохранившего резко окающий говор своей родины и отличавшегося самым стилем своих лекций, но вместе с тем очень строгого и точного

математика, мнением которого очень дорожил А. М.» [73, с. 9].

Александр Николаевич Коркин был одним из лучших учеников П. Л. Чебышева, виднейшим представителем петербургской математической школы. К числу его учеников относятся такие выдающиеся ученые, как А. М. Ляпунов, А. А. Марков, А. Н. Крылов. Говоря о преподавательской деятельности А. Н. Коркина нельзя не упомянуть его превосходные литографированные курсы и программы лекций по дифференциальному и интегральному исчислению, аналитической геометрии, высшей алгебре. «В течение последних двадцати лет почти все главнейшие предметы на математическом отделении проходили через его руки, — писал Ю. В. Сохоцкий. — Замечательный такт и строгость в изложении придавали лекциям А. Н. особый интерес и ту жизнь, которыми отличаются лекции только лучших профессоров. Он обладает особым умением справляться с вопросами, мало доступными для орального изложения, и никогда не избегает трудностей; напротив, он более всего обращает на них внимание и самый трудный вопрос успеваеет сделать вполне доступным для своих слушателей. Такое отношение к преподаванию много способствует к пробуждению научного интереса в учащейся молодежи, немало повлияло на подъем математических познаний в нашем университете. Большая часть молодых выдающихся математиков в России принадлежит к числу бывших учеников А. Н. и в настоящее время к ним принадлежат почти все преподаватели нашего математического отделения» [196, с. 42].

Высокую оценку педагогическому мастерству А. Н. Коркина дали известный профессор почетный академик К. А. Поссе и академик А. Н. Крылов. «В изложении читаемых им предметов, особенно по интегрированию уравнений, которые он читал с лишком 30 лет, Коркин влагал значительную долю творчества, — писал К. А. Поссе. — Всякий, кто знаком с лекциями Коркина по интегрированию уравнений, знает, что ни в каком из печатных курсов по этому предмету, не только на русском, но и на иностранных языках нельзя найти такого изложения, которого держался Коркин» [202]. «Ученики Коркина, сами становясь профессорами, придерживались методов изложения своего учителя, разносили их по всей России и создавали та-



**Егор Иванович
Золотарев**

ким образом ту школу многих русских математиков, которая работает и поныне по традициям Коркина», — отмечал А. Н. Крылов [171].

Как профессор университета А. Н. Коркин неизменно присутствовал и активно участвовал в приеме экзаменов, в работе заседаний Совета университета и факультетского собрания, на защитах диссертаций. В качестве оппонента он рассмотрел и подготовил отзывы о трудах П. Л. Чебышева, Ю. В. Сохоцкого, Д. А. Граве, К. А. Поссе, Е. И. Золотарева, С. Е. Савича,

М. А. Тихомандрицкого и многих других, о сочинениях студентов, о многих диссертациях [196].

По свидетельству Б. М. Ляпунова Александр Михайлович, кроме П. Л. Чебышева, Д. И. Менделеева и А. Н. Коркина, часто с восхищением отзывался о рано погибшем молодом и талантливом профессоре Е. И. Золотареве, который начал работать по предложению П. Л. Чебышева над той же проблемой гидростатики, которой впоследствии заинтересовался и полностью решил А. М. Ляпунов.

Егор Иванович Золотарев был замечательным представителем петербургской математической школы, талантливым учеником П. Л. Чебышева и А. Н. Коркина. Среди наиболее известных работ Е. И. Золотарева — исследования по теории делимости целых алгебраических чисел, развитие исследований П. Л. Чебышева по теории наилучшего приближения функций многочленами, а также полученные совместно с А. Н. Коркиным результаты в области исследования минимумов положительных квадратичных форм. О выдающемся вкладе, который внес в математику Е. И. Золотарев за свою короткую жизнь, говорят отзывы Ш. Эрмита, В. Я. Бунаковского, других виднейших математиков. Из вос-

поминаний современников перед нами встает светлый образ молодого и энергичного исследователя, вдумчивого и внимательного наставника студенческой молодежи. «Это был гениальный математик, труды которого останутся в науке, и в то же время обаятельный молодой человек», — писал Шарль Эрмит в письме к А. Н. Коркину. Через много лет после преждевременной смерти Е. И. Золотарева Ш. Эрмит писал А. А. Маркову, что талант Золотарева поставил его бы, будь он жив, в ряд величайших математиков, что талант Золотарева внушал одновременно и восхищение и симпатию (См. [197]).



Александр Николаевич
Коркин

Е. И. Золотарев много внимания уделял работе со студенческой молодежью, часто предлагал студентам темы научных работ по математике. Им были написаны многие отзывы о студенческих научных работах. Проявляя живой интерес к научной деятельности студентов, Е. И. Золотарев много помогал им консультациями, советами, снабжал их книгами из своей библиотеки, в случае нужды — помогал найти работу. С особенной благодарностью вспоминал Е. И. Золотарева И. Л. Пташицкий, которому Золотарев не только оказал большую поддержку на первом этапе научной деятельности, но и помог получить учрежденную в память I съезда русских естествоиспытателей премию, которой И. Л. Пташицкий был удостоен за сочинение «Об интегрировании алгебраических дифференциалов в конечном виде». Учениками Е. И. Золотарева были такие видные ученые и известные профессора, как А. А. Марков, А. В. Васильев, И. Л. Пташицкий, братья Е. В. и А. В. Борисовы, Н. Ф. Ливанов, Д. Ф. Селиванов. «Многим из нас, молодых людей, он был неопределимо дорог», — писал о своем учителе Н. Ф. Ливанов [Там же, с. 42].

Блестящая научная и преподавательская деятельность Е. И. Золотарева, который в возрасте 29 лет был избран экстраординарным профессором, а в 30 лет — экстраординарным академиком¹, его преждевременная трагическая смерть (направляясь к родным на дачу, Золотарев попал под поезд и через несколько дней скончался в Александровской больнице от заражения крови) не могли не оставить глубокого следа в душе молодого А. М. Ляпунова. Не случайно он часто вспоминал молодого профессора спустя многие и многие годы. . .

Большое влияние на студентов университета оказывали лекции Ф. Ф. Петрушевского, читавшего курс физики. Важное значение Ф. Ф. Петрушевский придавал роли математики в физике, химии и других науках и всегда подчеркивал это в своих лекциях. В предисловии к своему «Курсу наблюдательной физики» он писал: «Опыт ведет к открытию законов, но для достижения заключения большей частью требуются вычисления, иногда весьма сложные; для соединения явлений разнородных нужна еще более деятельная помощь математики. Таким образом, если физика начинается наблюдением, то продолжается при помощи математики. . . Научиться владеть математической логикой — значит приобрести могущественное орудие для разработки физики». Вместе с тем Ф. Ф. Петрушевский обращал внимание и на то, как важен эксперимент и практическая сторона дела для постановки математических задач: «Если математика освещает путь наблюдательной физике, то и эта последняя также руководит математическим анализом; и та и другая играют роль то самостоятельную, то подчиненную» [201].

Как уже говорилось, с первых недель своей учебы в Петербургском университете молодой А. М. Ляпунов отдавал много времени занятиям химией и увлекался лекциями Д. И. Менделеева. «Как педагог я клал в дело и возбуждение, и душу, а о том, что не бесследно, свидетельствовало множество свободных, независимых и зрелых людей, — писал Д. И. Менделеев незадолго до смерти. — Ко мне в аудиторию ломились не ради красных слов, а ради мыслей» [186].

Один из слушателей, обучавшийся в университете как раз в период пребывания там А. М. Ляпунова, дал

¹ Академическое звание того времени, промежуточное между членом-корреспондентом и ординарным академиком.

короткую, но живую и яркую «зарисовку» лекции Д. И. Менделеева.

«Я был студентом в 1880 г. и вместе со всеми студентами ломился в аудиторию Дмитрия Ивановича. Кто не помнит его лекции! Да и возможно ли их забыть. . . Вот, подумав, сосредоточась, начинает говорить Дмитрий Иванович без определенной программы, но вдохновенно. Громадный баритон, прекрасная от природы дикция, выразительная, своеобразная красивая жестикуляция, в высшей степени оригинальная речь, то замедленная, то ускоренная — послушная стройному полету его мысли — все это поражало слушателя, и аудитория Менделеева была всегда переполнена.

Раз пришел Дмитрий Иванович расстроенный, бледный, долго ходил он молча, потом начал говорить — о Достоевском, который только что скончался. Под впечатлением этой смерти он не мог удержаться, чтобы не высказать своих чувств. Говорил он так, сделал такую характеристику, что по словам студентов, не было ни до, ни после глубже, сильнее и проникновенней. Пораженные студенты молчали, тихо-тихо разошлись и навсегда сохранили память об этой лекции, на которой гений говорил о гении» [186].

Красочное описание лекции Менделеева дал известный химик В. А. Яковлев: «Когда этот титан в сумрачной аудитории с окнами, затененными липами университетского сада, освещаемый красноватым пламенем какой-нибудь стронциевой соли, говорит нам о мостах знания, прокладываемых через бездну неизвестного, о спектральном анализе, разлагающем свет, доносящийся с далеких миров, быть может уже потухших за те сотни лет, что этот луч несется к Земле, — нервный холодок пробегает по вашей спине от сознания мощи человеческого разума. Вы содрогаетесь от прикосновения к вечным тайнам, к бесконечности. . .». Другой слушатель великого химика — В. Чешихин писал: «Впечатление, какое на меня всегда производили его лекции, я могу сравнить только с впечатлением от последних сочинений Льва Толстого: та же безграничная убежденность в том, что говорит каждый, и то же глубокое пренебрежение к внешней красоте фразы» (Цит. по [213]).

Известно, что лекции эти не были просто лекциями по общей химии. Читая их Д. И. Менделеев делал частые

отступления в другие области знания, особенно в физику, астрономию, геологию, биологию, приводил многочисленные примеры из истории науки, подчеркивал связь химии и других наук с нуждами практики.

Д. И. Менделеев по своим философским взглядам был представителем естественно-исторического материализма, распространенного среди естествоиспытателей прошлого века. Являясь убежденным сторонником стихийной диалектики, гениальный ученый всегда основывался на своих философских воззрениях и в преподавании, и в научных исследованиях. Именно поэтому современники считали, что Д. И. Менделеев умеет быть философом в химии, в физике и в других отраслях естествознания, и одновременно естествоиспытателем — в проблемах философии, политической экономии и социологии. Известна непримиримая борьба с идеализмом, которую вел Д. И. Менделеев в течение всей своей жизни, его выступления с разоблачением антинаучной сущности спиритизма и мистицизма [164].

Философские воззрения гениального ученого и замечательного преподавателя, увлеченно читавшего свой предмет, не могли не оставить глубокий след в широко открытых для науки, добра и справедливости душах молодого А. М. Ляпунова и его однокурсников.

Что представляла собой программа математической подготовки студентов Петербургского университета того времени? В нее входили лекции А. Н. Коркина по высшей алгебре, включавшие доказательство существования корня алгебраического уравнения, методы отделения корней и их приближенное вычисление, теорию симметрических функций корней алгебраического уравнения, двучленные уравнения, непрерывные дроби, теорию деления круга, Абелевы уравнения и их решение, решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Курс интегрального исчисления включал лекции, посвященные определенным и неопределенным интегралам, теоремам интегрального исчисления, интегралам от рациональных, иррациональных и трансцендентных функций. Серьезное внимание уделялось методам приближенного интегрирования. Подробно обсуждалось вычисление ряда интегралов, причем в качестве одного из методов такого вычисления изучалось дифференцирование интегралов по параметрам. Далее рассматривались выводы остаточных членов в формулах Тэйлора и Маклорена, ряд

Лагранжа с дополнительным членом по П. Л. Чебышеву и геометрические приложения интегрального исчисления, включая понятия двойного и тройного интеграла.

П. Л. Чебышев читал лекции по теории чисел и по интегральному исчислению. Особенно глубокое впечатление на слушателей производили те лекции П. Л. Чебышева, в которых он излагал результаты собственных исследований.

Е. И. Золотарев, читавший курс теории круговых и эллиптических функций студентам II курса и лекции по интегральному исчислению для студентов II и III курсов, с 1875/1876 учебного года впервые в университете начал вести на II курсе упражнения по интегральному исчислению. Золотарев читал также необязательный курс теории эллиптических функций для студентов III и IV курсов математического раздела. Вернувшись из-за границы, Е. И. Золотарев кроме этих курсов приступил к чтению «Дополнений к курсу интегрального исчисления», а в 1877/1878 учебном году он прочел новый курс «Введение в анализ». В том же учебном году этот курс был издан в литографированном виде.

С третьего курса началось чтение лекций по аналитической механике профессором Д. К. Бобылевым, который читал этот курс после смерти Е. И. Золотарева. Лекции Д. К. Бобылева сохранились в литографированном виде.

Известно, что А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев кроме обычных лекций отводили особое время для самостоятельного решения студентами разнообразных задач как в аудитории, так и на дому.

Первоначально молодой А. М. Ляпунов держался в университете несколько особняком от своих однокурсников. Возможно, это было связано как с природной скромностью и застенчивостью А. М. Ляпунова, так и с обилием новых ярких впечатлений от шумной столицы и Петербургского университета, игравшего ведущую роль в научной жизни страны. «На младших семестрах А. М. держался довольно далеко от своих товарищей, — писал сокурсник Александра Михайловича Г. К. Суслов. — Сближение между ним и мною началось лишь с третьего курса, когда начал читать механику проф. Д. К. Бобылев. Надо признаться, что мы были совсем не подготовлены к слушанию такого

курса. При отсутствии учебника, очень многое приходилось выяснять на общих совещаниях, в которых принимал деятельное участие и А. М. Чем глубже изучали мы лекции проф. Бобылева, тем более ценили их и тем сильнее любили читанную им возвышенную дисциплину. Неудивительно поэтому, что когда проф. Бобылев предложил тему на медальные сочинения: «Равновесие плавающих тел», то трое: Ляпунов, я и Адриянов взяли за эту тему. Ляпунов и я получили золотые медали, Адриянов — серебряную» [82, с. 17—19].

Еще до окончания университетского курса в возрасте около 22 лет А. М. Ляпунов потерял мать. Смерть любимой матери, которая посвятила свою жизнь воспитанию детей, не могла не вызвать глубокого потрясения в чуткой душе молодого Ляпунова. На его плечи легла забота о поддержке младшего брата Бориса, еще не успевшего получить среднее образование. Однако несмотря на это А. М. Ляпунов продолжал упорные занятия. Замечательные природные способности и упорный труд позволили Ляпунову получить превосходную подготовку для будущей научной работы.

II

Большое внимание оказывал А. М. Ляпунову в это первое время его самостоятельной научной работы профессор Д. К. Бобылев, по представлению которого Ляпунов был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию по кафедре механики. Много лет спустя, в марте 1917 г. академик А. М. Ляпунов произнес на заседании Отделения физико-математических наук Академии проникновенные слова, посвященные памяти своего учителя Д. К. Бобылева: «Почти 40 лет я знал покойного, который был моим учителем и руководителем моих занятий в первые годы по окончании университетского курса. Вспоминая эти годы, в которые я особенно близко узнал Дмитрия Константиновича, не могу не выразить ему глубочайшей благодарности за ту готовность, с которой он, всегда очень занятый, уделял мне свое время, просматривая приносимые ему мной мои первые юношеские произведения, иногда довольно наивного характера, или разъяснял казавшиеся мне темными места изучаемых мною авторов. Уверен, что и другие ученики Дмитрия Константиновича, так же, как я, близко знавшие его, от-

несутся с такой же благодарностью к памяти этой светлой личности. Высокие нравственные качества покойного привлекали к нему и симпатии его коллег профессоров, между которыми особенно высоко ценил его покойный профессор И. М. Сеченов. Уже по переезде в Москву, он при встречах со мной всегда вспоминал Дмитрия Константиновича, прибавляя при этом свое характерное выражение „Это человек не от мира сего“. . . Выдающийся ученый, все свое время отдававший науке и делу преподавания, Д. К. Бобылев был человеком в высшей степени скромным и очень строго относившимся к своим работам, которые он публиковал лишь после тщательной их обработки. Вследствие этого число чисто научных работ его невелико, но все они отличаются очень большою обстоятельностью и законченностью. . . Они пользуются почетной известностью не только в нашем отечестве, но и за границей, где некоторые из них появились в переводах на иностранные языки» [173, с. 305].

В период завершения учебы в университете, во время подготовки к магистерским экзаменам и выполнения исследований по магистерской диссертации (1881—1885 гг.) А. М. Ляпунов жил вместе с младшим братом Борисом, занимая комнату в квартире А. М. Михайловской — сестры Ивана Михайловича Сеченова. Борис Михайлович тоже обучался в Петербургском университете, где под руководством академиков Ватрослава Ягича и Ф. Ф. Фортунатова изучал славянские языки и филологию.

Уже в это время, упорно занимаясь подготовкой к магистерским экзаменам, Александр Михайлович привык и полюбил работать в тихое ночное время, когда ничто не отвлекает от напряженных сосредоточенных раздумий. Зато в свободные вечера и воскресные дни у Михайловской бывали друзья и родственники. Любил бывать здесь в кругу собиравшейся у его сестры учащейся молодежи И. М. Сеченов, работы которого уже получили к тому времени широкую известность. Иван Михайлович считал, что каждый физиолог должен обладать серьезными познаниями в области математики и испытывал чувство симпатии к А. М. Ляпунову. Именно в это время Александр начал давать уроки немалому уже ученому. Теплые дружеские отношения возникли в эти годы у А. М. Ляпунова и с его юным двоюродным племянником Алексеем Крыловым — буду-

щим знаменитым математиком, механиком и кораблестроителем. А. Н. Крылов был в то время слушателем Петербургского морского училища и поставил своей целью в свободное время изучить математику в полном объеме университетского курса. Помощь ему в этом оказывал А. М. Ляпунов. Так, Ляпунов рекомендовал А. Н. Крылову свои конспекты по курсу теории вероятностей, прослушанному в 1879—1880 г. у П. Л. Чебышева. По записям А. М. Ляпунова эти лекции были впоследствии А. Н. Крыловым обработаны и изданы [216].

Стипендия была определена А. М. Ляпунову с ноября 1880 г. по 1 ноября 1882 г. в размере шестисот рублей в год. По истечении этого срока выплата стипендии была прекращена. Поэтому Александр Михайлович, неспий заботу еще и о младшем брате, оказался в весьма тяжелом материальном положении. К счастью, ему удалось занять должность хранителя кабинета практической механики.

1881 год стал знаменательным в жизни А. М. Ляпунова. В этом году были опубликованы две первые работы молодого математика: «О равновесии твердых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосуде определенной формы» [36] и «О потенциале гидростатических давлений» [37]. Об этих статьях он сам так написал в автобиографии: «В 1881 году по совету Бобылева, руководившего занятиями Ляпунова и всегда поощрявшего его в стремлении к самостоятельной работе, напечатал в „Журнале Русского физико-химического общества“ свои первые две работы, относившиеся к гидростатике».

Хотя в этих статьях излагались результаты исследований Александра Михайловича, основная часть которых была выполнена им еще на студенческой скамье, они насыщены новыми результатами. Так, в первой статье доказано существование потенциала гидростатического давления на погруженное тело и показано, что при данной форме сосуда этот потенциал есть функция шести координат, определяющих положение твердого тела в пространстве. Далее А. М. Ляпунов установил необходимые и достаточные условия равновесия погруженного тела и нашел выражение второй вариации потенциала действующих на тело сил, доказал устойчивость любого положения тела по отношению к поступательным перемещениям по вертикальному

направлению и установил, что если центр тяжести тела лежит ниже или совпадает с общим центром тяжести всей вытесненной телом жидкости, то положение равновесия устойчиво для всех перемещений. Кроме того, в этой работе были установлены свойства положения равновесия в связи с положением центра тяжести сечений тела. Не ограничиваясь этим, А. М. Ляпунов изложил аналитический метод отыскания положений равновесия тела. Он построил определяющую положение равновесия систему уравнений и дал указания по выбору решений, доказал теорему об устойчивости положения равновесия и привел соответствующие конкретные примеры.

Вторая работа А. М. Ляпунова, являющаяся продолжением первой, посвящена изучению вопроса о существовании потенциала гидростатического давления для случая сжимаемых жидкостей и деформируемого тела. Условия существования потенциала и выражения для него находятся Ляпуновым в двух случаях: когда сосуд неподвижен и неизменяем и когда сосуд деформируем. Доказана основная теорема о том, что гидростатические давления на тело, сосуд и поверхности уровня, ограничивающие жидкости, имеют потенциал. Ляпунов показал, что существование потенциала гидростатического давления на тело не зависит от характера его деформации, причем в случае неограниченного сосуда потенциал гидростатического давления на тело равен интегралу от давления по объему, занимаемому телом².

Таким образом, в этих статьях А. М. Ляпунов впервые дал доказательство существования потенциала гидростатических давлений при весьма общих предположениях.

Мы видим, что уже в этих первых работах проявляются характерные черты Ляпунова-исследователя: решая задачу, в основе которой лежит определенное физическое явление, Ляпунов использует весьма строгие математические методы, исследует все теоретически возможные и интересные случаи, доводит исследование

² Краткое изложение содержания двух первых работ А. М. Ляпунова дано академиком В. И. Смирновым в обзоре научного творчества А. М. Ляпунова (Прикладная математика и механика. 1948. № 5. С. 549—550) и в очерке научных трудов А. М. Ляпунова, приведенном в [42, с. 444—446].

до конкретных примеров и количественных результатов.

Разумеется, такой строгий подход к делу требовал большого объема изложения для приведения нужных доказательств и обоснований, разбора частных случаев и конкретных примеров. Не случайно поэтому объем первых двух статей Ляпунова составляет 85 журнальных страниц. Кроме того, ознакомление и, тем более, детальное изучение работ Ляпунова в силу упомянутых причин требует от читателя и времени и больших усилий. Конечно, в последующем сложность поставленных задач и мастерство их решения Ляпуновым возросли, но отмеченные особенности ясно видны уже на примере ранних работ молодого Ляпунова.

Сразу же после сдачи магистерских экзаменов (1882) А. М. Ляпунов приступил к поиску темы для магистерской диссертации. Об этом он сам рассказал на закате жизни в своей вступительной лекции «О форме небесных тел» курса, читанного в Новороссийском (Одесском) университете в 1918 г. «В 1882 году, желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, я не раз беседовал с Чебышевым по поводу различных математических вопросов, причем Чебышев всегда высказывал мнение, что заниматься легкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешить общеизвестными методами, не стоит и что всякий молодой ученый, если он уже приобрел некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-либо серьезном вопросе, представляющем известные теоретические трудности. При этом он предложил мне следующий вопрос: „Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов?“ При этом он прибавил: „Вот если бы Вы разрешили этот вопрос, на Вашу работу сразу бы обратили внимание“. . . Впоследствии я узнал, что этот же вопрос Чебышев предлагал и другим математикам, как, например, Золотареву, молодому тогда ученому, блестящие лекции которого я слушал в университете, и Софье Ковалевской. Не знаю, пробовали ли решать этот вопрос Золотарев и Ковалевская. Я сильно заинтересовался этим вопро-

сом, тем более, что Чебышев не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас же принялся за работу. . .» [22, с. 25—26].

Задача Чебышева состояла в следующем. Было известно, что равномерно вращающаяся вокруг некоторой оси жидкая однородная масса, частицы которой притягиваются друг к другу по закону Ньютона, может сохранять форму эллипсоида, пока угловая скорость вращения не превосходит определенного предела. Если же угловая скорость превысит этот предел, эллипсоидальные фигуры равновесия становятся невозможными. Если ω — некоторое значение угловой скорости, которой соответствует эллипсоид равновесия E , и задано достаточно малое приращение угловой скорости ϵ , то поставленный вопрос состоит в следующем: существуют ли для угловой скорости $\omega + \epsilon$ иные фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных, и непрерывно изменяющихся при таком же изменении ϵ , и при $\epsilon = 0$ совпадающие с эллипсоидом E ? Чебышев не давал указаний начинающему ученому относительно путей решения этой задачи, ограничиваясь замечанием о том, что успешным может оказаться применение метода последовательных приближений.

Правомерно спросить: почему П. Л. Чебышев поставил именно эту задачу перед молодым Ляпуновым, хотя ясно сознавал и подчеркивал ее чрезвычайную трудность? Ведь впоследствии, когда Ляпунов продвинулся в решении и делился с учителем сведениями о все новых возникающих затруднениях, сам Чебышев удивлялся трудности предложенной им задачи. По-видимому, Чебышев рискнул возложить на Ляпунова этот огромный труд, поскольку необычайно высоко оценивал возможности молодого ученого. По свидетельству Д. И. Граве, П. Л. Чебышев дал такой совет Ляпунову: «Вам Александр Михайлович, надо заниматься в математике вопросами только исключительной трудности» (цит. по [51, с. 5—6]). Но вместе с тем очевидно, что Чебышев, утверждавший, что «сближение теории с практикою дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает» [226], усматривал в поставленной им задаче большое познавательное и практическое значение.

Напряженная работа над поставленной Чебышевым проблемой продолжалась два года. При этом Ляпунову удалось успешно использовать метод последовательных



А. М. Ляпунов в период работы над магистерской диссертацией

приближений и подробно проанализировать первое приближение. Однако поскольку это приближение оказалось недостаточным, молодой Ляпунов не смог тогда дать полное решение задачи Чебышева. И все же затраченные усилия не пропали даром: внимание А. М. Ляпунова привлек другой очень важный и сложный вопрос об устойчивости эллипсоидов Маклорена и Якоби. Вот как писал об этом сам Ляпунов: «При тех ничтожных математических ресурсах, которыми я обладал тогда, лишь два года спустя после окончания курса, я встретил непреодолимые затруднения. Я довольно

скоро нашел, что в первом приближении как будто никакие новые формы равновесия вблизи предельного эллипсоида невозможны, но что возможны новые фигуры, мало отличающиеся от других эллипсоидов Маклорена и Якоби. Однако всякие попытки получить следующие приближения оставались неудачными. Чебышев, которому я сообщил об этом, очень удивился, заметивши, что обыкновенно все затруднение состоит в отыскании первого приближения и что, когда оно найдено, следующие приближения получаются уже легко. Это несомненно так, когда имеется уравнение, при помощи которого можно отыскать эти следующие приближения. В данном же вопросе составить такое уравнение представлялось мне делом чрезвычайной трудности.

После нескольких неудачных попыток я должен был отложить решение вопроса на неопределенное время. Но вопрос этот навел меня на другой, именно на вопрос об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия, который и составил предмет моей магистерской диссертации» [42, с. 342—343].

Здесь вновь мы видим присущее уже молодому

Ляпунову стремление к строгости результатов и выводов. Не найдя возможности на данном этапе вполне корректно решить проблему Чебышева, Ляпунов рассмотрел более частный и тесно примыкающий к этой проблеме вопрос, являвшийся весьма сложным сам по себе. Не случайно позднее и по другому поводу А. М. Ляпунов так писал в одном из писем: «Позвольте дать Вам дружеский совет: не гонитесь за слишком большой общностью, особенно тогда, когда благодаря ей приходится жертвовать точностью и строгостью. При том слишком общая постановка вопроса часто отнимает у задачи всякий интерес».

При решении поставленной перед собой задачи А. М. Ляпунов основывался на начале Лагранжа о минимуме потенциала. Это позволило получить строгое решение и практически полностью решить вопрос об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия.

Нужно сказать, что поставленная и решенная Ляпуновым задача еще до него привлекала внимание ряда первоклассных ученых середины XIX в. — Лиувилля, Римана, Томсона, Тэйта и других. Однако исследования в этой области не обладали необходимой строгостью, а результаты Лиувилля не были опубликованы. Когда же работа А. М. Ляпунова была написана, ему стало известно, что вышло в свет новое издание первого тома работы У. Томсона и П. Г. Тэйта (Тэта) «Курс натуральной философии», и что среди дополнений к прежнему изданию в нем излагается решение рассмотренного Ляпуновым вопроса.

Легко представить себе волнение 28-летнего А. М. Ляпунова, открывающего труд этих крупнейших ученых. Знаменитый английский математик, механик и физик Уильям Томсон (лорд Кельвин) был уже видным ученым, членом Лондонского королевского общества и профессором университета в Глазго, когда Ляпунова еще не было на свете. А его соавтором по упомянутому «Курсу» был ученик У. Р. Гамильтона профессор Эдинбургского университета П. Г. Тэйт. Эти маститые ученые изложили в своем «Курсе» механику твердых и жидких тел, многие другие разделы математической физики. Были все основания опасаться, что труды, затраченные Ляпуновым на решение поставленной задачи, пропали даром.

Однако выяснилось, что результаты Томсона и Тэйта далеко не охватывали выводов, полученных Ля-

пуновым. Более того, результаты английских ученых приводились без доказательств, кратко обсуждался лишь общий принцип, положенный в основу их исследований. Принцип этот представлял собой обобщение начала Лагранжа, которым пользовался и Ляпунов.

Таким образом, волнения молодого ученого оказались напрасными. Однако Ляпунов со свойственной ему тщательностью не мог оставить без внимания дополнения Томсона и Тэйта. Его заинтересовала использованная этими учеными обобщенная форма начала Лагранжа. На основе разработанных им ранее доказательств начала Лагранжа, искусно применив особый прием вариационного исчисления, А. М. Ляпунов сумел строго обосновать этот более общий принцип Томсона и Тэйта, которому он дал название «основной теоремы». С помощью этой теоремы стало возможным исследовать устойчивость сферы, эллипсоидов вращения и трехосных эллипсоидов. Оказалось, что до тех пор, пока момент количества движений вращающегося жидкого тела остается меньшим некоторого предела, оно сохраняет форму эллипсоида вращения. Если же скорость вращения увеличивать, то устойчивость эллипсоидов вращения будет потеряна, и последние перестанут являться фигурами равновесия. Устойчивыми тогда становятся трехосные эллипсоиды³. Однако если угловая скорость вращения превысит некоторый новый предел, то и трехосные эллипсоиды потеряют устойчивость, и форма равновесия становится иной. Судить о характере этих новых форм равновесия с помощью примененного им метода Ляпунов мог лишь приближенно и поэтому в своей диссертации он лишь упомянул о них, отметив, что существование этих форм должно быть строго доказано. Впоследствии эти гипотетические фигуры были названы грушевидными.

Вот что писал позднее о результатах этой работы А. М. Ляпунов: «Я пришел к следующим заключениям. Пока момент количества движения менее того предела, при котором эллипсоиды Маклорена переходят в эллипсоиды Якоби, эллипсоиды Маклорена устойчивы. Если же момент количества движения J будем уве-

³ Возможность существования трехосных фигур равновесия была теоретически установлена К. Г. Я. Якоби, но в то время они в природе найдены не были. Лишь в конце XIX—начале XX в. было установлено, что некоторые быстровращающиеся звезды имеют форму трехосных эллипсоидов.

личивать, начиная от J_1 , эти эллипсоиды теряют устойчивость, и устойчивыми делаются эллипсоиды Якоби. Однако последние не всегда остаются устойчивыми, а только до тех пор, пока J , возрастая, не достигнет некоторого предела J_2 , при котором, насколько можно судить по первому приближению, эллипсоиды переходят в какие-то новые фигуры равновесия, представляющие в первом приближении телами с алгебраическими поверхностями третьего порядка. Эти фигуры впоследствии были названы грушевидными.

Этим я ограничился в своей магистерской диссертации. О новых же формах равновесия, существование которых осталось недоказанным, ибо о них можно было судить лишь по первому приближению, я лишь упомянул в одном из положений к своей диссертации» [22, с. 28].

Защита А. М. Ляпуновым диссертации на степень магистра прикладной математики состоялась в январе 1885 г. Поскольку П. Л. Чебышев к тому времени уже вышел из состава профессоров университета, оппонентами на диспуте были профессор Д. К. Бобылев и профессор Артиллерийской академии Н. С. Будаев, некоторое время работавший в Петербургском университете. Как свидетельствует Б. М. Ляпунов, Александр Михайлович ожидал выступления А. Н. Коркина, но последний ограничился лишь присутствием.

Краткое изложение магистерской диссертации Ляпунова вскоре было опубликовано в «Bulletin astronomique». Это сделало имя А. М. Ляпунова известным в математических кругах Европы. Оригинальность и строгость выполненного исследования были высоко оценены лучшими математиками, и приковывали пристальное внимание даже много лет спустя. Об этом свидетельствует тот факт, что через 20 лет, в 1904 г. магистерская диссертация А. М. Ляпунова была переведена на французский язык и напечатана в «Annales de l'Université de Toulouse» по предложению профессора Э. Коссера.

Защита магистерской диссертации дала право А. М. Ляпунову на преподавательскую деятельность. Весной 1885 г. Ляпунов был утвержден в звании приват-доцента Петербургского университета. Он предполагал открыть с осени курс теории потенциала, но судьба распорядилась иначе: Ляпунов получил предложение занять вакантную кафедру механики Харьковского

университета, освободившуюся в связи с избранием В. Г. Имшенецкого в члены Академии наук. Осенью 1885 г. Ляпунов переехал в Харьков и начал в том же звании приват-доцента чтение лекций по всем курсам кафедры.

Начало было положено.

Глава 4

Харьковский университет

Перенесемся теперь мысленно более чем на тысячу верст к юго-востоку, в Харьков, ставший к концу XIX в. одним из крупных культурных и промышленных центров России. Здесь в Харьковском университете, одном из старейших университетов России (открыт в 1804 г.) в течение десятилетия, с 1872 по 1882 г. руководил кафедрой теоретической механики выдающийся русский математик и механик Василий Григорьевич Имшенецкий.

Еще в период своей деятельности в Казанском университете В. Г. Имшенецкий опубликовал в записках этого университета фундаментальное исследование «О функциях Бернулли», явившееся началом серии его работ в этой области. Однако из-за разногласий, возникших в совете университета, В. Г. Имшенецкий в 1871 г. был вынужден подать в оставку и уйти из университета. Вскоре он был приглашен на должность профессора кафедры теоретической механики Харьковского университета.

В период работы в Харьковском университете В. Г. Имшенецкий не только с увлечением готовил курс и читал лекции по теоретической механике. Он уделял также большое внимание работе кабинета прикладной механики. Много энергии и времени посвятил Имшенецкий расширению кабинета, пополнению его новыми моделями и материалами по теоретической и прикладной механике.

Будучи прекрасным педагогом и воспитателем, В. Г. Имшенецкий стремился шире привлекать к занятиям математикой и механикой студентов, молодых преподавателей. Достоинным детищем Имшенецкого стало основанное по его инициативе Харьковское математическое общество.

В конце 70-х годов по инициативе Имшенецкого по вечерам начали собираться профессора и преподаватели университета для обсуждения результатов научных работ в области математики и механики. Постепенно возникло ядро будущего математического общества (В. Г. Имшенецкий, Е. И. Бейер, М. Ф. Ковальский, Д. М. Деларю, К. А. Андреев, а также физики А. П. Шимков и Ю. И. Морозов). Его устав был разработан В. Г. Имшенецким и Д. М. Деларю и официально утвержден министерством народного просвещения в 1879 г. Целью общества, как указывалось в уставе, было содействие «разработке как чисто научных, так и педагогических вопросов из области математических наук».

Первым председателем Харьковского математического общества стал заслуженный профессор Евгений Ильич Бейер, известный своими работами в области математического анализа и дифференциальных уравнений. Однако вскоре Е. И. Бейер обратился с просьбой освободить его от этого поста в связи с преклонным возрастом. Председателем стал В. Г. Имшенецкий, остававшийся на этом посту все время своего пребывания в Харьковском университете.

Уже в первые годы своего существования Харьковское математическое общество приобрело репутацию весьма серьезной научной организации. В отчете общества за 1884/85 учебный год отмечено, что оно находилось в постоянных связях с 26 учреждениями. Издания общества высоко ценились русскими и зарубежными учеными. В 1885 г. в число членов общества вступили многие профессора и преподаватели открытого в том же году Харьковского технологического института. Среди них был и основатель и первый директор института известный русский механик Виктор Львович Кирпичев, который был одним из наиболее активных членов общества, посещал почти все заседания вплоть до своего отъезда из Харькова (1898) и был товарищем председателя общества.

После отъезда В. Г. Имшенецкого в Петербург в связи с его избранием в Академию наук (1882) возглавлявшая им кафедра оказалась вакантной. Поскольку вне университета не были известны лица, желающие и имевшие право занять эту кафедру, на нее был переведен профессор Д. М. Деларю. Однако в 1885 г. он подал в отставку в связи с тяжелой бо-

лезною. Таким образом, кафедра механики, по которой преподавание не велось уже целый год, вновь оказалась вакантной. В поисках выхода из создавшегося положения факультет наметил временно поручить преподавание по этой кафедре М. А. Тихомандрицкому, который исполнял обязанности экстраординарного профессора по кафедре математики и только что вернулся из-за границы. Был объявлен конкурс, однако в это время поступило извещение о назначении на эту кафедру приват-доцентом магистра прикладной математики Петербургского университета А. М. Ляпунова.

Переезд Ляпунова в Харьков состоялся осенью 1885 г. и сразу же молодой преподаватель начал читать лекции и вести практические занятия. На осеннее полугодие им был объявлен курс механики (кинематика материальной точки на III курсе и кинематика системы точек на IV курсе). Согласно требованиям нового устава в обзрениях преподавания приводились перечни рекомендуемых руководств. Среди них Ляпунов указал курсы своих учителей Д. К. Бобылева и Н. С. Будаева, а из иностранных руководств — курсы С. Д. Пуассона и П. М. М. Дюэма [222].

Об основных курсах, читавшихся в то время студентам физико-математического факультета Харьковского университета и о преподавателях, читавших эти курсы, писал впоследствии В. А. Стеклов: «Аналитическую геометрию читал Константин Алексеевич Андреев, москвич, хороший ученый и очень популярный лектор. Читал до крайности подробно, останавливаясь на мельчайших деталях, на малейших „пустыках“, как я тогда говорил; любой студент самых средних способностей не мог не понимать его. При таком способе чтения он не мог дать подробного курса аналитической геометрии и останавливался лишь на самом необходимом.

Дифференциальное исчисление и высшую алгебру преподавал только что назначенный из Петербурга Тихомандрицкий Матвей Александрович. Это был необычайный труженик, но человек без всякого таланта и очень плохой лектор. По размерам его курсы отличались полнотой, но он имел удивительную способность сделать скучным все, к чему он прикасался. Студенты сразу его невзлюбили, особенно когда он оказался еще мелочно-придирчивым на экзаменах. Его почти не слушали. Однако я аккуратно посещал его лекции,



Здание совета Харьковского университета

так как при желании из них можно было вынести кое-что новое, чего нельзя было найти в обычных русских учебниках, которыми мы тогда пользовались. Больше всех нравился молодежи старик Ковальский, уже больной сухоткой спинного мозга, большой оригинал и чудак.

Это был человек (из полтавских семинаристов), по-видимому, весьма способный, но кроме ничтожных магистерской и докторской диссертаций ничего не написавший и разленившийся. . . Читал лениво, медленно, курсов почти никогда не дочитывал, выражался до чрезвычайности оригинально и фигурально. . . Я часто вступал с ним в споры, когда он, стремясь всегда к решению вопросов „прямыми способами“, выбирал, как нарочно, наиболее сложный, называя его „безыскусственным“.

Начинал он иногда лекции так: „Некоторые молодые геометры“, указывая на меня, „полагают, что вопрос решается проще каким-то искусственным приемом, но вопреки им мы пойдем прямым путем и . . . что же мы получим?“. . . Начинает сложные вычисления, запутывается и, обращаясь к аудитории, спокойно произносит: „Мы получили . . . нелепость.“ “Итак, мы стоим у не-

лепости“. Начиналось изложение сызнова и т. д. Читал он одно время начертательную геометрию, чертил отвратительно, но серьезно и спокойно пояснял, глядя на нелепый чертеж: „чертеж, конечно, вышел аляповат, но я черчу ведь в перспективе. По настоящему прямые должны были бы, при взятых расстояниях, пересечься в форточке (т. е. печной отдушине противоположной к доске стены), но вы понимаете, что осуществить это невозможно“, и продолжал запугивать чертеж до крайнего предела.

Тихомандрицкого он терпеть не мог и не скрывал этого. При защите им докторской диссертации устроил скандал, обвинив публично Тихомандрицкого в плагиате: „А спросили ли вы разрешения у Вейерштрасса перепечатывать его лекции, ибо вы только перепечатали то, что слышали от Вейерштрасса“. Тихомандрицкий вскипел и диспут едва удалось благополучно закончить. Через несколько дней, перед лекцией, Ковальский повел к нам такую речь: „Помилуйте, до чего дошли, выслушали какую-то плоскость о многих листах с какими-то отверстиями. . . вот червь незнания и пролез сквозь отверстия. Да еще ссылаются на Якоби! Да если бы он услышал о таких нелепостях, он в гробу бы перевернулся“. Это касалось теории римановских поверхностей, о которых говорил Тихомандрицкий в своей диссертации.

На экзамене Ковальский был не очень требователен, спокоен и постоянно шутил со студентами, чем весьма подкупал их. После одного моего ответа, он, между прочим, заявил: „Вот мы сейчас заслушали блестящий реферат нашего молодого ученого. Оценим его полным баллом и пойдем дальше“.

Подобные прибаутки он расточал на каждом шагу. В университетской среде оба Матвея (Тихомандрицкий и Ковальский) носили клички: один — Матвей свирепый (Тихомандрицкий), другой — Матвей нелепый (Ковальский) . . .

Физику читал доцент Погорелко. Это была не физика, а собрание всевозможных фокусов, которые он проделывал, надо сказать, очень ловко. . . Над теоретической же частью курса можно было только смеяться. Лекции его производили впечатление набора каких-то физических анекдотов, пересыпанных случайно всплывшими формулами без приличных доказательств, иногда прямо неверных. Так, можно было найти сведения

о том, почему низенькие дамочки стараются носить платья с продольными рубчиками, а очень высокие с поперечными, как надо выводить сальные пятна с платьев и т. п., но сущности дела отыскать было невозможно. . .» [160, с. 35—37].

Эти воспоминания В. А. Стеклова удачно передают атмосферу студенческих будней. Но впечатления эти страдают, по-видимому, некоторой односторонностью, связанной с тем, что написаны они как бы через призму юношеского эмоционального восприятия Стеклова. Конечно, Ляпунов намного превосходил своих коллег по Харьковскому университету, однако ради объективности нужно отметить, что, например, М. А. Тихомандрицкий был, несмотря на отмеченные Стековым недостатки, видным русским профессором конца XIX в., одним из наиболее активных членов Харьковского математического общества. Нельзя забывать, что в течение многих лет, до конца жизни А. М. Ляпунова Тихомандрицкий был его другом, после отъезда Ляпунова из Харькова вел с ним интенсивную переписку. Судя по сохранившимся письмам, именно Тихомандрицкому Александр Михайлович в конце жизни поверял свои думы о будущем России, о своем личном горе.

Переезд А. М. Ляпунова в Харьков и начало его педагогической деятельности по времени приблизительно совпали с введением нового университетского устава 1884 г. Хотя в свое время совет Харьковского университета в ответ на запрос министерства о желательных изменениях в старом уставе 1863 г. высказался подобно другим университетам за сохранение автономии университетов, несмотря на возражения по всем основным пунктам, которые встретил внесенный министром народного просвещения И. Д. Деляновым проект нового устава в Государственном совете, он был утвержден царем Александром III. Этот новый реакционный устав имел целью всесторонне подчинить университеты министерству и правительству. Согласно новому уставу ректор, проректоры, деканы и профессора назначались министром; министерство рассматривало и утверждало обозрения преподавания и распределение лекций. Даже на перенесение лекций с одного дня или часа на другой требовалось разрешение министерства.

Коллектив профессоров и преподавателей согласно новому уставу был практически отстранен от управления университетом, роль совета необычайно уменьши-

лась. Все дела решались попечителем или ректором. Введен был строгий надзор за поведением студентов со стороны инспекции как в стенах университета, так и вне их. Этот надзор доходил до «чтения в мыслях и намерениях» [170, с. 243].

Именно в первый период жизни А. М. Ляпунова в Харькове (1885—1888 гг.) новый устав вводился наиболее жестко и неуклонно. В тяжелом положении оказались преподаватели, которых по сути дела отстранили как от управления университетом, от влияния на решение вопросов преподавания и университетской жизни, так и от самих студентов, в глазах которых многие преподаватели представлялись теперь «винтиками» бюрократической государственной машины. Разумеется, долго такое положение вещей оставаться не могло, и благодаря активному противодействию студентов и профессоров многих университетов уже в 1888—1889 гг. министерство было вынуждено смягчить многие правила нового устава и в значительной степени вернуться к прежнему уставу 1863 г. В 1899—1905 гг. стала очевидной полная несостоятельность нового устава, необходимость его коренной реформы.

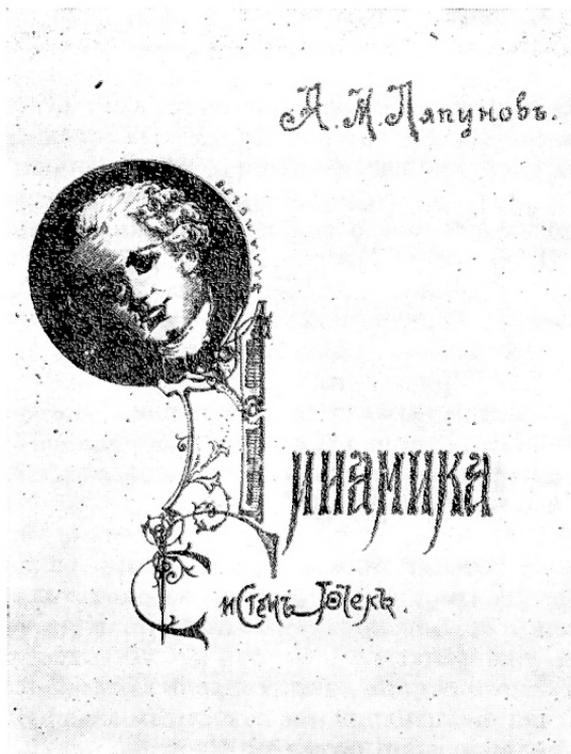
А. М. Ляпунов был встречен студенческой аудиторией настороженно: в молодом преподавателе, прибывшем из Петербурга и назначенном в университет «свыше», студенты подозревали ставленника Делянова. О первой встрече с Ляпуновым, сразу же изменившейся это предвзятое отношение к нему, о лекциях Александра Михайловича и о влиянии его личности на студентов рассказал старший и лучший ученик А. М. Ляпунова, впоследствии его близкий друг академик В. А. Стеклов: «В 1884 г., как известно, был разрушен устав 1863 г., началась реакция Делянова. В 1885 г. я был слушателем III курса, и, как старый студент устава 1863 г., состоял с большинством товарищей в крайней оппозиции к новым порядкам. Когда мы, студенты, узнали, что к нам приехал из Петербурга новый профессор механики, то сейчас же решили, что это должно быть какая-нибудь жалкая посредственность из деляновских креатур. Было решено, что нового профессора, без всякого сомнения, можно увидеть на молебне перед началом учения, куда он почтет своим долгом явиться, дабы показаться в соответствующем месте своему начальству, и непременно в синем фраке.

Тогдашние студенты Харьковского университета не отличались тихим нравом, и большинством курса мы отправились на это молебствие не с дружелюбными намерениями высматривать нашего предполагаемого нового врага. Действительно, среди немногих профессоров мы увидели неизвестного нам довольно мелкого человека с невыразительной физиономией прилизанного чиновника и как раз в синем фраке. Было решено, что это и есть Ляпунов. На первую лекцию собрался почти весь курс, уже не с целями одного любопытства.

Каково же было удивление наше, когда в аудиторию вместе с уважаемым всеми студентами старым деканом профессором Леваковским вошел красавец-мужчина, почти ровесник некоторых из наших товарищей и, по уходе декана, начал дрожащим от волнения голосом читать вместо курса динамики систем курс динамики точки, который мы уже прослушали у профессора Деларю. Шел уже четвертый год моего студенчества; в Москве в течение года я слушал таких лекторов, как Давыдов, Цингер, Столетов, Орлов; два года состоял студентом Харьковского университета. Курс механики мне был уже знаком.

Но с самого начала лекции я услышал то, чего раньше не встречал ни в одном из известных мне руководств. И все недружелюбие курса сразу разлетелось прахом; силою своего таланта, обаянию которого в большинстве случаев бессознательно поддается молодежь, Александр Михайлович, сам не зная того, покорила в один час предвзято настроенную аудиторию.

С этого же дня Александр Михайлович занял совершенно особое положение в глазах студентов: к нему стали относиться с исключительно почтительным уважением. Большинство, которому не были чужды интересы науки, стали напрягать все силы, чтобы хоть немного приблизиться к той высоте, на которую влек Александр Михайлович своих слушателей. Развился особый стыд перед ним за свое незнание, большинство не решалось даже заговаривать с ним единственно из опасения обнаружить перед ним свое невежество. Благодаря этому получилась даже довольно своеобразная организация: курс выдвинул как бы одного уполномоченного, к которому товарищи обращались со всеми своими недоразумениями, а это одно лицо должно было уже от себя лично вести беседы с Александром Михайловичем, приняв на себя обязанность за всех краснеть



Титульные листы литографированных лекционных курсов
А. М. Ляпунова

от стыда перед ним в случае какого-либо явного промаха.

Впоследствии же Александр Михайлович с наивным удивлением спрашивал меня, почему так мало студентов обращаются к нему за различными научными разъяснениями» [100, с. 368—370].

Вплоть до 1892 г. А. М. Ляпунов один читал все отделы аналитической механики: кинематику, динамику точки, динамику системы точек, статику и динамику твердого тела, теорию притяжения, гидростатику и гидродинамику. К этим курсам позднее прибавились курсы интегрирования дифференциальных уравнений динамики, теории возмущенного движения и теории вероятностей.

Сложность положения А. М. Ляпунова состояла в том, что приходилось выступать одновременно в роли

КИНЕМАТИКА.

Лекции проф. А. Ляпунова.

Издание студ. В. Стеркина

Харьков

Литография Шенгелева

1900 г.

и лектора, и ассистента. С осени 1891 г. в число преподавателей прикладной математики вступил в качестве приват-доцента В. А. Стеклов, который начал читать курсы теории упругости и общей механики, а в следующем году — и курс гидродинамики. В последующие годы В. А. Стеклов читал динамику твердого тела и ряд курсов чистой математики.

Интенсивная и новая для Александра Михайловича учебная работа не могла не отнимать много времени, тем более, что относился к ней Ляпунов с тщательностью и самоотдачей, столь присущими его натуре. А. М. Ляпунов не только подготовил ряд оригинальных учебных курсов (некоторые из которых были позднее опубликованы), но стремился при этом достичь необычайной краткости изложения при полной ясности и строгости. «Приходилось вырабатывать курсы и составлять записки для студентов, это отнимало много времени», — лаконично замечает Ляпунов в автобиографии, касаясь этого периода.

Характеризуя собрание литографированных курсов, читанных А. М. Ляпуновым, А. Н. Крылов писал: «Со стороны внешней уже по самой последовательности статей курса видно, что каждый из главнейших вопросов различных разделов механики ставился им с самого начала в самом общем виде; для поставленного так вопроса давалось прямое и вполне общее решение; таким образом, все отдельные случаи получались как частное из найденного общего решения или служили примерами для пояснения его.

Второй особенностью изложения является отсутствие всякого рода простых промежуточных выкладок, они заменены указанием последовательности необходимых действий или преобразований и того результата, который получится. Может показаться, что при таком изложении чтение курса представит значительные затруднения учащемуся, но это не совсем так благодаря тому, что выкладка не просто скрыта под словами: „после простых преобразований получится“ и т. д., а напротив, весь ход выкладки указан словом и опущено лишь то, что совершается по определенным известным правилам» [72, с. 390].

С присущей ему необычайной скромностью А. М. Ляпунов не считал подготовку курсов делом вполне творческим и, говоря о первых годах своей работы в Харьковском университете, характеризовал их в автобиографии как перерыв в ученой деятельности: «Здесь в первое время ученая деятельность Ляпунова должна была прекратиться». «То, что другие ученые, часто не без основания, считают важной частью своего ученого труда и составлением курсов и руководств приобретают себе ученое имя и известность, то А. М. Ляпунов считал перерывом в своей ученой деятельности, — отметил В. А. Стеклов. — А между тем курсы, составленные им по всем отделам механики, содержат такие ценные и иногда новые материалы, каких нельзя было найти ни в одном из имевшихся тогда руководств. . . Требования Александра Михайловича от ученого творчества были так широки, стремления к постоянно новому, оригинальному по результатам или по методам исследования, столь значительны, что изложение, хотя бы в оригинальной, ему лично принадлежащей форме, уже установленных истин он не считал за ученый труд» [101, с. 14].

О крайне высокой требовательности Ляпунова

к себе и к своей работе говорит и тот факт, что по свидетельству В. А. Стеклова «об издании своего во многих отношениях образцового курса он и слышать не хотел». Между тем два десятилетия спустя академик А. Н. Крылов выразил сожаление, что Ляпунов «не уделил времени печатному изданию своего курса, которому он, конечно, придал бы высокое совершенство и который составил бы ценнейший вклад в учебную литературу и облегчил бы изучение механики многим поколениям» [72, с. 391]. Издание замечательных курсов А. М. Ляпунова было осуществлено уже в советское время [46].

Преподавательская деятельность А. М. Ляпунова являла собой значительный контраст лекциям таких харьковских профессоров, как М. Ф. Ковальский, А. К. Погорелко, М. А. Тихомандрицкий. И это не следует ставить им в вину: многие из них (например, М. А. Тихомандрицкий) были хорошими специалистами, но их уровень как преподавателей и ученых не мог идти ни в какое сравнение с уровнем А. М. Ляпунова. Говоря об этом нельзя не вспомнить восторженные отзывы В. П. Бузескула, В. А. Стеклова и других современников о Ляпунове как профессоре и человеке. По словам Бузескула, «А. М. Ляпунов принадлежал к тем профессорам, которые составляют истинную душу университета, которыми университет живет и процветает, которые носят в себе идеал профессора и ученого. Все низменное ему было чуждо».

Находясь в Харькове, Ляпунов очень скучал по своим близким, о жизни и здоровье которых он узнавал из писем. Его согревало нежное чувство к Наталье Рафаиловне Сеченовой, глубокую привязанность к которой не могли заглушить ни расстояние, ни время. Это не было тайной от родных, которые относились к влюбленным с ласковым участием. «Сеченовы все здоровы и целуют тебя, — писал Борис Михайлович Ляпунов брату 28 октября 1885 г. — Наташа очень занята: переводит и рисует; это для того, чтобы ты не тревожился, если не получишь от нее письма» [127].

Свою короткую поездку в Петербург, во время которой 17 января 1886 г. состоялась свадьба А. М. Ляпунова с Натальей Рафаиловной Сеченовой, Александр Михайлович приурочил ко времени зимних каникул, не позволяя себе даже на короткое время приостановить преподавательскую работу. Свидетелями на свадьбе



Наталья Рафаиловна
Сеченова

А. М. Ляпунова и Н. Р. Сеченовой были Николай Семенович Курнаков, в то время работавший в Петербургском горном институте (впоследствии академик), и ученик И. М. Сеченова Бронислав Фортунатович Вериго (впоследствии известный физиолог). Вскоре после свадьбы Наталья Рафаиловна и ее родители переехали в Харьков.

Александр Михайлович, продолжавший свою преподавательскую деятельность, познакомился здесь с профессорами-математиками и механиками К. А. Андреевым, Е. И. Бейером, М. А. Тихомандриц-

ким, В. Л. Кирпичевым, астрономами Г. В. Левицким и Л. О. Струве¹, встретился с физиком А. П. Грузинцевым, учителем А. М. Ляпунова в Нижегородской гимназии. С некоторыми из них у Александра Михайловича установились дружеские отношения, а впоследствии продолжалась переписка в течение многих лет.

В июне 1886 г. А. М. Ляпунов и Наталья Рафаиловна совершили поездку за границу, посетив Германию, Швейцарию, Австрию и Сербию. Поездка эта носила, в основном, общеобразовательный характер, поскольку в то время Александр Михайлович не был еще знаком с зарубежными учеными и не имел с ними переписки (кроме Анри Пуанкаре, с которым он переписывался с 1885 г.). Посещение Сербии было предпринято специально для Натальи Рафаиловны, всегда интересовавшейся этой страной, ее языком, культурой и литературой и много занимавшейся переводами с сербского. Известно, что перед поездкой Наталья Рафаиловна

¹ Это был внук известного астронома Вильгельма (Василия Яковлевича) Струве, сын современника и сотрудника М. В. Ляпунова академика О. В. Струве.

обращалась к академику И. В. Ягичу за рекомендациями к сербским ученым и литераторам. Знакомство Ягича с Ляпуновыми началось еще со времени профессорской и академической деятельности И. В. Ягича в Петербурге в 1880 г.

Утверждение А. М. Ляпунова о прекращении им научной работы в первый период его учебной деятельности в Харькове не следует понимать буквально. Как отметил В. А. Стеклов, скорее можно говорить лишь о некотором снижении интенсивности научных исследований Ляпунова в этот период. Более того, есть основания полагать, что именно в результате работы по подготовке курса были написаны и опубликованы в «Сообщениях и протоколах заседаний Математического общества при Харьковском университете» две статьи: «Некоторое обобщение формулы Лежень Дирихле для потенциальной функции эллипсоида на внутреннюю точку» (1885) [25] и «О теле наибольшего потенциала» (1886) [26]. В этих работах Ляпунов выполнил исследование потенциальной функции эллипсоида, получил новое выражение этой функции и доказал, что если существует тело, для которого потенциал достигает при заданном объеме своего высшего предела, то это тело есть шар.

Но период временного снижения научной активности Ляпунова вскоре остался позади. Если просмотреть страницы «Сообщений Харьковского математического общества» за 1887—1891 гг., где не только публиковались работы Ляпунова, но и помещались сведения о его выступлениях на заседаниях общества, можно увидеть, как целеустремленно А. М. Ляпунов приближается к всестороннему решению поставленной им перед собой проблемы. Не может не вызвать удивление и восхищение интенсивность его научной работы в этот период. Так, Ляпунов выступил с изложением статьи профессора Н. Е. Жуковского «О движении вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими поверхностями» (30 апреля 1887 г.), статьи И. В. Мещерского «О дифференциальных связях в случае одной материальной точки» (16 октября 1887 г.), а также изложил содержание собственных работ «О постоянных винтовых движениях твердого тела и жидкости» (20 ноября 1887 г.), «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах» (19 января 1889 г.), «О решении задач А. А. Маркова

на определение функций и кривых линий по заданным условиям» (15 декабря 1889 г.), «О характеристическом уравнении, соответствующем данной системе дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами» (5 февраля и 9 марта 1889 г.), «О некоторых системах линейных дифференциальных уравнений» (23 ноября 1890 г.) и о новом доказательстве теоремы Фука, относящейся к линейным дифференциальным уравнениям (13 декабря 1891 г.).

На страницах «Сообщений Харьковского математического общества» из доложенных А. М. Ляпуновым работ были опубликованы две, которые В. А. Стеклов назвал исследованиями, «замечательными как по методам, так и по результатам»: «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости» (1888 г.) [1] и «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах» (1889 г.) [2]. В первой из этих работ Ляпунов решает вопрос об устойчивости постоянных винтовых движений твердого тела в идеальной однородной несжимаемой жидкости с непрерывным и однозначным потенциалом скоростей в предположении отсутствия сил, действующих на твердое тело и на жидкость. Во второй работе рассмотрена задача устойчивости периодического движения трех точек с произвольным законом притяжения (сила притяжения зависит только от расстояния), причем характер невозмущенного движения таков, что точки находятся в вершинах равностороннего треугольника и описывают около общего центра тяжести эллиптические траектории согласно законам Кеплера.

По мнению математиков и механиков — современников А. М. Ляпунова уже его магистерская диссертация по своему научному уровню и значимости полученных результатов значительно превосходила многие первоклассные докторские диссертации². Имелась реальная возможность представить в качестве докторской диссертации обобщение магистерской диссертации и упомянутых выше исследований. Однако А. М. Ляпунов с присущей ему высокой требовательностью к самому себе и к своим работам не пожелал обобщить эти исследования в докторскую диссертацию, отказавшись таким образом от многих выгод, связанных с при-

² Здесь можно сослаться, например, на мнение В. А. Стеклова [101, с. 17].

суждением докторской степени. Существовала, однако, и другая возможность. Практиковался такой способ замещения профессорской должности: преподаватель начинал свою деятельность в качестве приват-доцента, а по приобретении им ученой степени магистра декан делал представление о назначении этого преподавателя исправляющим должность экстраординарного профессора. Такое представление через ректора или попечителя, с их заключениями, поступало в министерство [170, с. 275]. Многие магистры Харьковского университета использовали эту возможность, что позволяло им увеличить годовое содержание примерно вдвое. Но А. М. Ляпунов отказался от звания и. д. экстраординарного профессора до получения степени доктора и продолжал в течение ряда лет оставаться в должности приват-доцента, довольствуясь скромным годовым содержанием в 1200 рублей в год.

Все эти годы А. М. Ляпунов упорно работал над своей докторской диссертацией «Общая задача об устойчивости движения». В этой фундаментальной работе Ляпунов всесторонне рассмотрел проблему устойчивости движения систем с конечным числом степеней свободы. Поскольку первое приближение в общем случае не решает вопроса, Ляпунов подробно исследовал решения при общих предположениях, отвечающих наиболее интересным задачам, тщательно изучил случаи, когда первое приближение недостаточно. Для ряда подобных случаев Ляпунов дал строгие решения. Поскольку эти вопросы непосредственно связаны с общей теорией интегрирования систем дифференциальных уравнений, Ляпунов привел в своей диссертации результаты, касающиеся интегрирования некоторых систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, разработал качественную теорию таких систем, доказал существование асимптотических решений, дал ответы на вопросы о существовании периодических решений. Первостепенное значение имеет доказанная Ляпуновым теорема о неустойчивости движения в случае, когда силовая функция сил, действующих на систему, не есть максимум. А. М. Ляпунов, сознавая важность этого результата, впоследствии опубликовал теорему о неустойчивости движения с некоторыми дополнениями в отдельном мемуаре «О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум».

А. М. Ляпунов готовил свою диссертацию очень тщательно. Неоднократно проверял выкладки, стремился избежать каких бы то ни было неточностей, внимательно отделял текст. Поэтому через пять лет при перепечатке этой работы на французском языке возникла необходимость внести лишь два сравнительно несущественных изменения, относящиеся к примечаниям. Диссертацию Ляпунова можно сравнить с надводной частью айсберга, потому что несмотря на ее значительный объем многие выкладки и даже отдельные случаи не были включены в основной текст. Эти результаты были опубликованы А. М. Ляпуновым отдельно, в 1893—1896 гг., а некоторые работы (например, «Об одном ряде, относящемся к теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами») так в печати и не появились и сохранились только в виде рукописей [83].

Но вот, наконец, докторская диссертация в основном завершена. 15 марта 1891 г. Ляпунов делает сообщение на заседании Харьковского математического общества на тему «Общая задача теории устойчивости движения». Но он не торопится с защитой, вновь и вновь пересматривает возможные случаи, ищет пути обобщения результатов и упрощения доказательств. Харьковское математическое общество изыскало необходимые средства, и диссертация А. М. Ляпунова была издана в 1892 г. в виде монографии [3]. Только теперь Александр Михайлович принял решение о защите своей работы в качестве докторской диссертации.

Однако с защитой возникли неожиданные затруднения. Докторская диссертация Ляпунова, принесшая ему вскоре мировую известность, оказалась очень трудной даже для крупнейших математиков и механиков, которые могли бы выступить в качестве оппонентов. 29 сентября 1891 г. Д. К. Бобылев писал из Петербурга своему бывшему ученику [121, л. 5, 6].

Многоуважаемый Александр Михайлович,

А. Н. Коркин не берется быть официальным оппонентом. А. А. Марков не высказал еще положительного несогласия, не зная еще Вашего труда. . . Лучше было бы, если бы Вы сами потрудились составить реферат о ней (диссертации) и прислать мне. Не скрою от Вас, что мне не легко дается чтение Вашей работы. . .

Защита диссертации состоялась 30 сентября 1892 г. в Московском университете. Оппонентами выступили

замечательный русский ученый, уже известный к тому времени механик профессор Николай Егорович Жуковский и видный математик профессор Болеслав Корнелиевич Млодзеевский. Защита прошла блестяще, и вскоре, в январе 1893 г. тридцатипятилетний ученый получил звание ординарного профессора Харьковского университета. В этом университете он продолжал преподавательскую деятельность до весны 1902 г.

От трудов преподавания А. М. Ляпунов отдыхал во время летних каникул в родных местах, в деревне. Здесь Александр Михайлович мог отдаться милому его сердцу садоводству, открыть душу благотворному влиянию природы. Однако и здесь он не прерывал своих научных занятий и, по свидетельству брата Бориса Михайловича, «почти ежедневно продолжал работать над каким-либо вопросом своей специальности».

Присуждение ученой степени доктора наук и получение звания профессора не ослабило творческую активность Ляпунова. В последующие годы харьковского периода А. М. Ляпунов опубликовал около двух десятков работ, большая часть которых посвящена была основному направлению его научной деятельности тех лет — устойчивости равновесия и движения механических систем с конечным числом степеней свободы, а также связанным с этой задачей отдельным вопросам теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В этих исследованиях Ляпунова рассмотрены некоторые особые случаи задачи об устойчивости движения: обсужден вопрос устойчивости для случая установившегося движения, когда система состоит из двух уравнений и когда определяющее квадратное уравнение первого приближения имеет двойной корень, равный нулю; доказана для некоторых случаев неустойчивость равновесия при отсутствии максимума силовой функции. Кроме того, для установившегося движения, когда первое приближение не решает вопроса об устойчивости, Ляпунов посредством остроумного приема (подбора дополнительных членов выше первого порядка относительно искомых функций) показал, что при всяких коэффициентах первого приближения может иметь место как неустойчивость, так и устойчивость в зависимости от характера подобранных дополнительных членов.

Среди опубликованных в этот период работ Ляпунова мы встречаем также исследования, результаты которых способствовали расширению возможностей

практически важных астрономических расчетов. С присущим ему блеском А. М. Ляпунов решил весьма важную для астрономических вычислений задачу: он доказал, что для величин средних движений Солнца и Луны ряды, при помощи которых Дж. У. Хилл проинтегрировал дифференциальные уравнения движения Луны, являются сходящимися. Более того, Ляпунов дал способ определения верхнего предела погрешности, связанной с обрывом ряда на том или ином члене.

Фундаментальное значение для математической физики имела серия исследований А. М. Ляпунова, посвященная теории потенциала. Ляпуновым были строго обоснованы современные ему методы решения краевых задач для уравнений Лапласа, даны решения краевых задач для обширного класса областей, ограниченных поверхностями, получившими в литературе наименование поверхностей Ляпунова. Для таких поверхностей им был найден ряд важных результатов, в частности, теорема о равенстве предельных значений нормальной производной от потенциала двойного слоя.

Факультет поручил А. М. Ляпунову в последние годы пребывания его в Харькове чтение курса лекций по теории вероятностей, которая приобрела большое значение для развития механики, статистической физики и различных приложений. Эта теория и, в частности, предельная теорема привлекали внимание Ляпунова давно, еще со студенческой скамьи, когда он в 1879—1880 гг. слушал лекции П. Л. Чебышева по теории вероятностей. Чебышев дал набросок доказательства предельной теоремы для сумм независимых случайных величин. При этом он сделал оговорку о том, что нестрогость вывода заключается в том, что делаются предположения без определения предела происходящих от этого погрешностей. Впоследствии метод, предварительно намеченный Чебышевым в его лекциях, был им самим уточнен и развит [225].

Александр Михайлович серьезно занялся этой областью, стремясь дать возможно более общее и строгое доказательство предельной теоремы теории вероятностей. В двух мемуарах, представленных Академии наук А. А. Марковым и опубликованных в 1900—1901 гг. [32, 33], Ляпунов изложил результаты, полученные им совершенно новым методом, названным «методом характеристических функций». Результаты П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова были позднее обоб-

щены А. А. Марковым [185]. Впоследствии выяснилось, что разработанный Ляпуновым метод характеристических функций открывает такие широкие возможности, что ему по праву было отведено одно из центральных мест в теории вероятностей. Вот почему для теории вероятностей в ее современном виде значение результатов Ляпунова исключительно велико несмотря на то, что эти исследования были, по существу, коротким эпизодом в его научном творчестве.

Нельзя не обратить внимание на быстрое расширение списка изданий, в которых публиковались работы А. М. Ляпунова после 1893 г. Кроме упоминавшихся «Сообщений Харьковского математического общества» среди этих изданий — Математический сборник (Москва), Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии (Москва), Доклады Парижской академии наук (Париж), Журнал чистой и прикладной математики (Журнал Лиувилля) (Париж). Это обстоятельство, несомненно, свидетельствует о внимании ведущих отечественных и зарубежных математиков к работам А. М. Ляпунова. Так, Петербургской академии наук работы А. М. Ляпунова представлял академик А. А. Марков, а Парижской академии наук их представлял член Парижской академии наук, а впоследствии — ее президент, член Французской академии и Лондонского королевского общества Ш. Э. Пикар.

Хорошо известны критическое выступление А. А. Маркова по поводу решения С. В. Ковалевской задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки (более конкретно — по поводу § 1 мемуара Ковалевской на эту тему) и блестящее исследование Ляпунова, которое, по существу, завершило задачу об однозначных общих интегралах проблемы о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В статье, посвященной изложению результатов этого исследования, Ляпунов писал, что «соглашаясь с Марковым относительно недостаточности анализа Ковалевской», он «все же склонен был думать, что вопрос решается именно таким образом, как полагала Ковалевская, и что решение его может быть достигнуто без особых затруднений, если несколько иначе приняться за дело». . . «Вследствие этого я решил, — продолжает Ляпунов, — рассмотреть вопрос с другой точки зрения и попытаться приложить к нему методу, которая давно уже каза-

лась мне наиболее подходящей для решения вопросов такого рода» [39].

Нужно сказать, что пропущенные Ковалевской решения были найдены также Г. Г. Аппельротом [140] и П. А. Некрасовым [191]. Однако выяснилось, что соответствующие интегралы являются многозначными; таким образом, эти случаи отпали, не изменяя теорему Ковалевской. В своей книге Г. Г. Аппельрот [139] доказал теорему Ковалевской, основываясь на теоремах Ляпунова и других общих результатах, относящихся к системам нелинейных уравнений.

Что касается А. М. Ляпунова, то он воспользовался методом вариации решений системы путем малых изменений параметров. В результате для вариаций решений получается система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Если при этом за исходные решения взять простейшие частные решения заданной системы, то получаемая линейная система будет эйлеровской, и ее однозначные решения могут быть исследованы до конца. Кроме того, Ляпунов рассмотрел случай вещественных начальных значений, отвечающих реальной физической задаче. Таким образом, Ляпунов не только доказал теорему Ковалевской, но и дал доказательство более общей теоремы о том, что решение не может иметь два вида ряда Лорана с бесконечной главной частью³.

Опубликовав в 1894 г. свою знаменитую статью, А. М. Ляпунов положил конец многолетнему спору, связанному с результатом С. В. Ковалевской. К сожалению, этот год принес Ляпунову не только радость новых творческих достижений. В декабре его постигло большое горе: умер Пафнутий Львович Чебышев. На страницах «Сообщений Харьковского математического общества» А. М. Ляпунов поместил очерк, посвященный памяти любимого учителя. Этот очерк был издан также отдельной брошюрой [178]. В этом очерке дана очень яркая и точная характеристика великого русского ученого, изложены основные факты из его жизни и деятельности. Ляпунов дал обзор важнейших научных трудов Чебышева, охарактеризовал его про-

³ Подробное рассмотрение решения задачи С. В. Ковалевской, сущности замечаний А. А. Маркова и относящихся к этому вопросу писем и работ С. В. Ковалевской, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, Г. Г. Аппельрота и В. В. Голубева см. в книге [169].

фессорскую деятельность, уделил внимание изобретениям Чебышева в связи с его аналитическими исследованиями по теории механизмов.

Нужно сказать, что А. М. Ляпунов всю свою жизнь благоговейно относился к Чебышеву и к памяти о нем. В годы пребывания в Харькове Ляпунов написал не только упомянутый очерк о своем учителе, но также перевел с французского языка три его работы. Переводы эти были опубликованы в 1-м томе «Сочинений» П. Л. Чебышева, увидевшем свет в 1899 г.⁴ Позднее, в 1907 г. были опубликованы выполненные Ляпуновым переводы с французского языка работ П. Л. Чебышева «О квадратурах» и «О предельных величинах интегралов», помещенные во 2-м томе «Сочинений» Чебышева. Кроме того, Ляпунов выполнил перевод работы Чебышева «О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до четвертой степени» на французский язык [233].

Занимаясь педагогической и научной деятельностью в Харьковском университете, А. М. Ляпунов много внимания уделял работе кабинета практической механики, заведывание которым перешло к нему как профессору механики в 1893 г. Поскольку за кабинетом числилось много случайного или пришедшего в негодность имущества, Ляпунову пришлось прежде всего очистить кабинет и упорядочить его материалы, передав часть их в другие кабинеты (технологический, физиологический, юридический) и в астрономическую обсерваторию. Так, Ляпунов передал термометры, пружинный динамометр, весы, динамограф и другое оборудование и принял меры к тому, чтобы обеспечить работоспособность и сохранность оставленного имущества. При Ляпунове кабинет стал действительно служить своим целям: он содержал модели приборов, имеющих значение при преподавании прикладной и теоретической механики. По инициативе А. М. Ляпунова имущество кабинета пополнилось несколькими моделями гироскопов; кроме того, в его состав вошли математи-

⁴ А. М. Ляпунов перевел на русский язык и опубликовал в 1899 г. работы Чебышева: «Об интегрировании дифференциала $x + A$

$\sqrt{x^4 + ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta} dx$ », «Об интегрировании иррациональных дифференциалов» и «О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта».

ческие (геометрические) модели, приобретенные от Бриллы профессором К. А. Андреевым в 1879 г. и профессором Д. А. Граве в 1900 г. [222].

В связи с приобретением оборудования для кабинета А. М. Ляпунов обращался к ведущим профессорам-механикам. Например, в ответ на такой запрос Н. Е. Жуковский писал А. М. Ляпунову 22 января 1895 г. [125, л. 3, 4].

Многоуважаемый Александр Михайлович!

Я не нашел возможным сократить что-нибудь в Вашем реферате и отдал его переводить так, как он написан. . .⁵ На заседании Общества Л. Е. [любителей естествознания] 20 января мы избрали Вас в виду важности Ваших научных заслуг в непременные члены общества. По уставу непременные члены освобождаются от денежного взноса и принимают только участие в трудах общества. . .

Любая из заказанных Вами статей будет принята нашим журналом с благодарностью. Мне лично было бы приятно получить Вашу статью о волчке типа Гесса.

Для покупки гироскопов обратитесь к Дюкретэ. Удобнее приобрести отдельные гироскопы, а не всю коллекцию. Посылаю Вам вместе с этим письмом каталог Дюкретэ, в котором я подчеркнул более важные модели.

Остаюсь искренне Вас уважающий
Н. Жуковский

Может вызвать удивление то внимание и заинтересованность, с которыми занимавшийся всю жизнь глубокими теоретическими проблемами А. М. Ляпунов относился к сугубо практическим делам оснащения и поддержания образцового порядка кабинета практической механики. Вероятно, здесь имели значение не только неизменное стремление Александра Михайловича делать все предельно тщательно и глубокая убежденность в большой пользе кабинета для дела преподавания. Большую роль играл, несомненно, пример его учителя П. Л. Чебышева — замечательного математика и выдающегося изобретателя многих механизмов и устройств, утверждавшего, что науки развиваются под влиянием практики, что «она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных. . .» [226].

Как уже отмечалось, отдыхать в летнее время Ляпунов предпочитал в родной деревне Курмышского уезда Симбирской губернии, сознавая, как впоследствии писал его брат Борис Михайлович, «что никакой

⁵ Речь идет, по-видимому, о работе А. М. Ляпунова для немецкого ежегодника «Jahrbuch», официальным референтом которого в то время состоял Н. Е. Жуковский.

курорт не может дать того, что ищут люди, желающие отдохнуть телом и душой, и что можно найти только в глухом родном уголке». Однако в мае и июне 1897 г. он с Натальей Рафаиловной, ее матерью Екатериной Васильевной и братом Борисом Михайловичем совершил поездку в Крым и около месяца прожил в Ялте. Здесь Александр Михайлович с большим увлечением знакомился с природными богатствами Крыма.

Пребывание Ляпуновых в Крыму было омрачено тем, что в это время здоровье Екатерины Васильевны и Натальи Рафаиловны пошатнулось. В письме от 4 июня 1897 г. А. П. Грузинцев писал Ляпунову: «Мы, т. е. Анна Ивановна⁶ и я очень беспокоимся о Вас: слышали, что Екатерина Васильевна опасно больна. Анна Ивановна спрашивает Вас — не может ли она чем-нибудь помочь больной. . . . Анна Ивановна может приехать к Вам в Ялту. . . Она чувствует ко всем Вашим такое расположение, что сильно беспокоится за Екатерину Васильевну, и за Наталью Рафаиловну. . . Кстати, наша биб. новость: сейчас получено запрещение на что бы знали? На собрание сочинений Станюковича! Времена!» [123].

Рассказ о харьковском периоде жизни А. М. Ляпунова был бы неполным без характеристики его деятельности в Харьковском математическом обществе. Вскоре после переезда А. М. Ляпунова в Харьков, в 1887 г. был принят новый устав Общества, предусматривающий возможность избрания членов-корреспондентов и почетных членов. Избрание в почетные члены Общества в 1888 г. академиков В. Г. Имшенецкого, В. Я. Буняковского и П. Л. Чебышева, а в члены-корреспонденты — академика А. А. Маркова, профессоров Петербургского университета А. Н. Коркина, К. А. Поссе, профессора Киевского университета В. П. Ермакова, профессора Московского университета Н. Е. Жуковского, профессора Варшавского университета П. О. Сомова и приват-доцента Петербургского университета П. Л. Пташицкого способствовало расширению и укреплению научных связей Общества с ведущими математиками и механиками. В «Сообщениях» Общества появились труды этих ученых.

О высоком авторитете, которым пользовалось Харьковское математическое общество и его «Сообщения»,

⁶ Анна Ивановна — жена А. П. Грузинцева.

свидетельствуют обращения ученых разных городов с предложениями о публикации результатов работ на страницах «Сообщений».

В январе 1894 г. Харьковское математическое общество приняло участие в праздновании 25-летия своего старшего собрата — Московского математического общества, направив в Москву делегацию в составе профессоров К. А. Андреева, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова.

Выдающиеся научные заслуги, активная деятельность А. М. Ляпунова в организационных мероприятиях Общества, постоянные выступления с докладами выдвинули его в число наиболее видных членов Общества. Уже в 1891 г. он был избран товарищем (заместителем) председателя, а в 1899 г. после перехода К. А. Андреева в Московский университет — председателем Общества.

Значительным событием в жизни Общества и всей математической общественности России стала встреча русских математиков в сентябре 1901 г. в Полтаве на праздновании столетия со дня рождения академика Михаила Васильевича Остроградского. Место этого торжества было выбрано не случайно. Крупнейший русский математик М. В. Остроградский родился 24 сентября 1801 г. в деревне Пашенной Кобелякского уезда Полтавской губернии. В Полтаве Остроградский учился в пансионе, затем — в гимназии. Наряду с этим жизнь М. В. Остроградского и его становление как математика были тесно связаны с Харьковом: в 1816—1821 гг. он учился на физико-математическом отделении Харьковского университета.

Торжественное заседание в Полтаве, посвященное памяти М. В. Остроградского, открыл выступивший со вступительной речью председатель Полтавского кружка В. С. Мачуговский. Затем с приветственными речами выступили представители университетов. Зачитывались многочисленные адреса и телеграммы, в том числе от Петербургской и Парижской академий наук. С приветственной речью выступил Н. Е. Жуковский, давший краткую характеристику важнейших результатов Остроградского и осветивший состояние многочисленных разделов математики и механики, в которые он внес значительный вклад. С более подробными докладами, посвященными ученым трудам Остроградского, выступили харьковские ученые. А. М. Ляпунов сделал доклад «О заслугах М. В. Остроградского в области

механики», М. А. Тихомандрицкий выступил с «Очерком ученых трудов М. В. Остроградского в области чистой математики», а В. А. Стеклов доложил «О работах М. В. Остроградского в области математической физики».

Таким образом, Харьковское математическое общество под руководством таких выдающихся математиков как В. Г. Имшенецкий, К. А. Андреев, А. М. Ляпунов, а затем — В. А. Стеклов (сменивший на этом посту Ляпунова после его избрания академиком и переезда в Петербург) вело разностороннюю и очень нужную деятельность, направленную на развитие математики и механики, распространение математических знаний в России. Общество постепенно устанавливало все более тесные связи с зарубежными учеными. В почетные члены общества были избраны А. Пуанкаре, Ш. Э. Пикар, П. Аппель, Ж. Адамар, С. Заремба, А. Кнезер и А. Корн. Некоторые из них поместили результаты своих исследований в «Сообщениях» общества.

Наряду с несомненными успехами Общество переживало серьезные трудности. Непрерывно расширявшаяся научная деятельность и вовлечение новых членов привели к тому, что многие доклады не могли печататься из-за недостатка средств. Единственным источником для Общества служило пособие из специальных средств Харьковского университета, составлявшее от 250 до 450 рублей в год. Деньги расходовались исключительно на печатание «Сообщений» и их постоянно не хватало. Недостаток средств не позволил напечатать в «Сообщениях» магистерские диссертации В. А. Стеклова и А. П. Грузинцева, хотя содержание этих диссертаций было изложено на заседаниях общества. Лишь изредка удавалось получать дополнительные субсидии. Так, в 1893 г. удалось получить от университета еще 200 рублей на печатание трудов. Это позволило напечатать большую работу профессора М. А. Тихомандрицкого «Основание теории абелевых интегралов». Однако и эту, сравнительно небольшую сумму, общество не смогло выделить сразу, а вынуждено было выплачивать ее постепенно в течение ряда лет. Субсидия университета позволила в 1901 г. издать капитальное сочинение В. А. Стеклова «Основные задачи математической физики» [220].

Учитывая эти затруднения, Общество в 1894 г. присоединилось к общему ходатайству XI съезда есте-

ствоиспытателей об увеличении субсидии от министерства математическим обществам и через совет университета обратилось к министерству с ходатайством о выдаче ему ежегодной постоянной субсидии в размере от 700 до 1000 рублей. Но истекли годы и десятилетия, а помощи от царских правящих кругов Общество так и не дождалось.

Выше была кратко освещена реакционная сущность устава 1884 г. и воцарившаяся в результате его введения гнетущая атмосфера, в которой Ляпунов был вынужден начать свою преподавательскую и научную деятельность в харьковский период своей жизни. Однако студенты, передовые профессора и преподаватели университета отнюдь не были пассивными наблюдателями, не мирились с ней с самого начала ее существования. Решительные действия, связанные с борьбой против этой системы, имели место в 1899 г. при преемниках И. Д. Делянова Н. П. Боголепове и П. С. Ванновском, когда совет Харьковского университета открыто обсуждал меры, направленные на преодоление пагубных последствий этого устава, на сближение профессоров со студенческой аудиторией и на повышение влияния профессорско-преподавательского состава на студентов. Особенно активные шаги были предприняты в 1901—1902 гг.: специально избранная советом Харьковского университета Комиссия выдвинула проект изменения устава 1884 г. и нового устройства университета. В числе 12 профессоров, входивших в состав этой комиссии, были А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов.

Для того чтобы охарактеризовать позицию Комиссии, в деятельности которой активное участие принимал А. М. Ляпунов, приведем краткие выдержки из подготовленной ею Записки.

«Настоящий чисто бюрократический строй университетов является ненормальным. . . Главным злом мы, по внутреннему самопознанию, признаем дух равнодушия, который явился необходимым результатом недоверия министерства к университетам и, как естественного последствия его, суровой излишней регламентации. Университеты превратились в канцелярии. . . Доверие к университетам прежде всего должно выразиться в замене бюрократического надзора свободой научного исследования и преподавания» [170, с. 260—262].

Наряду с оценкой положения, к которому привело

введение устава 1884 г., Комиссия выдвигает и обосновывает такие требования: «В основу всей университетской организации должно быть положено выборное начало: факультеты и советы должны выбирать профессоров и преподавателей, которые могут быть удаляемы от службы не иначе, как по постановлению совета. . . Желательно усиление власти совета, поднятие научного значения факультетов. . . Их компетенции нужно предоставить все вопросы, связанные с программами, распределением предметов, деятельностью научных студенческих кружков, окончательное назначение стипендий и пособий и ходатайство об освобождении от платы и печатание ученых сочинений. . . Необходимы улучшение средней школы и установление связи между нею и университетами, улучшение материального положения студентов, расширение и улучшение учебно-вспомогательных учреждений. . .» [170, с. 263—264].

Особого внимания заслуживает требование совета о допущении студенческих организаций и собраний: «Не предпрещая подробностей организации студентов и считая необходимым предоставить их выработку самой жизни, совет признает безусловно необходимым разрешать студенческие организации, имеющие в виду материальную взаимопомощь, научно-литературные и другие цели, не выходящие из круга чисто студенческих потребностей и интересов, так напр.: кассы взаимопомощи, столовые, библиотеки, научно-литературные кружки, землячества, курсовые и факультетские собрания и т. д. Инициатива в деле устройства студенческих организаций должна принадлежать самим студентам. . . Участие в этих организациях преподавательского персонала желательно по выбору студентов и с согласия совета» [170, с. 266]. Совет единогласно постановил возбудить ходатайство о допущении женщин на все факультеты на равных с мужчинами правах.

На борьбу с уставом 1884 г. и разработку основ нового устава были, таким образом, затрачены большие усилия. Однако практически все требования и предложения Харьковского и многих других университетов остались неудовлетворенными. Материальное положение большинства студентов оставалось плохим, надзор, доходивший до «чтения в мыслях и намерениях», полицейские формы, в которых этот надзор осуществлялся, раздражали студентов. «Молодежь чувствует себя заподозренной, отданной как бы под строгий полицейский

надзор инспекции, — говорилось в Записке упоминавшейся Комиссии. — Вынужденная этим держаться настороже, оскорбляемая этим непрерывным надзором и сыском, она начинает смотреть на представителей инспекции, как на врагов, — с недоверием, неуважением, боязнью и в то же время с ненавистью. . . »

Неудивительно поэтому, что студенческие волнения в Харьковском университете, как и в других университетах, были обычным делом. Если, например, в 1886 г. эти волнения носили локальный характер, то в 1887 г. они приняли широкие размеры: первоначально они вспыхнули в Москве, а затем быстро охватили почти все университеты России. Еще более усилились студенческие волнения в Харькове начиная с 1899 года, когда они стали приобретать форму организованных забастовок. В 1899—1902 гг. в Харькове за участие в этих волнениях и забастовках было исключено более 400 студентов. Доходило до насильственного прерывания чтения лекций отдельных преподавателей путем «химических обструкций», в результате которых преподавателей и некоторых студентов приходилось выносить из аудитории в обморочном состоянии.

Характерным является объяснение причин студенческих беспорядков и забастовок, данное Комиссией совета Харьковского университета. «Возникая на почве внутренних неурядиц и несовершенств устава, волнения эти, в течение своего развития, почти всегда получали некоторую политическую окраску, — отмечала Комиссия. — Администрация же и даже учебное начальство слишком уже просто объясняли причину волнений, приписывая ее проникновению в среду студенчества „злонамеренных людей“» [170, с. 312]. В этой «Записке» отмечалось, что университет выражает современное общество и есть лучший его барометр, а студенческие волнения служат ярким доказательством тесной, непосредственной зависимости университета от политических условий жизни.

Выдающиеся научные результаты, полученные А. М. Ляпуновым, не могли не обратить внимание крупнейших ученых России, зарубежных математиков и механиков. 17 ноября 1892 г. он был избран членом Московского математического общества, а 22 февраля 1894 года — действительным членом Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. Ляпунов был членом IX, X и XI съездов русских естествоиспы-

тателей и врачей, причем на последнем в 1901 г. он был избран почетным председателем Секции математики и механики съезда и членом Распорядительного комитета по этой секции.

Официальным признанием заслуг А. М. Ляпунова явилось избрание его членом-корреспондентом Академии наук по разделу математических наук, состоявшееся в декабре 1900 г. Менее чем через год, по представлению академиков А. А. Маркова и Н. Я. Сонина сорокачетырехлетний профессор Харьковского университета А. М. Ляпунов был избран ординарным академиком по кафедре прикладной математики, которая оставалась вакантной после смерти П. Л. Чебышева в течение семи лет.

О некоторых подробностях, связанных с выборами А. М. Ляпунова в Академию, мы узнаем из письма А. А. Маркова от 16 августа 1901 г. Говоря о своем давнем желании видеть А. М. Ляпунова своим товарищем по Академии, Марков сообщает ему о том, что комиссия остановилась на кандидатуре Ляпунова для замещения вакансии по прикладной математике. А. А. Марков пишет, что кроме Ляпунова был другой кандидат — профессор Н. Е. Жуковский, которого поддерживал Н. Я. Соинин, предлагавший избрать Ляпунова по линии чистой математики. Марков же, которому кандидатура Н. Е. Жуковского представлялась неподходящей, в свою очередь предлагал избрать Жуковского по линии физики. Однако Жуковский от избрания в Академию отказался [120].

Известно, что член-корреспондент Академии наук профессор Николай Егорович Жуковский, являясь признанным главой и научным руководителем московской школы механиков, снял свою кандидатуру, не желая покидать Москву. Таким образом, вопрос об избрании А. М. Ляпунова оказался решенным.

Утверждение А. М. Ляпунова ординарным академиком состоялось в октябре 1901 г. По условиям того времени избрание в академики требовало обязательного переезда в Петербург. Однако не таким человеком был Александр Михайлович, чтобы оставить университет, своих студентов и учеников в середине учебного года, не окончив курс лекций. Поэтому он испросил у Академии откомандирование в Харьковский университет до весны 1902 г. Просьба эта была поддержана ходатайством ректора об оставлении Ляпунова профес-

сором университета до 1 апреля 1902 г. Фактический же переезд Ляпунова в Петербург состоялся лишь в мае 1902 г.

Работы А. М. Ляпунова были высоко оценены и признаны. Тем не менее нашелся человек, и притом слывший опытным специалистом, который принял эти работы, можно сказать, «в штыки». Впрочем, его нападкам неоднократно подвергались также работы А. А. Маркова и самого П. Л. Чебышева. Этим человеком был московский профессор математики П. А. Некрасов. В своем письме Ляпунову от 16 марта 1901 г. Некрасов писал [128]: «Должен сказать Вам, что по моему глубокому убеждению в Ваших теоремах, как и в теоремах Чебышева есть ошибки. . . Если Вы эти теоремы еще обобщаете в том же направлении, то ошибки от этого еще усилятся. . . Почему Вы так спешите с выпуском в свет статей по вопросам, которые для Вас еще очень новы и в которых так много тонких осложнений, ускользающих при первом знакомстве?».

В «Математическом сборнике» за 1901 г. Некрасов выступил со статьей, содержащей критику результатов Ляпунова [192]. Некрасов утверждал, что статьи Ляпунова якобы содержат ошибки, и что в своих выводах Ляпунов пришел к результатам, содержащим все главные «недостатки» выводов его предшественников (Чебышева и Маркова). По мнению Некрасова, Ляпунов, так же как Чебышев и Марков, неправильно понимал понятие «предел», из-за чего и возникли эти их «ошибки». Нужно сказать, что для агрессивного полемического стиля П. А. Некрасова были характерны особенности, о которых позднее красноречиво написал К. А. Поссе.

«1) П. А. Некрасов любит поражать своего оппонента фразами, на вид очень глубокомысленными, а на деле весьма туманными, смысл которых или трудно уловить, или можно толковать по произволу, и 2) цитируя слова своего оппонента он иногда их изменяет и приписывает ему то, чего тот нигде и никогда не говорил» [203].

В своем ответе, опубликованном в «Записках Харьковского университета» [176], Александр Михайлович писал: «П. А. Некрасов приводит лишь весьма неопределенные общие рассуждения, из которых ничего нельзя вывести. . . Было бы лучше, если бы вместо общих рассуждений. . . П. А. Некрасов дал определенные указания, где именно в моих выводах встречаются те ошибки,

о которых он говорит, или, по крайней мере, подтвердил бы свои заявления каким-нибудь примером. . .

П. А. Некрасов совершенно неосновательно думает, будто я пошел далее Чебышева в обобщении данных относительно возможных значений переменных и их вероятностей. В этом направлении идти дальше Чебышева было некуда. Если же я пошел несколько далее, то совершенно в другом направлении, а именно: в обобщении условия, относящегося к математическим ожиданиям. . .

П. А. Некрасов смешивает два совершенно различных понятия: понятие о пределе с понятием об асимптотическом выражении функции. Критикуемые им авторы говорят везде о пределе и разысканием асимптотических выражений вероятности. . . не занимаются. . .» [176, с. 51, 56, 60].

Ляпунов отмечает, что Некрасов не потрудился внимательно ознакомиться с его статьей и ее не понял. Условие, которое высказал в своей теореме Чебышев, также «понимается П. А. Некрасовым совершенно неправильно» [176, с. 56]. В заключение своего «Ответа» Александр Михайлович пишет: «Из изложенного видно, что все возражения П. А. Некрасова основаны на различных недоразумениях; при том одни суть не более, как голословные заявления, которые при ближайшем рассмотрении всегда оказываются ни на чем не основанными, другие совсем не отвечают содержанию критикуемых статей или отличаются крайнею неопределенностью.

Подобные возражения не заслуживали бы ответа, если бы они не принадлежали бывшему профессору, притом лицу, много работавшему в рассматриваемой области и считающемуся в ней знатоком дела. Но здесь я высказал все, что было нужно, и если П. А. Некрасову угодно будет выступить с новыми возражениями такого же характера, я сочту себя вправе на них не отвечать» [176, с. 63].

Однако почти через 15 лет Ляпунову в составе Комиссии Академии наук вновь пришлось дать отповедь Некрасову, бывшему в ту пору членом совета министра народного просвещения. Комиссия Академии в своем заключении (1915) отметила неправильность взглядов Некрасова, необоснованность его критики работ корифеев отечественной математики. Время до-

казало полную правоту А. М. Ляпунова и чебышевской школы.

Уезжая из Харькова, А. М. Ляпунов оставил достойного преемника. Его ученик Владимир Андреевич Стеклов еще в 1896 г. был назначен исправляющим должность экстраординарного профессора при кафедре механики Харьковского университета, а 24 января 1902 г. в этом же университете состоялась защита его диссертации «Общие методы решения основных задач математической физики» на степень доктора прикладной математики. Через три месяца он был утвержден ординарным профессором по кафедре механики вместо А. М. Ляпунова. Высоко оценивая результаты многочисленных исследований Стеклова в области математической физики и механики Харьковское математическое общество избрало его своим председателем после отъезда А. М. Ляпунова.

Из других учеников А. М. Ляпунова следует отметить Н. Н. Салтыкова, ставшего экстраординарным профессором механики Томского технологического института, А. А. Потемню (сына видного русского лингвиста профессора Харьковского университета А. А. Потемни), а также Н. Н. Евдокимова.

Признанием заслуг Ляпунова перед наукой, Харьковским университетом и Харьковским математическим обществом было избрание его почетным членом этого общества в мае 1902 г. Среди других почетных членов были такие замечательные ученые как В. Я. Буняковский, Н. Е. Жуковский, А. А. Марков, А. Пуанкаре, П. Л. Чебышев, К. А. Андреев, Э. Пикар.

Узнав об этом избрании, Ляпунов был очень тронут. 13 мая 1902 г. он писал М. А. Тихомандрицкому [134].

Глубокоуважаемый Матвей Александрович!

Я чрезвычайно тронут полученным сегодня извещением. В избрании меня в почетные члены общества, состоявшемся в экстренном заседании, я вижу особенное к себе внимание со стороны дорогих и глубокоуважаемых моих сочленов, что составляет лучшую награду за мои скромные заслуги перед обществом.

В надежде, что связь моя с Харьковским математическим обществом не прекратится, прошу Вас передать обществу мою глубокую благодарность за оказанную мне высокую честь.

Примите уверения в моем глубочайшем уважении и преданности.

Ваш А. Ляпунов

В Ленинградском отделении Архива АН СССР хранится адресованное Ляпунову письмо видного мате-

матика, впоследствии почетного академика АН СССР и академика АН УССР Д. А. Граве, бывшего в 1879—1899 гг. профессором Харьковского университета. В этом письме, датированном 20 марта 1902 г., Граве пишет: «Два года совместной с Вами службы в Харьковском университете оставили в моей душе на всю жизнь самые светлые воспоминания. В Вас Харьковский университет лишается выдающегося Ученого, а профессора — прекрасного прямого человека и доброго товарища, принимавшего всегда к сердцу как нужды дорогого нам Университета, так и духовные и материальные потребности каждого из нас в отдельности. Позвольте мне издали пожать Вашу руку и пожелать Вам долгой и плодотворной деятельности на пользу науки» [122]. Эти слова хорошо выражают теплые чувства коллектива профессоров к Ляпунову, вступавшему в новый, петербургский период своей жизни.

Глава 5

Петербургская академия наук

I

К моменту переезда в Петербург А. М. Ляпунову было около 45 лет. Для академика немного. Однако в этом возрасте уже не просто менять привычный уклад жизни, круг ближайших друзей, характер занятий. Впрочем, вопросам быта, как и материальному благополучию Александр Михайлович никогда не придавал большого значения. В записных книжках А. М. Ляпунова, хранящихся ныне в Ленинграде [112], находим на первый взгляд малозначительные, но очень характерные детали, связанные с переездом в Петербург: сведения о подготовке к переезду, о сборе вещей. Основное внимание Ляпунов уделял тщательной упаковке и аккуратной перевозке книг: сведения о заботах по перевозке библиотеки фигурируют на первом месте записей Ляпунова.

Возвратившись в Петербург через 17 лет после своего отъезда в Харьков, А. М. Ляпунов вновь встретил своего старшего товарища по университету академика А. А. Маркова, своих бывших учителей — члена-корреспондента Академии наук профессора Д. К. Бобы-

леве, заслуженного профессора А. Н. Коркина, профессора, впоследствии — почетного члена Академии наук К. А. Поссе, а также А. Н. Крылова, бывшего в ту пору профессором Политехнического института и Института инженеров путей сообщения и заведующим Опытным бассейном Морского ведомства. С ними у Ляпунова возобновились и окрепли научные, творческие и личные связи.

В год переезда Ляпунова в Петербург в «Сообщениях» Харьковского математического общества была опубликована на французском языке его работа «Об основном принципе метода Неймана в задаче Дирихле» [31]¹, в которой Ляпунов с помощью особой доказанной им теоремы показал, что если принцип Неймана справедлив при условии, что исходная функция v_0 представляет собой предельные значения потенциала простого слоя с непрерывной плотностью, то он справедлив также в случае, если v_0 ограниченная интегрируемая на поверхности функция.

Другая большая работа Ляпунова, опубликованная в том же году и тоже на французском языке в «Записках Академии наук» [12]² имела название «Об одном ряде в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами» и представляла собой подробное изложение и развитие заметки, напечатанной ранее в «Comptes rendus» (1900 г.). В ней детально исследуется вопрос об ограниченности решений уравнения $x'' + p(t)x = 0$, где $p(t)$ — неотрицательная непрерывная периодическая функция. Таким образом, обе эти работы являются обобщением и дальнейшим развитием исследований харьковского периода научной деятельности А. М. Ляпунова.

Положение академика позволяло А. М. Ляпунову сосредоточить свои силы на научных занятиях. Он возвращается к задаче о фигурах равновесия, предложенной ему П. Л. Чебышевым еще 20 лет назад, в 1882 г. и до конца им еще не решенной. Вот что об этом впоследствии писал сам Ляпунов: «Я почти в течение 20 лет не занимался этим вопросом, будучи отвлечен другими занятиями, и только после избрания меня в Академию,

¹ Эта работа переведена на русский язык Н. О. Рахленко [43, с. 139—166].

² Перевод на русский язык см. в книге [45, т. 2, с. 410—472].

получив надлежащий досуг, вновь обратился к вопросу Чебышева» [42, с. 317]. Теперь Ляпунов обладает глубокими знаниями и обширным опытом, необходимыми для полного решения этой исключительно трудной задачи, он — в расцвете творческих и физических сил. Всю страсть своего сердца, неукротимую энергию и свое замечательное математическое дарование направляет Александр Михайлович на решение поставленной проблемы. «Он вернулся к той проблеме Чебышева, с которой начал свою деятельность и, существенным образом расширив ее постановку, в ряде обширных по объему и исключительных по силе анализа работ довел вопрос до конца», — писал впоследствии В. И. Смирнов [47, с. 17].



А. М. Ляпунов
(1885)

В самом начале этой работы Ляпунова чуть было не постигло глубокое разочарование. В феврале 1903 г. он узнал от В. А. Стеклова, что А. Пуанкаре выпустил книгу «Фигуры равновесия жидкой массы». Будучи поэтому уверенным, что Пуанкаре уже решил поставленную им себе задачу, Александр Михайлович приостановил свою работу в этом направлении. Впрочем, вскоре А. М. Ляпунов познакомился с книгой Пуанкаре и не нашел там доказательств существования фигур равновесия, близких к эллипсоидам Маклорена и Якоби. Ляпунов сделал вывод, что никаких новых результатов по сравнению с опубликованными еще 17 лет назад Пуанкаре не получил, и снова принялся за свое исследование.

Первая крупная работа Ляпунова этой серии была изложена в его мемуаре «Исследования в теории фигуры небесных тел», опубликованном в «Записках Академии наук» в 1903 году. Кратко освещая историю вопроса и причины, побудившие его приняться за это исследова-

ОБЩАЯ ЗАДАЧА
ОБЪ
УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ.

РАЗСУЖДЕНИЕ.
А. ЛЯПУНОВА.

Изданіе Харьковского Математическаго Общества.

ХАРЬКОНЪ.
Типографія Шталлерберга, Рыбнаго ул., № 22-й

1892.

Титульные листы научных работ А. М. Ляпунова

ние, Ляпунов отмечал, что результаты работ выдающихся геометров, решавших эту проблему до него, имеют ряд серьезных недостатков: невозможность получения старших приближений (А. К. Клеро), отсутствие решения вопроса о сходимости рядов, к которым приводит теория (П. С. Лаплас), недостатки анализа, связанного с попытками доказать законность разложения потенциала (С. Д. Пуассон).

В своем исследовании Ляпунов пошел принципиально новым путем, не применяя разложение, ранее использовавшееся Лежандром, Лапласом и Пуассоном. В качестве малого параметра у Ляпунова выступает уклонение поверхностей уровня от сферических и используется единственное весьма общее предположение, что плотность, являясь всегда конечной, непрерывно уменьшается от центра к поверхности жидко-

SUR LES FIGURES D'ÉQUILIBRE
PEU DIFFÉRENTES DES ELLIPSOÏDES
D'UNE MASSE LIQUIDE HOMOGÈNE
DOUÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION

PAR
A. LIAPOUNOFF.

PREMIÈRE PARTIE.
ÉTUDE GÉNÉRALE DU PROBLÈME.

(Révisé par l'auteur à l'Association Impériale des Sciences le 21 mars 1892).

ST.-PÉTERSBOURG.
IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.
Ericki Diter, 2^e Page, N° 22.
1890.

сти. Задача свелась к решению цепи интегро-дифференциальных уравнений, первое из которых представляет собой уравнение Клеро. Не довольствуясь этим результатом, Ляпунов подробно рассмотрел вопрос о сходимости рядов, к которым приводят последовательные приближения. Более того, в последнем параграфе его мемуара приведен пример, с полной определенностью доказывающий применимость результатов Ляпунова для решения задач небесной механики и сходимость рядов для случая Солнца. Тем не менее с присущими ему скромностью и стремлением к предельной точности Ляпунов отмечает, что его формулы, «хотя и много раз переделанные, еще недостаточно точны, чтобы можно было ими удовлетвориться. . . Для наиболее важных приложений они еще слишком грубы» [175].

Иначе звучит характеристика результатов этого исследования, данная В. А. Стекловым: «В течение це-

лого столетия первоклассные ученые пытались доказать законность такого разложения, но все их попытки оставались безуспешными. Александр Михайлович нашел выход из непреодолимого, по-видимому, затруднения, отбросив это разложение, заменив его другим. . . Установив законность изобретенного им разложения, он применил затем к решению вопроса метод последовательных приближений, дал способ составления приближений какого угодно порядка и, что особенно важно, доказал сходимостъ полученных им приближений, что до него никто из ученых и не пытался делать» [101, с. 24].

Нужно сказать, что эту и ряд последующих своих работ А. М. Ляпунов публиковал на французском языке и делал это, конечно, не случайно. Дело в том, что не только его знаменитые предшественники в этой области — А. К. Клеро, А. М. Лежандр, П. С. Лаплас, С. Д. Пуассон, но и современники Александра Михайловича, занимавшиеся этой и смежными проблемами — А. Пуанкаре, Ж. Адамар, Э. Гурса, Ш. Э. Пикар — были французами. Естественно поэтому, что Ляпунов стремился сделать свои работы в максимальной степени доступными этим ученым. Однако в настоящее время имеется возможность изучать работы Ляпунова по прекрасным переводам на русский язык [45].

Естественным продолжением предыдущей работы А. М. Ляпунова стало его новое исследование «Об уравнении Клеро и более общих уравнениях в теории фигур планет», также опубликованное в «Записках» Академии (1904). Более 160 лет прошло со времени выхода в свет знаменитой книги великого французского математика и механика Алексиса Клода Клеро «Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики» (1743 г.) [165]. Как известно, в этой работе Клеро поставил общую задачу о фигурах равновесия медленно вращающейся неоднородной жидкости и показал, что такой фигурой равновесия является эллиптический сфероид. Александр Михайлович в своем исследовании доказал, что каждое из встречающихся в предыдущей его работе 1903 г. обобщенных уравнений типа Клеро имеет одно определенное решение. Кроме того, Ляпунов ввел новое понятие интеграла и в терминах этого нового понятия рассмотрел обобщенное уравнение Клеро.

По своему положению и характеру занятий академик Ляпунов был далек от политических событий

в стране. Однако его не могли не волновать бурные события, происходившие в революционном Петербурге, тревожные сведения, поступающие от его брата Бориса Михайловича из Одессы, от бывших коллег по университету из Харькова.

Из писем Бориса Михайловича А. М. Ляпунов узнал о волнениях и забастовках студентов Новороссийского (Одесского) университета [127, л. 3—6]. Эти письма свидетельствуют о том, что Борис Михайлович пользовался уважением и доверием студентов, которые приглашали его на свои сходки [127, л. 7—12]. Ярко описал Б. М. Ляпунов бесчинства черносотенцев, еврейские погромы в Одессе, которая стала похожей на военный лагерь. В своих письмах Борис Михайлович выражает возмущение действиями полиции, которая не только не защищала избиваемых евреев, но зачастую сама участвовала в этих избиениях. Из писем Б. М. Ляпунова узнал Александр Михайлович и о гонениях на прогрессивных профессоров. В этот период возникли даже опасения за судьбу университета в Одессе, поскольку обозленная университетскими событиями городская администрация объявила университет революционным очагом и выступила против него с прямыми угрозами [127, л. 13—16].

II

Революционная буря 1905—1907 гг. привела в движение все классы русского общества. Выражением протеста передовой части ученых, профессоров и преподавателей высших учебных заведений страны против политики правительства, лишавшей народ элементарной грамотности, стала «Записка о современном положении и нуждах русской школы» («Записка 342 ученых»), опубликованная в январе 1905 г. в русских газетах [190]. В этой «Записке. . .» резко критиковалась политика царского правительства, «задерживающая духовный рост народа и ведущая государство к упадку». В качестве одного из главных требований выдвигалось требование о созыве народных представителей и отмечалась необходимость полного и коренного преобразования государственного строя. Наряду с этим в «Записке. . .» говорилось о тяжелом положении преподавателей высшей школы и о падении их научного и нравственного авторитета. В заключение отмечалось, что «тяжелые

испытания, переживаемые нашей родиной, с полной ясностью для всех показывают, в какую опасность ввергается народ, лишенный просвещения и элементарной законности».

Среди подписавших «Записку. . .» были 16 действительных членов Академии наук и среди них — А. М. Ляпунов³.

Президент Академии наук великий князь Константин Константинович не смог воздержаться от грубого окрика в адрес «своих» академиков, подписавших столь крамольный документ. Всем им было разослано циркулярное письмо от 4 февраля, в котором президент бросил академикам обвинение в том, что, дескать, они, выступая против правительства, в то же время не отказываются получать от него казенное содержание. Другое обвинение великого князя состояло в том, что обращаясь к вопросам государственного значения вместо «служения науке» и «усовершенствования способов преподавания» академики занимаются не своим делом. Что касается ухудшения положения в русской школе и падения авторитета преподавателей высших учебных заведений, то президент обратил направленные в адрес правительства обвинения против самих же академиков, отметив, что они сами нарушают законность, возбуждают молодежь и тем самым теряют свой авторитет. Таким образом, академики, среди которых были выдающиеся люди своего времени и заслуженные деятели науки, приравнивались к чиновникам, обязанным слепо и неукоснительно повиноваться начальству.

Академики дали достойную отповедь великому князю. И. П. Бородин тотчас же подал прошение об отставке. Не зная, как поступить с этим прошением и опасаясь отставки других академиков, президент совещался 22 февраля с непременным секретарем Академии академиком С. Ф. Ольденбургом (также подписавшим Записку), но ни к какому решению не пришел

³ Кроме А. М. Ляпунова «Записку 342 ученых» подписали академики Ф. Ф. Бейльштейн, Н. Н. Бекетов, И. П. Бородин, А. Н. Веселовский, К. Г. Залеман, В. В. Заленский, А. С. Лаппо-Данилевский, А. А. Марков, Ф. В. Овсянников, С. Ф. Ольденбург, В. В. Радлов, А. С. Фаминцын, Ф. Н. Чернышев, А. А. Шахматов и И. И. Янжул. Позднее «Записку» подписали еще многие ученые (к концу февраля 1905 г. их количество достигло 1500) и среди них — семнадцатый академик — В. О. Ключевский.

[166]. В это время на имя президента начали поступать письма академиков — ответы на циркулярное письмо великого князя.

Одним из первых 22 февраля направил свой ответ президенту А. А. Марков. Он писал: «Прежде всего считаю необходимым заявить, что я не могу изменять своих убеждений по приказанию начальства. Затем, как профессор университета, преподающий «Дифференциальное и интегральное исчисление» и «Теорию вероятностей» я покорнейше прошу. . . обратить внимание на то, что высшие учебные заведения вообще не находятся в ведении Академии наук, и что о способах преподавания того или другого предмета могут судить правильным образом только лица, владеющие этим предметом. Наконец, усматривая в записке предложение выйти в отставку, честь имею доложить Вашему Императорскому Высочеству, что я немедленно оставляю Академию, как только общее собрание признает мое пребывание в ней излишним. . .» [166].

Отвергая оскорбительное обвинение президента в получении казенного содержания от порицаемого правительства, академик В. В. Заленский в своем письме от 23 февраля указывал, что деньги эти берутся с народа, и правительство только выдает их; он же, Заленский за особые услуги правительству денег никогда не получал. «Это жалованье дается не для того, чтобы мы не порицали правительство, а для того, чтобы мы работали на благо русского народа и русского государства», — писал 22 февраля академик Шахматов. Он подчеркнул в своем письме, что подписав «Записку 342 ученых» он только выполнил свой гражданский долг, а молчание в данных условиях было бы преступным. Шахматов обвинил царское правительство в полной бесплодности его деятельности в области народного просвещения. Далее Шахматов писал, что это «привело нас к мысли о безусловной необходимости такого государственного порядка, при котором законодательная власть осуществлялась бы при более нормальных условиях, при которых администрация функционировала бы под контролем самой страны. Таков смысл нашей записки, нашего порицания правительства».

«Нигде законом не требуется, чтобы находящиеся на государственной службе лица не могли бы иметь своего особого мнения и обязаны были бы лишь восхвалять правительственные распоряжения, — писал

4 марта академик А. С. Фаминцын. — Не подавать в отставку, а твердо бороться за свои взгляды, хотя бы с риском потерять занимаемый на государственной службе пост, представляется мне прямою обязанностью гражданина. . . Я беру на себя смелость утверждать, что в данном частном случае господа ученые, подписавшие записку (число которых возросло до 1500 лиц) повинуюсь единственно голосу совести, заслуживают не порицания, высказанного в циркулярном обращении, а полного сочувствия и уважения со стороны лиц, которым близки к сердцу судьбы нашего отечества». Фаминцын указывал, что истинным виновником понижения авторитета и обезличения профессорской коллегии является министерство народного просвещения и введенный им устав 1884 г. «Вполне естественно, что ставленники министерства не могут пользоваться тем уважением и доверием, которым пользуются вступившие в академическую среду благодаря исключительно своим знаниям и личным заслугам», — писал в связи с этим старейший академик Ф. Ф. Овсянников в своем письме президенту от 1 марта 1905 г. И с горечью добавлял: «Молчать в данный момент — значит одобрить все, что одобрять мы не можем. . . Можно ли требовать от общества, исстрадавшегося, прожившего целые месяцы в тревоге, проливающего потоки крови и слез, чтобы оно спокойно взирало на горе страны и своим молчанием закрепляло дальнейшую гибель отечества?».

Одним из первых, 23 февраля 1905 г. направил свой ответ президенту Академии А. М. Ляпунов [133]. В этом ответе позиция Александра Михайловича изложена очень четко и потому текст этого документа стоит привести полностью.

Ваше Императорское Высочество!

Циркуляр, с которым угодно было Вашему Высочеству обратиться к академикам, подписавшим известную записку, содержит осуждение их поступка, признаваемого незаконным и способным усилить волнение учащихся. Вместе с тем против подписавших записку циркуляр выставляет обвинение в недостаточно добросовестном исполнении ими их обязанностей. Такое отношение Вашего Императорского Высочества к поступку названных академиков не могло не вызвать с их стороны желания прямо и открыто высказать, как они смотрят на дело, и я с своей стороны считаю своим нравственным долгом представить на благовозрение Вашего Высочества нижеследующее.

Подписывая записку, мы не считали и не считаем, что нарушали какой-либо закон. Мы думаем, что всякий гражданин имеет право откровенно высказать свое мнение во вопросу,

близко стоящему к тому делу, которому он себя посвятил. А кому же, как не ученым и профессорам, ближе всего дело просвещения в нашем отечестве? Если мы пришли к выводу, совпадающему с резолюцией съезда земских деятелей, то это вполне естественно, так как ученое и учебное дело более всего страдает от господствующего у нас бюрократического строя. При том мы откровенно высказали лишь то, чего желает большинство просвещенных людей в нашем отечестве, и о чем недавно возведено с высоты престола. Далекие от мысли, что своим поступком мы нарушили какую-либо законность, мы напротив считали, что наша прямая обязанность была высказать, в чем мы видим исход из настоящего тяжелого состояния. На нас лежал этот нравственный долг перед отечеством, которому мы обязаны своим высоким положением, и перед народом, из средств которого составляется получаемое нами казенное содержание.

Подписывая записку, мы были также далеки от мысли, что поступок наш может усилить волнение учащихся. Мы не могли так думать, зная близко настроение умов нашей молодежи и причины, вызывающие студенческие волнения. Напротив, думаю, записка наша способна была несколько умерить волнения, которые, несомненно, приняли бы значительно более резкие формы, если бы в настоящий серьезный момент нашей исторической жизни профессора и ученые остались безгласными.

Что касается, наконец, упрека в недобросовестном исполнении нами наших прямых обязанностей, то на чем основано это тяжелое обвинение? Неужели же основанием ему послужило лишь подписание известной записки? Бывают моменты, когда честные люди не должны и не могут молчать, и когда даже люди, исключительно посвятившие себя науке и никогда ранее не интересовавшиеся политикой, не могут оставаться безучастными к общественным вопросам; и если люди науки высказываются в такой момент, то это не значит, что они забыли свои прямые обязанности. Ведь между подписавшими записку немало встречается всем известных имен — профессоров, которые своею деятельностью заслужили всеобщее уважение, и ученых, которые своими трудами приобрели всемирную известность.

Вот, Ваше Императорское Высочество, те мысли, которые я считал своим долгом здесь высказать.

Вашего Императорского Высочества всепреданнейший
академик А. Ляпунов.

23 февраля 1905 года.

Президент оказался в полной растерянности. Он не ожидал столь решительного отпора, такого единодушия академиков. Ему уже представлялись, как он выразился в своем аристократическом стиле в беседе с академиком С. Ф. Ольденбургом, «*guerre à outrance*»⁴, роспуск Академии и прекращение борьбы «*faute de combattants*»⁵ [166]. Но больше всего беспокоило великого князя то, что последнее слово осталось за

⁴ Война до крайности (фр.).

⁵ Из-за отсутствия бойцов (фр.).

«крамольными» академиками. Правитель дел Академии наук В. Е. Кеппен посоветовал президенту выступить на заседании Общего собрания с примирительной речью. Эта речь, составленная В. Е. Кеппеном и прочитанная президентом на общем собрании 5 марта была, в сущности признанием собственного поражения «его императорским высочеством».

Разумеется, на фоне революционных выступлений трудящихся этот демарш академиков носил частный, незначительный характер. Однако «Записка 342 ученых» сыграла определенную роль в отмене университетского устава 1884 г.⁶

III

Еще в начале академической деятельности (в октябре 1902 г.) А. М. Ляпунов напомнил Академии о том, что в 1907 г. исполнится 200 лет со дня рождения Леонарда Эйлера, и вместе с А. А. Марковым выступил с инициативой издания полного собрания сочинений Эйлера [174]. Александр Михайлович заявил на Общем собрании Академии, что такое издание было бы наиболее достойным предприятием в честь великого математика, механика, физика и астронома. Ляпунов и Марков отметили, что только своими силами Академия, видимо, не сможет справиться с таким сложным делом, однако ей должен принадлежать в этом почин.

Как известно, творческая деятельность одного из величайших математиков всех времен Леонарда Эйлера была необычайно продуктивной и не ограничивалась одной математикой. Он был одновременно замечательным естествоиспытателем, философом.

Список трудов Эйлера содержит около 900 наименований. Его переписка примерно с 300 лицами составляет около 5000 писем (примерно треть этого количества утеряна). Письма Л. Эйлера, всегда аккуратно отвечавшего своим корреспондентам, представляют собой зачастую короткие сочинения. В них Эйлер давал советы, ставил новые задачи, объяснял возможные ошибки, давал оценку деятельности отдельных ученых или государственных деятелей. Работоспособность и продук-

⁶ Как известно, в 1905 г. этот устав был отменен. 27 августа 1905 г. были изданы «Временные правила», в некоторой степени облегчившие положение в университетах. Позднее министры Шварц, затем — Кассо вернули университеты к уставу 1884 г., который действовал вплоть до 1917 г.

тивность Л. Эйлера, которого современники называли «человеком-дьяволом», непрерывно возрастали на протяжении его жизни. «Если в первые 14 лет научной деятельности им было написано 80 работ объемом около 4000 печатных страниц, то в последние 14 лет несмотря на слепоту, творения Эйлера превысили 350 названий объемом примерно в 8000 страниц», — писал немецкий математик и историк науки Р. Тиле [217, с. 8]. Слепой ученый диктовал в конце жизни ученикам свои мемуары по всем направлениям математики и механики. Он издал ряд монографий по теории чисел, навигации, диоптрике, написал знаменитое произведение «Письма к немецкой принцессе», в котором трактуются вопросы физики, философии, логики, теории музыки, этики. Это произведение по праву считается шедевром научно-популярной литературы. При жизни Л. Эйлера была опубликована лишь небольшая часть его трудов. Например, в Ленинграде до настоящего времени хранятся тысячи страниц неопубликованных манускриптов Эйлера.

Научные интересы Эйлера охватывали всю математику и все основные области естествознания, к которым можно было применить математические методы. «Несравненный Эйлер, князь математиков», — так называл его Иоганн Бернулли-старший, его учитель. «Он вычисляет, как другие дышат», — говорили современники. А великий Лаплас призывал впоследствии: «Читайте Эйлера, он — учитель всех нас». Видный знаток наследия Л. Эйлера и его времени А. П. Юшкевич характеризует весь XVIII век как эпоху Эйлера.

Много и продуктивно работал Л. Эйлер в России, являясь в течение 47 лет с 1726 г. до последних дней жизни академиком Петербургской академии наук. Здесь он создал многие открытия, публикуя свои труды как в Петербурге, так и в Берлине.

Сам Эйлер сказал однажды графу В. Г. Орлову, занимавшему пост директора Академии, что после его смерти останется столько рукописей, что Академия будет печатать их в течение 20 лет [217, с. 155]. Однако ученый ошибся: история издания его трудов насчитывает уже два столетия и все еще не завершена. В тридцатые годы прошлого века считалось, что все работы Эйлера уже опубликованы, однако вскоре правнук Эйлера П. Фусс обнаружил новые, еще неизданные рукописи ученого. П. Фусс и К. Г. Якоби поставили перед собой задачу подготовить к изданию полное собрание сочинений

Эйлера, рассчитывая завершить эту работу к 1862 г. Однако из-за огромного объема наследия Эйлера и недостатка необходимых средств осуществить это оказалось невозможным. Невольно вспоминаются насмешливые слова Вольтера, сказанные им о самом себе: «Трудно дойти до потомков с таким багажом».

Творческое наследие Эйлера очень интересовало русских ученых. Как сказал Н. Я. Сонин, издание трудов Эйлера воздвигнет ему «лучший, какой только возможно, и наиболее прочный памятник, . . . окажет незабываемую заслугу пред наукою и обяжет благодарностью к себе всех математиков как современных, так и отдаленных грядущих поколений». К этому следует добавить, что среди русских академиков — почитателей гения Эйлера, были не только математики, но и ученые других специальностей: ботаник А. С. Фаминцын, физик и геофизик Б. Б. Голицын, астроном О. А. Баклунд и другие.

Специальная комиссия Академии наук в составе академиков К. Г. Залемана, А. А. Маркова, Б. Б. Голицына и А. М. Ляпунова под председательством академика А. С. Фаминцына предложила осуществить издание полного собрания трудов Л. Эйлера совместно с Берлинской академией наук, действительным членом которой состоял Эйлер. Берлинская академия сначала согласилась принять участие в этом предприятии, однако позднее, после трехлетней переписки ответила категорическим отказом, мотивы которого приведены были в письме академика Берлинской академии А. Ауэкса от 7 февраля 1907 г.

«В настоящее время у представителей соответствующих отраслей преобладает мнение, что организация издания полного собрания трудов Эйлера в основном означала бы, что великому ученому XVIII столетия сооружен заслуженный памятник, но наука от этого не может извлечь пользы, которая бы сколько-нибудь соответствовала усилиям и средствам, необходимым для сооружения такого памятника. Как исторические документы сейчас достаточно доступны, в частности, произведения, опубликованные в трудах Берлинской и Петербургской академий, и более поздние собрания сочинений. . . Разумное соотношение между затратами и пользой имело бы место, если бы было организовано издание избранных произведений вместо полного собрания, причем разделы по астрономии и физике в со-

ответствии с прежним планом оказались бы весьма небольшого объема. Такое собрание избранных произведений оказалось бы памятником, достойным их великого автора. . .» [142].

Такой подход, конечно, не позволил бы сохранить для последующих поколений многие произведения Эйлера. Поэтому вскоре после своего возвращения из Рима, куда он ездил для участия в Международном математическом конгрессе, А. М. Ляпунов снова поднял вопрос об издании полного собрания трудов Эйлера перед Академией наук. «IV Международный математический конгресс, собиравшийся в прошедшем году в Риме, признавая в высшей степени важным издание полного собрания сочинений Эйлера, постановил просить Международный союз академий принять это предприятие, задуманное в Швейцарии, под свое покровительство, причем высказал пожелание, чтобы Петербургская и Берлинская академии приняли в нем участие», — сказал Ляпунов на Общем собрании Академии 11 апреля 1909 г.

Действительно, еще в 1907 г. в связи с празднованием 200-летия со дня рождения Эйлера на его родине в Швейцарии по инициативе профессора Фердинанда Рудио был поднят вопрос об издании полного собрания трудов Эйлера. Но только в сентябре 1909 г. Швейцарское общество естествоиспытателей приняло окончательное решение взяться за этот титанический труд.

Усилия А. М. Ляпунова в Академии наук поддержал Н. Я. Сонин. Он сообщил Академии, что Швейцарским обществом естествоиспытателей образована для решения этой задачи особая Эйлеровская комиссия под председательством Ф. Рудио. Сонин предложил поддержать начинание Швейцарского общества и оказать ему всемерную помощь: предоставить в распоряжение Эйлеровской комиссии весь имеющийся в Академии материал, который может потребоваться для наилучшего исполнения издания, и по примеру Парижской Академии наук подписаться на значительное количество экземпляров, приняв меры к распространению их по университетам и другим учреждениям страны.

На заседании Академии от 2 мая 1909 г. академик Б. Б. Голицын известил собрание о поступлении в Академию циркуляра о поддержании путем пожертвований или подписки издания полного собрания сочинений Эйлера, предприняемого Швейцарским обществом

естествоиспытателей. После обсуждения, во время которого выступили Н. Я. Сонин и О. А. Баклунд, было решено ассигновать на печатание этого издания 5000 франков и подписаться на 40 экземпляров. Была, кроме того, избрана Комиссия для рассмотрения хранящегося в Архиве Академии материала, касающегося ученой деятельности Эйлера и подлежащего передаче в Эйлеровскую комиссию. В состав комиссии вошли академики А. М. Ляпунов, О. А. Баклунд, К. Г. Залеман, А. А. Марков, Н. Я. Сонин и Б. Б. Голицын.

Нужно сказать, что подготовка издания трудов Эйлера продемонстрировала глубокое уважение жителей разных стран к великому ученому и к науке. В сборе средств приняли участие многие научные общества и организации. Благодаря жертвованиям, в которых участвовали даже школьники, было собрано около 125000 франков.

Каким представлялось это капитальное издание его инициаторам? В собрании эйлеровских сочинений «Opera omnia Leonardi Euleri», разделенном на три серии (математика, физика и разное), первоначально было решено ограничиться, в основном, трудами, подготовленными к печати самим Эйлером. Таким образом, предполагалось издать 35 томов и поместить в них около 600 работ на латинском языке, около 140 работ — на французском, и несколько — на немецком. Однако к тому времени, когда в издательстве Б. Г. Тейбнера вышел первый том этого издания, шведский математик Г. Я. Энестрем опубликовал более полный список произведений Л. Эйлера, включавший уже 866 наименований. Поэтому комиссия по изданию трудов Эйлера пришла к выводу о необходимости увеличить число томов собрания до 72.

Так началось издание грандиозного собрания сочинений Леонарда Эйлера — предприятие, у истоков которого стоял А. М. Ляпунов. В частности, Александр Михайлович участвовал в редактировании и подготовке к печати второго и третьего томов сочинений Л. Эйлера [231]. Это — первые тома большой, включающей 29 томов, серии I, изданной под общим названием «Математические работы». В Ленинградском отделе Архива АН СССР хранятся письма профессора Ф. Рудио к Ляпунову (1912—1914 гг.), связанные с этой работой Александра Михайловича [129].

Международная деятельность по изданию наследия

Эйлера переживала большие трудности в период двух прошедших мировых войн. Но добрая воля преодолела эти трудности, и в настоящее время основная работа позади. Так, выпуск первой серии завершен в 1956 г. В настоящее время Академия наук СССР совместно со Швейцарским обществом естествоиспытателей осуществляет издание четвертой серии в объеме 13—15 томов, которая будет выпущена базельским издательством Биркхеузера. В эту серию будут включены известные письма Эйлера (около 300), неопубликованные рукописи, записки и записные книжки.

IV

Заметным событием в жизни А. М. Ляпунова стал IV Международный математический конгресс, состоявшийся в Риме с 6 по 11 апреля 1908 г., куда Ляпунов был командирован Академией наук. Как обычно, Ляпунов отправился в эту поездку не один, а вместе с Натальей Рафаиловной. Петербургским университетом на конгресс был командирован В. А. Стеклов, переехавший еще в 1906 г. из Харькова в Петербург на кафедру математики Петербургского университета.

Подробные сведения о путешествии Ляпуновых сохранились в письмах Александра Михайловича брату Б. М. Ляпунову. В этих письмах Александр Михайлович много внимания уделяет описанию природы тех мест, где ему и Наталье Рафаиловне довелось побывать во время этого путешествия, рассказывает о встречах, которые у них были. Что касается научной стороны дела, то о ней можно узнать из отчета Ляпунова [177].

Путь Ляпуновых лежал в Вену через Вильно, Гродно и Варшаву, и в письмах Ляпунова подробно описывается приближение весны по мере движения экспресса на юго-запад. В Вене Ляпуновы посетили академика И. Я. Ягича. В теплой дружеской беседе вспомнили многих общих знакомых, и время пролетело быстро.

На следующий день Ляпуновы двинулись далее на юг и поднялись на высоты Земмеринга. Относительно теплая погода Вены сменилась настоящей зимой со снегом и вьюгой. «Не только отдаленный пейзаж, но и ближайшие предметы скрылись за белой пеленой, — писал А. М. Ляпунов брату. — Благодаря снежной вьюге не пришлось увидеть самой красивой части пути. Но после перевала, по мере того как спускались по

южным склонам к Адриатическому морю, снег исчез и опять зазеленела трава. . . Заходящее солнце стало освещать обступавшие со всех сторон горы. Пейзаж становился все живописнее. . . Вечером были уже у австро-итальянской границы, а поздно ночью (около 11 ч.) в Венеции. Побыв двое суток в Венеции, где осмотрели памятники старины и покатались в гондоле при ясной, прохладной погоде, двинулись 22 марта с утренним поездом в Рим. Проехав Местре, долго ехали по совершенно открытой равнине, местами залитой водой и окаймленной на севере виднеющимися в тумане Альпами. Путь шел на Падую (часа полтора от Венеции) и Болонью. До Болоньи местность была довольно низкая. Луга и поля с плохо развивающейся растительностью. В Болонью приехали около полудня. . . Вскоре появляются горы — предгорья Апеннин. Дорога поднимается все выше. . . Весна настолько запоздала, что уже на высоте 400—500 м и деревья и кустарники стоят даже без почек, и трава исчезает. Весь пейзаж делается серо-желтым» [46, с. 16].

Далее Ляпунов подробно описывает перевал через Апеннины, проезд через Флоренцию, и наконец, прибытие в Рим «около 11 ч. в совершенном мраке и под проливным дождем». Уже с утра следующего дня Ляпуновы осматривали старинные здания и другие исторические памятники Рима — Капитолийский холм, Палатин, Форум.

На следующей день вечером состоялось предварительное заседание членов конгресса, на котором ректор Римского университета приветствовал гостей. Это заседание предназначалось для того, чтобы познакомить гостей друг с другом. Однако собравшихся было очень много, а университетский зал был слишком тесен для сколько-нибудь продолжительных бесед. Все свелось к мимолетным встречам случайного характера. Поэтому на первом собрании Ляпунов не смог завязать интересовавшие его контакты и поговорить о волновавших его научных вопросах. Более того, и позднее организаторы конгресса не предприняли ничего, чтобы обеспечить возможность личных контактов между приехавшими учеными. Поэтому хотя в числе участников съезда были французские математики, научные контакты с которыми особенно интересовали Ляпунова (Г. Дарбу, Э. Пикар, А. Пуанкаре, Ж. Адамар, Э. Гурса), он смог познакомиться только с Пикаром, Адамаром и Гурса,

да и то мимоходом. К сожалению, А. М. Ляпунову так и не удалось познакомиться лично с А. Пуанкаре, с которым Александр Михайлович имел переписку еще с 1885 г. и исследования которого соприкасались с его собственными.

Как сообщает А. М. Ляпунов в своем отчете, официальное открытие конгресса состоялось 6 апреля в Капитолии, в присутствии короля. Прозвучали приветственные речи синдика города Рима, Президента организационного комитета и министра народного просвещения. С подробным докладом о развитии математики в Италии во второй половине XIX столетия выступил Вито Вольтерра.

Ляпунов посещал преимущественно заседания секции механики, математической физики и геодезии, ожидая услышать там наиболее интересные для себя доклады. На одном из секционных заседаний он был председателем. Однако Александра Михайловича постигло разочарование: секционные доклады носили слишком частный характер и не относились к области интересовавших его вопросов. Зато ему очень понравились сообщения Г. Дарбу «Методы и проблемы дифференциальной геометрии», Э. Пикара «Анализ соотношений математической физики», Д. Веронезе «Неархимедова геометрия» и С. Ньюкомба «Теория движения Луны: история и современное состояние» [177]. Эти сообщения, в которых видные ученые дали очерки развития отдельных направлений науки, Ляпунов в своем отчете назвал «мастерскими». Кроме того, внимание Александра Михайловича привлекли сообщения М. Г. Миттаг-Леффлера «Об арифметическом представлении обобщенных аналитических функций одной комплексной переменной» и Э. Р. Форсайта «О современных возможностях формального интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными».

Заккрытие математического конгресса состоялось в общем собрании 11 апреля. Перед окончанием конгресса было выделено время для осмотра памятников дореспубликанской и республиканской эпох древнего Рима. Кроме того, была организована поездка делегатов на дачу Адриана и в Тиволи, где гости осмотрели грандиозные водопады.

Утром 13 апреля Ляпуновы выехали из Рима в Неаполь. Погода не благоприятствовала путешественни-

кам: всю дорогу их сопровождало непроглядное ненастье. И все же пригороды Неаполя произвели большое впечатление. Особенно запомнился Александру Михайловичу величественный силуэт Везувия, возникший словно привидение сквозь завесу дождя, и апельсиновые сады, протянувшиеся с обеих сторон дороги. Очень понравился Ляпуновым и сам Неаполь, в особенности его набережная с очень хорошо ухоженным садом, большими латаниями и финиковыми пальмами. После осмотра Неаполя, острова Капри и Помпеи Ляпуновы отправились в Сицилию. Утром 21 апреля они прибыли в Мессину, а оттуда ездили в Таорми и Палермо, где А. М. Ляпунов посетил некоторых итальянских математиков.

«К сожалению, конец путешествия в письмах не сохранился, — пишет Б. М. Ляпунов, — и я слышал о нем лишь устный рассказ А. М., а потому не могу назвать имен математиков, посещенных им в Сицилии. . . Но кажется, один из них был Roberto Marcolongo. С ним А. М. Ляпунов поддерживал письменные связи после путешествия. Кого он посетил в Палермо, не помню. Часто слышал я от брата имя итальянского механика Леви-Чивита» [46, с. 17].

Из кратких пометок в записной книжке Ляпунова мы узнаем, что обратный путь Александра Михайловича и Натальи Рафаиловны лежал через Неаполь, Флоренцию и Верону. Далее Ляпуновы посетили Инсбрук, Зальцбург, Вену и через Варшаву вернулись в Петербург [112].

V

После возвращения А. М. Ляпунов немедленно возобновил напряженную научную работу и активную деятельность в Академии. Так, в протоколах заседаний физико-математического отделения Академии можно встретить многочисленные сведения о его участии в Комиссиях по присуждению премий Академии наук. Например, в 1905 г. Ляпунов подготовил записку о научных трудах Дж. У. Хилла и представление его к награждению премией Академии.

Александр Михайлович рассмотрел и дал заключения о многих работах отечественных математиков, механиков и физиков. Эта подчас незаметная и малоиз-

вестная сторона деятельности Ляпунова сыграла серьезную роль в отборе наиболее интересных работ, влияла на становление отечественных исследователей, особенно молодых. Характерным в этом отношении является заключение А. М. Ляпунова о работе 27-летнего И. М. Рабиновича, в будущем — видного советского ученого. Отдав должное работе молодого исследователя и подтвердив правильность его результатов, Ляпунов отметил, однако, что эти результаты в значительной мере уже известны, и что данное направление исследований нуждается в дальнейшем развитии. Заключение Ляпунова стимулировало работу молодого ученого в области кинематического метода.

Но не только в работе научных комиссий Академии наук проявлялась кипучая деятельность Ляпунова в этот период. Много внимания уделял он вопросам общественной жизни и практики, облегчения положения в печати, делу организации научных исследований. Известно, например, совместное заявление А. М. Ляпунова и А. А. Маркова о мерах, направленных на немедленное облегчение положения в печати (1905). В этом заявлении было выражено требование «немедленно обратиться к Министру внутренних дел с предложением приостановиться в применении права произвола, которое предоставлено ему действующим уставом о цензуре» [113]. Значительную роль сыграли деятельность Ляпунова в Комитете Главной физической и Главной астрономической обсерваторий, предложение Александра Михайловича совместно с группой других академиков о дальнейшей судьбе физической обсерватории (1908 г.) [115]. В период войны, когда официальное руководство Академии сочиняло слащавые приветственные письма и телеграммы в адрес командования царскими войсками, Александр Михайлович выступил по вопросу о мерах к уничтожению возможных эпидемий [116, 117]. Александр Михайлович указал, что «настоящая война по количеству жертв небывалая», что с наступлением весны возникает грозная опасность эпидемий, связанная с разложением трупов. Он предложил их сжигать и потребовал срочно обратить внимание правительственных и командных кругов на эту проблему. Однако в соответствующем протоколе мы находим характерную помету: «Отклонено».

Примечательным было участие А. М. Ляпунова в работе комиссии по календарному вопросу в России

[114, 188]. Нужно сказать, что по этому важному для жизни государства вопросу среди академиков не было единого мнения. Например, О. А. Баклунд отмечал, что с точки зрения точности нет надежно установленных преимуществ одного календаря перед другим. Н. Я. Сонин призывал к осторожности в деле изменения календаря, учитывая авторитет и влияние церкви. Обращая внимание на то, что день православной пасхи вычисляется по юлианскому календарю, Сонин отмечал, что лишь «Собор православной церкви может установить новый порядок, на что он едва ли решится, чтобы не вступить в непримиримое противоречие со старобрядцами». И только Ляпунов вполне решительно и последовательно выступал за переход от юлианского календаря к грегорианскому, указывая, что в этом вопросе следует становиться не на научную, а на практическую точку зрения. «Важно не то, чтобы принять более точное летоисчисление, чем существующее, а то, чтобы летоисчисление было одинаковым у всех цивилизованных народов», — отмечал Ляпунов. Возражая Н. Я. Сониному, Александр Михайлович заметил, что нет надобности заниматься церковной стороной вопроса. «Пусть церковь сохраняет, если находит это нужным, юлианский календарь, — сказал во время обсуждения этого вопроса Ляпунов. — Важно лишь, чтобы в международных сношениях и во всех проявлениях гражданской жизни был принят грегорианский стиль» [188].

Мнение А. М. Ляпунова оказало решающее влияние на Комиссию, которая в своем решении высказалась за желательность перехода от юлианского календаря к грегорианскому.

В 1915 г. А. М. Ляпунов принял участие в работе комиссии Академии наук по обсуждению вопросов, связанных с преподаванием математики в средней школе. Эта комиссия, в состав которой кроме Ляпунова входили академики А. А. Марков и В. А. Стеклов, а также члены-корреспонденты Академии наук Н. Я. Цингер, Д. К. Былев и А. Н. Крылов, подвергла резкой, сокрушающей критике проект введения в курс средней школы элементов теории вероятностей, выдвинутый профессором П. А. Некрасовым и директором Урюпинского реального училища П. С. Флоровым. Содержание этого проекта, его обоснование и некоторые материалы, связанные с его обсуждением, были опубликованы в Журнале министерства народного просвещения за 1915 г. [158].

Кроме введения некоторых положений теории вероятностей этот проект предусматривал использование новых толкований важнейших понятий и определений анализа, входивших в курс средней школы — понятий о бесконечно малых величинах и о пределе. В чем же состояла «новизна» этих толкований?

Предлагаемые Некрасовым «нововведения» противоречили принятому и признанному наукой понятию о бесконечно малых величинах. Утверждая, что необходимо делать различие между двумя понятиями о бесконечно малой величине, Некрасов писал: «Эти понятия суть: потенциальное (как ожидания, вожделения, возможности) и актуальное (истинно-действительное)». Некрасов требовал пересмотра понятия о пределе, основанного, как он утверждал, на «злоупотреблении логикой». «К несчастью для школы, — писал Некрасов, — дурная математическая теория познания пустила глубокие корни в петроградских болотах, заволакивающих вредными испарениями действительные светила науки и ее преподавания» [193].

Против такого проекта требовались активные действия, поскольку его реализация грозила большими бедами средней школе. Видные математики и физики выступили против этого проекта (К. А. Поссе, Б. Б. Голицын, Б. М. Коялович и другие). Например, К. А. Поссе писал [203], что учение А. А. Маркова и его единомышленников, против которого ополчился Некрасов, унаследовано ими от их знаменитого учителя Чебышева и «требует не только в вопросах об основаниях математики, но и во всех ее частях, не исключая и теории вероятностей, ясных определений, строгих доказательств, умения отличать теорему от эмпирической формулы, и избегая туманной метафизики». Профессор Б. М. Коялович в своем ответе на вопросы департамента народного просвещения писал: «Что же касается курса теории вероятностей, то я (не скрою) почувствовал даже некоторое опасение, когда увидел, что сам автор доклада (г. Флоров) излагает основную теорему Якова Бернулли совершенно неверно. . . Вообще, все, сказанное г. Флоровым. . . представляет собою, по моему мнению, одну сплошную ошибку и недоразумение, и я очень боюсь, как бы в результате введения курса теории вероятностей в нашу среднюю школу не получились бы у наших учеников такие же ошибки и недоразумения. . .» [168]. Академик Б. Б. Голицын отметил,

что усвоение рекомендуемых Флоровым и Некрасовым разделов учащимися будет формальным, они не будут в состоянии понять смысл трактуемых вопросов и поэтому теорию вероятностей не следует вводить в круг занятий средней школы [150]. Аргументированной критике подверг проект Некрасова—Флорова А. А. Марков, который выразил уверенность в том, что «осуствление проекта П. С. Флорова и П. А. Некрасова, хотя бы в виде опыта, в одном, например, Урюпинском реальном училище, ничего хорошего средней школе не даст, а только к существующим уже поводам для ошибок и недоразумений присоединит новые» [184].

Однако дело заключалось не только в том, что Некрасов и Флоров предлагали ввести неверные определения и не в том лишь, что введение новых разделов математики могло создать для учащихся трудности и внести немалую путаницу, привести к «ошибкам и недоразумениям». Реализация этого проекта способствовала бы воспитанию юношества в религиозном духе, созданию условий, при которых подрастающему поколению прививалось бы идеалистическое мировоззрение.

Чтобы убедиться в этом, достаточно прочесть такие образцы некрасовских сентенций: «. . . В понятии вероятности и соединения содержится осуществляемая в русском праве возможность наиболее нравственной социальной ориентировки и структуры, основанной на истине христианской культуры и цивилизации. . .» [194, с. 119].

«. . . Дедукция может строить лишь гипотезы, для проверки которых не существует в науке ничего другого кроме веры в гипотезу и опыта, да и простой опыт иногда бывает бессилён в этой сфере, и тогда остается лишь религиозно-научно-политический опыт под просветительным гербом» [193, с. 16].

Государственная система царской России объявлялась Некрасовым «наиболее нравственной социальной ориентировкой и структурой», а в качестве критерия достоверности научных выводов предлагался «религиозно-научно-политический опыт». А чего стоят «открытия» Некрасова, сведения о которых приведены в его книге «Теория вероятностей»:

«В целом звоем просветительная философия веры, наукооборота, трудооборота и правооборота дает людям и конституцию. Цель этой философии — освободиться и освободить людей от пут корыстной мистики

царства 1°, сохраняя живую веру в приближение царства 2°. . . — веру, в которой таинства бескорыстны и узы священны. . . При этом математическая теория вероятностей есть Паскалевский и Бугаевский мост, соединяющий веру, как факт народной психологии и религии, и науку друг с другом. . . Что касается привики друг к другу принципов естественной науки и религии, как веры в Творца, то это сделали с полным успехом еще Лейбниц, Ньютон, Ломоносов, митрополит Филарет. . . При добросовестном применении графиков вероятности и индуктивных уравнений открытия («эврика») науки и религии сходятся и дополняют друг друга. . .»

Рассуждая далее о «четвертом» графическом измерении Некрасов пишет, что оно, «напоминая о погрешностях суждений, наблюдений, учетов и измерений, заставляет смотреть на эволюционные теории Дарвина, Геккеля и проч. как на фиктивные утверждения» [195].

Обосновывая необходимость реализации своего проекта, Некрасов вполне откровенно писал: «Должно сказать, что между священной историей, метафизикой веры и естественно-исторической наукой может и должен быть грамотно перекинутый дружественный, спасительный для человеческого рода соединяющий «мост». Этот мост есть именно математическая теория вероятностей и асимптотическая нумерическая логика. . .» [194, с. 111].

Реакционеры от науки и просвещения очень хорошо поняли реакционно-философскую подоплеку этого проекта и активно выступили в поддержку предложений Некрасова и Флорова. Вот что писал в своем ответе на вопросы департамента просвещения член совета министра народного просвещения ректор Юрьевского университета профессор В. Г. Алексеев:

«Общеобразовательное значение этого курса⁷, по моему мнению, весьма велико, так как он сообщает учащимся элементы нового, нематериалистического мировоззрения. . .» И далее: «Общеобразовательное значение этого курса, по моему мнению, громадно, так как им открывается совсем новое мировоззрение в противовес господствующему материалистическому мировоззрению, которое упрочилось во всех отраслях знаний, незаметно пронизало всю нашу культуру, весь строй

⁷ Имеется в виду курс теории вероятностей.

нашей жизни вследствие блестящих успехов математического анализа и основанной на нем механики — в приложении последних к явлениям природы. Вследствие успехов этих приложений, неоднократно являлась заманчивая мысль применять простые аналитико-механические шаблоны исследования к наукам биологическим и социальным, что породило немало совершенно превратных течений и учений нового времени: социальную физику Кетле, позитивизм Огюста Конта, дарвинизм в его крайностях, исторический материализм и т. д. . . . **Действительной завершительницей воспитания служит философия, но предотвратить опасности философии есть обязанность математики»** [136].

Совершенно понятно, что В. Г. Алексеев и ему подобные ждали от математики предотвращения «опасностей» научного материалистического мировоззрения. Об этом же писал профессор Варшавского университета П. И. Митрофанов, который считал введение курса теории вероятностей желательным «ввиду его общеобразовательного и воспитательного значения, открывающего — при надлежащем выборе примеров — простор для развития и удовлетворения духовных запросов русской молодежи, ее идеалистических стремлений» [187].

Комиссия Академии наук в своем докладе дала достойный ответ Некрасову и его сторонникам, подвергнув сокрушающей критике как его математические «нововведения», так и философские потуги, охарактеризовав их как «попытки воздействия при помощи математики на нравственно-религиозное и политическое мирозерцание юношества в наперед заданном направлении». Со всей определенностью Комиссия отвергла притязания Некрасова на некие новые «определения» понятий анализа, указав, что «существует единственное всем ученым миром принятое определение основных понятий пределов и бесконечно малых, установленное со времен Коши». В докладе Комиссии была убедительно показана полная несостоятельность утверждений Некрасова о якобы существующих двух направлениях математической науки: «Он противопоставляет одну школу, с дурной теорией познания. . . с другой, во главе которой будто бы стояли академик В. Г. Имшенецкий и проф. Н. В. Бугаев. . . к которой причисляет и себя; в других случаях «пристраивает» себя к какой-то линии «Лаплас—Лагранж—Коши—Чебышев—Некрасов—Пирсон», противопоставляя ее линии «Лаплас—

Бъэнэмэ—Чебышев—Марков». . . Никаких двух различных направлений в понимании основных начал математики, двух различных школ не существует. Нет никакого особого анализа бесконечно-малых А. А. Маркова, нет никакой особой школы В. Г. Имшенецкого и т. п. Никаких новшеств в теорию пределов ни А. А. Марков, ни кто-либо другой из признанных за свои ученые заслуги научных авторитетов со времен Коши не вводил и не может вводить» [156].

Анализируя ошибочные представления П. А. Некрасова, Комиссия указала на то, что некрасовские извращения основных определений и понятий анализа были подвергнуты критике А. М. Ляпуновым еще в 1901 г. в «Записках Харьковского университета». Эти заблуждения Некрасова по основным вопросам анализа проявились также в его полемике в связи с мемуаром П. Л. Чебышева «О двух теоремах относительно вероятности» и с связанными с этой работой статьями А. А. Маркова и А. М. Ляпунова. Нужно сказать, что для Некрасова характерной была весьма агрессивная, воинствующая манера дискуссии, посредством которой он стремился «протащить» свои заключения и результаты, пусть ошибочные и парадоксальные. Это проявилось и в нападках Некрасова на упомянутые работы Чебышева, Ляпунова и Маркова.

«П. А. Некрасов смешивает, с одной стороны, малые величины с бесконечно-малыми и с их пределом, а с другой — понятие о пределе с понятием об асимптотическом выражении функций, и все это принимает за более тонкое проникновение в глубину науки», — отмечалось в докладе Комиссии.

Следует подчеркнуть, что как в отдельных положениях своего доклада, так и в общем заключении Комиссия в значительной мере опиралась на выводы А. М. Ляпунова и данную им еще в 1901 г. критику неверных и вредных взглядов П. А. Некрасова.

Комиссия Академии наук обратила внимание в своем докладе на то, что в XX в. «возобновляются настойчивые попытки использовать совершеннейшую из наук — математику — в том направлении, которому она по самой своей сущности служить не может». Однако «эти поползновения либо рассыпались в прах перед неумолимой строгостью точной науки, либо приводили к результатам прямо противоположным тем, которых добивались злоупотреблявшие математикой для целей

ей совершенно чуждых». В своем заключении Комиссия вполне определенно указала, что «вышеупомянутые заблуждения и ошибочные толкования основ науки и злоупотребление математикой с предвзятой целью превратить чистую науку в орудие религиозного и политического воздействия на подрастающее поколение, проникнув в жизнь школы, принесут непоправимый вред делу просвещения».

Так в результате действий Ляпунова, Маркова, Стеклова и других членов Комиссии проект Некрасова и Флорова был провален. Школу удалось оградить от посягательств Некрасова и ему подобных реакционеров.

VI

Уделяя много внимания деятельности в упомянутых комиссиях, А. М. Ляпунов упорно работал над решением своей основной научной задачи. В 1905 г. на страницах «Записок Академии наук» появляется его труд «Об одной задаче Чебышева». В этой работе Ляпунов подробно останавливается на проблеме исследования фигур равновесия однородной жидкости, равномерно вращающейся вокруг некоторой оси и состоящей из взаимно притягивающихся по закону Ньютона частиц, анализирует относящиеся к этой проблеме результаты А. Пуанкаре и Дж. Дарвина. Особое значение имеют общие указания Ляпунова, связанные с методом решения этой задачи для близких к некоторым из известных эллипсоидальных фигур равновесия.

В последующие годы (1906—1914) выходит в свет на французском языке большой труд А. М. Ляпунова в четырех частях «О фигурах равновесия однородной вращающейся жидкости, мало отличающихся от эллипсоидальных»⁸: часть 1 «Общее исследование задачи», 225 стр. (1906 г.), часть 2 «Фигуры равновесия, производные от эллипсоидов Маклорена», 203 стр. (1909 г.), часть 3 «Фигуры равновесия, производные от эллипсоидов Якоби. (Исследования, относящиеся к угловой скорости и моменту количества движения)», 228 стр. (1912 г.) и часть 4 «Новые формулы для исследования фигур равновесия», 112 стр. (1914 г.).

⁸ В русском переводе этот труд Ляпунова опубликован в [45, т. 4, с. 7—645].

В первой части своего фундаментального труда Ляпунов вывел основные уравнения и указал метод, позволяющий совершенно строгим образом доказать существование новых фигур равновесия и определить эти фигуры с любой требуемой степенью точности. Вторая часть этой работы посвящена расчетам путем последовательных приближений новых фигур равновесия, близких к эллипсоидам Маклорена. Для новых фигур выполнено также исследование угловой скорости вращения и момента количества движения. В третьей части труда Ляпунова эти же вопросы решаются для новых фигур равновесия, близких к эллипсоидам Якоби. Наконец, четвертая часть посвящена новому методу разыскания фигур равновесия и установлению связи результатов, получаемых с его помощью, с формулами, использованными в первой части этого же труда.

Дополнением к первой части труда Ляпунова явилась опубликованная им в 1909 г. работа «Об одном классе фигур равновесия вращающейся жидкости», в которой рассмотрены определенные предположения о свойствах фигур равновесия и доказывается, что эти свойства представляют собой необходимые следствия условий равновесия. Александр Михайлович показал, что любая фигура, входящая в ответвляющийся от эллипсоида непрерывный ряд фигур равновесия, должна обладать этими свойствами. Позднее, в 1916 году А. М. Ляпунов публикует еще две работы, близко примыкающие к этой же теме. В статье «Об уравнениях, определяющих поверхности фигур равновесия однородной вращающейся жидкости, ответвляющихся от эллипсоидов» дано исследование бесконечного ряда, определяющего функцию, характеризующую отклонение поверхности фигуры равновесия от соответствующего эллипсоида. Это позволило Ляпунову установить вид уравнений, определяющих поверхность новых фигур равновесия и охарактеризовать условия, при которых поверхность этих фигур не имеет особых точек. Во второй работе 1916 года «Новые соображения, относящиеся к теории фигур равновесия однородной жидкости, производных от эллипсоидов» Ляпунов предлагает новый метод исследования таких фигур, дает алгоритм построения получающихся при этом приближений. Интересно, что этот новый метод возник из исследований поведения неоднородной жидкости и является, как писал Ляпунов, «по существу не чем иным, как применением к частному

случаю однородной жидкости общих соображений, которые возникают сами собой в случае неоднородной жидкости».

Ряд принципиальных дополнений к своей магистерской диссертации А. М. Ляпунов дал в работе «Задача минимума в вопросе об устойчивости фигур равновесия» (1908) [45, т. 3, с. 237—360]. Критически переосмысливая свои прежние результаты, Ляпунов нашел свое прежнее решение задачи недостаточно полным. В связи с этим он показал, что задача о минимуме для эллипсоидальных фигур доступна для полного и строгого решения, и изложил общий метод решения задачи. Кроме того, он подробно изучил вопрос об устойчивости новых близких к эллипсоидальным фигур равновесия, открытых им к тому времени. Большой интерес представляют приведенные в последней главе принципиальные соображения Ляпунова о связи между математической проблемой минимума и устойчивостью фигур равновесия вращающейся жидкости.

Примечательно, что здесь, как и в случае работы 1916 г., Ляпунов возвращается к уже решенной им ранее задаче с новых, более общих позиций и с новыми, более строгими требованиями к ее решению. Так, рассматривая общий метод решения задачи, Ляпунов устанавливает связь ее с задачей, изученной им в первой части его фундаментального труда, опубликованной в 1906 г. и указывает, что «только благодаря результатам, полученным в этом мемуаре, я смог приступить к задаче минимума в рассматриваемых случаях».

Очень интересный результат исследования бесконечного полиномиального ряда был опубликован Ляпуновым в 1915 г. в «Известиях Академии наук». Доказанная Ляпуновым в этой работе теорема была названа Стегловым «замечательной» и привлекла внимание многих поколений математиков.

Последней работой А. М. Ляпунова, опубликованной при его жизни, была статья «Об одной формуле анализа», появившаяся в 1917 г. на страницах «Известий Академии наук». В этой работе изучен потенциал простого слоя на поверхности эллипсоида. Исследование выполнено на основе разложения функции, к которой приводится этот потенциал, в ряд по сферическим функциям на подобном эллипсоиде. Как установил Ляпунов, такой подход, являющийся более сложным по сравнению со случаем использования эл-

липсоида, софокусного данному, позволяет, однако, прийти к новой формуле и получить искомое разложение, не прибегая к функциям Ламе.

VII

Жизнь Александра Михайловича и Натальи Рафаиловны в Петербурге не была богата внешними событиями. Напряженная научная работа, активная деятельность в комиссиях Академии наук не оставляли времени для поездок или развлечений, исключая редкие встречи с друзьями и коллегами-математиками. Определенную роль играла также некоторая замкнутость характера Александра Михайловича.

Жили Ляпуновы в известном «академическом» доме на набережной Невы. В этом доме в разное время жили многие известные ученые — П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. П. Карпинский, С. Ф. Ольденбург, В. А. Стеклов. Описывая свою квартиру, Ляпунов в письме Тихомандрицкому (от 14 апреля 1916 г.) отмечает, что для него и Натальи Рафаиловны квартира эта достаточно поместительна и удобна. «Недостаток ее лишь тот, что она темновата, — писал Александр Михайлович. — Помещается в первом этаже и окнами смотрит на 7-ю линию, то есть на северо-восток, или на двор, где солнце загоразживается строениями» [119].

По предписанию врачей, рекомендовавших Наталье Рафаиловне пожить в более мягком климате, Александр Михайлович весной 1911 г. взял заграничный отпуск. Ляпуновы рассчитывали отдохнуть некоторое время на берегу озер Швейцарии или Южной Франции в надежде на улучшение здоровья Натальи Рафаиловны. Вместе с ее матерью, Екатериной Васильевной, Ляпуновы выехали в Швейцарию. Здесь они встретились со своими родными — семьей племянника профессора химии Казанского университета А. М. Зайцева. Но пожить на берегу Женевского озера им довелось всего лишь несколько дней — так сильно потянуло обратно, на родину. Вернувшись в Россию, Ляпуновы поспешили на отдых в деревню, в Курмышский уезд Симбирской губернии.

Вскоре семью Ляпуновых постигло большое горе: в июне 1912 г. после тяжелой болезни скончалась мать Натальи Рафаиловны Екатерина Васильевна Сеченова. «Связанная с горячо любимой, вечно хворающей дочерью тесными духовными узами, никогда не покидав-

шая ее и ее мужа, она всю жизнь свою отдала на самоотверженное служение семье, взяв на себя всю тяжесть материальных забот и стараясь обеспечить душевное равновесие для спокойных научных занятий своего зятя и племянника, — писал Б. М. Ляпунов. — Смерть горячей любимой матери была тяжелым ударом для Н. Р.: сильное нравственное потрясение как будто задержало начавшийся процесс туберкулеза легких, который через год возобновился опять» [46, с. 19].

Надеясь на благотворное влияние южного климата и морского воздуха Ляпуновы все лето 1913 г. провели в Одессе, где жил брат Александра Михайловича Борис Михайлович Ляпунов — профессор славянской филологии Новороссийского (Одесского) университета. Однако здоровье Н. Р. Ляпуновой, к сожалению, не улучшалось.

Летом 1914 г. страна оказалась ввергнутой в войну. Академики не были на фронтах, но война будто бы коснулась и их: в течение нескольких военных лет русская наука лишилась академиков Н. Я. Сонины, Б. Б. Голицына, О. А. Баклунда, Ф. Ф. Фортунатова, Ф. Е. Корша, члена-корреспондента Д. К. Бобылева.

Очень тяжело и болезненно переживали трудности страны и страдания своего народа А. М. Ляпунов и его жена. В письме М. А. Тихомандрицкому от 14 апреля 1916 г. Александр Михайлович писал: «Настоящее безотрадно, а будущее еще безотраднее. Внутри государства творится что-то невозможное, а на фронтах тянется томительная канитель. В Малой Азии и в Персии благодаря малому количеству посланных туда войск мы едва только теперь делаем то, что следовало сделать год тому назад. На других же фронтах дело обстоит еще хуже. Италию включили в «согласие», несмотря на то, что она все время ведет подозрительную игру, до сих пор не объявляет войны Германии. . .

А где возвещенная согласованность действий? Немцы теснят французов у Вердена, а мы стоим и чего-то ждем, когда для всякого ясно, что нам давно пора начать решительное наступление, если только правда, что у нас теперь оружие и снаряды имеются в изобилии. Наш командный состав наполовину немецкий и, вероятно, ждет, чтобы немцы хорошо подготовились и сами начали наступать на нас.

Теперь ясно, что война и в этом году не кончится, ибо кончиться она может только полным разгромом

Пруссии и истреблением всех Гогенцоллернов, начиная от Вильгельма, а до этого еще очень далеко. Но даже и от такого наилучшего результата войны я не предвижу хороших последствий: будет только удовлетворено чувство справедливости, а жить будет еще хуже. Ведь после внешней войны, как бы она ни кончилась, несомненно начнется внутренняя, еще более жестокая и бессмысленная, которая уничтожит все, что уцелеет после внешней войны. . .» [119].

Для этого письма характерны непоследовательные и наивные представления значительной части русской интеллигенции того времени о военном, внешнеполитическом и внутреннем положении России. В нем звучат мотивы призыва «Война — до победного конца!» и страх перед надвигающейся очистительной бурей революции. И вместе с тем в этом письме, полном глубокой безысходности и пессимизма, сквозят искренняя боль за свою страну.

Тяжелое душевное состояние Ляпунова усугублялось ухудшением состояния здоровья жены. В это же время у самого Александра Михайловича появились первые признаки наследственной болезни глаз. В цитированном письме Тихомандрицкому он писал: «Несмотря на сухость и тепло квартиры, Натали всю зиму страдала болями в руках и ногах. Лечилась синими лучами, но мало помогало. Кроме того, у нее разболелись глаза. Ездили к доктору, но он ничего особенного не нашел, сказавши только, что нужно переменить очки. Кстати, я показал ему и свои глаза, так как с некоторых пор стал замечать ослабление зрения. Оказалось, что у меня начинается катаракт на обоих глазах. Таким образом, мне, быть может, предстоит слепота. . .»

С весны и до конца июня 1917 г. Ляпуновы жили на даче в Куоккале (ныне — Репино). Поехали туда они в надежде на то, что целебные свойства смолистого воздуха сосновых лесов помогут Наталье Рафаиловне, которая к тому времени была уже тяжело больной. Однако и эта поездка пользы не принесла. Тогда по настоянию врачей Александр Михайлович и Наталья Рафаиловна выехали в Одессу, куда прибыли 30 июня. Переезд через европейскую часть страны оказался тяжелым, что неблагоприятно сказалось на состоянии здоровья Натальи Рафаиловны. Поездка эта в жизни Ляпуновых была последней. . .

Глава 6

Одесса

Человеческая память обладает странной, но счастливой способностью сохранять только хорошее. Особенно часто и с любовью вспоминал А. М. Ляпунов о харьковском периоде своей жизни (1885—1902 гг.) и называл его самым счастливым. Наиболее напряженной и драматической оказалась жизнь А. М. Ляпунова в Одессе, куда он с женой выехал в июне 1917 г. по настоянию врачей, в надежде на благотворное влияние южного климата на серьезно ухудшившееся состояние Натальи Рафаиловны. Однако трудности нелегкого тогда путешествия из Петрограда к берегам Черного моря еще ухудшили здоровье Натальи Рафаиловны, которая с трудом передвигалась.

Здесь, в Одессе в ту пору жил и работал брат Ляпунова Борис Михайлович, профессор Новороссийского университета, с женой Еленой Константиновной. Вот что рассказывает Е. К. Ляпунова об этом периоде: «Александр Михайлович со своей женой Натальей Рафаиловной жили в Одессе у нас с Борисом Михайловичем на Софиевской улице, дом 10, квартира 12 во втором этаже. Первое время по приезде Наталья Рафаиловна еще гуляла по двору, но болезнь развивалась и наступило время, когда Н. Р. настолько ослабела, что уже не могла выходить и лежала на балконе... Приехав в Одессу к брату, А. М. Ляпунов окружил жену большим вниманием и нежной заботой; он был в очень угнетенном настроении, наблюдая все более ухудшившееся положение больной» [106, с. 55].

Ляпуновы предполагали провести лето в Одессе, а на зиму вернуться в Петроград в свою академическую квартиру. Однако жизнь распорядилась иначе. А. М. Ляпунов оказался отрезанным ходом политических событий от Петрограда и Академии наук. Как писал В. А. Стеклов, «в начале 1918 г. еще доходили изредка отрывочные, случайные известия от него о том затруднительном положении, в каком он оказался со своей женой в Одессе, а затем всякие известия прекратились» [100, с. 386].

Трудно даже представить себе, в каком подавленном моральном состоянии находился Ляпунов, поставленный в тяжелое материальное положение и потерявший

уже всякую надежду на выздоровление любимой жены, медленно угасавшей на его глазах. Все это не могли не усугублять признаки развивающейся болезни глаз, которой страдали дед и отец Ляпунова и которая была, по-видимому, наследственной.

Из архивных материалов известно, что Александра Михайловича очень волновало положение Петрограда и Академии наук в это опасное время. В сентябре 1917 года он с тревогой писал А. П. Карпинскому [135], ставшему первым выборным президентом Российской Академии наук, о необходимости эвакуации Академии. В качестве места эвакуации Ляпунов предлагает Боржоми, и просит выступить в заседании Академии от его имени с этими предложениями. В ответном письме А. М. Ляпунову от 22 сентября 1917 г. А. П. Карпинский писал: «Положение здесь остается также неопределенным, как и раньше. Призыв к эвакуации наблюдается у многих служащих, большей частью не академиков, но общая эв[акуация] Академии невозможна как бы размерами нашего учреждения, так и по отсутствию средств, которые могут обещать, но не дать. В отношении исключительных материалов меры приняты и частью осуществлены. . .

Военные круги удостоверяют отсутствие непосредственной опасности. Поэтому эвакуация Юрьевского университета отменена. Одесса находится не в более выгодном положении, чем Петроград. Положение дел в провинции — шаткое» [131].

Ляпунов находился в Одессе, когда Великая Октябрьская социалистическая революция возвестила России и всему миру начало новой эры. Лучшая часть представителей интеллигенции Одессы в решающий час была вместе с революционным народом. Профессора университета Е. М. Щепкин, Д. К. Третьяков, П. И. Потапов и некоторые другие активно включились в бурную общественную жизнь, приняли участие в организации рабочих школ, выступили за демократизацию высшей школы, читали лекции для трудящихся. Однако многие профессора Новороссийского университета, как и других университетов страны встретили победу Октября настороженно и враждебно. Реакционно настроенный совет университета не признал власть Совета Народных Комиссаров и в начале декабря 1917 г. 34 голосами против 6 принял резолюцию направить смету на 1917 г. и первую половину 1918 г. Центральной Раде

[162]. Учебная и научная работа пришла в упадок. Занятия весеннего семестра были прерваны преждевременно. Не хватало средств на освещение и отопление, обеспечение работы кабинетов, лабораторий, клиник, на оплату труда преподавателей и служащих.

О приглашении Ляпунова в Одесский университет и о его лекциях рассказал непосредственный участник событий и слушатель лекций Ляпунова профессор А. Д. Билимович: «А. М., благодаря прекращению сношений между Севером и Югом, не мог получать в Одессе и свое академическое жалованье. А так как его брат жил с женой тоже только на жалованье, то положение братьев с их женами, особенно при той дороговизне, которая тогда была в Одессе, стало очень тяжелым. Мы, молодые профессора физико-математического факультета, подняли вопрос о том, как помочь А. М-чу и спросили его, не согласился ли бы он стать снова профессором университета. Ляпунов отвечал, что он давно не преподавал, что он забыл, как это делается, но мы ему говорили, что это только форма, что он может объявить курс и не преподавать. „А это не могу! Если объявлю, то должен и преподавать!“ — дал согласие читать лекции с содержанием своей последней работы о формах вращающейся жидкости, мало отступающих от сферы. Нам оставалось только выполнить формальности, связанные с назначением академика Александра Михайловича Ляпунова ординарным профессором Новороссийского университета в Одессе. В то время я был ректором этого университета.

Много времени прошло с тех пор. Но я до сих пор не могу забыть того, что произошло на заседании факультета, когда мы внесли наше предложение о выборе А. М. Ляпунова ординарным профессором. Один „старый профессор“, тоже математик, вынувши из кармана свою записную книжку обратился ко мне с вопросом. „Господин ректор, в этой книжке, среди другого, находится и весь университетский устав. Скажите, на основании какого параграфа этого устава мы можем выбрать академика Ляпунова ординарным профессором нашего университета?“ Глубоко взволновал меня этот вопрос, но вместо ответа я поставил „старому профессору“ другой вопрос: „А скажите, — имя и отчество, — на основании какого параграфа свода Российских Законов у нас, в России теперь революция?“ „Старый профессор“ молчал. Встал профессор астрономии Алек-



Дом в Одессе, где Ляпунов провел последние месяцы своей жизни

сандр Яковлевич Орлов и возмущенно заявил, что это позор ставить такой вопрос, и что наш факультет может только гордиться тем, что хоть временно, в его составе будет такой выдающийся ученый, каким является академик А. М. Ляпунов. — Ляпунов стал ординарным профессором физ.-мат. факультета Новороссийского университета в Одессе. . .» [51, с. 3—5].

Что собой представлял Новороссийский университет к тому времени, когда А. М. Ляпунов начал преподавать в его стенах? Открытый в 1864 г., этот университет был основан на базе Ришельевского лицея, существовавшего с 1817 г., и стал седьмым университетом России (после Московского, Петербургского, Казанского, Дерптского (Тартуского), Киевского и Харьков-

ского). Большую роль в образовании университета сыграл выдающийся ученый-хирург и прогрессивный общественный деятель Н. И. Пирогов, бывший попечителем Одесского учебного округа в 1856—1858 гг. В Новороссийском университете обучалась молодежь с Дона, Кубани, Бессарабии, Кавказа, поскольку длительное время он был единственным высшим учебным заведением на юге России.

С первых лет своего существования университет оказался под влиянием передовой части русской интеллигенции, идей Н. Г. Чернышевского, Н. А. Добролюбова, Д. И. Писарева. Здесь в разное время работали и преподавали виднейшие представители отечественной науки—бактериологи И. И. Мечников и Д. К. Заболотный, микробиологи Н. Ф. Гамалея и Н. А. Хавкин, химики В. В. Марковников, Н. Д. Зелинский, П. Г. Меликов (Меликишвили) и В. М. Петриев (Петриашвили), физики Н. А. Умов и Н. Ф. Шведов, физиологи Б. Ф. Вериго и А. А. Богомолец, медики К. И. Коровицкий, И. Д. Стражеско, В. П. Филатов, зоолог А. О. Ковалевский, палеонтолог В. О. Ковалевский, историк Е. М. Щепкин. Некоторые из них сами были выпускниками Новороссийского университета. С 1871 по 1876 г. в университете преподавал И. М. Сеченов. Благодаря усилиям этих ученых Новороссийский университет стал видным центром передовой науки и культуры. Были установлены тесные связи университета с другими научными центрами страны, с крупнейшими зарубежными учеными. Почетными членами Новороссийского университета были избраны Д. И. Менделеев, П. Л. Чебышев, С. П. Боткин, И. М. Сеченов, Н. И. Пирогов. Здесь проводились Всероссийские научные съезды (VII съезд естествоиспытателей и врачей — 1883 г., IV археологический съезд — 1884 г.). В составе VII Всероссийского съезда естествоиспытателей, состоявшегося летом 1883 г. в Одессе, действовала математическая секция, в работе которой принимали участие известнейшие русские ученые — Н. Е. Жуковский, С. В. Ковалевская, профессора Киевского, Харьковского и Новороссийского университетов В. П. Ермаков, К. А. Андреев, В. В. Преображенский, Н. А. Умов.

К моменту прихода в Новороссийский университет А. М. Ляпунова там был выполнен ряд интересных исследований в области математики и механики, велась

разносторонняя математическая подготовка студентов. Среди математиков, преподававших в университете, следует назвать первого профессора чистой математики Е. Ф. Сабинина — ученика М. В. Остроградского, одного из основателей Московского математического общества. В Новороссийском университете Е. Ф. Сабинин преподавал более двадцати лет, обеспечивая чтение ряда основных математических курсов, и способствовал высокому уровню преподавания математических дисциплин, типичному для школы М. В. Остроградского. Развивая исследования М. В. Остроградского, Е. Ф. Сабинин много сил посвятил методам вариационного исчисления и их приложениям в геометрии и механике, изучению экстремумов кратных интегралов.

Наиболее известным учеником Сабинина стал выпускник Новороссийского университета С. П. Ярошенко, прошедший путь от студента до ректора университета. Серьезным событием в развитии отечественной математики стали его докторская диссертация «Теория определителей и ее применения» (1871) и первая в русской математической литературе работа, специально посвященная проективной геометрии «Начала новой геометрии» (1873). Курс проективной геометрии был впоследствии опубликован и сыграл большую роль в подготовке математиков и в развитии научных исследований в этом направлении.

Математическую физику в 1878—1887 гг. здесь читал профессор Н. А. Умов, известный своими блестящими работами в области теоретической и экспериментальной физики. Умов стал одним из основателей математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей.

Во главе этого отделения в 1880—1889 гг. был профессор прикладной математики В. Н. Лигин, который впервые начал чтение лекций по начертательной геометрии.

Большой вклад в развитие математики в Новороссийском университете внес выпускник Московского университета профессор В. В. Преображенский. Он читал курсы высшей алгебры, дифференциального исчисления и теории эллиптических функций. В его докторской диссертации «О логарифмическом потенциале», написанной и защищенной в Новороссийском университете, построена теория логарифмического потенциала

для различных граничных условий и получено решение ряда задач, связанных с уравнением Лапласа.

Ведущим одесским математиком стал выпускник Новороссийского университета И. В. Слешинский, преподававший в нем в 1882—1909 г. Научная деятельность Слешинского была посвящена теории непрерывных дробей, основаниям математики, математической логике и теории вероятностей. В докторской диссертации «К теории способа наименьших квадратов» (1892) И. В. Слешинский воспользовался методом, аналогичным по своей идее методу характеристических функций, использованному независимо А. М. Ляпуновым в обосновании центральной предельной теоремы теории вероятностей (1900—1901). С этим направлением связаны также работы профессора С. П. Ярошенко (например, статья «К теореме Чебышева», 1893) и академика А. А. Маркова («Закон больших чисел и метод наименьших квадратов», 1898). И. В. Слешинский указал на необходимость пересмотра математических доказательств с точки зрения их полноты и строгости. Исключительно высокий авторитет Слешинского и его глубокое влияние на развитие математической науки дали основание многим молодым математикам Одессы считать себя его учениками.

В университете вели преподавательскую работу в области математических наук также И. Ю. Тимченко, В. А. Циммерман, В. Ф. Каган, Ц. К. Руссьян, Е. Л. Буницкий, С. И. Шатуновский, а также М. А. Тихомандрицкий, работавший ранее в Харьковском университете.

Большую известность получили работы Ц. К. Руссьяна в области дифференциальных уравнений, а также исследования В. А. Циммермана в области вариационного исчисления. Сохраняют свое значение до настоящего времени работы И. Ю. Тимченко по истории математики, работы В. Ф. Кагана, посвященные основаниям геометрии и геометрии Лобачевского, исследования С. И. Шатуновского по основаниям математики. Так, С. И. Шатуновский, посещавший как вольнослушатель лекции П. Л. Чебышева и его учеников А. Н. Коркина, Е. И. Золотарева, Ю. В. Сохоцкого в Петербургском университете, а также немецкого алгебраиста Г. Вебера за границей, впоследствии получил ряд блестящих результатов: дал независимо от Д. Гильберта аксиоматическое обоснование теории площадей, развил оригинальную элементарную тео-

рию измерения объемов, впервые аксиоматически построил учение о величине, предложил своеобразное построение теории Галуа.

Расширению тематики исследований математиков Новороссийского университета во многом способствовали работы выпускника университета Е. Л. Буницкого, испытавшего на себе влияние Гильберта и Шлеппинского. Исследования Буницкого содержат глубокую разработку различных направлений математики — математической логики, теории интегральных и дифференциальных уравнений.

Среди молодых сотрудников и студентов университета, работавших и учившихся в нем в начале века, были Д. А. Крыжановский, Г. М. Фихтенгольц, Я. С. Дубнов, И. Ю. Огиевецкий, М. М. Васильев, Г. Л. Михневич, О. С. Турчанинов, позднее ставшие известными математиками нашего времени.

В начале осени 1918 г. А. М. Ляпунов приступил к чтению лекций в Новороссийском университете. Лекции объявленного курса «О форме небесных тел» А. М. Ляпунов читал по два часа в неделю по понедельникам, в одной из аудиторий главного университетского здания на углу улиц Елизаветинской и Дворянской (ныне — улицы Щепкина и Петра Великого), на втором этаже. Содержание этого курса было со свойственной Ляпунову тщательностью изложено в рукописи, почти готовой для печати. Впоследствии первая лекция курса была опубликована в «Известиях Академии наук СССР» (Сер. 7. 1930. №. 1). Первая лекция состоялась 16 сентября 1918 г. Ляпунова слушали студенты старших курсов, профессора и преподаватели математики, механики, астрономии, физики. Среди слушателей были профессора университета А. Я. Орлов, В. Ф. Каган, А. Д. Билимович, С. И. Шатуновский, И. Ю. Тимченко, Д. А. Крыжановский, Е. Л. Буницкий, Н. С. Васильев.

В первой лекции Ляпунов так определил задачи своего курса: «В ответ на предложение Новороссийского университета принять участие в чтении лекций, я объявил настоящий курс, в котором предполагаю изложить решение ряда вопросов, бывших предметом моих исследований в течение последних 15 лет и представляющих те вопросы гидростатики, которые лежат в основании теории фигуры небесных тел. По известной гипотезе, каждое такое тело первоначально было в жид-

ком состоянии, причем настоящую свою форму оно приобрело раньше отвердения, предварительно получивши, вследствие внутреннего трения, неизменную форму. В этом предположении фигура небесного тела должна представлять одну из тех, которые могут принять жидкие вращающиеся массы, частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона, или, по крайней мере, должны мало отличаться от такой фигуры равновесия вращающейся жидкости. Ввиду этого вопросы о формах равновесия вращающейся жидкости при сказанных условиях приобретают важное значение. Однако вопросы эти приводятся к такому вопросу анализа, для которого не существует общего решения и еще не найдено приемов, при посредстве которых можно было бы искать такое решение. Действительно, здесь все приводится к решению некоторого функционального уравнения, принадлежащего к классу уравнений, известных в настоящее время под названием интегральных, но не принадлежащих к тому простейшему классу уравнений, которыми так много занимались математики в последние годы.

Легко написать это уравнение. . .» [42, с. 303—304].

Далее Ляпунов выводит интегральное уравнение для случаев несжимаемой и сжимаемой однородной жидкости и отмечает возможность поиска решений путем последовательных приближений. Обсудив результаты Ньютона, Маклорена, Даламбера, Якоби, Клеро, Лежандра и Лапласа, Ляпунов дает в этой лекции ряд интересных сведений о своих исследованиях, изложенных в его магистерской и докторской диссертациях и выполненных примерно в одно время с А. Пуанкаре и Дж. Дарвиным, и о возникшей полемике.

В своих примечаниях к этой лекции академик А. Н. Крылов писал: «Содержание этого курса намечено было в первой, вступительной лекции. Всего двухчасовых лекций было прочитано семь. Лекции эти записывались его слушателями. После его смерти осталась рукопись, связанная с работой над лекциями. Что касается первой, вступительной лекции, то она была написана в законченном виде и лишь конец ее был приведен на лекции без предварительного изложения в рукописи. . .» [42, с. 493].

Вот как выразил свои впечатления один из слушателей этого курса: «А. М. Ляпунов преподавал, как ему казалось, очень элементарно, но это элементарное из-

ложение все же предполагало некоторое знание его предыдущих работ. В своем курсе он излагал новый метод решения его основной задачи для специального случая, но постоянно ссылался на предыдущие методы, сравнивал, дополнял, рассказывал о своих колебаниях и о переходах от более сложных вычислений к более простым. Все эти очень ценные дополнения в живой речи не могли войти в его рукопись» [51, с. 3].

Хотя Ляпунов практически не участвовал в формальной университетской жизни, глубокий интерес ко всему новому в своей области науки, к научной молодежи сохранился у него и в последние месяцы жизни. Так, Александр Михайлович всегда шел навстречу просьбам об его участии в заседаниях Математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей. Сохранились сведения об участии Ляпунова в заседании 26 февраля (10 марта 1918 г.), на котором был зачитан доклад ученицы А. Д. Билимовича П. З. Канер «К вопросу об отличительных траекториях в задаче многих тел». Хотя А. М. Ляпунов ранее этими вопросами не занимался, и содержание доклада было новым для него, он принял участие в прениях. Позднее он вернулся к теме доклада и отметил возможности применения результатов к другим задачам механики.

«Несмотря на бурную окружающую нас жизнь революционной Одессы при наших встречах мы разговаривали почти исключительно о математике, о механике, о новых направлениях, о новых приложениях математики к задачам механики, — вспоминал А. Д. Билимович. — В наших прогулках по берегу моря он рассказывал мне какими путями он идет к решению поставленных себе задач. Говорил, что его первое решение всегда сложное, неуклюжее, связанное с обходными путями. Но затем решение упрощается, выясняется и всякое последующее решение он считал лучше предыдущего. Приводил и противоположное мнение, мнение академика Андрея Андреевича Маркова, который первое решение всегда считал наилучшим, потому что оно создавалось в голове естественным путем, путем действительного процесса размышления. В последующие, измененные решения всегда может незаметно включиться мотив, заимствованный из результата позже полученного, который скачком упрощает изложение, но такое изложение противно логике последовательного творчества. . .» [51, с. 5].

В одном из последних опубликованных при его жизни мемуаров он писал: «Рассмотрим некоторую массу неоднородной жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона и поверхность которой находится под постоянным давлением. Если эта масса равномерно вращается вокруг неподвижной оси подобно твердому телу, то может ли она сохранять форму, близкую к эллипсоиду, когда плотность изменяется внутри жидкости лишь в узких пределах?»

В течение двух последних лет этот вопрос был предметом моих изысканий, и я достиг полного его решения при очень общих предположениях.

В ближайшем будущем я опубликую результаты моих изысканий, а теперь хочу обратить внимание на новый метод для изучения задачи об однородной жидкости: этот метод возник из исследований, о которых я только что говорил и является по существу дела не чем иным, как применением к частному случаю однородной жидкости общих соображений, которые возникают сами собой в случае неоднородной жидкости» [19, с. 47!].

| Действительно, после смерти А. М. Ляпунова была найдена законченная рукопись в 489 страниц на французском языке «О некоторых рядах фигур равновесия неоднородной вращающейся жидкости» [45]¹.

Нельзя не поражаться самоотверженности и целеустремленности А. М. Ляпунова, который в этих тяжелейших условиях продолжал научную работу. Краткую, но яркую характеристику этого последнего исследования Ляпунова дал академик В. И. Смирнов: «Последняя работа Ляпунова о фигурах равновесия неоднородной жидкости является исключительной по силе. В ней применяются самые разнообразные средства математического анализа. Как и в других работах, Ляпунов кроме строго доказанной теоремы существования, не боясь никаких трудностей, дает алгоритм построения уравнений новых фигур равновесия и исследует структуру получающихся при этом приближений» [47, с. 61].

Курс лекций А. М. Ляпунова оборвался после седьмой лекции. Последнюю свою лекцию Ляпунов прочел в последний понедельник своей жизни, 28 октября 1918 года. . .

¹ Впервые эта работа была опубликована в 1925—1927 гг. (на фр. яз.).

Глава 7

Последние дни

I

К осени 1918 г. Ляпунов был крайне изнурен морально и физически. Его угнетали сознание неизлечимости болезни Натальи Рафаиловны и близости рокового исхода, неустроенность жизни в Одессе, трудности, связанные с продолжением научной работы.

Здоровье Н. Р. Ляпуновой ухудшалось. «Весной 1918 г. после простуды туберкулез легких принял быстро прогрессирующий характер, — вспоминал Б. М. Ляпунов. — В конце лета 1918 г. Н. Р. уже не могла выходить на прогулку, а только лежала на балконе, чтобы подкрепляться свежим воздухом по предписанию врача. . . Так тянулось время в мучительной безнадежной тоске. . . ибо для А. М. хорошо известно было состояние здоровья жены и скрыть от себя безнадежность положения он не мог» [73, с. 23].

Немаловажную роль играло и то, что Ляпунов тяжело переживал создавшееся в стране положение: разруху, голод, неустроенность, о чем свидетельствуют его полные отчаяния письма. «Ужасное время переживаем мы. . . Теперь дело наше безнадежно плохо, ибо собственными средствами нам не справиться с разрастающейся анархией. А откуда же ждать внешней помощи? — писал он из Одессы Тихомандрицкому. — Когда мы поедem в Петроград, не знаю. Нам очень бы было нужно съездить туда, чтобы взять кое-какие вещи. Но теперь ехать невозможно: все железные дороги переполнены отпущенными и самовольно бегущими с фронта солдатами, которые производят всевозможные бесчинства, вплоть до ограбления и убийств пассажиров. . .» [134].

Этот тупик, в котором оказался Ляпунов, был характерным для многих представителей русской интеллигенции того времени, что хорошо понимал В. И. Ленин, который относился исключительно чутко и бережно к Академии наук и ее членам в этом тяжелом, насыщенном событиями 1918 г. Народный комиссар просвещения РСФСР А. В. Луначарский впоследствии писал: «Наркомпрос имел прямые директивы В. И. Ленина: относиться к Академии бережно и осторожно



А. М. Ляпунов
в последний период жизни

и лишь постепенно, не рая ее органов, ввести ее более прочно и органично в новое коммунистическое строительство»¹. Только к концу 1918 г., когда стали достоянием опыт первого года Советской власти и уроки интервенции и белогвардейщины, наметился поворот русской интеллигенции в сторону Советов, хотя переход этот был сложным и длительным процессом. Только тогда для интеллигенции открылся выход из создавшегося, казалось, безвыходного положения, возникли новые большие перспективы. Но осенью 1918 года в оккупированной, отрезанной от Советской

республики Одессе до этого еще было очень далеко.

Впоследствии в некрологе, посвященном памяти Ляпунова, В. А. Стеклов писал: «По предложению профессоров Одесского университета Александр Михайлович начал в университете (с осени 1918 года), т. е. месяца за два до смерти, курс лекций по теории равновесия небесных тел, по два часа в неделю (по понедельникам), который и продолжал почти до самой смерти, несмотря на крайне тяжелое нравственное состояние и быстро развивающееся истощение. За последнее время он, еще недавно вполне здоровый и крепкий человек², настолько ослабел, что с трудом добирался домой после двухчасовой лекции в университете. Тем не менее он успел закончить обещанный труд. . . Таким образом, несмотря на все невзгоды двух последних лет его жизни, приведших в конце концов к трагической развязке, он нашел в себе силы воплотить до конца поставленную

¹ *Луначарский А. В.* Академия наук и Советская власть (к двухсотлетию Академии) // Рабочая газета, 14.08.1925 г.

² Насколько я помню, в Харькове за 17 лет он не пропустил ни одной лекции по болезни (примеч. В. А. Стеклова).

задачу, и только закончив принятый на себя ученый подвиг, покончил свои расчеты с земной жизнью, которая, после наступившего крайнего истощения, нависшей слепоты (катаракта) и смерти горячо любимой жены, потеряла для него всякий смысл...» [100, с. 386, 387].

Можно предположить, что измученный Ляпунов начал все чаще думать о смерти как о желанном исходе, как об избавлении от гнетущей действительности. Уже давно у Александра Михайловича, никогда раньше не имевшего с оружием дела, хранился пистолет системы «Браунинг» модели 1900 г. Этот небольшой пистолет был скорее игрушкой, чем серьезным оружием. В Ленинградском отделении Архива АН СССР находится справка за номером 184 от 22 марта 1918 г. о сдаче Ляпуновым этого пистолета в комиссариат и об отправке браунинга немецкими оккупационными властями на артиллерийский склад, а также следующее заявление самого А. М. Ляпунова на немецком языке [132]: «Я сдал свой браунинг среднего размера № 135071 в Херсонский комиссариат 22 марта, откуда он был отправлен в Одесский артиллерийский склад. Но несмотря на получение мною оружейного паспорта, мне мой браунинг не вернули, а в артиллерийском складе сообщили, что во время пересылки он был похищен. Вероятно, этот браунинг был найден при последующей реквизиции и находится здесь, в „Бристоле“³. Если же здесь его нет, я хотел бы получить другой браунинг среднего размера. А. Ляпунов»

В четверг, 31 октября умерла Наталия Рафаиловна. Для Александра Михайловича удар был слишком сильным, хотя он давно уже, конечно, понимал неизбежность такого исхода. Перенести это потрясение, потерю любимой жены и друга, рядом с которой было пройдено более 30 лет жизни, Ляпунов не мог. Однако Александр Михайлович сохранял в этот день внешнее спокойствие. Чего стоило ему это! Но в самом начале ноября одеситы прочли в газете «Одесские Новости» сообщение о покушении на самоубийство академика профессора Новороссийского университета А. М. Ляпунова.

В день смерти Наталии Рафаиловны Ляпунов выстрелил в себя и в течение трех дней находился в бес-

³ «Бристоль» — название старой одесской гостиницы (сейчас — гостиница «Красная»), в которой в то время помещалась немецкая военная администрация.

сознательном состоянии. 3 ноября⁴ 1918 года в 17 часов 30 минут Александр Михайлович, не приходя в сознание, скончался в университетской хирургической клинике.

Вот что писал о последних днях А. М. Ляпунова его коллега по университету А. Д. Билимович, ссылаясь на свидетельство Бориса Михайловича Ляпунова: «. . . Когда Наталия Рафаиловна умерла, Александр Михайлович сидел около ее кровати, был совершенно спокоен и не обнаруживал никаких внешних признаков глубокого потрясения. Входил брат, утешал его, предлагал выпить чаю. А. М. оставался совершенно спокойным и попросил брата выйти из комнаты, чтобы остаться одному со своей супругой. Брат выполнил просьбу Александра Михайловича. Через короткое время раздался выстрел. Из своего старого револьвера Александр Михайлович выстрелил себе в голову. Рана была небольшая, но смертельная. А. М. скончался 3 ноября 1918 года. . . » [51, с. 7].

Ординарный профессор Новороссийского университета доктор медицины К. И. Коровицкий в справке от 5 ноября 1918 года так характеризует состояние А. М. Ляпунова в последний период его жизни: «Академик Александр Михайлович Ляпунов в последние недели своей жизни, под влиянием сознания тяжести и неизлечимости болезни жены, а также и физического утомления вследствие неусыпного и крайне бдительного ухода за больной в течение месяцев болезни, стал выказывать явные признаки ненормального психического состояния, — крайне возбужденное состояние психической сферы, чередующееся с депрессивным ее состоянием. . . ; это ненормальное психическое состояние, острый психоз, и было причиной нанесения им себе огнестрельного повреждения мозга, — от каковой причины и последовала его смерть» [69, с. 163, 164].

II

«Они жили долго и умерли в один день», — эту встречающуюся на страницах произведений Александра Грина формулу верной до смерти любви можно с полным основанием отнести к Александру Михайловичу и Наталье Рафаиловне Ляпуновым. Об этом свидетель-

⁴ 21 октября по старому стилю.

ствуется вся полувековая история их отношений — от детской привязанности и чистой юношеской любви до последних дней совместной жизни и трагической кончины.

«С Натальей Рафаиловной он был связан дружескими узами с детства, был ей беспредельно предан, — писала много лет спустя Е. К. Ляпунова. — Они никогда не расставались. Если А. М-чу приходилось бывать на съездах или конгрессах, они всегда ездили вместе. . .»⁵

Непреходящей светлой любви, взаимному уважению и глубокой душевной близости во многом способствовало единство взглядов обоих супругов. Г. К. Суслов, который всегда с большим уважением говорил о своем университетском товарище и часто вспоминал различные подробности студенческой и послеуниверситетской жизни, характеризовал Ляпунова как человека, с молодости посвятившего свои силы решению научных вопросов и пренебрегавшего всеми условностями окружающей жизни. При этом Суслов подчеркивал, что таких же взглядов полностью придерживалась и жена Ляпунова Наталья Рафаиловна. «По словам лиц, знавших семейную жизнь Ляпуновых, Наталья Рафаиловна создала А. М. исключительную обстановку для научной работы», — писал А. Д. Билимович.

Наталья Рафаиловна, однако, стремилась не только обеспечить наилучшие условия для работы Александра Михайловича. Благодаря ей он мог наслаждаться теплой атмосферы семейного уюта и внимания, отдохнуть душой и телом в немногие минуты и часы, свободные от напряженной творческой работы. Наталья Рафаиловна хорошо понимала, как это важно для Александра Михайловича, старалась наполнить квартиру цветами, которые он любил. Рассказывая о харьковском периоде своей жизни, В. А. Стеклов вспоминал о беседах, посвященных литературе и музыке, о встречах в семейном кругу, душой которых была Наталья Рафаиловна: «После математических бесед с Ляпуновым, на продолжительность которых постоянно брюзжал старик Сеченов, я задавал им концерты под аккомпанемент Оли⁶. Пел главным образом из опер и преимущественно из «Руслана», которого обожала Наталья Рафаиловна,

⁵ Письмо Е. К. Ляпуновой от 14 марта 1950 г. цитируется по [69, с. 160—161].

⁶ Ольга Николаевна Стеклова — жена В. А. Стеклова.

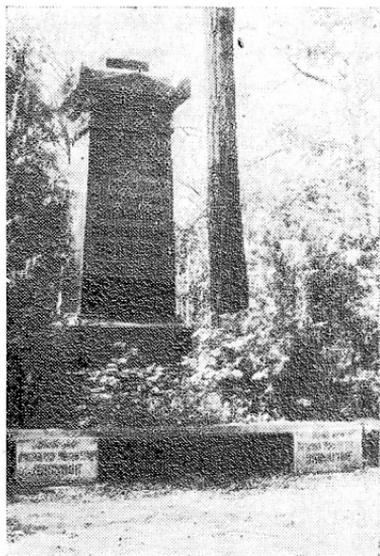
находя мое пение лучше всякого оперного. Она утверждала при этом, что только один знаменитый Мельников доставляет такое же удовольствие, как я, и что мой голос очень напоминает Мельникова» (Цит. по [160, с. 57]).

Любимица своего знаменитого дяди — великого русского физиолога И. М. Сеченова Наталья Рафаиловна была высокообразованной женщиной с доброй и чуткой душой, обладала тонким вкусом. Она много и с большим увлечением занималась вопросами языка и литературы, историей и культурой западных славян. Н. Р. Ляпунова много читала, занималась переводами с сербского языка, отлично рисовала. Она любила и хорошо понимала музыку.

Со своей стороны Александр Михайлович всегда шел навстречу духовным запросам и увлечениям жены. Как уже говорилось, в 1886 г. специально для Натальи Рафаиловны была предпринята поездка в Сербию, всегда очень интересовавшую Н. Р. Ляпунову. Теплые, дружеские отношения поддерживали Ляпуновы с видным литературоведом-славистом И. В. Ягичем, которого Ляпуновы посетили в Вене в апреле 1908 г. во время поездки на Математический конгресс и который с большим вниманием относился к занятиям Натальи Рафаиловны.

Семейная жизнь Ляпуновых была бы совершенно счастливой и безоблачной, если бы не слабое здоровье Натальи Рафаиловны. Частые недомогания и развившийся впоследствии туберкулез легких мешали ей полностью отдаться заботам о семье, посвятить свое время и силы любимому делу. Александр Михайлович, вообще то более склонный к упорным теоретическим изысканиям в домашней обстановке, тем не менее всегда, когда дело касалось здоровья жены, предпринимал с ней дальние и длительные поездки (в Швейцарию в 1911 г., в Одессу в 1913 г., в Финляндию в 1917 г., и, наконец, в Одессу летом 1917 г.). Почти каждое лето вдвоем они выезжали в деревню, где могли отдохнуть в кругу своих родных, отдавшись обаянию любимой ими среднерусской природы.

Повседневным самопожертвованием, примерами беззаветной преданности А. М. Ляпунова жене были наполнены все последние дни жизни Александра Михайловича и угасавшей Натальи Рафаиловны. «Он [Александр Михайлович] привез Наталью Рафаиловну



**Памятник на могиле
Александра Михайловича и Натальи Рафаиловны Ляпуновых**

в Одессу из Петрограда по настоянию докторов, — писала Елена Константиновна Ляпунова. — Петроград голодал. Наталья Рафаиловна погибала от туберкулеза легких; ей надо было обеспечить питание. . . Знавшие его всячески старались отвлечь его мысли от приближавшейся катастрофы. . .»⁷

Восхищением и преклонением перед самоотверженностью Александра Михайловича проникнуты письма и воспоминания Б. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, А. Д. Билимовича, Г. К. Суслова и других современников, хорошо знавших жизнь Ляпуновых. Об отношении Ляпунова к безнадежно больной жене можно судить и по сухим строчкам медицинских документов и заключений, написанных в связи с болезнью Натальи Рафаиловны и кончиной супругов. Именно крайним физическим утомлением Ляпунова, связанным с уходом за умирающей женой, а также сознанием тяжести и неизлечимости ее болезни объяснили врачи его психи-

⁷ Письмо Е. К. Ляпуновой к А. М. Шульбергу от 14 марта 1950 г. цит. по [69, с. 160—161].

ческое состояние и депрессию, приведшие великого математика к роковому концу.

Кончина Натальи Рафаиловны и Александра Михайловича Ляпуновых, как и вся история их жизни подтверждает, что перед истинной любовью отступает все, даже сама смерть

В оставленной записке Александр Михайлович просил похоронить его в одной могиле с женой, что было исполнено. Ляпуновы были похоронены на Втором христианском кладбище Одессы, расположенном на Черноморской дороге (ныне — Одесское мемориальное кладбище). Их могила находится неподалеку от кладбищенской стены, в удалении от кладбищенской церкви и центральной аллеи, возле которых было принято хоронить представителей видных дворянских семей, именитых горожан и профессоров университета.

III

Передовые круги профессуры, университетская молодежь полностью сознавали горечь утраты. На похоронах, как писала жена Бориса Михайловича Ляпунова Елена Константиновна, «присутствовало очень много народа: вся университетская молодежь, преподаватели. Гроб несли на руках студенты. Произносили много речей» (Цит. по [69, с. 164]). На похоронах среди профессоров и преподавателей физико-математического факультета были В. Ф. Каган, С. О. Шатуновский, А. Я. Орлов, И. Ю. Тимченко, Е. Л. Буницкий, профессор других факультетов, очень много студентов. По свидетельству очевидца, Ляпуновых хоронили «многочисленные почитатели и университет... Мы расходились, потрясенные величием духа в жизни и смерти этого великана научной мысли» [51, с. 7].

Трудности жизни оккупированной Одессы, обилие важных политических событий, надвигавшихся с необычайной быстротой, оторванность города от основных центров страны — Москвы и Петрограда, — все это как бы заслонило собой, отодвинуло на второй план кончину А. М. Ляпунова, которая осталась первоначально малозаметной. «В конце ноября 1918 года мы были поражены случайно дошедшим до нас слухом, что жена А. М. Ляпунова Наталья Рафаиловна, урожденная Сеченова, скончалась в Одессе, а сам он покончил с собою, — вспоминал впоследствии В. А. Стек-

лов. — К величайшему прискорбию, этот слух подтвердился» [43, с. 30].

Лишь 3 мая 1919 г. Академия наук специальным заседанием почтила память великого математика. Обзор тридцатилетней научной деятельности Ляпунова был дан в речи ученика А. М. Ляпунова академика В. А. Стеклова. Профессорскую деятельность Александра Михайловича охарактеризовал в своей речи, произнесенной на этом же заседании, академик А. Н. Крылов.

Точная дата и место смерти А. М. Ляпунова долго оставались неизвестными многим в России и за рубежом. Некоторые ошибочные сведения даже проникли в печать. Например в издании Французской академии наук «Annuaire pour 1926» ошибочно указано, что Ляпунов умер в Петрограде.

В годы войны могила А. М. Ляпунова была утеряна. Однако в результате терпеливых поисков группы научных работников Одессы при активном участии профессора университета К. Н. Савченко могила Ляпунова была найдена [147]. Большую помощь в этом оказала Е. К. Ляпунова, которая заботилась о могиле великого математика несмотря на свой преклонный возраст [69, с. 165].

Сейчас на могиле А. М. Ляпунова установлен гранитный памятник. Под зелеными кронами деревьев поблескивают буквы: «Великий русский математик академик Александр Михайлович Ляпунов. 1857—1918». На снежно-белой тыльной стороне памятника выбит текст: «Создатель теории устойчивости движения, учения о фигурах равновесия вращающейся жидкости, методов качественной теории дифференциальных уравнений, автор центральной предельной теоремы теории вероятностей и других глубоких исследований в области механики и математического анализа».

IV

В некрологе, посвященном памяти своего учителя и друга, В. А. Стеклов писал: «Он оставил после себя законченную рукопись в 489 стр. формата писчей бумаги, заключающую в себе обширное исследование под заглавием „О некоторых фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости. . .“ Некоторые рукописи Александра Михайловича будут храниться в Ма-

тематическом кабинете ⁸, учрежденном Академией в память знаменитых сочленов П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова» [100].

Для сохранения, обработки и подготовки к изданию работ А. М. Ляпунова Физико-математическим факультетом Новороссийского университета была создана комиссия в составе профессоров университета А. Д. Билимовича, А. Я. Орлова, Е. Л. Буницкого и И. Н. Занчевского. Комиссия сохранила и передала Академии наук упомянутую работу Ляпунова «О некоторых фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости», найденную после смерти автора. Это исследование было опубликовано Академией в особом издании, посвященном ее двухсотлетию, на французском языке, в том виде, в каком оно было оставлено Ляпуновым (часть первая — в 1925 г., часть вторая — в 1927 г.). Публикация была осуществлена под руководством вице-президента Академии наук СССР В. А. Стеклова, которому при подготовке рукописи помогали А. А. Фридман, В. И. Смирнов и Н. Е. Кочин. Этот труд Ляпунова был издан вместе с речью В. А. Стеклова, произнесенной им на VIII Международном математическом конгрессе (г. Торонто, 1924 г.) и излагающей общее содержание работы Ляпунова. В этой речи В. А. Стеклов отмечал:

«Исследования были начаты. . . в 1915 г. и закончены в Одессе в конце 1918 г. за несколько дней до смерти выдающегося члена нашей Академии. . . Под робные расчеты, исключительно сложные, относящиеся к этому посмертному труду, так же как и к четырем частям работы „О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов, вращающейся однородной массы жидкости“ (1906—1914), опубликованной при жизни автора, тщательно описанные и несколько раз различными способами проверенные, занимают около 1000 страниц писчей бумаги и хранятся в специальном шкафу в большом зале Академии наук. . .

Эта проблема еще недавно казалась почти неразрешимой даже в случае однородной жидкости. Приближенное решение ее с помощью метода последовательных приближений было дано впервые Пуанкаре; Дж.

⁸ Математический кабинет имени П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова при Академии наук, о котором писал Стеклов, был учрежден в марте 1919 г. [118].

Дарвин продвинул дальше вычисления до приближений второго порядка. Ляпунов решил задачу во всей общности в своем колоссальном труде. . . Он дал не только способ вычисления последовательных членов разложения. . . но также доказательство сходимости последовательных приближений. Я пользуюсь случаем, чтобы отметить еще, что Ляпунов изучил проблему устойчивости фигур равновесия и дал строгое доказательство неустойчивости грушевидной фигуры. . . Девять лет спустя, в 1917 г., Джинс, применяя соответствующую формулу Пуанкаре до третьего приближения, нашел в этом приближении результат, согласный с общим результатом Ляпунова.

. . . Трудно изложить в кратком сообщении анализ еще более сложного посмертного труда Ляпунова, касающегося теории фигур равновесия неоднородной жидкости. Я сожалею, что не смогу предложить. . . подробности этого анализа, столь же важного, как и искусного. . .

Ляпунову удалось установить существование ряда фигур равновесия неоднородной жидкой массы, мало отличающихся от эллипсоидов (не особых) Якоби и Маклорена. . . Между тем Ляпунов не мог ограничиться доказательством только возможности задачи, — одной теоремой существования фигур равновесия. Он задался целью идти до конца, не обращая внимания на огромные трудности, которые представляет фактическое решение задачи. . .

Исследования Ляпунова носят чисто аналитический характер; большинство страниц его рукописи содержат только очень сложные математические формулы, и его труд зачастую напоминает „песню без слов“. По-видимому, для этого выдающегося аналитика математический язык был ясен сам по себе; и этого языка ему было достаточно для проникновения в „природу вещей“ (*in naturam rerum*), но надо сознаться в том, что некоторые геометрические и физические иллюстрации и интерпретации еще необходимы для того, чтобы дать более или менее ясное представление о механических и физических фактах, которые скрываются в массе аналитических формул; с другой стороны, нет оснований сомневаться в том, что анализ может быть упрощен в некоторых отношениях; наконец, вне всякого сомнения и то, что исследования Ляпунова являются лишь первым шагом, хотя и очень большим, к решению этого

важного вопроса, и что его идеи допускают дальнейшее развитие и принесут со временем новые и драгоценные дополнения в сокровищницу науки. . .»⁹

В этих словах В. А. Стеклова заключена емкая и точная характеристика последнего труда А. М. Ляпунова, его значения для науки и огромных таящихся в нем возможностей для последующего развития.

Глава 8

Ляпунов в жизни

Жизнь многих великих ученых не была богата яркими событиями. «В его жизни не было великих событий, все великие события совершались у него в голове», — говорил Людвиг Больцман о Г. Кирхгофе. Поэтому о характере этих ученых мы не можем судить по их поступкам и действиям, связанным с широко известными историческими событиями, как в случае полководцев, великих путешественников или государственных деятелей. Быть может поэтому, как писал Бальзак, нужны совершенно исключительные обстоятельства, чтобы имя ученого попало из науки в историю человечества. О личности ученых нам зачастую приходится судить по поступкам, характеризующим их отношения с учителями, товарищами по учебе и работе, с учениками и членами семьи, по внешне малозначительным эпизодам их жизни, которые часто остаются неизвестными и современникам и биографам. Не был в этом отношении исключением и Александр Михайлович Ляпунов.

Ко времени окончания А. М. Ляпуновым университета (1880) относится случай, о котором мы узнаем из письма Г. К. Суслова. Письмо это было адресовано заседанию Новороссийского общества естествоиспытателей (14 марта 1920 г.), посвященному памяти А. М. Ляпунова, и описанный в нем случай ярко характеризует Александра Михайловича.

«По окончании курса, Ляпунов и я были оставлены при Университете. Вот тут то и случилось одно об-

⁹ Обзор В. А. Стеклова «Посмертные труды Ляпунова о фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости» приведен в [45, т. 5, с. 379].

стоятельство, о котором я не считаю возможным умолчать и которое очень характеризует А. М. Хотя нас обоих оставили при Университете, но стипендий свободных была всего одна — факультет присудил ее Ляпунову. Но после первой же полочки А. М. Ляпунов явился ко мне и настоятельно просил, чтобы я взял себе половину стипендии, так как, по его мнению, и у него, и у меня были одинаковые права на стипендию. Очень больших усилий стоило мне убедить А. М. отказаться от своего намерения. Указанный эпизод может показаться незначительным, но, по моему мнению, он является показательным для того щепетильного излива справедливости, которое характерно для души моего покойного товарища. . .» [82, с. 18]¹.

Приведем еще один пример, характеризующий А. М. Ляпунова, как человека. В 1901 г. он получил очень взволновавшее его письмо. Писала Марина Афанасьевна Карнашева, приемная дочь его учителя математики в Нижегородской гимназии Дмитрия Константиновича Гика. «Милостивый государь г-н профессор, — писала М. А. Карнашева. — Не имея чести лично Вас знать, но много слыша хорошего, а именно от покойного Дмитрия Константиновича, так как Вы изволили быть его учеником, который, как он высказывал, выдавался своими способностями, то я и обращаюсь к Вам с покорнейшей просьбой. . .» Далее М. А. Карнашева просит Ляпунова оказать содействие в деле сохранения памяти о Д. К. Гике — посоветовать, куда передать его личные книги и материалы, подготовить биографию Д. К. Гика. Карнашева пишет, что старый учитель был в восторге от встречи с Ляпуновым в Москве²: «Между прочим покойный Дмитрий Константинович обратился к Вам с каким-то вопросом, Вы изволили ему ответить и во время всего разговора стояли, на что Вам покойным было замечено, чтобы Вы сели, но Вы ответили следующее: „Ученик должен стоять перед своим учителем“, и когда вернулся он домой в Скопин, расска-

¹ Гавриил Константинович Суслов, с которым А. М. Ляпунов учился в Петербургском университете, стал впоследствии видным ученым-механиком.

² Эта встреча произошла, по-видимому, в 1884 г., когда делегация Харьковского математического общества в составе А. М. Ляпунова, К. А. Андреева и В. А. Стеклова участвовала в праздновании 25-летия Московского математического общества.

звал, как относятся к нему бывшие его ученики и как относятся начальство», — писала Карнашева [126, л. 1, 2].

Из второго письма М. А. Карнашевой мы узнаем, что Ляпунов оказал ей нужную помощь и, кроме того, посоветовал обратиться к А. П. Грузинцеву, долгое время работавшему в Нижегородской гимназии. «Ваше письмо я получила, за которое еще раз благодарю, — писала в ответ Ляпунову Карнашева. — В нем было немного написано, но много сказано. Если бы все лица так ценили и судили, то можно было бы находить и правду» [126, л. 3]. Тронутая вниманием Ляпунова, Карнашева приложила к своему письму фотографию Д. К. Гика.

Быть может, главнейшей чертой личности Ляпунова была необыкновенная сосредоточенность и целеустремленность в решении главной задачи, которой он посвятил свою жизнь. «Что особенно поражало у Александра Михайловича — это исключительная способность сосредоточивать свою мысль для достижения одной, главной цели, — писал А. Д. Билимович. — Даже общая теория устойчивости, глубоко разработанная им, была для него вспомогательной теорией, с помощью которой исследовалась устойчивость все тех же форм вращающейся жидкости. Другие работы А. М., например, выдающиеся работы из теории вероятности все же носили случайный характер. . . Получалось впечатление, что эта способность к сосредоточенности и углублению какое-то чисто структурное, физиологическое свойство природы самого организма Александра Михайловича. Таким же был и его брат, Борис Михайлович, позже также академик, который с такой же упорностью добивался решений вопросов сравнительного языкознания. . .» [51, с. 5].

Александр Михайлович всегда был убежденным противником всякого рода идеалистических спекуляций и попыток увязать новые, подчас еще не до конца понятые результаты науки с религией и мистицизмом. Этим, по-видимому, в значительной степени объясняется его недоверие и отрицательное отношение к новым в то время геометрическим представлениям, оказавшимся плодотворными и важными. Так, в очерке о П. Л. Чебышеве Ляпунов писал: «В то время, как почитатели отвлеченных идей Римана все более углубляются в функционально-теоретические исследования и

в псевдо-геометрические изыскания в пространствах четырех и большего числа измерений и в этих изысканиях заходят иногда так далеко, что теряется всякая возможность видеть их значение по отношению к каким-либо приложениям не только в настоящем, но и в будущем, П. Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководствуясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими) и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев» [178, с. 10—11].

По-видимому, А. М. Ляпунов вполне разделял эти взгляды своего учителя. И хотя сегодня хорошо известно огромное значение геометрии многих измерений для науки и практических приложений, этот пример ярко демонстрирует стремление Ляпунова возвести прочные «мосты» между теорией и практикой, его желание всегда твердо стоять на «реальной почве».

Одной из особенностей подхода Ляпунова к решению научных вопросов было то, что он, как правило, не удовлетворялся первым решением, считая его слишком «сложным, неуклюжим, связанным с обходными путями» [51, с. 5]. Поэтому Александр Михайлович стремился не только снова и снова проверить и, если требуется, уточнить полученный ранее результат, но всегда старался найти более простой, ясный и изящный путь решения. Всякое последующее решение он считал лучшим, чем предыдущее. Поэтому довольно часто Ляпунов вновь и вновь возвращался к уже ранее рассмотренным и решенным им задачам.

Стремясь к абсолютной строгости результата и отвергая любые «сомнительные суждения» при решении поставленных вполне определенно с точки зрения математики задач механики или физики, Ляпунов вместе с тем не ограничивался решением вопроса в общем виде, а ставил задачу разработки подробного алгоритма расчета интересующих величин и обычно доводил решение до количественных результатов. Поскольку решаемые Ляпуновым проблемы были исключительно сложными, удовлетворение столь высоким требованиям к их решению было по необходимости связано с колоссальным трудом. Даже с чисто внешней стороны объем опубликованных работ Ляпунова поражает своей грандиозностью. В. А. Стеклов отмечал, что материалы

Ляпунова только по вопросу о фигурах равновесия вращающейся жидкости «содержат более 1000 страниц большого формата in 4°, причем некоторые из них дают лишь окончательные результаты громадного количества вычислений, которые и сами по себе представляют большой интерес во многих отношениях, но не вошли в печатный текст» [43, с. 23].

Ляпунов всегда в своих выводах и заключениях был предельно точен и осторожен. «Для нашей работы необходимы два условия: неустанная выдержка и готовность всегда выбросить за борт то, на что ты потратил так много времени и труда», — писал А. Эйнштейн. Эти слова в полной мере можно отнести к А. М. Ляпунову. Не случайно научную деятельность Ляпунова Стеклов назвал «ученым подвигом»: «. . . Работу, совершенную Александром Михайловичем за последние 15 лет, нельзя назвать иначе, как подвигом», — писал Стеклов.

Трудоспособность и трудолюбие А. М. Ляпунова вызывали удивление и восхищение его учеников и коллег, а для его близких были неразделимы с его личностью. «Как Вы поживаете? — спрашивает в своем письме от 23 марта 1897 года Иван Михайлович Сеченов. — Здорова ли у Вас Наташа и подвигается к концу диссертация Бориса Михайловича? Об Вас я не спрашиваю, знаю, что Вы по обыкновению работаете с утра до ночи» [130].

Эти слова И. М. Сеченова, однако, не совсем точны: Ляпунов предпочитал работать ночью, хотя зачастую он работал и значительную часть дня. О самоотверженном отношении А. М. Ляпунова к науке, об его облике и жизни впоследствии писал Стеклов: «А. М. Ляпунов олицетворял собой лучший тип идеалиста 60-х годов. Все из ряда вон выходящие силы свои он отдавал на беззаветное служение науке, ею он жил, в ней одной видел смысл жизни и часто говорил, что без научного творчества и самая жизнь для него ничего не стоит.

С самого начала своей ученой деятельности он работал изо дня в день до 4 или 5 часов ночи, а иногда являлся на лекции (в Харьковском университете) не спав всю ночь. Он не позволял себе почти никаких развлечений и если появлялся иногда (раз или два в год) в театре или в концерте, то лишь в самых исключительных случаях, как, например, на редких концертах своего брата, известного композитора С. М. Ляпунова.

Круг знакомства Александра Михайловича был крайне ограничен и состоял из ближайших его родственников и небольшого числа ученых, преимущественно математиков, причем редкие товарищеские собрания, на которых бывал А. М. Ляпунов, преимущественно сводились, особенно в харьковский период его жизни, к высшей степени поучительным беседам по текущим вопросам науки.

Отчасти потому и производил он иногда на лиц, мало его знавших, впечатление молчаливо-хмурого, замкнутого человека, что зачастую был настолько поглощен своими научными размышлениями, что смотрел — и не видел, слушал — и не слышал, над чем так часто и так добродушно посмеивался в кругу его близких его тещь Р. М. Сеченов. . .

Высоко развитое чувство чести и внутреннего достоинства, бросавшееся в глаза всякому, даже при мимолетной встрече с ним, действовало импонирующим образом на всех и в особенности на молодежь. . .» [43, с. 31—32].

Именно это удивительное обаяние личности Ляпунова, его талант преподавателя и выдающиеся способности к научному творчеству позволили ему «покорить в один час предвзято настроенную аудиторию» в Харьковском университете, дали возможность Александру Михайловичу занять, по выражению Стеклова, «совершенно особое положение в глазах студентов», которые к Ляпунову «стали относиться с исключительно почтительным уважением». Известно крайне добросовестное отношение А. М. Ляпунова к своим преподавательским обязанностям. Например, свои и без того очень редкие отъезды из Харькова (включая короткую поездку в Петербург, во время которой состоялась свадьба Ляпунова с Н. Р. Сеченовой) Александр Михайлович неизменно приурочивал ко времени каникул. Занимался и чисто практической работой по оснащению и поддержанию образцового порядка в кабинете прикладной механики Харьковского университета, питая привитое ему его великим учителем П. Л. Чебышевым глубокое уважение к вопросам практики и сознавая большую роль кабинета в деле преподавания различных разделов механики. Много лет спустя и в Новороссийском (Одесском) университете он так же вкладывал душу в свои лекции, как и в молодые годы. Ляпунов мог бы сказать о себе словами французского про-

фессора Жоржа Юмбера: «Самой почетной смертью для себя я считаю смерть во время моей лекции». Впоследствии Е. К. Ляпунова вспоминала, что «А. М. лекции читал с увлечением. Его лекции привлекали массу народа; приходили не только студенты, но и профессора других факультетов. Это я говорю не только об одесском периоде его профессорской деятельности» [106, с. 55].

В автобиографии А. М. Ляпунов писал о себе так: «Будучи сторонником самой широкой университетской автономии, принимал деятельное участие в 1900 г. в факультетской комиссии для выработки ответа на известный циркуляр министра народного просвещения Боголепова от 21 июля 1899 г., а в 1901 г. — в комиссии совета для составления ответов на известные вопросы, циркулярно разосланные по университетам министром народного просвещения ген.-ад. Ванновским» [222, с. 52]. Несмотря на свои исключительно напряженные ученые занятия Ляпунов отнюдь не был «кабинетным» ученым, полностью оторванным от окружающей жизни и повседневных вопросов практики и общественной жизни. Достаточно вспомнить о его участии в «Записке 342 ученых», о выступлении Ляпунова в составе Комиссии Академии наук против проекта П. А. Некрасова.

Многогранная деятельность Ляпунова имела прямое отношение к Харьковскому математическому обществу, председателем которого он состоял в последние годы жизни в Харькове, и к работе многочисленных комиссий Академии наук. А. М. Ляпунов участвовал в принятии решений о присуждении именных премий Академии, в разработке предложений о дальнейшей судьбе Физической обсерватории. Выше говорилось об участии Александра Михайловича в работе комиссии по изданию полного собрания сочинений Леонарда Эйлера. Занимался Ляпунов и вопросом о реформе календаря в России, и даже представил свое мнение о мерах к уничтожению возможных в военное время эпидемий.

К сожалению, А. М. Ляпунов, оказавшись в 1917—1918 гг. в Одессе, отрезанной ходом политических событий от революционных центров России, не сумел оценить значение великих преобразований Октября. Вместе с тем судьба многих выдающихся ученых, в том числе тех, кого хорошо знал и высоко ценил Ляпунов (В. А. Стеклова, сразу принявшего сторону Советской

власти и вскоре ставшего вице-президентом Академии наук, академиком А. Н. Крылова, А. А. Маркова, Н. М. Крылова, брата Александра Михайловича академика Б. М. Ляпунова и других), позволяет предположить, что если бы жизнь Александра Михайловича не прервалась столь трагически, он многое еще совершил бы для своего народа и отечества, мог бы, как писал Б. М. Ляпунов, «еще много лет обогащать науку своими трудами» [73, с. 24].

«Прекрасным прямым человеком», «добрым товарищем, принимавшим близко к сердцу. . . духовные и материальные потребности каждого из нас» назвал Ляпунова Д. А. Граве в своем письме от 20 марта 1902 г. Действительно, изучая архивные документы Ляпунова нельзя не обратить внимание на заботу Александра Михайловича о своих товарищах и коллегах, особенно молодежи и, конечно, об учениках, даже после того, как ученики эти стали вполне самостоятельными исследователями. Из адресованных Ляпунову писем Н. А. Умова, Д. К. Бобылева, Н. Е. Жуковского и других мы узнаем, что Александр Михайлович широко использовал свой авторитет для выдвижения способных молодых исследователей и создания наилучших условий для их работы. Бывало, что он предоставлял возможность молодым ученым продолжать работу, уже начатую и в определенной степени выполненную им самим, и обеспечивал им возможность самостоятельного опубликования результатов. Так, 3 ноября 1897 г. Н. Е. Жуковский писал Ляпунову [125, л. 9]:

Многоуважаемый Александр Михайлович!

Мне прислана из С.-Петербурга статья Г. В. Колосова «Об одном случае движения твердого тяжелого тела, опирающегося на гладкую поверхность», которую автор просит напечатать в трудах Физического отделения. Статья заключает в себя доказательство применимости случая Гесса к волчку.

Вспоминаю, что года 2 тому назад Вы говорили мне, что заметили упомянутое обстоятельство.

Тогда же Вы на мою просьбу написать заметку для ТФО сказали, что предоставляете это сделать молодым авторам. Полагаю, что я не поступлю против Ваших интересов, согласившись печатать в нашем журнале заметку Колосова. Желал бы получить от Вас ответ.

Преданный Вам Н. Жуковский

Ляпунов способствовал скорейшему опубликованию результатов исследований А. П. Грузинцева, Г. В. Колосова, В. А. Стеклова, Н. Н. Салтыкова и других ма-

тематиков и механиков, ознакомлению математической общественности с их работами. Многие обращались за помощью к Ляпунову, имея целью утверждение на профессорские должности достойных кандидатов в противес ставленникам министерства и ректоров. Например, 8 ноября 1903 г. В. И. Ермаков обратился к Ляпунову с просьбой поддержать Н. Н. Салтыкова, подавшего на конкурс по кафедре механики в Киевский политехнический институт. Хотя Салтыков имел несомненные преимущества перед вторым кандидатом — Покровским, но этот последний был товарищем ректора по университету, и предпочтение, как опасался Ермаков, могло быть отдано ему [124]. С аналогичными просьбами, связанными с замещением вакантных должностей и с решением других вопросов, к Ляпунову обращались также М. А. Мензбир, П. П. Пятницкий, А. А. Марков и другие.

Время сохранило для нас внешний облик А. М. Ляпунова. На старых фотографиях мы видим нескладного еще, семилетнего ребенка, стриженного двенадцатилетнего мальчугана, сидящего перед раскрытой книгой, восемнадцатилетнего юношу-студента с только что отпущенной вьющейся бородкой. С другой фотографии строго глядит на нас зрелый ученый, а здесь — лицо преждевременно состарившегося человека, познавшего не только радость научного творчества и заслуженного успеха, но и испытавшего боль за судьбу близкого человека, за будущее отчины. В воспоминаниях людей, хорошо знавших Ляпунова, сохранился привлекательный образ Ляпунова в расцвете жизненных сил — «красавца-мужчины» по выражению В. А. Стеклова. Тем, кто видел Ляпунова, особенно запоминались его прекрасные серые глаза, умевшие быть добрыми и ласковыми, но чаще отражавшие глубокую напряженную работу ума и души.

Внешняя сухость и суровость Ляпунова, проявлявшиеся в зрелые годы, были обманчивыми. «В действительности же за внешней сухостью и даже суровостью в А. М. Ляпунове скрывался человек большого темперамента с чуткой и, можно сказать, детски чистой душой», — отмечал В. А. Стеклов [43, с. 32]. «Вспоминается, что в далекие времена, в Теплом Стане, куда летом съезжалось много родственников, молодежи, А. М. любил вечерами знакомить нас с элементарными понятиями по астрономии, показывая звезды, созвездия, —

писала Е. К. Ляпунова. — Удивительно, как этот крупный мыслитель — математик умел найти простые слова и сделать свою беседу увлекательной и понятной. . . Долго еще будут знать А. М. как математика и успешно развивать его научные идеи, но мало кто знает, что за внешне суровым обликом таился мягкий, добрый, преданнейший из людей. Первое впечатление суровости создавалось при виде его насупленных бровей и мгновенно рассеивалось, когда вы встречались с взглядом его добрых серых глаз. Он очень любил детей; играя со своими племянниками он увлекался игрой не меньше их, поднимая с ними весь дом вверх дном. Он любил музыку, унаследовав от своей матери врожденную музыкальность. . . А. М. был очень общителен в кругу близких, любил пошутить, умел подметить характерные черточки людей; был очень гостеприимен, хлебосолен. Он очень любил природу» (цит. по [69, с. 161]).

Действительно, любовь к природе была ярко выраженной чертой Ляпунова, присущей ему на протяжении всего жизненного пути. «В часы отдыха А. М. любил отдаваться обаянию красот природы, любил и умел сажать и выращивать садовые деревья, — вспоминал Борис Михайлович Ляпунов. — И харьковская, и позднее петербургская квартиры его были украшены им самим выращенными фикусами и пальмами» [73, с. 12]. Особенно любил Ляпунов выращивать в комнатных условиях растения далеких южных стран — финиковые и кокосовые пальмы, араукарии, латании, малые кентии. Об этом мы узнаем из его записных книжек, где имеются регулярные записи роста растений, пометки об их поливе. Даже в последние месяцы жизни, в Одессе, измученный духовно и физически Ляпунов разводил цветы на балконе, ухаживал за ними. «Александр Михайлович. . . очень любил цветы и еще в Теплом Стане разводил их в саду, сам за ними ухаживал, и здесь, на балконе, развел много цветов, поливал их», — писала впоследствии в уже цитированном письме об одесском периоде жизни Александра Михайловича Е. К. Ляпунова.

Где бы ни приходилось бывать А. М. Ляпунову — везде он обращал особенное внимание на природу. Вот что, например, писал Ляпунов брату Борису Михайловичу во время своей поездки в Рим, на IV Международном математическом конгрессе: «При Академии наук имеется довольно большой сад. . . Большая часть

деревьев из пород, никогда не теряющих листву. . . Особенно хороша в этом саду аллея из пальм: латании и финиковые пальмы в перемежку, с толстыми стволами. . . Есть и деревья, теряющие листву. Из них мы в особенности обратили внимание на громадные платаны. Но на них листьев еще не было: только начали лопаться почки. В саду множество певчих птиц. Особенно много скворцов. . .» В другом письме Ляпунов описывает организованную устроителями конгресса прогулку на Палатин и замечает: «Недалеко от нас над обрывом виднелась гигантская финиковая пальма. Без сомнения, она прожила много веков и, быть может, видела древний Рим не в развалинах» [73, с. 12—13].

Представление о некоторых чертах характера А. М. Ляпунова дают его записные книжки, содержащие много сделанных чернилами или карандашом кратких записей и пометок, охватывающих период с 1896 по 1916 г. и связанных с его перепиской, поездками, научной работой, вопросами быта [112]. Изучение этих записей позволяет сделать вывод, что А. М. Ляпунов в повседневной жизни отличался исключительной собранностью и аккуратностью. В этих записных книжках общим объемом около полутора тысяч страниц Ляпунов тщательно фиксировал даты отправки писем, рукописей и опубликованных работ, в его записях можно найти сведения о подготовке к поездкам (упаковка вещей, оформление документов и т. п.), о маршрутах путешествий. Особая часть записей относится к денежным расчетам. Например, Ляпуновым были точно подсчитаны расходы, связанные с поездкой в Рим на математический конгресс (1050 рублей 57 копеек). Однако рядом с этими скрупулезными подсчетами рублей и копеек соседствуют записи об отправке довольно крупных сумм (сотни рублей) нуждающимся знакомым и родственникам. Путешествуя, Ляпунов тщательно следил за ходом часов, регулярно вносил нужные поправки по Пулковскому времени. Сохранилось много его записей погоды для разных времен дня (скорость ветра, температура, давление).

Отмеченные обстоятельства могли бы дать основания заподозрить Ляпунова в педантизме, но вероятнее всего предельная тщательность ученого в научных изысканиях стала как бы его «второй натурой», которая не могла не проявляться в жизни и в быту.

Таким предстает перед нами образ Александра Михайловича Ляпунова — образ яркий, глубоко человеческий, исполненный большого обаяния, хотя и не лишенный противоречий. «А. М. Ляпунов удовлетворял в полной мере тем требованиям, которые предъявлял Лобачевский к человеку вообще и в особенности к представителям науки», — писал В. А. Стеклов. К этому добавим, что Александр Михайлович мог бы сказать о себе и о своей жизни словами Альберта Эйнштейна: «Доброта, красота и правда — вот идеалы, которые освещали мой жизненный путь, вновь и вновь возрождая в моей душе радость и мужество».

Часть вторая

Глава 1 Ляпунов и Стеклов

История творческих и дружеских связей А. М. Ляпунова и его лучшего ученика и ближайшего друга В. А. Стеклова составляет одну из ярких страниц истории отечественной математики и механики, истории высшего образования в России. Их отношения профессора и студента, переросшие со временем в сердечную дружбу, продолжавшиеся более трех десятилетий, вплоть до кончины Александра Михайловича, тесное сотрудничество, деятельность Стеклова, направленная на дальнейшее развитие и популяризацию научного наследия А. М. Ляпунова в нашей стране и во всем мире, — все это служило и служит образцом отношения к науке, к своим учителям, ученикам и коллегам для многих поколений ученых.

Владимир Андреевич Стеклов родился 28 декабря 1863 г. в семье Андрея Ивановича Стеклова и Екатерины Александровны, урожденной Добролюбовой, сестры великого русского критика и общественного деятеля Николая Александровича Добролюбова. В семье Стекловых процветал дух передовых освободительных идей Чернышевского и Добролюбова, «дяди Коли», как его называли в семье. Десяти лет Володя Стеклов поступил в первый класс Нижегородского дворянского института, обучение в котором велось по программе гимназий. С шестого класса у Стеклова возникло серьезное увлечение математикой и физикой.

Еще до окончания института Володя Стеклов, как он сам отмечал впоследствии, стал проявлять «признаки вольнодумства» в вопросах истории и религии. Это проявилось, например, в «пробном» сочинении, посвященном «великой императрице» Екатерине II. За сочинение это лучший ученик института Стеклов был обвинен директором в «политическом вольнодумстве», дерзости и превратном понимании задач истории.

В 1882 г. несмотря на настойчивые советы директора и ведущих преподавателей посвятить себя филологии

В. А. Стеклов поступил на первый курс физико-математического факультета Московского университета. Однако из-за живости характера, широты интересов, а также вследствие отрыва от семьи (которая к этому времени переселилась из Нижнего Новгорода в Крым в связи с тяжелой болезнью отца) учеба Володи Стеклова вначале сложилась неудачно: он запустил учение и решил было даже оставить физико-математический факультет и заняться изучением медицины. Однако поездка в Харьков и беседа с ректором Харьковского университета профессором Г. М. Цехановецким — прогрессивным ученым, специалистом по политической экономии изменили эти планы. Владимир Стеклов поступил на первый курс математического факультета Харьковского университета. Теперь В. А. Стеклов настолько увлекся наукой, что работал не менее двадцати часов в сутки (из них на лекциях — лишь два-три часа). Результаты такой работы талантливого юноши не замедлили сказаться. Впоследствии В. А. Стеклов в своем дневнике писал: «Скоро я опередил в знаниях всех моих товарищей и приобрел всеобщее их уважение, профессора также обратили на меня некоторое внимание. К концу года я сделался организатором значительного кружка студентов, поощряя их к занятиям наукой, причем оказался довольно искусным пропагандистом великого значения математических наук для жизни человечества. Своими, быть может, иногда наивными, но всегда увлеченными рацеями я действительно увлекал молодежь и заставлял ее не ударить лицом в грязь. Совершенно ненамеренно возбуждал соревнование в студентах, поднимал в них дух и энергию и вскоре стал, могу смело сказать, кумиром курса, своего рода знаменитостью студенческой среды. Это, понятно, действовало на меня возбуждающим образом и еще более заставляло погружаться в научные занятия» (Цит. по [160, с. 38]).

В Харьковском университете состоялась первая встреча А. М. Ляпунова с В. А. Стекловым, и с этого времени Стеклов, бывший всего на шесть лет моложе, стал учеником великого математика. Рассказ В. А. Стеклова об их первой встрече был приведен выше. Стеклов как наиболее знающий и способный студент стал «посредником», сообщавшим молодому преподавателю возникающие в студенческой аудитории вопросы, которые сами студенты не решались задавать «из опасения обнаружить свое невежество».



**Владимир Андреевич
Стеклов**

В 1887 г. Стеклов успешно сдал выпускные экзамены. Поскольку он явно выделялся среди других студентов своими знаниями и блестящими способностями, многие профессора (среди них — А. М. Ляпунов, М. Ф. Ковальский и Г. В. Левицкий) считали, что его следует оставить при университете для научной работы и подготовки к профессорскому званию. Однако прежде, чем дать представление, Александр Михайлович подверг Стеклова своеобразному и сложному испытанию: предложил ему написать научную работу на тему о движении шара

по шероховатой поверхности. По-видимому, Ляпунов обоснованно предполагал, что такое задание не только выявит способности молодого человека к самостоятельной работе, но и покажет ему самому недостаточность полученных в университете знаний для решения сложных научных задач, и будет способствовать творческой активности начинающего исследователя.

При этом нужно сказать, что Ляпунов не обошел своим вниманием будущего стипендиата в этот переходный период. Он рекомендовал Стеклову для изучения ряд сочинений по механике и математике (в том числе труд Кориолиса «Исследование игры на бильярде»), которые помогли Владимиру Андреевичу решить поставленную перед ним задачу. Стеклов воспользовался советами учителя и блестяще справился с заданием. В феврале 1888 г. представленная Стекловым работа была признана успешной и содержащей элементы самостоятельного научного творчества, а в июле того же года он был утвержден стипендиатом Харьковского университета.

Вскоре В. А. Стеклов, изучая книгу Г. Р. Кирхгофа «Лекции по математической физике», обнаружил новый, не указанный Кирхгофом случай интегрируе-

мости уравнений движения. Стеклова охватила ни с чем не сравнимая радость человека, сделавшего свое первое открытие. Немедленно поделился он своим успехом с любимым учителем — Ляпуновым. «Он выразил большое удовольствие, обрадовался моему успеху, — писал впоследствии Стеклов, — но прибавил, что, к сожалению, этот случай открыт уже ранее меня знаменитым Clebsch'ем (Клебшем). Это обстоятельство меня до крайности огорчило, однако тот же Clebsch не ушел от меня, и я, на почве его исследований, действительно, вскоре сделал важное открытие, которое Александр Михайлович Ляпунов на заседании Харьковского математического общества сравнил с открытием С. В. Ковалевской нового случая движения твердого тела около неподвижной точки» (Цит. по [160, с. 53, 54]).

После сдачи магистерского экзамена осенью 1890 г. и утверждения в звании приват-доцента по кафедре механики В. А. Стеклов становится ближайшим сотрудником и помощником Александра Михайловича по преподавательской работе. Первым курсом, который начал читать молодой доцент, был курс теории упругости. Вместе с тем Стеклов продолжал научные исследования, причем с самого начала самостоятельной творческой работы его отличала большая широта научных интересов. Среди работ Стеклова, докладывавшихся на заседаниях Харьковского математического общества и печатавшихся в его «Сообщениях», были исследования по гидродинамике, теории упругости, анализу, высшей алгебре.

Темой магистерской диссертации В. А. Стеклова стал вопрос о движении твердого тела в жидкости. Защита этой диссертации состоялась в 1893 г. В том же году Стеклов занял должность преподавателя теоретической механики в Харьковском технологическом институте, продолжая работу и в университете. Александр Михайлович, вынужденный из-за большой занятости отказать от чтения лекций в Технологическом институте, рекомендовал ректору В. Л. Кирпичеву пригласить в этот институт В. А. Стеклова. «Со своей стороны я должен засвидетельствовать, — писал в связи с этим Кирпичев попечителю Харьковского учебного округа, — что г. Стеклов многочисленными своими работами и сообщениями в Харьковском математическом обществе зарекомендовал себя как весьма талантливого

и сведущего ученого в разных отделах аналитической механики, в особенности гидродинамики и теории упругости, имеющих первостепенные значения для научного образования технолога, и действительно представляется весьма желательным открывшуюся вакансию передать ему» [160, с. 69].

Три года спустя 32-летний Стеклов, уже хорошо известный математик и механик был утвержден в качестве исполняющего должность экстраординарного профессора Харьковского университета по кафедре теоретической механики.

Ляпунов и Стеклов не только работали бок о бок на кафедре университета. Часто они вместе проводили и свободное время, в этот период сблизилась и их семья. «В это время, — писал впоследствии В. А. Стеклов, — мы сблизилась с моим дорогим учителем Александром Михайловичем Ляпуновым и его женой Натальей Рафаиловной, а также с ее отцом Рафаилом Михайловичем Сеченовым и матерью Екатериной Васильевной Ляпуновой. . . Мы часто стали бывать друг у друга, и Оля с Натальей Рафаиловной близко сошлись, почти до дружбы. Старик Сеченов (брат знаменитого физиолога Ивана Михайловича Сеченова) до чрезвычайности привязался ко мне и считал нас самыми близкими людьми. . .» [160, с. 57].

Свою докторскую диссертацию «Общие методы решения основных задач математической физики» В. А. Стеклов успешно защитил в начале 1902 года. Ляпунов был очень рад успеху своего лучшего ученика и с удовольствием сообщил об этом ведущим петербургским и московским математикам, среди них — своему учителю Д. К. Бобылеву. В ответном письме от 30 января 1902 г. Бобылев писал Александру Михайловичу: «С величайшим удовольствием узнал я из письма Вашего, а затем и из письма Владимира Андреевича, что диспут его состоялся так как Вы и он того желали. . . Поздравляю нового доктора прикладной математики и желаю ему здоровья и спокойствия, чтобы он мог, т. е. имел бы времени писать дальнейшие свои работы. . .» [121, л. 9].

Вскоре Владимиру Андреевичу было присвоено звание ординарного профессора, а в 1903 г. Академия наук избрала его своим членом-корреспондентом.

Когда в 1906 г. В. А. Стеклов получил почетное предложение занять кафедру математики в Петербург-

ском университете, он оказался в сложном положении. Трудно было расставаться с Харьковским университетом, с городом, где прошли студенческие годы, где встретился он со своим учителем А. М. Ляпуновым, где впервые познал счастье научного творчества. Вместе с тем Стеклову было ясно, что в Петербурге перед ним откроются широкие возможности общения и совместной работы с лучшими математиками и механиками страны, представителями чебышевской школы, с А. М. Ляпуновым — достойным преемником великого П. Л. Чебышева в Академии наук. Действительно, и в Петербурге между В. А. Стекловым и А. М. Ляпуновым и их семьями сохранялись самые теплые, дружеские отношения.

Чтобы показать, насколько взаимообусловленными и тесно связанными были научные результаты Ляпунова и Стеклова, приведем один характерный пример. В своей магистерской диссертации «О движении твердого тела в жидкости» Стеклов, основываясь на результатах исследований П. Г. Лежена-Дирихле, Г. Р. Кирхгофа и Р. Ф. А. Клебша, выводит уравнения движения твердого тела, помещенного в идеальную однородную несжимаемую жидкость. Стеклов пишет, что в этой работе дано «описание различных возможных движений твердого тела в жидкости: постоянных винтовых движений Ламба, колебательных движений тела с одной плоскостью симметрии (обобщение движений, указанных Томсоном и Тэтом и Ламбом). . .» и отмечает, что он воспользовался также «трудом профессора А. М. Ляпунова по вопросу об устойчивости постоянных винтовых движений тела в жидкости. . .» Стеклов обращает внимание на то, что им получен новый случай, не замеченный Клебшем.

Открытие Стекловым нового случая интегрируемости движения твердого тела в жидкости было, как уже отмечено, высоко оценено А. М. Ляпуновым. Однако Александр Михайлович установил, что в своем анализе Стеклов ввел равенство, не являющееся необходимым, и в связи с этим упустил из вида еще один случай полной интегрируемости. Этот последний случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости при данных условиях был открыт и подробно рассмотрен Ляпуновым, описавшим его в статье «Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости». В связи

с этим ученик Стеклова Н. М. Гюнтер впоследствии отмечал, что Стеклов в этом вопросе «расчистил дорогу Ляпунову» [155].

А. М. Ляпунов высоко оценивал результаты научных исследований Стеклова. Об этом свидетельствует, например, отзыв, написанный Александром Михайловичем на докторскую диссертацию своего ученика. В этом отзыве Ляпунов пишет, что решаемые Стекловым задачи представляют такие трудности, что «не говоря уже о решении, сколько-нибудь удовлетворительном в практическом отношении, самая возможность их долгое время не могла быть установлена строго при сколько-нибудь общих предположениях». Содержание работы Стеклова Ляпунов считает «важным и разнообразным». «Уже одна теория фундаментальных функций, в создании которой автор проявил много оригинальности, составляет весьма важный вклад в науку. Но не менее важным я считаю строгое установление связи между принципом Неймана и предложением, которое автор называет «фундаментальной теоремой. . .». В настоящее же время В. А. Стеклов нашел доказательство и самой «фундаментальной теоремы». Таким образом, последнюю удалось, наконец, установить, не прибегая к преобразованию Пуанкаре. . .», — писал Ляпунов ¹.

С присущей ему принципиальностью и скрупулезностью отмечает Ляпунов и недостатки работы Стеклова: «. . .Изложение недостаточно обработано, благодаря чему многие выводы отличаются большою сложностью, не обусловливаемою сущностью дела. . . Есть даже совершенно ненужные рассуждения. Встречаются также некоторые нестрогости, неточные определения и выражения, погрешности в формулах, непоследибельные утверждения. . .» Как отмечалось выше, сам А. М. Ляпунов всегда стремился к наибольшей простоте и изящности выводов и доказательств, неоднократно возвращаясь и переделывая найденные ранее решения.

А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова объединял глубокий интерес к истории математики и механики, особенно отечественной. На страницах этой книги уже говорилось о превосходном очерке Ляпунова, посвящен-

¹ Отзыв А. М. Ляпунова о сочинении В. А. Стеклова «Общие методы решения основных задач математической физики» приведен в [43, с. 167—178].

ном его великому учителю П. Л. Чебышеву. С большой любовью и уважением писал Александр Михайлович и о другом своем учителе — Д. К. Бобылеве [173], а также о видном французском математике Гастоне Дарбу [172] в посвященных их памяти некрологах, опубликованных Академией наук. Кроме того, А. М. Ляпунов подготовил и опубликовал переводы ряда работ П. Л. Чебышева, представил записки о трудах и ученых заслугах А. А. Белопопольского, Вито Вольтерры, В. А. Стеклова, А. Н. Крылова, принял участие в подготовке к изданию трудов Л. Эйлера и А. Н. Коркина. Что касается В. А. Стеклова, то широко известны его работы, посвященные жизни и деятельности М. В. Ломоносова, Г. Галилея и У. Томсона, принадлежащие перу Владимира Андреевича некрологи памяти А. М. Ляпунова, А. А. Маркова, Анри Пуанкаре, А. А. Фридмана.

Говоря о большом влиянии Ляпунова на Стеклова, о роли Александра Михайловича в становлении Стеклова как ученого, не следует забывать и о воздействии личности самого В. А. Стеклова на всех окружавших его, в том числе и на Ляпунова. Это благотворное влияние Стеклова носило не только научный характер, оно определялось также замечательными качествами Стеклова как человека и гражданина — его прогрессивными взглядами, твердостью, инициативой, истинным благородством. Еще в Харькове Владимир Андреевич стал крупной общественной фигурой. Известна роль В. А. Стеклова в освобождении большой группы повстанцев, занявших здание Харьковского университета во время революционных событий 1905 г., когда Стеклов, рискуя собственной жизнью, спас этих повстанцев от неизбежной жестокой расправы казаков и черносотенцев. Прекрасные качества Стеклова ярко проявились и в Петербурге, когда Стеклов стал профессором Петербургского университета, а вскоре — членом Академии наук. Так, в 1906 г. на заседании Совета университета Стеклов выступил с резко отрицательной характеристикой Государственного совета и призвал к отказу от участия в его работе. Владимир Андреевич был среди тех академиков, которые выступили против проекта П. А. Некрасова, направленного на усиление роли религии в деле образования.

Активная научная и прогрессивная общественно-политическая деятельность В. А. Стеклова принесли

ему заслуженный авторитет и уважение. В 1916 г. Стеклов был избран членом Правления Академии наук. А когда в 1917 г. по предложению А. М. Горького была образована Свободная ассоциация для развития и распространения положительных наук, Стеклов вместе с Д. К. Заболотным был избран председателем ее Организационного комитета. В 1919 году Владимир Андреевич стал вице-президентом Академии наук.

В. А. Стеклов встречался с В. И. Лениным. Одна из этих встреч описана А. М. Горьким в его очерке «В. И. Ленин» [153, с. 31—32].

К сожалению, к тому времени, когда усилия работавших в Академии ученых были постепенно направлены партией и Советским правительством на строительство нового социалистического общества, А. М. Ляпунова уже не было в живых. После смерти своего учителя В. А. Стеклов многое делал для того, чтобы труды Александра Михайловича стали широко известны и получили заслуженное признание и дальнейшее развитие. Например, на Международном математическом конгрессе, состоявшемся в Торонто в 1924 г., Стеклов сделал специальный доклад «О посмертном труде академика А. М. Ляпунова о формах равновесия вращающейся неоднородной жидкости». В опубликованной в следующем году книге [214] Стеклов писал о большом впечатлении, которое произвел доклад на участников конгресса: «Не только методы и результаты посмертного труда А. М. Ляпунова, но и многие выводы его, полученные начиная с 1916 года, оказались новостью для западноевропейских и американских специалистов.

Несомненно, что после моего доклада и особенно после того, как наша академия опубликует посмертный труд А. М. Ляпунова, интерес к его классическим изысканиям возрастет в высокой степени, и заграничным ученым придется во многом переработать свои исследования, а некоторые из них признать либо далеко не полными, либо устаревшими, хотя они и появились после опубликования упомянутого выше труда Ляпунова» [214, с. 27, 28].

Глава 2

Ляпунов и Марков

Просматривая сохранившиеся письма А. М. Ляпунова и письма, адресованные ему, нельзя не обратить внимание на то, что в этой переписке очень часто встречается имя Андрея Андреевича Маркова. И это, конечно, не случайно. Тесные связи двух замечательных русских математиков, их глубокая дружба продолжались многие годы, охватывая и харьковский, и петербургский периоды жизни Александра Михайловича. Эта духовная близость двух ученых имела глубокие корни: Марков, так же, как и Ляпунов — его товарищ по Петербургскому университету, испытал благотворное влияние П. Л. Чебышева и других выдающихся математиков петербургской школы.

Андрей Андреевич Марков родился 14 июня 1856 г. в Рязани. Позднее семья переехала в Петербург. Уже во время обучения в 5-й Петербургской гимназии Марков начал изучать высшую математику и пришел к открытию метода интегрирования дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Хотя этот метод не был новым в науке, работа Маркова способствовала установлению его связей с преподавателями Петербургского университета и выбору им научного поприща. Поступив в университет, Марков слушал лекции П. Л. Чебышева, А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева. Он окончил университет с золотой медалью, присужденной ему за научную работу «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей» и был оставлен в университете для подготовки к профессорской деятельности. В 1884 г. Марков защитил докторскую диссертацию «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей» и вскоре стал профессором Петербургского университета (1886). Широкое признание получили учебники А. А. Маркова «Исчисление конечных разностей» (1886) и «Исчисление вероятностей» (1900), сохранившие свое значение до настоящего времени.

Круг научных проблем, решению которых посвятил свои силы А. А. Марков, был необычайно широким. Среди них — исследование предельных значений интегралов при некоторых определенных условиях, наложенных на подынтегральную функцию, улучшение

сходимости рядов и разработка теории наилучших приближений, продолжение и развитие исследований П. Л. Чебышева по теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, исследование уравнений Ламе и гипергеометрического ряда и многое другое. Но наибольшую известность и мировое признание принесли Маркову его блестящие работы в области теории вероятностей. Распространение полученных результатов на последовательность состояний системы, в которых вероятность перехода системы из одного состояния в другое зависит только от этих состояний и не зависит от предшествующей истории развития системы, привело А. А. Маркова к общей схеме «испытаний, связанных в цепь» (знаменитые «цепи Маркова»). Эта схема положила начало современной теории марковских процессов, широко используемой в ряде направлений современной физики (термодинамика, кинетическая теория, броуновское движение и т. д.). Кроме того, А. А. Марков развил и обобщил весьма плодотворный метод моментов, основы которого были заложены П. Л. Чебышевым.

Признанием выдающихся научных заслуг А. А. Маркова стало избрание его в 1886 г. по предложению П. Л. Чебышева адъюнктом, а через четыре года — экстраординарным академиком. В 1896 г. сорокалетний ученый стал академиком Петербургской академии наук.

В превосходной биографии А. А. Маркова [183], написанной его сыном, известным советским математиком А. А. Марковым (младшим), рассказывается, что еще обучаясь в гимназии Андрей Андреевич «зачитывался статьями великих публицистов-шестидесятников — Чернышевского, Добролюбова, Писарева, под влиянием которых находилась тогда лучшая часть учащейся молодежи». Став видным ученым, Марков направил свою энергию на борьбу с реакцией, против тех, кто пренебрегая принципами науки, стремился приспособить ее на службу эксплуататорским классам, для усиления духовного гнета народа, обоснования религии.

«Это был человек открытый, прямой и смелый, никогда не изменявший своим убеждениям, всю жизнь яростно боровшийся со всем, что считал глупым и вредным. Его гражданское мужество было очень стойким: он не считался ни с лицами, против которых выступал,

ни с последствиями, которые его выступления могли иметь для него самого. Когда ему возразили как-то на одно его предложение, что оно идет вразрез с «высочайшим постановлением», он во всеулышание сказал: «Я вам дело говорю, а вы мне — высочайшее постановление» [183, с. 604].

Когда в 1905 г. Академии наук была навязана реакцией кассация выборов А. М. Горького в почетные академики, Марков был глубоко возмущен и представил общему собранию Академии два письменных заявления. В одном из них (от 8 января 1905 г.) Марков требует «внести имя г. Пешкова в список почетных академиков и пригласить его принять участие в жизни академии согласно закону». В том же году в ответ на циркуляр президента Академии, содержащий порицание академикам, подписавшим «Записку 342 ученых», подписавший эту «Записку» Марков направил президенту резкое письмо. В нем Андрей Андреевич писал, что не может «изменять своих убеждений по приказанию начальства», и выражал готовность оставить Академию. В июне 1907 г. А. А. Марков писал Правлению Академии: «Ввиду того, что созыв III Государственной думы соединен с нарушением закона и потому она будет не собранием народных представителей, а каким-то незаконным сборищем, честь имею покорнейше просить Правление не вносить мое имя в списки избирателей». После отлучения от церкви Л. Н. Толстого А. А. Марков потребовал, чтобы и его самого синод отлучил от церкви. Неоднократно Марков выступал устно и в печати против профессора математики Московского университета П. А. Некрасова, в начале своей деятельности выполнившего ряд интересных научных работ, а позднее ставшего пособником реакционного правительства.

Этих примеров довольно, чтобы охарактеризовать принципиальность и прогрессивную общественную позицию Маркова. Не случайно царское правительство и руководство академии считали Андрея Андреевича одним из самых беспокойных и крамольных академиков, его уважали и боялись [154].

Нужно сказать, что А. А. Марков проявлял принципиальность и твердость не только как гражданин и общественный деятель, но и как ученый. Он не только нетерпимо относился к пробелам и неточностям, которые он находил в работах других исследователей, но невзирая на чины и звания выступал против тех, кто

представлял безосновательные по его мнению отзывы и рецензии. При этом Марков бывал иногда излишне резок и зачастую облачал свои выступления в такую форму, которая вызывала огорчение и протест, и не только тех, кому они адресовались. Впоследствии Маркову приходилось и самому сожалеть о своей резкости и прямолинейности. Характерным в этом отношении был случай с С. В. Ковалевской, которая в своем дневнике писала: «Марков публично заявил, что мой мемуар полон ошибок, но что он покажет их лишь тогда, когда господа академики, представившие меня членом, потрудятся прочесть мой мемуар. . .» [167]. Однако впоследствии в письме к А. М. Ляпунову Марков писал: «Первоначальное мое заявление о § 1 мемуара С. В. Ковалевской имело только одну цель — доказать, что П. Л. Чебышев вовсе не знаком с работами С. В. Ковалевской и ценить их не может» [120].

Вот почему на заседаниях Московского математического общества не раз звучали упреки в адрес Маркова за форму, в которую бывали облечены его критические выступления. А однажды (на заседании общества от 17 ноября 1892 г.) было принято даже постановление о том, чтобы не принимать к обсуждению никаких «резких суждений». Постановление это было вызвано заявлениями А. А. Маркова относительно трудов С. В. Ковалевской, В. Г. Имшенецкого, Н. В. Бугаева и Г. Г. Апфельрота.

Однако тот же Марков, умевающий, пожалуй, как никто другой находить погрешности и ошибки в работах крупнейших математиков своего времени и известный своей прямоотой и принципиальностью, с трогательным вниманием и предельным уважением относился к Ляпунову и к его работам, в полной безошибочности которых он был уверен. О том, насколько хорошо знал Марков работы Александра Михайловича свидетельствует, например, такой факт. В 1896 г. (т. е. уже по истечении 12 лет после опубликования Ляпуновым его магистерской диссертации) Марков, доказывая теорему Ф. Клейна отметил, что рассуждения, положенные им в основу доказательства, могут быть полезны также для доказательства теоремы из IV раздела магистерской диссертации Ляпунова [232].

Характерной чертой Маркова — ученого и преподавателя было стремление к ясному и безупречно строгому изложению результатов и доведение их до

конкретных, зачастую числовых расчетов. В этом он был очень близок к Ляпунову, к которому питал безграничное доверие, полностью полагаясь на его выдающиеся способности исследователя, предельную аккуратность и тщательность в рассмотрении научных вопросов. Как свидетельствуют письма А. А. Маркова, он часто обращался к А. М. Ляпунову за советом, просил его проверить отдельные выкладки и доказательства [120]. Быть может, Марков чувствовал, что А. М. Ляпунов в гораздо большей степени, чем он сам способен на «положительную» критику и сумеет не только смягчить критические замечания, на которые был столь щедрым сам А. А. Марков, но сможет также умело направить усилия автора в нужном направлении или даже сам возьмется восполнить имеющиеся пробелы и завершить исследование.

В случае с работой С. В. Ковалевской так и произошло. Выше уже говорилось о том, что Ляпунов (внимание которого на работу Ковалевской обратил Марков) довольно быстро установил, что хотя как указывал Марков анализ Ковалевской в некоторых отношениях недостаточен, «вопрос решается именно таким образом, как полагала Ковалевская». Ляпунов с помощью своего метода не только дал доказательство теоремы Ковалевской, но рассмотрел вопрос в более общей форме и доказал более общую теорему. Таким образом, Ляпунов полностью решил вопрос об однозначных решениях при произвольных начальных данных, хотя Марков ранее по поводу одного из своих возражений на работу Ковалевской отмечал: «Я сильно сомневаюсь, чтобы кому-нибудь удалось в более или менее близком будущем пополнить указанный мною пробел»¹.

Андрей Андреевич, который был всего на один год старше Ляпунова, относился к Александру Михайловичу с трогательным, почти отеческим участием. Марков не только активно добивался выдвижения Ляпунова в академики, считая его наиболее достойным занять кафедру Академии, вакантную после смерти великого Чебышева. Заботливо относился Марков и к материальным нуждам Ляпунова. Так, в письме от 16 августа

¹ Замечания А. А. Маркова по поводу работы С. В. Ковалевской, анализ этих замечаний и выдержки из писем А. А. Маркова А. М. Ляпунову приведены в [169, с. 187—193].

1901 г. Марков в связи с выдвижением кандидатуры Ляпунова в Академию просит прислать ему список научных трудов Александра Михайловича и сообщить о ссылках на них видных математиков того времени (Клейна, Пуанкаре и других). Одновременно Марков пишет Ляпунову, что если Александр Михайлович будет избран неординарным, а экстраординарным академиком, то он потеряет в денежном отношении, но со временем эта потеря будет компенсирована.

Ярким примером близости научных интересов и тесного сотрудничества А. М. Ляпунова и А. А. Маркова являются их работы в области теории вероятностей. Как известно, рассматривая важную задачу о применимости предельной теоремы Лапласа к сумме случайных и независимых величин, П. Л. Чебышев впервые указал метод ее решения в предположении, что каждое слагаемое этой суммы имеет конечные моменты (метод моментов). В 1898 г. А. А. Марков несколько уточнил рассуждения Чебышева и доказал так называемую центральную предельную теорему, получившую название теоремы Чебышева—Маркова. Позднее А. М. Ляпунов в двух мемуарах, представленных в Петербургскую академию наук в 1900 и 1901 гг., получил результат, ставший классическим. Вместо громоздких условий Маркова, наложенных на все моменты случайных величин, условия Ляпунова накладывают ограничения только на первые три момента. При этом Ляпунов получает свой вывод новым весьма мощным и плодотворным методом, получившим название метода характеристических функций.

Марков с большим вниманием отнесся к этому выдающемуся достижению Ляпунова. Именно Андрей Андреевич представил работы А. М. Ляпунова Академии наук.

Многим казалось, что столь общий результат не может быть получен с помощью чебышевского метода моментов. Однако несколько лет спустя Марков нашел новое простое и изящное доказательство теоремы Ляпунова, выдвинув идею использования вместо заданных случайных величин других, почти совпадающих с ними. Идея эта эффективно используется до настоящего времени при решении различных задач теории вероятностей. Позднее, в 1926 г. С. Н. Бернштейну удалось заменить достаточное условие Ляпунова несколько более общим условием, являющимся не только

достаточным, но в некотором отношении и необходимым для предельной применимости нормального закона по отношению к сумме независимых величин.

Глава 3

Ляпунов, Пуанкаре и Дарвин

Россия, Франция и Англия подарили миру трех замечательных ученых, намного продвинувших вперед математику и механику, теорию устойчивости движения и форм равновесия вращающихся жидких масс — А. М. Ляпунова, А. Пуанкаре и Дж. Дарвина. Старшим из них по возрасту был сын великого Чарльза Дарвина Джордж Дарвин, президент Лондонского королевского астрономического общества, сочетавший выдающиеся способности исследователя с талантом организатора и популяризатора науки. Самым младшим был Александр Михайлович Ляпунов, вышедший победителем из многолетнего научного спора со своими именитыми зарубежными коллегами и оставивший последующим поколениям наиболее глубокое и всестороннее решение упомянутой проблемы. Самым знаменитым был Анри Пуанкаре.

Судьба распорядилась так, что Ляпунову не довелось познакомиться лично ни с Анри Пуанкаре, ни с Джорджем Дарвином, хотя всех троих в течение многих лет связывали общие научные интересы, между ними велась длительная переписка, а вспыхнувшая научная полемика продолжалась много лет и привлекала к себе пристальное внимание научных кругов всего мира.

«В работах Пуанкаре поражает его замечательная продуктивность и универсальность, а также та поразительная легкость, с которой он усваивал все новые течения современной физико-математической мысли. Как бы ни был сложен вопрос, Пуанкаре тотчас в нем разбирался и, став в нем хозяином, вносил в него много нового и оригинального», — говорилось в некрологе, посвященном памяти А. Пуанкаре [151]. Действительно, уже сам перечень названий его трудов говорит о необычайной широте научных интересов: «Новые методы небесной механики», «Лекции по небесной механике», «Лекции о космогенических гипотезах», «Термо-



Анри Пуанкаре

динамика», «Теория упругости», «Капиллярность», «Электричество и оптика», «Математическая теория света», «Исчисление вероятностей», «О динамике электронов». И все же Пуанкаре был прежде всего математиком. Здесь выполнены его основные исследования, относящиеся к теории чисел, алгебре, топологии, общей теории аналитических функций от одной и нескольких переменных, теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), математической физике и основаниям математики.

Научные заслуги Пуанкаре были широко признаны и во Франции, и во всем мире. В 1887 г. он становится членом Парижской академии наук, а с 1908 г. он — член Французской академии. Кроме того, Пуанкаре состоял членом более 35 академий наук. С 1895 г. А. Пуанкаре — член-корреспондент Петербургской академии. После смерти Ф. Тиссерана он занял кафедру математической астрономии в Сорбонне, а позднее преподавал также в Политехнической школе ведомства связи.

Лучшие математики Франции того времени признавали беспорное первенство Пуанкаре. «Мы все рассматриваем его как самого сильного среди нас», — говорил К. Жордан. «Можно сказать, что фуксовы функции стали своеобразными „ключами“ от алгебраического мира» и позволили решить одну из великих проблем — проблему интегрирования дифференциального уравнения для важного частного случая: линейного уравнения с алгебраическими коэффициентами», — отмечал Адамар, который был восхищен выполненным Пуанкаре «грандиозным обобщением теории эллиптических функций». В Германии его величали «первым авторитетом времени» и считали, что только гений Пуанкаре не позволяет Гильберту занять первое место среди матема-

тиков конца XIX—начала XX века. К. Вейерштрасс утверждал, что работы Пуанкаре «открыли новую эру в истории небесной механики»¹.

Отдавая должное А. Пуанкаре — математику и физику, следует обратить внимание на некоторые особенности его натуры и научного метода. Еще Дарбу, проанализировав докторскую диссертацию Пуанкаре и отметив, что в ней имеется достаточный для нескольких хороших диссертаций материал, тем не менее обратил внимание на незавершенность отдельных пунктов и даже на имеющиеся ошибки. Дарбу писал, что Пуанкаре, «дойдя до вершины, не возвращался назад, оставляя другим прокладывать королевские дороги» [230]. Внося согласно рекомендациям Дарбу необходимые исправления в свою работу, Пуанкаре уже сожалел о том, что это отнимает у него время, нужное для реализации новых идей и планов. По-видимому, сам Пуанкаре знал эту свою особенность и как бы в оправдание самому себе писал: «Если бы мы были чересчур благоразумны, если бы мы были любопытны без нетерпения, вероятно, нам никогда не удалось бы создать науку» [204, с. 209].

Здесь мы видим существенное различие между двумя выдающимися исследователями — Ляпуновым и Пуанкаре. Именно в силу своей ярко выраженной разносторонности и широты научных интересов Пуанкаре не был склонен подобно Ляпунову к тщательной перепроверке своих результатов, в восполнении имеющихся в выполненной работе пробелов и устранении изъянов даже если они обращали на себя его внимание. «Я никогда не заканчивал работу без того, чтобы не жалеть о том способе, каким ее выполнил и о принятом мною плане», — писал о себе сам Пуанкаре [219]. Как мы увидим, эта черта Пуанкаре в ряде случаев способствовала поспешности его выводов.

Работы Пуанкаре обратили на себя внимание молодого Ляпунова вскоре после опубликования его магистерской диссертации. Как отмечалось, в этой диссертации Александр Михайлович установил, что если момент количества движения, возрастая, достигает некоторого предела, то «насколько можно судить по пер-

¹ Высказывания математиков об А. Пуанкаре цит. по [198, с. 181—186].

вому приближению, эллипсоиды Якоби переходят в какие-то новые фигуры равновесия, представляющиеся в первом приближении телами с алгебраическими поверхностями третьего порядка». Именно эти фигуры были впоследствии названы «грушевидными»². Ляпунов, однако, не стал публиковать этот результат, поскольку строгого доказательства существования таких фигур он не получил. «Этим я ограничился в своей магистерской диссертации, — писал А. М. Ляпунов. — О новых же формах равновесия, существование которых осталось недоказанным, ибо о них можно судить лишь по первому приближению, я упомянул в одном из положений к своей диссертации» [42, с. 315, 316].

В одной из статей А. Пуанкаре Ляпунов прочел, что желая доказать некоторые опубликованные Томсоном без доказательства результаты, французский ученый также занялся вопросом о формах равновесия вращающейся жидкости. Полученные им выводы оказались совпадающими с результатами Ляпунова, хотя о новых фигурах равновесия Пуанкаре говорит не с той осторожностью, как Александр Михайлович, а утверждает, что эти фигуры определено существуют.

«Прочитавши эту заметку, я тотчас же послал Пуанкаре экземпляр своей диссертации с письмом, в котором говорю о тех затруднениях, которые я встретил, желая доказать существование тех фигур, на которые указывает первое приближение, — писал много позже А. М. Ляпунов. — При этом я выразил сомнение относительно возможности получить это доказательство при помощи метода последовательных приближений, ибо мне не удалось найти даже второго приближения, а затем, если бы даже и удалось найти методу, позволяющую находить приближения сколько угодно высокого порядка, то совершенно безнадежным является вопрос о доказательстве сходимости. Однако так как Пуанкаре утверждает, что фигуры, о которых идет речь, действительно существуют, то, следовательно, он должен обладать какой-либо другой методой для доказательства существования, я и просил его сообщить, в чем состоит эта метода. На это письмо Пуанкаре вскоре ответил, говоря, что он встретил те же самые затруднения, что и я; что он также не пошел дальше первого при-

² Название «грушевидные» (*puriformes*) применительно к фигурам равновесия вязкой жидкости было введено А. Пуанкаре.

ближения и что метода последовательных приближений не может служить для доказательства. Если же он все-таки утверждает, что формы равновесия, о которых идет речь, действительно существуют, то только на основании некоторых аналогий и на основании своего убеждения, что строгое доказательство может быть найдено. Он сообщил при этом, что вскоре должен появиться в „Acta mathematica“ его мемуар, где все его исследования будут изложены подробно. Этот мемуар появился в „Acta mathematica“ спустя два года и, ознакомившись с ним, я совершенно им не удовлетворился» [42, с. 316, 317]³.

Так на первом же этапе переписки Ляпунова с Пуанкаре обнаружилось серьезное расхождение между подходами двух ученых и между требованиями, предъявляемыми ими к своим результатам и выводам. Если Пуанкаре считал, что «в механике нельзя требовать такой же строгости, как в чистом анализе», то Ляпунов, напротив, утверждал, что любая задача физики или механики, поставленная совершенно определенно с точки зрения математики, становится «задачей чистого анализа и должна трактоваться как таковая». Отсюда и разные требования к корректности и полноте выводов и доказательств. «В то время как у Пуанкаре встречаются зачастую недомолвки и неточности, иногда нестрогие доказательства или даже только намеки на доказательства, у А. М. Ляпунова все рассуждения доведены до высокой степени совершенства, ибо он говорит всегда о том и только о том, что может доказать с безупречной строгостью», — писал В. А. Стеклов [43, с. 20].

Конечно, выводы Пуанкаре относительно существования грушевидных фигур равновесия были поспешными и чересчур смелыми. Ведь используя метод рядов или последовательных приближений необходимо не только отыскать эти приближения, но и доказать сходимоть рядов. Задачу можно считать решенной только если сходимоть рядов установлена или найдены величины погрешностей, имеющих место при обрыве рядов (в случае приближенных вычислений). «И это требование не есть прихоть чрезмерной строгости чистой математики, ибо без соблюдения этого требования можно

³ В наиболее полном виде переписка Ляпунова и Пуанкаре была опубликована В. И. Смирновым и А. П. Юшкевичем в [90, 96].

получить ложные выводы», — писал В. А. Стеклов [43, с. 28, 29]. Что же касается аналогий и интуитивного убеждения, что доказательство можно найти, то для решения вопроса их, разумеется, совершенно недостаточно.

Тем не менее выводы Пуанкаре произвели большое впечатление на научную общественность. «Чтобы составить себе понятие о том впечатлении, которое произвели изыскания Пуанкаре, достаточно напомнить следующее, — писал Стеклов. — Через год после появления этого мемуара ⁴ Пуанкаре был избран в члены Парижской академии наук (в 1887 г., 33 лет). В 1890 г. Лондонское королевское общество присудило ему почетную золотую медаль, которая была поднесена ему лично президентом этого общества известным английским астрономом Дарвином. Поднося эту медаль, Дарвин назвал упомянутый мемуар как бы «откровением», сказал, что этот труд отметит навсегда важную эпоху не только в жизни эволюционной астрономии, но и обширной области механики. Что же сделал Пуанкаре в этом мемуаре? Он применил к несколько иначе сформулированной задаче Чебышева метод последовательных приближений, составил уравнения, характеризующие первое приближение, и из анализа формул этого первого приближения извлек все свои выводы, так поразившие ученый мир Европы» [43, с. 25].

Что касается А. М. Ляпунова, то он, как говорилось выше, вернулся к задаче Чебышева много позднее, почти через 20 лет, после переезда в Петербург. Однако в это время он получил от В. А. Стеклова сообщение, что А. Пуанкаре опубликовал новую книгу о фигурах равновесия («Figures d'équilibre d'une masse fluide», лекции в Сорбонне в 1900 г.). Александр Михайлович в связи с этим в письме от 15 февраля 1903 г. писал Стеклову ⁵: «Благодарю Вас за Ваше сообщение, которое предупредит меня от напрасной потери времени. Как это ни досадно, а работу придется теперь бросить, ибо, судя по тому, что Вы пишете, Пуанкаре сделал именно то, что должно составить предмет моего иссле-

⁴ Речь идет о мемуаре А. Пуанкаре «О равновесии вращающейся жидкости», опубликованном в журнале «Acta mathematica» (1886. Т. 7).

⁵ Приводимые выдержки из писем А. М. Ляпунова к В. А. Стеклову цит. по: Смирнов В. И. Биография А. М. Ляпунова [43, с. 335—337].

дования, и нет сомнения, что он исходил при этом из тех же самых соображений, которые служат точкой отправления в моих изысканиях и благодаря которым я и придавал значение своей работе: иначе он не мог бы сделать ни шагу в рассматриваемом вопросе».

Вскоре Ляпунов получил книгу Пуанкаре и внимательно ознакомился с ней. Примечательная деталь: период «вынужденного» перерыва в работе Александра Михайловича над интересовавшей его проблемой, во время которого он изучил книгу А. Пуанкаре, составил всего несколько дней. Мало того, Ляпунов так дорожил временем, что в эти же дни принялся за другую задачу — о форме равновесия неоднородной вращающейся жидкости. Об этом свидетельствует его письмо Стеклову от 21 февраля 1903 г., в котором он пишет о книге Пуанкаре и о своей работе.

«К величайшему моему изумлению в этой книге я не нашел ничего сколько-нибудь значительного. Большая часть книги посвящена изложению (и, должен прибавить, весьма беспорядочному) результатов, давно известных. Что же касается занимающего меня вопроса, то Пуанкаре лишь повторяет в весьма сокращенном виде то, что говорил в своем старом мемуаре 1886-го года. Никаких признаков доказательств существования форм равновесия, близких к эллипсоидам Маклорена и Якоби здесь нет, и, по-видимому, Пуанкаре в этом вопросе стоит в той же точке, как и 17 лет тому назад. Таким образом работа моя ничуть не пострадала и я снова за нее примусь. При этом недельный перерыв этой работы оказался очень полезным для дела, ибо в этот промежуток я приступил к другой работе, относящейся к вопросу о равновесии неоднородной вращающейся жидкости. Теории Клеро и Лапласа требуют весьма существенного дополнения, ибо существование исследуемой в них формы равновесия не доказано. Этим вопросом я также давно хотел заняться. Но он мне представлялся более сложным, чем вопрос о форме равновесия однородной жидкости, близкой к эллипсоидальной. Я предполагал поэтому разрешать сначала последний вопрос, а затем те же принципы приложить к решению второго вопроса. Теперь, занимаясь этим вопросом, я убедился, что он намного легче первого. Вычисления того же характера, но несравненно проще (форма равновесия мало отличается от сферы). Выполняя же эти вычисления, я заметил, что и при

решении первого вопроса возможны значительные упрощения вычисления, и что я шел чересчур сложным путем. Таким образом перерыв в работе оказался полезным в двух отношениях: наладилась новая работа и выяснилась возможность значительного упрощения в прежней. Теперь я предполагаю продолжать вторую работу (относящуюся к теории Лапласа), так как она скорее может быть приведена к окончанию, а затем вновь примусь за первую» [43, с. 335].

На решение этой второй задачи у Ляпунова ушло немногим более месяца. В письме от 7 апреля 1903 года А. М. Ляпунов писал: «Только на прошлой неделе мне удалось устранить все затруднения в доказательстве сходимости рядов, которыми выражается решение задачи Лапласа (о форме равновесия неоднородной вращающейся жидкости при малой угловой скорости). Теперь необходимо заняться упрощением этого доказательства, которое пока еще очень сложно. А затем, опубликовав коротенькую заметку по этому вопросу, я перейду к тому, которым начал заниматься в январе (о формах равновесия однородной вращающейся жидкости, близких к эллипсоидальным). . .» [43, с. 336].

И эту первую задачу Ляпунов решил исчерпывающим и строгим образом, преодолев затруднения, казавшиеся и другим, и поначалу ему самому совершенно непреодолимыми. Это ему удалось благодаря изобретению им остроумному приему. Лучше всего об этом рассказал впоследствии сам Александр Михайлович.

«Чтобы можно было что-либо сделать в данном вопросе, прежде всего следовало выяснить, отчего возникают такие непреодолимые, как казалось, трудности при разыскании второго приближения. Размышляя по этому поводу, я вскоре нашел, в чем заключается препятствие. Желая отыскивать новые фигуры, мало отличающиеся от данного эллипсоида, я сравнивал их именно с этим эллипсоидом и то же самое делал также и Пуанкаре, а от этого то и происходило все затруднение. Между тем оно легко устранимо. Стоило только сравнивать искомую фигуру с переменным эллипсоидом, софокусным с данным и проходящим всегда через ту точку искомой поверхности, в которой рассматривается значение потенциала притяжения жидкой массы. Вводя этот переменный эллипсоид, я устранил все затруднения и получил метод, позволяющую разыскивать приближения сколь угодно высокого порядка.

Мало того, пользуясь методом Коши, известной под именем метода мажорантных функций, я нашел возможным доказать и самую сходимость ряда последовательных приближений, продолженных до бесконечности, и таким образом я пришел к строгому доказательству существования тех форм равновесия, о которых шла речь выше. Вместе с тем я получил и полное решение задачи Чебышева, ответ на которую получился отрицательный» [42, с. 317, 318].

Большой интерес к проблеме Чебышева и, в частности, к вопросу об устойчивости грушевидных фигур равновесия не был случайным. Примерно в это время Джордж Дарвин выдвинул свою гипотезу происхождения системы Земля—Луна. Согласно этой гипотезе в далекие от нас времена Земля и Луна составляли единое целое, но затем Луна отделилась от Земли. По такому предположению Луна — это «детиче» Земли. Нужно сказать, что гипотезу Дарвина пробовали применить и для объяснения возникновения других объектов, например, так называемых «тесных» двойных звезд. Однако для обоснования этой гипотезы требовались серьезные аргументы и в первую очередь доказательства устойчивости грушевидных форм равновесия вращающейся жидкости.

Научную деятельность Дарвина (1845—1912) можно условно разделить на два периода. В первый период (до 1892 г.) он занимался преимущественно теорией приливов и отливов, а также вопросами математики и геофизики. Затем он перешел к изучению движения спутников около планет, а также опубликовал ряд трудов, посвященных происхождению солнечной системы, которая согласно его гипотезе возникла из первородного метеоритного облака. Во второй период Дарвин исследовал периодические орбиты, не оставляя при этом вопросы теории приливов и отливов. В связи с обоснованием своей космогонической гипотезы системы Земля—Луна Дарвин занимался вопросом устойчивости грушевидных фигур равновесия. Кроме того, Дж. Дарвин разработал теорию пертурбации движения комет, предложил графический метод интегрирования и интерполирования, занимался проблемами гармонического анализа.

С 1899 г. Дж. Дарвин — президент Лондонского королевского астрономического общества. Административные способности Дарвина, его широкий кругозор и об-

ширные теоретические и практические знания помогли ему успешно руководить научными организациями. В 1907 г. Дарвин был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук.

Дарвин был искусным популяризатором своей области науки. Большим успехом пользовались его научно-популярные книги о приливах и отливах, о сейшах, о происхождении Луны. В некрологе, посвященном его памяти, отмечалось, что он обладал «редким даром ясности и понятности изложения». «Хотя он был знатоком математики, однако нередко жаловался на то, что его математические знания недостаточны. Он часто избирал численный путь для решения специальных случаев задачи и предоставлял другим установить общую форму ее решения. . .» [143].

Вопрос о существовании устойчивых грушевидных фигур вращающейся жидкости представлял для Дарвина первостепенный интерес в связи с обоснованием выдвинутой им гипотезы происхождения Земли и Луны. Исследования Дарвина в этой области основывались на результатах его многолетнего изучения морских приливов и приливообразующих сил. Оказалось, что эти результаты могут пролить свет на многие вопросы, связанные с движением Земли и Луны, на прошлое и будущее этой системы. Например, действием приливных сил можно объяснить то, что Луна обращена к нам всегда одной и той же стороной. Дарвину удалось показать, что вращение Земли постепенно (хотя и очень медленно) замедляется, что в свою очередь приводит к постепенному (опять же очень медленно) увеличению расстояния между Землей и Луной. Иными словами, орбита Луны представляет собой постепенно раскручивающуюся спираль. Согласно расчетам Дарвина это будет продолжаться до тех пор, пока длительность месяца не возрастет примерно вдвое, причем продолжительность земных суток увеличится при этом во много раз. Тогда из двух небесных тел, вращающихся друг около друга так, что их «приливные горбы» обращены друг к другу, возникнет некоторое подобие гантели.

С другой стороны, Дарвин попытался «проследить» и прошлое системы Земля—Луна. Он заключил, что в прежние времена вращение Луны и Земли и их орбитальное движение были более быстрыми, а расстояние между этими телами было меньшим. Более того, со-

гласно расчетам Дарвина когда-то Земля и Луна соприкасались друг с другом, и их орбитальное движение имело период всего в несколько часов. А еще раньше (несколько миллиардов лет тому назад) по гипотезе Дарвина Земля и Луна составляли одно целое. Согласно этому предположению первоначальное тело, имевшее сигарообразную форму (трехосный эллипсоид вращения Якоби) в результате быстрого вращения изменилось так, что в нем появились два центра, соединенные между собой подобием «перемычки». Возникла пресловутая «грушевидная форма», из которой впоследствии согласно этой гипотезе и образовались Земля и Луна.

Однако гипотеза Дарвина имела право на жизнь только в том случае, если грушевидные фигуры вращения устойчивы. Действительно, если это не так, то вращающееся тело, момент количества движения которого возрастает сверх определенного предела, может полностью разрушиться, как это происходит в опыте Ж. Плато. Тогда объяснение Дарвина неправомерно и необходимо искать другие гипотезы возникновения небесных тел, подобных Земле и Луне.

Мы уже знаем, как принялся за решение вопроса о формах равновесия вращающейся жидкости А. М. Ляпунов, и каким образом ему удалось полностью решить эту труднейшую задачу. Что касается А. Пуанкаре, который по просьбе Дж. Дарвина занимался тем же вопросом, то он пошел иным путем. Вот что писал Александр Михайлович о работе Пуанкаре, сделанных на ее основе расчетах и выводах Дж. Дарвина, а также о своих собственных заключениях.

«Пуанкаре. . . , желая решить вопрос об устойчивости, должен был заняться разысканием второго приближения, что и составляет главное содержание его мемуара. Это ему удалось, благодаря очень остроумному частному приему, но прием этот такого рода, что не позволяет идти далее второго приближения; но для составления условия устойчивости второе приближение дает все, что нужно.

Этим вопросом Пуанкаре занялся вследствие обращенного к нему письма Дарвина, который в это время старался разрешить вопрос об устойчивости грушевидной фигуры и просил Пуанкаре помочь ему в разыскании необходимого для этого второго приближения, найти которое ему самому не удалось.

После мемуара Пуанкаре, в котором содержатся лишь общие формулы, между тем как вопрос зависит от численных вычислений, Дарвин опубликовал свой мемуар, в котором производит эти в высшей степени сложные вычисления и в результате приходит к выводу, что грушевидная форма равновесия устойчива. Этим результатом очень дорожил Дарвин, так как этот результат служил подтверждением его космогонической теории.

Однако я, занимаясь тем же вопросом, пришел к противоположному заключению, именно, что грушевидная форма неустойчива, и я считал свой результат правильным, так как при вычислениях я исходил из точных формул, тогда как Дарвин пользовался формулами приближенными. Я опубликовал свои результаты в мемуаре 1905 г. „*Sur le problème de Tchëbyschef*“, дающем резюме моих исследований о формах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидальных.

В результате этого опубликования возникла между Дарвином и мною полемика. Дарвин никак не хотел отказаться от своего результата, так как этим разрушилась бы его теория, построенная, по моему мнению, более на фантазии, чем на точных данных. Poleмика эта продолжалась несколько лет, пока в 1912 г. я не опубликовал третьей части своего мемуара „*Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes*“, в котором подробно излагаю выводы своих точных формул и все свои вычисления» [22].

Согласно критерию Пуанкаре устойчивость или неустойчивость фигуры равновесия зависит от знака некоторой величины A . Дж. Дарвин, выполнивший очень сложные, хотя и приближенные вычисления, пришел к выводу, что в интересующем нас случае $A < 0$ и, таким образом, грушевидные фигуры будто бы устойчивы. Что касается общего и строгого метода Ляпунова, то для величины A с его помощью получается строгое выражение, а грушевидные фигуры могут рассматриваться как частный случай из бесчисленного множества других найденных Ляпуновым фигур равновесия. Ляпунов выполнил подробные вычисления по этому своему строгому выражению и определил пределы, между которыми должна заключаться величина A . Поскольку согласно расчетам Ляпунова, многократно проверившего свои вычисления, оба предела — верхний и нижний — оказались положительными, он пришел

к выводу, что грушевидные фигуры неустойчивы. Таким образом оказалось, что Дж. Дарвин, воспользовавшийся приближенными формулами без надлежащей предосторожности, получил неправильный результат. Однако ни сам Дарвин, ни Пуанкаре не согласились с выводом Ляпунова.

Нужно сказать, что фигуры равновесия — не единственный вопрос, в котором А. М. Ляпунов «встречался» с А. Пуанкаре. Их научные интересы пересекались также при решении задачи об устойчивости движения, связанной с исследованием дифференциальных уравнений особого вида. Оба математика здесь пришли к аналогичным результатам и, как отмечал Стеклов, эту честь «А. М. Ляпунов может по праву разделить с знаменитым французским геометром». Другой пример — работа Ляпунова «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле» (1898 г.), в которой Александр Михайлович обосновывает основные формулы и результаты теории гармонических функций с помощью метода Неймана. Сам Ляпунов об этой работе писал: «. . . Все, что я хотел сделать, сводилось к тому, чтобы указать некоторые следствия, к которым можно прийти, если принцип Неймана уже установлен для рассматриваемой поверхности — будь она выпуклой или нет» [30]. Однако сходимость рядов самого метода Неймана была первоначально доказана только для выпуклых поверхностей, хотя предполагалось, что эту сходимость удастся установить и для поверхностей общего вида. Именно А. Пуанкаре указал путь доказательства принципа Неймана для широкого класса поверхностей. Поэтому ему принадлежит первый успех в распространении метода Неймана на выпуклые поверхности.

А. М. Ляпунов, последовательно отстаивавший свою точку зрения в многолетней научной полемике с А. Пуанкаре и Дж. Дарвином в связи с вопросом о грушевидных фигурах равновесия, относился к своим научным «противникам» с глубоким уважением. Для Александра Михайловича всегда характерным было стремление в полной степени отдать должное тем, кто получил результаты в исследуемой им области даже если эти результаты были частными, менее полными и строгими, чем полученные им. Например, в своей докторской диссертации Ляпунов писал:

«Единственная, сколь мне известно, попытка строгого решения вопроса принадлежит Пуанкаре (H. Poin-

саге), который в своем во многом отношении замечательном мемуаре. . .⁶ рассматривает вопросы об устойчивости для случая систем дифференциальных уравнений второго порядка, а также останавливается на некоторых близких к ним вопросах, касающихся систем третьего порядка. Хотя Пуанкаре и ограничивается очень частными случаями, но методы, которыми он пользуется, допускают значительно более общие приложения и способны привести еще ко многим важным результатам. Идеями, заключающимися в названном мемуаре, я руководствовался при большей части моих изысканий. . .» [42, с. 11, 15].

О том, насколько скромны здесь Ляпунов при оценке своих собственных результатов, свидетельствует мнение Н. Г. Четаева, отметившего, что содержащиеся в упомянутом Ляпуновым мемуаре Пуанкаре общие идеи о применении топографических систем к качественному изучению определенных дифференциальными уравнениями кривых сам Александр Михайлович развил до алгоритмических методов исследования задач об устойчивости и неустойчивости движения⁷.

В той же диссертации Ляпунов не обошел вниманием новые только что появившиеся работы Пуанкаре.

«Во время печатания этого сочинения появились два весьма интересных произведения А. Пуанкаре, в которых затрагиваются вопросы, стоящие весьма близко к рассматриваемым мною. . .⁸ В первом находят некоторые результаты, сходные с полученными мною, на что я и указываю в надлежащих местах своего сочинения в подстрочных примечаниях. Что касается второго, то ознакомиться с ним подробно я еще не успел; но по отношению к вопросам, рассматриваемым мною, в нем, по-видимому, нет каких-либо существенных прибавлений к названному мемуару.»

О крайней щепетильности Ляпунова в вопросах авторства свидетельствует такой на первый взгляд мало-

⁶ Русский перевод мемуара А. Пуанкаре, о котором здесь пишет Ляпунов, опубликован в [205].

⁷ Четаев Н. Г. Комментарий к главе I работы А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения» [42, с. 452].

⁸ Здесь Ляпунов имеет в виду мемуар А. Пуанкаре «Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique» (Acta mathematica. 1892. Т. 13) и первый том сочинения Пуанкаре «Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste». Paris: Gauthier-Villars, 1892.

значительный факт. В принадлежащем его перу некрологе памяти Д. К. Бобылева приведен список трудов Дмитрия Константиновича. А. М. Ляпунов делает в тексте специальную оговорку: «Список трудов, составленный К. В. Меликовым с некоторыми изменениями Ляпунова», отдавая таким образом должное труду своего коллеги.

Однако в отношении самого Ляпунова такую корректность соблюдали далеко не все. В течение длительного времени его результаты оставались малоизвестными. Некоторую роль в этом сыграла трудность работ Ляпунова даже для крупнейших математиков (вспомним признание Д. К. Бобылева в письме Александру Михайловичу от 29 сентября 1891 г.). Как отмечал П. Аппель, чтение трудов Ляпунова крайне трудно из-за того, что необходимый для строгого доказательства полученных им результатов аппарат очень сложен.

Имела место тенденция замалчивания выдающихся результатов русского ученого. Характерным в этом отношении является такой пример: французский математик Жак Адамар, хорошо знакомый с работами Ляпунова и состоявший с ним в переписке, публикуя свою статью «О некоторых свойствах динамических траекторий», не нашел нужным упомянуть о роли Ляпунова в решении этого вопроса, хотя в значительной мере использовал идеи и метод Александра Михайловича. А вот и другой пример, касающийся уже учебной и обзорной литературы. В известном курсе гидродинамики Г. Лемба, который выдержал много изданий и по которому учились многие поколения механиков и физиков, вращающимся массам жидкости посвящена особая глава в 40 страниц, на которых подробно освещаются исследования Пуанкаре, Дарвина и Джинса. Однако в курсе этом ничего не говорится о результатах работ А. М. Ляпунова. Список подобных примеров, увы, можно было бы продолжить. . .

Конечно, подобные факты были неприятны Ляпунову, хотя сам он никогда не говорил и не писал об этом. Но Александра Михайловича, вероятно, в еще большей степени огорчало, что так долго не соглашались с его доводами Дж. Дарвин, А. Пуанкаре и некоторые другие ученые, упорно отстаивавшие ошибочную точку зрения. Ведь Ляпунов подробно объяснил причину расхождения с результатом Дарвина: последний выра-

зил величину, от которой зависит решение вопроса об устойчивости грушевидных форм равновесия, в виде содержащего бесчисленное множество эллиптических интегралов бесконечного ряда. Отбросив остаток ряда и заменив оставшиеся члены их приближенными выражениями без надлежащей оценки погрешности, Дарвин пришел к ошибочному заключению, что искомая величина отрицательна, и, следовательно, грушевидные формы — устойчивы. Решающие доводы Ляпунова не поколебали уверенности Дарвина, повторившего заново свои вычисления и вновь пришедшего к прежнему результату.

Что касается А. Пуанкаре, то он в этом вопросе проявлял большую осторожность, чем Дарвин. В своих лекциях 1911 г. Пуанкаре писал: «Грушевидная форма, быть может, устойчива, но нет уверенности, что это действительно так; Дж. Дарвин считает эту фигуру устойчивой, но, по Ляпунову, она неустойчива. Чтобы решить вопрос, нужно было бы снова повторить все вычисления; но они представляют исключительные трудности».

Тем временем Ляпунов сделал от него все зависящее, чтобы несмотря на упомянутые Пуанкаре трудности внести полную ясность в этот вопрос. Как уже отмечалось, в 1912 г. Александр Михайлович опубликовал свои подробные вычисления, результаты которых однозначно свидетельствовали о его правоте. К сожалению, ни А. Пуанкаре, ни Дж. Дарвину не было суждено увидеть этот труд: в июле 1912 г. в Париже на 59 году жизни умер Анри Пуанкаре, а в конце того же года после длительной болезни в возрасте 67 лет скончался Джордж Дарвин. . .

Впрочем, большинство зарубежных ученых и после опубликования подробных вычислений Ляпунова продолжали считать, что истина на стороне Дарвина. Лишь в 1917 г. ученик Дарвина Д. Джинс, продолжив вычисления до третьего приближения, обнаружил тот самый дефект в вычислениях своего учителя, который привел к неверному заключению. Только после этого правота А. М. Ляпунова была признана, наконец, всеми учеными мира.

Глава 4

О неопубликованных работах

Полушутливые слова Л. Эйлера о том, что Академии наук придется заниматься изданием его трудов в течение многих лет после его смерти, можно с большим основанием отнести и к А. М. Ляпунову. Хотя многие труды Ляпунова издавались и переиздавались уже после смерти автора, значительное число его работ до сих пор не опубликовано и хранится в виде рукописей¹. Некоторые из них представляют собой более полное изложение результатов, опубликованных Ляпуновым в краткой форме, другие носят самостоятельный характер.

«Эти сочинения. . . дают лишь окончательные результаты громадного количества различного рода вычислений, которые и сами по себе представляют большой интерес во многих отношениях, но не вошли в печатный текст, а хранятся в виде рукописей. . .» — писал В. А. Стеклов.

Среди неопубликованных работ А. М. Ляпунова встречаются рукописи очень большого объема. Например, в большой неопубликованной рукописи (около 1000 страниц) приведены многие детали вычислений, связанных с исследованием фигур равновесия однородной жидкости, близких к эллипсоидальным, а также расчеты, нужные для решения спорного вопроса о грушевидных фигурах равновесия. Другая большая рукопись «*Figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe*» содержит 338 страниц и приведенные в ней вычисления связаны с исследованием фигур равновесия неоднородной вращающейся жидкости, посмертно изданные Академией наук СССР.

Распределение рукописей Ляпунова, хранящихся в Архиве АН СССР, по темам таково: примерно две трети работ посвящено устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также различным вопросам математики; около одной трети рукописей связано с общими вопросами механики, гидродинамикой, астрономией и теорией фигур равновесия

¹ Список неопубликованных работ А. М. Ляпунова, хранящихся в Архиве Академии наук СССР, приведен в [49].

вращающейся жидкости. Кроме работ чисто научного содержания встречаются также рукописи с разбором задач механики и учебные курсы («Примеры исследования устойчивости движения», «Курс динамики твердого тела»). Среди хранящихся в Архиве рукописей Ляпунова большая часть (две трети) написана на русском языке, остальные — на французском языке.

Подробный анализ этой части творческого наследия А. М. Ляпунова еще не осуществлен. Однако содержание некоторых из его рукописей освещено в печати. Так, четыре рукописи Ляпунова, содержание которых не вошло в опубликованные им работы, были рассмотрены В. И. Смирновым [91]. Из этих работ рукопись «Sur une équation différentielle», посвященная исследованию уравнения $d^2X/dS^2 + \mu p(S) = 0$ и рукопись «О характеристическом постоянном уравнении $d^2X/dS^2 + pX = 0$ » содержат доказательства ряда результатов, кратко опубликованных Ляпуновым в «Comptes rendus» в 1896—1900 гг. Что касается большей по объему рукописи «Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения», то в ней исследуется установившееся движение в случае, когда определяющее уравнение первого приближения имеет два корня, равные нулю, а остальные его корни имеют отрицательные вещественные части². В небольшой статье «Доказательство двух теорем теории интегрирования дифференциальных уравнений» рассмотрены системы обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями в виде рядов по целым положительным степеням независимого переменного и начальных данных.

Рукописи Ляпунова «Sur une équation différentielle» посвящена также публикация В. А. Добровольского [60], который отметил своеобразие композиции этой работы и методики изложения в ней результатов. Особенности рукописи Ляпунова, являющейся, по-видимому, вариантом готовившейся публикации, делают ее полезной для специалистов по теории устойчивости и историков науки.

Обзор содержания неопубликованных работ Ляпунова, относящихся к гидродинамике и к общим вопросам математики, был дан Л. Н. Сретенским [98]. В этом

² Работа под таким же названием была опубликована А. М. Ляпуновым (Мат. сб. 1893. Т. 17, вып. 2. С. 253—333).

обзоре освещено содержание рукописи 1882—1883 гг. «О движении твердого тела с жидкостью, заключающейся в нем» (205 страниц), в которой изучается движение твердого тела с жидкостью, заполняющей объем в виде тора. Ляпунов здесь использует несколько подходов для решения поставленной задачи и в результате приходит к формулам одного и того же вида. Другая крупная, в 162 стр., работа «О равновесии равномерно вращающейся упругой жидкости» относится, по-видимому, к началу 80-х годов, т. е. к периоду времени выбора Ляпуновым темы магистерской диссертации. В этой работе Ляпунов отыскивает вид внешней поверхности жидкости и распределение плотности внутри нее при условии, что частицы вращающейся вокруг неподвижной оси сжимаемой жидкости взаимно притягиваются по закону Ньютона и вместе с тем находятся под влиянием притягивающих их по тому же закону внешних масс. Ляпунов показал, что шар может быть формой равновесия сплошной жидкой вращающейся массы только если допускается возможность отрицательных плотностей. Рассматривая далее задачу об отыскании решающих этот вопрос эллипсоидов вращения, Ляпунов не доводит ее до конца, ограничиваясь лишь выводом формул для определения вида поверхностей равных плотностей.

В упоминавшейся выше большой (1000 стр.) рукописи с вычислениями, относящимися к изучению фигур равновесия однородной вращающейся жидкости, приведены подробные расчеты, а также детальное изложение теории, несколько отличающееся по форме от приведенного в посвященных этой же теме четырех больших опубликованных Ляпуновым мемуарах.

Две неопубликованные рукописи «О движении твердого тела в жидкости» и «Об интегрировании дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости» тесно связаны с задачей отыскания всех случаев интегрируемости уравнений Кирхгофа в однозначных функциях времени. При этом Ляпунов использует общий метод, основанный на построении системы уравнений в вариациях для частных решений основной системы, обладающих особыми точками.

В своем обзоре [98] Л. Н. Сретенский рассмотрел также ряд неопубликованных исследований Ляпунова, в которых для решения задач вариационного исчисления используется равенство Парсеваля. Это равенство

играет важную роль в теории фигур равновесия Ляпунова в части, относящейся к устойчивости эллипсоидов Маклорена и Якоби. Анализ содержания неопубликованной работы Ляпунова «О некоторых функциях, служащих для разложения потенциалов» свидетельствует о том, что А. М. Ляпунов очень близко подошел в своих исследованиях к современной теории интегральных уравнений и установил большую часть теорем, которые позднее были даны Гильбертом.

Подробное изложение содержания неопубликованной рукописи А. М. Ляпунова «Compléments au mémoire: «Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes» дал С. Н. Киро [67]. Эта работа Ляпунова, содержащая 167 страниц основного текста и 24 страницы дополнительных вычислений, основана на использовании введенного Ляпуновым ранее понятия обобщенного интеграла и содержит подробное изложение соображений и выкладок, связанных с построением мажорантных функций. Как отметил С. Н. Киро, эта работа представляет собой вполне законченное самостоятельное исследование, которое существенно дополняет результаты опубликованных статей Ляпунова по теории сфероида Лежандра.

Глава 5

Работы Ляпунова и современный научно-технический прогресс

Везде в окружающем нас мире — видимом и невидимом, в мире вне нас и внутри нас — реализуется во всем своем многообразии движение. С движением связано осуществление новых технических идей нашего времени. Поэтому трудно переоценить роль результатов А. М. Ляпунова (и прежде всего по решению проблемы устойчивости движения) в современном научно-техническом прогрессе.

К середине XX в. и в последующие десятилетия в связи с решением проблемы динамики ракет, развитием современной теории корабля, теории гидравлических систем приобрела актуальность задача движения

твердого тела с полостями, полностью или частично заполненными жидкостью. Широкий фронт теоретических исследований в этой области, постановка многих экспериментальных работ, инженерные решения основываются на результатах, полученных А. М. Ляпуновым и его последователями. Методами Ляпунова широко пользуются при изучении устойчивости гироскопов, например, при исследовании движения тяжелого гироскопа с одной неподвижной точкой.

Проблема устойчивости движения искусственных спутников Земли приобрела в наши дни особую важность. Советские ученые, основываясь на результатах Ляпунова, дали полное решение вопроса об устойчивости вращательных движений спутника вокруг его центра инерции, рассмотрели вопрос о движении искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. Эти и другие результаты позволили построить достаточно полную математическую теорию, на которой базируется современная наука о полете искусственных спутников Земли.

Большое значение для современной техники и науки имеет метод осреднения, возникновение и развитие которого было связано с решением задач небесной механики и изучением движения искусственных небесных тел. Важнейшую роль в этом направлении сыграли исследования Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, В. М. Волосова. Метод интегральных преобразований позволяет произвести исследование нелинейных систем при воздействии на них внешних сил высокой частоты, а также нестационарных процессов и релаксационных колебаний.

Другим примером интересных и важных для практики современных задач являются автоколебательные процессы и устойчивость в системах автоматического регулирования, изученные А. И. Лурье на основе асимптотических методов Крылова—Боголюбова. Колебания в сервомеханизмах и устойчивость стержневых систем были подробно исследованы В. Н. Челомеем.

Теория синхронизации динамических систем — важная и быстро развивающаяся область науки и техники. Здесь трудно переоценить вклад современных советских ученых, творчески использующих и развивающих достижения Ляпунова. Очень актуальной является и другая область — изучение стационарных движений, характеризующих основные состояния кон-

струкций современной техники. Решение этой задачи для консервативных систем обычно основывается на применении второго метода А. М. Ляпунова.

Тесную связь с нуждами современной техники имеет созданная трудами советских ученых техническая теория устойчивости, рассматривающая конечный интервал времени движения, конечные отклонения и возмущающие силы. В этом случае, как говорят, используется финитно-лимитационный подход. Это направление представляет собой прямое развитие идей Ляпунова.

Приведем некоторые конкретные примеры применения методов Ляпунова и его идей для нужд современной техники. Векторные функции Ляпунова использованы для изучения динамики систем прецизионной гироскопической стабилизации орбитальных обсерваторий с учетом влияния приводов гидростабилизаторов, датчиков ориентации, упругости элементов конструкции — корпуса, панелей солнечных батарей, антенн. Были также изучены многомашинные электроэнергетические системы, современные системы автоматического регулирования. Конечный итерационный процесс построения векторных функций Ляпунова был реализован применительно к динамике первой советской стратосферной обсерватории, бортового телескопа орбитальной станции «Салют-6», других стратосферных и орбитальных обсерваторий [148, 182]¹.

Но все это — лишь отдельные частные примеры, а область влияния идей и методов А. М. Ляпунова на современную науку и практику несравненно шире. Электротехника и радиотехника, биология, космонавтика и кибернетика, гидро- и газодинамика, термодинамика, механика сплошных сред, химия, теория корабля, автоматическое регулирование, астрономия, — пожалуй, невозможно сегодня указать такую область техники или научных знаний, где не нашли бы применения методы и результаты гениального русского ученого. В наши дни зарождаются новые направления науки, о которых Ляпунов знать не мог. Но и там методы Ляпунова зачастую оказываются незаменимыми. Примером может служить синергетика — новая научная дисциплина, возникшая на стыке фи-

¹ Сведения о других приложениях методов Ляпунова можно найти, например, в [144, 145, 200, 211, 223].

зики, химии, биологии и социологии и изучающая с использованием математических и экспериментальных средств явления самоорганизации — возникновения макроскопических упорядоченных структур. Именно методы Ляпунова позволяют наиболее эффективно судить об устойчивости подобных объектов [223].

Конечно, многие современные теории и методы исследования устойчивости по своей общности, возможностям и форме сильно отличаются от первоначальных методов Ляпунова. Например, новый очень перспективный путь решения проблемы устойчивости предложили А. Н. Колмогоров, В. И. Арнольд и немецкий математик Ю. Мозер (теория КАМ). Отдавая должное этим результатам не следует, однако, забывать об их иногда незаметной внешне, но глубокой внутренней связи с замечательным творческим наследием А. М. Ляпунова.

Заключение

Александр Михайлович Ляпунов — яркий представитель славной плеяды корифеев русской науки. Его труды оказали огромное влияние на дальнейшее развитие математики и механики во всем мире, способствовали прогрессу во многих областях науки и техники.

Богатое творческое наследие А. М. Ляпунова ожидала счастливая судьба. После Великой Октябрьской социалистической революции отечественные математики и механики поняли и оценили значение работ Ляпунова, во многом развили и обобщили его результаты. Выдающийся вклад Ляпунова в науку был признан за рубежом. Слава великого математика пришла к Александру Михайловичу посмертно.

В связи с непрерывно возрастающим значением проблемы устойчивости движения в современных областях науки и техники (среди этих областей есть и такие, о которых А. М. Ляпунов не знал и знать не мог) значение замечательных достижений Александра Михайловича становится все более очевидным. Не будет, пожалуй, преувеличением сказать, что создание многих устройств и объектов техники далекого будущего также будет основываться на результатах исследований А. М. Ляпунова и его последователей.

Советские люди хорошо знают о вкладе в науку и технику своего великого соотечественника. Его памяти и развитию его творческого наследия посвящаются книги, сборники научных трудов, конференции и съезды. Во всем мире проявляется все больший интерес к жизни и деятельности А. М. Ляпунова. Обаятельный образ Александра Михайловича — подвижника науки, кристально честного человека, выступавшего за демократические преобразования, за свободу печати, против влияния реакционеров на среднюю и высшую школу, не может не привлекать симпатии и интерес всех, для кого дорога память о создателях современного величественного здания науки.

Гениальное творческое наследие Александра Михайловича принадлежит всему миру. Оно живет и развивается в трудах все новых поколений ученых.

В. И. Смирнов, В. С. Сологуб

Очерк научной деятельности А. М. Ляпунова

Исследования А. М. Ляпунова
по теории устойчивости движения

Общая задача об устойчивости движения сводится к исследованию систем дифференциальных уравнений

$$dx_k/dt = P_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где P_k при достаточно малых $x_k(t)$ разлагаются в сходящиеся ряды по целым положительным степеням x_k и обращаются в нуль, когда $x_k = 0$. Требуется выяснить, при каких условиях возможно выбрать для $t=0$ достаточно малые значения $x_k(t)$ так, чтобы в последующем движении функции x_k оставались меньшими наперед заданных сколь угодно малых пределов.

Задача решается просто, если систему (1) возможно проинтегрировать. Однако почти во всех вопросах общей и особенно небесной механики эта интеграция заведомо невыполнима. Необходимо ответить на вопрос, не интегрируя систему (1).

Задача была поставлена творцом аналитической механики Лагранжем. Ее решали многие математики, начиная с самого Лагранжа, определившего устойчивость изолированного положения равновесия в случае минимума потенциальной энергии. Строгое и простое доказательство соответствующей теоремы дал Дирихле. Рауз установил критерии устойчивости для некоторых циклических систем, а также дал простое обобщение теоремы Лагранжа, позволяющее судить об устойчивости по экстремумам известных интегралов. Более широкое распространение получили приемы замены системы (1) системой, где при разложении функций P_k отбрасываются все члены, содержащие величины x_k

¹ Дополнение печатается по [92—95]. Ссылки на литературу даны по списку, приведенному в конце книги.

в степенях выше первой. Такого рода «решениями по первому приближению» занимались Томсон, Тэт, Жуковский и др. Однако первым приближением, вообще говоря, вопрос не решается: движение, устойчивое в первом приближении, оказывается иногда неустойчивым в действительности. Использование дальнейших членов разложения не меняло существенно положения, ибо задача по-прежнему принципиально оставалась «другой».

Единственная попытка строгого решения вопроса устойчивости принадлежала Пуанкаре, но он ограничился лишь некоторыми простейшими случаями.

В работах А. М. Ляпунова исследованы на устойчивость дифференциальные уравнения возмущенного движения весьма общего вида. Со всей строгостью решен вопрос о том, в каких случаях метод первого приближения приводит к полному решению задачи. Исследован ряд сомнительных случаев, когда первое приближение не приводит к цели. Установлено существование периодических решений для некоторых случаев нелинейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Ляпунов рассматривал также уравнения с переменными коэффициентами, особенно подробно — уравнения с периодическими коэффициентами. Им впервые исследован общий случай системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. Для такой системы он создал общую теорию характеристических чисел и на ее основе доказал существование асимптотических решений.

Первой работой Ляпунова в рассматриваемом цикле был мемуар «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости» (1888), последней — мемуар «Об одном ряде в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами» (1902). Основные результаты приведены в его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения»².

Диссертация состоит из трех глав. Первая глава посвящена предварительному анализу. Пусть Q_k ($k=1, 2, \dots, n$) — некоторые функции обобщенных координат, определяющих некоторую механическую си-

² Работы по теории устойчивости включены во второй том «Собрания сочинений» [45], за исключением первой из названных выше, а также мемуара «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи трех тел», вошедших в первый том.

стему, их производных по времени и самого времени; x_k — разность значений функций Q_k в любом возмущенном движении и в некотором определенном невозмущенном движении, для которого исследуется устойчивость по отношению к величинам Q_k . Таким образом, задача устойчивости сводится к исследованию устойчивости нулевого решения $x_1 = \dots = x_n = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + \dots + p_{kn}x_n + X_k \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Считается, что X_k можно представить с помощью степенных рядов

$$X_k = \sum P_k^{(m_1, \dots, m_n)} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

по целым положительным степеням x_1, \dots, x_n , причем $m_1 + \dots + m_n \geq 2$. Коэффициенты этих разложений, как и коэффициенты p_{kl} , суть действительные, непрерывные и ограниченные функции $t \geq t_0$ и при $t \geq t_0$ имеет место оценка

$$|P_k^{(m_1, \dots, m_n)}| \leq M/A^{m_1 + \dots + m_n},$$

где M и A — постоянные, иными словами, при $t \geq t_0$ написанные ряды абсолютно сходятся, если только $|x_k| < A$.

Ляпунов дает следующее определение устойчивости невозмущенного движения. Для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\eta > 0$, что если начальные значения x_k^0 при $t=t_0$ величин x_k , определяемых системой (2), удовлетворяют неравенствам $|x_k^0| \leq \eta$, то при всяком $t > t_0$ выполняются неравенства $|x_k| \leq \varepsilon$ ($k=1, \dots, n$). Если для какого-либо $\varepsilon > 0$ такого числа η нет, то невозмущенное движение неустойчиво.

Характеристическим числом любой функции $x(t)$, определенной при $t > t_0$, называется, по Ляпунову, действительное число λ , если для любого положительного α произведение $x(t) e^{(\lambda-\alpha)t}$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, а произведение $x(t) e^{(\lambda+\alpha)t}$ есть неограниченная по модулю функция при $t \rightarrow +\infty$. Если $x(t) e^{\mu t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ в случае любого выбора действительного числа μ , то характеристическое число функции $x(t)$ равно $+\infty$, если же $x(t) e^{\mu t}$ для любого выбора μ

есть неограниченная по модулю функция при $t \rightarrow +\infty$, то характеристическое число $x(t)$ считается равным $-\infty$. Характеристическим числом системы функций $x_k(t)$ ($k=1, \dots, n$) называется наименьшее из характеристических чисел отдельных функций.

Ляпунов доказывает теоремы о характеристических числах суммы, произведения, частного и интеграла от функции. Рассматривает систему первого приближения

$$dx_k/dt = p_{k1}x_1 + \dots + p_{kn}x_n \quad (k=1, \dots, n) \quad (3)$$

и доказывает, что всякое решение этой системы $x_1(t), \dots, x_n(t)$, отличное от нулевого, имеет конечное характеристическое число.

В диссертации Ляпунов вводит важные понятия правильной и приводимой систем. Систему (3) он называет правильной, если $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = -\mu$, где μ — характеристическое число функции

$$\exp\left(-\int \sum_{k=1}^n p_{kk} dt\right),$$

а $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ — наибольшая сумма характеристических чисел системы n линейно независимых решений системы (3) при различном выборе последних. Эта сумма, как доказал Ляпунов, существует. Частным случаем правильных систем являются приводимые системы. Пусть имеется линейное преобразование функций x_1, \dots, x_n

$$z_k = q_{k1}x_1 + \dots + q_{kn}x_n \quad (k=1, \dots, n), \quad (4)$$

причем все коэффициенты $q_{ki}(t)$ и их производные суть непрерывные и ограниченные функции при $t > t_0$ и величина, обратная определителю, составленному из $q_{ki}(t)$, есть также ограниченная функция t . Систему (3) Ляпунов называет приводимой, если ее можно привести к системе с постоянными коэффициентами для z_k при помощи преобразования указанного типа. Полученная система с постоянными коэффициентами имеет те же характеристические числа, что и приводимая система (3).

Результаты Ляпунова, относящиеся к решению вопроса об устойчивости по первому приближению, заключаются в следующем:

1. Если система (3) правильна и у любого ее решения характеристическое число положительно, то система (2) устойчива.

2. Если система (3) приводима и среди ее решений есть решения с отрицательным характеристическим числом, то система (2) устойчива.

При первом условии доказывается также, что если начальные значения x_k^0 решения $x_1(t), \dots, x_n(t)$ системы (2) достаточно близки к нулю, то каждое $x_k(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, или, как пишет Ляпунов, всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему приближается.

В исследованиях по устойчивости Ляпунов применяет два метода. Первый метод основан на интегрировании системы (2) в виде следующих рядов:

$$x_k(t) = \sum L_k^{(m_1, \dots, m_l)}(t) \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_l^{m_l} \exp(- (m_1 \lambda_1 + \dots + m_l \lambda_l) t) \quad (5)$$

$(k = 1, \dots, n),$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — характеристические числа ($l > n$) правильной системы (3); $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — произвольные постоянные; $L_k^{(m_1, \dots, m_l)}$ — непрерывные функции от t , характеристические числа которых неотрицательны. Суммирование распространяется на все целые неотрицательные значения m_1, \dots, m_l , такие, что $m_1 + \dots + m_l > 0$. Доказывается, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ по абсолютной величине достаточно близки к нулю, то ряды (5) абсолютно сходятся при $t \geq t_0$ и дают решение системы (2).

Широкую известность и применение получил второй метод Ляпунова. Ляпунов показал, что критерием устойчивости и неустойчивости системы (2) может быть некоторая функция V обобщенных координат и времени, не являющаяся интегралом этой системы (функция Ляпунова). Связь между функцией V и системой (2) выражается формулой

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} Y_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} Y_n + \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (6)$$

где V' — полная производная V , а Y_k — вся правая часть k -го уравнения системы (2). В этом и заключается в основных чертах второй метод. Построение функции

В является основным моментом в работе Ляпунова при решении вопросов устойчивости в различных случаях.

Вторая глава диссертации посвящена подробному исследованию установившихся движений, т. е. тех случаев, когда коэффициенты p_{ki} и $P_k^{(m_1, \dots, m_n)}$ в системе (2) не зависят от t . В этом случае система (3) имеет определяющее уравнение

$$\begin{vmatrix} P_{11} - k & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} - k & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

и характеристические числа первого приближения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, о которых говорилось выше, равны действительным частям корней уравнения (7), взятым с обратным знаком. Таким образом, если действительные части всех корней уравнения (7) отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему стремится. Если же среди корней уравнения (7) есть хотя бы один корень с положительной действительной частью, то невозмущенное движение неустойчиво.

В первом приближении вопрос об устойчивости не решается, если среди корней уравнений (7) нет корней с положительными действительными частями, но есть корни, равные нулю или чисто мнимые. Такие случаи, особенно второй из них, являются существенно важными в приложениях к вопросам механики.

Большая часть второй главы посвящена исследованию двух сомнительных с точки зрения первого приближения случаев. Первый случай — уравнение (7) имеет один корень, равный нулю, а действительные части остальных корней отрицательны; второй — уравнение (7) допускает два сопряженных чисто мнимых корня $\pm \lambda_i$, а действительные части остальных корней отрицательны. Исследование устойчивости во втором случае и построение периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений, получающихся из системы (2) путем ее преобразования, представляет собой одно из замечательнейших достижений математического анализа. До настоящего времени ничего

существенного не добавлено к тому, что было сделано Ляпуновым.

В последней, третьей, главе диссертации исследуется случай, когда все коэффициенты в правых частях системы (2) являются периодическими функциями одного и того же периода ω . Сначала рассматриваются линейные системы (3) с периодическими коэффициентами. Доказывается, что система (3) приводима в том случае, если коэффициенты $p_{ki}(t)$ имеют непрерывные производные, и что коэффициенты $q_{ik}(t)$ в линейном преобразовании (4), приводящем систему (3) к системе с постоянными коэффициентами, можно всегда выбрать действительными функциями с периодом ω или 2ω .

Если функции $x_{ik}(t), \dots, x_{nk}(t)$ ($k=1, \dots, n$) — линейно независимые решения системы (3), то функции $x_{1k}(t+\omega), \dots, x_{nk}(t+\omega)$ также являются решениями системы и поэтому линейно выражаются через решения $x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t)$:

$$x_{ik}(t+\omega) = a_{1k}x_{i1}(t) + \dots + a_{nk}x_{in}(t) \\ (i=1, \dots, n; k=1, \dots, n).$$

Уравнение степени n относительно ρ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

называется характеристическим уравнением системы (3) относительно периода ω . Оно не зависит от выбора системы независимых решений $x_{1k}(t), \dots, x_{nk}(t)$ ($k=1, \dots, n$). Всякому корню ρ уравнения (8) соответствует решение системы (3) в виде

$$x_1 = f_1(t) \rho^{t/\omega}, \dots, x_n = f_n(t) \rho^{t/\omega}, \quad (9)$$

где $f_k(t)$ — периодические функции с периодом ω . Кратному корню ρ кроме решения (9) могут соответствовать решения того же вида, в которых $f_k(t)$ определяются формулами

$$f_k(t) = \varphi_{k0}(t) + t\varphi_{k1}(t) + \dots + t^m\varphi_{km}(t), \quad (10)$$

где $\varphi_{ks}(t)$ — периодические функции периода ω . Всякому корню ρ кратности l соответствует l линейно не-

зависимых решений двух указанных выше видов. Если ρ_1, \dots, ρ_n — корни уравнения (8), то, определяя числа $\alpha_k = \frac{1}{\omega} \log \rho_k$, где берется какое-нибудь значение логарифмов, можно утверждать, что действительные части величин $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$ являются характеристическими числами системы (3).

Большой раздел третьей главы посвящен приближенному построению характеристического уравнения (8) и его исследованию. Здесь рассмотрена также каноническая система линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, n),$$

где H — голоморфная функция переменных x_k, y_k ($k = 1, \dots, n$), причем совокупность членов с наименьшей степенью в разложении H представляет собой квадратичную форму этих переменных. Доказано, что соответствующее характеристическое уравнение является возвратным уравнением, следовательно, его корни распадаются на пары таких корней, произведение которых равно единице.

Далее Ляпунов исследует общую систему (2) уравнений возмущенного движения. Если характеристическое уравнение (8) линейной системы первого приближения имеет все корни с модулем, меньшим единицы, то невозмущенное движение устойчиво и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему стремится при $t \rightarrow \infty$. Если же уравнение (8) имеет хотя бы один корень с модулем, большим единицы, то невозмущенное движение неустойчиво. Сомнительными в отношении устойчивости по первому приближению являются те случаи, когда характеристическое уравнение системы первого приближения не имеет корней с модулем, большим единицы, но имеет корни с модулем, равным единице. Ляпунов рассматривает два сомнительных случая, аналогичных рассмотренным им во второй главе относительно установившихся движений. В одном случае характеристическое уравнение первого приближения, по предположению, имеет один корень, с модулем, равным единице, а остальные корни — с модулями, меньшими единицы. В другом случае это же уравнение имеет два сопряжен-

ных корня с модулем, равным единице, а остальные корни — с модулями, меньшими единицы.

Идеи, изложенные в докторской диссертации, Ляпунов развивает в дальнейших исследованиях. В «Исследовании одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения» (1893) он рассматривает случай установившегося движения, когда система состоит из двух уравнений и определяющее квадратное уравнение первого приближения имеет двойной корень, равный нулю. Ляпунов предполагал (об этом указывается в предисловии) рассмотреть и общий случай, когда определяющее уравнение имеет двойной корень, равный нулю, а остальные корни с отрицательными действительными частями, — случай, как отмечалось, особенно трудный. Но ни в этой, ни в другой работе он не исследует его.

В небольшой статье «К вопросу об устойчивости движения» (1893) Ляпунов доказывает для случая установившегося движения, что при всяких коэффициентах P_{ki} первого приближения, при которых не решается вопрос об устойчивости, можно подобрать дополнительные члены X_k выше первого порядка так, чтобы движение было или неустойчивым, или устойчивым.

Исследованию уравнения

$$d^2x/dt^2 + p(t)x = 0, \quad (11)$$

где $p(t)$ — действительная периодическая функция периода ω , посвящена большая работа «Об одном ряде в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами» (1902). Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0,$$

где постоянная A определяется рядом

$$A = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi'_n(\omega) + \psi'_n(\omega)] (-1)^n, \quad (12)$$

в котором $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$ находится с помощью формул

$$\varphi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t) \varphi_{n-1}(t) dt, \quad \varphi_0(t) = 1,$$

$$\psi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t) \psi_{n-1}(t) dt, \quad \psi_0(t) = t.$$

Ряд (12) исследуется в предположении, что $p(t) \geq 0$. Получена оценка $A^2 < 1$.

В мемуаре «Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами» (1896) Ляпунов находит оценку A при знакопеременной периодической функции $p(t)$ в уравнении (11). Основой исследования является преобразование уравнения (11) при помощи замены независимой переменной t и функции x таким образом, чтобы в полученном уравнении коэффициент p был непостоянным. Как и в предыдущей работе, при некоторых предположениях получена оценка $A^2 < 1$.

Наконец, в работе «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах» (1889) рассмотрена устойчивость для некоторой специальной системы линейных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Вычисляются две постоянные, аналогичные постоянной A .

Исследования А. М. Ляпунова по теории устойчивости получили широкое развитие в работах советских математиков А. А. Андропова, Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина, В. В. Степанова, Н. Д. Моисеева, Г. Н. Дубошина, К. П. Персидского, Н. П. Еругина, И. З. Штокало, Г. В. Каменкова и др.³ Ими найдены новые методы решения и постановки задач.

Работы А. М. Ляпунова по теории фигур равновесия вращающейся жидкости

Исключительно большим по объему и сложным по применяемому математическому анализу является цикл работ⁴ А. М. Ляпунова по теории фигур планет, т. е. теории фигур равновесия равномерно вращающейся вокруг некоторой оси жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. Как отмеча-

³ О современном развитии теории устойчивости движения см. [59, 61, 62, 80, 88, 181, 182, 200, 207, 212, 215, 224, 227, 228]. — *Примеч. авт.*

⁴ Работы Ляпунова о фигурах равновесия вращающейся жидкости включены в третий и четвертый тома «Собрания сочинений» [45].

лось, Ляпунов посвятил этим исследованиям последние 15 лет своей жизни и получил весьма важные результаты.

Рассмотрим историю вопроса. Ньютон показал, что с помощью открытого им закона всемирной гравитации можно решить вопрос не только о движении небесных тел, но и об их форме. Он высказал гипотезу, что фигурой планеты, в том числе и Земли, является эллипсоид вращения, сжатый вдоль оси вращения в противоположность гипотезе Кассини, утверждавшего вытянутость такого эллипсоида. Гипотезу Ньютона впервые строго доказал Маклорен, и с тех пор эллипсоид вращения, как одна из возможных фигур равновесия однородной вращающейся жидкости, называется эллипсоидом Маклорена. В 1834 г. Якоби доказал, что фигурами такого равновесия могут быть и трехосные эллипсоиды с определенными соотношениями длин их полуосей (эллипсоиды Якоби). А в 1874 г. С. В. Ковалевская обнаружила кольцообразную фигуру равновесия. Пуанкаре⁵ охватил рассмотрение проблемы о фигурах равновесия вращающейся однородной жидкости единым анализом и кроме известных фигур равновесия получил ряд новых. Новыми являются некоторые деформированные эллипсоиды Якоби и знаменитые грушевидные фигуры, натолкнувшие английского астронома Д. Дарвина на построение новой космогонической гипотезы.

Первая работа по теории фигур неоднородной медленно вращающейся жидкости принадлежит Клеро [165]. В основе его теории лежит допущение, что неоднородная жидкость состоит из слоев разной плотности, а поверхности этих слоев являются поверхностями эллипсоидов вращения. Метод Клеро приближенный, поэтому, он не давал возможности применить процесс последовательных приближений для получения точного решения. Значительные исследования провел Лаплас⁶. Ему принадлежат два метода решения задачи о фигурах равновесия жидкости. Как и метод Клеро, первый метод Лапласа не давал возможности продвигнуться дальше первого приближения. Второй метод, основанный на разложении в ряд по сферическим

⁵ *H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation // Acta math. 1855. Vol. 7.*

⁶ *P. S. Laplace. Traité de mécanique céleste. 1878. T. 2, l. 3, ch. 2, 4; t. 5, l. 11, ch. 2.*

функциям, не имел этого недостатка, но в нем оставались необоснованными вопросы сходимости.

До Ляпунова не было строгой теории рассматриваемой проблемы. Такую теорию создал Ляпунов. Ей посвящены две его работы: «Изыскания в теории фигур небесных тел» (1903) и «Об уравнении Клеро и более общих уравнениях в теории фигур планет» (1904). В первой работе доказывается существование фигур равновесия, близких к сфере, в случае неоднородной жидкости, достаточно медленно вращающейся вокруг оси. Для доказательства берется любой закон распределения плотности (поверхности одинаковой плотности близки к сферам) при единственном предположении, что плотность возрастает с глубиной и остается ограниченной. Задача сводится к решению системы некоторых интегро-дифференциальных уравнений, первое из которых представляет собой уравнение Клеро. Таким образом, у Ляпунова теория Клеро является первым приближением полной и строгой теории.

Интегро-дифференциальные уравнения исследуются и во второй работе. В ней доказано, что каждое из упомянутых уравнений имеет одно определенное решение, подчиняющееся некоторому естественному условию. Здесь Ляпунов вводит обобщенное понятие интеграла в направлении интеграла Стильтеса и рассматривает обобщенное уравнение Клеро в терминах этого интеграла, расширяя тем самым предположения об искомой функции.

Несколько работ А. М. Ляпунова посвящено более трудной задаче — строгому доказательству существования новых фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, в случае вращающейся однородной жидкости. Общие указания о методе решения этой задачи и сводка полученных результатов даны в работе «Об одной задаче Чебышева» (1905). Метод Ляпунова заключается в следующем: разложение ньютонова потенциала; применение процесса последовательных приближений путем разложения искомого решения по некоторому малому параметру; доказательство сходимости этого процесса при помощи построения мажорантного ряда. В более поздних его исследованиях угловая скорость уже не является малой и роль малого параметра играет совершенно иная величина.

Решение задачи детально изложено в большой работе «О фигурах равновесия однородной вращающейся

жидкости, мало отличающихся от эллипсоидальных», состоящей из четырех частей (1906, 1909, 1912, 1914). В первой части составляются основные уравнения задачи и в теоретически законченном виде дается метод решения этих уравнений, позволяющий не только доказать существование новых фигур равновесия, но и определить их с любой степенью точности. Число эллипсоидов в зависимости от угловой скорости вращения ω определяется следующим образом. Существует два таких значения $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$ ($\omega_1 < \omega_2$), что при условии $0 < \omega < \omega_1$ имеются три эллипсоидальные фигуры равновесия — два эллипсоида Маклорена и один эллипсоид Якоби, а при $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$ — лишь два эллипсоида Маклорена. В случае $\omega = 0$ (состояние покоя) фигурой равновесия является сфера. При $\omega = \omega_1$ эллипсоид Якоби переходит в эллипсоид вращения, а при $\omega = \omega_2$ два эллипсоида Маклорена сливаются в один. В случае $\omega > \omega_2$ эллипсоидальных фигур равновесия не существует. Пусть S — момент инерции жидкости относительно оси вращения и $I = S \omega$ — момент количества движения относительно этой же оси. (Как изменяются эллипсоидальные фигуры равновесия при изменении I от нуля до бесконечности, показано в лекции Ляпунова «О форме небесных тел». Здесь же указана форма вырождения эллипсоидов при $\omega \rightarrow 0$.)

Из эллипсоидов Маклорена и Якоби только некоторые способны порождать близкие к ним фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных. В первой части подробно исследуется трансцендентное уравнение, которым определяются эти «эллипсоиды бифуркации», указываются некоторые свойства симметрии фигур равновесия. Таким образом, первая часть рассматриваемой работы Ляпунова представляет собой законченное целое. Она в одинаковой мере относится к фигурам равновесия обоих видов, близким как к эллипсоидам Маклорена, так и к эллипсоидам Якоби.

Во второй части работы детально вычисляются последовательные приближения, которыми определяются новые фигуры равновесия, близкие к эллипсоидам Маклорена, и исследуется величина угловой скорости вращения и момента количества движения для новых фигур.

В третьей части рассматриваются последние два вопроса для фигур равновесия, близких к эллипсоидам Якоби, и определяется их устойчивость.

В четвертой части Ляпунов возвращается к основным уравнениям задачи, причем несколько иначе, чем в первой части, вводит основную функцию ζ полярных углов θ и ψ , которая характеризует отклонение поверхности фигуры равновесия от эллипсоидальной формы. В процессе вычисления это приводит к формулам, отличным от формул первой части работы. Таким образом, Ляпунов дает новый метод разыскания фигур равновесия. Функция ζ представляется в виде бесконечного ряда, и с помощью этого метода устанавливается форма зависимости каждого члена ряда от θ и ψ . Результаты применения нового метода связываются с формулами, использованными в первой части.

К четвертой части непосредственно примыкает работа «Об уравнениях, которые принадлежат к поверхностям фигур равновесия однородной вращающейся жидкости, близких к эллипсоидальным» (1916). В ней Ляпунов подробно исследует бесконечный ряд, которым определяется функция ζ , преобразуя его к новому виду и таким путем устанавливая вид уравнений в координатах x, y, z , определяющих поверхности новых фигур равновесия.

Исследовав фигуры равновесия однородной жидкости, близкие к эллипсоидальным, Ляпунов перешел к задаче об отыскании фигур равновесия слабонеоднородной жидкости, близких к эллипсоидам Маклорена и Якоби. Эту огромную работу он начал примерно в 1915 г. После смерти Ляпунова осталась большая рукопись «О некоторых фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости», содержащая решение указанной задачи. В ней доказано, что всякий эллипсоид Маклорена или Якоби, отличный от эллипсоида бифуркации, порождает ряд новых фигур равновесия, близких к нему по форме, со слабой неоднородностью в плотности и с той же угловой скоростью вращения, что и у исходного эллипсоида. Если принять плотность исходного эллипсоида за единицу, то плотность ρ новой фигуры равновесия принимает вид $\rho = 1 + \varepsilon \varphi(a)$, где ε — малый параметр и $\varphi(a)$ — заданная функция величины a , которая характеризует поверхности уровня плотности внутри жидкости.

Основная функция ξ , характеризующая отклонение внешней и внутренних поверхностей уровня от эллипсоидов, является функцией θ, ψ и a . Она ищется в виде ряда по целым положительным степеням ε без свобод-

ного члена. Преодолевая большие трудности, Ляпунов исследовал три первых члена этого ряда для ζ и при некоторых предположениях относительно $\varphi(a)$ показал, какова форма зависимости любого члена ряда от θ , ψ и a . Он применил этот метод к случаю однородной жидкости и таким образом пришел еще к одному методу исследования фигур равновесия однородной жидкости.

Исключительной по силе является последняя работа Ляпунова о фигурах равновесия — «Новые рассмотрения в теории фигур равновесия, близких к эллипсоидальным в случае однородной жидкости» (1916). В ней применяются самые разнообразные средства математического анализа. Как и в других работах, Ляпунов кроме строго доказанной теоремы существования дает алгоритм построения уравнений новых фигур равновесия и исследует структуру получающихся при этом приближений. Два результата, использованные в последней работе, изложены Ляпуновым в статьях «О полиномиальных рядах» (1915) и «Об одной формуле анализа» (1917). В первой из них исследуется бесконечный ряд с общим членом $P_n(x_1, \dots, x_k) \alpha^n$, где P_n — полином степени не выше n , α — параметр ($|\alpha| < 1$). При этом $|P_n|$ не превышает некоторого числа, не зависящего от n , если каждое x_i ($i=1, \dots, k$) принадлежит промежутку $[-1, +1]$. Во второй статье рассматривается потенциал простого слоя на эллипсоиде и его разложение по сферическим функциям.

Магистерская диссертация А. М. Ляпунова «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (1884), большой его мемуар «Задача минимума в вопросе устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости» (1908), а также третья часть рассмотренной выше основной работы «О фигурах равновесия . . .» посвящены вопросам устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости. В последней работе, как упоминалось, рассматривался вопрос об устойчивости некоторых эллипсоидов Якоби и новых фигур равновесия, близких к эллипсоидальным. Остановимся более подробно на первых двух работах.

До Ляпунова вопросом устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости занимались Лиувиль и Риман. Они решали задачу при специальных предположениях о возмущениях. При общих предположениях о возмущениях Риман рассматривал лишь вопрос о неустойчивости некоторых эллипсоидов Маклорена. Когда Ляпунов уже

готовил к печати свою магистерскую диссертацию, вышла книга Томсона и Тэта ⁷, в которой упоминалось об устойчивости фигур равновесия. В качестве основы своих исследований Томсон и Тэт формулируют некоторый вариационный принцип, по которому можно судить об устойчивости или неустойчивости. Этот принцип Ляпунов положил в основу своей диссертации.

Основной и принципиальной частью диссертации является попытка точного определения (впервые) устойчивости равновесия вращающейся жидкости и приведение поставленной задачи к чисто математической задаче о минимуме некоторого выражения. Ляпунов определяет устойчивую форму равновесия как такую, для которой «после сообщения движению жидкости достаточно малых возмущений форма жидкости остается на сколько угодно мало отличающейся от этой формы равновесия, по крайней мере до тех пор, пока на поверхности жидкости не образуется сколько угодно тонких нитеобразных или листообразных выступов». Оговорка об этих выступах связана с их размером и объемом: они могут быть большими по размерам, но малыми по объему, а значит, и нести на себе малые порции энергии.

Трудность задачи состояла в том, что нельзя было перенести на случай сплошной среды известный критерий устойчивости Лагранжа для систем с конечным числом степеней свободы (минимум потенциальной энергии). Ляпунов вносит ясность и строгость в решение этой сложной задачи. По его мнению, все должно быть основано на точном определении понятия устойчивости для случая сплошной среды и доказательстве основного вариационного принципа, базирующемся на данном определении; никакие аналогии со случаем конечного числа степеней свободы недопустимы. К сожалению, и до настоящего времени эти идеи Ляпунова недостаточно оценены и не нашли полного отражения в современной литературе.

Рассмотрим величину Π , выражающуюся формулой

$$\Pi = \frac{M}{S} - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{d\tau d\tau'}{r},$$

где M — заданная положительная постоянная; S — момент инерции жидкости относительно оси вращения исследуемой фигуры равновесия; $d\tau$ и $d\tau'$ — элементы объе-

⁷ *W. Thomson and P. Tait. Treatise on natural philosophy. Cambridge, 1883.*

ма, расстояние между которыми r , а каждое интегрирование которых выполняется по полному объему, занимаемому жидкостью. Постоянная M связана с моментом I количества движения жидкости относительно оси вращения формулой

$$M = I^2/2\pi k\rho^3,$$

где k — множитель в законе всемирного тяготения; ρ — плотность жидкости. Угловая скорость ω выражается формулой

$$\omega = \sqrt{2\pi k\rho M/S}.$$

Считается, что жидкость несжимаема и однородна, и предполагается, что при сравнении величины Π для фигуры равновесия и близкой к ней фигуры центры тяжести этих фигур совпадают.

Принцип Томсона и Тэта, из которого исходит Ляпунов, состоит в следующем: необходимо установить, соответствует ли движению фигуры равновесия минимум полной энергии в предположении, что это движение сравнивается с другими движениями, происходящими под действием тех же сил взаимного притяжения и при неизменной величине момента количества движения относительно центра тяжести. Ляпунов показал, что для несжимаемой однородной жидкости этот вопрос равносильен вопросу о минимуме величины Π . Его основной теоремой определяется устойчивость всякой фигуры равновесия, для которой при известных условиях величина Π имеет минимальное значение.

В мемуаре «Задача минимума в вопросе устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости» Ляпунов улучшает результаты магистерской диссертации и изучает вопрос о связи минимума величины Π с устойчивостью, но устанавливает эту связь, не применяя принцип Томсона и Тэта, а непосредственно используя закон сохранения энергии. Существенным дополнением к диссертации является исследование особых случаев, когда рассмотрение второй вариации не дает решения вопроса о минимуме величины Π . В работе исследуется вопрос об устойчивости близких к эллипсоидальным новым фигур равновесия, которые были построены Ляпуновым ранее, доказываемая неустойчивость грушевидных фигур Пуанкаре. Последний результат Ляпунова находился в явном противоречии с исследованиями астронома Д. Дарвина, строившего

свою космогоническую гипотезу именно на основании устойчивости таких фигур. В одной из глав доказано свойство замкнутости сферических функций. Большую часть работы, как и магистерской диссертации, занимало математическое исследование вариации Π . В заключении Ляпунов ставит следующий вопрос: можно ли утверждать, что фигура равновесия вращающейся жидкой массы неустойчива, если для нее величина Π не имеет минимума. Он полагает, что в случае идеальной жидкости такое утверждение неправильно.

Работы А. М. Ляпунова по теории потенциала, теории вероятностей и другие

В научном наследии А. М. Ляпунова видное место занимают также работы по математической теории потенциала, посвященные главным образом решению краевых задач для уравнения Лапласа и изучению свойств потенциалов. Вместе с работами Карла Неймана, Пуанкаре, Стеклова и других математиков эти исследования Ляпунова являются основными трудами в развитии теории потенциала в конце XIX—начале XX в. Полные глубоких оригинальных идей они влияли и еще продолжают влиять на развитие других разделов математической физики. Всего за период 1886—1902 гг. в «Comptes rendus» Парижской академии наук, в журнале Лиувилля «Journal de mathematiques» и в «Сообщениях Харьковского математического общества» Ляпуновым было опубликовано семь работ по теории потенциала. В настоящее время они переведены на русский язык, изданы отдельной книгой, а также включены в его «Собрание сочинений» [43, 45].

Две работы посвящены проблеме притяжения. В первой из них — «О теле наибольшего потенциала» (1886) — рассматривается выражение

$$\Pi = \iiint \frac{d\tau d\tau'}{r},$$

где каждый из интегралов распространен на некоторую ограниченную трехмерную область. Доказывается, что если допустить существование области, для которой выражение Π при заданной мере достигает своего наибольшего значения, то эта область является шаром. Во второй статье «Некоторое обобщение формулы Лежен-Дирихле. . .» (1886) обобщается формула Дирихле для внутреннего

ньютоновского потенциала однородного трехосного эллипсоида на случай, когда закон взаимного притяжения материальных точек выражается произвольной функцией расстояния между ними.

Большим достижением Ляпунова было строгое обоснование существовавших в то время методов решения краевых задач для уравнения Лапласа (методы Грина, К. Неймана, Робэна). Все они базировались на необоснованных утверждениях о существовании предельных значений нормальной производной на границе рассматриваемой области как от искомых функций, так и от используемых вспомогательных функций-потенциалов и функции Грина. Ляпунов впервые с безупречной математической строгостью решил краевые задачи теории потенциала для широкого класса областей, ограниченных поверхностями Ляпунова. Кроме того, для таких поверхностей он установил новые утверждения, имеющие самостоятельное значение, например теорему о равенстве предельных значений нормальной производной от потенциала двойного слоя.

Обоснованию методов Грина и Робэна посвящен большой мемуар «О некоторых вопросах, относящихся к проблеме Дирихле» (1898), состоящий из трех глав. Первая глава носит вспомогательный характер. В ней дано определение замкнутых поверхностей Ляпунова⁸, а также с помощью полученных неравенств, характеризующих эти поверхности, доказаны теоремы о свойствах потенциала простого слоя и его нормальной производной.

Во второй главе решена основная проблема электростатики о распределении электрических зарядов на границах изолированных предварительно заряженных электричеством проводников при условии, что границы этих проводников — поверхности Ляпунова. Известно⁹, что эта проблема является частным случаем первой краевой задачи теории потенциала. Для случая выпуклых поверхностей она была решена в 1887 г. Робэном¹⁰. Он показал, что искомое решение, т. е.

⁸ См., например, в кн.: *Л. Н. Сретенский*. Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1946. Гл. 1, § 7.

⁹ См., например, кн.: *Н. И. Идельсон*. Теория потенциала и ее приложения к вопросам геофизики. Гостехтеориздат, М.; Л., 1932. С. 123—125.

¹⁰ *G. Robin*. Distribution de l'électricité sur une surface fermée convexe // *C. r. Acad. sci. Paris*. 1887. Т. 104. Р. 1834—1836.

непрерывная плотность ρ уровненного слоя на поверхности S проводника, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\rho(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\rho(P') \cos \varphi}{r^2} d\sigma, \quad (13)$$

где r — расстояние PP' , φ — угол, образованный направлением $P'P$ и направлением внешней нормали к S в точке P . Ляпунов доказывает существование решения уравнения (13) при добавочном условии

$$\int_{(S)} \rho(P') d\sigma = M \quad (14)$$

где M — общее количество электричества, которым заряжен проводник. На поверхности S он строит последовательность функций $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$, определяемых формулами

$$v_0(P) = \int_{(S)} \frac{\rho_0(P') d\sigma}{r}, \quad (15)$$

$$v_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{v_{k-1}(P') \cos \varphi}{r^2} d\sigma \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где ρ_0 — произвольная непрерывная функция, заданная на поверхности и удовлетворяющая равенству (14) и условию Лишшица. Внутри поверхности S строится последовательность потенциалов простых слоев

$$V_k(P) = \int_{(S)} \frac{\rho_k(P') d\sigma}{r} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

как решений первой краевой задачи для уравнения Лапласа при граничных функциях на поверхности S , соответственно равных членам последовательности (15). Плотности ρ_k связаны соотношениями

$$\rho_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\rho_{k-1}(P') \cos \varphi}{r^2} d\sigma \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Ляпунов доказал равномерную сходимость последовательности (16) к предельной функции ρ , которая и является искомым решением основной проблемы электростатики. То, что ρ удовлетворяет уравнению (13) при условии (14), следует из равномерной сходимости $\rho_k \rightarrow \rho$, а единственность ρ он доказывает отдельно.

В третьей главе мемуара рассматриваются внутренняя и внешняя первые краевые задачи для уравнения Лапласа в общем случае, а также обосновывается метод Грина в случае областей, ограниченных поверхностями Ляпунова S . Вначале решается вопрос о существовании предельных значений на поверхности S нормальной и обыкновенных частных производных от искомой гармонической функции (решения первой краевой задачи). Если у некоторой функции v , определенной внутри или вне поверхности S , нормальная производная равномерно для всех точек поверхности стремится к пределу, то функция имеет правильную нормальную производную на этой поверхности. Доказаны следующие утверждения.

1. Пусть W — потенциал двойного слоя на поверхности S с непрерывной плотностью f и $(\partial W/\partial n)_i$, $(\partial W/\partial n)_e$ — предельные значения его нормальных производных, взятых соответственно изнутри и извне поверхности. Если существует и является правильной одна из указанных производных, то таким же свойством обладает и другая производная и эти производные равны.

2. Для того чтобы гармоническая внутри или вне поверхности S функция V , равная на поверхности S непрерывной функции f , допускала правильную нормальную производную на этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы потенциал двойного слоя W с плотностью f обладал этим же свойством.

С помощью этих двух результатов Ляпунов доказал существование предельных значений нормальной и обыкновенных частных производных от функции Грина, т. е. то, что не сделал ни сам Грин, ни его последователи. Это дало возможность впервые математически строго вывести основную формулу, выражающую искомое решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа посредством функции Грина.

В работе «О потенциале двойного слоя» (1899) получено достаточное условие существования и равенства предельных значений нормальной производной потенциала двойного слоя. Какая-либо точка P_0 поверхности Ляпунова S принимается за полюс полярных координат в касательной плоскости к поверхности S в этой точке. Функция f в точках P поверхности S , расстояние которых от P_0 не превосходит числа α , входящего в определение поверхности S , рассматривается как функция

полярных координат ρ , ψ проекций P на указанную касательную плоскость. Вводятся обозначения

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\psi = \bar{f};$$

f_0 — значение f в точке P_0 . При этом для существования правильных нормальных производных у потенциала W достаточно существование таких двух положительных чисел b и β , не зависящих от ρ и от положения точки P_0 , чтобы при всех достаточно малых ρ выполнялось неравенство

$$|\bar{f} - f| < b\rho^{\beta+1}$$

(Ляпунов считает число α в неравенстве $\nu < ar^\alpha$, входящем в определение поверхности S , равным единице).

Рассмотрим еще одну работу Ляпунова, относящуюся к теории потенциала — «К основному принципу метода Неймана в задаче Дирихле» (1902). В ней показано, что если метод Неймана для решения первой краевой задачи теории потенциала применим при условии, что граничная функция $f(M)$ представляет собой предельные значения потенциала простого слоя с непрерывной плотностью, то он применим также и в предположении, что функция $f(M)$ ограничена и интегрируема на рассматриваемой границе области. Основой этого результата является доказанная в этой же работе важная и сама по себе теорема о потенциале двойного слоя: прямое значение потенциала двойного слоя (т. е. значение соответствующего интеграла в точках самой поверхности) с непрерывной плотностью удовлетворяет условию Липшица с любым показателем, меньшим единицы.

Теории вероятностей посвящены два мемуара «Об одной теореме теории вероятностей» (1900) и «Новая форма теоремы о пределе вероятности» (1901) [45, т. 1]. Они представляют собой две части одного исследования (написаны в Харькове в течение одного года, когда Ляпунов читал в университете курс теории вероятностей) и в развитии теории вероятностей сыграли большую роль.

В конце XIX в. в теории вероятностей возникла важная задача о приложимости предельной теоремы Лапласа к сумме случайных и независимых величин x_i при возможно более широких условиях. П. Л. Чебышев впервые указал метод (метод моментов) для решения

поставленной задачи при единственном предположении, что каждое из слагаемых имеет конечные моменты, т. е. м. о. $|x_i|^p = d_i^{(p)} < \infty$ для любой целой положительной степени p . Несколько уточнив рассуждения Чебышева, А. А. Марков (1898) доказал предельную теорему в следующем виде: пределом вероятности неравенств

$$z_1 < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{2(a_1 + \dots + a_n)}} < z_2$$

является

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz,$$

если для всех целых значений $p > 2$ отношение

$$\frac{d_1^{(p)} + d_2^{(p)} + \dots + d_n^{(p)}}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{1/2p}} = M_n^{(p)}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теорема Чебышева—Маркова, далеко превосходящая по своей общности все, что было известно раньше, охватывает, в частности, обычный в статистике случай, когда все $|x_i|$ ограничены ($|x_i| \leq L$) и $(a_1 + \dots + a_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, так как тогда $d_i^{(p)} \leq a_i L^{p-2}$ и, следовательно,

$$M_n^{(p)} \leq \frac{L^{p-2} (a_1 + \dots + a_n)}{(a_1 + \dots + a_n)^{1/2p}} = \frac{L^{p-2}}{(a_1 + \dots + a_n)^{1/2(p-2)}} \rightarrow 0$$

Преимущество теоремы Ляпунова заключается в том, что он требует существования хотя бы одного значения $p=2+\delta$ ($\delta > 0$) (где p может и не быть целым числом), для которого $d_i^{(2+\delta)} < \infty$. В формулировке Ляпунова, что особенно важно, бесконечное число условий Маркова $M_n^{(p)} \rightarrow 0$ при всех целых $p > 2$ заменяется единственным условием, соответствующим лишь одному какому-нибудь значению $\delta > 0$. Этот классический результат Ляпунов получил не сразу. В первой работе он ограничился случаем $\delta=1$, т. е. $p=3$, но ему еще не удалось заменить все условия Маркова единственным условием $M_n^{(3)} \rightarrow 0$. В последовательном преодолении трудностей Ляпунов был вынужден сначала внести дополнительное ограничение, что все математические ожидания $|x_i|^3$ равномерно ограничены, т. е. м. о.

$|x_i|^3 = d_i^{(3)} \leq L^3$, и вместо условия $M_n^{(3)} \rightarrow 0$ он потребовал соблюдения более стеснительного условия

$$\frac{n^{2/3} L^2}{a_1 + \dots + a_n} \rightarrow 0.$$

В другой заметке, опубликованной в 1901 г. под таким же названием, Ляпунов доказывает эту теорему, уже обобщенную в том отношении, что вместо $\delta=1$ он полагает $0 < \delta \leq 1$, т. е. в сущности любое $\delta > 0$. Доказательство своей предельной теоремы Ляпунов проводит совершенно новым методом, получившим название метода характеристических функций. Этот метод впоследствии стал основным в теории вероятностей. Ляпунов показал, что полученная им верхняя грань погрешности предельной формулы, выведенная при частном предположении, что каждая из случайных величин x_i может получить любое конечное число значений, остается в силе и в самом общем случае. Оценка этой погрешности, проведенная Ляпуновым с непревзойденным мастерством, не может быть существенно улучшена.

Вскоре после открытия Ляпунова А. А. Марков с помощью простого замечания вновь получил этот результат. С. Н. Бернштейн в 1926 г. заменил достаточное условие Ляпунова еще немного более общим условием, в котором отдельные слагаемые x_i могут даже не иметь конечных дисперсий и которое является не только достаточным, но в известном смысле также необходимым для предельной применимости нормального закона к сумме независимых величин.

Кроме рассмотренных, Ляпунову принадлежат и другие работы. Одна из них — «О равновесии тяжелых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосуде определенной формы» (1881), — за которую он получил в Петербургском университете золотую медаль, посвящена исследованию влияния сосуда, содержащего несколько жидкостей, на равновесие погруженного в него твердого тела. Жидкости предполагаются однородными и несжимаемыми. Доказано существование потенциала гидростатического давления на погруженное тело, исследовано равновесие и устойчивость равновесия этого тела, установлены необходимые и достаточные условия равновесия. Другая работа также студенческая, — «О потенциале гидростатических давлений» (1881) — является продолжением первой. В ней

рассмотрен вопрос о существовании потенциала гидростатического давления для случая сжимаемых жидкостей и деформируемого тела. В работе «Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости» (1893) исследуется новый случай определения четвертого интеграла, отличный от трех известных интегралов Кирхгофа. Статья «Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку» (1894) посвящена доказательству следующего утверждения: кроме случаев Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, всегда существуют такие действительные начальные значения $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ ($\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1$), при которых среди функций $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$, являющихся решением соответствующей системы дифференциальных уравнений, есть многозначные функции времени t . И наконец, в работе «О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны» (1896) впервые доказывается сходимость рядов, при помощи которых Хилл проинтегрировал дифференциальные уравнения движения Луны. Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p}{d\tau^2} + 2(1+m)i \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{3}{2}l(p+q) &= \\ &= \frac{3}{2}\lambda(q-1)e^{-2\tau i} + lR_p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{d\tau^2} - 2(1+m)i \frac{\partial q}{\partial \tau} - \frac{3}{2}l(p+q) &= \\ &= \frac{3}{2}\lambda(p-1)e^{+2\tau i} + lR_q, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (1-p)^{-1/2}(1-q)^{-3/2} &= 1 + 1/2p + 3/2q + R_p, \\ l &= 1 + 2m + 3/2m^2, \\ (1-p)^{-3/2}(1-q)^{-1/2} &= 1 + 3/2p + 1/2q + R_q, \quad \lambda = m^2. \end{aligned}$$

Постоянная λ считается параметром и периодическое решение этой системы ищется в виде

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \lambda^k, \quad q = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \lambda^k,$$

где p_k и q_k не зависят от λ , имеют период 2π и равны между собой при $\tau=0$. При этом p_k и q_k определяются

единственным путем и доказываемся сходимостью построенных рядов при условии $m \leq 1/7$ (в теории Луны $m=1/12$). Оказывается, что построенное решение имеет период π .

Научные исследования А. М. Ляпунова являются огромным вкладом в мировую математику, математическую физику и механику. Они открыли новый этап в развитии нашей отечественной науки и послужили отправным началом в решении многих важных и сложных проблем для выдающихся его последователей.

Приложение

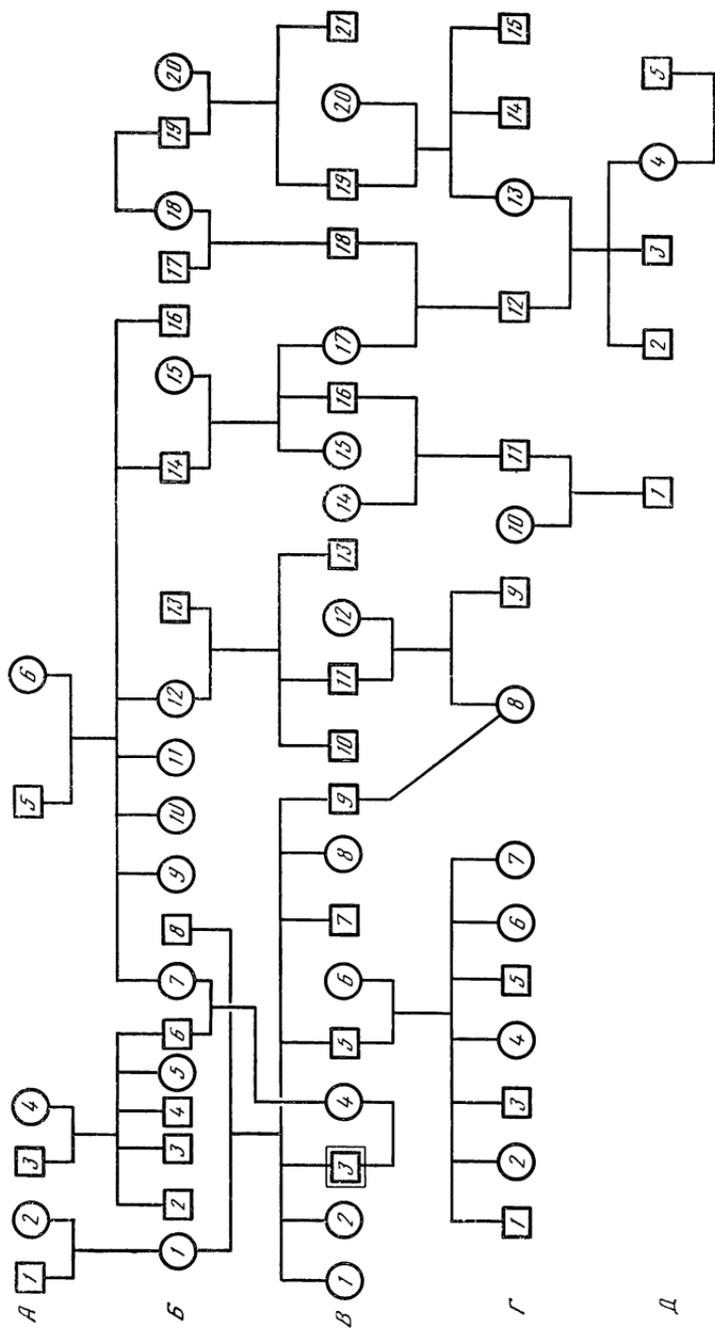
Выдающиеся представители семьи Ляпуновых и родственников им семейств

В истории мировой науки и культуры очень немного найдется случаев, когда одна или несколько связанных родственными узами семей дают миру целое созвездие замечательных деятелей искусства или науки. На память приходит знаменитая семья Бернулли, великие физики Пьер, Мария и Ирэн Кюри, Фредерик Жолио-Кюри. Много ярких, разносторонних дарований подарила семья Ляпуновых и родственные ей семьи — Зайцевы, Сеченовы, Филатовы. Крыловы, Капицы.

О братьях Александра Михайловича — композиторе и пианисте Сергее Михайловиче и ученом-слависте Борисе Михайловиче Ляпуновых рассказывалось выше. Дочь С. М. Ляпунова Анастасия Сергеевна получила известность как крупный музыковед и текстолог. По окончании историко-теоретического факультета Ленинградской консерватории в 1931 г. она преподавала историю музыки и теоретические предметы в Татарском техникуме искусств (г. Казань). В период 1938—1940 гг. А. С. Ляпунова заведовала рукописным отделом библиотеки Ленинградской консерватории, а с 1940 по 1963 г. являлась сотрудником отдела рукописей и главным библиотекарем Государственной публичной библиотеки им. М. Е. Салтыкова-Щедрина (г. Ленинград). Большую работу выполнила А. С. Ляпунова по подготовке каталогов произведений М. И. Глинки, М. А. Балакирева, С. М. Ляпунова и других классиков русской музыки. Она — автор многих статей, очерков и комментариев, посвященных творчеству этих композиторов.

Ближайшим и любимым учеником А. М. Бутлерова, замечательным представителем бутлеровской школы отечественной химии был двоюродный брат А. М. Ляпунова Александр Михайлович Зайцев, обогативший химическую науку синтезом ряда классов органических соединений и во многом способствовавший развитию теории химического строения.

А. М. Зайцев родился 20 июня 1841 г. в Казани, в семье Михаила Саввича Зайцева и Натальи Васильевны Ляпуновой — сестры М. В. Ляпунова. Именно Михаил Васильевич Ляпунов убедил отдать способного мальчика в гимназию и подготовил своего племянника к экзаменам. Окончив Казанскую гимназию А. М. Зайцев поступил на юридический факультет Казанского университета. Здесь юноша услышал блестящие лекции молодого А. М. Бутлерова и увлекся химией. Окончив университетский курс в 1862 г. А. М. Зайцев отправился в длительную поездку за границу. В Марбурге в лаборатории известного химика А. В. Кольбе Зайцев выполнил свою первую работу «О диамидосалициловой кислоте» и приступил к экспериментальному



Родословная таблица круга семьи Ляпуновых

Подпись к родословной таблице круга семьи Ляпуновых

Цифры в квадратах соответствуют мужчинам, в кругах — женщинам. Линии сверху цифр соединяют квадраты и круги, соответствующие братьям и сестрам. Линии снизу цифр отражают брачные узы. Ответвления от этих линий вниз ведут к цифрам, относящимся к представителям следующего поколения (дети, рожденные в данном браке).

При расшифровке цифр указан характер родства к А. М. Ляпунову его близких родственников.

При составлении родословной таблицы использованы различные биографические источники, а также работа Т. К. Лепина, Я. Я. Луса и Ю. А. Филиппченко «Действительные члены Академии наук за 80 лет (1846—1924)» // Известия Бюро по евгенике. Л., 1925. С. 3—82.

А

1. Александр Шипилов — помещик Симбирской губернии, дед по матери
2. Жена Александра Шипилова, урожденная Мессинг, бабка по матери
3. Михаил Алексеевич Сеченов — помещик Симбирской губернии, дед жены
4. Жена Михаила Алексеевича Сеченова, бабка жены
5. Василий Александрович Ляпунов (?—1847) — бухгалтер, затем — синдик Казанского университета, дед по отцу
6. Анастасия Евсеевна Ляпунова — жена В. А. Ляпунова, бабка по отцу

Б

1. Софья Александровна Ляпунова, урожденная Шипилова (?—1879), мать
2. Иван Михайлович Сеченов (1829—1905) — физиолог, почетный академик, дядя жены
3. Андрей Михайлович Сеченов, дядя жены
4. Алексей Михайлович Сеченов, дядя жены
5. Анна Михайловна Сеченова (по мужу — Михайловская), тетка жены
6. Рафаил Михайлович Сеченов, отец жены
7. Екатерина Васильевна Сеченова (1834—1912), урожденная Ляпунова, мать жены
8. Михаил Васильевич Ляпунов (1820—1868) — астроном, отец
9. Глафира Васильевна Ляпунова, тетка по отцу
10. Марфа Васильевна Ляпунова, тетка по отцу
11. Елизавета Васильевна Ляпунова, тетка по отцу
12. Наталья Васильевна Зайцева (1819—1847), урожденная Ляпунова, тетка по отцу
13. Михаил Саввич Зайцев — казанский купец
14. Виктор Васильевич Ляпунов (1817—?) — врач, дядя
15. Жена В. В. Ляпунова
16. Андрей Васильевич Ляпунов (?—1842), дядя
17. Александр Алексеевич Крылов — офицер, герой Отечественной войны 1812 года
18. Мария Михайловна Крылова, урожденная Филатова
19. Федор Михайлович Филатов
20. Жена Ф. М. Филатова

В

- 1, 2. Дочери М. В. и С. А. Ляпуновых, умершие в детстве, сестры

3. Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918) — математик и механик, академик
4. Наталья Рафаиловна Ляпунова (1858—1918), урожденная Сеченова — жена
5. Сергей Михайлович Ляпунов (1859—1924) — пианист, композитор и дирижер, профессор Петербургской консерватории, брат
6. Евгения Платоновна Ляпунова (внучка составителя словаря В. И. Даля) — жена С. М. Ляпунова
7. Сын М. В. и С. А. Ляпуновых (1864—1866), брат
8. Дочь М. В. и С. А. Ляпуновых (1867—1870), сестра
9. Борис Михайлович Ляпунов (1862—1943) — филолог, академик, брат
10. Александр Михайлович Зайцев (1841—1910) — химик, профессор Казанского университета
11. Константин Михайлович Зайцев — химик
12. Жена К. М. Зайцева
13. Михаил Михайлович Зайцев (1845—1904) — химик
14. Жена Н. В. Ляпунова
15. Дочь В. В. Ляпунова
16. Николай Викторович Ляпунов
17. Софья Викторовна Крылова, урожденная Ляпунова
18. Николай Александрович Крылов — помещик Симбирской губернии
19. Петр Федорович Филатов
20. Жена П. Ф. Филатова
21. Нил Федорович Филатов (1847—1902) — врач, профессор медицины

Г

1. Юрий Сергеевич Ляпунов — ученый-филолог, племянник
2. Анастасия Сергеевна Ляпунова (1903—1973) — музыковед и текстолог, племянница
- 3—7. Сыновья и дочери С. М. и Е. П. Ляпуновых, племянники и племянницы
8. Елена Константиновна Ляпунова, урожденная Зайцева (1871—1952)
9. Александр Константинович Зайцев — математик, профессор Петербургского политехнического института
10. Жена А. Н. Ляпунова
11. Андрей Николаевич Ляпунов
12. Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) — математик, механик и кораблестроитель, академик
13. Жена А. Н. Крылова, урожденная Филатова
14. Владимир Петрович Филатов (1875—1956) — ученый и врач-офтальмолог, академик
15. Дмитрий Петрович Филатов (1876—1943) — эмбриолог, академик

Д

1. Алексей Андреевич Ляпунов (1911—1973) — математик, член-корреспондент АН СССР
- 2, 3. Сыновья А. Н. Крылова
4. Анна Алексеевна Капица, урожденная Крылова
5. Петр Леонидович Капица (1894—1984) — физик, академик

исследованию окисления тиоэфиров. В 1864—1865 гг. он работал в Париже в Высшей медицинской школе, в лаборатории А. Бюрда. В 1866 г. Лейпцигский университет присудил А. М. Зайцеву степень доктора философии за работу «Об окисях тиоэфиров».

Вскоре Зайцев был утвержден экстраординарным, а через год — ординарным профессором по кафедре органической химии Казанского университета. После перехода А. М. Бутлерова в Петербургский университет А. М. Зайцев стал заведующим кафедрой и лабораторией органической химии.

До конца своей жизни А. М. Зайцев оставался профессором Казанского университета, отклоняя предложения о переезде в другие научные центры. Так, в 1907 г. ему было предложено звание академика, но А. М. Зайцев не пожелал расстаться со своей лабораторией и отклонил это заманчивое и почетное предложение. С 1885 г. А. М. Зайцев — член-корреспондент Петербургской академии наук, а в 1905 г. он был избран президентом Русского физико-химического общества, являясь одновременно председателем отделения химии. Умер А. М. Зайцев в Казани 19 августа 1910 г.

Научное наследие А. М. Зайцева необычайно широко и разнообразно. Большую известность получили результаты исследований сернистых соединений. Другим направлением работ А. М. Зайцева была экспериментальная разработка теории строения на основе глубокого и всестороннего изучения изомерии бутановых спиртов. Позднее А. М. Зайцев разработал исключительно плодотворный метод синтеза непредельных третичных спиртов. При этом удалось выяснить механизм реакций и решить вопрос о характере промежуточных соединений. Этот же способ был распространен Зайцевым и на синтезы предельных спиртов. На основе этих работ позднее удалось осуществить синтез оксикислот, синтезировать широкий круг органических соединений, включая терпены, гормоны, витамины и многие другие вещества. Исследования А. М. Зайцева положили начало известным работам французских химиков Ф. Барбье и В. Гриньяра.

Большое теоретическое значение имели исследования А. М. Зайцева о порядке присоединения элементов галогеноводородов к непредельным углеводородам и отщепление этих элементов от алкилгалогенидов («правило Зайцева»). В его лаборатории было получено и изучено большое количество многоатомных спиртов, окисей, непредельных кислот, оксикислот и лактонов — нового класса органических соединений, открытого А. М. Зайцевым.

А. М. Зайцев создал школу химиков, продолжившую славы традиции бутлеровской школы. Он стал учителем многих известных русских химиков. Как отметил академик А. Е. Арбузов, по количеству учеников А. М. Зайцев занимает одно из первых мест в истории отечественной химии [141].

Учеником А. М. Бутлерова был также брат А. М. Зайцева Михаил Михайлович Зайцев. Учился он в Петербургском технологическом институте и Казанском университете, а продолжил подготовку в лаборатории А. В. Г. Кольбе в Лейпцигском университете. За выполненную там работу М. М. Зайцеву была присуждена ученая степень доктора философии (1872 г.). В 1873—1878 гг. М. М. Зайцев работал в Казанском университете, а позднее был помощником директора стеаринового и мыловаренного завода в Казани.

Научные работы М. М. Зайцева были посвящены изучению каталитических реакций восстановления. М. М. Зайцев первым применил метод жидкофазной гидрогенизации органических соединений. Им были получены первый непредельный третичный спирт — аллилдиметилкарбинол и непредельная кислота. На основе работ М. М. Зайцева С. А. Фокин впервые в России осуществил промышленную гидрогенизацию жиров.

Всему миру известно имя великого русского физиолога, натуралиста и мыслителя Ивана Михайловича Сеченова. А. М. Ляпунова и И. М. Сеченова связывали не только родственные отношения (Сеченов был дядей жены А. М. Ляпунова Н. Р. Сеченовой). Склонность великого физиолога к физике, химии и особенно к математике, проявлявшаяся как в юном, так и в зрелом возрасте, сближала этих двух незаурядных людей. «Путь, которым идет современная физиология (не бесплодный), требует знакомства с высшей математикой», — писал И. М. Сеченов [210].

В Петербургском инженерном училище Сеченов был учеником Остроградского. Позднее, уже будучи профессором Петербургского университета, И. М. Сеченов пришел к мысли о целесообразности расширения своих знаний в области математики. Вот почему 54-летний профессор стал брать уроки у молодого подающего надежды математика А. М. Ляпунова. Несомненно огромное влияние, которое оказывало на Ляпунова общение с замечательным физиологом, имя которого вызывало страх у ретроградов и стало символом новых представлений о человеческом мозге, психике, о самой человеческой личности, ее месте и назначении [229].

Замечательный вклад в отечественную математику, механику и кораблестроение внес двоюродный племянник А. М. Ляпунова академик Алексей Николаевич Крылов, матерью которого была Софья Викторовна Ляпунова. По традиции А. Н. Крылова ждала судьба военного (его дед Александр Алексеевич был боевым офицером, героем Отечественной войны 1812 года, а его отец — Николай Александрович также был офицером, участником англо-франко-русской войны 1855—1856 гг.). Однако решающее влияние на Крылова оказали родственники — Филатовы, Ляпуновы, Сеченовы, среди которых были замечательные врачи, музыканты, ученые. Незаурядным человеком был и отец А. Н. Крылова, обладавший литературным даром, и после оставления военной службы опубликовавший ряд трудов по истории края¹.

Двоюродный брат А. М. Ляпунова Николай Викторович Ляпунов стал дедом другого выдающегося отечественного математика — члена-корреспондента АН СССР Алексея Андреевича Ляпунова. А. А. Ляпунов был сыном Андрея Николаевича — также математика по образованию, работавшего в путевом ведомстве, а затем — в Институте биофизики. Биография А. А. Ляпунова типична для советских людей старшего поколения. Окончив среднюю школу, он учился в Московском университете. Научную деятельность начал в Институте математики имени В. А. Стеклова. Ученик Н. Н. Лузина и П. С. Новикова А. А. Ляпунов посвятил свои первые исследования дескриптивной теории множеств. Совместная работа с Н. Н. Лузиным, П. С. Но-

¹ См. предисловие к книге [71], написанное А. П. Капицей (с. 5—13).

виковым, А. Н. Колмогоровым, М. А. Лаврентьевым оказала глубокое влияние на молодого ученого.

Во время Великой Отечественной войны командир взвода гвардейской дивизии А. А. Ляпунов с оружием в руках защищает Родину. За боевые заслуги он был награжден орденами и медалями. После окончания войны А. А. Ляпунов развернул активную научно-исследовательскую деятельность, защитил докторскую диссертацию, вел преподавательскую работу в Московском государственном университете.

Вскоре А. А. Ляпунов стал одним из основателей и лидеров советской школы кибернетики. В сферу научных интересов А. А. Ляпунова входили теория множеств и теория функций, вычислительная математика, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование и математическая лингвистика, геофизика и биология, науковедение, вопросы педагогики. Среди его учеников — большая группа отечественных ученых — С. В. Яблонский, Н. П. Бусленко, О. Б. Лупанов и другие.

Переехав в Новосибирск, А. А. Ляпунов возглавил отдел теоретической кибернетики Института математики, занял должность профессора и заведующего кафедрой Новосибирского университета. В 1964 г. А. А. Ляпунов был избран членом-корреспондентом АН СССР.

Родственные узы связывали семьи Ляпуновых, Сеченовых и Крыловых с семьей Филатовых, также давшей отечеству замечательных ученых. Виднейшим русским врачом, одним из основоположников педиатрии в России был Нил Федорович Филатов, двоюродный брат Н. А. Крылова (жена Крылова — Софья Викторовна Ляпунова — двоюродная сестра Александра Михайловича).

Н. Ф. Филатов доказал самостоятельность заболевания ветряной оспы (1877 г.), описал скарлатинозную краснуху и инфекционный мононуклеоз — так называемую болезнь Филатова (1885), впервые в России применил серотерапию дифтерии (1894), установил ранний признак кори, наблюдал и описал поражение сердца при скарлатине (1895), выполнил ряд пионерских исследований в области детской невропатологии. В 1891 г. Н. Ф. Филатов становится профессором и заведующим первой кафедрой детских болезней Московского университета. Он основал Общество детских врачей (1892 г.) и создал русскую научную школу педиатров.

Другим знаменитым ученым-медиком был племянник Н. Ф. Филатова Владимир Петрович Филатов — выдающийся советский офтальмолог и хирург. С 1911 г. В. П. Филатов — профессор и заведующий кафедрой глазных болезней Новороссийского (Одесского) университета, а в 1936—1950 гг. В. П. Филатов был директором организованного им Института экспериментальной офтальмологии (с 1965 г. — Одесский НИИ глазных болезней и тканевой терапии им. академика В. П. Филатова). Среди наиболее известных достижений В. П. Филатова — разработка нового метода пластической хирургии на круглом кожном стебле (так называемый «филатовский стебель»), создание новых методов полной и частичной сквозной пересадки роговицы и разработка специальных инструментов для практической реализации этих методов, применение для пересадки трупных тканей глаза.

Советская медицинская наука обязана В. П. Филатову созданием принципиально нового метода лечения — тканевой терапии, применяемого теперь в различных областях медицины, и нового научного направления — учения о биогенных стимуляторах. Велика была роль В. П. Филатова в воспитании молодой смены медиков-офтальмологов, в организации научных исследований в области офтальмологии в нашей стране.

Сын В. П. Филатова Сергей Владимирович также стал известным советским офтальмологом, доктором медицинских наук.

Большой вклад в науку внес брат В. П. Филатова Дмитрий Петрович Филатов — выдающийся советский эмбриолог. После окончания Московского университета в 1900 г. Д. П. Филатов работал ассистентом Института сравнительной анатомии Московского университета и Московского сельскохозяйственного института, позднее преобразованного в Московскую сельскохозяйственную академию. С 1924 г. Д. П. Филатов — руководитель лаборатории механики развития Института экспериментальной биологии (впоследствии — Институт цитологии, гистологии и эмбриологии АН СССР). В 1931—1941 гг. Д. П. Филатов руководил лабораторией экспериментальной эмбриологии Института экспериментального морфогенеза Московского университета. Позднее Д. П. Филатов стал профессором Московского университета, возглавил организованную им кафедру эмбриологии МГУ. Основные труды Д. П. Филатова были посвящены экспериментальному исследованию закономерностей индивидуального развития и изучению путей эволюции формообразовательных взаимодействий частей развивающегося зародыша.

Родственником Лягуновых (через Анну Алексеevну Крылову) является замечательный советский физик Петр Леонидович Капица. В течение многих лет П. Л. Капица был директором основанного им Института физических проблем АН СССР и профессором Московского физико-технического института. Перечень выдающихся открытий академика П. Л. Капицы занял бы много страниц. Достаточно упомянуть открытие сверхтекучести гелия, разработку нового метода сжижения воздуха с помощью цикла низкого давления, открытие скачка температуры на границе раздела жидкий гелий—твердое тело (так называемый «скачок Капицы»), разработку гидродинамической теории смазки, обнаружение плазменного шнура при высокочастотном разряде в плотных газах, открывшее новое направление исследований, направленных на осуществление термоядерного синтеза. П. Л. Капица был удостоен Государственных премий СССР, Нобелевской премии по физике, он являлся членом более 30 иностранных академий. П. Л. Капица активно участвовал в Пагуошском движении ученых за мир, против ядерной угрозы человечеству.

Литература

1. Важнейшие опубликованные работы А. М. Ляпунова и собрания его сочинений¹

Устойчивость равновесия и движения механических систем с конечным числом степеней свободы

1. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1888. Т. 1, № 1. С. 7—60.
2. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Там же. 1889. Т. 2, № 1—2. С. 1—94.
3. Общая задача об устойчивости движения: Дис. . . докт. мат. наук. Харьков. 1892. XI. 250 с.
4. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сб. 1893. Т. 17, вып. 2. С. 253—333.
5. К вопросу об устойчивости движения: Дополнение к сочинению «Общая задача об устойчивости движения». Харьков. 1892 // Зап. Харьк. ун-та. 1893. Кн. 1. С. 99—104.
6. Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum // J. mat. pures et appl. Sér. 5. 1897. Т. 3. P. 81—94.

Некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений

7. Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1896. Т. 5, № 3—4, 5—6. С. 190—254.
8. Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques // C. r. Acad. sci. Paris, 1896. Т. 123. P. 1248—1252.
9. Sur une équation différentielle linéaire du second ordre // Ibid. 1899. Т. 128. P. 911—913.
10. Sur une équation transcendante et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques // Ibid. P. 1085—1088.

¹ В настоящем списке представлены важнейшие работы А. М. Ляпунова. Не приводятся сведения о лекциях и учебных курсах, о полемических статьях, некрологах, отзывах, переводах, перепечатках, отдельных оттисках и рецензиях. Все эти сведения, а также рефераты работ А. М. Ляпунова в хронологическом порядке приведены в библиографическом указателе [47].

11. Sur une série relative à la théorie d'une équation différentielle linéaire du second ordre // Ibid. 1900. Т. 131. P. 1185—1188.
12. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques // Зап. Акад. наук по физ.-мат. отд-нию. Сер. 8. 1902. Т. 13, № 2. С. 1—70.

Фигуры равновесия вращающейся жидкости

13. Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes // Зап. Акад. наук по физ.-мат. отд-нию. Сер. 8. 1903. Т. 14, № 7. С. 1—37.
14. Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes // Там же. 1904. Т. 20, № 10. С. 1—66.
15. Sur un problème de Tchébycheff // Там же. 1905. Т. 17, № 3. С. 1—32.
16. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. СПб.: Типография Академии наук, 1906—1914. Ч. 1—4.
17. Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation // Ann. Scientif. de l'Éc. norm. supér. Sér. 3. 1909. Т. 26. P. 473—483.
18. Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes d'un liquide homogène en rotation // Изв. Акад. наук. Сер. 6. 1916. Т. 10, № 3. С. 139—168.
19. Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène // Там же. № 7. С. 471—502; № 8. С. 589—620.
20. Sur une formule d'analyse // Там же. 1917. Т. 11, № 2. С. 87—118.
21. Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Л.: Изд-во АН СССР, 1925—1927. Ч. 1—2.
22. О форме небесных тел. Вступительная лекция курса, читаемого в Новороссийском университете в 1918 г. // Изв. АН СССР. Сер. 7. Отд-ние физ.-мат. наук. 1930. № 1. С. 25—41.

Устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкости

23. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Рассуждение на степень магистра прикладной математики. СПб.: Тип. Академии наук, 1884. XV. 109 с.
24. Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation // Зап. Акад. наук по физ.-мат. отд-нию. Сер. 8. 1908. Т. 22, № 5. С. 1—140.

Теория потенциала и задача Дирихле ²

25. Некоторое обобщение формулы Лежень Дирихле для потенциальной функции эллипсоида на внутреннюю точку //

² Переводы работ [28]—[31] на русский язык, выполненные О. Д. Каневской и Н. О. Рахленко, приведены в [43].

- Сообщ. и протокол, засед. Мат. о-ва при Харьк. ун-те. Сер. 1. 1885. № 2. С. 120—130.
26. О теле наибольшего потенциала // Там же. 1886. № 2. С. 63—73.
 27. Sur le potentiel de la double couche // C. r. Acad. sci. Paris. 1897. Т. 125. P. 694—696.
 28. Sur le potentiel de la double couche // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1897. Т. 6, № 2—3. С. 129—138.
 29. Sur certaines questions se rattachent au problème de Dirichlet // C. r. acad. sci. Paris. 1897. Т. 125. P. 808—810.
 30. Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet // J. mat. pur. et appl. (J. Liouville). Sér. 3. 1898. Т. 4. P. 241—311.
 31. Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1902. Т. 7. № 4—6. С. 229—252.

Теория вероятностей ³

32. Sur une proposition de la théorie des probabilités // Изв. АН. Сер. 5. 1900. Т. 13, № 4. С. 359—386.
33. Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité // Зап. Акад. наук по физ.-мат. отд-нию. Сер. 8. 1901. Т. 12, № 5. С. 1—24.
34. Sur un théorème du calcul des probabilités // C. r. acad. sci. Paris. 1901. Т. 132. P. 126—128.
35. Une proposition générale du calcul de probabilités // Ibid. P. 814—815.

Разные вопросы

36. О равновесии тяжелых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосуде определенной формы: Дис. . . . канд. мат. наук // Журн. Русск. физ.-хим. о-ва. 1881. Т. 13, вып. 5. С. 197—238; Вып. 6. С. 273—307.
37. О потенциале гидростатических давлений // Там же. Вып. 8. С. 349—376.
38. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1893. Т. 4, № 1—2. С. 81—85.
39. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Там же. 1894. Т. 4, № 3. С. 123—140.
40. О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны // Тр. Отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. 1896. Т. 8, вып. 1. С. 1—23.

Собрания сочинений

41. Общая задача об устойчивости движения. 2-е изд. / При ред. участии Г. Мюнтц. Л.; М.: ГОНТИ, 1935. 386 с.
42. Избранные труды / Ред. акад. В. И. Смирнова. Комментар. С. Н. Бернштейна, Л. Н. Срегенского и Н. Г. Чегаева. Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 540 с.

³ Переводы работ [32], [33] на русский язык, выполненные Н. А. Салоговым, приведены в [42].

43. Работы по теории потенциала / Пер. с фр. О. Д. Каневской и Н. О. Рахленко. Ред. и примеч. Н. И. Ахизера и Г. И. Дринфельда. Биографич. очерк В. А. Стеклова. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. 178 с.
44. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. 471 с.
45. Собрание сочинений. В 5 т. М.: Изд-во АН СССР, 1954—1965.
46. Лекции по теоретической механике // Киев: Наукова думка, 1982. 632 с.

II. Работы о жизни и деятельности А. М. Ляпунова⁴

47. Александр Михайлович Ляпунов. Библиография / Сост. А. М. Лукомская. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1953. 268 с.
48. Александр Михайлович Ляпунов // Тр. ААН СССР. 1946. Т. 2, вып. 5. С. 77—78.
49. Александр Михайлович Ляпунов: Научные труды, в большинстве не опубликованные, и материалы к ним. Тр. ААН СССР. 1959. Т. 4, вып. 16. С. 12—14.
50. *Басов В. П.* О работе А. М. Ляпунова «Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения» // Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. С. 3—12.
51. *Билимович А. Д.* А. М. Ляпунов в Одессе // Publication de l'institut mathématique (Beograd. Académie Serbe des Sciences). 1956. Т. IX. Р. 1—7.
52. *Боголюбов А. Н.* Математики механики. Киев: Наукова думка, 1983. С. 300—301.
53. *Витензон И. Г.* Работы А. М. Ляпунова по механике в харьковский период его деятельности 1885—1902 гг. // Зап. мат. отд-ния физ.-мат. ф-та и Харьк. мат. о-ва. 1956. Т. 24. С. 75—89.
54. *Гаврилов М. Г.* Про роботи О. М. Ляпунова з теорії фігур рівноваги однорідної рідини, що обертається // Іст.-мат. збірник. Київ. 1959. Вип. 1. С. 119—132.
55. *Гнеденко Б. В.* О работах А. М. Ляпунова по теории вероятностей // Ист.-мат. исслед. М.: Физматгиз. 1959. Вып. 12. С. 135—160.
56. *Гнеденко Б. В.* Розвиток теорії ймовірності у роботах О. М. Ляпунова // Іст.-мат. збірник. Київ. 1959. Вип. 1. С. 133—160.
57. *Григорьян А. Т.* А. М. Ляпунов. К 100-летию со дня рождения // Тр. Ин-та истории естествознания и техники АН СССР. 1957. Т. 19. С. 284—289.
58. *Григорьян А. Т., Фрадлин Б. Н.* История механики твердого тела. М.: Наука, 1982. С. 201—214.
59. *Григорьян А. Т., Фрадлин Б. Н.* Механика в СССР. М.: Наука, 1977. С. 41—55.
60. *Добровольский В. А.* Об одной рукописи А. М. Ляпунова // Тез. докл. Третьего республ. симпозиума по дифференциальным и интегральным уравнениям 1—3 июня 1982 г. Одесса. 1982. С. 5—7.

⁴ Полный список работ о жизни и деятельности А. М. Ляпунова, опубликованных до 1952 г., приведен в [47].

61. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1968. С. 321—362.
62. *Еругин Н. П.* Первый метод Ляпунова // Там же. С. 67—86.
63. *Ильченко В. И.* Об аксиоматической теории прямого метода А. М. Ляпунова // Тр. Комиссии по истории естествознания и техники АН Лят.ССР. М., 1969. С. 74—79.
64. Исследования по истории механики. М.: Наука, 1981. 311 с.
65. *Ишлинский А. Ю.* Выдающийся математик и механик: (к 100-летию со дня рождения А. М. Ляпунова) // Наука и жизнь. 1957. № 6. С. 35—36.
66. *Гшлінський О. Ю., Погребиський Й. Б.* Внесок О. М. Ляпунова у динаміку твердого тіла // Іст.-мат. збірник. Київ. 1959. Вип. 1. С. 140—150.
67. *Киро С. Н.* О неопубликованной рукописи А. М. Ляпунова: Compléments au mémoire: «Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes» // Очерки истории математики и механики. М., 1963. С. 67—85.
68. *Кіро С. М.* Математика в Одеському (Новоросійському) університеті // Іст.-мат. збірник. Київ. 1961. Вип. 2. С. 22—42.
69. *Кіро С. М., Шульберг О. М.* До біографії О. М. Ляпунова // Іст.-мат. збірник. Київ. 1959. Вип. 1. С. 157—165.
70. *Крылов А. Н.* Воспоминания и очерки. М.; Л.: Судостроение, 1956. С. 422—430.
71. *Крылов А. Н.* Мои воспоминания. Л.: Судостроение, 1984. С. 37—43.
72. *Крылов А. Н.* Памяти А. М. Ляпунова // Изв. Российской Академии наук. Сер. 6. 1919. Т. 13, № 1—11. С. 389—394.
73. *Ляпунов Б. М.* Краткий очерк жизни и деятельности А. М. Ляпунова // Изв. АН СССР. Отд.-ние физ.-мат. 1930. № 1.
74. *Маркуш И. И.* Из переписки Н. М. Крылова с В. А. Стекловым // Из истории развития физ.-мат. наук. Киев, 1981. С. 21—30.
75. *Медведев Ф. А.* Вклад А. М. Ляпунова в теорию интеграла Стильтьеса // Іст.-мат. дослід. 1961. Вип. 14. С. 211—234.
76. *Медуни А. Е., Хргиан А. Х.* Исследования в России по теории фигуры Земли // История и методология естественных наук. 1965. Вип. 3. С. 187—191.
77. *Меркулова Н. М., Соколов П. Б.* О научном наследии А. М. Ляпунова // История и методология естественных наук. 1970. Вип. 9. С. 90—109.
78. *Митропольский Ю. А., Зубов В. И., Мартынюк А. А.* Александр Михайлович Ляпунов: (к 125-летию со дня рождения) // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 4. С. 536—537.
79. *Мишикіс А. Д.* О. М. Ляпунов — творец теорії стійкості руху // Іст.-мат. збірник. Київ. 1959. Вип. 1. С. 108—118.
80. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова // Прикладная математика. 1981. Т. 1, № 6.
81. *Орлов А. Я.* Памяти академика А. М. Ляпунова: Доклад на заседании Новороссийского о-ва естествоиспытателей 14.03.1920 г. // Зап. Одес. о-ва естествоиспытателей. 1927. Т. 43. С. 17—19.
82. Памяти академика А. М. Ляпунова // Зап. Одесского о-ва естествоиспытателей. Одесса, 1927. Т. 43.

83. Перечень рукописей работ А. М. Ляпунова (преимущественно неопубликованных) // Тр. ААН СССР, 1959. Т. 4, № 16. С. 12.
84. Покушение на самоубийство проф. Ляпунова // Газ. Одесские новости, 1918, 3 ноября.
85. *Полак Л. С.* А. М. Ляпунов: (к 100-летию со дня рождения) // Вопр. истории естествознания и техники. 1957. Вып. 5. С. 31—38.
86. *Рапопорт Г. М.* Про деякі математичні методи в роботах О. М. Ляпунова з механіки // Іст.-мат. збірник. Київ. 1959. Вип. 1. С. 151—156.
87. *Румянцев В. В.* Великий русский ученый А. М. Ляпунов: (к 100-летию со дня рождения) // Вест. АН СССР. 1957. № 6. С. 44—49.
88. *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1968. С. 7—66.
89. *Смирнов В. И.* Александр Михайлович Ляпунов: биографический очерк // А. М. Ляпунов. Собр. соч. В 5 т. М.: Изд. АН СССР, 1954. Т. 1. С. 5—15.
90. *Смирнов В. И.* Из переписки П. Апеля, Ж. Адамара, Г. Буркхардта, В. Вольтерра, Б. Дюгема, К. Жордана, А. Пуанкаре и Н. Радо с академиком А. М. Ляпуновым // Тр. Ин-та истории естествознания и техники АН СССР. 1957. Т. 19. С. 690—719.
91. *Смирнов В. И.* Научный архив А. М. Ляпунова по вопросам устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. Третьего Всесоюз. мат. съезда. М., 1956. Т. 1. С. 236.
92. *Смирнов В. И., Сологуб В. С.* А. М. Ляпунов: (очерк деятельности) // История отечественной математики. 1801—1917. Киев: Наукова думка, 1967. Т. 2. С. 340—342.
93. *Смирнов В. И., Сологуб В. С.* Исследования А. М. Ляпунова по теории устойчивости движения // Там же. С. 342—349.
94. *Смирнов В. И., Сологуб В. С.* Работы А. М. Ляпунова по теории фигур равновесия вращающейся жидкости // Там же. С. 350—355.
95. *Смирнов В. И., Сологуб В. С.* Работы А. М. Ляпунова по теории потенциала, теории вероятностей и другие // Там же. С. 355—362.
96. *Смирнов В. И., Юшкевич А. П.* Переписка А. М. Ляпунова с А. Пуанкаре и П. Дюэмом // Ист.-мат. исслед. 1935. Вып. 29. С. 265—284.
97. *Соболев С. Л.* О работах А. М. Ляпунова по теории потенциала // Прикладная математика и механика. 1957. Вып. 3. С. 306—308.
98. *Сретенский Л. Н.* Неопубликованные рукописи А. М. Ляпунова // Тр. Третьего Всесоюз. мат. съезда. М., 1958. Т. 3. С. 490—500.
99. *Старжинский В. М.* О педагогическом наследстве Ляпунова // Тез. докл. Третьего республ. симпоз. по дифференциальным и интегральным уравнениям 1—3 июня 1982 г. Одесса, 1982. С. 7—8.
100. *Стеклов В. А.* Александр Михайлович Ляпунов // Изв. Российской Академии наук. 1919. Т. 13, № 8—11. С. 367—388.

101. *Стеклов В. А.* Александр Михайлович Ляпунов // Ляпунов А. М. Работы по теории потенциала. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. С. 14.
102. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1969. С. 253—255, 281, 288, 308.
103. Столетие со дня рождения А. М. Ляпунова: О торжественном заседании, посвященном 100-летию со дня рождения, состоявшемся 6.06.1957 г. в Московском университете // Вест. АН СССР. 1957. № 8. С. 115—116.
104. Теория устойчивости Ляпунова // История математики XIX века / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1987. Т. 3. С. 172—179.
105. *Цесевич В. П.* А. М. Ляпунов. М.: Знание, 1970. 46 с.
106. *Цесевич В., Шульберг А.* Академик Александр Михайлович Ляпунов. Одесса: Одесское обл. изд-во, 1951. С. 55.
107. *Шибанов А. С.* Александр Михайлович Ляпунов. М.: Молодая гвардия, 1985. 336 с.
108. *Шибанов А.* Познавший тайну прочности движения // Техника и наука. 1982. № 8. С. 24—28.
109. *Ятаев М.* Великий русский математик: (к 100-летию со дня рождения А. М. Ляпунова) // Вест. АН КазССР. 1957. № 9. С. 118—121.

III. Архивы

110. Государственная публичная библиотека им. М. Е. Салтыкова-Щедрина (г. Ленинград). Отдел рукописей. Архив С. М. Ляпунова. Ф. 451. Оп. 1. Автобиография.
111. Там же. Письмо М. В. Ляпунова к жене.
112. Там же. Записные книжки.
113. Заявление о мерах немедленного облегчения положения печати (совместно с А. А. Марковым): (Протокол общего собрания Акад. наук 24 марта 1905 г., § 104) // ЛО ААН СССР. Ф. 1. Оп. 1^а. Д. 152. Л. 69—69 об.
114. Об участии А. М. Ляпунова в Комиссии по вопросу о реформе календаря в России: (Протокол общего собрания Акад. наук 8 октября 1905 г., § 206) // Там же. Л. 114 об.
115. Предложение А. М. Ляпунова совместно с другими академиками о дальнейшей судьбе Физической обсерватории и отношении к ней Академии наук: (Протокол заседания Физ.-мат. отд-ния Акад. наук 25 апреля 1908 г.) // Там же. Д. 155. Л. 162—162 об.
116. Мнение А. М. Ляпунова о мерах к уничтожению возможных эпидемий по случаю военных действий: (Протокол общего собрания Акад. наук 7 марта 1915 г., с. 33, § 56) // Там же. Д. 162. Л. 131.
117. Протокол заседания Физ.-мат. отд-ния Акад. наук 4 марта 1915 г., с. 74, § 163 // Там же. Л. 182 об.—183.
118. Об учреждении при Академии наук Математического кабинета им. П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова: (Протокол общего собрания Акад. наук 8 марта 1919 г., § 78) // Там же. Д. 166. Л. 46 об.—47.
119. ЛО ААН СССР. Ф. 257. Оп. 1, № 10.
120. Там же. № 20.
121. Там же. № 31.

122. Там же. № 35. Л. 2, 3.
123. Там же. № 36. Л. 1, 2.
124. Там же. № 37. Л. 1, 2.
125. Там же. № 38.
126. Там же. № 42.
127. Там же. № 45. Л. 1, 2, 3—6, 9—12, 13—16.
128. Там же. № 47. Л. 1, 2.
129. Там же. № 52. Л. 1—3.
130. Там же. № 54. Л. 7.
131. Там же. № 66. Л. 3, 4.
132. Там же. Оп. 2. № 1. Л. 4—6.
133. Там же. № 4. Л. 1.
134. Там же. № 10.
135. Там же. Ф. 265. Оп. 6, № 384. Л. 1, 2.

IV. Другие использованные источники

136. *Алексеев В. Г.* Ответ на вопросы департамента народного просвещения // Журн. м-ва нар. просвещения. 1915. Ч. 55, февраль. С. 102, 104.
137. *Алисенкова А., Балика Д.* Нижегородские годы семьи Ульяновых (1863—1869). Горький: Волго-Вятское кн. изд-во. 1981.
138. *Анапольский Л. Ю., Иртегов В. Д., Матросов В. М.* Способы построения функций Ляпунова // Общая механика: (Итоги науки и техники). М., 1975. Т. 2. С. 53—113.
139. *Аппельрот Г. Г.* Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., 1893. 112 с.
140. *Аппельрот Г. Г.* По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской «Sur le problème de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe» // *Mat. сб.* 1892. Т. 16, вып. 3, 4. С. 483—507, 592—596.
141. *Арбузов А. Е.* Александр Михайлович Зайцев // Люди русской науки. М.; Л., 1948. С. 322—326.
142. *Аувэрс А.* Письмо по поводу издания собрания сочинений Л. Эйлера // *Изв. Академии наук. Сер. 6.* 1908. Т. 2, № 1. С. 3.
143. *Баклунд О. А.* Сэр Джордж Дарвин. Некролог // Там же. 1913. Т. 7, № 1. С. 1—2.
144. *Блехман И. И., Пановко Я. Г.* Прикладные проблемы теории колебаний // *Механика в СССР за 50 лет.* М.: Наука, 1968. С. 89—113.
145. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
146. *Боборыкин П. Д.* В путь—дорогу (Библиотека для чтения). 1864. С. 94.
147. *Браецкий Н.* Увековечить память А. М. Ляпунова. Газета «Знамя коммунизма». 23.06.1956 г. № 123 (4228).
148. *Бурносос С. В., Козлов Р. И.* О построении вектор-функции Ляпунова и потенциальной системы сравнения // *Метод функций Ляпунова и его приложения.* Новосибирск: Наука, 1984. С. 171—188.
149. *Веселовский С. В.* Ономастикон. М.: Наука, 1974. С. 190.
150. *Голицын Б. Б.* Ответ на вопросы департамента народного просвещения // Журн. м-ва нар. просвещения. 1915. Ч. 56, март. С. 6.

151. *Голыцын В. Б. Ж. А. Пуанкаре (1854—1912). Некролог // Изв. Акад. наук. 1912. Сер. 6. Т. 6, № 12.*
152. *Головщиков К. П. Г. Демидов и история основанного им в Ярославле училища, 1803—1886. Ярославль, 1887.*
153. *Горький М. Собр. соч. В 30 т. М., 1952. Т. 17. С. 31, 32.*
154. *Гродзенский С. Я. Андрей Андреевич Марков. М.: Наука, 1987. 256 с.*
155. *Гюнтер Н. М. О научных достижениях В. А. Стеклова // Памяти В. А. Стеклова: Сб. статей. Л., 1928. С. 116.*
156. Доклад Комиссии по обсуждению некоторых вопросов, касающихся преподавания математики в средней школе // Изв. Академии наук. 1916. № 2. С. 66—80.
157. *Дубошин Г. Н. Устойчивость движения // Механика в СССР за 30 лет. М.: Наука, 1950. С. 73—98.*
158. Журнал М-ва нар. просвещения, Новая серия. 1915. Ч. 55, февраль. С. 65—127; Ч. 56, март. С. 1—43; Ч. 57, апрель. С. 94—125.
159. *Загоскин И. П. История Казанского университета. Казань, 1906. Т. 4. С. 437.*
160. *Игнациус Г. И. Владимир Андреевич Стеклов. М.: Наука, 1967.*
161. *Идельсон Н. И. Этюды по истории небесной механики. М.: Наука, 1975. С. 412—413.*
162. *Історія Одеського університету за 100 років. Київ: Вид-тво Київського університету. 1968. С. 80—84.*
163. *Каган В. Ф. Лобачевский. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 311.*
164. *Кедров Б., Кнунянц И., Фокин А. Многогранность гения // Правда. 6.02.1984 г. № 37 (23928).*
165. *Клеро Алексис Клод. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. М.: Изд-во АН СССР. 1974. 358 с.*
166. *Князев Г. А. Порицание академикам за участие в «Записке 342 ученых» // Изв. АН СССР. 1931. № 1. Стлб. 14—22.*
167. *Ковалевская С. В. Воспоминания и письма. М.: Изд-во АН СССР. 1951. С. 181.*
168. *Коялович В. М. Ответ на вопросы департамента народного просвещения // Журн. м-ва нар. просвещения. 1915. Ч. 56, март. С. 19.*
169. *Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская. М.: Наука, 1981. С. 187—193.*
170. *Краткий очерк истории Харьковского университета за первые сто лет его существования (1805—1905) / Сост. Д. И. Багалея, Н. Ф. Сумцов, В. П. Бузескул. Харьков, 1906. 326 с.*
171. *Крылов А. Н. Краткий биографический очерк А. Н. Коркина // Воспоминания и очерки. Изд-во АН СССР, 1950. С. 415.*
172. *Ляпунов А. М. Гастон Дарбу. Некролог // Изв. Акад. наук. Сер. 6. 1917. Т. 11, № 6. С. 351—352.*
173. *Ляпунов А. М. Дмитрий Константинович Бобылев. Некролог // Изв. Акад. наук. 1917. № 5. С. 301—306.*
174. *Ляпунов А. М., Марков А. А. Заявление о необходимости издания полного собрания сочинений Л. Эйлера // Изв. Академии наук. Сер. 6. 1909. Т. 3, № 12—18. С. 798—800, 929—930.*

175. *Ляпунов А. М.* Краткое сообщение о причинах, побудивших Ляпунова предпринять рассматриваемое исследование. Протокол засед. физ.-мат. отд. 8 окт. 1903 г. // Изв. Академии наук. Сер. 5. 1905. Т. 19, № 3. С. XX—XXI.
176. *Ляпунов А. М.* Ответ П. А. Некрасову // Зап. Харьк. ун-та. 1901. Кн. 3. С. 51—63.
177. *Ляпунов А. М.* О IV Международном математическом конгрессе, имевшем место в Риме с 6 по 11 апреля // Изв. Академии наук. Сер. 6. 1908. Т. 2, № 9. С. 709—710.
178. *Ляпунов А. М.* П. Л. Чебышев. Харьков: Тип. Зильберберга, 1885. С. 8—9.
179. *Ляпунов М. В.* // Русский биографический словарь / Русское ист. о-во. СПб., 1914. С. 833—834.
180. *Ляпунова А. С. М.* Ляпунов // Советская музыка, 1950. № 9. С. 90—93.
181. *Мартынюк А. А.* Расширение пространства состояний динамических систем и проблема устойчивости // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 10—25.
182. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Козлов Р. И.* Метод векторных функций Ляпунова в теории больших систем // Метод функций Ляпунова и его приложения. Новосибирск: Наука, 1984. С. 16—33.
183. *Марков А. А.* Избранные труды. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1951. 720 с.
184. *Марков А. А.* О проекте П. С. Флорова и П. А. Некрасова преподавания теории вероятностей в средней школе // Журн. м-ва нар. просвещения. 1915. Ч. 57, апрель. С. 34.
185. *Марков А. А.* Теорема о пределе вероятности для случаев академика А. М. Ляпунова // Избранные труды. М.; Л., 1951. С. 319—338.
186. *Менделеева А. И.* Менделеев в жизни // Огонек. 1984, № 6. С. 13—15.
187. *Митрофанов П. И.* Ответ на вопросы департамента народного просвещения // Журн. м-ва нар. просвещения. 1915. Ч. 56, март. С. 13.
188. Мнение А. М. Ляпунова по календарному вопросу: (Протокол Общ. собр. Акад. наук 8 окт. 1905 г. § 206. С. 17 // Изв. Акад. наук. Сер. 6. 1911. Т. 5, № 4. С. 195—200.
189. *Модзалевский Л. Б.* Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
190. Наши дни. 1905. 19 янв. № 22. С. 1; Наша жизнь. 1905. 20 янв. № 65. С. 5.
191. *Некрасов П. А.* К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Мат. сб. 1892. Т. 16, вып. 3. С. 508—517.
192. *Некрасов П. А.* По поводу одной простейшей теоремы о вероятностях сумм и средних величин // Мат. сб. 1901. Т. 22, вып. 2. С. 225—238.
193. *Некрасов П. А.* По поводу статьи академика А. А. Маркова // Журн. м-ва нар. просвещения. 1915. Ч. 58, июль. С. 14—16.
194. *Некрасов П. А.* Теория вероятностей и математика в средней школе // Там же. Ч. 56, июль. С. 110—120.
195. *Некрасов П. А.* Теория вероятностей. М.: 1896. С. 115, 369, 458.

196. *Ожигова Е. П.* Александр Николаевич Коркин. Л.: Наука, 1968. 148 с.
197. *Ожигова Е. П.* Егор Иванович Золотарев. М.; Л.: Наука, 1966.
198. *Ожигова Е. П.* Шарль Эрмит. Л.: Наука, 1982. С. 181—186.
199. От Комиссии по изданию трудов А. М. Ляпунова // А. М. Ляпунов. Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 3—4.
200. *Первозванский А. А.* Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М.: Физматгиз, 1962. 351 с.
201. *Петрушевский Ф. Ф.* Курс наблюдательной физики. СПб., 1867. Т. 1. С. 112.
202. *Поссе К. А. А. Н. Коркин* // Мат. сб. 1909. Т. 27, вып. 1. С. 19.
203. *Поссе К.* Несколько слов о статье П. А. Некрасова // Журн. м-ва нар. просвещения. 1915. Ч. 59. С. 71—76.
204. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983. 560 с.
205. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГОНТИ, 1947. 121 с.
206. Родословная книга князей и дворян российских и выезжих (изданная по самоповейшим спискам в университетской типографии И. Новикова). М., 1787. Ч. 2. С. 232—235.
207. *Румянцев В. В.* О развитии исследований в СССР по теории устойчивости движения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 5. С. 739—776.
208. Русский биографический словарь / Сост. В. Корсаков. СПб., 1914. 983 с.
209. *Сеченов И. М.* Автобиографические записки. М.: Изд-во АН СССР, 1945. С. 146—147.
210. *Сеченов И. М.* Научное наследство. М.; Л., 1956. Т. 3. С. 20.
211. *Скибенко В. П., Окунева В. М.* Метод построения оптимальной квадратичной функции Ляпунова для нелинейных систем второго порядка // Метод функций Ляпунова и его приложения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1984. С. 225—233.
212. *Скимель В. Н.* Исследования по устойчивости движения и общей механике в Казанском авиационном институте // Устойчивость и управление. Казань, 1983. С. 3—20.
213. *Смирнов Г.* Заветы великого педагога // Техника и наука. 1984, № 1. С. 33.
214. *Стеклов В. А.* В Америку и обратно: Впечатления. Л., 1925. С. 27, 28.
215. *Степаньянц Г. А., Шамриков Б. М.* О существовании оптимальных функций Ляпунова для динамических систем. Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1040—1042.
216. Теория вероятностей. Лекции акад. П. Л. Чебышева, читанные в 1879—1880 гг. По записи А. М. Ляпунова. Изданы акад. А. Н. Крыловым. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 252 с.
217. *Тиле Рюдигер.* Леонард Эйлер. Киев: Вища школа, 1983. 243 с.
218. Труды Архива АН СССР (обозрение архивных материалов). 1959. Т. 4, вып. 16. С. 221.

219. *Тяпкин А., Шибанов А.* Пуанкаре. М.: Молодая гвардия. 1979. С. 21.
220. Учебные общества и учебно-вспомогательные учреждения Харьковского университета (1805—1905 гг.) / Под ред. Д. И. Багалея и И. П. Осипова. Харьков. 1912. С. 141—152.
221. *Ушинский К. Д.* Путешествие по Волге // Поездки по России. Ярославль, 1969.
222. Физико-математический факультет Харьковского университета за первые сто лет его существования (1805—1905) / Под ред. проф. И. П. Осипова и проф. Д. И. Багалея. Харьков, 1908. С. 46.
223. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. С. 153—156.
224. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.
225. *Чебышев П. Л.* Закон больших чисел и способ наименьших квадратов // Изв. Физ.-мат. о-ва при Каз. ун-те. Сер. 2. 1899. Т. 8, № 3. С. 110.
226. *Чебышев П. Л.* Черчение географических карт // Полн. собр. соч. М., 1951. Т. 5. С. 150.
227. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
228. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
229. *Ярошевский М. Г.* Иван Михайлович Сеченов. Л.: Наука, 1968. С. 5—19.
230. *Darboux G.* Éloge historique d'Henri Poincaré / Mém. Acad. Sci. Inst. France. (II). 1914. Т. 52. P. XCV.
231. *Euleri Leonardi.* Opera omnia. sub auspiciis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae. Series prima. Opera mathematica / Ed. A. Gutzmer et A. Liapounoff. 1920. Vol. 2. XI—475 p.; Ed. A. Liapounoff, A. Krazer, G. Faber. 1922. Vol. 3. XLVIII—494 p.
232. *Markoff A.* Sur l'équation de Lamé // Math. Ann. 1896. Bd. 47. S. 598—603.
233. *Tchebychef P. L.* Oeuvres. St.-Pb. 1907. Т. 2. P. 359—374.

Основные даты жизни и деятельности А. М. Ляпунова

- 1857, 25 мая — в г. Ярославле родился Александр Михайлович Ляпунов.
- 1870 — поступил в 3-й класс Нижегородской гимназии.
- 1876 — окончил гимназию с золотой медалью и поступил на Физико-математический факультет Петербургского университета.
- 1880 — получил золотую медаль за сочинение по теоретической механике и окончание университета.
- 1881 — публикация двух первых работ по гидростатике.
- 1882 — сдал магистерские экзамены.
- 1885, 27 января — защитил диссертацию «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» на степень магистра прикладной математики.
- 1885 — утвержден в звании приват-доцента.
- 1885, август — переезд в Харьков и занятие вакантной кафедры механики в Харьковском университете.
- 1886, 17 января — женитьба на Наталье Рафаиловне Сеченовой.
- 1892, 30 сентября — защитил диссертацию «Общая задача об устойчивости движения» на степень доктора прикладной математики.
- 1885—1892 — подготовил и опубликовал ряд статей об устойчивости движения твердых и жидких тел.
- 1887—1893 — чтение курса аналитической механики в Харьковском технологическом институте.
- 1893, январь — утвержден в звании ординарного профессора.
- 1899, октябрь — избран председателем Харьковского математического общества.
- 1900 — первая публикация с доказательством центральной предельной теоремы теории вероятностей.
- 1900, декабрь — избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук.
- 1901, октябрь — избран ординарным академиком по кафедре прикладной математики.
- 1902, май — переезд в Петербург и начало деятельности в Петербургской академии наук.
- 1907, ноябрь — избран членом Математического общества Палермо.
- 1908, апрель — участие в работе IV Математического конгресса в Риме.
- 1908, сентябрь — избран членом Академии наук dei Lincei в Риме.

- 1911 — избран почетным членом Харьковского университета.
- 1913 — избран почетным членом Петербургского университета.
- 1906—1914 — выход в свет большого труда о фигурах равновесия однородной жидкости (в четырех частях).
- 1916, март — избран членом-корреспондентом Парижской академии наук.
- 1917 — избран почетным членом Новороссийского (Одесского) университета.
- 1917, 30 июня — приезд в Одессу.
- 1918, сентябрь — начало чтения курса лекций «О форме небесных тел» в Новороссийском (Одесском) университете.
- 1918, 31 октября (н. ст.) — скончалась Наталья Рафаиловна Ляпунова.
- 1918, 3 ноября (н. ст.) — смерть Александра Михайловича Ляпунова.

Указатель имен

- Адамар Ж. 7, 79, 92, 104, 170, 183, 232
 Александр III 59
 Алексеев В. Г. 111, 112, 234
 Анапольский Л. Ю. 234, 236
 Андреев К. А. 55, 56, 66, 76, 78, 79, 86, 124, 143
 Андронов А. А. 202
 Апель П. Э. 79, 183, 232
 Аппельрот Г. Г. 74, 166, 234
 Арбузов А. Е. 223, 234
 Арнольд В. И. 191
 Ауварс А. 100, 234
 Ахизер Н. И. 230
- Багалей Д. И. 235, 238
 Баглунд О. А. 100, 102, 108, 118, 234
 Балакирев М. А. 5, 19, 20, 219
 Бальзак О. де 142
 Барбье Ф. А. 223
 Басов В. П. 230
 Бейер Е. И. 55, 66
 Бейльштейн Ф. Ф. 94
 Бекетов А. Н. 33
 Бекетов Н. Н. 94
 Белинский В. Г. 29
 Белопольский А. А. 161
 Бернулли Д. 219
 Бернулли И. 99, 219
 Бернулли Я. 109, 219
 Бернштейн С. Н. 168, 216, 229
 Билимович А. Д. 122, 127, 129, 134, 135, 137, 140, 144, 230
 Блехман И. И. 234
 Боборыкин П. Д. 30, 234
 Бобылев Д. К. 33, 43—46, 53, 56, 70, 87, 88, 108, 118, 149, 158, 161, 183, 235
 Боголепов Н. П. 80, 148
 Боголюбов А. Н. 230
 Боголюбов Н. Н. 189
 Богомолец А. А. 124
 Бокль Г. Т. 32
 Больцман Л. 142
- Борисов А. В. 39
 Борисов Е. В. 39
 Бородин А. П. 19
 Бородин И. П. 94
 Боткин С. П. 124
 Браецкий Н. И. 234
 Бугаев Н. В. 112, 166
 Будаев Н. С. 53, 56
 Бузескул В. П. 65, 235
 Булич А. Н. 11
 Буницкий Е. Л. 126, 127, 138, 140
 Буняковский В. Я. 38, 77, 86
 Буркхард Г. 232
 Бурносов С. В. 234
 Бусленко Н. П. 225
 Бутлеров А. М. 33, 219, 223
 Бьэнэмэ [Бьенэмэ] И. Ж. 113
- Ванновский П. С. 80, 148
 Васильев А. В. 39
 Васильев М. М. 127
 Вебер Г. 126
 Вейерштрасс К. Т. В. 58, 171
 Вериго Б. Ф. 66, 124
 Веронезе Д. 105
 Веселовский А. Н. 94
 Веселовский С. Б. 234
 Витензон И. Г. 230
 Волосов В. М. 189
 Вольтер Ф. 100
 Вольтерра В. 105, 161, 232
 Вундт В. 29
 Вюрц Ш. А. 223
- Гаврилов Н. И. 8, 230
 Галилей Г. 161
 Галуа Э. 127
 Гамалея Н. Ф. 124
 Гамильтон У. Р. 51
 Гейне Г. 20
 Геккель Э. 111
 Геронимус Я. Л. 8
 Гесс В. 149
 Гик Д. К. 31, 143
 Гильберт Д. 126, 170, 188

Глазунов А. К. 19
Глинка М. И. 19, 219
Гнеденко Б. В. 8, 230
Голенищев-Кутузов А. А. 20
Голицын Б. Б. 100—102, 109,
118, 234, 235
Головщиков К. 235
Голубев В. В. 74
Горький А. М. 162, 165, 235
Граве Д. А. 38, 49, 76, 87, 149
Григорьян А. Т. 8, 230
Грин А. С. 134
Грин Дж. 211, 213
Гриньяр Ф. О. В. 223
Гродзенский С. Я. 235
Грузинцев А. П. 30, 31, 66, 77,
79, 144, 149
Грузинцева А. И. 77
Гумбольдт А. 32
Гурса Э. 92, 104
Гюнтер Н. М. 160, 235

Давыдов [Давидов] А. Ю. 61
Даламбер Ж. Р. 128
Дарбу Г. 104, 105, 161, 235,
238
Дарвин Дж. Г. 7, 114, 128, 140,
141, 169, 174, 177—184, 203,
209, 234
Дарвин Ч. 29, 111, 169
Деларю Д. М. 55, 61
Делянов И. Д. 59, 60, 80
Демидов П. Г. 16, 22, 235
Джинс Дж. Х. 141, 183, 184
Добровольский В. А. 8, 186,
230
Добролюбов Н. А. 6, 29, 124,
154
Достоевский Ф. И. 41
Дрейпер Д. В. 32
Дринфельд Г. И. 230
Дубошин Г. Н. 8, 202, 231,
235
Дубнов Я. С. 127
Дюгем [Дюэм] П. М. М. 56,
232

Евдокимов Н. Н. 86
Ермаков В. П. 77, 124, 150
Еругин Н. П. 8, 202, 231

Жордан К. 170, 232
Жуковский Н. Е. 67, 71, 76—
78, 83, 86, 124, 149, 194
Жюлио-Кюри Ф. 219

Заболотный Д. К. 124, 162
Загоскин И. П. 235
Зайцев А. К. 222
Зайцев А. М. 117, 219, 222,
223, 234
Зайцев К. М. 222
Зайцев М. М. 222—224
Зайцев М. С. 221
Зайцева Е. К. (в замуж. Ляпу-
нова) — см. Ляпунова Е. К.
Зайцев Н. В. (урожд. Ляпу-
нова) 15, 211
Залеман К. Г. 94, 100, 102
Зеленский В. В. 94, 95
Занчевский И. М. 140
Заремба С. 79
Зелинский Н. Д. 124
Золотарев Е. И. 33, 36, 38—
40, 43, 48, 126, 163, 237
Зубов В. И. 231

Игнациус Г. И. 235
Идельсон Н. И. 211, 235
Ильченко В. И. 231
Импенецкий В. Г. 54, 55, 77,
79, 112, 113, 166
Иртегов В. Д. 234
Ишлинский А. Ю. 8, 231

Каган В. Ф. 126, 127, 138, 235
Каменков Г. В. 202
Канер П. З. 129
Капица А. А. (урожд. Кры-
лова) — см. Крылова А. А.
Капица А. П. 234
Капица П. Л. 222, 226
Карнашева М. А. 143, 144
Карпинский А. П. 117, 121
Карякин М. А. 30
Кассини Ж. 203
Кассо Л. А. 98
Кедров Б. М. 235
Кешлер И. 68
Кешпен В. Е. 98
Кесслер К. Ф. 33
Кетле Л. А. Ж. 112
Киро С. Н. 8, 188, 231
Кирпичев В. Л. 55, 66, 157
Кирхгоф Г. Р. 142, 156, 159,
187, 217
Клебш Р. Ф. А. 157, 159
Клейн Ф. 166, 168
Клеро А. К. 90—92, 128, 175,
203, 204, 228, 235
Ключевский В. О. 94
Кнезер А. 79

- Кнорр Э. А. 12, 14
 Кнуянц И. 235
 Князев Г. А. 235
 Ковалевская С. В. 48, 73, 74, 124, 157, 166, 167, 203, 217, 234, 235
 Ковалевский А. О. 124
 Ковалевский В. О. 124
 Ковальский М. А. 15
 Ковальский М. Ф. 55, 57, 58, 65, 156
 Козлов Р. И. 234, 236
 Колмогоров А. Н. 191, 225
 Колосов Г. В. 149
 Кольб Г. Ф. 32
 Кольбе А. В. Г. 219, 223
 Кольцов А. В. 20
 Константин Константинович (Романов) 94
 Конт О. 112
 Кориолис Г. Г. 156
 Коркин А. Н. 33, 36—39, 42, 43, 53, 70, 77, 88, 126, 161, 163, 235, 237
 Корн А. 79
 Коровицкий К. И. 124, 134
 Корш Ф. Е. 118
 Коссер Э. 53
 Кочин Н. Е. 140
 Кочина (Полубаринова-Кочина) П. Я. 235
 Коши О. 112, 113, 177
 Коялович Б. М. 109
 Крейн М. Г. 8
 Крыжановский Д. А. 127
 Крылов А. А. 221, 224
 Крылов А. Н. 5, 7, 8, 24, 37, 38, 64, 65, 88, 108, 128, 139, 149, 161, 222, 224, 231, 235, 237
 Крылов Н. А. 24, 222, 224, 225
 Крылов Н. М. 149, 189
 Крылова А. А. (в замуж. Капца) 222, 226
 Крылова М. М. (урожд. Филатова) 221
 Крылова С. В. (урожд. Ляпунова) 24, 222, 225
 Курнаков Н. С. 66
 Кюри П. А. 19
 Кюри И. 219
 Кюри М. 219
 Кюри П. 219
 Лаврентьев М. А. 225
 Лагранж Ж. Л. 43, 51, 52, 112, 193, 208, 217
 Ламе Г. 117, 164
 Лаплас П. С. 72, 90, 92, 99, 112, 126, 128, 168, 175, 176, 203, 210—214
 Лаппо-Данилевский А. С. 94
 Левицкий Г. В. 66, 156
 Леви-Чивита Т. 106
 Лежандр А. М. 90, 92, 128, 188
 Лежен (Лежень)-Дирихле П. Г. 67, 88, 159, 181, 193, 210, 211, 214, 228, 229
 Лейбниц Г. В. 111
 Лемб (Ламб) Г. 159, 183
 Ленин В. И. 131, 162
 Лермонтов М. Ю. 20
 Ливанов Н. Ф. 39
 Лигин В. Н. 125
 Липшиц Р. О. С. 212, 214
 Лиувилль Ж. 51, 73, 207, 210
 Лобачевский Н. И. 6, 10—15, 126, 153, 235, 236
 Ломоносов М. В. 111, 161
 Лоран П. А. 74
 Лузин Н. Н. 224
 Лукомская А. М. 230
 Луначарский А. В. 131, 132
 Лупанов О. Б. 225
 Лурье А. И. 189
 Лядов А. К. 19
 Ляпунов А. А. 222, 224, 225
 Ляпунов А. В. 15, 221
 Ляпунов А. Н. 222, 224
 Ляпунов Б. М. 5, 8, 15—18, 20—23, 25, 26, 32, 36, 38, 44, 45, 53, 65, 71, 76, 77, 93, 103, 106, 118, 120, 131, 134, 137, 138, 144, 146, 149, 151, 219, 222, 231
 Ляпунов В. А. 10, 11, 221
 Ляпунов В. В. 15, 221
 Ляпунов М. В. 5, 11—18, 22, 23, 25, 221
 Ляпунов Н. В. 222, 224
 Ляпунов С. М. 5, 15, 17—22, 25, 26, 146, 219, 222
 Ляпунов Ю. С. 222
 Ляпунова А. Е. 11, 221
 Ляпунова А. С. 219, 222, 236
 Ляпунова Г. В. 24, 25, 221
 Ляпунова Е. В. 24, 221
 Ляпунова Е. В. (в замуж. Сеченова) — см. Сеченова Е. В.

- Ляпунова Е. К. (урожд. Зайцева) 120, 135, 137, 138, 148, 151, 222
 Ляпунова Е. П. 222
 Ляпунова М. В. 24, 25, 221
 Ляпунова Н. В. (в замуж. Зайцева) — см. Зайцева Н. В.
 Ляпунова Н. Р. (урожд. Сеченова) 7, 24, 25, 65, 66, 77, 103, 106, 117—120, 131, 133—139, 147, 158, 221, 239, 240
 Ляпунова С. А. (урожд. Шпилова) 12, 15, 17, 18, 22, 25, 26, 221
 Ляпунова С. В. (в замуж. Крылова) 222, 224

 Майков А. Н. 20
 Маклорен К. 42, 50, 52, 89, 114, 115, 128, 141, 175, 188, 203, 205, 206, 207
 Малкин И. Г. 202
 Марков А. А. 5, 37, 39, 67, 70, 72—74, 77, 83, 84, 86, 87, 94, 95, 98, 100, 102, 107—110, 113, 114, 117, 126, 129, 149, 150, 161, 163—168, 215, 216, 233, 235, 236, 238
 Марков А. А. (мл.) 164
 Марковников В. В. 124
 Марколонго Р. 106
 Маркуш И. И. 231
 Мартынюк А. А. 231, 236
 Матросов В. М. 234, 236
 Мачуговский В. С. 78
 Медведев Ф. А. 231
 Медунин А. Е. 231
 Меликов К. В. 183
 Меликов [Меликишвили] П. Г. 124
 Менделеев Д. И. 32—34, 38, 40—42, 124, 236
 Менделеева А. И. 236
 Мензбир М. А. 150
 Меншуткин Н. А. 33
 Меркулова Н. М. 231
 Мечников И. И. 124
 Мещерский И. В. 67
 Митропольский Ю. А. 189, 231
 Митрофанов П. И. 112, 236
 Миттаг-Леффлер М. Г. 105
 Михайловская А. М. (урожд. Сеченова) 45, 221

 Михневич Г. Л. 127
 Млодзеевский Б. К. 71
 Модзалевский Л. Б. 236
 Мозер Ю. 191
 Моисеев Н. Д. 8, 202
 Молешотт Я. 29
 Молоствов В. П. 15
 Морозов Ю. И. 55
 Мышкис А. Д. 8, 231

 Нейман К. Г. 88, 160, 181, 210, 211, 214, 229
 Некрасов П. А. 74, 84, 85, 108—114, 148, 160, 165, 236, 237
 Николай I 15
 Новиков П. С. 224, 225
 Ньюкомб С. 105
 Ньютон И. 49, 111, 128, 130, 187, 202, 203

 Овсянников А. Н. 28
 Овсянников Н. Н. 32
 Овсянников Ф. В. 33, 94, 96
 Огиевецкий И. Ю. 127
 Ожигова Е. П. 237
 Озиранер А. С. 231
 Окунева В. М. 237
 Ольденбург С. Ф. 94, 97, 117
 Орлов А. Я. 127, 138, 140, 231
 Орлов В. Г. 99
 Орлов Ф. Е. 61
 Осипов И. П. 238
 Остроградский М. В. 78, 79, 125, 224

 Пановко Я. Г. 234
 Первозванский А. А. 237
 Персидский К. П. 202
 Перцов П. П. 13
 Петриев [Петриашвили] В. М. 124
 Петрушевский Ф. Ф. 33, 40, 237
 Пикар Ш. Э. 73, 79, 86, 92, 104, 105
 Пирогов Н. И. 124
 Пирсон Ч. 112
 Писарев Д. И. 6, 124
 Плато Ж. 179
 Погорелко А. К. 58, 65
 Погребский И. Б. 8, 231
 Полак Л. С. 232
 Поссе К. А. 33, 37, 38, 77, 84, 88, 109, 237

- Потапов П. И. 121
 Потенба А. А. 86
 Преображенский В. В. 124, 125
 Пташпцкый И. Л. 39, 77
 Пуанкаре А. 7, 66, 79, 86, 89, 92, 104, 105, 114, 128, 140, 141, 160, 161, 168—176, 179—184, 194, 203, 209, 210, 232, 235, 237, 238
 Пуассон С. Д. 56, 90, 92
 Пушкин А. С. 20
 Пятницкий П. П. 150

 Рабинович И. М. 107
 Радлов В. В. 94
 Радо Н. 232
 Раппопорт И. М. 8, 232
 Рауз [Раус] Э. Д. 193
 Реклю Ж.-Э. 32
 Ренан Э. 5
 Риман Б. 51, 144, 207
 Римский-Корсаков Н. А. 19, 20
 Риттер К. 32
 Робэн Г. 211
 Родзевич И. С. 31, 32
 Рубинштейн Н. Г. 18
 Рудио Ф. 101, 102
 Румянцев В. В. 8, 231, 232, 237
 Руссьян Ц. К. 126

 Сабинин Е. Ф. 125
 Савич А. Н. 33
 Савич С. Е. 38
 Савченко К. Н. 139
 Салтыков Н. Н. 86, 149, 150
 Селиванов Д. Ф. 39
 Сеченов Ан. М. 24, 221
 Сеченов Ал. М. 221
 Сеченов И. М. 5, 6, 24, 25, 29, 32, 33, 45, 66, 124, 146, 221, 224, 237, 238
 Сеченов М. А. 221
 Сеченов Р. М. 23, 24, 135, 147, 158, 221
 Сеченова Е. В. (урожд. Ляпунова) 23, 77, 117, 158, 221
 Сеченова А. М. (в замуж. Михайловская) — см. Михайловская А. М.
 Скибенко В. П. 237
 Скимель В. Н. 237
 Слешинский И. В. 126

 Смирнов В. И. 7, 8, 47, 89, 130, 140, 173, 186, 193, 229, 232
 Смирнов Г. 237
 Соболев С. Л. 8, 97
 Соколов П. Б. 231
 Сологуб В. С. 8, 193, 232
 Сомов О. И. 33, 77
 Сонин Н. Я. 83, 100—102, 108, 118
 Сохоцкий Ю. В. 37, 38, 126
 Сретенский Л. Н. 8, 186, 187, 211, 229, 232
 Станюкович К. М. 77
 Стражинский В. М. 8, 232
 Стасов В. В. 19
 Стасов Д. В. 19
 Стеклов А. И. 154
 Стеклов В. А. 5, 7, 8, 56—61, 63—65, 67, 68, 78—80, 86, 89, 91, 103, 108, 114, 116, 117, 132, 135, 137—143, 145—150, 153, 154—162, 173—175, 181, 185, 210, 224, 230, 232, 233, 235, 237
 Стеклова Е. А. 154
 Стеклова О. Н. 135, 158
 Степанов В. В. 202
 Степаньянц Г. А. 237
 Стильес Т. Я. 204
 Столетов А. Г. 61
 Стражеско И. Д. 124
 Стройк Д. Я. 233
 Струве В. Я. 12, 66
 Струве Л. О. 66
 Струве О. В. 66
 Сумцов Н. Ф. 235, 238
 Суслов Г. К. 43, 135, 137, 142, 143

 Тиле Р. 99, 237
 Тимченко И. Ю. 126, 127, 138
 Тиссеран Ф. 170
 Тихомандрицкий М. А. 38, 56, 58, 65, 66, 79, 86, 117—119, 126, 131
 Толстой Д. А. 28
 Толстой Л. Н. 41, 165
 Томсон У. 51, 52, 159, 161, 172, 194, 208, 209
 Третьяков Д. К. 121
 Турчанинов О. С. 127
 Тэйлор [Тейлор] Дж. И. 42
 Тэйт [Тэт] П. Г. 51, 52, 159, 194, 208, 209
 Тяпкин А. А. 238

- Уатт Дж. 75
Ульянов И. Н. 29, 30
Умов Н. А. 124, 125, 149
Ушинский К. Д. 21, 26, 28, 238
- Фаминцын А. С. 33, 94, 96, 100
Филатов В. П. 5, 124, 222, 225, 226
Филатов Д. П. 222, 226
Филатов Н. Ф. 222, 225
Филатов П. Ф. 222
Филатов С. В. 226
Филатов Ф. М. 221
Фихтенгольд Г. М. 127
Флоров П. С. 108—111, 114, 236
Фокин А. 235
Фокин С. А. 224
Форсайт Э. Р. 105
Фортунатов Ф. Ф. 45, 118
Фрадлин Б. Н. 8, 230
Фридман А. А. 140, 161
Фусс П. Г. 99
- Хавкин Н. А. 124
Хакен Г. 238
Хилл Дж. У. 72, 106, 217, 229
Хргиан А. Х. 231
- Цесевич В. П. 8, 233
Цехановецкий Г. М. 155
Циммерман В. А. 126
Цингер В. Я. 61, 108
- Чайковский П. И. 18, 20
Чебышев П. Л. 6, 7, 33—38, 43, 46, 48—51, 53, 72, 74—77, 83—86, 88, 89, 112, 113, 117, 124, 126, 140, 144, 145, 147, 161, 163, 164, 166, 168, 177, 204, 214, 215, 228, 233, 236, 238
Чезари Л. 238
Челомой В. Н. 189
Чернышев Ф. Н. 94
- Чернышевский Н. Г. 6, 124, 154
Четаев Н. Г. 8, 182, 202, 229, 238
Чешихин В. 41
- Шамриков Б. М. 237
Шатуновский С. И. 126, 127, 138
Шахматов А. А. 94, 95
Шварц А. Н. 98
Шведов Н. Ф. 124
Шибанов А. С. 8, 233, 238
Шимков А. П. 55
Шипилов А. 221
Шипилова С. А. (в замуж. Ляпунова) — см. Ляпунова С. А.
Шлоссер Ф. К. 32
Шопен Ф. 20
Штокало И. З. 202
Шульберг А. М. 8, 137, 231
- Щецкин Е. Н. 121, 124
- Эйлер Л. 98—103, 148, 161, 185, 217, 235—238
Эйнштейн А. 146, 153
Энестрем Г. Я. 102
Эрмит Ш. 38, 39, 237
- Юмбер Ж. 148
Юшкевич А. П. 8, 99, 173, 232
- Яблонский С. В. 225
Ягич И. В. [Ватрослав] 45, 66, 67, 103, 136
Якоби К. Г. Я. 50, 52, 53, 58, 89, 99, 114, 115, 128, 141, 172, 175, 179, 188, 203, 205—207
Яковлев В. А. 41
Янжул И. И. 94
Ярошевский М. Г. 238
Ярошенко С. П. 125, 126
Ятаев М. 233

Оглавление

Предисловие	5
Часть первая	
Глава 1. Семья и род Ляпуновых	10
Глава 2. Детство и юность	21
Глава 3. Учеба в университете. Первые шаги в науке	33
Глава 4. Харьковский университет	54
Глава 5. Петербургская академия наук	87
Глава 6. Одесса	120
Глава 7. Последние дни	131
Глава 8. Ляпунов в жизни	142
Часть вторая	
Глава 1. Ляпунов и Стеклов	154
Глава 2. Ляпунов и Марков	163
Глава 3. Ляпунов, Пуанкаре и Дарвин	169
Глава 4. О неопубликованных работах	185
Глава 5. Работы Ляпунова и современный научно-тех- нический прогресс	188
Заключение	192
Дополнение	
В. И. Смирнов, В. С. Сологуб. Очерк научной дея- тельности А. М. Ляпунова	193
Приложение	
Выдающиеся представители семьи Ляпуновых и род- ственных им семейств	219
Литература	227
Основные даты жизни и деятельности А. М. Ляпунова	239
Указатель имен	241

Научное издание

Цыкало Альфред Леонидович
Александр Михайлович Ляпунов
1857—1918

Утверждено к печати
Редколлегией серии
«Научно-биографическая литература»
Академии наук СССР

Редактор С. С. Демидов
Редактор издательства И. М. Столярова
Художник А. Г. Кобрин
Художественный редактор Н. Н. Власик
Технический редактор И. Н. Жмуркина
Корректор В. А. Бобров

ИБ № 352372

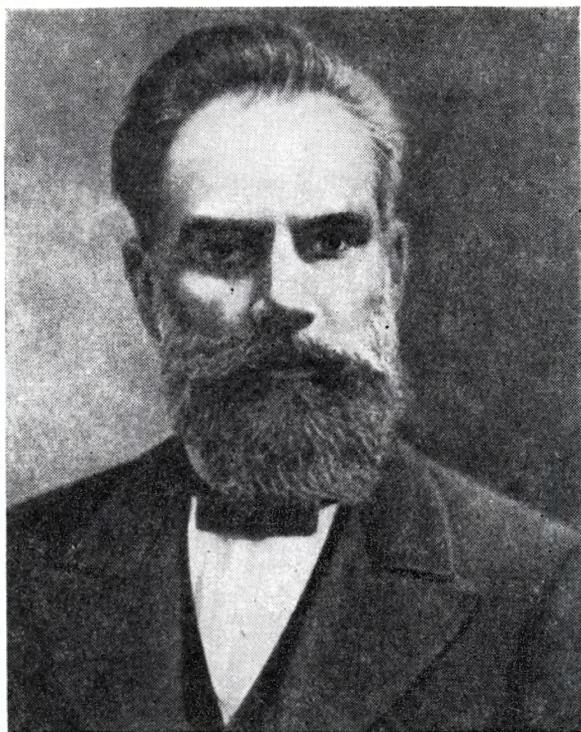
Сдано в набор 25.02.88
Подписано к печати 03.06.88
Т-12918. Формат 84×108^{1/32}
Бумага типографская № 1
Гарнитура обыкновенная. Печать высокая
Усл. печ. л. 13,02. Усл. кр. отт. 13,23
Уч.-изд. л. 13,8
Тираж 6900 экз. Тип. зак. 189
Цена 60 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва В-485
Профсоюзная ул., 90.

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12

Александр Михайлович ЛЯПУНОВ

А.Л.Цыкало



А.Л.Цыкало

**Александр Михайлович
ЛЯПУНОВ**



ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ КНИГА

Кочина П. Я.

ГЁСТА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕР

(1846—1927)

12 л. 80 к.

Это первая на русском языке научная биография одного из крупнейших математиков Швеции, исследователя в области теории функций комплексного переменного. В книге рассматриваются математические работы Г. Миттаг-Леффлера. Рассказывается об основанном им в Стокгольме журнале «Acta mathematica», получившем международное признание еще в XIX в.; о выдающихся математиках XIX—XX вв. (К. Вейерштрассе, Г. Канторе, С. В. Ковалевской, А. Пуанкаре и др.), с которыми Г. Миттаг-Леффлера связывали общие научные интересы.

Для читателей, интересующихся историей математики.

Заказы просим направлять по одному из перечисленных адресов магазинов «Книга — почтой» «Академкнига»:

480091 **Алма-Ата**, 91, ул. Фурманова, 91/97; 370005 **Баку**, 5, ул. Джапаридзе, 13; 320093 **Днепропетровск**, проспект Ю. Гагарина, 24; 734001 **Душанбе**, проспект Ленина, 95; 252030 **Киев**, ул. Пирогова, 4; 277012 **Кишинев**, проспект Ленина, 148; 443002 **Куйбышев**, проспект Ленина, 2; 197345 **Ленинград**, Петрозаводская ул., 7; 220012 **Минск**, Ленинский проспект, 72; 117192 **Москва**, В-192, Мичуринский проспект, 12; 630090 **Новосибирск**, Академгородок, Морской проспект, 22; 620151 **Свердловск**, ул. Мамина-Сибиряка, 137; 700187 **Ташкент**, ул. Дружбы народов, 6; 450059 **Уфа**, 59, ул. Р. Зорге, 10; 720001 **Фрунзе**, бульвар Дзержинского, 42; 310078 **Харьков**, ул. Чернышевского, 87.