АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

И. М. Тумаков

Анри Леон ЛЕБЕГ

1875—1941

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА
1975

Значение интеграла Лебега для современной математики и ее приложений очень велико, но об авторе этого интеграла выдающемся французском математике Анри Леоне Лебеге — почетном члене многих академий наук мира и математических обществ — известно очень мало. Нет ни одной книги о его жизни и научном творчестве. Настоящая работа, издаваемая к 100-летию со дня рождения ученого, восполняет этот пробел. В ней приведены биографические сведения о Лебеге, дан обзор его научных трудов, показаны истоки и значение его открытия.

Ответственный редактор
кандидат физико-математических наук
А. Б. ПАПЛАУСКАС

Т $\frac{20100\text{-}033}{054(02)\text{-}75}$ 79-75НП

Предисловие

28 июня 1975 г. исполнилось сто лет со дня рождения выдающегося французского математика Анри Леона Лебега. Теория меры и теория интеграла, созданные Лебегом, быстро завоевали всеобщее признание. Математическая периодика начала XX столетия была почти исключительно посвящена развитию этих новых теорий и их ближайшим приложениям. Из всех дальнейших обобщений интеграла обобщение, найденное Лебегом, явилось наиболее плодотворным. Оно оказало и продолжает оказывать глубокое влияние на развитие целого ряда разделов математики, в частности — разделов, появление которых целиком обязано открытиям Лебега.

Современная теория дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, математическая и теоретическая физика, теория обобщенных функций и теоремы вложения С. Л. Соболева и С. М. Никольского, теория линейных операторов и спектральная теория, сходимость и суммируемость разложений функций в ортогональные ряды, теории вероятностей и случайных процессов, эргодическая теория и другие разделы современной математики используют в качестве фундамента и главного теоретического инструмента теорию меры и интеграла Лебега. Теория случайных функций является в сущности теорией интегрирования в функциональных пространствах — абстрактной формой теории интеграла Лебега. Теорема Биркгофа, занимающая центральное место в изучении таких функций, представляет собой не что иное, как общую теорему теории меры Лебега.

Среди математиков своего времени Лебег был звездой первой величины, и его научные заслуги получили широкое признание: он был членом и почетным членом академий и математических обществ многих стран мира. Введенные Лебегом понятия меры и интеграла исторически оправданно носят теперь его имя.

Несмотря на все это, жизнь и научная деятельность Анри Лебега в литературе освещены крайне скудно, а у нас о нем вообще ничего не публиковалось. Настоящая работа имеет целью восполнить этот пробел. Работа написана на основе кандидатской диссертации автора «История интеграла Лебега» (1972).

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность профессору В. А. Ильину за ряд полезных критических замечаний и ценных советов.

Автор искренне благодарен А. Б. Паплаускасу за сделанные замечания, а также тем сотрудникам Французской академии наук, которые откликнулись на просьбу автора уточнить некоторые подробности биографии Лебега.

О жизни и научной деятельности Лебега

Биографические сведения

Анри Леон Лебег родился 28 июня 1875 г. в семье рабочего типографии города Бове, расположенного вблизи Парижа. Отец его был человеком просвещенным. Мать работала преподавателем начальной школы. У них была строго подобранная домашняя библиотека, которая сыграла не последнюю роль в приобщении мальчика к миру точных наук и развитии его могучего аналитического ума. Отец рано умер, и только предоставление Анри Леону стипендии муниципалитетом Бове позволило ему, по завершении начального образования, учиться в городском колледже.

Девятнадцати лет Анри Лебег поступил в Нормальную школу (École normale) — центральный педагогический институт Франции. Там Лебега считали лишь третьим среди наиболее успевающих по математическим предметам [1]. Опережавшие его в то время студенты впоследствии также имели определенные научные заслуги. Однако мировую известность приобрел только Анри Лебег.

По окончании в 1897 г. института Лебег получил квалификацию преподавателя средней школы (лицея) по математическим предметам. Он, однако, остался в Нормальной школе еще на два года помощником библиотекаря, чтобы иметь свободный доступ к интересующей его научной литературе и время для ее глубокого изучения. Он действительно овладел многими тонкими вопросами старых и новых разделов классического анализа по первоис-

---

[1] О его интересе в студенческие годы к теории поверхностей см. стр. 13 настоящей работы.

точникам, включающим и новейшие исследования Г. Дарбу, К. Жордана, Д. Пеано, П. Дюбуа-Реймона, Э. Бореля, Г. Кантора, Д. Гильберта, Р. Бэра, Л. Шеффера и уже отходящие в прошлое научные труды О. Коши, П. Дирихле, Б. Римана и других известных математиков.

Особое внимание Лебег уделял началам теорий спрямления кривых и квадратуры поверхностей и уже возникшим в них коренным проблемам и противоречиям из-за несоответствия примитивных функций неопределенным интегралам. Проблемы кратного интегрирования и теоретико-множественный подход к ним, тригонометрические ряды и невозможность безоговорочного интегрирования рядов с ограниченными в совокупности членами, специальное изучение интегралов Дарбу и представление непрерывных функций неопределенными интегралами — все оказалось в поле зрения вдумчивого исследователя. Во всех этих проблемах ощущалась недостаточность интеграла Римана — основного инструмента изучения перечисленных вопросов, и содержались в неявном виде ростки свежих идей, развитых потом Лебегом.

С 1899 г. Лебег в течение трех лет работал преподавателем математики в Центральном лицее города Нанси. Видимо, это и обусловило его неизменный интерес к преподаванию элементарной математики, что нашло отражение в его научных трудах, в его участии в работе по редактированию франко-швейцарского журнала «Преподавание математики» и в популяризации им своих научных идей.

Сразу же после защиты докторской диссертации, в 1902 г., он был принят на работу в университет города Ренна. Там он читает лекции на медицинском факультете, занимая должность лектора (maître des conférences), которая примерно соответствует старшему преподавателю наших вузов.

Именно в это время Анри Лебега приглашают прочитать лекции в Коллеж де Франс, что явилось началом признания его научных заслуг. В 1902/03 г. он прочитал в Коллеж де Франс свои знаменитые лекции по теории интегрирования и отысканию примитивных функций и по тригонометрическим рядам — в 1904/05 г.

В 1906 г. Лебег прошел по конкурсу университета города Пуатье на должность chargé de cours, приблизительно соответствующей доценту наших вузов. В том же году Лебег становится профессором университета, 1903—1910 гг.— наиболее плодотворный период жизни Лебега. За эти годы опубликована почти треть всех его научных трудов и почти все главные результаты в развитии и приложениях им идей его диссертации.

В 1910 г. Лебег был приглашен в Парижский университет. До 1919 г. он работает там лектором на естественном факультете Сорбонны, а в 1920 г. был избран профессором этого факультета.

1912 г. явился годом официального признания научных заслуг Анри Лебега Французской академией наук, по решению которой молодому ученому вручена премия Уллевига (точнее, часть этой премии — 3000 франков, остальные 2000 франков получил физик Раво за оптические исследования). Среди членов комиссии по присуждению премии был Г. Дарбу. Эмиль Пикар сделал доклад о научных достижениях Лебега. В заключение Пикар сказал: «Кажется, я доказал, сколь достоин Лебег получить ту часть премии Уллевига, которую комиссия единогласно присуждает ему».

Через пять лет Лебег вновь удостоен отличия Французской академии наук — премии Сентура. Докладчиком был также Э. Пикар, а в состав комиссии входил К. Жордан.

Во время первой мировой войны, являясь председателем математической комиссии Службы изобретений, образования и научного эксперимента, Лебег решил проблему определения и уточнения траекторий снарядов. Под его руководством был составлен сборник траекторий, включающий таблицу с тройным входом. За все это он был награжден высшим военным и гражданским орденом Франции — орденом Почетного легиона.

В 1921 г. Лебег покидает Сорбонну. Он был избран профессором Коллеж де Франс вместо умершего А. Эмбера и занимал эту должность до конца жизни. Здесь он принял меры к модернизации классических учебных курсов по математике, к их обновлению в свете новейших теорий, включая его собственные достижения.

С 1922 г. начинается академическая деятельность Лебега. В этом году он удостоился чести быть выбранным в Парижскую академию наук вместо умершего К. Жордана. Вслед за тем Лебег получает официальное признание английских ученых: в 1924 г. его принимают в члены Лондонского математического общества, а в 1930 г.— и в иностранные члены Королевского общества.

А. Лебег был членом Итальянской национальной академии, королевских академий Дании, Бельгии, Румынии, Королевского общества в Льеже, Польской академии наук и других ученых обществ. Он был избран почетным доктором многих университетов и почетным членом большей части математических обществ.

Анри Лебег «был хорошим мужем, прекрасным отцом, общительным и приятным человеком в компании» [2]. Его жена Маргарита, урожденная Валле — дочь директора одного из отделений «Франко-африканской компании». У них было двое детей — дочь Сюзанна и сын Жак.

Высокогуманный, скромный и справедливый, Лебег обладал благородным сердцем и чуткой душой. Ни единого слова жалобы не слышали от него ни на факультете Сорбонны, ни в Академии наук на то, что его первые публикации (особенно с его обобщением интеграла Римана) были встречены неприязненной критикой со стороны видных ученых Франции, в том числе Г. Дарбу и К. Жордана. И он терпеливо дожидался своего дня, даже не пытаясь хоть как-то растрогать «великих жрецов» математики [3]. И он никогда ничего не говорил о резкой критике первых его статей.

Лебег был человеком прямым и откровенным. «Я вспоминаю о визите отклоненного кандидата в академики к одному из моих преподавателей; этот кандидат жаловался, весь дрожа от своих воспоминаний: „Лебег? Он прям, как кавалерийская сабля!“» [4].

Вместе с тем он был не лишен чувства юмора. Смех его не был ни язвительным, ни резким; остроты не оскорбляли собеседников и не задевали их самолюбия. Они носили отвлеченный характер, касаясь комических сторон неназываемого субъекта. Нередко он вышучивал и некоторых авторов за то, что они приписывали ему чужие мысли [5].

На протяжении всей жизни Лебег сохранял чистоту и пылкость юности, полноту чувств и стремлений. Но ка-

---

[2] Цитируется по докладу (стр. 20) ученика и последователя А. Лебега члена Французской академии наук А. Данжуа: «Notice sur la vie et l'oeuvre de Henri Lebesgue (1875—1941)» déposée en la séance du 21 octobre 1946, par M. Arnaud Denjoy; Institut de France, Académie des Sciences, Paris, 1946, 31 p.— В последующих ссылках: *Данжуа*, с указанием страницы.

[3] Там же, стр. 25, 26.

[4] Там же, стр. 21.

[5] Там же, стр. 24.

зался равнодушным к политике, в которой иронически выдавал себя за «невежду».

Работы других авторов Лебег читал несколько необычно: бегло просматривая статью, он быстро понимал суть изучаемого вопроса и принятого автором способа решения проблемы. Исходя из кратких данных, он мог восстановить весь труд автора, хотя иногда и небезошибочно.

Лебег писал мало, если измерять написанное количеством собственных математических идей. В своих произведениях, как и в устной речи, Лебег пользовался безукоризненно ясным языком (чего нельзя сказать о его ученике Данжуа). Ни лишних слов, ни лишних эпитетов, максимальная простота определений, четкость математических выводов. Его лекции оставили неизгладимый след в памяти слушателей. И надолго запомнится манера и стиль его изложения читателям его научных трудов (особенно диссертации, лекций по интегрированию и по тригонометрическим рядам).

«Лебег обоснованно занимает свое место среди лучших. И безусловно достоин того, чтобы память о нем была сохранена на его родине» [6]. Добавим: и не только на его родине, но и математиками всех поколений и национальностей.

В 1940 г. во время второй мировой войны родной дом Лебега в городе Бове был разрушен. Еще более ощутимым ударом, от которого знаменитый математик уже не смог оправиться, явилась фашистская оккупация Франции, что глубоко уязвляло чувство национальной гордости Лебега; он замкнулся в себе. Мрачная действительность способствовала обострению его болезни, которая приняла особенно тяжелую форму в последние четыре месяца жизни. Силы постепенно оставляли ученого.

26 июля 1941 г. Анри Леона Лебега не стало.

«Наука потеряла в нем ученого большой созидательной силы, могучей самобытности, удивительно острой проницательности» [7]. «Это мировой траур для математики» [8], — заявил жене и сыну Лебега один голландский ученый (вскоре он погиб в одном из немецких лагерей смерти).

---

[6] *Данжуа*, стр. 27.

[7] *P. Montel*. Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue.—«Compt. Rend. de l'Acad. des Sci. de Paris», 1941, **213**, N 5, p. 197—200 (в последующих ссылках: «C. R».).

[8] *Данжуа*, стр. 31.

Первые публикации

Первой опубликованной работой Анри Лебега является статья «Об аппроксимации функций» в «Бюллетене математических наук» за 1898 г. [1]. В ней оригинально доказана теорема Вейерштрасса о приближении любой непрерывной функции многочленом с помощью разложения $\sqrt{1 + (x^2 - 1)}$. Это доказательство и теперь считают одним из лучших.

С марта 1899 по апрель 1901 г. в «Докладах Парижской академии наук» появляется заметка «О функциях многих переменных» [2] и пять сообщений Лебега о содержании его докторской диссертации.

В заметке результат французского математика Р. Бэра о структурном свойстве функций I класса [9] Лебег распространил на случай многих переменных, опираясь на свое построение кривой типа Пеано (впервые найденной итальянским математиком Дж. Пеано [10]).

Первое сообщение —«О некоторых нелинейчатых поверхностях, наложимых на плоскость» [3]. Поверхность наложима на плоскость, если существует взаимно однозначное соответствие между этой поверхностью и некото-

---

[9] Разрывная функция $f(x)$ принадлежит I классу Бэра, если существует такая последовательность непрерывных функций $f_n(x)$, что $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для любого x из области определения $f(x)$. Результат Бэра состоит в точечной разрывности функций I класса на любом совершенном множестве, причем это свойство характеристическое, т. е. верно и обратное: если функция обладает таким свойством, то она принадлежит I классу.

Смысл свойства в том, что не существует никакого интервала, сплошь заполненного точками разрыва функции, обладающей этим свойством, т. е. в любом как угодно малом интервале найдутся точки непрерывности такой функции.

Совершенное множество есть или сегмент или получается из сегмента удалением последовательности неперекрывающихся интервалов.

[10] Плоская кривая Пеано удовлетворяет определению кривой, данной К. Жорданом, и в то же время не является кривой, так как проходит через все точки квадрата.

По К. Жордану, кривой называется множество точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе уравнений: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где φ и ψ — непрерывные функции.

О предложенном А. Лебегом построении кривой типа Пеано см. его лекции по интегрированию: [68], русский перевод, стр. 44—45.

рой плоской областью, которое сохраняет длины (любая спрямляемая, т. е. имеющая длину, кривая поверхности преобразуется в плоскую спрямляемую кривую той же длины).

Развертывающаяся поверхность, имеющая непрерывно изменяющуюся касательную плоскость, очевидно наложима на плоскость. Это все, что было известно до Лебега. В связи с этим, еще студентом, Лебег заметил: если скомкать лист бумаги, то получится поверхность, не имеющая касательной плоскости во многих точках, однако наложимая на плоскость [11]. Значит, существуют и другие поверхности, наложимые на плоскость.

Вполне элементарными средствами Лебег установил, что среди них есть такие, которые не содержат ни одного прямолинейного отрезка, и что, наоборот, кривые двоякой кривизны могут быть такими, что их касательные образуют поверхность, не наложимую на плоскость.

Найти все поверхности, наложимые на плоскость, Лебегу не удалось, но он установил необходимые и достаточные признаки, которыми выделяются такие поверхности среди цилиндрических и конических поверхностей, поверхностей вращения и поверхностей, образованных касательными к кривым двоякой кривизны. Кроме того, он доказал, что наложение на плоскость сохраняет площади.

Второе сообщение — «К определению площади поверхности» [4]. Пример Г. А. Шварца и аналогичный пример Д. Пеано показали недостаточность классического определения площади поверхности через предел площадей вписанных многогранников [12]. Необходимо было найти другое определение. А. Лебег ставит перед собой цель: найти такое определение длины кривой линии, чтобы можно было дать аналогичное определение площади поверхности. В результате анализа соответствующих исследова-

---

[11] Однажды, несколько лет спустя, Лебег вынул из кармана носовой платок, смял его и, не без иронии, сказал: «Вот развертывающаяся поверхность, так как она точно накладывается на плоскость. Но где прямолинейные образующие поверхности смятого платка и где непрерывно изменяющаяся касательная плоскость вдоль несуществующих образующих ее?» (*Данжуа*, стр. 9).

[12] О так называемом цилиндре Шварца см., например: *А. Лебег* [68], стр. 118, русский перевод; *Г. М. Фихтенгольц*. Основы математического анализа, ч. II. М., Физматгиз, 1960, стр. 304—306.

ний Л. Шеффера и К. Жордана он приходит к следующим определениям.

Площадь косого пространственного многоугольника C есть точная нижняя грань площадей многогранных поверхностей, имеющих C своим контуром. Площадь замкнутой косой кривой есть точная верхняя грань площадей вписанных косых многоугольников. Тогда площадь поверхности получается с помощью всевозможных разбиений поверхности сетями спрямляемых кривых. Поверхности, имеющие площадь в этом смысле, Лебег назвал спрямляемыми.

В следующем сообщении — «К определению поверхностных определенных интегралов» [5] — рассматривается частный случай данного выше определения. Длина кривой **Г** есть точная нижняя грань длин всевозможных ломаных, равномерно сходящихся к **Г**. Это определение эквивалентно классическому определению через предел длин ломаных, вписанных в **Г**, но соответствующие определения площади поверхности уже не будут эквивалентными, как это показывает пример Г. А. Шварца (или пример Д. Пеано). Понятие площади поверхности оказывается более сложным, чем понятие длины кривой, причем эта сложность заложена в существе понятий длины кривой, площади поверхности, объема тела. По новому определению Лебега площадь поверхности T есть точная нижняя грань площадей многогранных поверхностей, равномерно сходящихся к T. Поверхности, имеющие площадь в этом новом смысле, называются квадрируемыми. Лебег указывает, что множество квадрируемых поверхностей не совпадает с множеством спрямляемых поверхностей, но каждая поверхность первого множества принадлежит и второму. Кроме того, функции f, φ, ψ, которыми определяется спрямляемая поверхность

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

являются разностями возрастающих функций u и v, а производные числа [13] функций f, φ, ψ, рассматриваемые как

---

[13] Пусть $r(f, x_0, h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Тогда $\Lambda_d = \overline{\lim\limits_{h \to +0}}\, r(f, x_0, h)$, $\lambda_d = \underline{\lim\limits_{h \to +0}}\, r(f, x_0, h)$, $\Lambda_g = \overline{\lim\limits_{h \to -0}}\, r(f, x_0, h)$, $\lambda_g = \underline{\lim\limits_{h \to -0}} \times$ $\times\, r(f, x_0, h)$ — верхнее и нижнее правые, верхнее и нижнее левые производные числа соответственно. Верхний и нижний

функции только u или только v, ограничены сверху по абсолютной величине.

В этом же сообщении Лебег рассматривает разбиения квадрируемых поверхностей на куски спрямляемыми кривыми, вводит понятие о минимальной площади замкнутой спрямляемой кривой и, указав на возможность традиционных определений поверхностных интегралов — определений, аналогичных определениям криволинейных интегралов обоих типов, определяет поверхностный интеграл через интегралы по недостатку и по избытку (нижний и верхний интегралы).

Четвертое сообщение — «К минимуму определенных интегралов» [6] — связано с проблемой Плато (иногда ее называют проблемой Лагранжа), состоящей в отыскании поверхности минимальной площади при заданном контуре. Лебег сводит решение этой проблемы к нахождению минимума криволинейного и поверхностного интегралов, не привлекая уравнений в частных производных, относящихся к искомой поверхности, ввиду возникающих при этом непреодолимых трудностей.

В заметке, представленной в сентябре 1899 г. Международному математическому конгрессу в Мюнхене, Д. Гильберт изложил на двух примерах один метод, который Лебег использовал в следующем виде. Если функции f_n непрерывны в замкнутой области и имеют в ней производные числа, ограниченные сверху по абсолютной величине, то для равномерной сходимости последовательности f_n достаточна ее сходимость к той же предельной функции в точках счетного всюду плотного множества.

Применяя этот метод к функциям множества

$$f(C) = \int_C F(x, y, z)\, dS$$

и

$$f(S) = \iint_S F(x, y, z)\, da,$$

Лебег доказал, что проблема минимальной площади имеет

пределы, по определению, суть

$$\overline{\lim_{x\to a}}\ \varphi(x) = \lim_{\delta\to+0}\ \sup_{x\,:\,0<|x-a|<\delta} \{\varphi(x)\},$$

$$\underline{\lim_{x\to a}} = \lim_{\delta\to+0}\ \inf_{x:0<|x-a|<\delta} \{\varphi(x)\}.$$

бесчисленное множество решений, причем любое решение является вместе с тем решением проблемы минимального объема. При этом условия, достаточные для существования решений в случае $f(C)$, уже недостаточны для $f(S)$.

В последнем сообщении — «К обобщению определенного интеграла» [7] — впервые введены новые понятия, которые уже давно стали классическими и которые будут более подробно рассмотрены ниже. Имеются в виду понятия меры Лебега, интеграла Лебега, измеримого множества.

Докторская диссертация

Эта знаменитая диссертация [10], открывшая новую эру в математике, опубликована в 1902 г. Она состоит из введения и шести глав, содержащих 105 неозаглавленных параграфов.

В I главе развивается теория меры линейных и плоских множеств, которая служит фундаментом новой теории интеграла, построенной в следующей главе. В этой главе три раздела.

В первом разделе дано геометрическое и аналитическое определения интеграла, изучены основные свойства его и установлен состав интегрируемых в новом смысле (суммируемых, скажет Лебег через два года) функций одного переменного.

Во втором разделе изучены неопределенные интегралы и их связь с примитивными. Доказана эквивалентность этих понятий, если не выходить за пределы ограниченных измеримых функций. В случае неограниченных функций этот вопрос Лебег также доводит до определенного завершения, введя в обиход сингулярные функции.

В третьем разделе II главы результаты построенной теории распространены на функции многих переменных. Формула перехода от двойных интегралов к повторным доказана, однако, лишь для ограниченных функций Бэра (все затронутые здесь понятия разъясняются в последующем анализе).

В следующих четырех главах (III —«Длина кривой»; IV —«Площадь поверхности»; V —«Поверхности, наложимые на плоскость»; VI —«Проблема Плато») развивается содержание уже разобранных выше сообщений [3]—[6]. Остановимся на содержании первых двух глав.

Уже в первом пункте I главы трактуется проблема меры: «Мы предлагаем поставить в соответствие каждому ограниченному множеству положительное число или нуль, которое мы назовем его мерой и которое удовлетворяет следующим условиям:

1. Существуют множества ненулевой меры [14].

2. Два равных множества имеют одну и ту же меру.

3. Мера суммы конечного или счетного множества множеств, попарно не имеющих общих точек, есть сумма мер этих множеств».

Постановкой проблемы Лебег фактически дает дескриптивное определение меры. Для конструктивного решения данной проблемы он вводит понятия внешней и внутренней мер.

Можно бесконечным множеством способов заключить точки произвольного ограниченного множества E в конечное или счетное множество интервалов. Множество E_1 точек этих интервалов при любом способе имеет меру, равную сумме длин входящих в него интервалов, и эта мера $\geqslant$ меры E. Точная нижняя грань сумм длин таких интервалов при всевозможных покрытиях E интервалами называется внешней мерой множества E. Внутренней мерой E называется разность между длиной сегмента, содержащего все точки E, и внешней мерой дополнения множества E до этого сегмента [15].

Множество E называется измеримым (теперь говорят: «в смысле Лебега»), если внешняя и внутренняя меры его равны. А. Лебег доказывает, что так определенная мера удовлетворяет всем условиям проблемы меры; для измеримых множеств, следовательно, она является единственным решением проблемы меры. Свое доказательство Лебег осуществляет с помощью введенного им признака измеримости (справедливость которого также им доказана), навеянного признаком Жордана [16]: для того, чтобы E бы-

---

[14] Через два года Лебег заменил это условие следующим: мера интервала (0; 1) равна 1.

[15] Дополнением CE множества E, содержащегося в сегменте $[a; b]$, до этого сегмента называется множество $[a; b] - E$, т. е. множество всех тех точек сегмента $[a; b]$, которые не принадлежат E.

[16] Измеримость в смысле Жордана (правильнее — Пеано) была введена независимо друг от друга итальянским математиком Д. Пеано в 1887 г. и французским математиком К. Жорданом в 1892 г. Их определение внешней меры отличается от определе-

ло измеримым, необходимо и достаточно, чтобы суммарная длина всех интервалов, составляющих пересечение покрытий E и CE интервалами, могла быть сделана произвольно малой.

Свойство полной аддитивности (условие 3 проблемы меры) является характеристическим для меры Лебега, что́ Лебег и подчеркивает уже в диссертации. Он сопоставляет точечные множества, измеримые в его смысле, с множествами, измеримыми в смысле Жордана и с B-множествами [17].

Мощности множеств L и J всех L-множеств и J-множеств, т. е. измеримых в смысле Лебега и в смысле Жордана, соответственно, равны, но эти множества не совпадают: $J \subset L$, но $L \neq J$ (любое множество, измеримое в смысле Жордана, измеримо и в смысле Лебега, но обратное неверно). Из условий проблемы меры легко заключить также, что любое B-множество является и L-множеством. Обратное также неверно, так как мощность множества всех B-множеств меньше мощности множества всех L-множеств [18].

Таким образом, теория меры Лебега включает и теорию меры Пеано — Жордана, и теорию меры Бореля. Мера Лебега является пополнением меры Бореля: любое L-множество отличается от некоторого B-множества лишь на множество меры нуль. А именно, для данного измеримого множества E А. Лебег строит в первой же главе диссертации два B-множества E_1 и E_2, такие, что $E_1 \subset E \subset \subset E_2$ и $mE_1 = mE = mE_2$. Отсюда, между прочим,

---

ния Лебега только тем, что допускаются лишь конечные покрытия множества E интервалами или сегментами. Внутренняя мера E определена, например у Д. Пеано, как точная верхняя грань тех интервалов покрытия множества E, которые целиком содержатся в E, поэтому

$$\mathrm{mes}_i\, E \leqslant m_i E \leqslant m_e E \leqslant \mathrm{mes}_e E,$$

где m — соответствует мере Лебега, mes — мере Пеано — Жордана, а индексы i и e — внутренней и внешней мерам соответственно.

[17] B-множеством называют множество, измеримое в смысле Бореля. Определение меры Э. Борелем см. на стр. 43.

[18] Первая есть мощность континуума — c, а вторая совпадает с мощностью множества всех подмножеств любого сегмента или всей числовой прямой — 2^c, что Лебег и не замедлил подчеркнуть.

следует, что

$$m_e E = \inf_{E_2 \supset E} \{mE_2\},$$

$$m_i E = \sup_{E_1 \subset E} \{mE_1\}, \qquad E_1 \text{ и } E_2 - B\text{-множества.}$$

Несмотря на указание Лебега о существовании измеримых множеств, которые не измеримы в смысле Бореля, впервые такое множество было конструктивно осуществлено лишь в 1917 г. молодым русским математиком И. Я. Суслиным [19].

Мера плоских точечных множеств строится точно так же, только линейные интервалы А. Лебег заменяет треугольниками. Это распространение теории меры на множества двух измерений понадобилось А. Лебегу для геометрического обобщения интеграла Римана.

Первый раздел второй главы диссертации Лебег начинает ссылками на Архимеда, Б. Римана и Г. Дарбу [20]. Затем он показывает, что для интегрируемости функции необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ординатное множество [21] было измеримым в смысле Жордана. В этом случае интеграл Римана от функции $f(x)$ есть разность мер подмножеств ординатного множества функции $f(x)$ с постоянным знаком ординат $y = f(x)$:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \text{mes}\,E_1 - \text{mes}\,E_2.$$ [22]

---

[19] «Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis».—«C. R.», 1917, 164, p. 88—91.

[20] Вычисление Архимедом площади сегмента параболы с помощью сумм, подобных интегральным, выделение Б. Риманом класса интегрируемых функций (до него изучали в основном лишь непрерывные функции) и доказательство Г. Дарбу существования интегралов по избытку и по недостатку (верхнего и нижнего интегралов).

[21] Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют двум неравенствам: $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ для неотрицательной $f(x)$ и трем: $a \leqslant x \leqslant b$, $y \cdot f(x) \geqslant 0$, $0 \leqslant y^2 \leqslant [f(x)]^2$ в случае функции любого знака, в том числе переменного.

[22] E_1 и E_2 есть подмножества ординатного множества, соответствующие тем x из $[a;\ b]$, для которых $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) < 0$ соответственно, т. е. $E_1 = \{(x;\ y) : x \in [a;\ b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, $E_2 = \{(x;\ y) : x \in [a;\ b],\ f(x) \leqslant y < 0\}$, причем точки $\{(x;\ y) : y = f(x) = 0\}$ можно причислить к любому из «знаковых» множеств E_1 или E_2 («положительному»— E_1— или «отрицательному»— E_2), или к тому и к другому, так как эти точки образуют множество плоской меры нуль.

Уже отсюда следует, что если иметь в виду меру Лебега, то получится обобщение интеграла Римана (геометрическое определение интеграла Лебега). Это Лебег не преминул заметить и доказать: «Если множество E измеримо (когда E_1 и E_2 таковы же), мы назовем определенным интегралом $f(x)$ от a до b величину $m(E_1) - m(E_2)$. Соответствующие функции я называю суммируемыми [23]. Что касается несуммируемых функций, если они существуют, мы определим для них внутренний и внешний интегралы равенствами $m_i(E_1) - m_e(E_2)$ и $m_e(E_1) - m_i(E_2)$. Эти два числа заключены между интегралами по недостатку и по избытку».

Чтобы получить аналитическое определение интеграла, аналогичное общепринятому в то время, Лебегу потребовалось преобразовать определение измеримой функции. Он доказывает, что измеримая в прежнем смысле функция обладает тем свойством, что любое множество вида $E(f \geqslant a)$, $E(f \leqslant a)$, $E(f > a)$, $E(f < a)$, $E(f = a)$, $E(a < f < b)$ измеримо при любых a и b. Обратно, если хотя бы одно из этих множеств (кроме предпоследнего) измеримо и $f(x)$ ограничена, то $f(x)$ измерима; при этом суммы [24]

$$\sigma = \sum_0^n a_i m(e_i) + \sum_1^n a_{i-1} m(e_i'),$$

$$\sum = \sum_0^n a_i m(e_i) + \sum_1^n a_i m(e_i')$$

имеют один и тот же предел, равный определенному ранее геометрически определенному интегралу функции $f(x)$.

[23] Через два года Лебег откажется от этого названия, заменив его общепринятым теперь названием «измеримые». Прежнее название А. Лебег отнес к функциям, имеющим интеграл в его смысле.

[24] a_i — точки деления *интервала изменения функции*, т. е. если $A < f(x) < B$, то $A = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = B$. Если $\max\limits_i (a_i - a_{i-1}) = \alpha$, то $\Sigma - \sigma = \Sigma (a_i - a_{i-1}) m(e_i') \leqslant \leqslant \alpha \Sigma m(e_i') \leqslant \alpha (b - a)$ и $\lim\limits_{\alpha \to 0} (\Sigma - \sigma) = 0$, т. е. $\lim \Sigma = \lim \sigma$.

Если множества e_i и e_i' объединить, то σ и Σ будут представлять собой суммы, которые теперь называют суммами Лебега.

Определение Лебегом множеств e_i и e_i' см. на стр. 87.

Итак, по определению Лебега,

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k mE(f = a_k) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} mE(a_{k-1} < f < a_k)\right] = \lim_{\alpha\to 0}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k mE(f = a_k) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n} a_k mE(a_{k-1} < f < a_k)\right],$$

где $f(x)$ — заданная на $[a;\ b]$ функция, значения которой заключены между числами A и B, $a_0 = A < a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_n = B$, $\alpha = \max\limits_{k}(a_k - a_{k-1})$.

Высказав соображения (о них речь впереди), которые привели его к этому аналитическому определению, А. Лебег доказал, что любая R-интегрируемая функция $f(x)$ измерима и для нее

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Для доказательства измеримости ему понадобилась необходимость критерия Римана в той его наиболее прозрачной форме, которая была предложена Лебегом [25]: для

[25] Во 2-м издании своих «Лекций по интегрированию» [68] и только в нем А. Лебег заметил: «В своей диссертации я пользовался этим свойством (равенством нулю меры множества точек разрыва R-интегрируемой функции.— *И. Т.*) как достаточным условием для интегрируемости; в первом издании этой книги я отметил, что оно является также и необходимым...» (сноска 3 на стр. 32 русского перевода; с оригиналом сверено). В связи с этим приводим соответствующее место диссертации А. Лебега: «Чтобы доказать это (отсутствие разногласий между определениями интеграла по Лебегу и по Риману в применении к R-интегрируемой функции.— *И. Т.*), мы опираемся на следующий факт: точки разрыва интегрируемой функции образуют множество меры нуль *.— Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция и E — множество точек, для которых $a \leqslant f(x) \leqslant b$, a и b — любые числа. Предельные точки E, которые не входят в E, являются точками разрыва; они образуют, следовательно, множество e меры нуль. $E + e$ измеримо как замкнутое множество, e также измеримо, поэтому и E измеримо. Этого достаточно, чтобы утверждать, что функция $f(x)$ измерима...» ([10], стр. 254). Приводим и отмеченную сноску Лебега: «* Риман высказал это свойство в следующем виде: для того чтобы функция была интег-

того, чтобы ограниченная функция была интегрируемой в смысле Римана, необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва имело меру Лебега нуль. Так как R-интегрируемая функция $f(x)$ измерима, если она ограничена, то ее L-интеграл существует. Пусть в интервале $(a_k;\ a_{k+1})$ длины l_k верхняя грань $f\ (x)$ есть M_k, а нижняя — m_k, тогда

$$m_k l_k \leqslant (L) \int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\, dx \leqslant M_k l_k,$$

но для разбиения $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ области интегрирования

$$\int\limits_{a}^{a_1} + \int\limits_{a_1}^{a_2} + \cdots + \int\limits_{a_{n-1}}^{b} = \int\limits_{a}^{b}$$

(интегралы в смысле Лебега; равенство следует непосредственно из определения интеграла, данного Лебегом), поэтому

$$(L) \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$$

заключен между интегралами по недостатку и по избытку, а так как $f(x)R$ — интегрируема, то он и равен [26]

$$(R) \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

рируемой, необходимо, чтобы ,,общая сумма длин тех интервалов, для которых колебание больше $\sigma > 0$, каково бы ни было σ, могла быть сделана бесконечно малой''».

Формулировка и доказательство справедливости критерия впервые были даны Б. Риманом в такой форме, что оставалось неясным, каким образом множество точек разрыва функции влияет на ее интегрируемость или неинтегрируемость. Лебег преобразовал этот критерий, исходя из той формы, которую придал ему немецкий математик П. Дюбуа-Реймон.

[26] Если исключить из области интегрирования множество точек разрыва R-интегрируемой функции $f\ (x)$, то на остатке она непрерывна. Но для непрерывной функции ее интегралы Лебега и Римана совпадают и такие функции измеримы. Поэтому интеграл Лебега функции $f\ (x)$ равен ее интегралу Римана на этом остатке (множества меры нуль не влияют на значение интеграла Лебега, как это вытекает непосредственно из его определения). Но этими рассуждениями нельзя получить требуемого доказательства, так как, например, множество рациональных чисел

Чтобы привести примеры функций, интегрируемых в смысле Лебега, но не интегрируемых в смысле Римана, Лебегу пришлось предварительно изучить свойства нового интеграла. Для установления этих последних требуется определение интеграла от функций, заданных лишь на измеримом подмножестве сегмента. Лебег делает это, предварительно расширив ранее данное им определение на случай любых a и b (в основном определении $a < b$) с помощью равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0.$$

Пусть $f(x)$ задана на ограниченном множестве E, содержащемся в $[a;\ b]$. Введем функцию $\varphi(x)$, равную $f(x)$ в каждой точке множества E и нулю во всех точках дополнения E. Тогда, по определению,

$$\int_E f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Это определение позволяет Лебегу получить основное свойство нового интеграла — полную аддитивность:

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,dx,$$

где E — сумма конечного числа или счетного множества измеримых множеств E_k попарно без общих точек ($E_m E_n = \phi$ при $m \neq n$) [27].

После этого шаг за шагом Лебег устанавливает содержание класса измеримых ограниченных функций, т. е. интегрируемых (L). Прежде всего, используя обычное теперь объединение $e_m \cdot e_n = e_{m,n}$, он доказывает, что

в любом интервале имеет меру Лебега нуль, но неизмеримо в смысле Жордана (см. стр. 19).

[27] Здесь А. Лебег сделал замечание, которое послужило, на наш взгляд, импульсом к построению английским математиком В. Юнгом, начиная с 1910 г., теории интеграла Лебега (а затем и Лебега — Стилтьеса) чисто функциональными приемами без понятия меры. Приводим это замечание Лебега: «Заметим еще, что нижний интеграл функции $f(x)$ можно определить как верхнюю грань интегралов измеримых функций $\varphi(x)$, которые не превышают функцию $f(x)$; одна из таких функций φ существует, ее интеграл равен нижнему интегралу f» ([10], стр. 255).

$\int (f + \varphi)\, dx = \int f dx + \int \varphi dx$. Это свойство обобщается на любое конечное число измеримых функций. Далее он выводит измеримость произведения измеримых функций, арифметического корня, обратной и сложной функции.

А. Лебег подчеркивает особое значение следующего предложения: если ограниченная функция f является пределом последовательности измеримых функций f_n, то f измерима (а следовательно, и интегрируема в смысле Лебега) [28].

В самом деле, функции $y = h$ и $y = x$ измеримы, поэтому измеримы и все полиномы, и все непрерывные функции, и вообще любая функция каждого класса Бэра [29]. Более того, исходя из этого предложения легко получить, что мощность множества измеримых функций равна мощности множества всех функций [30]. Это же предложение позволяет построить сколько угодно примеров функций, интегрируемых (L), но не интегрируемых (R), так как существует бесчисленное множество ограниченных функций, неинтегрируемых (R), но являющихся пределами последовательностей интегрируемых (R) функций.

Эти примеры можно получить и иначе. Пусть f и φ — две непрерывные функции, отличные друг от друга хотя бы на множестве E меры Лебега нуль и всюду плотном в $[a;\, b]$, причем $\varphi(x)$ не имеет нулей на E. Тогда функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in CE = [a;\, b] - E, \\ f(x) + \varphi(x), & x \in E, \end{cases}$$

очевидно интегрируемая (L), не интегрируема (R), так как все точки $[a;\, b]$ являются точками разрыва функции $F(x)$; в частности, такова функция Дирихле, для которой $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 1$ всюду на $[a;\, b]$, а E является множеством рациональных точек $[a;\, b]$.

---

[28] Доказательство Лебега очень просто. Оно использует множество e точек, общих для всех множеств $e_k = E_k\ (a < f < b)$.

[29] Из теоремы Вейерштрасса следует, что каждая непрерывная функция есть предел некоторой последовательности полиномов.

Предел полиномов, не являющийся непрерывной функцией, есть, по определению, функция I класса Бэра; предел функций I класса, не являющийся непрерывной функцией и функцией I класса, есть, по определению, функция II класса и т. д. Например, функция Дирихле — II класса, а любая монотонная функция — не выше I класса.

[30] См. стр. 258 диссертации А. Лебега [10].

Доказав таким образом, что его интеграл действительно обобщает интеграл Римана, Лебег переходит к несобственному интегрированию. Прежде всего он заметил, что можно распространить теорию меры на любые множества, ограниченные или нет, тогда геометрическое определение его интеграла будет применимым и к неограниченным функциям, но при этом необходимо вводить те или иные изменения. Конструктивное же определение применимо почти без модификаций, лишь разбиение интервала изменения функции с самого начала представляет бесконечный ряд чисел:

$$\cdots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$$

Соответствующие интегральные суммы σ и Σ суть ряды в обе стороны. Если они стремятся к одному и тому же пределу независимо от способа разбиения интервала изменения функции при стремлении к нулю $\alpha = \max (m_k - m_{k-1})$, то функция интегрируема и ее интеграл есть общий предел сумм σ и Σ.

Интегрируемые функции обладают всеми указанными выше свойствами, только измеримая неограниченная функция (с соответствующим расширением смысла слов «измеримая» и «интегрируемая») не обязательно интегрируема, что Лебег и подчеркивает.

Наконец, первый раздел II главы диссертации Лебег завершает специально выделенным пунктом, посвященным свойству полноты его интеграла [31], которое он сформулировал и доказал в двух формах предельного перехода под знаком интеграла:

1. Если последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций f_n, имеющих интегралы в $[a; b]$, сходится к f и существует такое число M, что $|f - f_n| < M$ для любого n и каждого x из $[a; b]$, то f интегрируема в $[a; b]$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx.$$

2. «Если любой остаток сходящегося ряда интегрируемых функций ограничен сверху по абсолютной вели-

[31] А. Лебег, конечно, не употреблял этого названия, так же как не доказывал, что возможность предельного перехода под знаком интеграла при соответствующих ограничениях и свойство полной аддитивности его интеграла эквивалентны, выражая одно и то же свойство полноты.

чине, то ряд можно почленно интегрировать» ([10], стр. 259).

Интеграл Римана этим свойством вообще не обладает. Для возможности почленного R-интегрирования рядов требуется нечто гораздо большее — равномерная сходимость ряда R-интегрируемых функций или другие эквивалентные этому условия, что является весьма частным случаем условия Лебега.

А. Лебег доказывает свойство полноты своего интеграла в первой форме, представляя функцию f в виде суммы двух ограниченных функций: $f = f_n + (f - f_n)$, которые очевидно интегрируемы, а равенство, выражающее предельный переход, получает обычной теперь оценкой:

$$\left|\int (f - f_n)\, dx\right| \leqslant Mme_n + \varepsilon\,(mE - me_n),$$

где $e_n = E\,(|\,f - f_n\,| \geqslant \varepsilon)$.

Второй раздел II главы диссертации Лебега начинается с определения неопределенного интеграла[32] $F\,(x)$ функции $f\,(x)$ и доказательства непрерывности его. Обычным способом Лебег показал, что если $f\,(x)$ непрерывна, то $F\,(x)$ является примитивной функцией для нее, т. е. $F'\,(x) = f\,(x)$. Однако существуют ограниченные производные, которые не интегрируемы (R). В. Вольтерра в 1881 г. первым привел пример такой функции, который Лебег воспроизвел в своей диссертации, предварительно доказав, что, напротив, если рассматривать интегралы в его, Лебега, смысле, то каждая ограниченная производная $f(x)$ имеет примитивную $F\,(x)$, равную $\int\limits_a^x f\,(t)\,dt + F\,(a)$[33].

---

[32] «Неопределенным интегралом функции $f\,(x)$, имеющей определенный интеграл в интервале $(\alpha;\ \beta)$, называется функция $F\,(x)$, определенная в $(\alpha;\ \beta)$ и такая, что для любых a и b, взятых между α и β,

$$\int\limits_a^b f\,(x)\,dx = F\,(b) - F\,(a).$$

Из этого равенства получаем $F\,(x) = \int\limits_a^x f dx + F\,(a)$» ([10], стр. 260, 261).

[33] В самом деле, функция $\varphi\,(x) = \dfrac{f\,(x+h) - f\,(x)}{h}$ непрерывна при

Далее Лебег доказывает (стр. 265—272) важнейшее свойство своего интеграла: для существования интеграла от $f'(x)$, необходимо и достаточно ограниченное изменение $f(x)$. Если существует $\int\limits_a^b f'(x)\,dx$, то полное изменение $\bigvee\limits_a^b f$ функции $f(x)$ на $[a;\ b]$ равно $\int\limits_a^b |f'(t)|\,dt$ и $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\,dt$. Если же $f(x)$ имеет ограниченное изменение, то вообще справедливы лишь неравенства $\int\limits_a^b |f'(t)|\,dt \leqslant \bigvee\limits_a^b f$ и $f(x) \geqslant f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\,dt$ [34].

Таким образом, проблема примитивных решена Лебегом для функций достаточно широкого класса [35], производные которых неограниченны. Для таких функций (как и для всех ограниченных измеримых функций) понятия неопределенного интеграла Лебега и примитивной тождественны. И в этом интеграл Лебега также имеет существенное преимущество перед интегралом Римана.

Вообще же проблема примитивных не решена и Лебегом, что он и отмечает ([10], стр. 233 и 272), приведя пример функции, имеющей неограниченное изменение (сле-

---

фиксированном h. Если $|f'(x)| < M$ для всех x, то по теореме Лагранжа все функции $\varphi(x) = f'(x + \theta h)$. Следовательно, они ограничены в совокупности и, применяя теорему Лебега о предельном переходе, получаем:

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = \lim_{h\to 0}\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

[34] Например, для функций Граве (см. стр. 78 и сл.)

$$\int\limits_0^1 f'(x)\,dx = 0 < f(1) - f(0) = 1.$$

[35] Класса абсолютно непрерывных функций (название этих функций принадлежит Д. Витали, 1904 г.). Для них имеет место равенство, указанное выше. А. Лебег изучил эти функции в 1906—1907 гг. (см. [68]).

довательно, и неограниченную производную)[36]. Более того, если «$\psi(x)$ — непрерывная функция, постоянная во всех смежных интервалах множества E[37], то $f+\psi$ удовлетворяет равенству

$$[f(x)+\psi(x)]_\alpha^\beta=\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$$

для всех систем α, β, для которых имеет смысл правая часть этого равенства» ([10], стр. 272).

Полученные результаты Лебег расширяет еще дальше, заменив производную производными числами и опираясь на результаты итальянских математиков У. Дини и В. Вольтерра, чем и заканчивается второй раздел II главы его диссертации.

В третьем разделе он расширяет свою теорию интеграла на функции многих переменных, сразу для ограниченных и неограниченных, почти дословным повторением всего предыдущего на примере функций двух переменных (множества e и e' становятся плоскими).

В случае ограниченной функции Бэра $f(x, y)$ таковы же и функции $\varphi(x)=f(x, y)$ и $\psi(y)=f(x, y)$. При этом всегда имеет место формула перехода от двойного интеграла к любому повторному. В 1907 г. итальянский математик Г. Фубини завершил этот результат, установив справедливость формулы в предположении одной интегрируемости в смысле Лебега функции $f(x, y)$, причем множество тех $x(y)$, для которых $f(x, y)$, рассматриваемая как функция одного переменного $y(x)$, не интегрируема, имеет меру Лебега нуль, поэтому данная формула и называется формулой Фубини. Она завершает длительное развитие теории кратных интегралов именно благодаря интегралу Лебега, который устранил непреодолимые трудности, возникшие в теории кратного интегрирования (R)[38].

---

[36] $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$, $\quad x\neq0$ и $f(0)=0$.

[37] Здесь E — замкнутое, нигде не плотное ограниченное множество, а смежные интервалы — термин Р. Бэра — суть интервалы, свободные от точек множества E, однако концы их принадлежат E.

[38] Порядок интегрирования в повторных интегралах Римана не может быть безоговорочно изменен. В 1878 г. Тома построил

Обзор докторской диссертации Анри Лебега мы закончим словами современного английского математика Бёркила: «Не может быть сомнений, что эта диссертация является одной из самых изящных, которые когда-либо были написаны математиками» [39].

Лекции по интегрированию и тригонометрическим рядам

В 1904 г. появляются в печати «Лекции по интегрированию и отысканию примитивных функций» [18], прочитанные Лебегом в Коллеж де Франс в 1902/03 академическом году. Основные результаты «Лекций» содержатся в диссертации [10] и в статьях [11, 12, 14]. С присущей Лебегу ясностью в них раскрываются следующие положения.

1. Понятие интеграла Лебега необходимо для решения ряда уже давно назревших и четко поставленных проблем и упрощения решений других уже решенных проблем.

2. Это понятие является естественным завершением исторического развития понятия интеграла и теории интегрирования.

3. Упомянутое завершение требует предварительного расширения меры Пеано — Жордана и уточнения меры Бореля путем введения нового понятия меры, охватывающего собой обе «старые» меры.

4. Геометрическая конструкция интеграла Лебега отличается от конструкции Жордана лишь расширением смысла понятия меры.

5. Свойство полной аддитивности меры Лебега позволяет интегрировать монотонно сходящиеся и равномерно ограниченные последовательности интегрируемых (L) функций, т. е. пространство интегрируемых (L)

неограниченную функцию, для которой не существует двойной интеграл, но оба повторных существуют и равны между собой. В 1898 г. Прингсгейм дал пример неограниченной функции, двойной интеграл которой существует вместе с одним из повторных, в то время как другой из повторных не существует. По этим вопросам (с необходимой библиографией) см. стр. 510—517 в книге: *E. W. Hobson*. The theory of Functions... Cambridge, 1907 (3 ed., 1927).

[39] *J. C. Burkill*. Henri Lebesgue.—«The Journal of the London Math. Soc.», January, 1944, 19, part 1, N 73, p. 58.

функций (пространство L) оказывается полным, так же как и пространство L-измеримых множеств.

6. Полнота нового понятия интеграла позволяет восстановить утраченную гармонию между примитивными функциями и неопределенными интегралами для гораздо более широкого класса функций.

7. Это же основное отличительное от интеграла Римана свойство интеграла Лебега дает возможность решить ряд прикладных проблем, по-видимому, для максимально возможных множеств функций.

Своеобразная, историческая форма построения «Лекций» постепенно и методически вводит читателя в круг идей автора.

В I главе рассматриваются геометрическое и аналитическое определения интеграла Коши и расширение аналитического определения на функции с конечным числом разрывов (по О. Коши) и с бесконечным, но приводимым [40] множеством точек разрыва (по Дирихле).

Глава II посвящена определению интеграла, данному Б. Риманом, и его свойствам, а также интегралам Дарбу. В этой главе Лебег исследует условие R-интегрируемости ограниченной функции по Г. Дарбу, по Б. Риману и по П. Дюбуа-Реймону. От последнего условия интегрируемости он приходит к своей форме критерия Римана, ставшей окончательной и наиболее удобной и прозрачной.

В III главе приводится и изучается данное Лебегом в его диссертации геометрическое определение интеграла Римана как плоской меры Жордана ординатного множества или разности мер знаковых множеств подынтегральной функции. Эта мысль лежит в основе и современных определений интеграла по линии абстрактной меры.

В следующей главе обсуждаются функции ограниченного изменения, введенные К. Жорданом и играющие одну из основных ролей в современных теориях интеграла, особенно в их приложениях [41]. А. Лебег показал, что точ-

---

[40] Одно из производных множеств (производное множество E есть множество предельных точек E) таких множеств, по определению, пусто.

[41] Пусть $f(x)$ ограничена и задана на $[a; b]$. Полное изменение V функции $f(x)$ на $[a; b]$, по определению, есть

$$V = \sup_{\Pi} \sum_{1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|, \qquad \Pi\colon\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

ки разрыва таких функций только первого рода. Здесь же он вводит функцию скачков [42].

Приведя результат К. Жордана о спрямляемости кривой, А. Лебег указывает на возможность существования длины графика $f(x)$, но эта длина s не может быть вычислена по классической интегральной формуле просто потому, что $s' = \sqrt{1 + f'^2}$ не интегрируема (R). Однако и в этом случае s заключена между интегралами по недостатку и по избытку.

В V и VI главах исследуются примитивные функции и проблема их отыскания, неопределенные интегралы и возможность пренебрежения множествами меры нуль, свойства производных функций [43] и определение интеграла по Ньютону (Дюгамелю—Серре,— говорит Лебег) через приращение примитивной.

На примере показано, что в случае неприводимого множества точек разрыва даже меры нуль при существовании одной функции, производная которой равна данной функции, существует и бесчисленное множество таких функций, причем разность между любыми двумя из них не обязательно константа. Эта разность является произвольной сингулярной функцией, производная которой равна нулю почти всюду, т. е. всюду, за исключением точек некоторого множества меры нуль, в которых она может принимать любые значения.

Только в последней, VII главе Лебег вводит свое понятие интеграла, определяя его как число, удовлетворяющее шести условиям, которые выражают желательные свойства интеграла (пяти из них удовлетворяет интеграл Римана), и показывает, что эти условия неизбежно при-

---

Если $V < \infty$, то $f(x)$ называется функцией с ограниченным изменением (вариацией).

[42] $$\varphi(x) = \sum_{a \leqslant x_k \leqslant x} s_d(x_k) + \sum_{a \leqslant x_k \leqslant x} s_g(x_k),$$

где $s_d(x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0)$, $s_g(x_0) = f(x_0) - f(x_0 - 0)$.

Теперь очевидно представление функции с ограниченным изменением в виде $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — непрерывная составляющая функции $f(x)$.

[43] Производная функция принимает все свои промежуточные значения и, кроме того, не может быть разрывной в каждой точке, так как является функцией не выше I класса Бэра (в сноске дано определение функций классов Бэра).

водят к его теории меры и конструктивным (аналитическому и геометрическому) определениям интеграла. Шестое условие выражает свойство полноты, высказанное на этот раз в другой форме: если $f_n \nearrow f$, то $\int\limits_a^b f_n dx \nearrow \int\limits_a^b f dx$ [44].

После глубокого проникновения в сущность построенной им теории интеграла, естественным было обращение его к наиболее важным ближайшим приложениям новой теории — к тригонометрическим рядам, этому оселку всех новых достижений математического анализа.

Важно заметить, что ни в какой другой части математического анализа в тот период не могла быть столь сильно ощутимой польза от замены интеграла Римана интегралом Лебега, как в теории тригонометрических рядов, находившейся в известном кризисном состоянии, особенно после того, как П. Дюбуа-Реймон привел пример непрерывной функции, тригонометрический ряд Фурье [45] которой расходится в некоторой точке, откуда следует возможность расходимости и в бесконечном множестве точек в любом как угодно малом интервале. И именно к этой теории Лебег и обратился немедленно после построения им новой теории интеграла. Соответствующие исследования отражены в статьях [8, 15, 19—21], опубликованных в 1902—1905 гг. и объединенных его «Лекциями по тригонометрическим рядам» [25].

«Лекции» включают замечательный обзор предмета исследований, его краткую историю и вводные параграфы, посвященные понятиям интеграла и меры Лебега, а также

---

[44] $f_n \nearrow f$ означает, что последовательность $\{f_n\}$ стремится к функции f, монотонно возрастая. Этого современного обозначения Лебег не использует.

[45] Если коэффициенты тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

определяются по формулам Эйлера — Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k=0, 1, 2, 3, \ldots),$$

то ряд называется рядом Фурье функции $f(x)$, а коэффициенты этого ряда — ее коэффициентами Фурье.

функциям ограниченной вариации. Эти «Лекции» являют собой образец приложения новых понятий меры и интеграла. Лебег доказал, в частности, следующие теоремы.

1. Если тригонометрический ряд сходится к ограниченной функции, то он является ее рядом Фурье, даже если он сходится только почти всюду.

2. Коэффициенты Фурье произвольной L-интегрируемой функции стремятся к нулю (теорема Римана—Лебега).

3. Ряд Фурье L-функции можно почленно интегрировать.

4. Ряд Фурье сходится в точке x, если интеграл

$$\int_0^t |\Phi(u)|\,du$$

имеет равную нулю производную при $t = 0$ и

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\alpha \frac{|\Phi(t+\delta)-\Phi(t)|}{t}\,dt = 0.$$

$$\Phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

5. Если $|\Phi(t)|$ является производной своего неопределенного интеграла даже почти всюду, то ряд Фурье функции $f(x)$ суммируем к ней методом Чезаро (средних арифметических).

А. Лебег вводит здесь очень важную функцию (подобные функции теперь называют функциями Лебега — речь о них впереди), с помощью которой строит примеры расходящихся рядов Фурье.

Он рассмотрел также применения к интегралу Пуассона, проблеме Дирихле, формуле суммирования и к изопериметрическим проблемам.

Таким образом, применением в теории тригонометрических рядов своих понятий «меры», «интеграла» «почти всюду», Анри Лебег вдохнул новую жизнь в эту старую теорию.

О прочих исследованиях Лебега

Дальнейшие исследования Лебега также группировались главным образом вокруг тех же вопросов ТФДП — теории функций действительного переменного.

В [35—36] он получил фундаментальную теорему, носящую его имя, о представлении любой L-интегрируемой функции $f(x)$ сингулярным интегралом с ограниченным ядром [46]:

$$\int_0^l f(t)\,\Phi(t, x, n)\,dt.$$

Для любой функции пространства [47] L^2, а также для каждой функции с ограниченным изменением он установил необходимые и достаточные условия представимости сингулярным интегралом, которым обязано удовлетворять ядро. В качестве применений этих своих результатов он дает известные представления сингулярными интегралами Дирихле, Пуассона и Фейера, а также интегралами Фурье и Вейерштрасса.

В [38] он имеет дело с рядами Фурье функций, удовлетворяющих условию Липшица [48], и с оценкой порядка величины остаточного члена ряда Фурье. Введя функцию Лебега, А. Лебег изучает зависимость от нее проблем сходимости тригонометрического ряда и показывает, что для последнего эта функция является константой, тоже называемой теперь *константой Лебега*:

$$\rho_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt.$$

Как было установлено позже, $\rho_n \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n$ при $n \to \infty$.

---

[46] Ядром называется любая L-интегрируемая по t функция $\Phi(t, x, n)$, заданная в квадрате $a \leqslant t \leqslant b$, $a < x < b$, если

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta \Phi(t, x, n)\,dt = 1$$

для каждых α и β, удовлетворяющих условию: $a \leqslant \alpha < x < \beta \leqslant b$. Сингулярным интегралом называется функция

$$f_n(x) = \int_a^b f(t)\,\Phi(t, x, n)\,dt.$$

[47] L^2 — пространство (множество) функций, каждая из которых на рассматриваемом сегменте или другом точечном множестве положительной меры интегрируема (L) вместе со своим квадратом, т. е. $f \in L^2$, если $f^2 \in L$, $L^2 \subset L$, $L^2 \neq L$.

[48] $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, если существует такая константа K, что для любых x_1 и x_2 из $[a; b]$, на котором рассматривается $f(x)$, $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|$.

В наше время функции Лебега [49] являются главным орудием исследования вопросов сходимости и расходимости произвольного ортогонального ряда, так как его сходимость в точке — значит, и на множестве — зависит не только от функции, разлагаемой в ряд по данной ортогональной или ортонормированной системе функций, но и от самой системы. «Во многих случаях порядок роста функций Лебега оказывается решающим для выяснения вопроса о сходимости» [50]. «Свойством, позволяющим получить более или менее точные теоремы о сходимости, является порядок роста лебеговских функций $L_n(t)$» [51].

Отметим здесь же, что продолжение указанных исследований Лебега привело в 1914 г. Н. Н. Лузина — одного из основателей московской школы ТФДП — к постановке, в частности, проблемы о сходимости тригонометрического ряда Фурье любой непрерывной функции хотя бы в одной точке. Эта проблема решена лишь в 1966 г. шведским математиком Л. Карлесоном [52]. Оказывается, что не только для непрерывной, но и для любой функции пространства L^2 ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней почти всюду.

Из других интересов А. Лебега отметим прежде всего проблему Дирихле (теперь она именуется задачей Дирихле) [53], к которой он обращался неоднократно [30, 43, 47,

---

[49] Функцией Лебега $L_n(x)$ произвольной ортогональной системы $\{\varphi_n(x)\}$ функций называется интеграл

$$L_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\,\varphi_k(x) \right| dt = \int_0^b |K_n(t, x)|\,dt,$$

$K_n(t, x)$ называется ядром или n-м ядром системы.

[50] *Г. Алексич.* Проблемы сходимости ортогональных рядов (перевод с англ.). М., ИЛ, 1963, стр. 21.

[51] *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов (перев. с немец.). М., Физматгиз, 1958, стр. 202.

[52] См., например: *В. А. Ильин, Э. Г. Позняк.* Основы математического анализа, ч. II. М., «Наука», 1973, стр. 320.

[53] Найти гармоническую функцию $u = u(x, y, z)$, т. е. решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

такую, что эта гармоническая функция определена внутри области G, а на границе Γ этой области принимает заданные непрерывные значения, т. е. в точках Γ $u(x, y, z) = f(x, y, z)$, где $f(x, y, z)$ — заданная на Γ непрерывная функция.

58, 61]. В [30] он выполнил тщательный анализ плоской проблемы Дирихле. В этом случае теория потенциала, центральной частью которой является задача Дирихле, смыкается с ТФКП — теорией функций комплексного переменного, так как действительная часть произвольной аналитической функции является решением уравнения Лапласа. Осуществленный А. Лебегом анализ смыкается с направлением исследований этой проблемы знаменитыми математиками Д. Гильбертом и А. Пуанкаре. В [43] А. Лебег вводит идею барьера [54], а в [47] приводит пример трехмерной области, ограниченной поверхностью вращения, для которой проблема Дирихле неразрешима. Наконец, в [61] им установлены требования к форме границы области и поведению субгармонических функций для разрешимости проблемы Дирихле, которые в известном смысле считаются окончательными.

Лебеговский метод изучения теории потенциала необходимо включает исследование отдельных топологических вопросов, которое он выполнил в то время, когда топология как раздел математики еще только зарождалась. В 1911 г. Л. Брауэр опубликовал доказательство инвариантности числа измерений. Лебег сразу же дал в [41] другое доказательство, основанное на одном результате К. Жордана, но не довел его до конца, на что указал Л. Брауэр. Лебег в том же году привел в [42] другое доказательство этого утверждения, легко распространяемое на пространство любого числа измерений.

Но и эти исследования Лебега в той или иной степени имеют отношение, прямое или косвенное, к его построению новой теории интеграла. Исследования в области этой теории он продолжал почти всю жизнь.

В 1910 г. Лебег возвратился в [39] к функциям многих переменных, внедрив в теорию их интегрирования функции множества. «Моя цель — расширить результаты, доказанные в последней главе моих „Лекций", на функции

---

[54] Барьером w_P для точки P области G называется непрерывная в $G + \Gamma$ (см. сноску 53) функция, субгармоническая (или супергармоническая) в G, если она всюду положительна в $G + \Gamma$, за исключением точки P, где она равна 0. Функция v субгармонична в G, если для любого шара C в G (в плоском случае — для круга) $v \leqslant M_C[v]$, где $M_C[v]$ — однозначная непрерывная функция, гармоническая в C и равная v в остальной части G.

многих переменных»,— говорит он во введении мемуара [39]. «Для суммируемой функции f интеграция f на измеримом множестве E позволяет присоединить к E числовую функцию этого множества E» ([39], стр. 361). Этой функцией является неопределенный интеграл, который «1. Абсолютно непрерывен: если $e_1, e_2, \ldots \to 0$, то $\int\limits_{e_1}, \int\limits_{e_2}, \ldots \ldots \to 0$; 2. Полностью аддитивен:

$$\int\limits_{e_1+e_2+\cdots} = \int\limits_{e_1} + \int\limits_{e_2} + \cdots,$$

e_i образуют конечное или счетное множество без общих точек» ([39], стр. 383). А. Лебег доказывает обращение этой теоремы, тем самым «эти свойства являются характеристическими для неопределенного интеграла» ([39], стр. 361). Для доказательства он обобщил понятие функции с ограниченным изменением [55].

Этот мемуар Лебега заложил фундамент теории функций множества, развитие которой связано с именами таких математиков, как Дж. Радон, Ш. Валле-Пуссен, К. Каратеодори и др.

В [16, 17] и [23] А. Лебег продолжает исследования Р. Бэра, а в [28] и [31] рассматривает другие вопросы дескриптивной ТФДП и теории множеств. Отметим лишь, что в [23] даны примеры функций любого класса Бэра и показана возможность построения функции, не принадлежащей никакому классу Бэра (назвать такую функцию, говорит Лебег). Здесь же доказано равенство мощностей множества всех функций Бэра и множества функций, измеримых (B).

Бóльшая часть сочинений Лебега 1905—1927 гг. относится к теории интеграла [22, 26, 29, 34—37, 39, 45, 48—50, 63—67). Их основные результаты нашли отражение во втором издании «Лекций по интегрированию» [68], измененных в сравнении с первым изданием в сторону углубления и уточнения отдельных исследований и дополненных четырьмя новыми главами.

Углубления и уточнения коснулись прежде всего неопределенного интеграла, с которым он имеет дело в первых двух новых главах. Лебег изучает три разных

---

[55] Эти исследования А. Лебега продолжены Н. Н. Лузиным в его докторской диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд».

подхода к этому понятию. Считая неопределенный интеграл функцией точки, функцией интервала и функцией измеримого множества, он показывает их тождественность между собой и тождественность каждой из них, при определенных условиях, примитивной функции, если пренебрегать множествами меры нуль. Сюда включены уже упомянутые результаты из [39], здесь же дано разложение Лебега абсолютно аддитивной функции множества на абсолютно непрерывную составляющую, функцию скачков и сингулярную функцию [56], которое вместе с разложением Жордана [57] играет существенную роль в современных построениях.

В следующих двух новых главах изложены обобщения интеграла Лебега, данные А. Данжуа и названные им специальной и общей тотализациями, и обобщение интеграла Римана, данное Т. Стилтьесом, на которых мы останавливаться здесь не будем [58].

Из сочинений, предшествующих второму изданию «Лекций по интегрированию», остановимся на большой статье [49], которую Лебег назвал «Замечаниями о теориях меры и интеграла». Эта статья является ответом на утверждения, содержащиеся в статье Бореля, опубликованной в 1912 г. [59]

Э. Борель определяет интеграл от ограниченной функции через предел аппроксимирующих эту функцию полиномов и говорит, что любое расширение, которое может быть получено методом А. Лебега, иллюзорно, так как предложенные им, Э. Борелем, методы для ограниченных функций так же хороши, как и лебеговы, а для неограниченных они даже лучше. В качестве примера,

---

[56] Сингулярной функцией называется функция множества, производная которой почти всюду равна нулю. В последней из названных глав Лебег рассматривает также дифференцирование функций множества.

[57] Разложением Жордана называется представление вполне аддитивной функции в виде разности положительного и отрицательного изменений ее — двух неотрицательных, вполне аддитивных функций.

[58] Интересующихся отсылаем к первоисточникам и к книге И. П. Натансона «Теория функций вещественной переменной» (изд. 2, М., ГИТТЛ, 1957); в дальнейших ссылках: *И. П. Натансон*, 1957.

[59] *E. Borel.* Le calcul des intégrales définies.—«Journ. de Math.», 1912, (6), 8, p. 159—210.

иллюстрирующего последнее утверждение, Э. Борель приводит функцию: $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$; интеграл этой функции сходится неабсолютно — следовательно, она не интегрируема по Лебегу, но интегрируема в смысле указанного определения Бореля.

Лебег показал в [49], что интеграл неограниченных функций Э. Борелем определен некорректно, так как в отдельных случаях ему можно приписать любое значение, а для ограниченных функций методы Бореля менее естественны, чем его, Лебега.

Значительная часть статьи Лебега посвящена вопросам приоритета, что также является ответом на соответствующие рассуждения Э. Бореля. Отдавая должное мере Бореля, А. Лебег подчеркивает, что первым определением интеграла, неразрывно связанным с мерой, является его, Лебега, определение. Этот «спор» между крупными математиками, которые являются (вместе с Р. Бэром) отцами ТФДП, находит некоторое отражение и в «Лекциях по интегрированию» Лебега (в сносках, особенно во втором издании).

В последующие годы заметно некоторое расширение научных интересов Лебега. Они охватывают элементарную и проективную геометрию [73, 77, 78], историю математики [46, 50, 55—57, 60, 62, 71, 74, 79—81] и популяризацию идей, связанных с понятиями меры и интеграла [54, 69, 70].

В [70] обсуждаются в доступной широким кругам форме понятия длины кривой и площади поверхности, обосновывается необходимость строгих определений этих понятий. Чтобы показать недостаточность определения, например, длины кривой через предел длины вписанной ломаной, Лебег «доказывает», что $\pi = 2$ и что сторона треугольника равна сумме двух других его сторон.

Сущность последнего рассуждения ясна из рис. 1: по построению

$$BE = EC; \qquad BE_1 = E_1E = EH_1 = H_1C; \ \ldots$$
$$DE \parallel AC, \qquad KE \parallel AB; \ D_1E_1 \quad \text{и} \quad N_1H_1 \parallel AC,$$
$$M_1E_1 \quad \text{и} \quad K_1H_1 \parallel AB.$$

Длина ВДЕКС равна сумме сторон AB и AC и равна длине $BD_1E_1M_1EN_1H_1K_1C$, а также длине любой следующей

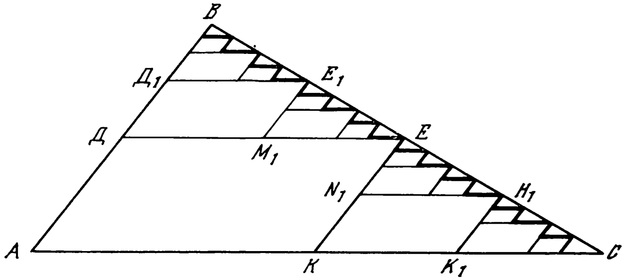


Рис. 1. $AB + AC = BC$ (?)

ломаной, которая строится тем же приемом. Но при неограниченном продолжении этого процесса длина получающейся ломаной стремится к BC, оставаясь в то же время равной $AB + AC$. Отсюда неизбежно вытекает необходимость более строгого и точного определения длины кривой.

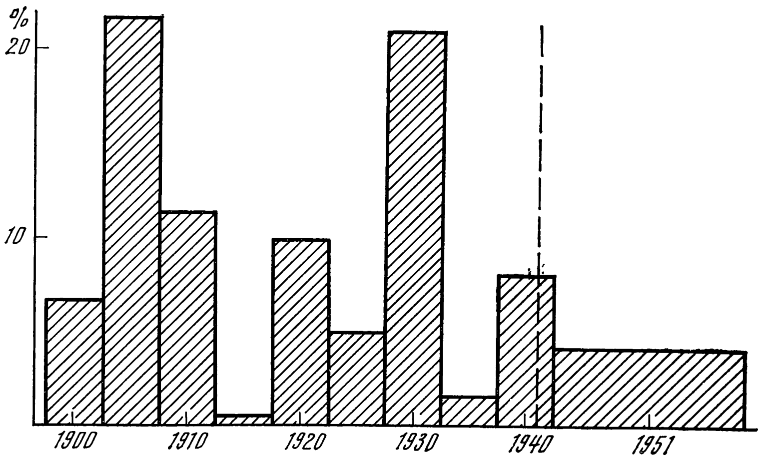


Рис. 2. Распределение сочинений А. Лебега по годам публикаций (по оси ординат отложены процентные отношения объемов сочинений Лебега по пятилетним периодам к объему всех его сочинений)

И Лебег указывает, что он принял в свое время в качестве определения длины кривой точную нижнюю грань пределов длин ломаных, вписанных в кривую, как единственное число среди бесчисленного множества всевозможных различных пределов. Разбирается, кроме того, опытное и физическое определения длины кривой.

В этой же книге Лебег предлагает радикальное изменение методики преподавания арифметики: «...предлагаемые мною изменения состоят в замене в арифметике глав, повествующих о простых и десятичных дробях, о приближенных вычислениях, единственной главой об измерении длин и о действиях над числами» ([70], стр. 44 русского перевода).

«Нетрудно определить значение работ Лебега как аналиста. Есть книги и мемуары, в которых часто упоминается его имя, и должно быть немало лекций, в которых чаще всего говорят о нем. Принятие его идей как правильных неизбежно приведет с течением времени к уменьшению этих ссылок, но останется истинным указание его места среди математиков. Его работы почти целиком лежат в одной области — в теории функций действительного переменного; в этой области он высший» [60].

И действительно, распределение сочинений Лебега по разделам математики доказывает это [61].

Имя Анри Лебега, которому принадлежит авторство в первооткрытии важнейших для современной математики и ее приложений понятий меры и интеграла Лебега, увековечено в исторически справедливых названиях этих окончательно установленных в ТФДП понятий. Тем самым отдано должное главному достижению Лебега, которое выразилось в этом первооткрытии, как и в первом построении теорий меры и интеграла Лебега, — построении, включающем доказательство их преимуществ в сравнении с предшествующими теориями. При этом форма, в которой открытия Лебега были им опубликованы, почти автоматически допускала тоже, видимо, окончательную, современную абстракцию.

---

[60] *Д. Беркил.* Анри Лебег, стр. 62 (см. сноску 39).
[61] См. стр. 68.

Об открытии меры и интеграла Лебега

К появлению счетно-аддитивной меры Бореля

К концу XIX столетия получает признание теория множеств [62]. Общеизвестна структура открытых, замкнутых и совершенных множеств [63], из которых с помощью теоретико-множественных операций (сумма и разность или сумма и пересечение), казалось, можно было получить все точечные множества. Меру ограниченного множества E вычисляли и через сумму длин покрывающих E интервалов (мера Пеано — Жордана), и как разность между длиной интервала, содержащего E, и суммой длин интервалов, входящих в CE (впервые Д. Смит) [64]. Представлялось очевидным, что на величину меры не должно влиять удаление или добавление счетного множества, но множество рациональных точек в любом интервале не измеримо (J). Так как понятие меры есть обобщение понятия длины (площади, объема, гиперобъемов), то ее главным свойством должна быть аддитивность (полная): мера

[62] В 1897 г. на Международном конгрессе математиков в Цюрихе Ж. Адамар и В. Гурвиц привели большое число примеров применения этой теории в математическом анализе, который явился главным источником появления и развития теории множеств. С этим конгрессом и связывают обычно официальное признание теории множеств.

[63] G открыто, если $G \subset G'$, F замкнуто, если $E' \subset F$, где E' — производное множество множества E, т. е. множество предельных точек E. P совершенно, если $P' = P$. Каждое открытое множество есть сумма конечного или счетного множества интервалов, попарно без общих точек. Замкнутое множество есть дополнение (сноска 15) открытого множества: $F = CG$; совершенное множество замкнуто и не имеет изолированных точек.

[64] *J. St. Smith.* On integration of Discontinuous Functions.—«Proc., of the Lond. Math. Soc.», 1875, 6, p. 140—152. В последующих ссылках: Smith, с указанием страницы.

конечного или счетного множества множеств, попарно не имеющих общих точек, равна сумме мер множеств — слагаемых. Но мера Пеано — Жордана обладает лишь конечной аддитивностью, и даже открытые множества не все измеримы (примеры Д. Смита и А. Гарнака), между тем как они представимы суммами интервалов.

Все это не могло удовлетворить математиков, побуждало их к поискам более общего понятия меры.

Изучая аналитические функции с бесконечным числом особых точек, Э. Борель счел недостаточными методы старой ТФКП и ввел в арсенал ее средств теорию множеств. Область непрерывности, тем более дифференцируемости, в простейшем случае есть совокупность интервалов. Тогда исключительные точки обязаны быть концами этих интервалов, а их множество — дополнением области непрерывности. Отсюда и «цепочка» определений Э. Бореля.

Если E — конечное или счетное множество неперекрывающихся интервалов, сумма длин которых s, то мера E есть s. Если s_1 и s_2 — меры двух таких множеств E_1 и E_2 без общих точек, то $s_1 + s_2$ — мера их суммы $E_1 + E_2$. Вообще если E — сумма счетного множества множеств E_k, попарно не пересекающихся и меры s_k которых уже определены, то $s = \sum\limits_1^\infty s_k$ — мера E. При этом несущественно, входят в E границы интервалов, составляющих E, или не входят. Если $E_1 \supset E_2$, s_1 и s_2 — их меры, то $E_1 - E_2$ будет иметь меру $s_1 - s_2$.

Д. Смит подсчитывал меры своих множеств в полном соответствии с этой «цепочкой» Бореля (за 23 года до Бореля), но он считал это само собой разумеющимся. Борель первым дал такое определение и включил его в учебный курс теории функций [65].

Борелю для приложений к изучению аналитических функций было необходимо лишь предложение: если E имеет меру, отличную от нуля, то E не может быть счетным. Если же мера E равна нулю, то E не обязательно счетно [66].

---

[65] *E. Borel.* Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1898.

[66] Таково множество Кантора, таково же покрытие рациональных точек интервалами, построенное Борелем,

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{kq^3}; \quad \frac{p}{q} + \frac{1}{kq^3}\right)\right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E_1E_2 \ldots, \text{ где}$$

Мера Бореля по определению обладает свойством полной аддитивности и, как будет показано позднее, класс борелевых множеств является наименьшим классом, замкнутым относительно сложения и вычитания или пересечений, т. е. наименьшей σ-алгеброй.

Теория Бореля не охватывает теории Жордана (см. стр. 18). Ее недостаточность стимулировала поиски пополнения меры Бореля, хотя она и охватывала столь широкий класс множеств, что его было вполне достаточно для нужд классического анализа, если не считать теории тригонометрических рядов.

Другие недостатки теории Бореля привели к так называемой «проблеме меры Бореля» — можно или нельзя получить отрицательную меру, так как по определению Бореля суммируются вообще знакопеременные ряды [67]. Эта проблема мгновенно разрешается, если исходить из концепции Лебега. Возможно ли обойти эту трудность в рамках теории меры Бореля, неизвестно до сих пор.

Мера Бореля — результат внутреннего развития теории множеств, так как все предпосылки ее появились именно в этой последней. Введение меры Бореля возможно лишь после установления структуры основных точечных множеств. Потребности ТФКП и собственные исследования Э. Бореля в этой области явились толчком к завершению внутреннего развития, конкретной задачей открытия меры Бореля.

$\left\{\frac{p}{q}\right\}$ — множество всех рациональных точек числовой прямой. Сумма длин всех (вообще перекрывающихся) интервалов, входящих в E_k, меньше $\frac{2}{k}\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q^2}-\frac{1}{q^3}\right)<\frac{1}{k}$, так как для данного q этих интервалов $\leqslant q-1$ и сумма их длин $\leqslant (q-1)\frac{2}{kq^3}=$ $=\frac{2}{k}\left(\frac{1}{q^2}-\frac{1}{q^3}\right)$, т. е. мера множества E равна нулю, так как $\mu E_k\leqslant\frac{1}{k}$, а $\mu E=\lim\limits_{k\to\infty}\mu E_k$.

Несчетное множество

$$\{\xi\}=\left\{\frac{a_1}{10^{1!}}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\cdots+\frac{a_k}{10^{k!}}+\cdots\right\}$$

(a_k — цифры) принадлежит E, так как принадлежит всем E_k.

[67] См., например: *Н. Н. Лузин*. Сочинения, т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 528—532.

Открытие полной меры Лебегом

Идея нового конструктивного определения интеграла привела Лебега к необходимости приписать меру множествам вида $E(f = m)$, $E(m < f < M)$. Они имеют a priori неизвестную структуру, поэтому мера Бореля неприменима. Мера Жордана также непригодна, ибо даже для очень простых функций эти множества могут быть неизмеримыми — например, для функции Дирихле. Но построения Д. Пеано и К. Жордана подсказывали замену конечных покрытий счетными при учете борелевых определений, а это и превращает меру Пеано—Жордана в меру Лебега. Таким образом, результаты Лебега в теории меры являются прямым следствием выполненного Лебегом синтеза идей Бореля с идеями Жордана и Пеано.

Этот синтез Лебег выполнил под влиянием Бореля. «Если множество E содержит все точки измеримого множества E_1 меры α, то можно утверждать, что мера E больше α, не беспокоя себя вопросом, измеримо E или нет. Обратно, если E_1 содержит все точки E, то мера E меньше α. Термин „больше“ и „меньше“ не исключает случая равенства» [68]. «В главе первой вслед за Борелем я определяю меру множества через ее основные свойства. После пополнения и уточнения кратких указаний, данных Борелем [69], я устанавливаю отношения, существующие между мерой, так определенной, и мерой в смысле Жордана» ([10], стр. 232).

Эти указания Бореля, конечно, очень ценны, и Лебег признает это, однако в них нет речи о тех конкретных шагах, которые приводят к мере Лебега. Поэтому именно Лебег является действительным первооткрывателем меры Лебега, и название этой меры его именем оправдано исторически.

Развитие теории меры, выполненное Лебегом, является завершением эволюции понятия меры и заключает в себе почти автоматическую возможность абстракции через широко используемое Лебегом понятие вполне аддитивной функции множества. Отметим, что до Лебега уже были попытки систематического изучения таких функций, на-

---

[68] *Э. Борель*. Цит. соч., стр. 48.
[69] Здесь А. Лебег ссылается на сочинение Э. Бореля; см. сноску 65.

пример у О. Коши и Д. Пеано, но ввиду их преждевременности они не имели ни успеха, ни особого значения для последовавшего после соответствующих работ Лебега развития теории меры. Поэтому только Лебега следует считать основателем современных теорий меры и аддитивных функций множества [70].

Открытие полной меры Юнгом

Знакомство с работами Г. Кантора и Д. Смита привело В. Юнга к углубленному изучению структуры и меры точечных множеств [71]. Результаты этого изучения отражены в большой серии статей, опубликованных в 1902—1905 гг. В. Юнг впервые рассматривает бесконечные последовательности замкнутых множеств, которые уже не обязаны иметь пределами замкнутые множества. Юнговы предельные множества являются B-множествами типа F_σ и G_δ [72].

Меру J конечного или бесконечного множества неперекрывающихся интервалов (бесконечное множество таких интервалов, согласно теореме Кантора, счетно) В. Юнг определяет как сумму их длин. Он показывает также, что интервалы можно заменить сегментами без изменения меры [73]. Меру $J(P)$ замкнутого множества P,

---

70 Здесь нам хотелось бы еще раз подчеркнуть, что уже в заметке [7] 1901 г. Лебег использует введенное им, Лебегом, понятие меры, а не меру Бореля. В сноске Лебег указывает: «Если добавить к этим множествам множества меры нуль, выбранные надлежащим образом, то получим измеримые в смысле Бореля множества» ([7], стр. 1026). И хотя понятий внешней и внутренней мер в четкой форме там нет, но и о них имеется упоминание в признаке измеримости. Более полно отразить эти понятия в короткой заметке, и без того пересыщенной новыми результатами, не было ни возможности, ни надобности. Теперь совершенно очевидно, что к 1901 г. А. Лебег свободно владел новым понятием меры.

71 Многочисленные ссылки В. Юнга свидетельствуют о хорошем знакомстве его и с теми исследованиями Б. Римана, Г. Ганкеля, Д. Смита и других, которые привели к разработке теории множеств.

72 О множествах типа F_σ и G_δ см., например, книгу И. П. Натансона.

73 *W. H. Young*. Sets of Integrals on the Straight Line.—«Proc. Lond. Math. Soc.», 1903, 35, p. 245—268; On closed sets of points and Cantor's numbers.— Там же, 1904, (2), 1, стр. 230 и сл.

заключенного в интервале длины l, В. Юнг определяет через разность $l - J_e(P)$, где $J_e(P)$ — сумма длин интервалов, составляющих дополнение P. Для произвольного ограниченного множества E Юнг, как и Лебег [74], вводит понятия внешней μ^*-и внутренней μ_*-мер. μ^*E есть нижняя грань мер открытых множеств, содержащих E, μ_*E — верхняя грань мер всевозможных замкнутых множеств, входящих в E. E измеримо, если $\mu^*E = \mu_*E$.

Отдавая себе отчет в возможном существовании неизмеримых множеств [75], В. Юнг рассматривает внутренний и внешний аддитивные классы множеств, для которых справедливы теоремы внутреннего и внешнего сложения: если $E = F + E_1$, F — замкнуто, то в первом случае $\mu_*E = \mu F + \mu_*E_1$, во втором $\mu^*E = \mu F + \mu^*E_1$. Замкнутые и открытые множества, множества F_σ и G_δ, а также все множества, получаемые из них обычными процессами, принадлежат обоим классам. Множества аддитивного класса, составляющего пересечение внутреннего и внешнего классов, образуют тело.

Таким образом, независимо от Лебега, отправляясь от тех же исследований предшественников, В. Юнг построил законченную теорию меры точечных множеств, которая у него явилась следствием внутреннего развития теории множеств, тогда как у Лебега — внешнего: ее создание Лебегом носило прикладной характер, так как теория меры для него лишь фундамент теории интеграла.

Две стороны открытия интеграла Лебега

А. Лебег построил свою теорию меры для обобщения интеграла Римана. В. Юнг, наоборот, получил интеграл Лебега, исходя из распространения построенной им меры Лебега на множества многих измерений. Для Лебега ин-

---

[74] В следующей статье («The open sets and the theory of contents».— «Proc. Lond. Math. Soc.», 1905, (2), 2, p. 16—51) В. Юнг отметил, что диссертация А. Лебега привлекла его внимание после представления данной статьи в журнал; именно в ней В. Юнг выполнил полное построение теории меры и установил класс измеримых множеств.

[75] Первое неизмеримое множество построено Ван Влеком в 1907 г. с помощью аксиомы выбора, без привлечения которой построить такое множество не удалось до сего времени.

теграл есть плоская мера ординатного множества, для В. Юнга, наоборот, последняя есть интеграл от меры сечения ординатного множества.

Несмотря на различие подходов А. Лебега и В. Юнга это — лишь одна сторона двойного открытия меры и интеграла Лебега, завершение одной линии исследований, геометрической: интеграл Римана — мера Пеано — Жордана — мера Бореля — мера Лебега — интеграл Лебега. В этом А. Лебег и В. Юнг в равной мере являются авторами открытия.

Однако имеется и другая сторона, принадлежащая целиком одному Лебегу,— функциональная сторона, которая завершает функциональную линию развития: интеграл Римана — дифференцирование неопределенного интеграла — примитивная — ряды и последовательности интегрируемых функций — интеграл Лебега. А именно благодаря формуле Ньютона—Лейбница понятие интеграла имеет богатейшие приложения.

Анри Лебег завершил своим открытием обе линии исследований и опередил В. Юнга на четыре года, поэтому название интеграла и меры его именем вдвойне исторически оправдано.

Ближайшее развитие интеграла Лебега выявило возможность двух основных конструкций интеграла — функциональной и геометрической. Функциональная конструкция выражена в определении Ф. Рисса и новом определении В. Юнга. В соответствии с этими определениями выбирается класс функций, определение интеграла для которых очевидно. Он пополняется за счет пределов последовательностей функций выбранного класса, сходящихся либо равномерно (Ф. Рисс), либо монотонно (В. Юнг), и интеграл для них определяется как предел интегралов от членов последовательностей. Дальнейшее расширение достигается добавлением тех $f(x)$, для которых существуют функции $l(x)$ и $u(x)$ полученного класса такие, что $l(x) \leqslant f(x) \leqslant u(x)$ и $\sup\limits_{l} \int l(x)\,dx = \inf\limits_{u} \int u(x)\,dx$.

Грани можно заменить пределами (при этом точечная сходимость заменяется сходимостью почти всюду). Последнее расширение и приводит к обобщению интеграла Римана, а также к полноте полученного класса L функций. Этот класс совпадает с пространством интегрируемых по Лебегу функций, построенным (двояким образом) с позиций меры (геометрическое и аналитическое определения А. Лебега и первые определения В. Юнга).

Таким образом, единая сущность обобщения интеграла Римана интегралом Лебега, имея две стороны, проявляется по-разному, в зависимости от формы (конструкции) интеграла Лебега. Отсюда, между прочим, и два направления дальнейшего развития интеграла Лебега, каждое из которых имеет, в свою очередь, две ветви развития.

Историческая обусловленность открытия А. Лебега

Общеисторическая обстановка

В конце XIX — начале XX в. происходит пересмотр старых представлений во всех областях науки, что всюду приводит к решающим открытиям. Таковы учения Ч. Дарвина, К. Маркса, Д. Максвелла, фундаментальные открытия К. А. Тимирязева, Д. И. Ивановского, Д. И. Менделеева, внедрение в технику двигателей внутреннего сгорания, применение электроэнергии, радиоактивность, географические открытия (Н. М. Пржевальский, Н. Н. Миклухо-Маклай, П. К. Козлов, Р. Пири, Р. Амундсен) и мн. др.

Все это говорит о крутой ломке структуры научных знаний, о движении их вширь и вглубь. При этом в недрах старых представлений рождались новые понятия. Установление электромагнитной природы массы, например, привело к революционной перестройке взглядов на основные физические понятия и законы, одним из продуктов которой явилась впоследствии общая теория относительности А. Эйнштейна.

Ситуацию в физике на рубеже XIX — XX столетий А. Пуанкаре назвал кризисом. Перед нами руины старых принципов, писал он. Принцип Лавуазье, принцип Ньютона, принцип Майера — все эти принципы, являвшиеся основными, теперь подвергаются сомнениям.

Общеисторическая обстановка очевидно благоприятствовала критическому переосмыслению основ и фундаментальным открытиям. Но и в самой математике наблюдалась та же картина.

Процесс арифметизации классической математики завершился созданием теорий действительных чисел. Евклидовы модели Э. Бельтрами и Ф. Клейна неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана арифметизировали и эти теории. Теперь была естественной аксиоматизация арифметики, которая и была осуществлена Р. Дедекиндом и Д. Пеано.

В математическом анализе появились не охватываемые теорией интеграла Римана факты, число которых росло к концу XIX столетия подобно снежному кому. «Основные определения подверглись чрезвычайному обобщению, ...исследовались функции с самыми необыкновенными свойствами и аллюром... Это дало возможность говорить видным математикам о превращении или вырождении математического анализа в „клинику и патологию функций“ (Валле — Пуссен), ибо правильное течение функций стало редчайшим исключением»[76]. Анализ снова сотрясают грозные удары критики основ. Под ее воздействием и строилась теория множеств, с помощью идей которой почти сразу началось подведение под анализ нового фундамента [77].

К концу XIX столетия происходит также повсеместное внедрение аксиоматического метода. Развитие взглядов Б. Римана доведено Д. Гильбертом до логического завершения в книге «Основания геометрии», опубликованной в 1899 г., которая «благодаря ясности и глубине изложения вскоре с полным основанием стала своего рода хартией современной математики» (Н. Бурбаки) [78].

Таким образом, ситуация, сложившаяся в математике, была в еще большей степени благоприятна для фундаментального открытия Анри Лебега.

---

[76] *Н. Н. Лузин.* Сочинения, т. 3. М., 1959, стр. 394.

[77] Но и в теории множеств в самом конце XIX столетия — через 25 лет после ее создания — появились первые антиномии — провозвестники очередного кризиса оснований, в результате которого родилась новая ветвь математики — метаматематика.

[78] *Н. Бурбаки.* Очерки по истории математики. М., ИЛ, 1963, стр. 27.

Ход идей
в развитии теории интегрирования

В 1829 г. П. Г. Лежен-Дирихле в известном мемуаре [79] установил достаточные условия представимости функции тригонометрическим рядом Фурье — знаменитые условия Дирихле, которым удовлетворяют функции столь широкого класса, что Б. Риман писал [80]: «...мы можем с уверенностью считать, что те функции, на которые не распространяется исследование Дирихле, в природе не встретятся».

В конце мемуара Дирихле указал: «Для того чтобы ряд (7) [81] имел смысл, когда число разрывов непрерывности бесконечно, нужно только, чтобы функция удовлетворяла следующему условию. Каковы бы ни были два количества a и b, находящиеся в пределах $-\pi$ и π, всегда между ними можно вставить два других количества r и s настолько близкие, что функция $\varphi(x)$ будет непрерывна в промежутке от r до s. Необходимость этого ограничения мы почувствуем, если примем в соображение, что различные члены ряда представляют собою определенные интегралы. Тогда мы увидим, что интеграл функции только в том случае имеет смысл, если она удовлетворяет данному выше условию».

Всюду разрывной интегрируемая функция не может быть. В качестве контрпримера Дирихле указал на известную теперь под его именем функцию, равную 1 для рациональных точек и 0 для остальных, и добавил: «Ограничение, которое я только что ввел, и условие, чтобы функция не становилась бесконечной,— это единственные ограничения, которые должны налагаться на функцию,

---

[79] *P. G. Lejeuen-Dirichlet*. Sur la convergence des séries trigonométriques...«J. f. Math.», 1829, 4, p. 157—169; русский перевод. в сб.: «Разложение функций в тригонометрические ряды». Харьков, 1914, стр. 1—90.

[80] *Б. Риман*. Сочинения. М.— Л., Гостехиздат, 1948, стр. 234.

[81] Ряд (7) в мемуаре Дирихле имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos x \int \varphi(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha + \cos 2x \int \varphi(\alpha)\cos 2\alpha\, d\alpha + \cdots \\ \sin x \int \varphi(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha + \sin 2x \int \varphi(\alpha)\sin 2\alpha\, d\alpha + \cdots\end{array}\right.$$

и все случаи, которые не исключены ими, могут быть приведены к случаям, нами изученным. Но чтобы сделать это со всей желательной ясностью, необходимо исследовать некоторые подробности, связанные с основными принципами анализа бесконечно малых; я предполагаю вернуться к этому в другой работе...».

Таким образом, интегрируемая по Дирихле [82] функция обязана быть либо непрерывной, либо весьма близкой к непрерывной функции. Характер близости и этот признак вместе с определением интеграла требовали уточнения, что Дирихле и обещал сделать. Однако своего обещания он не выполнил.

Уточнение, о котором идет речь, было осуществлено Б. Риманом. «Никто другой не оказал более решительного влияния на современную математику» — эти слова Ф. Клейна, раскрывающие значение исследований Б. Римана для современной математики, относятся, в особенности, к внесенному Риманом вкладу в теорию интеграла его диссертацией «О возможности представления функции тригонометрическим рядом» [83].

Риман впервые нашел интегрируемую функцию с бесконечным множеством точек разрыва, таким, что в любом интервале $(r;\ s)$, как бы ни были близки к друг к другу r и s, имеется бесчисленное множество точек разрыва:

$$f(x) = (x) + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \frac{(4x)}{16} + \cdots$$

$$\cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(kx)}{k^2} = \lim_{n\to\infty} f_n(x);$$

(x) есть разность между x и ближайшим к нему целым числом; если $x = n + {}^1/_2$, где n — целое число, то $(x) = 0$. $f(x)$ разрывна при x, равном несократимой дроби с

[82] По предположению К. Вейерштрасса, Дирихле намеревался обобщить интеграл Коши на функции с бесконечным множеством точек разрыва, что он фактически и сделал, определив интеграл как сумму интегралов Коши, взятых над интервалами непрерывности. Для такого интеграла его признак был бы и необходимым, и достаточным, но он все равно нуждался бы в расширении до интеграла Римана.

[83] *Б. Риман.* Сочинения, стр. 225—262. Эту диссертацию Риман представил философскому факультету Геттингенского университета в декабре 1853 г., но она стала известной лишь в 1867 г. после опубликования в трудах Геттингенского об-ва наук.

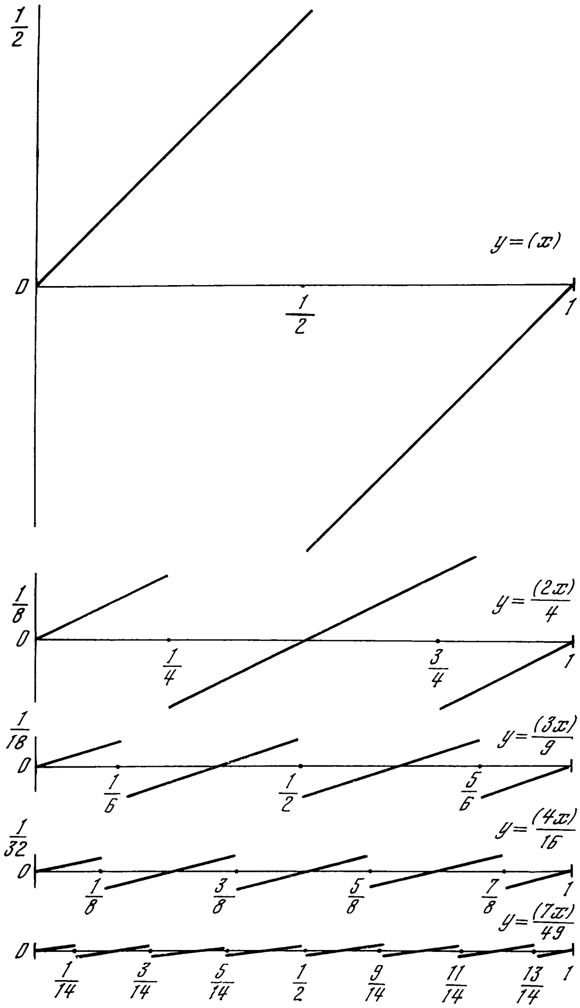


Рис. 3. Слагаемые функции Римана

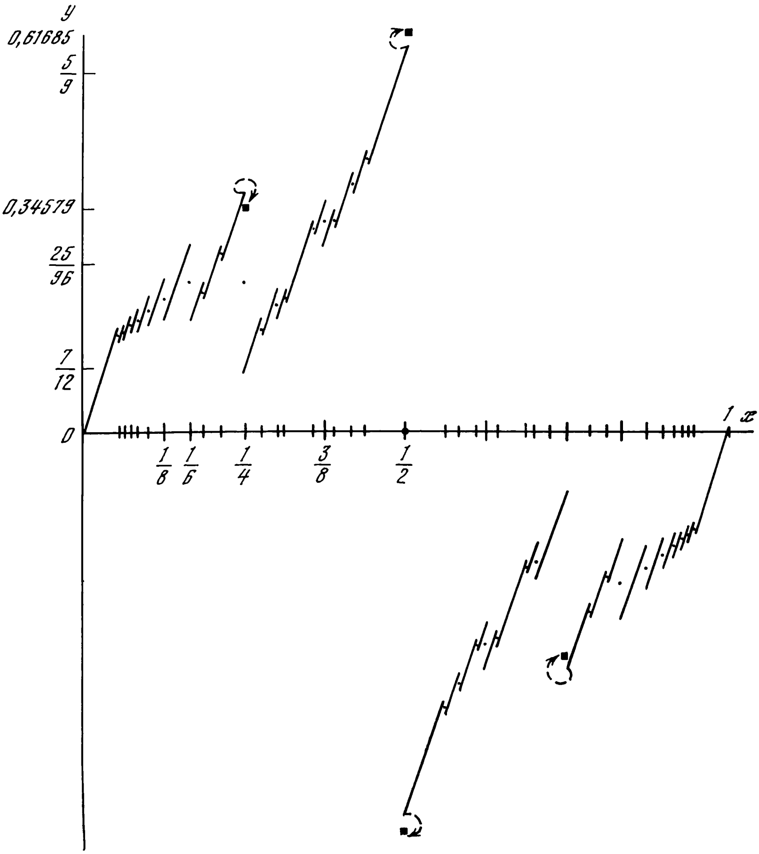


Рис. 4. Приближение функции Римана
$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

График функции $f_9(x) = (x) + \dfrac{(2x)}{4} + \dfrac{(3x)}{9} + \cdots + \dfrac{(9x)}{81}$.

■ — $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(\dfrac{1}{2} \pm 0\right) = f\left(\dfrac{1}{2} \pm 0\right)$,

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(\dfrac{1}{4} - 0\right) = f\left(\dfrac{1}{4} - 0\right)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n\left(\dfrac{3}{4} + 0\right) = f\left(\dfrac{3}{4} + 0\right)$.

четным знаменателем [84]. Каждое слагаемое функции Римана является нечетной периодической функцией с периодом 1, следовательно, все $f_n(x)$ и $f(x)$ таковы же. «График» $f(x)$ «состоит» из вертикальных отрезков, настолько плотно прилегающих друг к другу [85], что для x, например из $(0; {}^1/_2)$, они вырезают на плоскости фигуру положительной площади [86]. Свойства этой функции, построенной Б. Риманом, несомненно, в качестве контрпримера для признака Дирихле [87], показывают, насколько непросто понятие интегрируемости и как сложно могут переплетаться точки разрыва таких функций с точками непрерывности, хотя в *основной массе* все более мелких интервалов разбиения области интегрирования колебания интегрируемой функции должны становиться все меньше [88].

---

[84] Всюду плотное множество точек разрыва этой функции в интервале (0,1) порождается одной точкой разрыва функции (x). Этот прием Б. Римана называют, начиная с Г. Ганкеля (о нем речь впереди), принципом сгущения особенностей.

[85] Но тем не менее с бесконечным множеством просветов над теми x, которые являются точками разрыва функции Римана.

[86] График функции $f(x)$ симметричен не только относительно начала координат, но и любой «целой» или «половинной» точки: $\ldots, -1, -{}^1/_2, 0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots$, поэтому

$$\int_{1/2}^{1} f(x)\,dx = -\int_{0}^{1/2} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{0}^{1} f(x)\,dx = 0, \quad \text{но} \quad \int_{0}^{1/2} f(x)dx > 0.$$

Отметим, что порядок изложения у Римана обратный: определение интеграла, критерий интегрируемости с доказательством, функция Римана. На наш взгляд, построение этой функции явилось началом новых исследований Римана, конкретной задачей, которая привела его к решающему для дальнейшего критерию интегрируемости.

[87] Риман обосновывает введение этой функции после доказательства критерия следующим образом: «...применим результаты нашего исследования к частным случаям... прежде всего для функций, которые имеют бесконечное число разрывов между двумя как угодно близкими значениями аргумента. Такие функции еще никем не были изучаемы, и потому нам будет удобно исходить из определенного примера» (*Б. Риман.* Сочинения, стр. 238).

[88] Характеристическая функция множества точек разрыва функции Римана уже не интегрируема, так как каждая точка любого интервала становится ее точкой разрыва, т. е. функция Римана находится на границе класса интегрируемых (R) функций.

В этом последнем как раз и состоит сущность критерия интегрируемости Римана, который явился началом и теории интегрирования, и развития этой теории в двух направлениях, и одним из главных источников теории множеств: для интегрируемости ограниченной функции на $(a;\ b)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\sigma > 0$ существовало такое разбиение $(a;\ b)$ на частичные интервалы, для которого сумма длин тех из них, в которых колебание функции [89] больше этого σ, была произвольно мала, т. е. меньше заранее и независимо от σ взятого как угодно малого $\varepsilon > 0$.

Для испытания функции на интегрируемость по этому критерию (равно как и для его доказательства) необходимо произвольно взятое разбиение представить в виде двух множеств E_1 и E_2. E_1 содержит все те интервалы, в которых колебание функции больше σ, E_2 состоит из остальных интервалов разбиения. Затем следует найти суммарную длину входящих в E_1 интервалов. Ясно, что вообще при $\sigma \to 0$ число интервалов, составляющих E_1, стремится к бесконечности.

Теперь понятно, почему критерий Римана вынуждает изучать бесконечные множества интервалов и дополнения таких множеств с точки зрения их структуры и меры, обобщающей понятие длины, вследствие чего критерий Римана является началом теоретико-множественной, геометрической линии развития теории интеграла.

Но в доказательстве Римана имеются почти в явном виде верхние и нижние интегральные суммы, а в неявном — верхние и нижние интегралы (по избытку и по недостатку — в терминологии К. Жордана) и функции Бэра, т. е. исследование Римана заключает в себе начало и функциональной линии развития интеграла [90].

Упомянутое представление интегральной суммы в виде двух групп слагаемых по принципу близости или

---

[89] Колебанием функции в интервале Б. Риман называет разность между наибольшим и наименьшим значениями ее на этом интервале. Правильнее вместо значений брать точные грани.

[90] Более того, в его обозначении $x_i - x_{i-1} = \delta_i$ содержится возможность расширения смысла интеграла до обобщения Т. Стилтьеса. Интегральная сумма в записи Римана имеет вид: $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \dots$ $\dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$, где ε — положительные правильные дроби.

удаленности соседних значений функции есть начало пути к лебегову определению интеграла.

Таким образом, сосредоточив все внимание на одной из двух сторон интеграла (определение по О. Коши), Риман расширил область применения интеграла. Вместе с тем появились зародыши многих новых понятий с направлениями их ближайшего развития и стало возможным построение теории интеграла.

В критерии Римана далеко не очевидна роль точек разрыва [91], хотя совершенно ясно, что все дело в них, что свойство интегрируемости разрывной функции обусловлено какими-то свойствами всех ее точек разрыва, множества этих точек. Отсюда с очевидностью вытекает необходимость преобразования критерия — преобразования, которое выявляло бы эти свойства. Последнее требует предварительного изучения структуры и меры различных точечных множеств, так как a priori мыслимы в качестве множеств точек разрыва какие угодно совокупности точек прямой [92].

Немецкий математик Г. Ганкель в мемуаре 1870 г. [93] обратился уже к точкам разрыва, заменив колебание функции в интервале по Риману «скачком функции в точке, который больше σ» [94]. Вследствие этого он был вы-

---

[91] В случае интегрируемой функции $f(x)$ все точки какого угодно интервала, даже сколь угодно малого, с колебанием функции $f(x)$, большим σ, не могут быть точками разрыва, в которых $|f(x+0)-f(x-0)|>\sigma$. В самом деле, если интервал длины $\alpha>0$ состоит из одних таких точек разрыва, тогда и в каждом его подынтервале колебание функции $f(x)$ тоже $>\sigma$, поэтому сумма длин интервалов, в которых колебание $>\sigma$, во всяком случае будет $\geqslant\alpha>0$, что противоречит предположению об интегрируемости функции $f(x)$.

[92] Много позже будет выяснено, что множество точек разрыва совершенно произвольной функции есть множество типа F_σ.

[93] *Hankel H.* Untersuchungen ueber die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Funktion. Tübingen, 1870. Перепечатана в «Math. Ann.», 1882, **20**, S. 63—107.

[94] «Функция $f(x)$ называется разрывной при $x=a$, если среди значений разности $f(a+\delta)-f(a)$ для всех положительных и отрицательных δ, численно меньших ε, как бы мало это ε ни было, всегда найдутся значения, численно превышающие вполне определенное σ. О такой функции я буду говорить, что она имеет при $x=a$ скачок, который больше σ» («Math. Ann.», S. 84). Это понятие Г. Ганкеля предваряет «колебание функции в точке» Р. Бэра, введенное Р. Бэром в его докторской диссертации 1899 г.

нужден впервые стать на теоретико-множественную точку зрения. Г. Ганкель на примерах показал необходимость различать два класса функций с бесконечным множеством точек разрыва: всюду разрывные и точечно разрывные функции. Точки разрыва с колебанием $> \sigma$ образуют всюду плотное множество для первых и нигде не плотное для вторых [95].

К этой полезной классификации Г. Ганкель пришел в результате своей попытки сблизить критерий интегрируемости Римана с признаком Дирихле (соединить несоединимое). Этим же объясняется и включение Ганкелем в свой мемуар предложения: «Всюду разрывная функция никогда не интегрируема, точечно разрывная всегда интегрируема» [96], вторая часть которого ошибочна. Ошибка является следствием другой ошибочной теоремы Ганкеля: нигде не плотное множество можно заключить в интервалы, сумма длин которых как угодно мала (стр. 87 его мемуара).

Именно эти ошибки Ганкеля явились импульсом к углубленному изучению результатов, найденных Риманом (значит, и к выявлению содержащихся в них «начал»), так как истинность утверждений Ганкеля сразу же показалась сомнительной [97].

Первым указал на ошибки Ганкеля английский математик профессор Оксфорда Д. Смит в уже упоминавшемся мемуаре 1875 г. (см. сноску 64). Примерами он доказал, что класс точечно разрывных функций состоит не только из интегрируемых функций. Соответствующие точечные множества представляют и самостоятельный интерес, поэтому приводим их. Пусть любое из a_i пробегает множество

---

[95] Названия «всюду плотное» и «нигде не плотное» введены позже Г. Кантором. По Г. Ганкелю, первое множество определяется тем, что в любом интервале имеется хотя бы одна точка множества; между любыми двумя точками второго множества можно указать интервал, в котором нет ни одной точки множества.

[96] «Math. Ann.», S. 87. Первая часть этого предложения верна и ему не противоречит функция Римана, так как у нее лишь конечное число скачков превышает любое определенное σ.

[97] Следует напомнить, что к концу XIX столетия заметно возросли требования к строгости рассуждений во всех областях математики, а в 1872 г. Г. Кантор, Э. Гейне, Р. Дедекинд, К. Вейерштрасс и Ш. Мерэ по-разному и независимо друг от друга построили строгую теорию действительных чисел — один из источников теории множеств.

натуральных чисел независимо от остальных ($i = 1, 2, \ldots, k$):

$$P_1 = \left\{\frac{1}{a_1}\right\}, \quad P_2 = \left\{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right\}, \ldots,$$

$$P_k = \left\{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right\}^{98}.$$

Д. Смит дает еще два способа построения нигде не плотных множеств. Разделим [0; 1] на $m > 2$ равных последовательных интервалов и удалим последний. Каждый из оставшихся интервалов делим также на m равных интервалов и из каждого удаляем последний из вновь построенных. При неограниченном продолжении этого процесса останется нигде не плотное множество P меры нуль [99]. Снова делим [0; 1] на $m > 2$ равных интервалов и удаляем последний. Каждый из оставшихся интервалов

---

[98] Обозначение $\{x \mid P(x)\}$ Д. Смит не использует. Множества P_k являются примерами множеств всех типов ν, введенных. Кантором в 1872 г. в связи с проблемой единственности тригонометрического ряда. Сам Кантор привел пример лишь множества типа 1 — пример, известный еще Ганкелю. Множество E называется множеством типа ν, если его ν-е производное множество состоит из конечного числа точек. $E'' = (E')'$ и т. д. $P_1' = \{0\}$, поэтому P_1 есть множество типа 1, $P_2' = P_1$, поэтому P_2—типа 2 и т. д. Смит не ссылается на Кантора, но и не называет свои множества по Кантору.

[99] Первый раз удаляется один интервал длиной $\frac{1}{m} = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)$, второй раз удаляется еще $m - 1$ интервалов, каждый длиной $1/m^2$, а всего удалено m интервалов, сумма длин которых равна

$$S_2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m^2}(m-1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m} \times \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2.$$

Теперь легко получить индукцией по k: $S_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k$. При $k \to \infty$ $S_k \to 1$, так как $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^k \to 0$.

Множество P состоит из чисел, которые в системе счисления с основанием m записываются без последней цифры $m - 1$, но такие числа в системе счисления с основанием $m - 1$ дают все числа сегмента [0; 1], т. е. P равномощно с [0; 1], эквивалентно ему (об этом Смит не упоминает).

делим не на m, а на m^2 интервалов, и из каждого удаляем последний из вновь построенных. Теперь оставшиеся интервалы делим на m^3 частей и в каждом из них удаляем последнюю из этих частей, затем на m^4 и т. д. После всех удалений останется нигде не плотное множество Q, мера которого больше нуля [100].

Если положить $m = 3$ и удалять средние интервалы вместо последних, то вместо P получим построенное позже совершенное тернарное множество Кантора (множество P Смита лишь замкнуто; оно включает счетное множество изолированных точек — концов удаленных интервалов — и несчетное множество других точек).

---

[100] Первый раз удаляется один интервал той же длины, что и для множества P, второй — $m - 1$ интервалов (столько, сколько осталось после первого удаления), каждый длиной $\frac{1}{m} : m^2 = \frac{1}{m^3}$. Всего за две операции удалено $N_2 = 1 + (m - 1)$ интервалов, сумма длин которых

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{m^3}(m-1) = S_1 + \frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right).$$

В третий раз удаляется столько интервалов, сколько их осталось после второго удаления, т. е. $(m - 1)\, m^2 - (m - 1) = (m - 1) \cdot (m^2 - 1)$. Каждый интервал при этом удалении имеет длину $\frac{1}{m^3} : m^3 = \frac{1}{m^6}$, так что всего за три операции удалено $N_3 = 1 + (m - 1) + (m - 1)(m^2 - 1)$ интервалов, сумма длин которых

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{m^6}(m-1)(m^2-1) = S_2 + \frac{1}{m^3}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\left(1 - \frac{1}{m^3}\right).$$

Теперь ясно, что после k операций будет выброшено $N_k = 1 + (m - 1) + (m - 1)(m^2 - 1) + \ldots + (m - 1) \cdot (m^2 - 1)(m^3 - 1) \ldots (m^{k-1} - 1)$ интервалов, сумма длин которых

$$S_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\left(1 - \frac{1}{m^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m^k}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{m^i}\right).$$

Смит указал, что эти примеры понадобились ему для опровержения ошибочных теорем Ганкеля, чтобы предостеречь от небрежного обращения с точечными множествами. Любая разрывная лишь в точках множества P_k (для любого k) или P ограниченная функция интегрируема, а если точки разрыва образуют множество Q, то она не интегрируема. Все примеры и необходимые доказательства Д. Смита интересны тем, что они как бы впитали в себя все уже достигнутое в теории интеграла, заключая в то же время основные элементы и последовавшего развития этой теории [101].

Так как Ганкеля привело к ошибке неправильное «измерение» точечных множеств, то опровержение его «теорем» повлекло интенсивные исследования математиков многих стран [102] — исследования, которые менее чем через 20 лет завершились построением конечно аддитивной меры Пеано—Жордана, а вскоре и мерой Бореля.

К. Жордан немедленно применил введенное им независимо от Д. Пеано понятие меры к новому обоснованию

$$\text{При } k \to \infty \quad S_k \to 1 - \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m^i}\right) = 1 - E\left(\frac{1}{m}\right).$$

Бесконечное произведение $E\left(\frac{1}{m}\right)$ было изучено Л. Эйлером, который нашел $0 < E\left(\frac{1}{m}\right) < \frac{1}{2}$. Следовательно, Q имеет меру $E\left(\frac{1}{m}\right)$, бóльшую нуля.

Формулы для N_k и S_k легко доказать индукцией. Д. Смит указал готовые формулы без вывода.

[101] Д. Смит является одним из главных предшественников В. Юнга в открытии последним меры Лебега. Заметим еще, что при доказательстве равенства нулю меры P_k при любом k Д. Смит строит цепи интервалов, предварив известный прием Лебега под тем же названием. Об отношении примеров Смита к мере Бореля см. на стр. 43.

[102] В 1884 г. О. Штольц принимает за меру множества внешнюю меру (говоря современным языком), модернизируя процедуру Римана — Ганкеля. В том же году Кантор ставит проблему меры во всей общности. В 1885 г. в статье А. Гарнака появляются мысли, которые повлекли введение внутренней меры, и парадокс — указание на неизмеримость (этих слов у Гарнака, конечно, нет) некоторых открытых множеств. Это последнее касается и множества [0; 1] — Q Смита.

интеграла и включил ее в свой учебный курс в 1893 г. [103] Единый взгляд Жордана на обыкновенный и кратный интегралы стал возможным лишь благодаря новому фундаменту, которым стало порожденное самой теорией интеграла понятие меры.

Повышение требований к строгости и ошибки Ганкеля явились поводом к проверке рассуждений Римана. Эти последние требовали известного уточнения, которое привело к выявлению содержащихся в них и других «начал» (см. стр. 59).

Поэтому совсем не случайно экстремальные интегралы (так называемые интегралы Дарбу) были введены почти одновременно в одном и том же 1875 г. сразу шестью математиками [104], которые пришли к этим интегралам независимо от друга. Названные интегралы привели к функциональному определению интегрируемости: $\overline{\int} = \underline{\int}$, что позволило Дарбу в его знаменитом мемуаре [105] доказать следующую теорему: «Если

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

то $f(x)$ является производной от $F(x)$ для всех значений x, для которых она непрерывна» [106].

Из теоремы следует, что неопределенный интеграл интегрируемой функции может не иметь производной лишь в точках разрыва подынтегральной функции, т. е. в точках множества меры нуль, хотя эти множества могут быть и всюду плотными, как это имеет место в случае неопределенного интеграла функции Римана. Из теоремы же вытекает, что непрерывные нигде не дифференцируемые

---

[103] Это явилось одной из причин исторической несправедливости, выраженной в названии конечно аддитивной меры именем К. Жордана, хотя первым ее нашел Дж. Пеано.

[104] Д. Смит, Г. Дарбу, Д. Асколи, К. Тома, П. Дюбуа-Реймон, А. Шенфлисс. Что касается экстремальных сумм, то в конкретных задачах их применял еще Архимед, а в общих рассуждениях — И. Ньютон. Однако насущной потребности в их определении не было, и указанные применения не получили развития.

[105] *G. Darboux.* Mémoire sur les fonctions discontinues.— «Annales de l'école Normale Supérieure», 1875, (2) 4, p. 57—112.

[106] Там же, стр. 76.

функции Вейерштрасса и Дарбу [107] не могут быть неопределенными интегралами каких бы то ни было функций.

Построение нигде не плотных множеств положительной меры явилось предпосылкой заявления итальянского математика У. Дини в 1878 г. о существовании ограниченных неинтегрируемых производных.

Через три года такая функция была построена тоже итальянским математиком В. Вольтерра. Его функция имеет ограниченную неинтегрируемую производную, поэтому примитивная функция Вольтерра не может быть восстановлена интегрированием ее производной. В то же время интеграл Римана применяется к функциям, которые заведомо не являются производными (например, $y = |x|$). Считавшаяся очевидной тождественность понятий неопределенного интеграла и примитивной оказалась полностью разрушенной.

С этим было трудно примириться. Уже при чтении мемуара Г. Дарбу и статей Л. Шеффера [108] возникает мысль о необходимости поисков обобщения интеграла Римана для восстановления утраченной тождественности.

После Эйлера и Фурье почленное интегрирование рядов считалось законной операцией во всех случаях сходящихся рядоз интегрируемых функций. Опровержение норвежским математиком Абелем ошибочного мнения Коши о непрерывности суммы сходящегося ряда непрерывных функций привело к постепенному введению равномерной сходимости. При этом в его современном виде понятие о равномерной сходимости было введено в 1853 г. самим Ко-

---

[107] Обе функции введены в 1875 г. (еще в 1830 г. подобная функция была построена Б. Больцано, однако это, как и другие важные открытия его, стало известно значительно позднее).

К. Вейерштрасс: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1,$

$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, b — нечетное число.

Г. Дарбу: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(n+1)!\, x]}{n!}$.

[108] Эти статьи опубликованы в «Acta Matematika», т. 5, 1884 — 1885 гг. Исследования Шеффера касаются проблемы отыскания функций по их производным и производным числам.

ши. Это понятие выявило, в свою очередь, необходимость ограничений для почленного интегрирования неравномерно сходящихся рядов. Дарбу привел пример (в том же мемуаре) ряда непрерывных функций, неравномерно сходящегося также к непрерывной функции, однако интеграл от нее не равен сумме почленно проинтегрированного ряда [109].

Теперь очевидно существование к концу века многих проблем, решение которых упиралось в несовершенство интеграла Римана. «В случае непрерывных функций понятия интеграла и примитивной функции тождественны. Риман определил определенный интеграл от разрывных функций, но не все производные функции интегрируемы в смысле Римана.

Проблема отыскания примитивных функций, следовательно, не разрешается интегрированием, и желательно определение интеграла, которое включает как частный случай интеграл Римана и позволяет решить проблему примитивных функций», — записал Лебег в первой статье, вводящей новое понятие интеграла [7].

Путь к лебеговой конструкции интеграла

Во втором издании «Лекций по интегрированию» Лебег указывает: «... наше конструктивное определение интеграла весьма аналогично римановскому, но только Риман делил на маленькие частные интервалы интервал изменения x, тогда как мы подразделяем интервал изменения $f(x)$. Этот способ действия был необходим, и преимущества его очевидны. Когда образуют сумму $S = \Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ для непрерывной функции $f(x)$, то группируют значения x, дающие мало отличающиеся значения $f(x)$, и именно потому, что эти значения мало отличаются, их можно заменить в S одним из этих значений $f(\xi_i)$. Но если $f(x)$ разрывна, то нет никаких оснований к тому, чтобы выбор интервалов $(x_i;\ x_{i+1})$, все более и более мелких, привел к группировке значений $f(x)$, все менее и менее отличающих-

---

[109] $$-2xe^{-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2 xe^{-(n+1)^2x^2}\right]$$

(стр. 84 мемуара Дарбу о разрывных функциях).

ся друг от друга. Вот почему процесс Римана имеет успех редко и до некоторой степени случайно. Раз мы хотим сгруппировать мало отличающиеся значения $f(x)$, совершенно ясно, что мы должны . . подразделять интервал изменения $f(x)$, а не интервал изменения x» ([68], стр. 116).

В «Курсе анализа» Жордана выделение положительной и отрицательной вариаций функции производится перегруппировкой суммы, ведущей к полной вариации, по значениям функции, а при доказательстве неубывания полной вариации Жордан непосредственно отправляется от этих последних. Если сопоставить эти рассуждения Жордана с пояснениями Лебега, станет понятно, что конструкция Лебега является развитием указанных идей Жордана, которые получили еще большую выразительность в диссертации Бэра, опубликованной в 1899 г. Основное свойство полунепрерывных функций, введенных там, состоит в замкнутости множеств того же типа, которые фигурируют в определении интеграла, данном через два года Лебегом. «Если f полунепрерывна сверху, то множество точек, в которых $f \geqslant \alpha$, замкнуто» [110].

Заметим, что еще И. Кеплер производил перегруппировки неделимых, соответствующих слагаемым интегральной суммы. Подход к квадратурам и кубатурам у него совершенно единообразный — фигура (тело) представляется суммой бесконечно большого числа бесконечно малых элементов, занимающих в фигуре (теле) равноправное положение. Перегруппировкой этих элементов составляется новая фигура (тело) с известной площадью (объемом) [111].

Что касается начала пути к конструкции А. Лебега, то, как мы упоминали, оно заложено в критерии Римана. Г. Ганкель при вычислении интегралов разбивает области интегрирования на части по значениям функции. Д. Смит выделяет множество точек разрыва в чистом виде и доказывает возможность пренебрегать некоторыми множествами из области интегрирования и независимость интеграла от тех значений, которые функция принимает в точках этих множеств.

---

[110] *R. Baire*. Sur les fonctions de variables réelles. «Ann. di mat. pura ed appl.», (1), 1899, 3, p. 8.

[111] *И. Кеплер*. Новая стереометрия винных бочек. Перев. с латинск. М.—Л., ОНТИ, 1935.

Уже из перечисленного ясна подготовленность конструкции Лебега. «...деление оси зависимого переменного Oy было впервые сделано для интегрирования непрерывных функций (слишком волнистых, чтобы применение обычного метода Коши было практичным) инженерами еще до появления работ Лебега. На этом основании в литературе проскользнули было признаки попыток отнести к ним приоритет открытия интеграла Лебега. Но эти попытки не удержались ввиду того, что хотя процесс Лебега и был отчетливо употреблен инженерами, однако ими ничего не было сделано в смысле возведения их приема в принцип. Таким образом, этот прием у них получил характер частного, как бы случайно проделанного процесса, каких появляется много» [112].

Неизвестно, кого имел в виду Н. Н. Лузин, но в книге А. С. Córованько содержатся попытки приписать приоритет открытия интеграла Лебега действительному члену Академии наук УССР Д. А. Граве [113]. Это не соответствует действительности. Как в работах предшественников А. Лебега, так и в процессе вычисления интеграла от функции Граве (о ней речь впереди) лишь все более четко на первый план выдвигается новый отправной пункт исследования; от значений функции к соответствующим значениям аргумента, от образа к прообразу вместо прежнего — от прообраза к образу. Этот новый подход осуществлялся неявно; лишь у Жордана и Бэра он проступает совершенно отчетливо, а Граве прямо говорит о нем. Но прямого указания на деление области изменения функции вместо области интегрирования, т. е. конструкции Лебега, до Лебега просто не было. И хотя Граве действительно вычисляет интеграл своей функции лебеговым приемом, но к попытке Córованько приписать Граве приоритет открытия интеграла Лебега в полной мере и вполне справедливо относятся приведенные выше слова Лузина.

Однако факт подобного вычисления важен в другом отношении. Он подтверждает, что конструктивная идея Лебега была уже подготовлена предшественниками. Впрочем косвенно это признает и сам Лебег в предисловии

---

112 *Н. Н. Лузин.* Сочинения, т. 2, стр. 525.

113 «Идея интеграла Лебега высказана несколько раньше Лебега действительным членом Академии наук УССР Д. А. Граве» (*А. С. Córованько.* Интеграл Лебега. Львов, 1951, стр. 6).

ко второму изданию своих «Лекций по интегрированию»: «... старался выявить идеи, которые, сознательно или бессознательно, руководили математиками в изучении интегрирования, выявить их идеал в этой области...» ([68], стр. 6).

Подготовленность Лебега к открытию интеграла

Распределение сочинений Лебега по разделам математики показывает, что Лебег своими научными трудами олицетворяет ту тенденцию сугубой специализации, которая особенно четко проявилась в нашем столетии. Две трети его сочинений (по объему) посвящены теориям меры и интеграла и их приложениям. Но бо́льшая часть других его исследований примыкает в конечном счете к теории интеграла. Лишь 25% всех сочинений Лебега почти не связаны с теориями меры и интегрирования, но из них только около 4% опубликовано при его жизни.

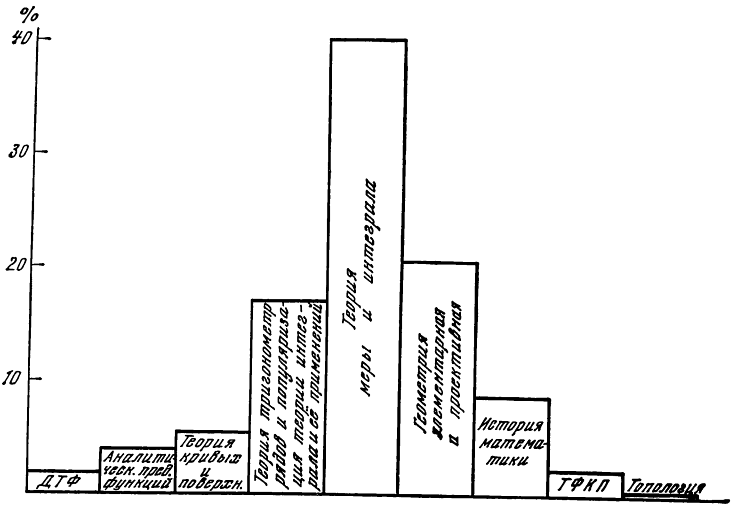


Рис. 5. Распределение сочинений А. Лебега по разделам математики. По оси ординат отложены доли объемов по указанным разделам от объема всех сочинений Лебега в процентах.
ДТФ — дескриптивная теория функций;
ТФКП — теория функций комплексного переменного

Узкая направленность научных интересов Лебега сохранилась со студенческой скамьи (см. стр. 13). И в начале научной деятельности он был занят проблемами, решение которых упиралось в несовершенство интеграла Римана, и был хорошо знаком с работами своих предшественников, заключавшими ростки ближайшего развития теории этого интеграла. Об этом свидетельствуют и содержание работ Лебега, и многочисленные ссылки в них.

Никакой другой математик не был так хорошо подготовлен к открытию интеграла Лебега, как сам Анри Лебег [114]. Благодаря острому и проницательному уму Лебег не мог не уловить веяний времени — острой необходимости нового понятия интеграла как раз в тех разделах науки, которыми он занимался.

Об открытии интеграла Лебега Юнгом

Чтобы распространить свою теорию меры Лебега в R_1 (см. стр. 46—47) на R_n в классическом направлении через кратные интегралы [115], В. Юнг обратился к интегралам Дарбу, включил в них меру Лебега и функции

---

[114] Все сказанное в равной мере относится и к В. Юнгу — опоздавшему соавтору открытия понятий меры и интеграла Лебега.

Д. А. Граве был близок к открытию и далек от него. Это объясняется и слабым знакомством с исследованиями предшественников Лебега, «рождавших» новое понятие интеграла, и другой направленностью научных интересов, даже некоторой разбросанностью их — см. обзор его научной деятельности В. А. Добровольского («Историко-математические исследования», вып. 15, 1963, стр. 319—360).

[115] «...понятие площади более сложно, чем понятие длины и зависит от последнего, а это означает, что теория меры плоских множеств естественно зависит от теории меры линейных множеств»— стр. 245 статьи Юнга «On the General Theory of Integration», «Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.», (A), 1905, № 204, p. 221—252. В последующих ссылках.: «Roy. Soc.» с указанием страницы.

«Мы не будем вводить меру нелинейного множества... мера замкнутого точечного множества $n+1$ измерений может быть выражена n-кратным верхним интегралом и, следовательно, находится посредством n простых интегрирований»— стр. 53 его статьи «On upper and lower integration».—«Proc. Lond. Math. Soc.», (2), 1905, 2, p. 52—56. В последующих ссылках: «Proc. Lond.» с указанием страницы.

Бэра[116] и свел полученные интегралы к интегралу Римана от функции, выражающей меру Лебега переменного точечного множества; полученные формулы по существу выражают то же самое конструктивное определение интеграла по Лебегу.

Г. Дарбу дает[117] точные определения числам $\sup \{f(x)\}$ и $\inf \{f(x)\}$ в интервале I_ρ длины ρ и показывает, что они важнее значений функции в этом интервале при изучении разрывных функций.

Р. Бэр берет эти числа за основу, а их пределы при $\rho \to 0$ называет максимумом и минимумом функции в точке и придает эти пределы в качестве значений новым экстремальным функциям. Юнг сохраняет определения и названия Бэра, а функции Бэра называет по-своему, близко к общепринятому теперь.

Юнг расширяет определения Дарбу, так же как в свое время Жордан определение Римана, заменяя интервалы разбиения области интегрирования замкнутыми множествами. Пользуясь полунепрерывностью[118] функций Бэра, Юнг доказал равенства

$$\overline{\int} f(x)\, dx = \overline{\int} \bar{f}(x)\, dx,$$

$$\underline{\int} f(x)\, dx = \int \underline{f}(x)\, dx,$$

которые позволяют ограничиться изучением полунепрерывных функций.

Опираясь затем на замкнутость множеств Бэра, которая была установлена Бэром, Юнг получил следующие формулы:

---

[116] Р. Бэр никак не называет введенных им функций. Мы придерживаемся названий И. П. Натансона, но заменяем его обозначения $M(x)$ и $m(x)$ этих функций на $\bar{f}(x)$ и $\underline{f}(x)$. Название «экстремальная функция» охватывает обе функции Бэра.

[117] Все в том же своем мемуаре о разрывных функциях (см. сноску 105).

[118] Доказано Бэром, который ввел это понятие впервые. К нему он пришел при изучении функций двух переменных, непрерывных по каждому переменному в отдельности, а через это понятие — и к основным результатам своей докторской диссертации.

$$\int\limits_{F} f(x)\,dx = SK + \int\limits_{K}^{K'} I(k)\,dk,$$

$$\int\limits_{\overline{F}} g(x)\,dx = SK' - \int\limits_{K}^{K'} I(k)\,dk,$$

$S = mF$, $I(k) = mF(f \geqslant k)$, $I(k) = mF(g \leqslant k)$, $f(x)$ — полунепрерывна сверху, $g(x)$ — полунепрерывна снизу, $[K;\ K']$ — область изменения функций $f(x)$ и $g(x)$. Эти формулы и сводят экстремальные интегралы Юнга к интегралу Римана [119].

«На самом деле полученная формула снабжает нас новым определением верхнего и нижнего интегрирования по отношению к любому замкнутому множеству» [120].

Так как $\mu E = \sup\limits_{F \subset E} \mu F$, по определению Юнга [121], то переход к общему случаю произвольных измеримых множеств влечет замену пределов экстремальных сумм точными гранями. Это дает окончательное преобразование определений Дарбу интеграла Римана через экстремальные интегралы в определение Юнга: «Разобьем сегмент на измеримые множества каким угодно способом, верхнюю грань значений функции в каждом из них умножим на его меру и образуем сумму всех таких произведений; верхним интегралом называется нижняя грань всех возможных сумм такого рода. Для нижнего интеграла слова „верхняя" и „нижняя" меняются местами» [122].

---

119 Сведение к интегралу Римана здесь чисто внешнее, ибо под знаком интеграла Римана стоит мера Лебега, но и вычисление интеграла Лебега сводится к вычислению мер Лебега.

В 1917 г. А. Блисс тоже выполнил сведение интеграла Лебега к интегралу Римана через интеграл Стилтьеса в статье «Integrales of Lebesgue» («Bull. Amer. Math. Soc.», 1917, 24, № 1, p. 1—46). Но его интеграл Стилтьеса является копией второй формулы Юнга с точностью до обозначений: вместо I Юнга $\alpha(y)$, поэтому вместо dk — dy, вместо K и K' — μ и M соответственно. При этом Блисс не упоминает о формулах Юнга. Конечно, не исключена возможность, что он нашел их вновь и независимо от Юнга.

120 «Proc. Lond.», p. 53.

121 В этом же томе опубликовано и построение Юнгом теории меры Лебега.

122 «Roy. Soc.», p. 227.

Равенство этих интегралов ведет к интегралу функции. Сегмент интегрирования может быть заменен любым измеримым множеством.

В процессе вывода формул перехода к интегралу Римана особенно четко видна тождественность первого определения Юнга (через эту формулу) конструктивному определению Лебега.

По определению Юнга,

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx = \inf_{\mu} \sum_k \left[\sup_{x \in E_k} \{f(x)\}\right] \mu E_k = \inf_{\mu} \overline{\sum}; \tag{1}$$

$\{E_k\} = \{E_{\mu,k}\}$ есть разбиение P_μ замкнутого множества E, если $E_k \bigcap E_m = \varnothing$ при $k \neq m$,

$$\bigcup_k E_k = E \text{ и все } E_k\mu \text{ — измеримы.}$$

Так как $\bar{f}(x_0) = \lim\limits_{\rho \to 0} \sup\limits_{x \in V_\rho(x_0) \bigcap E} \{f(x)\}$, $V_\rho(x_0)$ — интервал длины ρ с центром в точке x_0, то $\sup\limits_{x \in E_k} \{f(x)\} = \sup\limits_{x \in E_k} \{\bar{f}(x)\}$. Функция $\bar{f}(x)$ полунепрерывна сверху для любой функции $f(x)$, поэтому в дальнейших рассуждениях можно, не нарушая общности, считать $f(x)$ полунепрерывной сверху.

Существование верхнего интеграла влечет существование такого $\delta > 0$ для каждого заранее взятого $\varepsilon > 0$, что для всех разбиений P_μ на измеримые множества E_k, меры которых меньше δ,

$$(\text{Ю}) \overline{\sum} f - (\text{Ю}) \overline{\int} f(x)\,dx < \varepsilon\text{[123]}. \tag{2}$$

Пусть $f(x)$ ограничена и $K \leqslant f \leqslant K'$. Разделим $[K; K']$ на n равных частей точками:

$$K = K_0 < K_1 < K_2 < \ldots < K_{n-1} < K_n = K',$$
$$K_1 - K_0 = K_2 - K_1 = \cdots$$
$$\cdots = K_{n-1} - K_{n-2} = K' - K_{n-1} \equiv \Delta k = \frac{K' - K}{n}. \tag{3}$$

[123] (Ю) $\overline{\Sigma} f$ — верхняя сумма Юнга для функции $f(x)$; позже появится: (Д) $\overline{\Sigma} f$ — верхняя сумма Дарбу для функции $f(x)$. Аналогично будут обозначены нижние суммы (с чертой внизу).

Множества

$$F_r = E(f \geqslant K_{n-r}), \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n;$$

$$F_0 = E(f = K'), \quad F_n = E(f \geqslant K) = E \tag{4}$$

замкнуты (по основному свойству полунепрерывных сверху функций).

$$F_0, F_1 - F_0, \quad F_2 - F_1, \ldots, \quad F_{n-1} - F_{n-2}, \quad F_n - F_{n-1}$$

есть разбиение P_μ множества E, так как $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$ и $E_K = F_K - F_{K-1}$, $E_0 = F_0$ не пересекаются и очевидно измеримы. Если $\mu F_r = I_r$ ($\mu F_n = \mu E = S$), то

$$\mu(F_r - F_{r-1}) = I_r - I_{r-1}, \quad r = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Отметим, что

$$F_r - F_{r-1} = E(K_{n-r} \leqslant f < K_{n-r+1}),$$

$$r = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

(6) следует из определения разности множеств и (4).

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Находим столь большое n и такое $\delta > 0$, чтобы одновременно выполнялись оба неравенства:

$$\Delta k < \frac{\varepsilon}{2S}, \tag{7}$$

$$(\text{Ю})\overline{\sum} f - (\text{Ю})\bar{\int} f dx < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8}$$

как только $I_r - I_{r-1} < \delta$ для всех r. Возможность (7) и (8) вытекает из (3) и (2) соответственно.

По определению (1) Юнга, если $M_r = \sup\limits_{x \in F_r - F_{r-1}} \{f(x)\}$,

$$(\text{Ю})\overline{\sum} f = K'\mu F_0 + \sum_{r=1}^{n} M_r \mu(F_r - F_{r-1}) =$$

$$= K'I_0 + \sum_{r=1}^{n} M_r (I_r - I_{r-1}).$$

Во всех точках множества $F_r - F_{r-1}$ для любого r $K_{n-r} \leqslant f < K_{n-r+1}$ по (6), поэтому $K_{n-r} \leqslant M_r \leqslant K_{n-r+1}$ и, учитывая (5),

$$\underline{P} \equiv K'I_0 + \sum_{r=1}^{n} K_{n-r}(I_r - I_{r-1}) \leqslant (\text{Ю}) \overline{\sum} f \leqslant$$

$$\leqslant K'I_0 + \sum_{r=1}^{n} K_{n-r+1}(I_r - I_{r-1}) \equiv \overline{P}. \tag{9}$$

Вспоминая (3), из (9) с учетом (7) получаем

$$(\text{Ю}) \overline{\sum} f - \underline{P} \leqslant \sum_{r=1}^{n} (K_{n-r+1} - K_{n-r})(I_r - I_{r-1}) =$$

$$= \Delta k \sum_{r=1}^{n} (I_r - I_{r-1}) = \Delta k (I_n - I_0) \leqslant$$

$$\leqslant I_n \Delta k = S\Delta k < S \frac{\varepsilon}{2S} = \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$(\text{Ю}) \overline{\sum} f - \underline{P} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Наконец, (10) и (8) влекут: $(\text{Ю}) \overline{\int} f dx - \underline{P} < \varepsilon$, так как

$$(\text{Ю}) \overline{\int} f dx - \underline{P} = \left| (\text{Ю}) \overline{\int} - \underline{P} \right| \leqslant \left| (\text{Ю}) \overline{\int} - (\text{Ю}) \overline{\sum} \right| +$$

$$+ \left| (\text{Ю}) \overline{\sum} - \underline{P} \right| = \left[(\text{Ю}) \overline{\sum} - (\text{Ю}) \overline{\int} \right] + \left[(\text{Ю}) \overline{\sum} - \underline{P} \right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $(\text{Ю}) \overline{\int} f(x)\, dx = \lim\limits_{\Delta k \to 0} \underline{P}$.

Но, учитывая (5),

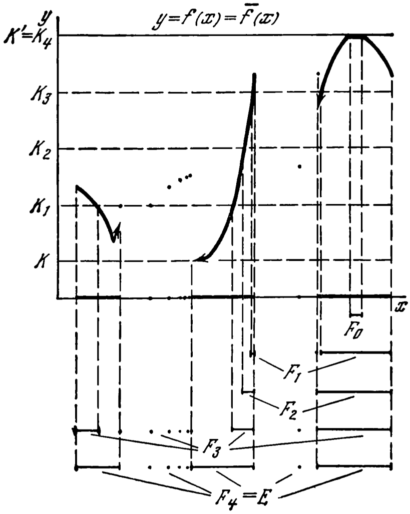
$$\underline{P} = K'I_0 + K_{n-1}(I_1 - I_0) + K_{n-2}(I_2 - I_1) + \cdots$$

$$\cdots + K_1(I_{n-1} - I_{n-2}) + K(S - I_{n-1}) = (K' - K_{n-1}) I_0 +$$

$$+ (K_{n-1} - K_{n-2}) I_1 + \cdots + (K_1 - K) I_{n-1} + KS =$$

$$= I_0 \Delta k + I_1 \Delta k + \cdots + I_{n-1} \Delta k + KS = KS +$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} I_r \Delta k = KS + (\text{Д}) \underline{\sum} I(k) \xrightarrow[\Delta k \to 0]{} KS + (R) \int_{K}^{K'} I(k)\, dk,$$



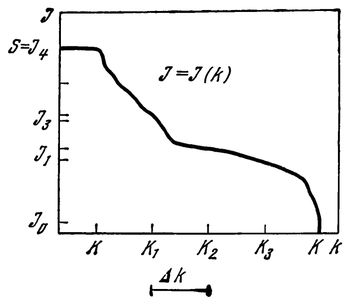


Рис. 6. К выводу формул Юнга
f — полунепрерывная сверху

так как функция $I(k)$ R-интегрируема как монотонно убывающая функция (рис. 6 поясняет вывод)[124].

В процессе вывода первой формулы Юнга (вторая получается аналогично) мы получили в (9), что

$$\underline{P} = KS + (\text{Д}) \underline{\sum} I; \qquad \overline{P} = KS + (\text{Д}) \overline{\sum} I;$$

$$(\text{Ю}) \overline{\int} f dx = \lim_{\Delta k \to 0} \underline{P} = \lim_{\Delta k \to 0} \overline{P}.$$

Легко видеть, что

$$\underline{P} = K\mu(F_n - F_{n-1}) + K_1\mu(F_{n-1} - F_{n-2}) + \cdots$$
$$\cdots + K_{n-1}\mu(F_1 - F_0) + K'\mu F_0 = K\mu E(K \leqslant f < K_1) +$$
$$+ K_1\mu E(K_1 \leqslant f < K_2) + \cdots + K_{n-1}\mu E(K_{n-1} \leqslant f < K') +$$
$$+ K'\mu E(f = K') = \sum_{i=0}^{n} K_i\mu e_i + \sum_{i=1}^{n} K_i\mu e_i' \equiv \sigma;$$

---

124 Точно так же преобразуется и $\overline{P}$:

$$\overline{P} = KS + (\text{Д}) \overline{\sum} I(k) \xrightarrow[\Delta k \to 0]{} KS + (R) \int_{K}^{K'} I(k) dk$$

$$e_i = E(f = K_i), \qquad e_i' = E(K_{i-1} < f < K_i),$$

где σ есть нижняя сумма, введенная Лебегом [125] (см. стр. 20 и 88).

Теперь можно считать доказанным, что формулы Юнга [126], которые являются первым его определением интеграла Лебега, совпадают с первым определением Лебега. Это в еще большей степени подтверждает подготовленность интеграла Лебега предшествующим ходом развития теории интегрирования именно в конструктивной форме Лебега.

---

[125] Лебег обозначил введенную им меру множества E символом $m(E)$, меру Лебега у Юнга мы обозначили μE. Точки деления области изменения функции в диссертации Лебег обозначил a_i, Юнг — K_i.

В определениях Юнга и приведенном здесь его доказательстве (модернизованном нами), область изменения функции не обязательно сегмент $[K; K']$. Она может быть произвольным измеримым множеством, содержащимся в этом сегменте, что Юнг и отметил в «Roy. Soc.».

[126] Из формул Юнга, в частности, нетрудно получить, что мера замкнутого плоского множества F вычисляется по формуле:

$$\mu F = (R) \int_K^{K'} \mu F_x dx,$$

где F_x — сечение множества F ординатой точки x; точка x пробегает проекцию множества F на ось Ox; $y = K$ и $y = K'$ — прямые, между которыми заключено плоское множество F.

Юнг получил эту формулу еще в «Proc. Lond.» (см. сноску 115).

Лебегово «яблоко Ньютона»

Мысли об общем принципе или понятии, о новом направлении в науке чаще всего возникают в процессе тщательного изучения тех или иных частных задач, числовых примеров или функций. В развитии теории интегрирования особая роль принадлежит, как мы видели, конкретным функциям. Функция Дирихле привела к признаку интегрируемости Дирихле, а тот, в свою очередь,— к функции Римана (начало теории интегрирования) и к ошибке Ганкеля. Последняя стимулировала бурное развитие теории интеграла и рождение новых аномальных функций, которые стали решающими вехами на пути к открытию интеграла Лебега. Мы убеждены, что исходные позиции любой общей математической теории лежат в рассмотрении частных постановок вопросов, в изучении конкретных задач. Общие теории являются не началом науки, а довольно далекой стадией ее развития»[127].

Какая же конкретная задача сыграла особую роль в открытии Лебега? Этот вопрос тем более уместен, что, по свидетельству П. Монтеля, «Лебег отличался особенностью смотреть на старые вещи новыми глазами и был вдумчивым исследователем аномальных исключительных примеров»[128].

Такой конкретной задачей могло быть только изучение Лебегом свойств непрерывной, неубывающей, не всюду постоянной функции, производная которой почти всю-

---

[127] *Б. В. Гнеденко* и др.—«Историко-математические исследования», 1963, вып. 15, стр. 90.
[128] Некролог Мотеля (см. сноску 7), p. 199.

ду равна нулю [129]. Исследования показывают, что скорее всего именно это конкретное исследование и помогло Лебегу сделать выдающееся открытие, явилось искомой конкретной задачей этого открытия — Лебеговым «яблоком Ньютона».

Определение и свойства функции Граве (по Д. А. Граве)

Пусть $n = 2m - 1$ и $x = 0,\ a_1a_2a_3\ldots = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots$, где каждое a_k равно одному из чисел: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Если все a_k — четные числа, то полагаем

$$f(x) = 0,\ b_1b_2b_3\ldots = \frac{b_1}{m} + \frac{b_2}{m^2} + \frac{b_3}{m^3} + \cdots;$$

$$b_k = \frac{a_k}{2} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

если же a_p — первое нечетное число, то

$$f(x) = 0,\ b_1b_2\ldots b_p = \frac{b_1}{m} + \frac{b_2}{m^2} + \cdots + \frac{b_p}{m^p};$$

$$b_k = \frac{a_k}{2} (k = 1, 2, \ldots, p-1), \qquad b_p = \frac{a_p + 1}{2}.$$

Таким образом, $f(x)$ всюду определена на $[0; 1]$ и принимает значения также на $[0; 1]$. При этом значения аргумента записаны в системе счисления с основанием n, а значения функции — в системе счисления с основанием m.

$f(x)$ не убывает, что устанавливается непосредственным разбором всех возможных x_1 и x_2 с учетом определения $f(x)$.

$f(x)$ непрерывна, так как $0 \leqslant f\left(x + \frac{1}{n^k}\right) - f(x) \leqslant \leqslant \frac{1}{m^k}$ для любого натурального числа k.

---

[129] Одна из таких функций известна в литературе как функция Кантора. В дальнейшем мы называем ее функцией Граве, так как Д. А. Граве дал наиболее прозрачное определение этой функции (точнее, целого семейства таких функций), детально изучил ее свойства, и только он вычислил интеграл этой функции, что интересует нас в первую очередь.

Эта функция вообще не постоянная — ее значения полностью заполняют [0; 1], постоянна во всех интервалах (о них см. ниже) смежных к совершенному нигде не плотному множеству меры нуль, откуда следует, что $f'(x) = 0$ почти всюду [130].

«Функция $f(x)$, очевидно, интегрируема. Легко подсчитать значение интеграла $\omega(x) = \int\limits_0^x f(x)\,dx$ для всех значений x. Новая функция $\omega(x)$ имеет замечательное свойство. Ее значения рациональны для рациональных значений x» [131].

Из этих слов Граве уже следует, что интеграл был им вычислен [132]. Примечательно, что его гораздо больше ин-

---

[130] Определение этой функции Граве указал в статье «Sur les lignes composées de parties rectilignes».—«С. R.», 1898, **127**, № 24, р. 1005—1007. В сочинении «Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных» («Сообщения Харьковского матем. об-ва», 1898, (2), **6**, № 5-6, стр. 251—287) он распространил свое определение на любые x по формуле

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{m^k} \quad \text{для} \quad x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k};$$

a_k и b_k имеют указанный выше смысл.

При $m = 2$ $f(x)$ на [0; 1] превращается в функцию Кантора. Лишь этот случай Граве рассмотрел в книге «Энциклопедия математики. Очерк ее современного положения» (Киев, 1912). При этом он ссылается только на свои статьи, как бы подчеркивая свой приоритет в таком определении.

Без ссылок на Граве это определение для $m = 2$ принято Лебегом в его «Лекциях по интегрированию» (1904 и 1928 гг.) и авторами статьи «Remarks on a know example of a monotone continuous function» («Amer. Math. Monthly», 1929, **36**). Э. Хиллом и Я. Д. Тамаркиным, которые не ссылаются не только на Граве, но и на Лебега, что вызывает недоумение.

[131] *Д. А. Граве*. Цит. статья, стр. 1006.

[132] В цитированном сочинении Граве приводит без вывода формулу (вывод нами реконструирован — «Математика, физика, механика», сб. научн. трудов ВЗИПП. М., 1968, стр. 267—271), которая для $f(x)$, рассматриваемой на [0; 1], имеет вид:

$$\int\limits_0^x f(x)\,dx = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k(a_k+1)}{m^k n^k} + \sum_{r=1}^{p} \frac{b_r}{m^r} \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k},$$

a_p — первая нечетная цифра в разложении x; если нечетных цифр нет, то $p = \infty$.

тересовала функция $\omega(x)$, чем важная для открытия интеграла Лебега $f(x)$ [133].

Слова Граве: «... какие бы два числа α и β мы ни взяли между 0 и 1, между ними будут существовать промежутки неизменяемости функции» [134] означают, что воспользоваться процессом Римана для вычисления интеграла этой функции невозможно [135], поэтому *необходим* иной подход. Другое утверждение Граве: «Нетрудно найти значения x, при которых функция эта имеет данное значение y» [136], наводит на мысль, что надо отправляться от значений функции. Дополнительным наводящим указанием является равномерность шкалы деления оси ординат, отвечающей неравномерной шкале деления оси абсцисс в соответствии с построением графика $f(x)$ по ее определению (рис. 7).

По нашей реконструкции вывода формул Граве (см. сноску 132) вычисление интеграла разбивается на счет-

---

[133] В сочинении Граве вводит полиэдральные цилиндрические и конические поверхности и поверхность вращения

$$y - bz = \omega(x - az), \qquad \frac{y-b}{z-c} = \omega\left(\frac{x-a}{z-c}\right), \qquad z = \omega(\sqrt{x^2+y^2}),$$

которые являются решениями дифференциальных уравнений

$$az'_x + \text{в}z'_y = 1, \qquad (x-a)z_x' + (y-\text{в})z'_y = z - c, \qquad yz'_x - xz'_y = 0$$

соответственно.

В своих сообщениях Парижской академии наук и в диссертации Лебег употребляет термин «полиэдральная поверхность». Граве приводит пример такой поверхности, «обладающей тем не менее свойствами кривых поверхностей» (цит. ст., стр. 1007): $z = \omega(x) + \omega(y)$.

[134] *Д. А. Граве.* Цит. соч., стр. 276.

[135] Так как каждый интервал ее постоянства (их счетное множество) окружен бесконечным множеством других интервалов ее постоянства с обеих сторон (см. рис. 7), то последовательное разбиение интервала интегрирования не приведет ни к чему. И это несмотря на то, что функция не волнистая. Кстати, трудно согласиться с утверждением Лузина (см. стр. 66—67), что деление оси ординат более практично для «волнистых» функций при вычислении интегралов. Ведь вычисления в этом случае сводятся к определению мер множеств вида $E[a_{k-1} \leqslant f(x) < a_k]$, состоящих из полуинтервалов, а найти длину некоторых полуинтервалов (если не всех) гораздо сложнее (если вообще возможно), чем вычислить слагаемые суммы Коши.

[136] *Д. А. Граве.* Цит. соч., стр. 275.

При $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{m^k}$ $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2b_k}{n^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k}$, если среди b_k

ное множество этапов. На каждом этапе $\int\limits_0^x f(x)\,dx$ оказывается приближенно равным сумме двух всегда однотипных сумм, первая из которых точная, а вторая подлежит дальнейшему развертыванию по точно такой же схеме:

$$I \approx \sum_{k=1}^{b_1} y_k \operatorname{mes} E(f = y_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{b_1} y_k \operatorname{mes} E(y_k < f = \text{const} < y_{k+1}).$$

Проще всего это вычисление выглядит для $x = 1$. Здесь мы ограничимся этим случаем. Общий случай получается аналогично.

Пусть $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = I$. На первом этапе делим область $E = [0;\ 1]$ значений функции $f(x)$ на m равных частей в соответствии с самыми крупными разрядами этих значений:

$$y_0 = 0,\quad y_1 = \frac{1}{m},\quad y_2 = \frac{2}{m},\ \ldots,\quad y_{m-1} = \frac{m-1}{m},\quad y_m = 1.$$

$$I = \underline{I} + mI_1, \text{ где } I_1 = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx, \quad \text{а } \underline{I} = I_{01} + I_{02},$$

$$\text{причем} \quad I_{01} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{m}\,\frac{1}{n},$$

бесконечное множество отличных от нуля; в противном случае $y = \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{b_k}{m^k}$, и тогда x может быть любым числом из интервала

$$\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2b_k}{n^k} + \frac{2b_p - 1}{n^p};\quad \sum_{k=1}^{p} \frac{2b_k}{n^k}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{n^k};\quad \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a_k}{n^k} + \frac{a_p + 1}{n^p}\right).$$

В частности, при $m = 2$ получаются интервалы, смежные к совершенному множеству Кантора меры нуль. Эти результаты Граве записал в своем сочинении без доказательства, но они очевидны (см. рис. 7).

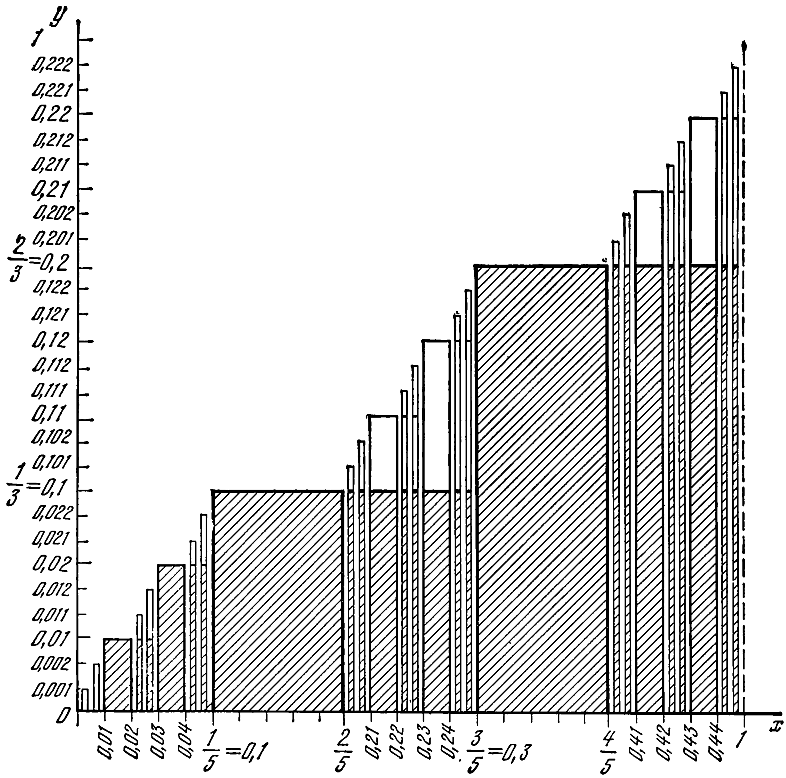


Рис. 7. К вычислению интеграла от функции Граве ($m = 3$, $n = 2m - 1 = 5$)

$$I_{02} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{m} \operatorname{mes} E\left(\frac{k}{m} < f = \text{const} < \frac{k+1}{m}\right),$$

т. е.

$$I \approx \underline{I} = \sum_{k=1}^{m-1} y_k \operatorname{mes} E\,(f = y_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} y_k \operatorname{mes} E\,(y_k < f = \text{const} < y_{k+1}).$$

$\underline{I}$ есть очевидное подобие нижней суммы Лебега. При этом порядок ошибки mI_1 меньше порядка величины $\underline{I}$ на единицу. На графике эта ошибка соответствует m равным суммам площадей бесконечно утончающихся прямоугольников, которые содержатся в «отрезанных макушках»; каждая такая сумма равна I_1.

На втором этапе поступаем точно так же. Делим сегмент $[0;\ 1/m]$ на m равных частей, соответствующих следующему разряду значений функции:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{m^2}, \quad y_2 = \frac{2}{m^2}, \ldots,$$

$$y_{m-1} = \frac{m-1}{m^2}, \quad y_m = \frac{1}{m}.$$

$$I_1 = \underline{I}_1 + mI_2, \quad \text{где} \quad I_2 = \int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} f(x)\,dx,$$

$$\text{а} \quad \underline{I}_1 = I_{11} + I_{12}, \quad \text{причем}$$

$$I_{11} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{m^2}\,\frac{1}{n^2},$$

$$I_{12} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{m^2} \operatorname{mes} E\left(\frac{k}{m^2} < f = \text{const} < \frac{k+1}{m^2}\right),$$

т. е.

$$I_1 \approx \underline{I}_1 = \sum_{k=1}^{m-1} y_k \operatorname{mes} E\,(f = y_k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} y_k \operatorname{mes} E\,(y_k < f = \text{const} < y_{k+1}).$$

Снова $\underline{I}_1$ является подобием нижней суммы Лебега, и порядок общей ошибки m^2I_2 уменьшился еще на одну единицу. Таким образом, $I \approx \underline{I} + m\underline{I}_1$. Объединяя первые точки деления со вторыми, получаем более мелкое разбиение, а приставляя отрезанные «макушки» на свои места, получаем более подробную нижнюю сумму Лебега, на порядок точнее приближающую I снизу. Точно так же получаются и верхние суммы Лебега, приближающие I сверху[137].

Дальнейшее очевидно, причем ясно, что ошибка обоих приближений стремится к нулю при неограниченном продолжении указанного процесса. Еще яснее стремление к нулю разности между приближениями сверху и снизу. А этим совершенно точно выявляется возможность более простого доказательства существования определенного интеграла, если его определить через эти новые интегральные суммы.

---

[137] Вычисление I теперь не представляет затруднений:

$$I = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n} + \frac{m-1}{n^2} + \frac{(m-1)\,m}{n^3} + \frac{(m-1)\,m^2}{n^4} + \cdots\right] +$$

$$+ \frac{2}{m}[\cdots] + \cdots + \frac{m-1}{m}[\cdots] +$$

$$+ m\left\{\frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{m-1}{n^3} + \frac{(m-1)\,m}{n^1} + \frac{(m-1)\,m^2}{n^5} + \cdots\right] +\right.$$

$$\left.+ \frac{2}{m^2}[\cdots] + \cdots + \frac{m-1}{m^2}[\cdots]\right\} +$$

$$+ m^2\left\{\frac{1}{m^3}\left[\frac{1}{n^3} + \frac{m-1}{n^4} + \frac{(m-1)\,m}{n^5} + \frac{(m-1)\,m^2}{n^6} + \cdots\right] +\right.$$

$$\left.+ \frac{2}{m^3}[\cdots] + \cdots + \frac{m-1}{m^3}[\cdots]\right\} +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$= \left[\frac{1}{n} + (m-1)\frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \frac{m}{n}}\right]\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{m} + \cdots + \frac{m-1}{m}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n}[\cdots](\cdots) + \frac{1}{n^2}[\cdots](\cdots) + \cdots =$$

$$= [\cdots](\cdots)\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{m-1}{n-m}\right] \times$$

$$\times \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{2}\cdot m\right)\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{m-1}{2}\left[1 + \frac{m-1}{(2m-1)-m}\right] \times$$

$$\times \frac{1}{n-1} = (m-1)\,\frac{1}{(2m-1)-1} = \frac{1}{2}$$ *независимо от* m!

Так очень частная задача вычисления интеграла от функции Граве приводит к мысли о новом определении интеграла [138] и новом построении его теории. Но это новое определение вынуждает иметь дело с множествами вида $E(f = a)$, $E(a < f < b)$ [139] и приписывать им меру, понятие которой обязано быть естественным расширением понятия длины отрезка [140]. Таким образом, возникает цепная реакция идей и направлений исследования, что естественно ведет к открытию меры и интеграла Лебега и построению новых теорий.

Но эта реакция могла возникнуть только в соответственно организованном [141] и надлежащим образом подготовленном к открытию уме, что как раз и имело место в случае Анри Лебега. Д. А. Граве был близок к новому определению интеграла, но не пошел дальше вычисления интеграла от построенной им функции (см. сноску 114).

Обоснование утверждения о конкретной задаче открытия Лебега

Мы хотим доказать, что изучение Лебегом свойств функции Граве и возможное вычисление им интеграла от нее (или только поиски способа вычисления этого конкретного интеграла) явились началом тех исследований Лебега, которые в конечном счете привели его к открытию меры и интеграла Лебега. Это мнение представляется особенно близким к действительности, если вспомнить следующие слова Лебега: «Именно по поводу таких функций, производные которых обращаются в нуль в каждом интервале, Людвиг Шеффер и начал свои исследования об определении функций их производными» ([68], стр. 75).

---

138 Что, конечно, само по себе еще не означает обобщения интеграла Римана, ибо суть обобщения Лебега не в этом новом определении, а в новом фундаменте интеграла — мере Лебега, которая и влечет полноту интеграла Лебега, выражающей сущность обобщения.

139 Здесь уместно вспомнить о множествах Бэра 1899 г.

140 При этом нетрудно было обнаружить недостаточность существовавших к тому времени мер (см. стр. 45). Но на помощь приходит замечание Бореля 1898 г. (см. стр. 45).

141 В частности, в уме человека, обладающего способностью «смотреть на старые вещи новыми глазами» (см. стр. 77).

Очевидная и совершенно естественная перефразировка этого утверждения[142] Лебега подкрепляется свидетельством Монтеля[143].

То, что Лебег прекрасно изучил функцию Граве, не вызывает сомнений. Это следует из многообразных применений А. Лебегом функций, подобных функции Граве[144]. Бóльшая часть этих применений содержится и в первом издании его «Лекций по интегрированию», которые читались в 1902/03 академическом году, да и в самой диссертации приводится такая функция (на стр. 271—272). Эти применения предполагают глубокое знание функции Граве и показывают, что эта функция играет стержневую роль в построении Лебега.

В своем конструктивном определении интеграла (в диссертации и в «Лекциях по интегрированию») Лебег выделяет множества тех значений аргумента, в которых функция принимает значения, *равные* точкам деления области значений функции. Но мы видели, что сущность вычисления интеграла от функции Граве как раз и состоит в последовательном выделении таких множеств. Да и суммы Лебега у Лебега не отличаются от схемы вычисления этого интеграла.

Наконец, указанные Лебегом в диссертации наводящие соображения, которые привели его к новому определению интеграла, окончательно убеждают в правильности утверждения о конкретной задаче его открытия — о «яблоке Ньютона» для Лебега. Эти соображения существенно отличаются от уже упоминавшихся (см. стр. 65), поэтому приводим полностью соответствующее место диссертации Лебега[145].

---

142 По поводу этих же функций и Лебег начал исследования, которые привели к новому понятию интеграла. Подобная замена соответствующих слов, на наш взгляд, вполне обоснованна (ср. с выражением «мерить на свой аршин»)

143 См. на стр. 77 цитату из некролога Монтеля.

144 Например, на стр. 21, 44, 53, 54, 72, 75—77, 80, 85, 86, 101, 122, 136, 139 его «Лекций по интегрированию» [68].

145 В качестве дополнительных доводов укажем еще на две цитаты из сочинений Лебега. «...не нужно забывать, что те, которым мы обязаны отвлеченной научной мыслью, могли, пребывая в абстракции, заниматься тем не менее полезными вещами именно потому, что они имели обостренное чувство действительности». Этими словами Лебег заканчивает свое введение к книге [70]. Вторую цитату см. на стр. 68 наст. работы.

«Может быть, не бесполезно сказать о тех аналитических рассуждениях, которые привели нас к рассмотрению суммируемых [146] функций и того, что мы называем интегралами.

Пусть непрерывная всюду возрастающая функция $f(x)$ определена между α и β $(\alpha < \beta)$ и изменяется между a и b $(a < b)$. Возьмем для x произвольные значения

$$x_0 = \alpha < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = \beta,$$

которым соответствуют значения функции

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b.$$

Определенный интеграл в обычном смысле слова есть общий предел двух сумм

$$\sum_1^n (x_i - x_{i-1})\, a_{i-1}$$

и

$$\sum_1^n (x_i - x_{i-1})\, a_i,$$

когда $\max (x_i - x_{i-1}) \to 0$. Но x_i дает a_i и $x_i - x_{i-1} \to 0$, если $a_i - a_{i-1} \to 0$. Следовательно, для того, чтобы определить интеграл непрерывной возрастающей функции, можно взять a_i, т. е. разбиение интервала изменения функции, вместо того, чтобы брать x_i, т. е. разбиение интервала изменения x. Пытаясь действовать сначала в простом случае функции, непрерывно изменяющейся во всем интервале и имеющей конечное число максимумов и минимумов, затем в случае любой непрерывной функции легко получить то же свойство.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ определена в $(\alpha; \beta)$ и изменяется между a и b $(a < b)$. Произвольно выбираем

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b;$$

$f(x) = a_i$ для точек замкнутого множества e_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$; $a_i < f(x) < a_{i+1}$ для точек множества, являющегося суммой интервалов, e_i' $(i = 0, 1, 2, \ldots$

---

[146] Напомним, что «суммируемая» здесь означает «измеримая».

. . ., $n-1$); множества e_i и e_i' измеримы. Две величины

$$\sigma = \sum_{0}^{n} a_i m(e_i) + \sum_{0}^{n-1} a_i m(e_i'),$$

$$\Sigma = \sum_{0}^{n} a_i m(e_i) + \sum_{0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i')$$

стремятся к $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$, когда количество чисел a_i возрастает так, что максимум $a_i - a_{i-1}$ стремится к нулю.

Получив это свойство, можно взять его за определение интеграла от $f(x)$. Но две величины — σ и Σ — имеют смысл и для других функций, не являющихся непрерывными, это — суммируемые функции. Мы докажем, что для таких функций σ и Σ имеют один и тот же предел, не зависящий от выбора a_i; этот предел есть, по определению, интеграл от $f(x)$, взятый между α и β» ([10], стр. 253—254).

В свете изложенного может возникнуть не обязательно истинное предположение, что Лебег специально умолчал о своем знакомстве с работами Граве, посвященными функции Граве, тем более, что заметка Граве о ней была опубликована в № 127 «Докладов» Парижской академии наук (за 1898 г.), а первое сообщение Лебега — в этих же «Докладах» в следующем номере (№ 128 за 1899 г.). При этом первые два года после окончания в 1897 г. Нормальной школы Лебег работал в библиотеке этого учебного заведения, имея свободный доступ к любым журналам и свободное время, которое использовал для подготовки диссертации. Его хорошая осведомленность о работах, так или иначе связанных с интегрированием и понятиями длины кривой и площади поверхности, говорит о реальности этого предположения [147]. Оно не только не противоречит нашему утверждению о конкретной задаче открытия Лебега, но в еще большей степени подтверждает его.

---

[147] Во всяком случае нет никакого сомнения в том, что Лебег читал статью Граве, даже по заголовку которой ясно, что ее содержание отвечало научным устремлениям Лебега. Но он мог прочитать и сочинение Граве (см. сноску 130), так как «Сообщения Харьковского математического общества» рассылались в академии dei Lincei, Геттингена, Неаполя, Болоньи, Мюнхена, Вены и в другие научные учреждения («Сообщения», 1895—1897, т. 5, стр. 290, 293; т. 6, стр. 294, 295, 297), что свидетельствует о широкой известности «Сообщений» в то время.

О развитии интеграла Лебега

После выхода в свет «Лекций по интегрированию» А. Лебега [18] число различных направлений в исследованиях по теории интеграла постепенно становится столь большим, что на первый взгляд представляется невозможным разобраться в океане соответствующей литературы. Но это доказывает значительный интерес к понятию интеграла в среде современных математиков, который усиливается в связи с тем, что возрастает разнообразие прямых и косвенных приложений современной теории интеграла.

Началом и основой этих всевозможных направлений в исследованиях, безусловно, является построение теории интеграла Лебегом и различные его замечания, разбросанные то тут, то там как в диссертации, так и в «Лекциях по интегрированию», а также в «Лекциях по тригонометрическим рядам». Это говорит об огромном значении работ Лебега для появления и развития многих разделов современной математики.

Укажем некоторые определения, эквивалентные определениям Лебега, в хронологическом порядке [148].

---

[148] Т. Гильдебрандт ввел понятие псевдоэквивалентности, понимая под этим сводимость одного интеграла к другому с изменением интегрируемой функции (*T. H. Hildebrandt.* On integrals related to and extensions of the Lebesgue integrals.—«Bull. of the Amer. mathem. Soc.», 1917—1918, (2), 24, N 3, p. 113—144, 172—202). Таковы интегралы Лебега, Стилтьеса, Хеллингера. В 1910 г. Лебег показал, что интеграл Стилтьеса выражается интегралом Лебега с помощью довольно сложных преобразований, а в 1912 г. это же для интеграла Хеллингера показал Г. Хан. В 1917 г. Ван Влек простым преобразованием свел интеграл Лебега к интегралу Стилтьеса. Т. Гильдебрандт указал

1. 1901 г. Аналитическое определение А. Лебега ([7], стр. 1025—1026; [10], стр. 253; см. стр. 20 наст. работы).

2. 1902 г. Геометрическое определение А. Лебега ([10], стр. 232; см. стр. 20 наст. работы).

3. 1904 г. Аксиоматическое определение А. Лебега ([18], стр. 98; [68], стр. 91 русского перевода; см. стр. 31—32 наст. работы).

4. 1905 г. Определение В. Юнга через интеграл Римана от меры Лебега (см. стр. 71 наст. работы).

5. 1905 г. Определение В. Юнга через экстремальные интегралы на фундаменте меры Лебега (см. стр. 71 наст. работы).

6. 1910 г. Функциональное определение Ф. Рисса.

7. 1911 г. Функциональное определение В. Юнга через точные грани полунепрерывных функций (см. стр. 91 наст. работы).

8. 1912 г. Определение Э. Бореля, уточненное Н. Н. Лузиным [149].

9. 1914 г. Функциональное определение В. Юнга через монотонные последовательности (см. стр. 92 и 95 наст. работы).

10. 1917 г. Определение Э. Бореля, измененное Т. Гильдебрандтом.

11. 1964 г. Определение Ж. Микусинского через последовательности характеристических функций (вариант первого определения А. Лебега, аналогичного варианту Г. Гейне определения предела) [150].

В рамках теории интеграла Лебега невозможно доказать единственность обобщения интеграла Римана [151], так как нет никакой возможности отрицать существование промежуточных интегралов.

также, что с некоторым расширением смысла слова «эквивалентность» можно сказать, что и интеграл Пирпонта эквивалентен интегралу Лебега. Обо всех этих вопросах см. указанную статью Т. Гильдебрандта.

[149] См. диссертацию Н. Н. Лузина (Сочинения, т. I, стр. 103).

[150] *J. Mikousinski.* Sur une définition de l'intégrale de Lebesgue.— «Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. sci. math.», 1964, **12**, N 4, p. 203—204.

[151] Чего, кстати, Лебег никогда и не утверждал, вопреки заявлению И. Н. Песина на стр. 98 его книги «Развитие понятия интеграла» (М., 1966).

С. Банах в 1923 г. показал [152], что с позиций теории меры имеет место в некотором смысле именно единственность обобщения интеграла Римана. В функциональном анализе получается аналогичное утверждение (об этом мы еще будем говорить).

Обилие разных форм одного и того же понятия интеграла говорит о силе новой теории. Для решения той или иной проблемы можно выбрать наиболее удобную для ее решения форму интеграла Лебега.

Функциональная форма интеграла Лебега

Новую форму без понятия меры интеграл получил в исследованиях Ф. Рисса и В. Юнга. Первые более известны. Остановимся на вторых.

В первой наиболее ранней форме построенной В. Юнгом теории интеграла (см. стр. 71), существенна роль двух полунепрерывных функций, между которыми всегда заключена подынтегральная функция. Эта роль и послужила решающей предпосылкой нового метода В. Юнга, напоминающего дедекиндовы сечения,— метод, от которого он почти сразу перешел к методу монотонных последовательностей [153].

---

[152] *S. Banach.* Sur le problème de la mesure.—«Monographie de l' Einseignement Mathématique», 1923, IV, p. 7—33. Кроме того, «Серпинский высказал теорему, что класс множеств, измеримых L, есть наименьший класс L, для которого существует мера, удовлетворяющая условиям 1—3 и A — E, и что единственной мерой, определенной на L с соблюдением условий A — E, является мера Лебега» (*Л. А. Люстерник* и *В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа. М.— Л., 1951, стр. 180).

Условия, о которых идет речь, являются условиями Лебега (см. стр. 17 наст. работы) с добавлением: если $E \in L$, то и $CE \in L$; если $N \in L$ и $m(N) = 0$, то $N_1 \in L$ при $N_1 \subset N$.

[153] «...обобщенный нижний интеграл есть верхняя грань интегралов полунепрерывных функций, не бо́льших подынтегральной функции в случае ограниченности и положительности последней. Отсюда следует, что верхний обобщенный интеграл есть нижняя грань интегралов полунепрерывных функций, не меньших данной подынтегральной функции. В этом нетрудно убедиться, вычитая функцию из постоянной» (стр. 16 статьи В. Юнга «On a new method in the theory of integration».—«Proc. Lond. Math. Soc.», 1911, (2), 9, p. 15—50. В дальнейшем мы опираемся на эту статью, а также на статью «On the new theory of integration».—«Proc. Roy. Soc.», 1930, (A), 88, p. 170—178); для нижнего интег-

Сначала В. Юнг вывел новый метод как следствие прежней своей теории интеграла Лебега (см. стр. 71), затем перешел и к построению новой теории, не зависящей от прежней. Приведем соответствующие рассуждения В. Юнга в упрощенном виде:

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \sup_{g \leqslant f} \left\{ \int g(x)\,dx \right\},$$

$g(x)$ — полунепрерывна сверху (п/н св.). В самом деле,

$$I \equiv \underline{\int_E} f dx = \mu_* \quad (E;\ f) = \sup_{(F;\, f) \subset (E;\, f)} \{\mu(F;\ f)\} =$$

$$= \sup_{F_x : \mu F_x \leqslant f(x)} \left\{ \int_E \mu F_x dx \right\} \leqslant \sup_{\text{п/н.св.} g \leqslant f} \left\{ \int_E g\,dx \right\},$$

$(E;\ f)$ — ординатное множество; $(F;\ f)$ — замкнутое подмножество $(E;\ f)$; F_x — сечение множества $(F;\ f)$ ординатой $f(x)$ точки x; E — область интегрирования (замкнутое мно жество). В. Юнг доказал ранее, что $\int\limits_E \mu F_x dx$ выражает меру замкнутого множества $(F;\ f)$ (см. сноску 126), причем μF_x полунепрерывна сверху; неравенство следует из того, что полунепрерывные сверху функции μF_x составляют часть всех полунепрерывных сверху функций $g(x) \leqslant \leqslant f(x)$.

С другой стороны, если $g(x) \leqslant f(x)$ и $g(x)$ полунепрерывна сверху, то $(F;\ g) \subset (F;\ f) \subset (E;\ f)$; $\int\limits_E g(x)\,dx$ есть $\mu(F;\ g)$ и $\int\limits_E g(x)\,dx \leqslant \mu_*(E;\ f) = I$. Так как это верно для любой полунепрерывной сверху функции $g(x) \leqslant \leqslant f(x)$, то $\sup\limits_{\text{п/н.св.} g \leqslant f} \left\{ \int\limits_E g(x)\,dx \right\} \leqslant I$, т. е.

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx = \sup_{\text{п/н.св.} g \leqslant f} \left\{ \int_E g(x)\,dx \right\}.$$

рала в приведенной цитате подразумевается полунепрерывность сверху, для нижнего — снизу. В. Юнг стал разрабатывать новый метод раньше Ф. Рисса — начиная с 1908 г. («Proc. Cambr. Phil. Soc.», 14; «Messeng. Math.», 37).

О связи с идеями А. Лебега см. сноску 27.

Аналогично

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx = \inf_{\text{п/н.сн.}h \geqslant f} \left\{ \int_E h(x)\,dx \right\}.$$

Таким образом [154],

$$\sup \int g dx = \underline{\int} f dx \leqslant \overline{\int} f dx = \inf \int h dx^{155}.$$

Теперь очевидно, что из интегрируемости в смысле равенства нижнего и верхнего интегралов вытекает интегрируемость в смысле равенства точных граней, и наоборот.

Далее, из семейства $\{g(x)\}$ можно выделить последовательность $\{g_n(x)\}$ — такую, что последовательность интегралов ее членов сходится к $\underline{\int} f dx = \sup\limits_{\text{п/н св.}g \leqslant f} \left\{ \int g\, dx \right\}$. А из последовательности $\{g_n(x)\}$ легко образовать монотонно возрастающую последовательность функций $a_n(x)$, сохраняющих полунепрерывность сверху (последнее В. Юнг доказал прежде всего как одно из основных свойств полунепрерывных сверху функций). Это можно сделать так. Пусть $a_1(x) = g_1(x)$. В тех точках, где $g_2(x) < g_1(x)$, полагаем $a_2(x) = g_1(x)$, в остальных точках $a_2(x) = g_2(x)$ и т. д. В результате получаем:

$$a_1(x) \leqslant a_2(x) \leqslant \cdots \leqslant a_n(x) \leqslant \cdots$$

для любого x, причем все $a_k(x)$ полунепрерывны сверху.

Пусть $a(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$. Ясно, что $a_n(x) \leqslant a(x) \leqslant f(x)$ и $\int a(x)\,dx = \underline{\int} f(x)\,dx$, т. е.

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int a_n(x)\,dx.$$

Аналогично строим монотонно убывающую последовательность полунепрерывных снизу функций $b_n(x)$, по-

---

[154] Этим завершается доказательство теоремы В. Юнга, указанной в сн. 153.

[155] В приведенном рассуждении предполагалось, что $f(x) \geqslant 0$. Если значения $f(x)$ любого знака, тогда, по определению Юнга,

$$\int_E f(x)\,dx = C\mu E + \int_E \varphi(x)\,dx, \qquad \text{где} \qquad C \leqslant \inf_{x \in E} \times$$

$$\times \{f(x)\}, \qquad \varphi(x) = f(x) - C \geqslant 0$$

всюду на E.

следовательность интегралов которых сходится к верхнему интегралу функции $f(x)$:

$$b_1(x) \geqslant b_2(x) \geqslant \cdots \geqslant b_n(x) \geqslant \cdots,$$

$$\overline{\int} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int b_n(x)\,dx, \qquad f(x) \leqslant b(x) \leqslant b_n(x).$$

По терминологии В. Юнга $a_n(x)$ есть u-функция, $a(x)$ — lu-функция; $b_n(x)$ названа им l-функцией, а $b(x)$ — ul-функцией [156]. Функция $b_n(x) - a_n(x)$ полунепрерывна снизу [157] и $b_n(x) - a_n(x) \geqslant 0$, так как $a_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \leqslant b_n(x)$.

$$\underline{\int}(b_n - a_n)\,dx = \underline{\int} b_n\,dx + \underline{\int}(-a_n)\,dx = \underline{\int} b_n dx -$$

$$-\overline{\int} a_n dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{\int_E} f dx - \underline{\int_{E}} f dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

если $f(x)$ — измеримая ограниченная функция. В этом случае $b(x) = a(x)$ почти везде [158], т. е. если $f(x)$ суммируема, то $\int a dx = \int b dx = \int f dx$ и функции $a(x)$, $f(x)$, $b(x)$ различаются лишь на множестве меры 0. Следовательно, любые другие $a(x)$ и $b(x)$, построенные с выполнением всех условий, наложенных на $a(x)$ и $b(x)$, таковы же.

---

[156] u — от «upper semi-continuous» (п/н св.), l — от «lower semi-continuous» (п/н сн.),так что lu-функция означает функцию, которая является пределом монотонно возрастающей последовательности функций (они идут к своему пределу снизу — l), каждая из которых есть предел монотонно убывающей последовательности непрерывных функций (идущих к своему пределу сверху — u). Это последнее свойство полунепрерывных сверху и соответствующее свойство полунепрерывных снизу функций В. Юнг доказал в 1908 г.

[157] $a_n(x)$ полунепрерывна сверху, значит,— $a_n(x)$ полунепрерывна снизу, а сумма полунепрерывных функций полунепрерывна в том же смысле; кроме того, $b_n(x) - a_n(x) \geqslant b_{n+1}(x) - a_{n+1}(x)$ (получается вычитанием очевидных неравенств: $b_n(x) \geqslant b_{n+1}(x)$ и $a_n(x) \leqslant a_{n+1}(x)$).

[158] В самом деле, если $b(x) - a(x) > k$ на $\mathscr{E} \subset E$, то на $\mathscr{E}_1 \supset \mathscr{E}$, $\mathscr{E}_1 \subset E$, $b_n(x) - a_n(x) > k$ для всех n. Но $E - \mathscr{E}_1$ есть замкнутое множество, так как $b_n(x) - a_n(x)$ полунепрерывна снизу. Следовательно, $\mathscr{E}_1$ есть сумма интервалов меры $S_n(k)$ и $\underline{\int}(b_n - a_n)\ dx \geqslant kS_n(k)$. Нижний интеграл слева стремится к 0 при $n \to \infty$, поэтому и $S_n(k) \to 0$, т. е. $\mu\mathscr{E} = 0$.

Ранее В. Юнг показал, что u-функции и l-функции принадлежат I классу Бэра; следовательно, $a(x)$ и $b(x)$ являются функциями II класса Бэра (точнее не выше II класса Бэра).

Таким образом, интеграл Лебега есть общий предел двух монотонных последовательностей интегралов полунепрерывных функций, не зависящий от выбора соответствующих последовательностей, монотонно сходящихся почти везде к подынтегральной функции, что и обосновывает независимое определение интеграла Лебега через монотонные последовательности.

В. Юнг не ограничился доказательством эквивалентности всех трех своих определений, но и построил $a(x)$ и $b(x)$ для любой ограниченной измеримой функции.

Пусть $K \leqslant f(x) \leqslant K'$. Делим $[K;\ K']$ на n равных частей, каждая длины l_n, и положим $K_r = K + rl_n$, $I_r = \mu E(f \geqslant K_r)$, $F_r \subset E(f \geqslant K_r)$, F_r — замкнутое множество и $\mu F_r > I_r - \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$.

$$a_n(x) = \begin{cases} K_r, \text{ если } x \in F_r - F_{r+1} & (1 \leqslant r \leqslant n-1), \\ K \text{ для прочих } x; \end{cases}$$

$$b_n(x) = \begin{cases} K_{r+1}, \text{ если } x \in F_r - F_{r+1} & (0 \leqslant r \leqslant n-2), \\ K' \text{ для прочих } x. \end{cases}$$

$$a_n(x) \leqslant f(x) \quad \text{и} \quad K = a_1(x) \leqslant a_2(x) \leqslant \cdots$$
$$\cdots \leqslant a_n(x) \leqslant \cdots \leqslant a(x),$$
$$b_n(x) \geqslant f(x) \quad \text{и} \quad K' = b_1(x) \geqslant b_2(x) \geqslant \cdots$$
$$\cdots \geqslant b_n(x) \geqslant \cdots \geqslant b(x).$$

$b_n(x) - a_n(x) = l_n$ для всех x, кроме тех, которые принадлежат множеству $E(b_n - a_n = K' - K)$, имеющему меру, меньшую 2^{-n}. $a(x)$ — lu-функция, $b(x)$ — ul-функция — требуемые. Они отличаются от $f(x)$ и друг от друга разве лишь на множестве меры нуль;

$$\int b dx = \int a dx = \int f dx,$$
$$\lim \left(\int b_n dx - \int a_n dx\right) = \lim \int (b_n - a_n)\, dx = 0.$$

Из приведенного анализа ясно, что все отправные идеи нового функционального подхода В. Юнга к построению теории интеграла Лебега и даже отдельные моменты его доказательств и примеров имеют своим началом соответствующие места исследований и различных замечаний Лебега, содержащихся в его диссертации и в «Лекциях по интегрированию» (а также некоторые идеи Р. Бэра).

Мы еще раз видим существенность первоначальных идей Лебега для последовавшего развития теории интеграла — тем более, что метод монотонных последовательностей В. Юнга использовал впоследствии (1918 г.) П. Даниель для построения теории абстрактного интеграла [159] (без ссылки, впрочем, на В. Юнга).

О внешнем развитии интеграла Лебега

Теорема Ф. Рисса о представлении линейного функционала [160] завершила большое число исследований, наиболее значительные из которых принадлежат А. Адамару и М. Фреше. Их результаты Ф. Рисс использует для доказательства знаменитой теоремы: «Для каждой данной линейной операции $A\,[f(x)]$ можно определить функцию ограниченного изменения $\alpha(x)$ такую, что, какова бы ни была $f(x)$, имеет место

$$A\,[f(x)] = \int_0^1 f(x)\,d\alpha(x)\text{»}$$

Теорема Рисса выявила новое содержание интеграла, новый смысл его: он является линейным функционалом. Этому новому смыслу обязано обогащение первоначальной теории линейных операторов [161] и дальнейшего развития и этой теории, и самой теории интегрирования в функциональном направлении, которое, в частности, вылилось в возникновение и строгое обоснование теории обобщенных функций.

---

159 *P. J. Daniell.* A general form of integral. «Annals of math.», 1917—1918, (2), 19, p. 279—294; Integrals in an infinite number of dimensions.— «Annals of math.», 1919, (2), 20, p. 281—288.

160 Область определения которого — пространство непрерывных функций, заданных на $[a;\,b]$ — он обозначил через Ω. См.: *F. Riesz.* Sur les opérations fonctionnelles linéaires.—«C. R.», 1909, 149, p. 974—977.

161 Она возникла вне прямой связи с теорией интеграла.

Вместо отдельного функционала или оператора теперь изучают различные классы или пространства их. При этом представление о сущности и различных формах интеграла проясняется и познается глубже в недрах новых теорий, охватывающих теорию интеграла [162].

Рассмотрим, например, с этих новых позиций единое доказательство эквивалентности различных определений интеграла Лебега. Оно основано на применении теоремы Ф. Хаусдорфа: Пусть M — метрическое пространство, вообще неполное. Существует полное метрическое пространство $\overline{M}$ — пополнение M, обладающее следующими свойствами:

а) M изометрично некоторой части $M_1 \subset \overline{M}$;

б) M_1 плотно в $\overline{M}$.

Это пополнение единственно в том смысле, что два пространства $\overline{M}$ и $\overline{M}^*$, удовлетворяющие условиям а) и б), изометричны между собой [163].

Пусть L и L^*— пространства функций, интегрируемых в смысле Лебега и в смысле определения В. Юнга через монотонные последовательности; C — пространство непрерывных функций. Функции всех трех пространств заданы на одном и том же $[a; b]$. Все пространства — метрические с нормой $\|f\| = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Ясно, что $C \subset L^*$ и условие а) выполнено. Так как u- и l-функции являются пределами невозрастающих и неубывающих последовательностей непрерывных функций, то C плотно в P (P — пространство полунепрерывных функций). $a(x)$ и $b(x)$ строились так, чтобы $\| f - a_n \| \to 0$ и $\| b_n - f \| \to 0$, поэтому P плотно в L^*, и, следовательно, C плотно в L^*, т. е. выполнено и условие б). Значит, по теореме Хаусдорфа, L^* изометрично L, т. е. оба определения интеграла порождают одно и то же пространство интегрируемых функций (и значения интегралов для каждой функции совпадают).

Из той же теоремы Хаусдорфа следует и окончательность интеграла Лебега в том смысле, что любое пополне-

---

[162] См.: *Н. Данфорд, Д. Т. Шварц*. Линейные операторы (общая теория). Перев. с англ. М., ИЛ, 1962.

[163] Формулировка теоремы дана по кн: *Г. Е. Шилов*. Математический анализ (спецкурс). Изд. 2-е. М., 1961, стр. 52.

ние пространства C будет порождать одно и то же пространство функций (точнее — изометричные пространства), т. е. все возможные обобщения интеграла Римана (точнее — Коши, так как пополняется пространство непрерывных функций, и, следовательно, обобщение Римана вообще не требуется) до интеграла, обладающего свойством полноты, эквивалентны интегралу Лебега.

Эффективные результаты Лебега, полученные им в [39] с помощью понятия аддитивной функции множества, явились началом другого направления развития теории интеграла — геометрического [164].

К. Каратеодори вводит меру как неотрицательную монотонную действительную функцию множества, заданную на вполне аддитивном классе множеств [165]. Множество E μ-измеримо, если для любого A из X (X — основное пространство множеств) [166] $\mu^*A = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \cap CE)$.

Это — прямое развитие определения В. Юнга, а если в качестве испытуемого множества брать $[a; b]$, то равенство Каратеодори примет вид, выражающий измеримость по Лебегу.

К. Каратеодори выделяет регулярные меры [167], для которых определение измеримости по Лебегу и определение измеримости в его смысле (точнее — по Юнгу) эквивалентны друг другу (для произвольных мер эквивалентности нет).

Интеграл над множеством n измерений К. Каратеодори определяет как меру ординатного множества $n + 1$ измерений. В этом еще раз сказывается влияние А. Лебега и В. Юнга.

С. Сакс в 1937 г. строит теорию абстрактного интеграла на базе теории меры Каратеодори процессом Лебега [168].

---

[164] Геометрического потому, что в основе этого направления лежит понятие меры, а оно есть обобщение геометрического смысла классического определенного интеграла.

[165] *C. Caratheodory*. Vorlesungen über reele Funktionen. Leipzig — Berlin, 1918.

[166] Для внешней меры аддитивность заменяется полуаддитивностью.

[167] Для любого E из X существует измеримое множество A такое, что $\mu(A) = \mu^*(E)$. Для μ^*-измеримых множеств внешняя мера есть мера.

[168] *С. Сакс*. Теория интеграла. Перевод с англ. М., ИЛ, 1949.

«Теория меры» П. Халмоша [169] даже названием подчеркивает, что теория меры завоевала право на самостоятельную жизнь [170]. Теория Каратеодори изложена в этой книге в очень компактной форме. Мера Лебега лишь поясняет абстрактные понятия. В связи с вопросами распространения, расширения и пополнения меры устанавливаются теоремы, аналогичные теореме Хаусдорфа, из которых следует тот же результат о единственности интеграла Лебега.

В 1913 г. австрийский математик И. Радон соединил в одном понятии интеграла, носящем теперь его имя [171], и интеграл Лебега, и интеграл Стилтьеса, поэтому интеграл Радона называют также интегралом Лебега—Стилтьеса. Такое соединение стало возможным лишь после исследований Ф. Рисса (сноска 160) и А. Лебега (в [39]). И. Радон заменяет в интеграле Стилтьеса $\int F(P)\,dg(P)$ точечную функцию $g(P)$ функцией множества $f(E)$ (стр. 1325—1327), показав для иллюстрации, каким образом от точечной функции двух переменных перейти к функции множества. Затем он копирует определение А. Лебега, заменив его меру произвольной абсолютно (теперь чаще говорят «вполне») аддитивной и монотонной функцией множества $f(E)$, предполагая, что E пробегает $T \subset R^n$ (T — класс множеств, содержащий все квазикубы, пересечения, разности и суммы разъединенных множеств из T, т. е. все борелевы множества — стр. 1322—1324). Если функция F переменного знака, то (стр. 1327)

$$F = \frac{|F|+F}{2} - \frac{|F|-F}{2} = F_1 - F_2 \quad \text{и}$$

$$\int\limits_E F\,df = \int\limits_E F_1\,df - \int\limits_E F_2\,df.$$

Используя понятие полного колебания функции множества, Д. Радон представил произвольную абсолютно аддитивную функцию множества $f(E)$ разностью $\varphi(E)$ — — $\psi(E)$ двух монотонных абсолютно аддитивных функций

---

169 *П. Р. Халмош.* Теория меры. Перевод с англ. М., ИЛ, 1953.

170 Собственно теории меры во времена Лебега не было. Она являлась необходимой частью теории интеграла (А. Лебег) или теории множеств (В. Юнг).

171 *J. Radon.* Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. — «Akad. Wien.», 1913, 122, S. 1295—1438.

множества [172] и получил разложение Лебега на абсолютно непрерывную, непрерывную и сингулярную составляющие. Поэтому для немонотонной f

$$«\int\limits_E F df = \int\limits_E F d\varphi - \int\limits_E F d\psi = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=+\infty} y_k^{(n)} f(F_k^{(n)})» \quad \text{(стр. 1328)},$$

где y_k — разбиение прямой $(-\infty; +\infty)$, E_k — множество тех точек P множества E, для которых $y_k \leqslant F(P) < y_{k+1}$ (предел понимается в том смысле, что при $n \to \infty$ максимум разности членов каждого ряда $y_k^{(n)}$ стремится к нулю). И. Радон рассмотрел все основные свойства интеграла, включая теоремы о предельном переходе под знаком интеграла как относительно F, так и относительно f.

В 1914 г. В. Юнг достиг того же эффекта, что и И. Радон, но чисто функциональными приемами, почти дословно повторив свое функциональное построение теории интеграла Лебега [173]. В 1916 г. М. Фреше распространил теорию интеграла Радона на абстрактное пространство. Он указал также на возможность функционального построения [174]. Это последнее и было выполнено в 1918 г. П. Даниелем, который расширил теорию на пространство с бесконечным числом измерений (см. сноску 159).

Эквивалентность функционального и геометрического построений (построений в форме В. Юнга и в форме А. Лебега) теории абстрактного интеграла была показана различными авторами [175].

---

172 $\varphi(E) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_E |df| + f(E)\right], \qquad \psi(E) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_E |df| - f(E)\right],$

$\int\limits_E |df|$

есть полное колебание $f(E)$, равное точной верхней грани суммы $\sum\limits_{E_n} |\Delta f|$, вычисленной по всем возможным разбиениям множества E.

173 *W. H. Young*. Integration with respect to a function of bounded variation.— «Proc. Lond. Math. Soc.», 1914, (2), **13**, p. 109—150.

174 *M. Fréchet*. Sur l'intégr. d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait. — «Bull. Soc. Math. France», 1915, **43**, p. 249—267.

175 См., например, книгу, указанную в сноске 162. Наиболее четко построение теории интеграла по схемам В. Юнга — П. Даниеля и А. Лебега — И. Радона с доказательством эквивалентности выполнено в монографии: *E. Hewitt*, *K. Stromberg*. Real and Abstract Analysis... Berlin — Heidelberg — New York, 1965.

Таким образом, два основных направления в развитии интеграла — линия Лебега и линия Стилтьеса — замыкаются в интеграле Радона. Это замыкание достигнуто двумя способами — функциональным (В. Юнг) и геометрическим (И. Радон). Поэтому развитие теории интеграла вылилось в две новые теории: линейных операторов и аддитивных функций множества, каждая из которых охватывает теорию интеграла. Последняя в свою очередь является общей частью этих двух новых теорий, связующим звеном между ними. Она же обусловила установление взаимно однозначных соответствий между отдельными классами мер и линейных функционалов. Она и показатель невозможности абсолютной гармонии между ними, и двигатель дальнейшего развития.

Основателем и вдохновителем одного из двух главных направлений развития теории интеграла — геометрического — следует со всей определенностью считать Анри Лебега. Более того, он имеет прямое отношение и к другому — функциональному — направлению, так как он указал на возможность функционального определения интеграла Лебега. Все вместе и говорит о решающем значении работ Лебега для последовавшего развития теории интегрирования.

О внутреннем развитии интеграла Лебега

До сих пор рассматривалось современное развитие интеграла в сторону внешних по отношению к интегралу понятий — линейного оператора и аддитивной функции множества. Остановимся теперь на развитии теории интеграла в сторону максимально возможного расширения класса функций, на котором разрешается проблема примитивных функций. Итак, мы будем говорить о развитии теории интеграла в сторону отыскания формы интеграла, соответствующей старому содержанию этого понятия. Отсюда и названия — внешнее и внутреннее развитие.

Проблему примитивных функций Лебег решил на классе ограниченных функций и распространил свое решение на функции с ограниченным изменением. При этом функция, стоящая под знаком интеграла, является производной лишь почти всюду, т. е. интеграл может восстановить примитивную только с точностью до множества меры нуль, причем это заложено в природе самого процесса.

Но интеграл Лебега «не позволяет даже узнать, имеет ли примитивные функции функция с неограниченным изменением» ([10], стр. 269[176]). Таким образом, проблема примитивных осталась открытой для таких функций. Решение шло в двух направлениях: конструктивном и дескриптивном. Мы не будем разбирать детально ни того, ни другого направлений, а лишь укажем источники и выскажем некоторые соображения в связи с этими исследованиями.

А. Данжуа в 1912 г. строит тотализацию с одним индексом (по его терминологии), распространяющую лебегово интегрирование на множество точек несуммируемости (оно замкнуто, что легко доказывается) процессом, подобным процессу, употребленному Дирихле для расширения несобственного интегрирования. Это — узкий интеграл Данжуа. В 1915 г. А. Данжуа неявно (см. [68], сноска на стр. 192) ввел общую тотализацию с двумя индексами — широкий интеграл Данжуа. В 1916 г. он опубликовал обзор своих исследований по этому вопросу[177].

Как узкий, так и широкий интегралы Данжуа опираются на суммируемость функции во всяком интервале, смежном к некоторому замкнутому множеству, и определяются по индукции с привлечением трансфинитных чисел и трансфинитных последовательностей.

В 1916 г. А. Я. Хинчин снял некоторые ограничения А. Данжуа и с помощью понятия асимптотической производной (аппроксимативной — по А. Данжуа) получил важный результат о восстановлении интегралом Данжуа—Хинчина примитивной по ее асимптотической производ-

---

[176] Здесь же приведен пример непрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

которая не может быть восстановлена интегралом, так как имеет неограниченное изменение.

[177] *A. Denjoy.* Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés nonsommables.—«Ann. école Norm. Sup.», 1916, 34, p. 127—222; 1917, 35, p. 181—236.

ной[178]. Предпосылки таких исследований были заложены еще В. Юнгом и даже Р. Бэром[179].

В этом конструктивном направлении рассматривают функции, которые почти всюду конечны и суммируемы всюду на множестве E положительной меры, исключая некоторое замкнутое множество H[180]. Интеграл Лебега стремятся «надстроить» над H, распространить на H, зная его значения на интервалах, смежных к H. Это конструирование «надстройки» интеграла Лебега повторяется счетное множество раз в соответствии с числом интервалов в CH.

Первым представителем другого, дескриптивного направления, имеющего ту же цель более или менее окончательного решения проблемы примитивных функций, был немецкий математик О. Перрон. Он ввел для подынтегральной функции $f(x)$ две функции $u(x)$ и $v(x)$[181]. Эти функции обобщают понятие примитивной. Они таковы, что в

---

[178] *А. Я. Хинчин.* Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy. «C. R.», 1916, N 7, p. 287—291. См. также его статью: «О процессе интегрирования Данжуа» («Матем. сб.», 1918, (4), **30**, стр. 543—557).

Определение асимптотической производной см., например, в книге А. Лебега ([68], прилож. Н. Н. Лузина, стр. 310). Об интегралах Данжуа можно прочитать у И. П. Натансона или у А. Лебега [68].

[179] «Разве идея интеграла Данжуа не является в сущности только поразительным применением идеи, руководившей Бэром» (*С. Сакс.* Теория интеграла, стр. 8). В. Юнг в статье «К общей теории интегрирования» после доказательства критериев интегрируемости (т. е. измеримости функции, так как понятия измеримости В. Юнг не вводил, а в этом месте рассматривал лишь ограниченные функции) получил «теоремы, относящиеся к распределению точек непрерывности интегрируемой функции» (*В. Юнг.* «Roy. Soc.», p. 242). В этих теоремах, особенно в их доказательствах, содержатся идеи, которые предвосхитили указанные исследования Данжуа и появились, вместе с тем, как следствие упомянутой идеи Бэра.

[180] Если функция бесконечна в каждой точке множества E положительной меры Лебега, то об интеграле такой функции на каком бы то ни было множестве, содержащем E, не может быть и речи. Это же справедливо и для несуммируемой в E функции. См.: *Н. Н. Лузин.* Сочинения, т. I, стр. 65, 66, 77, 113—115, 132—134, 161, 199, 200, 203—205.

[181] С. Сакс называет их, соответственно, мажорантной и минорантной функциями (цит. кн., стр. 271), а И. П. Натансон (цит. кн., стр. 454), в соответствии с названиями, предложенными самим О. Перроном, — надфункцией и подфункцией.

каждой точке интервала интегрирования

$$\underline{\lim}\, \frac{\Delta u}{\Delta x} \geqslant f(x), \qquad \overline{\lim}\, \frac{\Delta v}{\Delta x} \leqslant f(x).$$

Если $\inf\limits_u \{u(b)\} = \sup\limits_v \{v(b)\}$ (грани берутся по всем возможным функциям u и v), то $f(x)$ интегрируема в смысле Перрона и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf_u \{u(b)\} = \sup_v \{v(b)\}$$

(u и v выбираются так, чтобы $u(a) = v(a) = 0$) [182].

Нетрудно увидеть, что это построение О. Перрона имеет своим основанием идеи В. Юнга о функциональном построении теории интеграла Лебега.

Интеграл Перрона может существовать, когда интеграл Лебега не существует. Это касается лишь условной сходимости, так как интеграл Перрона абсолютно сходится тогда и только тогда, когда он приводится к интегралу Лебега. «Последующими работами Г. Хаке (1921), П. С. Александрова (1924) и Г. Ломана (1925) была установлена, однако, полная тождественность интегралов Данжуа и Перрона. Таким образом, оказалось, что Перроном была предложена лишь новая форма определения интеграла Данжуа, почему этот интеграл в настоящее время принято называть интегралом Данжуа — Перрона» [183].

В 1961 г. Г. П. Толстов пришел к дескриптивному интегралу иначе — с позиций классического анализа. Функция $f(x)$ является параметрической производной от $y = F(x)$ в I_t, если существует такое дифференциальное параметрическое представление функции $F(x)$: $x = \varphi(t)$, $y = F[\varphi(t)]$, что $dy = f(x)\,dx$. В этом случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Соответствующие a и b значения t принадлежат промежутку I_t.

---

182 *O. Perron*. Über den Integralbegriff. — «Sitzungsberichted. Akad. d. Wissenschaften in Wien», 1914, Abhand. 14, S. 1—16.

183 *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, стр. 452.

Класс интегрируемых в смысле Толстова функций «в точности совпадает с классом всех конечных и интегрируемых по Данжуа (в узком смысле) функций. При этом параметрические производные совпадают с соответствующими неопределенными интегралами Данжуа» [184]. Отсюда следует, что все три интеграла: Перрона, Толстова и узкий Данжуа друг другу эквивалентны. Проблема примитивных, однако, осталась открытой, так как широкий интеграл Данжуа является более общим, чем узкий.

В 1912 г. Д. Ф. Егоров высказал и обосновал соображение о невозможности довести до конца решение этой проблемы. Обоснование стало возможным после построения Н. Н. Лузиным примитивной для любой, данной наперед, измеримой почти всюду конечной функции процессом, который принципиально не однозначен [185]. «Никакой процесс,— писал Егоров,— не способен разрешить во всей общности проблему примитивных функций (суммируемые функции оставляем в стороне). Можно решить ее только для более или менее ограниченного класса функций, не ограниченных ни сверху, ни снизу, интегралы которых являются, так сказать, истинным значением неопределенного выражения $\infty - \infty$» [186].

До сих пор продолжаются исследования интегралов типа Данжуа и Перрона с введением новых классов функций, подтверждая точку зрения Д. Ф. Егорова [187].

Полезно заметить, что свойства условной сходимости и полной аддитивности несовместимы ни в каком понятии интеграла, т. е. обобщение интеграла Лебега с сохранением свойства полной аддитивности невозможно. Этим и объясняется, почему наибольшее применение и известность

---

[184] *Г. П. Толстов.* Параметрическое дифференцирование и узкий интеграл Данжуа. — «Матем. сб.» 1961, **53**, № 3, стр. 388. К этому результату Г. П. Толстов пришел еще в 1950 г. (см.: «Доклады АН СССР», 1950, **73**, № 4, стр. 659—662).

[185] См., например, докторскую диссертацию Н. Н. Лузина (Сочинения, т. I, стр. 68—74).

[186] *D. F. Egorroff.* Sur l'intégration des fonctions mesurables.—«C. R.», 1912, **155**, p. 1473.

[187] *J. C. Burkill, F. W. J. Gehring.* A scale of integrals from Lebesgue's to Denjoy's. — «Quart. Journ. of Math.», 1953, **4**, N 15, p. 210—220; *Y. Kuboto.* An integral of the Denjoy type.—«Proc. Lond. Math. Soc.», 1964, **40**, N 9, p. 713—717; *Y. Kuboto.* A generalized derivative and integrals of the Perron type.—«Proc. Lond. Math. Soc.», 1965, **41**, N 6, p. 443—448.

имеет именно интеграл Лебега, а не интегралы Данжуа, Толстова и Перрона, которые вместе с интегралами подобных типов известны лишь узкому кругу специалистов.

После определений интеграла Радона и дифференцирования функции множества по другой функции множества исследования по взаимоотношению между интегрированием и дифференцированием переведены на абстрактные рельсы. Это взаимоотношение раскрывается теоремой Радона — Никодима [188], представляющей абстрактный аналог формулы Ньютона — Лейбница, с одной стороны, и теоремы Рисса — с другой.

В 1965 г. Г. Свиатак построил непрерывную функцию, которая не имеет не только обычной производной, но и аппроксимативной (асимптотической) и так называемой дистрибутивной [189].

Таким образом, и внутреннее развитие интеграла Лебега шло по двум линиям, замыканием которых служит эквивалентность интегралов Перрона, Толстова и Данжуа. Но линии вновь разошлись после появления интеграла Данжуа — Хинчина. Это свидетельствует о том, что невозможность окончательного замыкания [190] лежит в природе вещей. Процесс все новых и новых усложнений представляется бесконечным. На наш взгляд, так и должно быть, не только исходя из современного состояния рассмотренных вопросов, но и потому, что полная гармония привела бы к застою в развитии, что невозможно и из общих философских соображений [191].

---

[188] *С. Сакс*, цит. кн., стр. 60—63; *П. Халмош*, цит. кн., стр. 128; *H. Hahn and A. Rosental*. Set functions. New Mexico, 1948, стр. 289.

[189] *H. Swiatak*. «Ann. Polon Math.», 1965, **17**, N 1, p. 13—23.

[190] В свете высказанного в докторской диссертации Н. Н. Лузина предложения определить интеграл от функции через ее разложение в тригонометрический ряд и отрицательного ответа на это предложение, данного в 1916 г. примером Д. Е. Меньшова, возникает соображение, не одинаковы ли трудности этой проблемы и проблемы единственности в теории тригонометрических рядов? И не одинаковы ли соответствующие множества типа U?

[191] Н. Бурбаки стоит на другой позиции: «Развитие теории интегрирования с 1920 г. следует искать не столько в работах, читать которые более или менее приятно, но содержание которых не могло уже существенно отличаться друг от друга, но главным образом в области ее применений» (*Н. Бурбаки*. Очерки по истории математики. М., ИЛ, 1963, стр. 244).

Послесловие

Даже из наших поверхностных наметок, относящихся к последовавшим после открытия интеграла Лебега исследованиям по «чистой» теории интеграла и ее «детищам» — теориям операторов и функций множества, нетрудно понять, что начала почти всех современных понятий и методов доказательств заключены в научном наследии Анри Лебега.

Возникновение и первоначальное развитие теории интеграла Стилтьеса стояло в стороне от общего потока исследований. Но и эта теория влилась в общий непрерывный и раздвоенный на геометрическое и функциональное направления поток после теоремы Рисса, когда интеграл Радона объединил эти, казавшиеся несовместимыми, понятия интегралов Лебега и Стилтьеса.

Но и этим не ограничивается влияние идей Лебега. Значение его понятий меры и интеграла для современной математики трудно переоценить. Они совершенно изменили лицо многих старых разделов математики и способствовали возникновению новых. Именно эти лебеговы понятия привели к выработке более общих и более абстрактных точек зрения и подходов к основаниям этих разделов, что чрезвычайно расширило возможности их приложений.

«Вопросы сходимости и суммируемости общих ортогональных рядов — это, быть может, наиболее ярко выраженная область применений понятий интеграла Лебега и интеграла Лебега — Стилтьеса» [192].

---

[192] *Г. Алексич.* Проблемы сходимости ортогональных рядов, стр. 7. В этой книге особенно четко показано проникновение идей Лебега в современную теорию ортогональных рядов. В связи с эти-

Другим ярким примером может служить понятие абстрактного гильбертова пространства. Оно появилось как следствие изоморфности пространств L^2 и l^2 [193], изучение первого из которых было начато Лебегом и продолжено многими известными математиками. Указанная изоморфность «с точки зрения квантовой механики является математическим обоснованием эквивалентности матричной механики Гейзенберга и волновой механики Шредингера, первая из которых использовала в качестве математического аппарата координатное пространство l^2, а вторая — пространство функций с интегрируемым квадратом L^2» [194].

В качестве последнего примера укажем на теоремы вложения, введенные С. Л. Соболевым и развитые С. М. Никольским [195]. Появление этих теорем обязано в конечном счете теории интеграла Лебега [196]. В применениях к современной теории уравнений в частных производных и, особенно, к решению краевых задач математической физики они вынуждают необходимость введения так называемых обобщенных функций (впервые также С. Л. Соболевым), которые, по определению, являются линейными непрерывными функционалами.

Можно с уверенностью заключить, что идеи А. Лебега продолжают жить и развиваться, принося все новые плоды и способствуя расширению «генетического фонда» современной математики. Это лучший памятник выдающемуся французскому математику Анри Леону Лебегу.

ми приложениями идей Лебега небезынтересно напомнить о методе регуляризации А. Н. Тихонова (представление об этом методе и его значении см. в учебнике В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа», стр. 436—443). Соответствующие доказательства были бы невозможны без понятий меры и интеграла Лебега.

193 l^2 — множество тех последовательностей $\{x_n\}$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, с соответственно введенным расстоянием.

194 *В. А. Ильин* и *Э. Г. Позняк*. Цит. кн., стр. 385—386.

195 *С. М. Никольский*. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., «Наука», 1969.

196 *С. Л. Соболев*. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1954.

Сочинения А. Лебега

1898

1. Sur l'approximation des fonctions.—«Bull. sci. math.», **22**, p. 278—287.

1899

2. Sur les fonctions de plusieurs variables.—«Compt. rend. Acad. sci. Paris» (Далее: «C. R.») **128**, p. 811—813.
3. Sur quelques surfaces non réglées applicables sur la plan.—«C. R.», **128**, p. 1502—1505.
4. Sur la définition de l'aire d'une surface.—«C. R.», **129**, p. 870—873.

1900

5. Sur la définition de certaines intégrales de surface.—«C. R.», **131**, p. 867—870.
6. Sur le minimum de certaines intégrales.—«C. R.», **131**, p. 935—937.

1901

7. Sur une généralisation de l'intégrale définie.—«C. R.», **132**, p. 1025—1028.

1902

8. Théorème sur les séries trigonométriques.—«C. R.», **134**, 2 p.
9. Transformation de contact de surface minima.—«Bull. sci. math.», **26**, 7 p.
10. Intégrale, longueur, aire.—«Ann. math.», **7**, p. 231—359.

1903

11. Sur l'existence des derivées.—«C. R.», **136**, p. 659—661.
12. Sur une propriété des fonctions.—«C. R.», **137**, p. 1228—1236.
13. Sur la représentation analytique, à partir de $z = x + iy$ des fonctions continues de x et y.—«Bull. sci. math.», (2), **27**, p. 82—84.

14. Sur le problème des aires.—«Bull. Soc. math.», **31**, p. 193—203.
15. Sur les séries trigonométriques.—«Ann. École norm. super.», (3), **20**, p. 453—485.

1904

16. Sur les fonctions représentables analytiquement.—«C. R.», **139**, 2 p.
17. Une propriété caractéristique des fonctions de classe un.—«Bull. Soc. Math.», **32**, p. 229—242.
18. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au Collège de France. Paris, 138 p.

1905

19. Recherches sur la convergence des séries de Fourier.—«Math. Ann.», **61**, p. 251—280.
20. Condition de convergence des séries de Fourier.—«C. R.», **140**, 3 p.
21. Divergence et convergence non-uniforme des séries de Fourier.—«C. R.», **141**, 3 p.
22. Définition de l'intégrale.—«Bull. sci. math.», **29**, 4 p.
23. Sur les fonctions représentables analytiquement.—«J. math.», (6), **1**, p. 139—216.
24. Une démonstration du théorème Baire. 2 p.

1906

25. Leçons sur les séries trigonométriques. Paris, 138 p.
26. Sur les fonctions dérivées. Acad. Lincei, Rend., Roma, 1906, **15**, p. 3—8; 1907, **16**, p. 92—100, 283—290.

1907

27. Le problème de Dirichlet.—«C. R.», **144**, 3+2 p.
28. Contribution à l'étude des correspondances du M. Zermelo.—«Bull. Soc. math.», **35**, p. 202—212.
29. Recherche des fonctions primitives par l'intégration. Accad. Lincei, Rend., Roma, **16**, 8 p.
30. Sur le problème de Dirichlet. Rend., Palermo, **24**, p. 371—402.
31. Sur les transformations ponctuelles...—«Atti Torino», **42**, p. 532—539.

1908

32. Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm.—«Bull. Soc. math.», **36**, p. 3—19.
33. Représentation approchée des fonctions.—«Nouv. Ann. math.», **26**, 4 p.

1909

34. Les suites de fonctions mesurables.—«C. R.», **149**, 1 p.
35. Sur les intégrales singulières.—«Ann. Fac. sci. Toulouse», **1**, p. 25—117.

36. Un énoncé dû à Stieltjes, concernant les intégrales singulières.— «Ann. Fac. Sci. Toulouse», **1**, p. 119—128.

1910

37. Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires.—«C. R.», **150**, p. 86—88.
38. Représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz.—«Bull. Soc. math.», **38**, p. 184—210.
39. Sur l'intégration des fonctions discontinues.—«Ann. Ecole norm. super». (3), **27**, p. 361—450.
40. Théorème de R. Bricard.—«Nouv. Ann. math.», **10**, 4 p.

1911

41. Sur la non-applicabilité de sous-domaines appartenant respectivement à des espaces à n et $n+p$ dimensions.—«Math. Ann.», **70**, p. 166—168.
42. Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées.—«C. R.», **152**, p. 841—843.

1912

43. Sur le problème de Dirichlet.—«C. R.», **154**, p. 335—337.
44. Sur le principe de Dirichlet.—«C. R.», 155, p. 699—701.
45. Un théorème de Volterra.—«Bull. Soc. math.», **40**, 6 p.
46. Exposition d'un mémoire de W. Crofton.—«Nouv. Ann. math.», **12**, 22 p.

1913

47. Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet.—«Bull. Soc. math.», **17**, p. 48—50.

1917

48. Sur certaines démonstrations d'existence.—«Bull. Soc. math.», 45, p. 132—144.

1918

49. Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration.— «Ann. Ecole norm. super.» (3), **35**, p. 191—250.

1920

50. Sur une définition due à M. Borel.—«Ann. Ecole norm. super.» (3), **37**, p. 255—258.

1921

51. Sur les diamètres rectilignes des courbes algébriques planes.— «Bull. Soc. math.», **49**, p. 109—150.

52. Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes arbitraires, et sur leurs rapports avec le calcul des variations.—«J. math.», (8), 4, p. 67—96.
53. Sur les correspondances entre les points de deux espaces.—«Fundam. math.», 2, p. 256—285.

1922

54. A propos d'une nouv. math.—«Fundam. Math.», 14 p.
55. L'oeuvre math. de Georges Humbert, qqs. mots sur Camille Jordan.—«Bull. sci. math.», 46, 28 p.
56. C. Jordan.—«Mém. Acad. sci. Paris», 58, 18 p.
57. Humbert et Jordan, Roberval et Ramus (La Lection introductive dans le cours des mathématiques pures prononcée à Collège de France 7.I.1922).—«Monogr. Enseignement mathématique (Enseign. math.», 1957, 3, N 2, 188—215.

1923

58. Sur les singularités des fonctions harmoniques.—«C. R.», 176, p. 1097—1099, 1270—1271.
59. Théorème de la résiduat. de Sylvester.—«Ann. Fac. sci. Toulouse», 14, 7 p.
60. Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan (Le discours prononcé le 4.VI 1923 au propos de l'anniversaire du mort de M. C. Jordan).—«Enseign. math.», 1957, 3, N 2, p. 81—106.

1924

61. Observation au sujet de la note de N. Wiener.— Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème Dirichlet.—«C. R.», 178, p. 349—354.
62. Remarqus sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler relatif aux polyèdres.—«Bull. Soc. math.», 52, p. 315—336; «Rev. math. Hisp.-Amer.», 1927, (2), 2, p. 225—237, 257—265.
63. Théorème de Schoenflies.—«Fundam. math.», 5, 4 p.

1926

64. Sur le développement de la notion de l'intégrale.—«Mat. tidskr.», (B), p. 54—74.
65. Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces.—«Fundam. math.», 8, p. 160—165.
66. Sur la recherche des fonctions primitives.—«Acta math.», 49, p. 245—262.

1927

67. Evolution de la notion de l'intégrale.—«Rev. Math. Hisp.-Amer.», (2), 2, p. 65—74, 97—100.

1928

68. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris, 2 ed., 342 p.
Nouveau tirage, Paris, 1950, 340 p.
Русский перевод: Интегрирование и отыскание примитивных функций. М.— Л., 1934.

1929 (?)

69. De l'arithmétique à l'algèbre et l'analyse mathématique (L'introduction dans un livre pas écrit sur les mathématiques pures).— «Enseign. math.», 1956, 2, N 1—2, p. 49—60.

1931

70. Sur la mesure des grandeurs.—«Enseign. math.», 1931, 31—1935, 34.
La mesure des grandeurs.—«Enseign. math.», 1956, N 1, 184 p.; Genève, 1957.
Русский перевод: Об измерении величин. М., 1938; изд. 2-е, М., 1960.

1932

71. Notice nécrologique sur M. René-Louis Baire.—«C. R.», 195, p. 86—88.

1935

72. Sur existence des plans tangents aux surfaces applicables sur la plan.—«Fundam. math.», 25, p. 157—161.
73. Démonstration du théorème fondamental de la théorie projective des coniques faite à l'aide des droites focales de M. P. Robert.— «Bull. Soc. math.», 63, p. 121—154.

1937 (?)

74. Sur une construction du polygon régulier de 17 cotés due à André-Marie Ampère, d'après des documents conservés dans les archives de l'Académie des sciences.—«Enseign. math.», 1957, 3, N 1, p. 31—34.

1938

75. Sur l'équivalence des polyèdres réguliers.—«C. R.», 207, p. 437—439.

1940

76. Quelques conséquences simples de la formule d'Euler.—«J. math.», (9), 19, p. 27—43.

1942

77. Les coniques. Paris. Nouv. tir., 1955, 187 p.

1950

78. Leçons sur les constructions géométriques. Paris, 304 p.

1956

79. L'oeuvre mathématique de Vandermonde.—«Enseign. math.», 1, N 4, p. 203—223.
80. Notice sur René-Louis Baire, correspondant pour la section de géométrie (L'extrait du nécrologe — (71)).— «Enseign. math.», 3, N 1, p. 28—30.

1958

81. Notices d'Histoire des Mathématiques. Genève, p. 40—65.

Основные даты жизни и научной деятельности А. Лебега

1875. 28 июня. Родился в городе Бове в семье рабочего типографии и преподавателя начальной школы.

1894. Поступил в Нормальную школу (École normale).

1897. Окончил Нормальную школу.

1897—1899. Помощник библиотекаря Нормальной школы.

1899—1902. Преподаватель Центрального лицея в городе Нанси.

1902. Защита докторской диссертации «Интеграл, длина, площадь».

1902 — 1906. Лектор медицинского факультета университета в городе Ренне.

1902—1903. Читал лекции по интегрированию и отысканию примитивных функций в Коллеж де Франс.

1904—1905. Там же читал лекции по тригонометрическим рядам.

1904. Опубликованы «Лекции по интегрированию и отысканию примитивных функций».

1906. Опубликованы «Лекции по тригонометрическим рядам».

1906—1910. Профессор университета в городе Пуатье.

1910—1919. Лектор естественного факультета Парижского университета в Сорбонне.

1912. Французской академией наук присуждена премия Уллевига.

1917. Присуждена премия Сентура.

1914—1919. Председатель математической комиссии службы изобретений, образования и научного эксперимента.

1918. Награжден орденом Почетного легиона.

(?)
1920. Профессор Парижского университета в Сорбонне.

1921—1941. Профессор Коллеж де Франс.

1922. Избран членом Парижской академии наук.

1924. Избран в члены Лондонского математического общества.

1928. Опубликовано второе издание «Лекций по интегрированию и отысканию примитивных функций».

1930. Избран иностранным членом Королевского общества Англии.

1941. 26 июля. Смерть Лебега.

Указатель имен

Содержание

Игорь Михайлович Тумаков

Анри Леон Лебег

1875—1941

Утверждено к печати
редколлегией научно-биографической серии
Академии наук СССР

Редактор *Ю. Ф. Морошкин*
Художественный редактор *В. Н. Тикунов*
Технические редакторы *Н. Н. Плохова*, *Ф. М. Хенох*
Корректоры *Т. В. Гурьева*, *И. А. Талалай*

Сдано в набор 30/III 1975 г. Подписано к печати 18/VII 1975 г.
Формат 84×108 1/32. Бумага типографская № 1
Усл. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 6,2. Тираж 14000. Т-11333
Тип. зак. 2013. Цена 39 коп.

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21

2-я типография Издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

Анри Леон

ЛЕБЕГ

Цена 39 коп.