АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

С. Я. Гродзенский

Андрей Андреевич МАРКОВ

1856—1922

Ответственный редактор
академик АН УССР
Б. В. ГНЕДЕНКО

МОСКВА
«НАУКА»
1987

ББК 22.1
Г 86
УДК 92 Марков

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук Е. П. ОЖИГОВА
канд. физ.-мат. наук С. С. ДЕМИДОВ

Гродзенский С. Я.
Г86 Андрей Андреевич Марков. 1856—1922. — М.: Наука, 1987.— 256 с., ил. (Научно-биографическая литература).

Книга представляет собой научную биографию выдающегося русского математика академика Петербургской Академии наук Андрея Андреевича Маркова, работы которого явились ценным вкладом в теорию вероятностей, теорию чисел и математический анализ. В работе, написанной на основании изучения трудов ученого и документов из архива семьи Маркова, показана многогранная деятельность ученого, являвшегося также одним из сильнейших шахматистов своего времени.

Для всех интересующихся развитием отечественной науки и историей шахмат.

Г $\frac{1402000000\text{-}123}{054(02)\text{-}87}$ 32—87 НП **ББК 22.1**

Сергей Яковлевич Гродзенский

Андрей Андреевич Марков

1856—1922

Утверждено к печати
редколлегией серии «Научно-биографическая литература»
Академии наук СССР

Редактор издательства **В. П. Большаков**
Художественный редактор **С. А. Литвак**
Технические редакторы **В. Д. Прилепская, А. С. Бархина**
Корректоры **А. Б. Васильев, Р. В. Молоканова**

ИБ № 35255

Сдано в набор 29.10.86. Подписано к печати 17.02.87. Т-05652
Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага книжно-журнальная импортная
Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая
Усл. печ. л. 13,44. Усл. кр. отт. 13,7. Уч.-изд. л. 13,7
Тираж 13 100 экз. Тип. зак. 3275. Цена 85 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
117864, ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

От редактора

В последние годы внимание к истории науки заметно возросло. Читателей все больше и больше начинает интересовать не только биографический аспект жизни ученых, но и выяснение происхождения научных идей, их связь с практической деятельностью и методологическими, а также общественными взглядами породивших их деятелей науки.

Это явление не может считаться просто данью моде, а вызвано к жизни гораздо более глубокими причинами. Дело в том, что история науки абсолютно необходима для правильного понимания пути познания человеком законов природы и для предвидения, хотя бы в самых общих чертах, дальнейшего научно-технического прогресса, для приспособления системы образования к неудержимому ускорению этого прогресса. Только история науки позволяет проследить процесс формирования научных понятий, возникновения и развития научных идей, методов и теорий. А это самое важное как с философско-методологических позиций, так и с позиции понимания предстоящих задач науки и тех ее направлений, в которых особенно перспективно прилагать усилия для совершенствования наших знаний. Нельзя забывать, что история науки одновременно является и историей самого мышления, которое играет в современном мире столь большую роль. История науки важна и потому, что позволяет понять те причины, которые приводят к резкому росту значения какой-либо определенной области знания для жизни человеческого общества, в частности для выяснения причин столь резкого увеличения роли математики как в естественных науках, так и в области организации производства, инженерного дела, экономики, сельского хозяйства и социальных наук. Только с этих позиций можно понять причины того, что математика стала производительной силой общества.

История математики убедительно показывает, что ученые, сделавшие великие открытия, далеко не всегда могли правильно оценить значение своих результатов и зачастую приходили к ним не прямым, а окольным путем. В подавляющем большинстве случаев истинный смысл сделанных открытий, выдвинутых идей прояснялся не сразу, а на довольно далеком этапе развития знаний. Нередко случалось и так, что рассуждения и понятия, введенные автором открытия, казались ему абсолютно ясными и безупречными, но последующий ход научного развития показывал необходимость дальнейших уточнений и выделения особо важных частных случаев или же существенных обобщений. При этом выкристаллизовывалось значение каждого из источников математических знаний — практических потребностей общества и обобщающей силы разума. Нет нужды говорить, что абстрактное мышление находится под сильнейшим, но порой незамечаемым влиянием общественной практики.

Сейчас, когда в нашей стране во весь рост ставится вопрос об ускорении научно-технического прогресса неизбежно возникает огромная задача воспитания подрастающего поколения в духе поисков нового, в духе научного и технического творчества. В среде нашей молодежи необходимо пробудить мысль о том, что каждый психически нормальный человек представляет собой индивидуальную ценность и обладает одному ему свойственными способностями и талантами. Необходимо только пробудить эти способности, окрылить мысль, снабдить ее нерешенными проблемами, которые были бы способны вдохновить и увлечь всего человека. Важно внушать учащимся еще в школьные годы, что им по силам не только выполнение монотонной работы и познание уже познанного, но и открытие нового, пусть еще небольшого.

Опыт нашей страны показывает, что в совершенствовании производства, в деле рационализации и изобретательства принимают участие миллионы рабочих, колхозников и служащих. Нам нужно стремиться к тому, чтобы раскрепостить разум людей и помочь им искать новое не только в еще не обследованном, но и там, где, казалось бы, все приведено в совершенную систему. Это вызывает существенную перестройку как школьной, так и вузовской жизни. Но достижение этой цели одновременно требует и создания научно-популярной литературы и литературы по истории науки. Молодые люди должны учиться искусству открытий на примерах прошлого. Они должны видеть, как их сверстники в прошлом, увлекшись той или иной идеей, вносили в научные знания или в производственный процесс нечто свое, такое, до чего до них никто не додумывался.

Для достижения таких значительных и крайне нужных обществу целей нам нужно, как уже было сказано, издавать книги по истории науки, техники и всего человеческого знания, а поскольку науку творят люди, то и научные биографии. В такого рода биографических очерках следует рассказывать и о том, как приходили в голову ученым и изобретателям новые идеи, как подмеченное странное и удивительное вызывало в них не замешательство, а стремление докопаться до истины, найти разумное объяснение необычных явлений. А докопавшись до такого рода объяснений, использовать познанное для целей общественной практики и для продвижения нашего знания природы вещей. Многие исторические факты такого рода в свое время произвели на меня огромное впечатление. Позволю себе о двух эпизодах такого типа рассказать здесь.

В конце XIX в. Россия объявила международный конкурс на поставку броневых плит для строительства русского броненосного флота. Начальником артиллерийского полигона, на котором испытывались плиты, был знаменитый впоследствии адмирал С. О. Макаров. Как известно, броневые плиты с одной стороны закалены на достаточно большую глубину, а с другой — остается незакаленная, мягкая сталь. На корабле плиты ставятся закаленной стороной наружу. Во время испытаний одна плита была поставлена наружу незакаленной стороной и снаряд пробил ее насквозь. Макаров не смог сразу объяснить это явление, но решил использовать его, так сказать, в обратном порядке: если снаряд с закаленным наконечником, попав на незакаленный слой, пробил его и вместе с ним закаленный слой, то не пробьет ли снаряд с мягким наконечником броневую плиту, попав на нее с закаленной стороны? Он приказал мастерским, находившимся в его распоряжении, за ночь изготовить несколько десятков таких снарядов. На следующий день произошло неожиданное: макаровские снаряды пробивали одну плиту вслед за другой, проходя через них так же свободно, как острый нож проходит через масло. Так родилась идея броневых снарядов.

В конце 50-х — начале 60-х годов XIX в. П. Л. Чебышеву было поручено прочитать курс теории механизмов. При изучении механизма Уатта, превращающего вращательное движение в поступательное, он обратил внимание на то, что движение любой точки шатуна не строго прямолинейно, а описывается уравнением некоторого многочлена. Отклонение шатуна от прямолинейного движения вызывало преждевременный износ цилиндра. Это наблюдение позволило Чебышеву поставить следующую задачу: из всех многочленов данной степени с коэффициентом единица при старшей степени найти тот, который меньше всех остальных отклоняется от нуля в заданном отрезке. Решение этой задачи привело Чебышева к семейству полиномов, получивших в науке наименование полиномов Чебышева, а также к постановке более общей задачи о наилучшем приближении непрерывной функции $f(x)$ в заданном промежутке многочленами с заданным коэффициентом $a_0 \neq 0$ при старшей степени аргумента. В результате появилась новая ветвь теории функций — теория наилучшего приближения функций.

Настоящая книга посвящена жизни и деятельности одного из выдающихся русских математиков — Андрея Андреевича Маркова (старшего). Представитель Петербургской математической школы Чебышева, он сделал очень много для прогресса теории чисел, математического анализа и теории вероятностей. Эта последняя из названных дисциплин является, пожалуй, центральной частью его научного творчества, в которой ему удалось создать новые важные концепции и объединить все свои математические идеи, остающиеся и ныне на переднем крае научного развития.

Возможно, мне следовало бы сказать несколько сильнее и заявить, что его идеи, по крайней мере в некоторой своей части, только в наши дни начинают раскрывать истинное свое значение. Прежде всего это относится к его исследованиям по теории вероятностей, особенно по теории цепей Маркова. Выяснилось, что мысль, возникшая, казалось бы, по частному поводу, в ту пору далекому от актуальных приложений,— исследованию чередования гласных и согласных в романе «Евгений Онегин» и в повести «Детские годы Багрова-внука», как оказалось позднее, имеет всеобщее значение для всего количественного естествознания, инженерного дела, организации производства и исследования операций. Выяснилось, что «цепи Маркова» и их непосредственное развитие — «марковские процессы» тесно связаны с проблемами управления производством, задачами телефонной связи, со всей современной физикой.

До сих пор А. А. Маркову еще не было посвящено ни одной книги, в которой были бы изложены и биографические данные, и сведения о его научном творчестве, и его оценка как гражданина.

В этом отношении ему не повезло, хотя его имя и вошло в науку весьма прочно и постоянно упоминается в монографиях и в учебных пособиях по теории вероятностей, теории приближения функций, теории чисел, математическому анализу. Пока имелось лишь несколько сравнительно кратких статей, написанных об А. А. Маркове рядом авторов.

Столь подробного и полноценного биографического исследования, как предлагаемая книга, еще не появлялось. Автор С. Я. Гродзенский широко использовал как литературные источники, так и не публиковавшиеся ранее архивные материалы, в том числе из семейного архива Марковых. В результате ему удалось воссоздать величественный облик замечательного ученого, педагога и гражданина, абсолютно не приемлевшего зло, в какие бы одежды оно ни рядилось. Читателю будет интересно узнать, как откликался Марков-старший на любое проявление несправедливости, даже тогда, когда она непосредственно его не касалась. Эта сторона характера Маркова роднит его с такими замечательными представителями русской интеллигенции, которые в любой момент готовы были идти и действительно шли в бой за правду и справедливость, каким был, скажем, современник Маркова замечательный писатель В. Г. Короленко.

К интересному, содержательному и по-настоящему глубоко выстраданному С. Я. Гродзенским тексту о Маркове добавлены три очерка, дающие достаточно полную характеристику его математических исследований. Если первая часть доступна самому широкому кругу читателей, то упомянутые очерки носят более специальный характер и для своего прочтения требуют известной математической подготовки. Мне представляется, что такое достаточно резкое разделение книги научно-биографического характера на две части различной трудности не только допустимо, но и необходимо, поскольку собственно научные результаты требуют для своего изложения и специальной терминологии, и специальной символики, и специальных знаний.

Известно, что действительно крупные научные концепции, выдвинутые тем или иным ученым, не умирают с ним, а продолжают развиваться и получать новые практические применения. Идеи Маркова по теории «цепей Маркова» не были утеряны и после смерти их создателя были подхвачены многими исследователями. В руках А. Н. Колмогорова они получили широкое обобщение и превратились в теорию случайных процессов без последействия. Позднее по предложению известного французского математика Ж. Адамара процессы, введенные в рассмотрение А. Н. Колмогоровым, получили наименование «марковских процессов» и дали начало ряду новых ветвей математики и многочисленным приложениям.

Величие ученого определяется не числом книг и статей, которые ему удалось написать, а тем последействием на развитие науки, которое ему удалось оказать, тем толчком, который в развитии научной мысли ему удалось осуществить. Теперь мы с полным основанием можем заявить, что идея «цепей Маркова» оказалась исключительно плодотворной и за последние 60—70 лет именно с ней связано в значительной мере все развитие теории вероятностей. В действительности, как мы уже об этом говорили, это последействие оказалось несравненно более широким и далеко вышло за пределы математики, оказав влияние на прогресс физики, инженерного дела, количественной биологии и многих других направлений деятельности.

Чтобы создать поколение творцов, мы должны систематически обучать молодежь искусству творчества. Для этой цели рассказы об открытиях прошлых времен о зарождении идей о новом, неизвестном у наших предшественников являются мощным воспитывающим средством. Нам нужно научиться вызывать энтузиазм молодежи в деле поиска нового, более совершенного, а также побеждать рутинную мысль о том, что кто-то другой способен на многое, в том числе и на творчество, а вот я, данный и конкретный, к этому вовсе не приспособлен. Надеюсь, что книга С. Я. Гродзенского будет интересна читателям с разных позиций, в том числе и с тех, о которых говорилось только что. Желаю этой книге заслуженного успеха.

Б. Гнеденко

Иметь с ним общение — значило разделять его взгляды; он был естественным вождем того кружка лиц, которые его окружали, его учеников и прежде, и в последнее время; вождь и теперь, ибо... живой дух его остался в тех, с кем он соприкасался.

Н. М. Гюнтер

Ход его мышления и свойства его на редкость прямой души были настолько своеобразны, что не укладывались в обычных рамках; к этим особенностям может быть не всегда приятным, все же можно относиться только с уважением.

В. А. Стеклов

От автора

Эта книга посвящена жизни и деятельности выдающегося русского математика академика Андрея Андреевича Маркова. В его научном творчестве отчетливо проявились черты, присущие знаменитой Петербургской математической школе: умение увязывать математическую проблематику с принципиальными вопросами естествознания, конкретность в выборе предмета исследования, общность постановки задач и доведение решений «до числа», до возможности практического применения и экспериментальной проверки разработанной теории.

Главные научные достижения академика А. А. Маркова относятся к теории чисел, математическому анализу и теории вероятностей. Его исследования о зависимых случайных величинах занимают центральное место в современной теории вероятностей и лежат в основе большинства ее приложений к различным отраслям знания — геологии, экономике, биологии, технике [II, 1]. Без использования признаваемой ныне классической теории «цепей Маркова» невозможно было бы решение фундаментальных проблем теоретической физики.

Значение научного творчества А. А. Маркова освещено во многих публикациях, в частности [I, 127; I, 128; II, 3—11]. Гораздо меньше сказано о Маркове-человеке и гражданине. Между тем Марков-ученый и Марков-гражданин — это органически неразрывное единство. Здесь предпринимается, по-видимому, первая попытка, опираясь на документальные материалы, описать жизненный путь ученого, отразив различные стороны его научной и общественной деятельности. В то же время книга может служить дополнением к вышедшим в свет научным биографиям других ведущих представителей Петербургской математической школы: П. Л. Чебышева, А. Н. Коркина, Е. И. Золотарева, Н. Я. Сонина и О. И. Сомова [II, 12—16].

«Я — поэт. Этим и интересен»,— сказал о себе Маяковский. Марков — математик. Этим и интересен. И подобно тому как невозможно рассказать о поэте, умолчав о его поэзии, так же нельзя рассказать об ученом, не раскрыв содержание его научных трудов. Однако еще В. А. Стеклов заметил, что «трудная задача выяснить значение ученых трудов математика собранию, состоящему в большинстве из лиц, чуждых этой специальности. Чем серьезнее и глубже с научной точки зрения затронуть вопрос и чем более удовлетворятся таким анализом знатоки дела, тем непонятнее и скучнее покажется речь большинству непосвященных, и наоборот» [II, 2].

Для того чтобы достаточно полно охарактеризовать исследования А. А. Маркова только по теории вероятностей, пришлось бы составить объемистый трактат, доступный к тому же лишь узкому кругу специалистов. Было принято решение содержание главных научных трудов А. А. Маркова изложить в приложениях, написанных для этой книги докторами физико-математических наук А. В. Малышевым (теория чисел), П. К. Суетиным (математический анализ) и Б. В. Гнеденко (теория вероятностей).

Научная биография А. А. Маркова адресована не только математикам, но и всем интересующимся историей науки. При написании книги использовались, кроме печатных работ Маркова и о Маркове, материалы Архива Академии наук СССР (ААН), и прежде всего его Ленинградского отделения (ЛО ААН), Ленинградского государственного исторического архива (ЛГИА), Центрального государственного исторического архива СССР (ЦГИА), Центрального государственного архива Октябрьской революции и социалистического строительства г. Ленинграда (ЦГАОР), Центрального государственного архива литературы и искусства СССР (ЦГАЛИ), Государственного архива Рязанской области. Неоценимую помощь в работе над книгой оказал сын академика А. А. Маркова выдающийся советский математик член-корреспондент АН СССР А. А. Марков (1903—1979), который поделился своими воспоминаниями об отце и предоставил в распоряжение автора много интересных материалов из семейного архива.

Заключительная стадия работы над книгой проходила, когда А. А. Маркова-сына уже не было в живых. Автор считает приятным долгом отметить помощь, оказанную ему семьей А. А. Маркова-внука.

Приведенная в книге библиография состоит из двух частей, имеющих самостоятельную нумерацию: I — научные труды А. А. Маркова; II — использованная литература.

Ссылки на литературные источники даются в квадратных скобках с указанием номера части библиографии и порядкового номера работы в этой части. При необходимости указывается номер тома (если издание многотомное) и страницы. Ссылки на архивные источники, примечания к тексту даны подстрочно.

Выражаю свою благодарность ответственному редактору академику АН УССР Б. В. Гнеденко, авторам приложений, рецензентам, кандидатам физико-математических наук Е. П. Ожиговой и С. С. Демидову, сделавшим много полезных замечаний, и сотрудникам ЛО Архива АН СССР, в течение нескольких лет содействовавшим в сборе материала.

Глава 1

Детство и юность

В середине прошлого XIX в. Рязань представляла собой мещанско-купеческий город со слабо развитой промышленностью полукустарного типа, насчитывающий 26 церквей. По числу жителей двадцатитысячная Рязань занимала 35-е место среди губернских городов России [II, 17, 18]. В метрической книге Ново-Вознесенской церкви Рязани имеется запись за 1856 г. о рождении Андрея Маркова. Дата рождения — 2 июня [1], дата крещения — 5 июня. Родители — «Рязанской палаты государственных имуществ делопроизводитель коллежский секретарь Андрей Григорьевич Марков и законная жена его Надежда Петровна, оба православного исповедания» [2].

Отец А. А. Маркова, Андрей Григорьевич, родился 19 августа 1823 г. в селе Федосьева Пустынь Спасского уезда Рязанской губернии в семье сельского дьякона Григория Марковича Маркова [3].

Отец будущего академика воспитывался в Рязанской духовной семинарии, в фонде Правления которой поныне хранится копия аттестата А. Г. Маркова с оценками «хорошо», «весьма хорошо» и «очень хорошо» [4]. Вскоре после окончания в 1844 г. духовной семинарии Андрей Григорьевич поступил в канцелярию Зарайского предводителя дворянства младшим письмоводителем и сразу же был утвержден в чине коллежского регистратора, а в октябре 1845 г. указом губернского правления перемещен в Зарайский уездный суд [5]. С 1853 г. А. Г. Марков служил в лесном отделении Рязанской палаты государственных имуществ в должности дело-

---

[1] Даты, относящиеся к дореволюционному периоду, приводятся по старому стилю.

[2] Гос. арх. Рязан. обл., ф. 627, оп. 249, д. 241, л. 587 об.

[3] Там же, оп. 254, св. 14а, д. 32а, л. 30 об.

[4] Там же, ф. 1280, оп. 1, св. 75, д. 216, л. 172.

[5] Там же, ф. 4, оп. 47 (т. XI), св. 321, д. 8229, л. 2—4.

производителя в чине коллежского секретаря. Из формулярного списка о службе старшего столоначальника лесного департамента Андрея Григорьевича Маркова, составленного в июле 1871 г., следует, что он к тому времени дослужился до чина коллежского советника [6].

В отчете по лесному отделению за 1854 г. отмечалось: «Делопроизводитель лесного отделения Марков... при похвальной нравственности исполнял свои обязанности с отличным усердием и успехом и чрез то вполне заслуживает начальнического внимания и признательности» [7].

Прямота, честность, непримиримость к недостаткам — эти черты, столь свойственные Андрею Андреевичу Маркову, обнаруживаются и в характере его отца.

Неподкупный чиновник не столь уж частое явление в старой, крепостнической России времен Николая I. И все же таким и был Андрей Григорьевич. С приходом его в лесное отделение у начальства стали возникать непривычные и весьма неприятные хлопоты. В 1853 г. по инициативе нового делопроизводителя было начато первое дело о взятках лесных чиновников, бравших с крестьян незаконно деньги при отпуске леса [8]. В следующем году возникло еще три дела о взятках, а к концу 1856 г. накопилось шесть нерешенных дел о злоупотреблении властью в Лесном отделении Рязанской губернии. Прежде ничего подобного не бывало, ревизоры никаких нарушений не замечали....

Такое «отличное усердие» вскоре надоело высшим чинам Рязанской палаты государственных имуществ, и они не оставили «начальническим вниманием» не в меру прыткого делопроизводителя — А. Г. Маркову было предложено подать в отставку... Позднее отставной коллежский советник стал частным поверенным — «ходатаем по делам», как в те времена называлась эта профессия. Нельзя сказать, чтобы занятие было из доходных, тем более что Андрей Григорьевич и в новом звании оставался человеком честным. Но юридическое дело, по-видимому, пришлось ему по душе. Бывало, он с увлечением повествовал домашним: «Они нам иск, а мы им — встречный иск!» [II, 19].

---

6 ЦГИА, ф. 387, оп. 24, д. 6487, лл. 11—23.
7 Гос. арх. Рязан. обл., ф. 264, оп. 11 (т. 1), св. 20, д. 185, л. 25.
8 Там же, д. 178, лл. 64—65.

А. Г. Марков вообще слыл человеком азартным, имел репутацию заядлого картежника. Семейное предание гласит, что однажды он даже проиграл в карты все свое имущество — движимое и недвижимое. К счастью, выяснилось, что играл он с шулером, и потому проигрыш был признан недействительным.

По метрическим книгам Зарайского уезда Рязанской губернии установлено, что «коллежский регистратор Андрей Григорьевич Марков, 23 лет, венчался в Ильинской церкви города Зарайска 24 января 1847 г. с „девицей Надеждой Петровной, 18 лет от роду“, с дочерью коллежского асессора Петра Ивановича Фёдорова» [9].

У Андрея Григорьевича и Надежды Петровны было шестеро детей: Петр (р. 10.04.1849), Евгения (р. 11.12.1850), Павел (р. 10.06.1852), Мария (р. 22.01.1854), Андрей (р. 2.06.1856), и Михаил (р. 9.10.1859).

Андрей Григорьевич был женат дважды. От второй жены, дочери чиновника Анны Иосифовны, он имел троих детей: Владимира (р. 8.05.1871), Лидию (22.03.1873) и Екатерину (р. 23.11.1875).

О судьбе большинства братьев и сестер Андрея Андреевича Маркова удалось выяснить немногое. Самая старшая сестра А. А. Маркова, Евгения Андреевна (ум. в 1920 г.), была одной из первых русских женщин-врачей психиатров. Мария Андреевна Маркова умерла на 22-м году жизни, 29 октября 1875 г.[10]

Врачом была и самая младшая сестра в семье Марковых — Екатерина Андреевна. Лидия Андреевна, школьная учительница, умерла в Ленинграде в начале 1942 г. Брат, Михаил Андреевич, скончавшийся незадолго до Великой Отечественной войны, пошел по стопам своего отца — был лесничим на Украине.

Среди братьев и сестер Андрея Андреевича наиболее заметный след оставил младший брат, Владимир. Он, как и А. А. Марков, окончил 5-ю Петербургскую гимназию, а в 1888 г. поступил в Петербургский университет. Уже в студенческие годы обратил на себя внимание как даровитый математик. Сочинение Владимира Маркова на тему «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке» [II, 20] было

---

[9] Там же, ф. 627, оп. 249, д. 221, л. 15.
[10] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 67.

в 1892 г. отмечено премией, установленной в честь первого съезда естествоиспытателей и врачей [II, 21, с. 12]. По окончании университета В. А. Марков одновременно с известными впоследствии математиками Г. Ф. Вороным и Б. М. Кояловичем был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию и по предложению профессора А. Н. Коркина занялся исследованием положительных тройничных квадратичных форм. К весне 1894 г. он закончил сдачу магистерских экзаменов, а за три года (1893—1896) сделал шесть сообщений в Петербургском математическом обществе [II, 22].

В 1895/96 учебном году В. А. Марков был «репетитором» (так тогда назывались помощники профессора) аналитической геометрии в Петербургском институте инженеров путей сообщения. Преподавал В. А. Марков и в 5-й Петербургской гимназии.

В 1896/97 учебном году он уже не мог вести занятия из-за болезни и 18 января 1897 г., не дожив и до 26-ти лет, скончался в лечебнице для чахоточных. Магистерская диссертация Владимира Маркова была опубликована посмертно [II, 23].

В начале 60-х годов Андрей Григорьевич переселился с семьей из Рязани в Петербург. Здесь он устроился управляющим имением Екатерины Александровны Вальватьевой, вдовы дворянина Ивана Дмитриевича Вальватьева. Летом на даче Екатерины Александровны собиралось много молодежи — дети управляющего Маша, Евгения («Еня», как ее называли родственники), Андрюша и Миша и ее собственные дочери Мария и Елизавета.

Андрюша Марков рос хилым, болезненным. В детстве у него обнаружился костный туберкулез, одна нога не разгибалась в колене, мальчик ходил на костылях. Но, несмотря на хромоту, Андрей был резвым ребенком, большим любителем игр и забав. Он приучился обходиться без костылей — скакал на одной ноге и в этом способе передвижения достиг совершенства. По воспоминаниям Машеньки Вальватьевой (впоследствии Марьи Ивановны Марковой жены А. А. Маркова), Андрюша довольно быстро бегал и с успехом играл в горелки.

После переезда Марковых в Петербург известный в столице хирург Э. Кадэ сделал мальчику операцию — разогнул ногу. Андрей получил возможность ходить нормально. Правда, он слегка прихрамывал всю жизнь, но это отнюдь не мешало ему любить дальние пешие прогулки. «Будешь жив, пока на ходу»,— любил повторять Андрей Андреевич услышанное когда-то высказывание.

Беззаботное детство окончилось в 1866 г., когда десятилетнего Андрюшу Маркова отдали в 5-ю Петербургскую гимназию. Она была основана в 1845 г. Тогдашний министр народного просвещения граф С. С. Уваров остановил свое внимание на забытой до того времени Коломне как на местности, где должно было расположиться проектируемое учебное заведение.

В этом тогдашнем глухом предместье Петербурга на Псковской улице прошли юношеские годы Андрея Маркова. Коломна была населена в основном ремесленниками, мелкими домовладельцами, торговцами и прочими представителями сословия мещан, типичные образы которых выведены А. С. Пушкиным в его шутливой поэме-пародии «Домик в Коломне». Следующее поколение обитателей Коломны окружало А. А. Маркова.

Марковы снимали квартиру в доме № 10 по Псковской улице. Это был доходный дом, принадлежавший князю И. Г. Грузинскому. До гимназии отсюда было, что называется, рукой подать. Выйдя из дому, Андрюша поворачивал направо, огибал угловой дом с мезонином и через пару минут выходил на набережную Екатерининского канала (ныне канал Грибоедова), далее оставалось преодолеть один квартал по Екатерингофскому проспекту, и он оказывался у цели.

Гимназия находилась у Аларчина моста, где занимала трехэтажный дом на углу Екатерингофского проспекта (ныне пр. Римского-Корсакова, 73) и Английского проспекта (ныне пр. Маклина, 33). Позднее, в 1878 г., здание гимназии перестраивалось, со стороны Английского проспекта были воздвигнуты двухэтажный лицевой дом и дворовый флигель. Строения эти сохранились до наших дней, а вот архивные материалы 5-й гимназии за период с 1856 по 1915 г. погибли во время наводнения 23 сентября 1924 г.[11]

Что же представляло собой это учебное заведение? В 1844 г. попечитель С.-Петербургского учебного округа князь Волконский в своем донесении министру пред-

[11] ЛГИА, ф. 335, оп. 1.

Дом на Псковской ул., 10 (Ленинград), в котором А. А. Марков жил в гимназические и студенческие годы

ложил организовать учебное заведение с углубленным изучением точных наук, чего требовало начинавшееся в то время быстрое развитие промышленности [II, 24, с. 9].

Волконский предлагал основание семиклассной гимназии, в которой не преподавались бы древние языки, а было бы усилено изучение математики и физики, введены начертательная геометрия, механика и химия. Князь, таким образом, намеревался организовать учебное заведение нового типа, которое много позднее стало бы называться реальным училищем. Министр народного просвещения граф С. С. Уваров, однако, придерживался иного мнения, полагая, что новая гимназия должна стать классической, с обязательным преподаванием древних языков.

Хотя в конечном счете был реализован проект Уварова, в первые годы существования гимназии в ней чувствовался явный уклон в сторону точных наук. В немалой степени этому способствовал первый директор А. Н. Беляев, обращавший серьезное внимание на качество преподавания математики и физики и придававший при этом большое значение решению практических задач [II, 25].

Кроме А. Н. Беляева, математику в гимназии вели и другие опытные учителя. Наибольшее влияние на учеников оказывал преподаватель физики и математики К. Д. Краевич, товарищ Д. И. Менделеева по Главному педагогическому институту. В воспоминаниях о Краевиче отмечается, что он «обладал методическим, в высшей степени логически-последовательным умом. Он был прекрасный преподаватель, постоянно занимался физикой, производил исследования в ее области и, естественно, ту точность, которая свойственна этой науке, переносил на учеников. Требования его были крайне строги. Константин Дмитриевич не удовлетворялся вообще хорошим ответом, а требовал безусловного отчетливого знания и понимания. Эта требовательность, как ни тяжела она была для учащихся, приносила большую пользу...» [II, 24, с. 37].

Выдающийся советский кораблестроитель, механик и математик академик А. Н. Крылов, бывший учеником К. Д. Краевича в Николаевской морской академии, вспоминал: «Константин Дмитриевич не отличался ни особенным красноречием и увлекательностью изложения, ни особенным искусством экспериментатора, ни умением с изяществом и мастерством владеть математическим аппаратом, как Коркин, или геометрией, как Н. Я. Цингер; но характерною особенностью его лекций был его оригинальный критический анализ полученных выводов и результатов или их истолкования, так сказать, здравый научный скептицизм... Правда, от значительного большинства слушателей тонкость и оригинальность его критического анализа ускользала, но зато остальные проникались истинным уважением и благодарностью к своему профессору, делившемуся с ними не только своими познаниями, но и сомнениями» [II, 26, с. 388].

Многие выпускники 5-й Петербургской гимназии посвятили себя изучению точных наук. Достаточно упомянуть, помимо А. А. Маркова, профессора Киевского университета физика М. П. Авенариуса (выпускник 1854 г.), химика-технолога профессора Петербургского технологического института А. К. Крупского (выпускник 1862 г.), выдающегося математика адъюнкта Петербургской Академии наук Е. И. Золотарева (окончил гимназию в 1863 г.), профессора Казанского универси-

Здание, в котором размещалась 5-я Петербургская гимназия

тета А. В. Васильева (выпускник 1870 г.), В. А. Маркова (выпускник 1888 г.).

Многие из окончивших в ту пору гимназию сохранили теплые воспоминания об этом учебном заведении [12]. Андрюша Марков также всю жизнь помнил о днях, проведенных в гимназии. Но его воспоминания были тяжелые. В период, когда ему довелось учиться в гимназии, она представляла собой типичное казенное заведение с «человеками в футлярах» в ролях педагогов, с казарменной дисциплиной.

Перерождение гимназии происходило постепенно. В 1856 г. прекратились литературные беседы. 19 ноября 1864 г. был «высочайше утвержден» новый устав гимназий, по которому закон божий в пятом и шестом классах преподавался два урока в неделю вместо одного, латинский язык надлежало проходить с первого класса, а не с третьего, как до этого. Зато преподавание естественных наук новый устав ограничил тремя первыми классами.

[12] Характеристика 5-й Петербургской гимназии в первые годы ее существования дана в научной биографии Е. И. Золотарева. См.: *Ожигова Е. П.* Егор Иванович Золотарев. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1966. 144 с.

В 1868/69 учебном году под сводами 5-й гимназии впервые послышались звуки греческого языка и она окончательно превратилась в классическую. Яркую характеристику такому заведению дал Д. И. Писарев: «Чтобы доискаться до какого-нибудь смысла в нашем гимназическом или общем образовании, необходимо было отправиться в историческую экскурсию и добраться до греков, потому что только там, в этом первобытном источнике, словесное или гуманное образование имело смысл и значение, а мы донашиваем теперь чужие обноски, в которых уже не видно ни цвета, ни покроя, ни качества материи» [II, 27, с. 386]. «В гимназической программе нет общего плана; собрание слов и фраз называются науками; рассказы и гипотезы вытесняют собою серьезные знания; память учеников работает постоянно, а мыслительные способности их находятся в бездействии» [II, 27, с. 407].

Выделив в гимназическом курсе наук математику и физику, Д. И. Писарев отмечал: «Они бы (математика и физика.— *С. Г.*) и рады помочь горю и предохранить гимназистов от угрожающего им отупления, но сила остальных наук слишком велика, так что против них невозможно бороться» [II, 27, с. 387].

В 1866 г. Андрюша Марков впервые переступил порог гимназии, а через год там появился преподаватель латыни И. Ф. Шрамек. В 1872 г. последний заменил на посту директора А. Н. Беляева. В бытность И. Ф. Шрамека была введена мера наказания, весьма характерная для его директорского стиля: ученики, не представившие свидетельства об исповеди или удостоверения об уважительной причине, препятствовавшей исполнению этого христианского долга, не допускались к испытаниям независимо от успеваемости [II, 28, с. 170].

Андрей Марков был очень увлечен математикой еще в школьный период и самостоятельно изучал высшую математику. «Насчет дочерей Маши и Ени я спокоен,— говорил как-то отец Андрея,— они учатся хорошо. А вот с Андреем беда! Опять меня вызывали к директору. Ничем Андрей не хочет заниматься, кроме математики » [I, 128, с. 601].

Одно время Андрею казалось, что он изобрел новый метод интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Об этом своем открытии он сообщил известным русским математикам того времени Буняковскому, Золотареву и Коркину.

В Ленинградском отделении Архива АН СССР хранится письмо вице-президента Петербургской Академии наук В. Я. Буняковского гимназисту Андрею Маркову от 13 ноября 1873 г. «Предлагаемый вами способ для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами уступает, со стороны простоты, общеизвестному,— писал Буняковский Маркову.— К тому же вы не показали, как поступать в случаях равных вещественных и мнимых корней уравнения

$$r^m + ar^{m-1} + br^{m-2} + \ldots + pr + q = 0.$$

Кроме того, не достает у вас приема для введения в полный интеграл требуемого числа постоянных произвольных величин» [13].

Е. И. Золотарев и А. Н. Коркин подробно и обстоятельно разъяснили гимназисту А. Маркову, что предлагаемый им способ интегрирования дифференциальных уравнений в действительности не является новым. А. Н. Коркин писал А. Маркову 6 декабря 1873 г.[14]: «Если Вы желаете познакомиться с товарищем моим Егором Ивановичем Золотаревым, то зайдите ко мне в эту субботу (8-го декабря) часов в семь вечера. А. Коркин».

Так завязалось знакомство А. Маркова с профессорами математики Петербургского университета А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым.

Но Андрей Григорьевич был не совсем прав, когда говорил об увлечениях сына. Уже в школьные годы у Андрея Маркова проявился острый интерес к явлениям общественной жизни. Он зачитывался статьями великих публицистов-шестидесятников Чернышевского, Добролюбова, Писарева, под влиянием которых находилась тогда лучшая часть учащейся молодежи. В душу юноши могли запасть и слова Д. И. Писарева о математике: «...математика — наука великая, замечательнейший продукт одной из благороднейших способностей человеческого разума. Профанирование математики есть преступление перед разумом, преступление, за которое несем наказание мы, невинные жертвы

---

[13] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 3, л. 1.
[14] Там же, д. 9, л. 2.

своеобразных достоинств. Если у нас нет в обществе строгих мыслителей, если наши критические статьи бывают похожи на соображения Кифы Мокиевича [15], если наши оптимисты смахивают на Манилова, а добродетельные либералы — на Ситникова [16], то все эти привычные нам чудеса происходят, между прочим, и от того, что чистую и прикладную математику мы одолеваем памятью, а размышлять учимся впоследствии, погружаясь в исторические теории, в философские системы, в юридические фикции, в теологические гипотезы и в разные другие извинительные шалости досужего и игривого человеческого ума» [II, 27, с. 382].

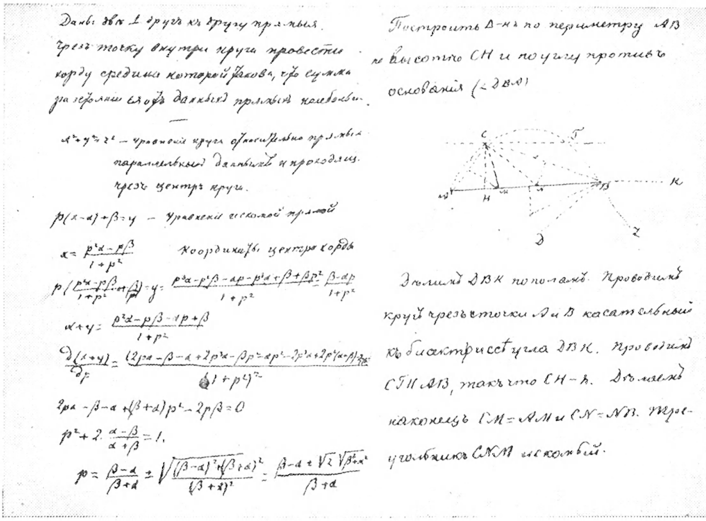
А в гимназии сама методика преподавания латинского и греческого языков, построенная на зубрежке бесчисленных правил и исключений — всевозможных «много есть имен на *is* — *Masculini generis*» и т. п., лишь способствовала отуплению учеников. Живой впечатлительный мальчик буквально задыхался в школе-казарме, а учась в старших классах гимназии, возненавидел ее.

Стал обнаруживаться и крамольный образ мыслей Андрея. «Вы начитались борзописцев, отрицающих чувство прекрасного»,— заявил учитель словесности по поводу его сочинения о «Евгении Онегине» А. С. Пушкина, написанного в духе известной статьи Д. И. Писарева «Пушкин и Белинский». А будучи уже в выпускном, восьмом классе, он однажды вместо того, чтобы стоять навытяжку во время молитвы после конца уроков, занялся укладыванием книг в портфель. На его беду последний урок вел «немец», пристально следивший за поведением учеников во время молитвы. «Вы нарушаете благоговейное чувство класса,— сказал он Андрею Маркову после окончания молитвы.— Я сообщу директору». Когда товарищ Андрея Ф. Капустин (впоследствии физик, профессор Петербургского университета), пытаясь заступиться за него, сказал, что благоговейное чувство класса не было нарушено, рассвирепевший учитель закричал: «Вы никакой адвокат! Ступайте в карцер!»

---

[15] Кифа Мокиевич — тип провинциального «мудреца», выведенный Н. В. Гоголем в XI главе первого тома «Мертвых душ».— *С. Г.*

[16] Ситников — персонаж романа И. С. Тургенева «Отцы и дети».— *С. Г.*



Даны двѣ ⊥ другъ къ другу прямыя.
Чрезъ точку внутри круга провести
хорду средина которой такова, что сумма
разстояній съ обѣихъ данныхъ прямыхъ наибольш.

$x^2+y^2=r^2$ — уравненіе круга относительно прямыхъ
параллельныхъ даннымъ и проходящ.
чрезъ центръ круга.

$p(x-\alpha)+\beta=y$ — уравненіе искомой прямой

$x=\frac{p^2\alpha-p\beta}{1+p^2}$ координаты центра хорды

$x+y=\frac{p^2\alpha-p\beta-\alpha p+\beta}{1+p^2}$

$p^2+2\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=1.$

Построить Δ-къ по периметру AB
и высотѣ CH и по углу противъ
основанія ($\angle$ ДВА)

Дѣлимъ ДВК пополамъ. Проводимъ
кругъ чрезъ точки А и В касательный
къ биактриссѣ угла ДВК. Проводимъ
СГ ∥ АВ, такъ что СН = h. Дѣлаемъ
наконецъ СМ = АМ и СN = NB. Тре-
угольникъ СNМ искомый.

Страница из записной книжки гимназиста А. Маркова, 1873 г.

Педагог и впрямь пожаловался директору, тот вызвал отца Маркова и заявил ему, что не потерпит у себя в гимназии «атеистов и нигилистов». Некоторое время спустя Андрею Григорьевичу удалось смягчить гнев директора и Андрей Марков вновь был принят в выпускной класс.

Перед нами записная книжка гимназиста Андрея Маркова. Более ста лет хранилась она в семье Марковых, а недавно передана нами в Архив Академии наук СССР. О чем же говорит этот немой свидетель давно ушедших времен? Книжка датирована. Все записи делались в 1873/74 учебном году, когда Андрей учился в выпускном классе. Бросается в глаза, что владелец книжки не в ладах с каллиграфией. Наверно, графологи отметили бы порывистость, резкость и решительность его характера.

Андрей Марков не относился к лучшим ученикам класса. Его средний балл (рассчитываемый ежемесячно как среднее арифметическое из оценок по всем предметам) колеблется от месяца к месяцу между 3,5 и 4,0. Эта цифра складывалась из постоянных троек, а бывало и двоек по латыни и немецкому языку. Не получал он выше тройки по рисованию. Тройки по греческому и географии иной раз разбавлялись четверками. Твердая четверка была по русскому языку, истории и закону божьему. И лишь по математическим дисциплинам (алгебре и геометрии) у него был высший балл. В целом А. Марков среди учеников своего класса занимал по успеваемости место где-то в начале второго десятка.

Даже не зная, кто хозяин книжки, невольно обращаешь внимание на его большую любовь к математике. Записаны и типично школьные задачи на составление квадратного уравнения. «Некто имеет три различные товара, которые вместе стоят 55 р. Товара второго рода у него на $^1/_3$ более, чем первого, а третьего — в 3,5 раза более, чем второго. Сколько фунтов каждого рода товара, если фунт каждого рода стоит столько копеек, сколько фунтов этого сорта?» Или другая задача: «Одного человека спросили, сколько ему лет, и он ответил: я родился, когда моей матери было 20 лет, а теперь произведение наших возрастов на 2500 больше суммы».

В книжке дается решение довольно сложных задач по аналитической геометрии, рассматриваются двойные и тройные интегралы, примеры по математическому анализу. Решение дифференциального уравнения приводится и там, где должно было быть задание по закону божьему. А рядом с домашним заданием по латыни наспех записан адрес: «Коркин. Васильевский остров. 15-я линия между Средним и Малым проспектом, дом Григорьева, № 64».

Решением разнообразных математических задач испещрены все листы книжки. Для других предметов не хватало места в книжке, как не хватало его, наверное, и в душе Андрея.

Расписание занятий на неделю. Каждый из шести учебных дней состоял из пяти уроков. Неделя начиналась (первый урок в понедельник) и кончалась (пятый урок в субботу) греческим языком, который был ежедневно (шесть уроков в неделю). Пять раз в неделю преподавалась латынь. По три урока в неделю отдавалось математике, истории, словесности, немецкому и французскому языкам. Наконец, дважды в неделю гимназисты изучали физику и закон божий.

Уже в гимназические годы А. А. Маркову было свойственно критическое отношение к наблюдаемым явлениям. До всего он стремился дойти сам. Запись от 25 октября 1873 г.: «Мое определение зенитного расстояния наиточнейшее. А. Марков».

Аттестат об окончании Андреем Марковым 5-й С.-Петербургской гимназии гласит:

«Дан сей Андрею Андрееву Маркову сыну Надворного Советника Православного Вероисповедания, родившемуся в городе Рязани 1856 года июня месяца 2 дня, обучавшегося восемь лет в Пятой С.-Петербургской гимназии и пробывшему два года в VIII классе, в том, во-первых, что на основании наблюдений за все время обучения его в 5-й С.-Петербургской гимназии поведение его вообще было отличное, исправность в посещении и приготовлении уроков, а также в исполнении письменных работ удовлетворительная, прилежание удовлетворительное и любознательность весьма в удовлетворительной степени развита к физико-математическим наукам, и, во-вторых, что он обнаружил следующие познания [17]:

	Отметки, выставленные пед. советом	Отметки, полученные при испытаниях
Закон Божий	4	5
Русский язык и словесность	3	5
Латинский язык	3	3
Греческий язык	3	3
Математика	5	5
Физика и математическая география	4	
История	5	4
География	5	
Немецкий язык	3	

Выраженными математическими способностями отличался и младший брат А. А. Маркова, Владимир. В его аттестате об окончании 5-й С.-Петербургской гимназии также отмечена «любознательность, особенно направленная к изучению математики и физики». И отметки в аттестате весьма схожи с отметками старшего брата [18].

В 1874 г., получив аттестат зрелости, Андрей Марков поступает на физико-математический факультет Петербургского университета.

---

[17] ЛГИА, ф. 14, оп. 1, д. 8109, л. 22.
[18] Там же, оп. 3, д. 26433, л. 2, 2 об.

Глава 2

В Петербургском университете

Вся научная биография А. А. Маркова связана с Петербургским университетом. В его стенах он прошел путь от студента до заслуженного профессора, а на склоне лет в числе наиболее крупных деятелей науки был удостоен звания почетного члена университета.

Андрей Марков поступил на физико-математический факультет университета в 1874 г. [1] И хотя история этого учебного заведения насчитывала в ту пору немногим более полувека, оно уже имело репутацию крупного научного центра. Еще в 40-е годы здесь начали свою деятельность многие знаменитые ученые, в том числе выдающиеся математики О. И. Сомов, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев. В 1860 г. на кафедру математики приходит магистр А. Н. Коркин, а вскоре приват-доценты Е. И. Золотарев и Ю. В. Сохоцкий [II, 29].

Поступавшие на физико-математический факультет сдавали экзамены по математике, русскому языку и одному (по выбору экзаменующегося) из древних языков. В 1874 г. экзамен по русскому языку принимали О. Ф. Миллер и М. И. Сухомлинов, по математике — Ю. В. Сохоцкий и Е. И. Золотарев [II, 30, с. 77]. С последним, как мы знаем, Андрей Марков поддерживал отношения, еще будучи гимназистом.

В год поступления А. А. Маркова в университет на физико-математическом факультете обучалось 392 человека, из них по разряду математических наук — 174 [II, 31, с. 83]. Сильное впечатление производит преподавательский состав факультета. Декан А. Н. Бекетов вел курс общей ботаники. О. И. Сомов — аналитическую механику, П. Л. Чебышев — теорию чисел и теорию вероятностей, А. М. Бутлеров — органическую химию, Д. И. Менделеев — неорганическую химию, А. Н. Коркин — интегрирование дифференциальных уравнений, Н. А. Меншуткин — аналитическую химию, Р. Э. Ленц — физическую географию и оптику, Ю. В. Сохоцкий — дифференциальное исчисление, Е. И. Золотарев — интегральное исчисление и теорию эллиптических функций [II, 31—34]. В 1876/77 учебном

[1] ЛГИА, ф. 14, оп. 3, д. 18146, л. 1.

году А. Н. Бекетов стал ректором университета, а на посту декана его сменил А. С. Фаминцын [II, 35].

В бытность А. А. Маркова студентом действовал Университетский устав 1863 г., в основу которого была положена идея автономии университетов как корпорации профессоров. Все стороны учебной и научной работы направлялись Советом, который выбирал ректора (утверждаемого министром), проректора, деканов, а также профессоров на вакантные кафедры. Совет присуждал ученые степени без последующего утверждения попечителем или министром. За студентами по Уставу 1863 г. устанавливался строгий контроль. Их проступки, в том числе и достаточно серьезные, разбирала специальная комиссия из профессоров, осуществлявшая таким образом функции правосудия в университете.

Вскоре после введения Устава 1863 г. началась борьба с ним как со стороны студенчества, добивавшегося устранения опеки начальства, так и со стороны правительства, недовольного «вольностями» университета.

В ответ на студенческие волнения 1869 г. власти приняли меры, направленные на ограничение автономии университетских советов, на подчинение их попечителю и министру. А затем в 1872 г. правительственные инстанции начали разработку нового устава. Специально организованная министерская комиссия постановила, что автономия профессорских коллегий должна быть ограничена, что должен быть установлен иной порядок назначения профессоров, что следует усилить правительственный контроль за направлением преподавания и, наконец, должен быть «стеснен дальнейший приток учащихся, мало подготовленных в научном отношении и притом не обеспеченных в материальном». Последнее относилось к демократическим прослойкам студенчества, наиболее обильно поставлявшим «горючий материал» политического движения. Все «вольности» были окончательно ликвидированы введением Устава 1884 г.

Позже, вспоминая годы учебы в университете, А. А. Марков писал, что среди его профессоров «следует упомянуть П. Л. Чебышева, Е. И. Золотарева и в особенности А. Н. Коркина. Последние два профессора, в бытность М[аркова] студентом Университета, кроме обычных лекций, посвящали особые часы разнообразным задачам, решение которых, в аудиториях и на дому, предоставлялось самим студентам; беседы же с

А. Н. Коркиным послужили началом для многих самостоятельных трудов М[аркова]» [I, 115].

А. А. Марков-сын рассказывал автору об услышанных им в детстве от отца воспоминаниях о П. Л. Чебышеве, имевшем обыкновение по окончании лекции беседовать со слушателями на разные математические темы. Студенту Маркову запомнилось, как во время одной из таких бесед Пафнутий Львович заметил, что в древние времена математические задачи ставились богами, в средние века—царями и королями, а в наше время — нуждой. Так ученый указал на важность практической направленности математических исследований.

Хорошо известно, что П. Л. Чебышев был сторонником взаимного обогащения теории и практики, отметив в своем сочинении «Черчение географических карт»: «Сближение теории с практикою дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее, она открывает им новые предметы для исследования, или новые стороны в предметах давно известных» [II, 36, с. 150].

Учился Андрей Марков в университете хорошо. В 1875/76 академическом году ему была назначена одна из императорских стипендий [II, 37, с. 64], а на старших курсах за особые успехи в учебе — именная стипендия Дыммана [II, 38, с. 70; 30, с. 72]. За весь период учебы в университете у А. Маркова было лишь две четверки. Одну он получил на экзамене по неорганической химии у Д. И. Менделеева [2], другую — по богословию. Все остальные экзамены он сдавал неизменно на пять. Среди прочих выделим высшие баллы по теории чисел [3] и теории вероятностей [4], выставленные ему П. Л. Чебышевым и Е. И. Золотаревым.

Если в гимназии А. Марков был «середняком», то в университете он имел репутацию одного из наиболее способных. Еще трое из его выпуска имели, как и он, высшие оценки по всем профилирующим дисциплинам.

В 1877 г. студентам-математикам была предложена тема для самостоятельного исследования: «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей с приложением к уравнению $(1 + x^2)\, dy/dx = n\,(1 + y^2)$» [II, 39, с. 10].

---

[2] ЛГИА, ф. 14, оп. 3, д. 14816, л. 14, 14 об.

[3] Там же, д. 14822, л. 102, 102 об.

[4] Там же, д. 14824, л. 188, 188 об.

Заключение о представленных на конкурс работах написаны Е. И. Золотаревым, которому более всех понравилось исследование под № 11: «В диссертации № 11 автор поместил вместо девиза соотношение из теории непрерывных дробей. Эта диссертация содержит большею частью самостоятельные исследования автора, обнаруживающие его большие познания и талант к математическим исследованиям.

В первой главе автор поместил вещи, не относящиеся собственно к теме, но на которые он ссылается в дальнейших местах своего рассуждения. Здесь он выводит новый признак сходимости бесконечных непрерывных дробей и доказывает свойства корней некоторых алгебраических уравнений, имеющих связь с непрерывными дробями. Во второй главе изложена метода Лагранжа для интегрирования дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей, а в следующей главе она приложена к заданному в теме предмету.

В главах IV и V рассматривается довольно общее дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее связь с известным уравнением гипергеометрического ряда. Автор находит разложение в непрерывную дробь интеграла этого дифференциального уравнения при помощи последовательных преобразований, выводит из этого разложения разнообразные следствия; между прочим, признаки существования рациональных интегралов для исследуемого уравнения.

Наконец, в последней главе автор снова обращается к уравнению, заданному в теме. Здесь он сообщает, следуя Борхардту, некоторые свойства корней знаменателя подходящих дробей для непрерывной дроби, выражающей частный интеграл предложенного уравнения.

Конечно, разбираемое сочинение, как содержащее самостоятельные изыскания, не могло бы быть без недостатков. Так, в главах IV и V автор не только не изучил, но и не указал на связь, существующую между дифференциальным уравнением, на котором он остановился, и известным уравнением гипергеометрического ряда. Кроме того, некоторые места его сочинения утомительны для чтения вследствие недостатков в изложении; но нельзя не сказать, что вообще изложение автора отличается строгостью и точностью.

Без сомнения, в ряду студентов по математике, награжденных в различное время медалями, рассуждение № 11 займет видное место» [II, 40, с. 83—84].

Автор сочинения № 11 студент 4-го курса А. Марков был награжден золотой медалью [II, 41, с. 14]. Свидетельство об этом и само сочинение хранятся в ЛО ААН [5]. Имя студента А. Маркова встречается в протоколах в связи с Е. И. Золотаревым еще раз: на заседании факультета 31 мая 1878 г. было оглашено заявление профессора Е. И. Золотарева с ходатайством о продолжении стипендии Дыммана Андрею Маркову еще на год [II, 41, с. 73]. Позднее свою работу «О целых числах, зависящих от корня кубического из целого рационального числа» А. А. Марков посвятил памяти Е. И. Золотарева [II, 42, с. 192; I, 37].

Андрей Марков закончил университет в 1878 г. со степенью кандидата «по разряду математических наук» [II, 41, с. 68]. В его дипломе об окончании университета отмечается: «Марков показал на испытаниях следующие познания: в математике, механике, астрономии, геодезии, физике, физической географии и французском языке — отличные, в богословии и неорганической химии — хорошие» [6].

Лучшие из студентов, окончивших курс наук со степенью кандидата, оставлялись при университете для специальных занятий по избранным дисциплинам и подготовке к преподавательской деятельности в учебных заведениях. 29 сентября 1878 г. профессор А. Н. Коркин на заседании Совета факультета ходатайствовал об оставлении шести выпускников, и в их числе А. Маркова, при университете. Предложение это было принято единогласно, а 16 октября утверждено Советом университета [II, 43, с. 12, 29; II, 35, с. 82].

Вскоре в физико-математический факультет была подана следующая докладная записка [II, 36, с. 300]:

«В физико-математический факультет
С.-Петербургского университета

Имеем честь представить факультету на освободившуюся стипендию кандидата Маркова, который по своим познаниям и способностям вполне ее заслуживает. Мы уже имели случай заявить факультету о нем как об одном из слушателей, замечательном по своим способностям. Мы можем прибавить, что он в последнее время сделал весьма замечательное и трудное исследование

---

[5] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 63, л. 1; л. 68, л. 46.
[6] ЛГИА, ф. 14, оп. 3, д. 18146, л. 29.

„О наименьших значениях бинарных форм положительного определителя“, которое будет напечатано.

А. Коркин, П. Чебышев, Ю. Сохоцкий».

Так началась служба А. А. Маркова в Петербургском университете, продолжавшаяся с небольшими перерывами вплоть до его кончины. Основные вехи педагогической деятельности Андрея Андреевича в стенах университета отражены в деле, которое хранится в ЛГИА [7].

Всего через два года после окончания университета А. Марков защитил магистерскую диссертацию «О бинарных квадратичных формах положительного определителя», примыкавшую к работам Коркина и Золотарева. Защита состоялась 13 апреля 1880 г. и привлекла внимание общественности.

Газета «Молва» по этому поводу сообщала: «В воскресенье, 13-го апреля, в университете удостоен степени магистра математики кандидат А. А. Марков. Оппонировали г. Маркову профессор Чебышев, Коркин и Сохоцкий. Диспут был оживленным, благодаря уверенности, смелым ответам диспутанта. Часть диссертации его помещена на французском языке в заграничном математическом журнале. Публика приветствовала молодого ученого дружными аплодисментами» [II, 44].

На другой день сообщение о блестящей защите диссертации поместила газета «Санкт-Петербургские ведомости»:

«В воскресенье, 13 апреля, в час пополудни в актовом зале университета очень молодой ученый А. А. Марков защищал свое рассуждение „О бинарных квадратичных формах положительного определителя“, представленное им в физико-математический факультет здешнего университета на степень магистра чистой математики... Председательствовал декан физико-математического факультета профессор Меншуткин. Официальными оппонентами были г.г. Чебышев и Коркин. Первый из них, высказавший свое мнение о его труде как замечательной работе, показывающей большое дарование автора, ограничился несколькими замечаниями относительно неровности изложения; а последний заявил об исключительной самостоятельности его исследований, представляемых столь трудным вопросом, раз-

[7] ЛГИА, ф. 14, оп. 1, д. 8109, 220 л.

бираемым в его рассуждении, при сем добавил, что его рассуждение (1 ч. которого уже переведена на французский язык), будучи переведено на иностранные языки, не останется без должного внимания и почтения в среде иностранных специалистов в этой отрасли науки по важности и интересу, представляемому его трудом, и ограничился тоже некоторыми замечаниями по отношению ясности и точности изложения. Некоторые замечания были сделаны г.г. Сохоцким и Поссе, а в заключение г. Марков был объявлен удостоенным звания магистра математики и приветствован дружными рукоплесканиями» [II, 45].

В архиве сохранилась часть «донесения» П. Л. Чебышева, касающегося диссертации А. А. Маркова [II, 36, с. 300]:

«В физико-математический факультет
Императорского С.-Петербургского университета
профессора П. Чебышева

Донесение

Сочинение кандидата Маркова под заглавием «*О квадратичных формах положительного определителя*», написанное им для получения степени магистра математики, уже знакомо нашему факультету по представлению, читанному о нем в заседании 2 ноября и, согласно с которым, факультет признал его достойным напечатания на специальные средства университета. К тому вполне лестному отзыву, который был сделан об этом сочинении в представлении, подписанном всеми тремя профессорами математики (А. Коркиным, П. Чебышевым, Ю. Сохоцким.— *С. Г.*), я могу только лично от себя присовокупить, что в этом сочинении кандидата Маркова изложены результаты вполне самостоятельной работы по предмету, имеющему очень большой интерес для теории чисел, и что она свидетельствует об искусстве г. Маркова в употреблении *непрерывных дробей*; *в* них, по замечанию Лагранжа, высказанному им в прибавлении *Алгебры* Эйлера, заключается средство, от которого прямо или косвенно зависит решение многих весьма важных вопросов, еще не решенных. При этом, как на весьма...» (рукопись обрывается).

Выдающийся советский математик Б. Н. Делоне писал о магистерской диссертации А. А. Маркова: «Эта работа, весьма высоко оцененная Чебышевым, принадлежит к числу самых острых достижений петербургской школы теории чисел да, пожалуй, и всей русской математики» [II, 140, с. 144].

5 мая 1880 г. Совет университета утвердил кандидата А. Маркова в степени магистра математики [II, 46, с. 46], и 3 октября ему был вручен соответствующий диплом [8].

Новое развитие и применение уже к анализу аппарат непрерывных дробей получил в докторской диссертации Маркова «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей», где доказаны и обобщены важные неравенства Чебышева в учении о предельных величинах интегралов. Этот труд открыл большую серию работ Маркова по теории моментов, ставшей важным средством исследования в теории вероятностей, по интерполированию и наилучшему приближению функций.

В степени доктора математики А. А. Марков был утвержден 28 января 1885 г. [II, 47, с. 9]. Оппонентами при защите докторской диссертации выступили профессора Сохоцкий и Поссе. Первый в своем отзыве отметил: «Работа эта заслуживает внимания и представляет для нас тем больший интерес, что мысли, послужившие для нее основанием, были впервые высказаны нашим математиком П. Л. Чебышевым; они давно обратили на себя внимание и дали повод к появлению нескольких замечательных статей в русских и иностранных журналах... В работе Маркова мы встречаемся с постановкой вопросов совершенно новою, с изысканиями вполне независимыми и, наконец, с весьма замечательными результатами. Весь этот труд, обнаруживающий в авторе даровитого и вполне зрелого математика, останется украшением русской математической литературы» [II, 29, с. 378].

В год защиты магистерской диссертации А. А. Марков начал преподавательскую деятельность в университете. 7 августа 1880 г. он подает прошение ректору об утверждении его в должности приват-доцента. 25 сентября 1880 г. А. А. Марков прочитал пробные лекции на заданные факультетом темы: «О стереографической проекции корня» и «О развертывающихся плоскостях» [9]. Вероятно, они прошли удачно. В протоколе

---

[8] ЛГИА, ф. 14, оп. 1, д. 8109, л. 3, 23, 24.
[9] Там же, л. 6.

А. А. Марков, 1886 г.

заседания Совета университета от 20 октября 1880 г. содержится представление физико-математического факультета о допущении магистра математики Андрея Маркова к чтению лекций [II, 48, с. 30, 35].

Через десять дней А. А. Марков получил письмо ректора А. Бекетова, сообщавшего о разрешении попечителя учебного округа допустить Андрея Андреевича к преподаванию в университете в качестве приват-доцента. В «донесении» декана говорится, что приват-доцент Марков будет читать студентам 2, 3 и 4-го курсов вариационное исчисление и «упражнять» студентов в дифференциальном и интегральном исчислении [10].

В 1880/81 учебном году А. А. Марков преподавал студентам 2-го курса дифференциальное исчисление и высшую алгебру, а третьекурсникам — интегральное исчисление [II, 46, с. 98]. Через год ему был передан курс введения в анализ, до того читавшийся Ю. В. Сохоцким и К. А. Поссе [II, 49, с. 84]. Ранее этот курс не был самостоятельным, а входил в дифференциальное исчисление [II, 29, с. 377]. А. А. Марковым рассматривались следующие основные вопросы: величины и числа, переменные величины и функции, геометрическая интерпретация функций и их классификация, учение о пределах, бесконечно малые и их свойства, раскрытие неопределенностей, непрерывность функций, краткое учение о комплексных числах. В качестве пособий А. А. Марков рекомендовал учебники О. Штольца, П. Таннери и Ж. Бертрана.

В 1881/82 учебном году А. А. Марков вел у первокурсников аналитическую геометрию, а у студентов 4-го курса — теорию чисел.

[10] Там же, л. 4, 15.

После того как в 1882 г. П. Л. Чебышев прекратил чтение лекций в университете, Андрей Андреевич впервые вел курс теории вероятностей [II, 49, с. 71; II, 50, с. 91]. 8 апреля 1886 г. А. А. Марков был утвержден экстраординарным профессором по кафедре чистой математики [II, 51, с. 91]. В тот период он читал курсы: введение в анализ — для вновь поступивших студентов, теорию конечных разностей — для студентов 3-го курса, теорию вероятностей — для студентов 4-го курса [II, 51, с. 91, 138—139]. Тем не менее в протоколе заседания Совета от 30 мая 1887 г. отмечается, что, по мнению министра народного просвещения, профессора Коркин, Сохоцкий и Марков посвящают преподаванию всего по 5 часов в неделю, что не совсем соответствует университетскому Уставу [II, 52, с. 135]. (Устав 1884 г. устанавливал для профессоров «норму» преподавания — шесть часов в неделю [II, 53, с. 16]).

О широте интересов Маркова-педагога свидетельствует хотя бы перечень читаемых им в университете курсов математических дисциплин.

Наименование курса	Годы, когда А. А. Марков читал курсы
Теория вероятностей	1882–1921 (кроме 1917/18 учебного года)
Теория чисел	1882, 1886, 1887
Аналитическая геометрия	1880, 1881, 1894
Высшая алгебра	1880, 1881
Сферическая тригонометрия	1891, 1893, 1894—1898
Введение в анализ	1881, 1882, 1886—1888, 1891, 1894, 1895, 1898
Дифференциальное и интегральное исчисление	1880, 1881, 1884—1886, 1895—1898, 1901, 1903, 1904
Теория конечных разностей	1884—1888
Непрерывные дроби	1906, 1918
О функциях, наименее уклоняющихся от нуля	1906

В ноябре 1893 г. А. А. Марков назначается ординарным профессором [II, 54, с. 13]. А спустя 10 лет, 1 ноября 1903 г., исполнилось 25 лет его службы в университете. По решению Совета А. А. Марков был оставлен в занимаемой должности еще 5 лет [II, 55, с. 92]. Через два года министерство утвердило А. А. Маркова в звании заслуженного профессора. Вскоре он по собственному желанию вышел в отставку [11].

В заявлении ректору от 23 сентября 1905 г. Андрей Андреевич ссылается на болезнь (катаральное воспаление верхних дыхательных путей). Это послужило лишь предлогом. Заслуженный профессор просто не желал занимать штатную должность, загораживая путь другим, более молодым людям [II, 56, с. 15]. Но и после выхода в отставку он сохранил связь с университетом и продолжал вести курсы по теории вероятностей и другим интересовавшим его специальным вопросам вплоть до тяжелого заболевания, обострившегося в 1921 г.

Маркова-педагога отличало умение излагать мысли с замечательной точностью и ясностью. Профессор физики Б. П. Вейнберг, вспоминая о студенческой поре, заметил: «Некоторые из нас увлекались способом изложения А. А. Маркова, каждым словом как бы заколачивавшего гвоздь за гвоздем по одной прямой линии, с которой он не давал сходить истине» [II, 57, с. 1].

Этими же качествами обладали и подготовленные им учебные пособия, из которых прежде всего необходимо упомянуть знаменитое «Исчисление вероятностей», выдержавшее несколько изданий [I, 65; I, 85; I, 98; I, 121]. Некоторые курсы лекций А. А. Маркова — введение в анализ, дифференциальное исчисление и др.— литографированы [I, 128]. Кроме чтения лекций, Андрей Андреевич постоянно принимал участие в магистерских экзаменах, просматривал диссертации, долгое время был одним из руководителей студенческого математического кружка.

Профессор Н. М. Гюнтер вспоминал о А. А. Маркове-педагоге: «Не все, приступившие к его лекциям осенью, могли дослушать их до весны и приступить к экзамену; далеко не все, приступившие к этому экзамену, проходили через него. Несмотря на это, особенных жалоб не было: экзамен, по существу, не был строг и, в большинстве случаев, делал при неудаче для молодого человека очевидным, что не на математическом факультете его место» [II, 58].

---

[11] ЦГИА, ф. 740, оп. 21, д. 622, л. 1,3, 7, 16.

По хранящимся в ЛГИА экзаменационным ведомостям можно в какой-то мере восстановить характер экзаменов, проводимых профессором А. А. Марковым. По теории вероятностей большинство экзаменующихся у Андрея Андреевича получали высший балл. Вот статистические данные по первым годам его преподавания этого курса. В 1882 г. пятерки получили 40% экзаменующихся [12], в 1885 г.— 55 [13], в 1887 [14] и 1888 г.— 60% [15]. При этом одна треть экзаменующихся получала четверки, тройки оказывались редкостью, а двойки и вовсе исключительным событием. Вместе с тем характерно, что экзамен у А. А. Маркова подчас продолжался по нескольку дней.

В воспоминаниях Н. М. Гюнтера находим впечатления о лекциях А. А. Маркова: «Лекции А. А. [Маркова] всегда имели деловой характер; никаких отступлений в сторону, не имеющих отношения к предмету, никаких вводных фраз, ничего показного; случалось, что лекция начиналась, если надо, ранее, чем А. А. доходил до доски. Но манера держать себя, обращаться к слушателям, определенность суждений, иногда углубление в развиваемую мысль до пренебрежения своею внешностью и порядком написанного на доске делали эти лекции совершенно непохожими на лекции других профессоров. Впоследствии, при более близком знакомстве, некоторые убеждались, что во время лекции А. А. был только самим собою и что многое из того, что отличало лекции А. А. как по содержанию, так и по внешности, от лекций других, совпадало с тем, что отличало и самого А. А. от его окружающих».

По словам Н. М. Гюнтера, А. А. Марков однажды дал такой ответ на вопрос о том, что такое математика: «Математика — это то, чем занимаются Гаусс, Чебышев, Ляпунов, Стеклов и я». «Он преподавал математику,— писал И. М. Гюнтер,— и этим его ответом обусловливается содержание его лекций; как полнота некоторых отделов и настойчивое возвращение при всяком удобном случае к некоторым определенным вопросам, так и отсутствие кое-чего, встречавшегося в других одноименных курсах... Мне известны случаи, когда студенты старших курсов возвращались в ау-

---

[12] ЛГИА, ф. 14, оп. 3, д. 14842, л. 59, 60.
[13] Там же, д. 14852, л. 170, 171.
[14] Там же, д. 14873, л. 56—59.
[15] Там же, д. 14883, л. 59—73.

дитории А. А. и слушали добровольно второй раз отделы курса, прослушанного и сданного у него же».

По воспоминаниям современников, ученики Андрея Андреевича, впоследствии отошедшие от математики, благодаря учителю сохранили математический склад ума и этим выделялись среди сослуживцев.

А. А. Марков был не только большим ученым, но и мужественным гражданином, решительно отстаивавшим свои убеждения. Это ярко проявилось и в его деятельности в Петербургском университете, где ему порой приходилось выступать против большинства коллег. Будучи еще молодым профессором, Андрей Андреевич вел себя независимо. Об этом рассказывает он в черновом наброске «Один эпизод из моей жизни»[16]. (Суть «эпизода» в том, что в 1884 г. А. А. Марков, в то время самый молодой в университете преподаватель математики, отказался войти, несмотря на оказываемое на него давление со стороны начальства, в экзаменационную комиссию, полагая, что организация последней противоречила университетскому уставу, согласно которому испытательные комиссии были отделены от университета.)

В апреле 1887 г. А. А. Марков принял на себя обязанности депутата при попечительском Совете [II, 52, с. 110]. Однако в 1896 г. он попросил уволить его с этой должности [II, 59, с. 28]. Отказался А. А. Марков быть депутатом при попечительском Совете в 1904 г. [II, 55, с. 72; II, 60, с. 73; II, 61, с. 6]. Мотивы отказа видны из письма А. А. Маркова А. М. Ляпунову от 5 октября 1900 г.: «У нас здесь стараются подавить последние остатки автономии в Университете, а реформу средней школы производят так, что ничего не изменяется. Попечитель называет себя в официальных бумагах Главным начальником университета и выражает желание вмешиваться даже в экзамены студентов. На незаконность последнего вмешательства, хотя оно вытекает из правил, изданных Министром, я обратил внимание факультета. Это дело пошло в Совет, а из Совета в другие факультеты. Главное внимание обращено на неудобства, сопряженные с вмешательством попечителя и с неподвижностью программ. Не знаю, к чему в конце концов мы придем, но весьма возможно,

---

[16] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 60, л. 4—7, документ без даты.

что придется оставить университет. Нельзя же подчиняться незаконным требованиям» [17].

На заседании Совета 3 сентября 1901 г. А. А. Марков выступил с особым мнением по ряду принципиальных вопросов [18]. В частности, он считал, что для избрания ректору необходимо получить не менее 2/3 всех голосов, а еще лучше — исполнение обязанностей ректора всеми профессорами по очереди. Далее Андрей Андреевич отметил, что нельзя ставить вознаграждение профессоров в зависимость от потраченного времени, которое не может служить мерилом полученных результатов.

«Живой и деятельный контроль факультетов над преподаванием отдельных преподавателей едва ли возможен и полезен,— подчеркивал А. А. Марков,— при надлежащем выборе преподавателей этот контроль излишен. Я считаю его даже вредным, как всякое напрасное стеснение, выражающее недоверие к преподавателям: доверие к ним необходимо. Я не отрицаю пользы составления учебных планов и программ, но не для контроля над отдельными преподавателями, а для установления надлежащей полноты и последовательности преподавания, причем программы могут быть только самого общего характера, не стесняющие свободы преподавания».

А. А. Марков указывал на важность для будущих математиков решения сложных задач. Борясь с посредственностью в преподавательской среде, он предлагал ограничить срок, на который избирались штатные доценты, 10 годами. Если в течение этого периода доцент не становился профессором и не подготовил серьезных научных трудов, то, по мнению А. А. Маркова, его не имело смысла оставлять при университете для дальнейшей преподавательской деятельности. А. А. Марков придерживался прогрессивных для своего времени взглядов. Он считал, что студенты сами должны формировать свои организации, которым следует предоставить право подавать петиции на имя не только ректора, но и министра. Будучи сторонником университетской автономии, профессор А. А. Марков выступил против вмешательства в дела университета попечителя учебного округа. Когда в 1901 г. комиссия при участии

---

[17] ЛО ААН, ф. 257, оп. 1, д. 20, л. 39, 39 об.
[18] ЛГИА, ф. 14, оп. 1, д. 9582, л. 86—89.

А. А. Маркова подготовила проект правил испытаний на ученые степени магистра и доктора, Андрей Андреевич высказал особое мнение, полагая, что необходима коренная перестройка всего действующего Устава 1884 г. [II, 63, с. 25, 30].

В сентябре 1902 г., согласно циркуляру министерства народного просвещения, состоялись выборы членов профессорского дисциплинарного суда. А. А. Марков выступил против создания такого органа правосудия, считая, что нежелательно возложение на профессора обязанностей, которые могут мешать исполнению его основных функций. Позднее А. А. Марков отказался участвовать в избрании кураторов и судей [II, 65, с. 74, 115]. Между тем в ноябре того же 1902 г. ректор предложил предоставить Комиссии кураторов широкие полномочия, в частности право выступать от имени Совета с представлениями и ходатайствами к высшему начальству [II, 65, с. 124]. Профессор А. А. Марков категорически возражал, но при голосовании оказался в одиночестве.

На заседании Совета 13 сентября 1905 г. было признано целесообразным организовать комиссию при ректоре для обсуждения и решения совместно с ним некоторых вопросов, находящихся в ведении Совета. Против создания комиссии голосовал один член Совета — снова Марков, считавший, что такая комиссия узурпирует власть и полномочия Совета. Тогда же были проведены выборы членов этой комиссии; в числе восьми избранных оказался и А. А. Марков. Однако при обсуждении следующего вопроса у него возникли новые разногласия с Советом, и Андрей Андреевич выбыл из числа членов комиссии.

Что же произошло?! Ректор сообщил членам Совета, что на некоторые заявления о зачислении в число студентов он ответил отказом. Основанием послужила пресловутая процентная норма, ограничивавшая прием в «императорские» университеты по национальному признаку. Тогда-то профессор А. А. Марков предложил, чтобы Совет немедленно принял решение о приеме в число студентов всех несправедливо отвергнутых людей. А. А. Маркова поддержал профессор В. М. Шимкевич. Однако при голосовании их предложение не получило одобрения большинства присутствовавших на заседании членов Совета. После этого Андрей Андреевич, находя, что его взгляды как по этому вопросу, так и по другим коренным образом расходятся с мнением и взглядами Совета, заявил о выходе из только что организованной комиссии [II, 64, с. 86, 87].

Для А. А. Маркова характерно и выступление на Совете в декабре 1905 г. при обсуждении вопроса о преподавании закона божьего в университете. Вместе с профессором А. И. Введенским он высказал мнение, что кафедра богословия должна быть отделена от всех факультетов, преподавание богословия не должно быть обязательным, а профессура закона божьего если и будет допущена на заседания Совета, то без права решающего голоса [II, 64, с. 217].

19 декабря 1905 г. Совет приступил к обсуждению проекта главных положений Устава университетов. А. А. Марков и на сей раз высказал особое мнение по ряду принципиальных вопросов. Он заметил, что прием в число студентов «не должен зависеть от усмотрения тех или иных лиц: все желающие поступить в университет и имеющие на это право должны быть приняты. Право быть студентом должно быть обусловлено серьезными требованиями. Дипломам средних учебных заведений нельзя придавать большого значения. Относительно классических гимназий несомненно, что дипломы не служат достойным доказательством надлежащего знания... Поэтому независимо от типа школы следует обусловить прием в число студентов университета испытанием, различным для разных факультетов. Указание на обязательность знания латинского языка весьма вредно, т. к. оно закрепляет несправедливую привилегию некоторых учебных заведений и заслоняет излишним необходимое, как, например, обязательность знания арифметики и начал алгебры и геометрии по крайней мере для всех студентов, желающих заниматься математикой» [II, 64, с. 308—309].

А. А. Марков имел в виду один из параграфов тогдашнего университетского Устава, гласивший: «Студентами в Университеты принимаются лица обоего пола, окончившие средние учебные заведения. Знание латинского языка признается обязательным для поступления на все факультеты».

На рубеже XIX и XX вв. российские университеты были центрами общественно-политической жизни. Не раз вспыхивали беспорядки и в столичном университете. В день университетского Акта 8 февраля 1899 г. полиция спровоцировала столкновения со студентами.

В результате власти обрушили жестокие репрессии на молодежь: многие студенты были исключены из высших учебных заведений, а некоторые сосланы [19]. Группа профессоров, пытаясь смягчить положение, выпустила специальный плакат, призывающий студентов вернуться к занятиям. Однако страсти продолжали накаляться.

Объективность требует сказать, что студенчество не было однородным по своим политическим взглядам. Среди учащихся попадались и террористы, а также немало было таких, кто, прикрываясь «убеждениями», использовал всякий раз острую ситуацию, чтобы отдохнуть от занятий. Примером может служить следующий факт.

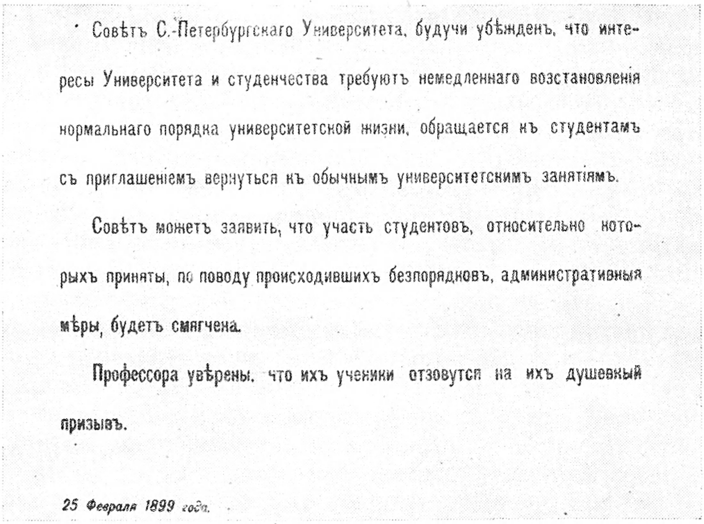
В конце марта того же 1899 г. некоторые профессора, в том числе А. А. Марков, получили анонимные рукописные записки с требованием отказаться от проведения экзаменов и угрозами в противном случае «столкновений профессоров со студентами во время экзаменов» [20].

В подобной ситуации не всегда и не всем удается отличать проявления искренней борьбы за попранную свободу и справедливость от требований террористов.

18 сентября 1908 г. на первой странице газеты «Санкт-Петербургские ведомости» была обнародована статья академика А. И. Соболевского «О наших университетских делах» [II, 66]. Маститый ученый не только поддержал реакционные мероприятия тогдашнего министра народного просвещения А. Н. Шварца — фактическую отмену университетской автономии, запрещение допуска в университет женщин-вольнослушательниц, но и пошел дальше, выступив против института студенческих старост. Наиболее показательны заключительные строки статьи А. И. Соболевского: «Мы можем только приветствовать труды А. Н. Шварца на пользу русских университетов. Пора вырвать их из рук тех бессовестных людей, которые, прикрываясь какими-то принципами, стараются превратить наши храмы науки в вертепы разбойничьи! Пора покончить с тою «свободою», при которой университеты сделались ареной дневных грабежей и местом пребывания разбойничьих шаек!»

---

19 ЛО ААН, ф. 6, оп. 1, д. 14, л. 24—28.
20 Там же, ф. 173, оп. 1, д. 63, л. 8, 9, 9 об., 11.



Совѣтъ С.-Петербургскаго Университета, будучи убѣжденъ, что интересы Университета и студенчества требуютъ немедленнаго возстановленія нормальнаго порядка университетской жизни, обращается къ студентамъ съ приглашеніемъ вернуться къ обычнымъ университетскимъ занятіямъ.

Совѣтъ можетъ заявить, что участь студентовъ, относительно которыхъ приняты, по поводу происходившихъ безпорядковъ, административныя мѣры, будетъ смягчена.

Профессора увѣрены, что ихъ ученики отзовутся на ихъ душевный призывъ.

25 Февраля 1899 года.

Плакат, выпущенный в Петербургском университете, 1899 г.

Можно себе представить, насколько возмущен был А. А. Марков, увидев сей опус своего собрата по Академии наук. Несколько месяцев спустя, 12 апреля 1909 г., он дал оценку выступлению А. И.Соболевского в письме академику А. А. Шахматову[21]. «Одно постановление вчерашнего Общего собрания, сделанное по Вашему предложению, меня крайне поразило,— писал А. А. Марков.— Я говорю о поручении А. И. Собол[евскому] быть представителем Академии наук на чествовании памяти Гоголя. Неужели Вы забыли, что на нем тяготеет не безосновательное обвинение в клевете. Или, быть может, Вы считаете, что А. И. С[оболевский] написал правду о С.-Петербургском Унив[ерситете]. Хотя я давно решил не участвовать в делах Общего Собр[ания], но последнее постановление меня так поражает, что я не могу оставить его без возражения».

Проясним суть дела. В начале 1909 г. Общество любителей российской словесности при Московском университете предложило Академии наук принять участие в торжественном открытии памятника Н. В. Го-

---

[21] ЛО ААН, ф. 134, оп. 3, д. 919, л. 5, 6.

голю [22], сооруженного в Москве на средства, собранные всенародной подпиской. Академия назвала своими представителями на этом торжестве проживавших в Москве академиков Ф. Е. Корша и В. О. Ключевского. Последний вскоре сообщил, что не может по состоянию здоровья участвовать в этом мероприятии; тогда-то по предложению А. А. Шахматова он был заменен А. И. Соболевским. Возражение Андрея Андреевича, видимо, не встретило сочувствия со стороны коллег, а его протест был приложен к протокольным бумагам[23].

Нужно заметить, что А. А. Марков в самой накаленной обстановке оставался на стороне передового студенчества. В сентябре 1908 г. министерство издало в связи со студенческими волнениями циркуляр, в котором предлагалось профессорам вести наблюдение за политическими настроениями студенчества и таким образом исполнять полицейские функции.

Первой реакцией Андрея Андреевича, как это следует из его заявления на имя ректора университета В. М. Шимкевича, было намерение немедленно отказаться от дальнейшего чтения лекций в университете: «Покорнейше прошу Вас принять посылаемое мною заявление и сделать надлежащее распоряжение, не вступая со мной ни в какие переговоры ни лично, ни через посредство Ивана Львовича [Пташицкого]. Прежде чем отказываться от чтения лекций, я искал все средства избавиться иначе от предъявленных мне требований... Еще раз покорнейше прошу Вас не обращаться к содействию Ивана Львовича или других лиц (я говорю, конечно, о членах факультета)».

Когда 25 сентября Маркову в канцелярии университета пытались вручить упомянутый циркуляр, он отказался его принять, написав на документе: «От получения циркуляра, как нетактичного, отказываюсь. Академик А. Марков» [24].

27 сентября А. А. Марков обратился с письмом в газету «Речь»: «Только 25-го сентября,— писал ученый,— мне пришлось лично убедиться, что известный

---

[22] Речь идет о памятнике Н. В. Гоголю работы Н. А. Андреева, расположенном во дворе дома № 7 на Суворовском бульваре в Москве, в 1909—1951 гг. памятник находился на Пречистенском (ныне Гоголевском) бульваре.

[23] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1909, д. 156, л. 30 об., 31, 36 об., 43, 43 об.

[24] ЛГИА, ф. 14, оп. 1, д. 8109, л. 175, 176, 177.

циркуляр Министерства народного просвещения, основанный на разъяснении Сената, рассылается всем преподавателям университета, как состоящим, так и не состоящим там на действительной службе. Все эти лица в циркуляре рассматриваются как агенты правительства. Циркуляр, как известно, получил широкую гласность. Это обстоятельство заставляет меня также публично заявить, что и во время моей службы в университете я всегда считал себя только профессором; в настоящее же время, хотя и сохранил за собой право читать лекции в университете как академик, но ни в коем случае не могу взять на себя крайне тяжелой и совершенно неподходящей роли быть в Университете агентом правительства» [25].

На следующий день он пишет ректору: «Ввиду того, что Министр народного просвещения, основываясь на разъяснении Сената, требует, чтобы все преподаватели университета, даже не находящиеся там на службе, были вместе с тем агентами правительства, честь имею заявить Вашему Превосходительству, что подобное требование со всеми вытекающими из него последствиями я считаю неправильным. Пока это требование не будет взято обратно теми лицами, от которых оно исходит, я не могу приступить к чтению лекций» [26].

Категорически, открыто звучал протест А. А. Маркова, заявленный в период столыпинского лихолетья царскому министру народного просвещения А. Н. Шварцу:

«Его превосходительству господину министру
народного просвещения

Заявление Андрея Маркова

Ввиду известного циркуляра, который основан на разъяснении Сената и был мне предъявлен в канцелярии С.-Петербургского университета 25 сентября, считаю своим долгом сообщить Вашему превосходительству, что я решительно отказываюсь быть в Университете агентом правительства, хотя согласно желанию физико-математического факультета сохраняю за собой чтение лекций по теории вероятностей.

2 октября 1908 г. Академик А. Марков».

---

[25] ЦГАЛИ, ф. 1666, оп. 1, д. 1822, л. 1—3.
[26] ЛГИА, ф. 14, оп. 1, д. 8109, 178—182.

На этом документе имеется резолюция министерства: «Возвратить академику Маркову как неподлежаще поданное» [I, 128, с. 608].

10 декабря 1910 г. в «Правительственном вестнике» было опубликовано решение Совета Министров, в котором предписывалось безотлагательно исключать из учебных заведений всех, кто принимал хоть какое-то участие в студенческих волнениях [II, 67]. И на сей раз А. А. Марков решительно вступается за студентов и в качестве протеста немедленно подает факультету следующее заявление:

«В физико-математический факультет
С.-Петербургского университета

Заявление академика А. А. Маркова

Глубоко возмущенный опубликованным сегодня распоряжением Совета Министров об исключении студентов за сходки, вызванные действиями агентов правительства, вне университета находящихся, считаю своим долгом немедленно заявить факультету, что при таких условиях я никаких лекций в университете не могу читать. Пусть факультет позаботится о приискании другого лица для чтения лекций по исчислению вероятностей.

10-го декабря 1910 года. А. Марков» [27]

В тот же день он писал своему другу академику В. А. Стеклову: «Спешу сообщить Вам, что я решил окончательно прекратить чтение лекций в университете, так как не нашел другого способа выразить сочувствие студентам или, вернее сказать, возмущение последними распоряжениями министра. Заявление мое послано декану и министру (копия). Ваш А. Марков» [28].

Заявление ученого об отставке не было принято, а реакционеры сделали все возможное, чтобы протест Маркова не стал известен студенчеству и прогрессивной профессуре.

Если отношение власть имущих к А. А. Маркову было, прямо скажем, неважным, то он пользовался неизменной симпатией в студенческой среде. Несколько поколений студентов-математиков столичного университета на всю жизнь сохранили память о профес-

---

[27] ЦГИА, ф. 733, оп. 155, д. 763, л. 47.
[28] ЛО ААН, ф. 162, оп. 2, д. 264, л. 15.

соре А. А. Маркове. В архиве АН СССР имеется письмо [29] к А. А. Маркову от И. И. Иванова [30], датированное 31 мая 1916 г. От имени выпускников университета 1886 г. он приглашал Андрея Андреевича быть почетным гостем на вечере встречи по случаю 30-летия окончания университета.

Власти же были недовольны строптивым профессором. Они дали ясно это понять в 1913 г., когда не утвердили его в звании почетного члена С.-Петербургского университета.

Произошло следующее. 2 декабря 1913 г. на заседании Совета почетными членами университета были избраны А. М. Ляпунов, И. П. Павлов, И. П. Бородин, А. А. Марков, К. А. Тимирязев, И. И. Мечников, Д. Н. Анучин и Дж. Дж. Томсон [II, 68, с. 167—168]. Отзыв о научной и педагогической деятельности А. А. Маркова зачитал В. А. Стеклов [II, 68, с. 193—196]. В отзыве говорилось:

«Академик А. А. Марков, воспитанник нашего университета и затем последовательно приват-доцент и профессор, в течение 25 лет работал на пользу науки и нашего университета, выйдя из состава профессоров лишь по получении звания заслуженного профессора. В качестве академика А. А. Марков до сих пор оказывает факультету важную услугу, продолжая чтение курса теории вероятностей и некоторых других.

Вся профессорская и чисто ученая деятельность Маркова, ученика и последователя нашего знаменитого Чебышева, протекает на глазах нашего университета, и высокий научный авторитет акад. Маркова известен не только всей образованной России, но и за границей.

Входить в подробную характеристику научных заслуг акад. А. А. Маркова поэтому излишне, достаточно ограничиться самыми существенными. Исследования А. А. Маркова по теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, творцом которой был П. Л. Чебышев, о применении к различным вопросам анализа теории непрерывных дробей всем известны и доставили ему быструю известность во всем ученом мире. Особого внимания заслуживают его многочисленные и оригинальные изыскания о предельных величинах опреде-

---

[29] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 7.

[30] И. И. Иванов (1862—1939) — математик, член-корреспондент АН СССР, в то время профессор Петербургского политехнического института.

ленных интегралов, находящиеся в связи с только что упомянутыми работами по теории непрерывных дробей.

...Укажу также на простые и оригинальные методы, развитые А. А. Марковым при решении некоторых особого рода вопросов о наибольших и наименьших величинах, выходящих из ограниченного круга задач вариационного исчисления.

В последнее время появился ряд замечательных изысканий по исчислению вероятностей, которым давно уже занимается академик Марков, лучший специалист в этой области среди математиков. Исследования А. А. в этой области представляют выдающийся интерес не только для математиков, но и для всех ученых, занимающихся статистическими или экономическими вопросами. Отмечу здесь его исследование о способе наименьших квадратов, о законе больших чисел, двухсотлетний юбилей которого будет праздноваться 1-го декабря настоящего года Академией наук, и, наконец, развитую им в последнее время теорию вероятностей событий, связанных в цепь, что составляет наиболее ценный результат из всего, что сделано с тех пор после Чебышева в вопросах, касающихся знаменитого закона больших чисел.

Кроме упомянутых в общих чертах исследований выдающегося достоинства и по методам, и по результатам, и по строгости анализа, акад. А. А. Марковым составлены курсы: «Исчисление конечных разностей» и «Исчисление вероятностей», из которых первый вышел вторым, а второй третьим изданием. Оба эти сочинения переведены на немецкий язык и представляют собою выдающееся явление нашей ученой литературы, их даже неудобно называть «курсами», так как они представляют собою оригинальные трактаты, содержащие в большинстве случаев самостоятельные изыскания автора. Эти книги являются в настоящее время настольными для каждого математика, а также для лиц, работающих в смежных областях (статистика и т. д.)». Отзыв подписали В. Стеклов, Ю. Сохоцкий, Д. Селиванов, И. Иванов, Д. Бобылев, А. Иванов.

19 мая 1914 г. ректор объявил, что министр народного просвещения Л. Кассо утвердил в звании почетных членов университета всех избранных, кроме А. А. Маркова (!) [II, 69, с. 49—50]. Вскоре последовало уведомление министра о неутверждении А. А. Маркова ввиду его заявлений от 10 декабря

1910 г. с протестом против действий правительства [II, 69, с. 64—65].

В «Деле департамента народного просвещения» находим рукописную записку: «22-го января с. г. Министр приказал сообщить теперь же Попечителю С.-Петербургского учебного округа об утверждении (кроме А. А. Маркова) девяти лиц, избранных почетными членами С.-Петербургского университета. Относительно же Маркова, о котором г. Министр предполагает решить вопрос об утверждении на ближайшем докладе, сообщить дополнительно». Другая записка делопроизводителя министерства проливает свет на существо дела: «При докладе 29 января 1914 г. секретной переписки, относящейся к действиям академика Маркова в 1908 — 1910 гг., г. Министр *ввиду официального заявления академика Маркова в 1910 г. после опубликования постановления Совета Министров* (10 декабря 1910 г. Правит. вестник № 219) *с отказом читать лекции не признал возможным* утвердить Маркова почетным членом С.-Петербургского университета» [31].

Сообщение министра об утверждении в звании почетных членов университета заканчивалось словами: «Что же касается действительного члена Императорской Академии наук доктора чистой математики Андрея Андреевича Маркова, то о нем последует особое извещение» [32]. В фонде Маркова (ЛО ААН) имеется копия письма министра с мотивировкой его решения о неутверждении А. А. Маркова в звании почетного члена университета [33].

В связи с этим решением министра А. А. Марков опубликовал в одной из петербургских газет 28 февраля 1914 г. следующую заметку:

«Позвольте через посредство вашей уважаемой газеты выразить мою глубочайшую благодарность Совету С.-Петербургского университета за избрание меня в почетные члены дорогого мне университета, а г. Л. А. Кассо за то, что он не нашел для себя возможным утвердить это избрание. Хотя факт моего избрания, давно сообщенный марьяжной [34] газетой, до

---

[31] ЦГИА, ф. 733, оп. 155, д. 763, л. 44, 45.
[32] ЦГИА, ф. 733, оп. 155, д. 763, л. 51, 51 об.
[33] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 63, л. 14.
[34] От фр. mariage — брак, женитьба, замужество. Вероятно, А. А. Марков имел в виду одну из газет, помещавшую брачные объявления.

сих пор официально не вполне установлен, но ждать полного официального его подтверждения, как видно, пришлось бы очень долго, а несомненная близость упомянутой газеты к источнику и пропуск моего имени в сообщенном университету списке утвержденных почетных членов служит достаточным доказательством. Поэтому я считаю вполне своевременным высказать благодарность... Sapienti sat [35].

Заслуженный профессор и неутвержденный почетный член С.-Петербургского университета, академик А. Марков» [36].

Справедливость была восстановлена лишь после февральской революции. 20 марта 1917 г. Совет единогласно присоединился к предложению профессора В. А. Стеклова и постановил ходатайствовать об утверждении А. А. Маркова почетным членом Петроградского университета, «согласно избранию его Советом Университета в декабре 1913 г., каковое избрание не было утверждено бывшим в то время Министром Народного Просвещения тайным советником Кассо» [37].

27 апреля 1917 г. А. А. Марков был утвержден в звании почетного члена университета [38].

Время с октября 1917 по октябрь 1918 г. А. А. Марков с семьей провел у своих родственников в Зарайске (тогда Рязан. губ.). Об этом периоде его жизни рассказывается в главе 5.

Возвратившись в октябре 1918 г. в Петроград, Андрей Андреевич с разрешения Академии наук возобновил чтение лекций в университете [39]. 18 ноября 1918 г. Совет Первого Петроградского университета (так он тогда именовался) утвердил А. А. Маркова профессором по кафедре чистой математики [40]. Отзыв о научной и педагогической деятельности Андрея Андреевича дал В. А. Стеклов.

16 декабря 1918 г. члены Совета аплодисментами встретили появление академика А. А. Маркова, впервые после революции участвовавшего в заседании [41].

А. А. Марков продолжал вести преподавание в уни-

---

[35] — Мудрому достаточно (*лат*).
[36] ЛО ААН, разр. V, оп. 1-М, д. 6, л. 23.
[37] ЦГАОР, ф. 7240, оп. 14, д. 1, л. 38, 38 об.
[38] ЛГИА, ф. 14, оп. 1, д. 8109, л. 189, 189 об., 195.
[39] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1918, д. 165, с. 210.
[40] ЛГИА, ф. 14, оп. 1, д. 8109, л. 213.
[41] ЦГАОР, ф. 7240, оп. 14, д. 16, л. 65, 65 об., 84, 84 об.

верситете, даже будучи тяжело больным. По воспоминаниям А. А. Маркова-сына, в 1920/21 учебном году ему порой приходилось вести отца на занятия под руку. Это были лекции по теории вероятностей, соответствовавшие курсу, изложенному в его книге. И читались они безукоризненно, несмотря на то что сам лектор с трудом держался на ногах.

В этот же период Андрей Андреевич интенсивно работал над четвертым (вышедшим посмертно) изданием своей книги «Исчисление вероятностей». Он не собирался бросать любимое дело, несмотря на одолевавший его тяжкий недуг. На заседании Совета физико-математического факультета, состоявшемся 12 июня 1922 г., буквально за считанные дни до кончины А. А. Маркова было оглашено его заявление по поводу расписания лекций и практических занятий на осенний семестр 1922 г.[42] Увы, преподавательская деятельность профессора А. А. Маркова завершилась. Очередное заседание факультетского Совета открылось сообщением председателя о смерти академика А. А. Маркова. Присутствующие почтили память покойного вставанием [43].

Глава 3

В Академии наук

13 декабря 1886 г. по представлению академиков В. Я. Буняковского, П. Л. Чебышева и В. Г. Имшенецкого 30-летний профессор А. А. Марков 22 голосами против 4 был избран адъюнктом Петербургской Академии наук [II, 52, с. 99]. 18 апреля следующего года он впервые присутствовал на Общем собрании Академии [1].

В ноябре 1889 г. в связи со смертью В. Я. Буняковского открылась вакансия ординарного академика по чистой математике. Для обсуждения вопроса о ее замещении была организована комиссия в составе академиков П. Л. Чебышева, В. Г. Имшенецкого и адъюнкта А. А. Маркова [2]. Комиссия предложила оста-

[42] ЦГАОР, ф. 7240, оп. 14, д. 144, л. 22.
[43] Там же, л. 27 об.
[1] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1887, д. 135, л. 28.
[2] Там же, оп. 1а — 1889, д. 187, л. 174.

А. А. Марков, 90-е годы XIX в.

вить вопрос о замещении вакансии ординарного академика по математике открытым. «Принимая во внимание, что избранный три года тому назад (1886 г., дек.) адъюнктом по математике экстраординарный профессор С.-Петербургского университета Андрей Андреевич Марков своими научными трудами и участием в занятиях Академии вполне оправдал возлагавшиеся на него ожидания при его избрании, двое из нижеподписавшихся членов комиссии (П. Л. Чебышев, В. Г. Имшенецкий.— *С. Г.*) считают справедливым предложить г. адъюнкта А. А. Маркова к повышению в экстраординарные академики» [3].

Так, в январе 1890 г. А. А. Марков становится экстраординарным академиком [II, 70, с. 188].

Шесть лет спустя на Физико-математическом отделении Академии наук была подготовлена «Записка об ученых заслугах экстраординарного академика А. А. Маркова»: «По Уставу Академии полагается два ординарных академика по чистой математике; между тем со дня смерти В. Я. Буняковского это положение не осуществлялось. Поэтому... мы имеем честь предложить предоставить звание ординарного академика

[3] Там же, оп. 1а — 1890, д. 137, л. 46, 46 об.

по чистой математике экстраординарному академику Андрею Андреевичу Маркову... Ученик покойного П. Л. Чебышева А. А. Марков глубоко вник в дух методов нашего великого геометра, и в известной, очень важной, области вопросов он является достойным преемником своего незабвенного учителя и бесспорно наиболее компетентным ученым в целой Европе: мы говорим о приложениях алгебраических и непрерывных дробей. На одно из этих приложений обратил внимание П. Л. Чебышев в 1874 г. в короткой заметке, излагавшей только результаты, относившиеся к частному случаю и содержащие одну ошибку, которая, может быть, была простою опискою. Десять лет формулы П. Л. Чебышева оставались без доказательства. Но в 1887 г. А. А. Марков в своей замечательной докторской диссертации опубликовал свой вполне оригинальный метод вывода подобных формул и развил общие формулы, которые в следующем году были опубликованы также П. Л. Чебышевым, хотя и в ином виде. Так как при самом тщательном разборе оставшихся после П. Л. Чебышева черновых бумаг не удалось найти ни малейших обрывков, относящихся к этим формулам, то по всей справедливости следует приписать честь постановки вопроса П. Л. Чебышеву, а честь решения его всецело А. А. Маркову. В этом же труде А. А. Марков впервые дал выражение остаточного члена формулы Гаусса для приближенного вычисления определенных интегралов, чем без успеха занимались как сам Гаусс, так и многие другие ученые.

Оригинальность мыслей и законченность результатов, замечаемые в упомянутом труде А. А. Маркова, в более или менее сильной степени проявляются и в последующих его трудах, которые доставили ему почетную известность в ученом мире. Мы считаем поэтому возведение А. А. Маркова в звание ординарного академика должною наградою усердной научной деятельности нашего даровитого сочлена. Ординарные академики: Н. Сонин, О. Баклунд, Ф. Бредихин» [4].

2 марта 1896 г. Общее собрание Академии наук 21 голосами против 7 избрало А. А. Маркова ординарным академиком [5]. Пройдя за десять лет все ступени академической лестницы, А. А. Марков к сорока годам до-

---

[4] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1896, д. 143, л. 27.
[5] Там же, л. 30.

стигает высшего ученого звания. Признанием научных заслуг Андрея Андреевича явилось также избрание его членом-корреспондентом Харьковского математического общества (4 марта 1888 г.), членом Московского математического общества (18 февраля 1892 г.) [6] и действительным членом Физико-математического общества при Казанском университете (1898 г.). Письмом от 15 сентября 1902 г. шведский математик Г. Миттаг-Леффлер поздравил А. А. Маркова с избранием почетным доктором математики Абельского университета [7].

Об авторитете А. А. Маркова говорит и факт его сотрудничества в журнале «Acta mathematica», в котором публиковались оригинальные работы лишь наиболее видных математиков разных стран. В первых десяти томах (1882—1887) были помещены статьи только четырех русских ученых: Чебышева, Сонина, Ковалевской и Маркова [II, 71, с. 122].

Свидетельства активной научной деятельности А. А. Маркова находим в «Записках императорской Академии наук». Так, в отчете за 1887 г. сообщается о работе, которую предпринял адъюнкт А. А. Марков,— составление таблицы значений интеграла $\int\limits_x^\infty e^{-t^2}dt$, отличающейся от ранее известной таблицы большей точностью и меньшим шагом по x [II, 72, с. 10—11, 83—84].

Вычисления А. А. Маркова были основаны на следующей приближенной формуле [8]:

$$\int\limits_{a-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} e^{-t^2}\,dt = he^{-a^2+\frac{h}{6}\left(a^2-\frac{1}{2}\right)},$$

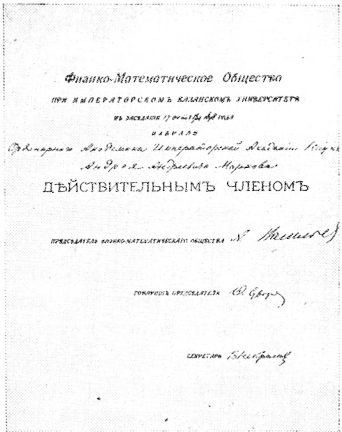
погрешность которой при $h = 0{,}001$ для всех значений a не превосходит 10^{-16}. Эта трудоемкая работа, начатая Андреем Андреевичем в 1885 г., была завершена и представлена физико-математическому отделению Академии наук в январе 1888 г. [I, 21; II, 73, с. 74].

Круг научных интересов А. А. Маркова был весьма широк. Его наиболее значительные работы относятся к «чистой» математике: теории чисел, анализу, в частности применению непрерывных дробей, теории вероят-

[6] Там же, ф. 173, оп. 1, д. 63, л. 3, 4.
[7] Там же, д. 41, л. 1.
[8] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1887, д. 135, л. 179 об., 180, 180 об.

ностей.[8] Их обзор дан во второй части книги. Здесь мы остановимся на деятельности ученого, которая в первую очередь говорит о широте и разнообразии его интересов.

А. А. Марков принимал участие в работе комиссии, образованной при Академии наук, по вопросу о реформе календаря в России [9]. 27 октября 1905 г. комиссия приняла принципиальное решение о желательности для России перехода от юлианского календаря к григорианскому [10] (от старого стиля к новому). В ходе обсуждения, когда разбирались недостатки существующих календарей, А. А. Марков поставил вопрос: «Нельзя ли так видоизменить наш календарь, улучшив его, чтобы к такому измененному впоследствии присоединились другие страны? »[11]


Физико-Математическое Общество
при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ
избрало
ДѢЙСТВИТЕЛЬНЫМЪ ЧЛЕНОМЪ
Предсѣдатель Физико-Математическаго Общества
Товарищъ Предсѣдателя
Секретарь

Диплом об избрании А. А. Маркова действительным членом Физико-математического общества при Казанском университете

Авторитетная комиссия рекомендовала ввести в России григорианский календарь, однако осуществить переход на новый стиль удалось лишь после Великой Октябрьской социалистической революции. В дореволюционной России введению нового стиля всячески противились деятели церкви. Создавались различные комиссии и подкомиссии, а дело не продвигалось.

В феврале 1905 г. А. А. Марков на Общем собрании Академии наук предложил распустить эту комиссию как бесплодную или заслушать ее отчет [12]. 13 января 1907 г. ученый довел до сведения Общего собрания, что «он окончательно отказывается числиться членом комиссии по реформе календаря, так как не может играть

---

[9] Там же, оп. 1а — 1899, д. 146, л. 87, 87 об.; оп. 1а — 1905, д. 152, л. 114 об.
[10] Там же, ф. 706, оп. 2, д. 12, л. 1, 48, 49.
[11] Там же, л. 55.
[12] Там же, ф. 1, оп. 1а — 1909, д. 156, л. 20 об.

роль ширм, хотя бы и по Высочайшему повелению»[13].

Выйдя из этой комиссии, А. А. Марков продолжал отстаивать необходимость введения григорианского календаря. Он писал академику О. А. Баклунду 22 января 1911 г.: «Позвольте спросить Вас, что Вы думаете о тезисах подкомиссии по введению в России нового стиля, которые напечатаны на стр. 224 «Отчета о деятельности Академии наук»? Вот некоторые из них, на которые я специально обращаю внимание:

2) Принятие Россией григорианского календаря, по мнению подкомиссии, невозможно.

3) Подкомиссия признает желательным, чтобы был выработан новый календарь...

По моему мнению, первый из этих тезисов уже уничтожает всю комиссию. Сколько помнится, вопрос о новом календаре уже достаточно обсуждался, и Ф. А. Бредихин и Вы выяснили, что астрономические данные не дают пока основания к изменению григорианского календаря.

Остаетесь ли Вы при прежнем мнении или признаете теперь нужным изменить и григорианский календарь в угоду русскому духовенству?»[14]

В январе 1912 г. А. А. Марков вновь предлагает закрыть комиссию по введению в России нового стиля ввиду ее бесплодности[15]. На этот раз А. А. Маркова поддержал В. А. Стеклов. Необходимо отметить, что последний всегда подчеркивал высокую научную компетенцию А. А. Маркова. «Существует мнение,— писал В. А. Стеклов,— что А. А. Марков принадлежал к числу отвлеченных теоретиков, нисколько не интересующихся применением теории к практике. Порождено это тем, что Андрей Андреевич часто возражал против неправильного применения математики к практическим вопросам, но, по обычаю, делал эти возражения в таких формах, которые вводили неспециалистов в заблуждение. В действительности он восставал только против попыток использовать математику единственно для придания ученой солидности мало основательным измышлениям, воспользоваться ею как средством ввести в обман мало сведущих лиц, против ее явно не-

---

[13] Там же, оп. 1а — 1907, д. 154, л. 11.
[14] Там же, ф. 707, оп. 3, д. 231, л. 1, 2.
[15] Там же, ф. 1, оп. 1а — 1912, д. 159, л. 11, 15 об.

умелого применения, а отнюдь не против существа дела» [II, 74, с. 174].

Стремясь найти полезное практическое применение для своей основной научной специальности, А. А. Марков принял участие в расчетах вероятных оборотов эмеритальной кассы [16] Министерства юстиции [I, 8, I, 59]. В семейном архиве А. А. Маркова долгое время хранились письма директора департамента Министерства юстиции от 20 октября 1893 г. и послания министра юстиции Н. Муравьева от 5 марта 1894 г. и 4 сентября 1902 г., в которых выражалась благодарность ученому за проделанную работу (переданы в Архив АН СССР). В фонде А. А. Маркова в ЛО ААН имеется его записка, содержащая много полезных советов, как правильно вести дела эмеритальной кассы [17].

В 1900 г. А. А. Марков вошел в комиссию, обсуждавшую вопрос об увеличении кредита на обработку и издание метеорологических наблюдений [18]. В этом вопросе он оказывал поддержку выдающемуся отечественному метеорологу академику М. А. Рыкачеву. Так 25 января 1904 г. Марков писал ему: «В ответ на Ваше письмо от 20-го января я должен заметить, что немедленное удовлетворение ходатайства об усилении средств Обсерватории [19] встретило возражения в прошлом заседании со стороны многих академиков ввиду различных других потребностей Академии. Поэтому я полагаю, что в интересах Обсерватории следовало бы поставить ее по отношению к Академии в такое же положение, в каком находится Пулковская Обсерватория. Ввиду значения Обсерватории для государственного хозяйства ее требования всегда будут уважены правительством» [20].

В связи с требованием М. А. Рыкачева значительно увеличить штаты и средства обсерватории академик

---

[16] Эмеритальные кассы (от лат. emeritus — заслуженный, отслуживший свое время) — специальные страховые кассы, учреждаемые в дореволюционной России и ныне в некоторых капиталистических странах с целью обеспечения участников и их семей пенсиями и пособиями (эмеритурой).

[17] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 73, л. 1—4.

[18] Там же, ф. 1. оп. 1а — 1900, д. 147, л. 144 об., 145.

[19] Имеется в виду Главная физическая обсерватория (ныне Главная геофизическая обсерватория им. А. И. Воейкова) — центральное метеорологическое учреждение России. Основанная в 1849 г., она с 1886 по 1924 г. входила в состав Академии наук.

[20] ЛО ААН, ф. 38, оп. 2, д. 353, л. 1, 2.

А. А. Марков внес предложение об отделении Главной физической обсерватории от Академии наук в хозяйственном отношении, которое было одобрено физико-математическим отделением 11 января 1906 г.[21] Академия наук поручила М. А. Рыкачеву выработать новый устав и штаты, учтя в них все неотложные нужды [II, 75, с. 222—223].

А. А. Маркову были не чужды и проблемы преподавания гуманитарных наук. В письмах академику филологу В. К. Ернштедту (от 20 апреля 1894 г.[22] и от 8 сентября 1899 г.[23]) он обсуждал вопросы преподавания в университете истории, высказав при этом глубокое понимание существа данного предмета.

О широте интересов математика А. А. Маркова говорит и его переписка с филологом-иранистом академиком К. Г. Залеманом. Так, 15 января 1894 г. он писал ему: «Drouin прислал мне несколько экземпляров своей брошюры о монете Кавада I [24], из которых один посылаю Вам. Вы без труда убедитесь, насколько натянуты объяснения этой монеты Друэном и приурочивание ее выпуска к объявлению наследником престола Хосрова I [25]. Я уже нашел в истории сасанидов Раулинсона собственное имя полководца Йездегерда IV Джабан [26]. Хотя это разумеется не может быть одно лицо с носящим это имя на динаре Кавада воином, тем не менее уже самый факт существования собственного имени Джабан у сасанидов дает возможность думать, что в настоящем случае «le jeune homme» [27] есть не что иное, как имя какого-либо полководца Кавада. К тому же факты выбивания монет в честь своих министров уже нам известны из Табари [28] и друг.» [29].

В этом письме Андрей Андреевич предстает знатоком культуры древнего Ирана.

---

[21] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1906, д. 153, л. 107.
[22] Там же, ф. 733, оп. 2, д. 142, л. 1, 1 об.
[23] Там же, л. 2, 2 об.
[24] Кавад I (год рождения неизвестен — умер в 531 г.) — царь государства Сасанидов в 488—496, 499—531 гг. (Сасаниды — иранская династия, правившая с III—VII вв. на Ближнем и Среднем Востоке).
[25] Хосров I Ануширван (год рождения неизвестен — умер в 579 г.) — иранский царь из династии сасанидов, сын Кавада I.
[26] Йездегерд IV — иранский шах.
[27] — Молодой человек (фр.).
[28] Табари (838 или 839—923) — арабский историк и богослов.
[29] ЛО ААН, ф. 87, оп. 3, д. 245, л. 1, 1 об., 2, 2 об.

В другом письме, адресованном К. Г. Залеману, он выступает за сохранение коллекций Музея антропологии и этнографии: «Позвольте обратить Ваше внимание на § 64 протокола Общ. Собр., 3-го апреля 1899-го года. Здесь говорится об очищении комнат, занятых акад[емиком] В. В. Радловым. По моему же мнению, В. В. никаких комнат в помещении Зоологического музея не занимает. Надо, следовательно, догадываться, что дело идет о комнатах, занятых Музеем антропологии и этнографии. Но очищать комнаты от музея, по-моему, весьма странно. Академия может переместить коллекции музея из одного помещения в другое, но не очищать помещений от подобных коллекций. Между тем в постановлении Общего собрания не сказано, куда же предполагается переместить Музей антропологии и энтографии» [30].

В Архиве АН СССР в Москве удалось обнаружить два письма А. А. Маркова к Н. А. Морозову — выдающемуся русскому революционеру и общественному деятелю, почетному академику. В письме от 9 февраля 1916 г. [31] А. А. Марков дает краткий отзыв о работе Н. А. Морозова «Лингвистические спектры» [II, 76], в которой была предпринята попытка путем статистического анализа распределения характерных слов и частиц в произведении какого-либо автора отыскать средство для отличия плагиата от истинного авторства. Считая работу Н. А. Морозова интересной, А. А. Марков вместе с тем указывает, что выводы автора статистически обоснованы слабо. По его мнению, обработанных Морозовым несколько тысяч слов недостаточно для получения достоверных результатов.

Действительно, приведенные Н. А. Морозовым данные характеризуются значительным разбросом. А. А. Марков посвятил анализу работы Н. А. Морозова отдельную статью [I, 114], в которой провел аналогичные подсчеты и пришел к выводам, опровергавшим заключения Н. А. Морозова.

А. А. Маркову доводилось быть арбитром многих конкурсных работ. Так, в 1890 г. он вместе с П. Л. Чебышевым и В. Г. Имшенецким входил в состав комиссии для рассмотрения сочинений, представленных на соискание премии В. Я. Буняковского [II, 70, с. 194].

---

[30] Там же, л. 8, 8 об., 9.
[31] ААН, ф. 543, оп. 4, д. 1130, л. 2, 3.

Ученый решительно протестовал против снисходительного отношения к соискателям премий. Выступая в январе 1917 г. на Общем собрании Академии наук, он говорил: «Премии являются настоящим бедствием для Академии наук; число их постоянно растет и достигает в настоящее время до полусотни, а число работ, которые бесспорно заслуживали бы быть отмечены Академией, остается весьма ограниченным. Большинство представляемых на премии работ можно разбить на две группы: явно неудовлетворительные и посредственные. Первая группа, хотя и досадна, но довольно безвредна, ибо сочинения не требуют подробного разбора. Вторая группа, с одной стороны, отнимает напрасно много времени на ее рассмотрение и оценку, а с другой стороны, ведет к унижению достоинства Академии, так как подобные работы, за неимением иных, иногда оцениваются так снисходительно, что получают премии. Здесь кстати припомнить мнение моего незабвенного учителя П. Л. Чебышева, что лучшим средством для остановки развития науки было бы собрать всех выдающихся ученых и поручить им рассматривать произведения других» [32].

А. А. Марков по сути своей натуры не терпел компромиссов и органически не выносил в собеседнике дипломатичности, особенно часто наблюдаемой в академической среде. Это подчас приводило к сложности в его отношениях с коллегами. И неудивительно, что личные взаимоотношения выдающегося математика со многими видными представителями русской науки часто не отличались гармонией.

Не признавал он и авторитетов. Для А. А. Маркова авторитетным было только то, что он считал истинным. Его критического взгляда не избежал и П. Л. Чебышев. Еще в 1891 г. А. А. Марков писал академику А. П. Карпинскому: «Конечно, мои коллеги по математике не могли отзываться о моих работах совсем неодобрительно, но что они хвалили их недостаточно хорошо — это доказывает, между прочим, сделанное ими представление по поводу смерти В. Я. Буняковского, где прямо сказано, что они предлагают заполнить эту вакансию кем-нибудь другим... Кроме того, Вы наверно не слыхали от них, что в 1884 г. я дал полное обозрение с надлежащим доказательством вопроса

[32] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1, д. 164, л. 11.

П. Л. Чебышева [33], а в 1885 г. Чебышев публиковал без доказательства и без упоминания обо мне свое решение и продолжает в том же духе» [34].

Между тем известно, что А. А. Марков с глубоким уважением относился к П. Л. Чебышеву. Именно в дружеской беседе с А. А. Марковым провел свой последний вечер перед смертью Пафнутий Львович [II, 12, с. 258]. 30 ноября 1894 г. на экстренном заседании Физико-математического отделения Академии наук, посвященном памяти П. Л. Чебышева, А. А. Марков прочитал записку, подготовленную им и академиком Н. Я. Сониным [II, 12, с. 265]. А. А. Маркову и Н. Я. Сонину принадлежит заслуга подготовки и редактирования двухтомного «Собрания сочинений» П. Л. Чебышева, а также написания его биографического очерка [I, 62, 126; II, 15, с. 11]. А. А. Марков, кроме того, был издателем сочинения П. Л. Чебышева «Теория сравнений» [I, 69].

В протоколе Физико-математического отделения Академии наук от 23 марта 1921 г. читаем: «Академик А. А. Марков сообщил: 26 мая текущего года исполняется столетие со дня рождения незабвенного Пафнутия Львовича Чебышева. При нормальных условиях следовало бы ознаменовать этот день особым торжественным собранием; но при уродливой форме, в которой протекает наша жизнь, едва ли уместны какие бы то ни было торжества. Если отделение признает необходимым отметить день рождения Чебышева торжественным собранием, то к участию в нем следовало бы привлечь одного из старейших учеников Чебышева, Александра Васильевича Васильева» [35].

О своем учителе Андрей Андреевич помнил и в трудную пору своей жизни.

Историки математики подчеркивают вспыльчивость и неуравновешенность характера А. А Маркова, но не всегда приводят факты, свидетельствующие о том, что Андрей Андреевич по достоинству ценил труды своих коллег. Например, вот что он писал о сочинении Е. В. Борисова, с которым соперничал в годы учебы в университете: «Е. В. Борисов мне хорошо известен, так как я слушал одновременно с ним лекции в С.-Пе-

---

[33] Имеется в виду работа А. А. Маркова «Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева» [I, 7].
[34] ЛО ААН, ф. 265, оп. 6, д. 394, л. 4,5.
[35] Там же, оп. 1а — 1921, д. 169, с. 50.

тербургском университете у профессоров П. Л. Чебышева, Е. И. Золотарева, А. Н. Коркина и др. Без сомнения, он принадлежит к числу лучших учеников упомянутых профессоров и не напрасно был в свое время награжден серебряной медалью за рассуждение на предложенную факультетом тему: «Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей». В числе представленных на эту тему работ была и моя, но я как тогда, так и теперь должен признать, что работа Е. В. Борисова была самою солидною из всех и обнаруживала как трудолюбие, так и большие сведения ее автора. Печатных трудов у Е. В. Борисова немного, но это не мешает ему быть весьма серьезным ученым. Обилие печатных трудов далеко не всегда свидетельствует об основательной научной подготовке. Магистерская диссертация Е. В. Борисова может служить новым доказательством того, как трудолюбиво и серьезно относится он к научным вопросам. Тот, кто, как мой покойный брат, займется изучением тройничных (положительных) квадратичных форм, будет весьма благодарен Е. В. Борисову за составленные им таблицы приведенных форм и за обстоятельное объяснение способа составления подобных таблиц» [36].

Случалось, что Андрей Андреевич менял свое первоначальное мнение о том или ином ученом. Но делал он это во имя научной истины. Так, 6 ноября 1910 г. он пишет профессору А. А. Чупрову: «Все работы я могу расценивать только с чисто математической точки зрения, и с этой точки зрения для меня ясно, что ни Брунс, ни Некрасов, ни Пирсон не сделали ничего заслуживающего внимания» [II, 77, с. 12]. Но спустя два года он считает, что формулы Пирсона «выходят уже из области теории вероятностей и становятся более или менее удачными эмпирическими формулами» [II, 77, с. 66]. Постепенно А. А. Марков проявляет все большую заинтересованность работами К. Пирсона и 29 января 1917 г. пишет А. А. Чупрову: «...сравнение с Пирсоновскими формулами я считаю интересным и очень рад, что Вы его делаете. Представляется теоретический пример, на котором можно испытать пригодность этих формул».

В работе [I, 93], опубликованной в 1911 г., А. А. Марков решает одну из задач, поставленных Брунсом [II, 78; II, 79].

[36] ЦГИА, ф. 733, оп. 150, д. 1542, л. 96—98.

В 1903 г. в связи с выдвижением Б. Б. Голицына в ординарные академики по физике А. А. Марков выступил с критическим заявлением по поводу записки об ученых трудах соискателя. Между А. А. Марковым и Б. Б. Голицыным развернулась острая полемика, касающаяся корректности используемых последним методов обработки статистических данных[37]. В этот спор включились Ф. А. Бредихин, поддерживавший Б. Б. Голицына, и А. М. Ляпунов, считавший обоснованными возражения А. А. Маркова.

В результате дискуссии А. А. Марков подготовил статью «К вопросу о прочности стекла», в которой методами математической статистики исследовал результаты физических экспериментов [I, 72].

Спустя же несколько лет, в январе 1908 г., А. А. Марков вместе с О. Баклундом и Ар. Белопольским подписал благожелательную записку об ученых трудах Б. Б. Голицына в связи с повторным представлением последнего в ординарные академики [38].

5 марта 1903 г. на заседании Физико-математического отделения Академии Ф. Ф. Бейльштейн, указывая на недостатки в работах В. В. Заленского, упрекнул его в незнании трудов С. А. Бутурлина [39], а также в том, что он недостаточно высоко оценил деятельность своих предшественников, покойных академиков Ф. Ф. Брандта и А. А. Штрауха [40].

Академик А. С. Фаминцын, взявший под защиту В. В. Заленского, заявил: «Первое место в серьезном критическом разборе ученого труда должны бесспорно занимать указание и оценка всего нового и интересного в работе; это и есть то, что обогащает науку и из чего последняя создается. Все же недочеты и недосмотры в серьезном ученом труде, как всякому из нас известно, сами собой отпадают и вскоре всеми забываются... В заключение позволю себе прибавить

---

[37] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1903, д. 150, л. 24, 33, 111—113, 123—125, 134—136.

[38] Там же, ф. 1, оп. 1а — 1908, д. 155, л. 118, 118 об.

[39] С. А. Бутурлин (1872—1938) — зоолог и охотовед, один из основателей отечественной школы охотоведения.

[40] Зоологический музей Петербургской Академии наук (ныне Зоологический институт АН СССР — головное научно-исследовательское учреждение в области зоологии) организован Ф. Ф. Брандтом в 1831 г., А. А. Штраух заведовал Зоологическим музеем с 1879 по 1895 г. В. В. Заленский был руководителем музея в 1897—1906 гг.

к вышеизложенному, что я льщу себя надеждою, что академическое собрание присоединится к моему мнению и также осудит подобного рода полемические приемы (выступление Ф. Ф. Бейльштейна.— *С. Г.*)» [41].

А. А. Марков заявил о своем несогласии с заявлением А. С. Фаминцына в записке, помещенной в приложении к протоколу заседания отделения от 16 апреля 1903 г. «Ввиду выраженной академиком А. С. Фаминцыным надежды, что к его мнению присоединится Академическое собрание,— подчеркивал ученый,— я не могу оставить его заявление без возражения. Записки наших уважаемых товарищей могут требовать объяснений или возражений, но никак не осуждения. Оснований для негодования я не вижу; напротив, записку академика Ф. Ф. Бейльштейна можно объяснить симпатичным желанием по мере сил защитить отсутствующих и мертвых. Рассуждения академика А. С. Фаминцына я считаю неправильными. Как нельзя запрещать хвалить ту или другую работу и считать ее замечательным трудом, так нельзя запрещать и указывать недостатки и заблуждения. Это указание иногда может быть весьма ценным, хотя бы оно касалось только небольшой части работы, так как заблуждения не только не отпадают сами собой, а, напротив, могут усиливаться со временем, переходя из одной работы в другую. Итак, оставляя в стороне данный частный случай, я усматриваю в заявлении академика А. С. Фаминцына опасный прецедент искажения научных споров и мог бы пояснить свои слова примерами как из прошлого, так и из настоящего времени. А. Марков» [42].

В свое время в академических кругах приобрел известность и инцидент, связанный с замечаниями А. А. Маркова относительно мемуара С. В. Ковалевской. 22 декабря 1889 г. С. В. Ковалевская писала Г. Миттаг-Леффлеру: «Вчера я узнала о смерти Буняковского. Появилась вакансия в Академии, на которую я могла бы претендовать... У меня очень серьезный конкурент в лице Маркова. Он пользуется большим покровительством, и я уверена, что большинство будет за него» [II, 80, с. 203]. Ее предсказание сбылось — А. А. Марков был, как извест-

---

[41] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1903, д. 150, л. 151 об.
[42] Там же, л. 174.

но, избран 30 января 1890 г. экстраординарным академиком 16 голосами против 1. Но вот мнение С. В. Ковалевской, что Марков «пользуется большим покровительством», было глубоко ошибочно.

Летом 1890 г. после научного триумфа за границей С. В. Ковалевская, избранная в члены-корреспонденты Петербургской Академии наук, приехала в Россию. Посетив В. Г. Имшенецкого, она 18 мая 1890 г. записала в своем дневнике: «Была у Имшенецкого. Узнала следующую историю. Марков публично заявил, что мой мемуар полон ошибок, но что он покажет их лишь тогда, когда господа академики, предложившие меня членом, потрудятся прочесть мой мемуар. Им[шенецкий] считает себя великим героем, потому что решил возразить Маркову, что если даже в моем мем[уаре] есть ошибки, то есть и достоинства!!! После того как М[аркова] сделали экст[раординарным] акад[емиком], он был так милостив, что заявил в частном разговоре, что мемуар мой не так плох, как ему сначала показалось. На этом частном разговоре все и ограничилось» [II, 81, с. 179].

Еще более определенно высказалась Софья Ковалевская в письме, посланном из Петербурга в мае 1890 г. Г. Миттаг-Леффлеру: «Марков, между прочим, публично высказался о моей работе по вращению (премированная статья), что она полна грубейших ошибок! Когда его попросили показать эти ошибки, он нагло ответил, что не желает этого делать, так как вскоре кто-нибудь из академиков, которые предложили меня в члены Академии, даст себе труд действительно прочитать мою статью!!!» [II, 80, с. 205].

Не надеясь на поддержку академиков-математиков, С. В. Ковалевская намеревалась обратиться к президенту Академии наук. Этому ее желанию суждено было вскоре осуществиться. «Вчера я была представлена великому князю, с которым имела беседу с глазу на глаз, длившуюся почти час. Это еще совсем молодой человек, но он показался мне очень симпатичным».

Вокруг представления С. В. Ковалевской в ординарные академики развернулась острейшая дискуссия, в которой эмоции порой застилали факты.

Существо замечаний А. А. Маркова о мемуаре С. В. Ковалевской изложено в монографии [II, 71, с. 187—191].

А. А. Марков выставил два основных возражения.

Первое возражение. Из сравнения показателей нельзя заключить, что значения $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ являются единственно возможными. С. В. Ковалевская рассматривает систему уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Относительно первого параграфа ее мемуара А. А. Марков замечает: «Согласно известному со времен Ньютона началу наибольших и наименьших показателей... замечаем, что каждая из следующих шести систем должна содержать по крайней мере два разных числа:

1) $n_1 + 1,\ n_2 + n_3,\ m_3,\ m_2,$

2) $n_2 + 1,\ n_1 + n_3,\ m_1,\ m_3,$

3) $n_3 + 1,\ n_1 + n_2,\ m_2,\ m_1,$

4) $m_1 + 1,\ n_3 + m_2,\ n_2 + m_3,$

5) $m_2 + 1,\ n_1 + m_3,\ n_3 + m_1,$

6) $m_3 + 1,\ n_2 + m_1,\ n_1 + m_2.$

С. В. Ковалевская уравнивает между собой в каждой из указанных здесь шести систем не два, а все (четыре или три) числа и, таким образом, отбрасывает без достаточных оснований бесчисленное множество случаев, как, например, случай

$$n_1 = n_2 = n_3 = 2, \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 4.$$

Второе возражение. Ковалевская не рассматривает случаи кратных корней своего основного определителя, между тем как не исключена возможность существования однозначного общего интеграла и при наличии кратных корней».

В письме П. А. Некрасову, которое А. А. Марков написал уже после кончины С. В. Ковалевской, говорится по поводу ее работы: «Вот подлинные слова ее, которые я считаю неосновательными: „Легко убедиться, сравнивая показатели первых членов в левых и правых частях рассматриваемых уравнений, что должны иметь

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1, \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 2“.$$

Итак, мое возражение сводится к тому, что из одного сравнения показателей первых членов нельзя вывести заключения.

Я сомневаюсь, как Вы видите и, может быть, слышали от меня и раньше, не в самом случае, найденном С. В. Ковалевской, а только в единственности его» [43].

После смерти С. В. Ковалевской ученик П. А. Некрасова Г. Г. Аппельрот предпринял более подробные вычисления к первому параграфу ее мемуара. Однако А. А. Марков в письме от 29 сентября 1892 г. на имя секретаря Московского математического общества Б. К. Млодзеевского заявил, что «выводы г. Аппельрота, как бы ни были интересны и сложны его выкладки, *лишены значения*, так как построены они на *ложном* основании, состоящем в замене предложенной системы уравнений другою» [II, 82, с. 842].

В конечном итоге своими критическими выступлениями А. А. Марков привлек внимание А. М. Ляпунова к работе С. В. Ковалевской. А тот, как известно, продолжил начатые ею исследования. Этому предшествовали не слишком приятные события.

17 ноября 1892 г. на заседании Московского математического общества по предложению его вице-президента П. А. Некрасова было принято следующее постановление:

«Общество постановило: так как голословные заявления, каковы заявления проф. А. А. Маркова относительно трудов С. В. Ковалевской, В. Г. Imшенецкого, Н. В. Бугаева и Г. Г. Аппельрота, бесполезны для науки и суждения о таковых заявлениях лишь бесплодно отвлекают Общество от его занятий, то впредь не принимать к обсуждению в Обществе голословных и резких заявлений» [II, 82, с. 845].

Реакцией А. А. Маркова на это постановление было письмо А. М. Ляпунову, к которому он обратился за посредничеством. Андрей Андреевич писал: «В том самом заседании Московского Математического Общества, когда Вы были выбраны в члены этого Общества, было сделано на мой счет постановление, совершенно искажающее истину. Постановление это покрывает позором заправил этого Общества, злоупотребляющих именем Общества. Однако более или менее оно падает и на всех членов Общества, которые позволяют без возражения делать подобные постановления. Вы, конечно, только что вступаете в Общество. Однако

[13] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 52.

я смею надеяться на Ваш протест, так как Вы более, чем кто-нибудь другой, можете судить, на чьей стороне правда в вопросе о мемуарах С. В. Ковалевской и Аппельрота.

Извлечение из моих писем к г. Некрасову при сем прилагаю. Из этих писем Вы увидите, что мои заявления по поводу мемуара С. В. Ковалевской были вовсе не голословными и нисколько не опровергаются статьей г. Аппельрота...» [44] В ответном письме от 10 апреля 1893 г. А. М. Ляпунов выразил согласие проверить работу С. В. Ковалевской [45]. Вскоре А. А. Марков писал А. М. Ляпунову: «Совершенно соглашаясь с Вами, что вопрос, которому посвящены второй мемуар С. В. Ковалевской и статья Г. Г. Аппельрота, не имеет важного значения для механики, я, однако, должен обратить Ваше внимание на то, как раздут этот вопрос московскими математиками.

Первоначальное мое заявление о § 1 мемуара С. В. Ковалевской имело только одну цель — доказать, что П. Л. Чебышев вовсе не знаком с работами С. В. Ковалевской и ценить их не может. Затем, несмотря на приставания московских математиков (на последнем съезде), я не желал ничего печатать, заявляя, что я говорю только об одном § 1 мемуара С. В. Ковалевской и что этот параграф не имеет значения для дальнейшей части работы С. В. Ковалевской. И только речи московских профессоров, напечатанные в начале XVI тома Математического сборника, заставили написать письма к профессору Некрасову» [46].

Возвращаясь к известному постановлению Московского математического общества, А. А. Марков добавляет: «Очень рад, что Вы будете делать свое сообщение в присутствии Н. В. Бугаева, который, надеюсь, поймет, что он напрасно поторопился сделать известное постановление. Должен обратить Ваше внимание на то, что признаны *голословными и бесполезными для науки* не только мои заявления относительно мемуара г. Аппельрота, но и *заявления относительно мемуара С. В. Ковалевской.*

Между тем последние заявления были, как мне кажется, довольно *обстоятельными* и небесполезными для науки.

---

[44] ЛО ААН, ф. 257, оп. 1, д. 20, л. 1—4.
[45] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 11, л. 1—5.
[46] ЛО ААН, ф. 257, оп. 1, д. 20, л. 5, 5 об.

Мною указаны пробелы в рассуждениях С. В. Ковалевской, и эти указания возбудили несколько попыток дополнить доказательства С. В. Ковалевской.

Если кому-нибудь удастся доказать наконец все, тем лучше» [47]. Впоследствии А. М. Ляпунов пополнил указанный А. А. Марковым пробел в рассуждениях С. В. Ковалевской и доказал более общую теорему. В письме А. А. Маркову от 14 мая 1893 г. он писал: «В понедельник 10 мая состоялось заседание [Московского] мат[ематического] общества, в котором я изложил свои заключения о работе Г. Г. Аппельрота. Я заявил, что Ваши возражения, касающиеся приема, которым пользуется Г. Г. Аппельрот, вполне основательны, и с моим мнением согласились все присутствующие члены мат[ематического] общ[ества], в том числе и проф. Бугаев...

...Считаю нужным сообщить, что недавно, пересмотревши первый мемуар С. В. Ковалевской (Acta math., t. 12), я убедился в основательности и второго Вашего возражения...» [48]

Заметим, что справедливость второго замечания А. А. Маркова была подтверждена и Г. Г. Аппельротом [II, 83, 84], и П. А. Некрасовым [II, 85], которые нашли пропущенные С. В. Ковалевской решения и установили, что в результате формулировка теоремы Ковалевской не изменяется.

Время показало, что А. А. Марков недооценил значения работ первой русской женщины-математика. Но он оставался человеком честным, и его критические замечания, хотя и не всегда облекались в принятую в Академии форму, были продиктованы стремлением приблизиться к истине. К сказанному добавим, что, несмотря на сложные взаимоотношения А. А. Маркова с видными представителями Московского математического общества, позднее (в 1897 г.) именно он вместе с Н. Я. Сониным представил Н. В. Бугаева в члены-корреспонденты Академии наук, отметив, что среди трудов кандидата особого внимания заслуживает «обстоятельно им разработанное учение о числовых производных, в котором найдены им многие интересные и общие результаты» [II, 86, с. 350].

Узы близкой дружбы связывали А. А. Маркова

---

[47] Там же, л. 13, 13 об.
[48] Там же, ф. 173, оп. 1, д. 11, л. 6—9.

с В. А. Стекловым. Взаимоотношения этих двух виднейших деятелей русской науки — предмет особого разговора. Здесь же отметим лишь, что Владимир Андреевич лучше других понимал особенности характера А.А. Маркова, о котором писал: «В спорах он мог стерпеть какие угодно резкие выражения по своему адресу, лишь бы они строго относились к существу дела и не отклоняли его в сторону, не отвлекали от главной темы в сторону личных чувств или компромиссного, обыкновенно никого не удовлетворяющего решения. Возражения свои и заявления он всегда начинал с той резкой определенностью, к какой привык в своих ученых изысканиях; это часто раздражало людей самолюбивых, не привыкших к таким объективно-логическим формам «разговоров»; противник зачастую, оставляя в стороне суть спора, начинал дипломатично возражать против формы, которую давал ему Андрей Андреевич, а это сейчас же выводило последнего из равновесия. Такие обороты спора приводили к конфликтам, взаимному непониманию, и часто предложения Андрея Андреевича, по существу справедливые, отвергались единственно из-за практически неудобной формы, в которую они им облекались...

Большинство возражений Андрея Андреевича, несмотря на часто пространные опровержения, в существе дела остались неопровергнутыми и, смею думать, не вызвали бы тех обострений, какие получались, если бы Андрей Андреевич был способен придавать своим возражениям более привычную для большинства форму, а его противники попытались бы глубже вникнуть в особенности его характера. Но что же делать, если ход его мышления и свойства его на редкость прямой души были настолько своеобразны, что не укладывались в обычных рамках; к этим особенностям, может быть не всегда приятным, все же можно относиться только с уважением» [II, 74, с. 181—182].

Теплые отношения связывали А. А. Маркова с А. М. Ляпуновым. Кстати, Андрей Андреевич в большой степени способствовал избранию А. М. Ляпунова в академики. 16 марта 1901 г. он писал А. М. Ляпунову: «Давно я желал иметь Вас своим товарищем в Академии наук. В настоящее время надеюсь, что мое желание может осуществиться, так как назначенная президентом Академии комиссия останавливается на Вас как на кандидате для замещения вакансии по прикладной математике... я надеюсь, что Ваше избрание в академики состоится, если только Вы сами согласитесь покинуть Харьков.

О моем проекте пригласить Вас в Академию я разговаривал с профессорами университета, имея в виду, что Вы можете оказать большую пользу и университету, с А. Н. Коркиным, Ю. В. Сохоцким, Д. К. Бобылевым.

Итак, Александр Михайлович, прошу Вас согласиться на мою просьбу покинуть Харьков... Если Вы согласны подвергнуться баллотировке, то прошу Вас прислать возможно полный список Ваших трудов. У меня, конечно, имеются почти все Ваши произведения, и я могу составить сам список их, но все-таки могу что-нибудь и пропустить. Не ссылается ли кто-нибудь из иностранных ученых на Ваши работы (Klein, Poincaré)? Прошу принять уверения в глубочайшем уважении и преданности» [49].

Насколько не похож в этом письме А. А. Марков на желчного и сурового критика. Как он заботлив, внимателен, предупредителен. 2 мая 1901 г. А. А. Марков послал А. М. Ляпунову открытку с теплым дружеским поздравлением по случаю избрания в ординарные академики [50].

По предложению А. А. Маркова в 1894 г. Петербургская Академия наук избрала своим членом-корреспондентом видного голландского математика Томаса Стилтьеса, а в следующем году (также при содействии А. А. Маркова) — французских ученых Эмиля Пикара, Гастона Дарбу, Камилла Жордана и немецких — Феликса Клейна и Лазаруса Фукса. В личном фонде А. А. Маркова имеются благодарственные письма этих ученых [51].

Дружеские отношения сложились у А. А. Маркова с крупнейшим французским математиком второй половины XIX в. Шарлем Эрмитом. В ЛО ААН хранятся письма Ш. Эрмита А. А. Маркову, относящиеся к 1885—1899 гг. Впервые они были опубликованы в 1967 г. с комментариями Е. П. Ожиговой на французском языке [II, 87], а в 1982 г. она выпустила их русский перевод [II, 88, с. 224—244].

---

[49] ЛО ААН, ф. 257, оп. 1, д. 20, л. 47—50.

[50] Там же, л. 57—62, 69.

[51] Там же, ф. 173, оп, 1, д. 34, л. 1, 2; д. 36, л. 1; д. 39, л. 1, 2; д. 40, л. 15, 15 об.; д. 42, л. 1; д. 46, л. 3.

В 1895 г. Ш. Эрмит по представлению А. А. Маркова и Н. Я. Сонина был избран почетным членом Петербургской Академии наук, членом-корреспондентом которой он являлся с 1857 г. Узнав об этом, он обратился к Андрею Андреевичу с письмом, в котором выразил ему свою признательность. «Не сомневаюсь,— писал Ш. Эрмит,— что Вы приняли большое участие в моем избрании, поэтому, мой дорогой собрат, я должен выразить Вам живейшую благодарность» [II, 88, с. 239].

В свое время А. А. Марков откликнулся на просьбу Ш. Эрмита поддержать заявление ряда ученых о значении журнала «Acta mathematica», оказавшегося в кризисном финансовом положении, а в 1899 г. уже сам обратился к Ш. Эрмиту за поддержкой.

В 1907 г. исполнялось 200 лет со дня рождения Л. Эйлера. В этой связи профессор Д. К. Бобылев еще в 1899 г. возбудил перед Физико-математическим отделением Академии наук вопрос о сооружении памятника выдающемуся математику и организации для этой цели международной подписки. Отделение одобрило предложение. Но на общем собрании 6 февраля 1899 г. против него выступил академик Н. Я. Сонин. Он посчитал, что труды Л. Эйлера забыты, «следы деятельности Эйлера почти заметены», его превзошли Лагранж и Гаусс, а потому для него достаточно имеющегося бюста в конференц-зале Академии наук.

Ему возразил А. А. Марков, подчеркнув, что труды Д. Эйлера по-прежнему используются в преподавании. Но, по мнению Н. Я. Сонина, это свидетельствовало лишь об отсталости системы преподавания математики. В итоге при голосовании за предложения Д. К. Бобылева голоса разделились поровну и оно было отклонено [II, 88, с. 243]. Именно тогда А. А. Марков и написал Шарлю Эрмиту следующее письмо:

«Милостивый государь,

в 1907 г. исполняется 200-я годовщина Эйлера. Почитатели его гения выдвинули идею организовать международную подписку, чтобы воздвигнуть в Петербурге памятник великому геометру. Это предложение вызвало разные возражения, лишь одно из которых кажется мне имеющим какое-то значение. Эйлер, говорят, родился в Базеле и провел 25 лет своей жизни в Берлине, поэтому не уместнее ли построить памятник в одном из этих городов, чем в Петербурге?

Не собираясь отрицать полностью силу этого замечания, я, однако, напомню, что Эйлер провел в общей сложности (в два приема) более тридцати лет в С.-Петербурге, что здесь он умер и погребен, что все его потомство осталось в России и, наконец, что наибольшая часть его трудов напечатана в изданиях Петербургской Академии наук, связи с которой он не прерывал даже во время своего пребывания в Берлине.

Я ограничусь лишь упоминанием другого замечания, на мой взгляд лишенного всякого значения и какого бы то ни было основания: что в настоящее время труды Эйлера будто бы лишены всякого научного интереса.

Если мысль о строительстве памятника Эйлеру вызовет Ваше одобрение и если Вы полагаете, что именно С.-Петербургу должна принадлежать привилегия быть украшенным этим монументом, прошу Вас ответить мне на приглашение, с которым я имею честь к Вам обратиться. Ваш ответ вместе с разрешением сообщить его Академии наук окажет мне ценную помощь в усилиях, которые я предпринимаю, чтобы достичь желаемого решения.

Должен сказать, что, хотя мое желание — видеть памятник Эйлеру в С.-Петербурге, я был бы тем не менее в некоторой степени удовлетворен и в том случае, если бы знак памяти великому ученому был оказан в Берлине или Базеле» [II, 88, с. 243—244].

Шарль Эрмит безоговорочно поддержал идею воздвижения монумента Л. Эйлера в Петербурге.

В оценке эйлеровского наследия А. А. Марков и Н. Я. Сонин разошлись и в 1902 г. На этот раз поводом послужило предложение преподавателя математики Новгородской мужской гимназии Любицкого перевести на русский язык работу Л. Эйлера «Introductio in analysin infinitorum». Академик Н. Я. Сонин заявил, что этот труд Эйлера представляет лишь исторический интерес и переводить его на русский язык «представляется и совершенно бесцельным и крайне убыточным» [52]. А. А. Марков, возражая Н. Я. Сонину, подчеркивал, что это «прекрасное сочинение за-

[52] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1902, д. 149, л. 177 об.

служивает тщательного изучения и в настоящее время»[53]. Справедливости ради заметим, что и Н. Я. Сонин позднее изменил свое мнение о значении трудов Л. Эйлера и вместе с другими академиками участвовал в подготовке к изданию его произведений.

А. А. Марков подчас расходился во мнениях с Н. Я. Сониным по принципиальным вопросам. Тем не менее он по достоинству ценил исследования своего коллеги, о которых писал: «Труды Н. Я. Сонина относятся ко многим отделам математики, как видно из прилагаемого списка, они отличаются оригинальностью и изяществом изложения и изобилуют формулами. Большая часть исследований Н. Я. Сонина посвящена вопросам, которыми ранее занимались другие математики. Но, не забывая о предшественниках и указывая на их труды, Н. Я. Сонин каждый вопрос трактует по-своему, внося новое освещение и разъяснение и в особенности сообщая вопросу и выводам большую общность» [I, 111].

А. А. Марков живо откликался на разнообразные события общественной жизни. Он мужественно отстаивал честь и достоинство Академии наук, которую царская власть стремилась превратить в собственную канцелярию. В старой, императорской Академии наук А. А. Марков казался чуть ли не потрясателем основ. Много крови попортил иным солидным академикам этот так резко выделявшийся в их среде, беспокойный представитель такой, казалось бы, «политически благонадежной» науки, как математика. И не только просто академикам, но и самому «августейшему», великому князю Константину Романову.

В декабре 1901 г. несколько академиков, в том числе А. А. Марков, возбудили перед Общим собранием вопрос о необходимости изменения академического Устава [II, 89, с. 457]. Сначала Андрей Андреевич вошел в комиссию по пересмотру Устава, но 16 марта 1902 г. обратился к Физико-математическому отделению: «Честь имею покорнейше просить отделение уволить меня от участия в комиссии по пересмотру Устава, так как я убедился в бесполезности этой комиссии. Какие бы положения мы ни выработали, они всегда могут быть нарушены» [II, 90].

Как-то (в конце 1905 г.) на заседании Физико-ма-

---

53 Там же, л. 202.

тематического отделения было рекомендовано избрать В. И. Вернадского в адъюнкты по минералогии, а Н. В. Насонова — в ординарные академики по зоологии. В обоих случаях предложение об избрании исходило от президента — К. К. Романова. Академик А. А. Марков отказался подписать протокол заседания, поскольку, по его мнению, в соответствующих параграфах «находятся лишние слова „с разрешения августейшего президента", которые указывают на ограничение права „избрания", не основанное на Уставе Академии» [II, 90]. В другой раз при баллотировке новых академиков на заседании Отделения физико-математических наук, которое проходило под председательством К. К. Романова, А. А. Марков, взяв слово по порядку ведения собрания, заявил: «Я считаю очень странным, что нематематики голосуют при выборах академиков-математиков». В этом заявлении содержался прозрачный намек на К. К. Романова. Последний счел тогда за благо заявить, что он отныне не будет принимать участия в голосовании при выборах академиков в Физико-математическом отделении.

В апреле 1906 г. А. А. Марков вошел в комиссию по вопросу о порядке избрания в действительные члены Академии [54]. По окончании ее работы он выразил свое особое мнение относительно проведения выборных заседаний. «Поскольку,— считал А. А. Марков,— по смыслу Устава Академии президент не участвует в баллотировке кандидатов в действительные члены Академии, а вице-президент и непременный секретарь не имеют никаких особых прав перед другими академиками, логично устраивать такие заседания без упомянутых лиц. С другой стороны, введение в правила о выборах требования согласия президента нельзя признать обязательным, так как оно не основано на Уставе Академии. Согласно Уставу, президент может не утвердить избранного кандидата, но не имеет права устранять кандидатов по усмотрению или не допустить выборов, если только они не связаны с нарушением закона» [55].

А. А. Марков не остался безучастным и к истории избрания М. Горького в члены Академии наук.

---

[54] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1906, д. 153, л. 46 об.
[55] Там же, оп. 1а—1907, д. 154, л. 67, 67 об.

Как известно, 25 февраля 1902 г. совместное заседание Отделения русского языка и словесности и Разряда изящной словесности Академии наук по предложению В. Г. Короленко и В. В. Стасова избрало почетным академиком М. Горького [II, 89, с. 464]. Об этом 1 марта сообщил «Правительственный вестник». Департамент полиции, раздраженный этим фактом, составил и доложил царю сводку результатов слежки за Горьким в течение последних двенадцати лет. И последовал с «высочайшим окриком» приказ монарха о том, что «выбор Горького отменяется» [II, 91, с. 143]. 12 марта в том же «Правительственном вестнике» по требованию Николая II было напечатано объявление о кассации выборов от имени самой Академии. В качестве мотива кассации имелась ссылка на то, что Горький находится-де под гласным надзором полиции.

Возмущенные произволом царского правительства и молчаливой покорностью чиновников, почетные академики В. Г. Короленко и А. П. Чехов вернули в Академию свои дипломы, а В. В. Стасов заявил, что не будет впредь посещать заседания Академии. На акт грубого произвола «самодержца» и трепетавшего перед ним президента Академии наук А. А. Марков ответил гневным письмом на имя К. К. Романова, посланным еще накануне выхода «Правительственного вестника» с ложным объявлением. По указанию президента непременный секретарь Н. Дубровин дал такой ответ академику А. А. Маркову [56].

«Конфиденциально.

Милостивый Государь Андрей Андреевич!

На письмо Ваше от 11 марта, по поручению Его Императорского Высочества, имею честь уведомить:

1. Президенту нередко представляется случай сноситься от лица Академии и в ее интересах и нуждах без ведома Общего собрания...

2. Мотивы кассации — исполнение общего закона, который никакими частными постановлениями не отменяется.

3. В данном случае признана недействительность выборов, а об неутверждении их не было и речи.

4. Президенту не угодно дать согласия на заявление

[56] Там же, ф. 173, оп. 1, д. 62 л. 9.

в Общем собрании об этом, как не относящемся до ученых занятий.

Примите уверения в моем почтении и преданности.

Н. Дубровин».

Получив письмо, А. А. Марков решил обратиться в Общее собрание со следующим заявлением [I, 128, с. 605].

«В Общее собрание Академии наук.

Честь имею предложить Собранию настаивать, чтобы объявление о кассации выбора г. Пешкова в почетные академики было объявлено недействительным или исправлено, так как, во-первых, это объявление от имени Академии, которая в действительности не кассировала выбора г. Пешкова, и, во-вторых, приведенный в объявлении мотив кассации лишен значения.

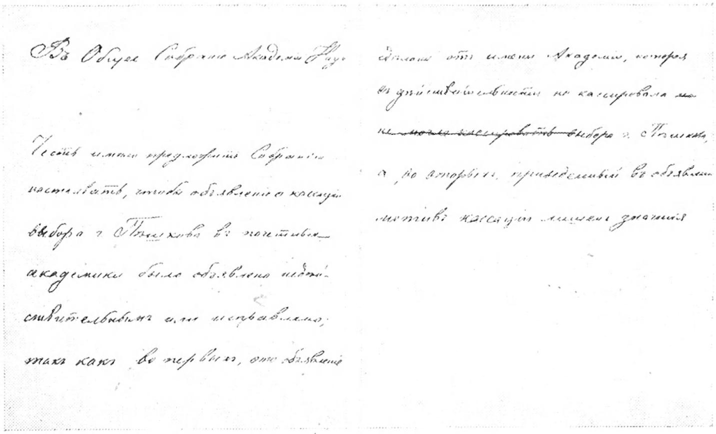
6 апреля 1902 г. А. Марков».

Свое заявление Андрей Андреевич хотел прочитать на заседании Общего собрания, однако президент не допустил этого. Н. Дубровин наложил на заявлении А. А. Маркова резолюцию: «Оставить под протокольными бумагами». Это означало, что заявление не будет опубликовано в протоколах Академии наук. В. Г. Короленко в письме к А. П. Чехову от 10 апреля подчеркивал, что К. Романов «6 апреля, уже по прочтении моего письма, не позволил академику Маркову коснуться в Общем собрании этого вопроса» [II, 92, с. 340].

8 апреля А. А. Марков подал прошение об отставке на имя президента. В связи с предполагаемой отставкой он заявил и об отказе принимать дальнейшее участие в подготовке издания трудов П. Л. Чебышева [57]. Отставка принята не была, и ученый возобновил работу по изданию сочинений своего учителя, это он сделал по просьбе Физико-математического отделения [58] и из-за опасения, что это ответственное дело попадет в другие руки.

Спустя месяц В. А. Стеклов писал А. М. Ляпунову: «Очень понравилось мне Ваше сообщение насчет дела с Горьким! Марков остается неизменно-пречестным человеком. Я убеждаюсь, что мое первое впечатление было не ошибочно,— это, несомненно, человек, достойный всякого уважения... До крайности интересует меня,

[57] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1902, д. 149, л. 142.
[58] Там же, л. 149.



Въ Общее Собраніе Академіи Наукъ

Честь имѣю предложить Собранію настаивать, чтобы объявленіе о кассаціи выбора г. Пешкова въ почетные академики было объявлено недѣйствительнымъ или исправлено, такъ какъ во первыхъ, это объявленіе сдѣлано отъ имени Академіи, которая въ дѣйствительности не кассировала ~~и не могла кассировать~~ выбора г. Пешкова, а во вторыхъ, приведенный въ объявленіи мотивъ кассаціи лишенъ значенія

Письмо А. А. Маркова в Общее собрание Академии наук в связи с кассацией выборов М. Горького, 1902 г.

чем же кончится все дело с Горьким. Если бы побольше было Марковых, то я знал бы, к чему все это приведет, — но много ли среди академиков и хороших людей таких искренно правдивых и на словах и в действии (а это особенно важно), как Марков. Передайте ему, если это будет удобно, мой глубочайший поклон» [59].

В конце 1904 г. царское правительство, напуганное развитием революционной ситуации в стране, вызванной военным поражением России в русско-японской войне, прибегло к маневру, слегка смягчив полицейские ограничения деятельности либералов. В этой обстановке А. А. Марков направил в Академию наук заявление, в котором счел «своим долгом напомнить Общему собранию о беспримерном случае нарушения закона, касающемся почетного академика г. Пешкова, который до сих пор не внесен в академический список и лишен возможности пользоваться правами почетного академика.

Конечно, о кассации выбора г. Пешкова в почетные академики было объявлено в газетах как будто Академией наук, но мы знаем, что это объявление ложно. Подобные объявления могут иметь силу только там, где царит неограниченный произвол, и падают сами собой с устранением последнего». Ученый предложил «внести имя г. Пешкова в список почетных академиков и при-

[59] Там же, ф. 257, оп. 1, д. 55, л. 18—19 об.

гласить его принять участие в жизни Академии согласно закону» [I, 128, с. 606].

Это заявление, написанное 8 января 1905 г., буквально накануне Кровавого воскресенья, также не было допущено к оглашению.

Максим Горький впервые был приглашен на заседание Отделения русского языка и словесности и Разряда изящной словесности лишь 20 марта 1917 г., после победы февральской революции. А в приложении к протоколу Общего собрания Академии от 24 марта 1917 г. по предложению А. А. Маркова разъяснялись обстоятельства и истинные мотивы кассации в 1902 г. выборов великого пролетарского писателя [60].

С кассацией выборов М. Горького в биографии А. А. Маркова связан и такой эпизод. В связи с предполагаемым в 1906 г. чествованием почетного академика А. Ф. Кони (по случаю 40-летия его научной деятельности) А. А. Марков выступил с заявлением, в котором упрекнул А. Ф. Кони в том, что тот, будучи почетным академиком, не поддержал протеста А. П. Чехова и В. Г. Короленко «при возмутительном случае кассации выбора г. Пешкова» [61]. Вице-президент Академии наук П. В. Никитин отказался подписать протокол, содержащий заявление А. А. Маркова, мотивируя это тем, что в нем «употреблено такое выражение, которое, по моему мнению, не должно быть употребляемо в протоколах Академии наук» [62].

Возмущенный действиями вице-президента, А. А. Марков писал 12 октября 1905 г. А. С. Лаппо-Данилевскому: «Сегодня либеральный г. Непременный Секретарь вместе с вице-президентом глубоко возмутили меня настойчивым желанием подвергнуть их цензуре мое заявление, помещенное в корректуре протокола экстра-заседания Общего собрания 28-го сентября. Им желательно, чтобы я не называл возмутительным факт, который возмущает меня не менее их настойчивого желания. Итак, даже академика желают лишить слова. Я надеюсь, что Вы, так или иначе, поддержите принцип неприкосновенности заявлений академиков» [63].

3 декабря на Общем собрании А. А. Марков подчеркнул, что вице-президент создает прецедент для отказа

[60] Там же, ф. 1, оп. 1а — 1917, д. 164, л. 93, 112, 126.
[61] Там же, оп. 1а — 1905, д. 152, л. 110 об.
[62] Там же, л. 134.
[63] Там же, ф. 113, оп. 3, д. 239, л. 1, 2.

от подписи протокола под тем или иным предлогом. «Я, однако,— продолжил ученый,— пока воздерживаюсь следовать соблазнительному примеру вице-президента. Меня удерживает сомнение в том, чтобы член коллегиального учреждения имел право отказаться от подписи протокола заседания, в котором он присутствовал, при условии, конечно, что этот протокол не вымышлен, а составлен согласно с фактами» [64].

Реакционная политика царского правительства, его пренебрежительное отношение к нуждам русской науки и просвещения, полицейский режим, насаждавшийся в высших учебных и научных учреждениях,— все это не могло не вызвать возмущения даже среди людей, пытавшихся оставаться в стороне от политической жизни. В январе 1905 г. в газетах была опубликована «Записка о нуждах просвещения в России» — документ, получивший известность под названием «Записка 342 ученых». Ее подписали 16 академиков, 125 профессоров и адъюнкт-профессоров и 201 доцент, преподаватель и лаборант [II, 93, 94]. Впоследствии под «Запиской...» появилось много новых подписей и общее число их достигло 1500.

А. А. Марков был одним из инициаторов этого документа. Еще 4 марта 1901 г. он писал академику В. И. Ламанскому: «Вчера Вы высказали мысль о подаче прошения на Высочайшее имя. Если Вы не отказываетесь от этой мысли, то прошу помнить, что я со своей стороны готов присоединиться к такому прошению, хотя бы вероятным последствием его были большие неприятности для всех подписавших. Относительно содержания прошения полагаю, что оно не может ограничиться одними временными мерами, об отмене которых следует просить. Но следует просить также об ослаблении гнета, под которым находятся университет и студенты. Если прошение будет иметь и более широкую задачу, то и тогда я готов к нему присоединиться» [65].

Заботясь о нуждах просвещения в России, А. А. Марков обращался за поддержкой к своим коллегам, в том числе и не входящим в Физико-математическое отделение. В его письме к академику А. С. Лаппо-Данилевскому читаем: «Относительно записки об Унив[ерситете] я очень боюсь, что ее никогда не будет. Разговари-

---

[64] Там же, ф. 1, оп. 1а — 1905, д. 152, л. 138 об., 139.
[65] Там же, ф. 35, оп. 1, д. 911, л. 1, 2.

вали ли Вы с кем-нибудь из академиков об этом предмете? 4-го марта я говорил с А. С. Фам[инцыным] о § 8 Устава Академии (Акад. может входить во все касающееся до просвещения), и он заявил мне, что уже давно думает воспользоваться этим пунктом Устава.

Когда же я обращал внимание других академиков на тот же пункт, то они находили, что нельзя ничего сделать. В этом заключается, как я полагаю, мнение большинства. Впрочем, А. С. [Фаминцын] тоже находил момент неудобным для вмешательства Акад.; а удобного момента никогда не будет. Затем в заседании нашего отделения А. С. [Фаминцын] сделал нападение на деятельность Н. Я. [Сонина] как попечителя, ссылаясь на § 61. Цель этого нападения для меня осталась неясною, и я понял только одно, что А. С. [Фаминцын] лишил себя возможности выступать вновь с какими-нибудь предложениями по вопросу о просвещении в России.

В данном случае можно надеяться только на Ваше отделение (II), и то я сомневаюсь, найдете ли Вы там достаточное число лиц, которые решатся выступить. Пока все ограничивается желанием отдельных лиц, которые даже не выяснили друг другу, чего они хотят. Следовало бы собраться и обсудить, как помочь просвещению России, находящемуся в большой опасности» [66].

Призыв о помощи отечественному просвещению, страстный протест против самодержавия содержала и каждая строка «Записки 342 ученых», причем «между строк» можно было усмотреть и призыв к свержению существующего строя:

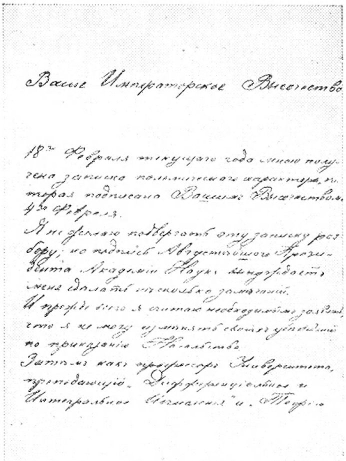
«В знаменательный момент общественного подъема, переживаемого нашей родиной, мы, деятели ученых и высших учебных заведений Петербурга и других городов, не можем не остановить своего внимания на тяжелом положении нашей школы и на тех условиях, в которых ей приходится действовать.

С глубокой скорбью каждый из нас вынужден признать, что народное просвещение в России находится в самом жалком положении, совсем не отвечающем ни насущным потребностям нашей Родины, ни ее достоинству...»

В «Записке...» говорилось о тяжелом положении школы начальной, средней и высшей, указывалось, что

---

[66] Там же, л. 3—5. Документ без даты.



Ваше Императорское Высочество

18го Февраля текущаго года мною получена записка политическаго характера, которая подписана Вашимъ Высочествомъ 4го Февраля.
Я не желаю подвергать эту записку разбору; но подпись Августейшаго Президента Академии Наукъ побуждаетъ меня сделать несколько замечаний.
И прежде всего я считаю необходимымъ заявить, что я не могу изменять своихъ убеждений по приказанию Начальства.
Затемъ какъ профессоръ Университета, преподающий Дифференциальное и Интегральное Исчисление и Теорию

Письмо А. А. Маркова президенту Академии наук в связи с «Запиской 342 ученых», 1905 г.

политика правительства в области народного просвещения задерживает духовный рост народа, что необходимо полное и коренное преобразование государственного строя. Отмечалось тяжелое положение преподавателей высшей школы и указывалось на их падающий научный и нравственный авторитет. В заключение подчеркивалось: «Тяжелые испытания, переживаемые нашей родиной, с полной ясностью для всех показывают, в какую крайнюю опасность ввергается народ, лишенный просвещения и элементарной законности».

На «Записку...» обратил особое внимание президент Академии наук. В своем циркулярном письме, разосланном 4 февраля всем осмелившимся иметь собственное суждение академикам, К. К. Романов упрекнул их в том, что они занимаются не своим делом, вместо того, чтобы, «повинуясь закону, обратить исключительное внимание на служение науке и стремиться к усовершенствованию способов преподавания». И наконец, академикам было брошено обвинение в том, что, выступая против правительства, они в то же время не отказываются получать от порицаемого ими правительства казенное содержание.

Великий князь приравнивал ученых к чиновникам, забывшим свой долг — безропотно служить начальству [II, 95].

Академики нашли слова и действия, чтобы достойно ответить на окрик августейшего начальника. Одним из первых полученных президентом ответов было краткое и решительное письмо А. А. Маркова от 22 февраля 1905 г. «Прежде всего считаю необходимым заявить, — писал А. А. Марков, — что я не могу изменять своих убеждений по приказанию начальства. Затем, как профессор университета, преподающий дифференциальное и интегральное исчисление и теорию вероятностей, я покорнейше прошу Ваше Высочество обратить благосклонное внимание на то, что высшие учебные заведения вообще не находятся в ведении президента Академии наук и что о способах преподавания того или другого предмета могут судить правильным образом только лица, вполне владеющие этим предметом. Наконец, усматривая в записке предложение выйти в отставку, честь имею доложить Вашему Императорскому Высочеству, что я немедленно оставлю Академию, как только Общее собрание признает мое пребывание в ней излишним» [67].

Ответы других академиков были более пространны, но также решительны и резки. Никто из академиков своей подписи не снял и виновным себя не признал. А. А. Марков же вскоре снова выступил против царского самодержавия. В письме к академику А. А. Шахматову от 19 марта 1905 г. он прямо говорит о необходимости «ограничения самодержавия... и даже полного его устранения» [68].

6 марта 1913 г. на заседании Госсовета, несмотря на возражения членов Госсовета С. Ф. Ольденбурга и М. М. Ковалевского, большинством голосов был принят запрос к Министерству народного просвещения с предложением не допускать к внеклассному чтению в начальных училищах учебного руководства по русскому языку «Новь» Н. В. Тулупова и П. М. Шестакова [69].

Авторы запроса посчитали, что книга недостаточно патриотична, в ней слишком лаконично рассказывается о победах русского оружия, в то время как, по их мнению, «надлежит выставлять определенно и ярко светлые стороны исторической жизни народа и не останавливаться на темных ее сторонах» [70].

Этот, казалось бы, столь далекий от его научных интересов эпизод не оставил А. А. Маркова равнодушным.

На следующий день, 7 марта 1913 г., он подготовил проект письма Н. Я. Сонину, который направил А. В. Стеклову [71]:

---

[67] ЛО ААН, ф. 6, оп. 1, д. 26, л. 119, 119 об.

[68] Там же, ф. 134, оп. 3, д. 919, л. 1, 2.

[69] Тулупов Н. В. и Шестаков П. М. — известные русские педагоги. В 1912 г. под их общей редакцией в Москве вышла «Практическая школьная энциклопедия», проникнутая идеями трудовой школы.

[70] ЦГИА, ф. 1148, оп. 12, д. 355, л. 13, 14 об., 15, 93.

[71] ЛО ААН, ф. 162, оп. 2, д. 265, л. 42—44. Дата определена по почтовому штемпелю.

«Многоуважаемый Н[иколай] Я[ковлевич]!

Заседание Г[осударственного] С[овета] 6-го марта вызывает справедливые опасения за судьбу просвещения в России, которое до сих пор находится в плачевном состоянии. В Г[осударственном] С[овете] обнаружилось и взяло верх течение, согласно которому невежество составляет единственное спасение Русского государства. Сейчас это течение дошло до Ученого Комитета [72], от которого Г[осударственный] С[овет] требует, чтобы он одобрял только книги, согласованные во всей полноте со взглядами партии, враждебной просвещению.

Конечно, это течение грозит распространению просвещения в России во всех его проявлениях. Мы, Ваши товарищи по Академии наук, которая, согласно Уставу, имеет попечение о распространении просвещения вообще и о направлении оного ко благу общему, не можем оставаться равнодушными к такому факту. Мы просим Вас не поддаваться этому гибельному для России течению, в борьбе с которым Вы всегда можете рассчитывать на наше сочувствие и поддержку».

В 1911 г. Министерство народного просвещения, возглавляемое Л. А. Кассо, учинило разгром Московского университета. Реакция перешла в наступление уже в первые дни 1911 г. [II, 96, с. 160—162]. 3 января был опубликован правительственный циркуляр «О надзоре за учащимися высших учебных заведений», который стал началом открытого курса правительства на окончательное уничтожение остатков демократических свобод в университете. На следующей неделе появился циркуляр «О временном недопущении публичных и частных студенческих заведений», который запрещал проведение студенческих собраний, а ректорам одновременно вменялось в обязанность препятствовать проникновению в университет «посторонних лиц» и сообщать в полицию о предполагаемых сходках.

Но и этого жандармам от науки, видимо, показалось мало. 28 января последовал циркуляр «О максимальном сроке пребывания студентов императорских университетов на факультете», который регламентировал время нахождения учащихся в учебных аудиториях. В тот же день ректор Московского университета

---

[72] Н. Я. Сонин с июня 1901 г. до конца своей жизни был председателем Ученого комитета Министерства народного просвещения и членом Совета при министре просвещения.

А. А. Мануйлов собрал экстренное заседание Совета, на котором объявил о своей отставке. Вместе с ним подали в отставку проректор и помощник ректора. Таким образом либеральная профессура протестовала против политики правительства в области высшей школы.

В ответ на заявление выборной университетской администрации об отставке министерство уволило ректора, проректора и помощника ректора не только с административных постов, но и вообще из университета [II, 97, с. 540]. Это было вопиющим проявлением произвола и прямым нарушением даже тех жалких остатков университетской автономии, которые еще формально сохранились после всех сенатских «разъяснений» и министерских циркуляров.

31 января группа студентов социал-демократов обратилась к учащимся с воззванием, в котором призывала к участию во всероссийской забастовке в течение всего весеннего семестра. Желая сорвать забастовку, правительство распорядилось ввести в университет полицейские силы. В помещении университета было установлено постоянное дежурство наряда полиции. В ответ на студенческие волнения власти исключили из университета в течение трех недель более тысячи студентов [II, 97, с. 543].

7 февраля Общее собрание приват-доцентов приняло решение о коллективной подаче в отставку. Вскоре в знак протеста университет покинули 130 профессоров и преподавателей, в том числе и такие крупные ученые, как П. Н. Лебедев, К. А. Тимирязев, Н. Д. Зелинский, С. А. Чаплыгин, Н. А. Умов, В. И. Вернадский.

А. А. Марков и на этот раз выступил с протестом. В начале февраля он писал непременному секретарю Академии наук С. Ф. Ольденбургу: «При таких условиях Академия наук не имеет, по моему мнению, даже права оставаться безучастной к факту разгрома Московского университета. Мне кажется, что Академии наук следовало бы возбудить немедленное ходатайство о возвращении в Московский университет уволенных профессоров... Обращая Ваше внимание на этот вопрос, я покорнейше прошу Вас выяснить, может ли он быть обсужден в ближайшем Общем собрании» [73].

С. Ф. Ольденбург препроводил письмо А. А. Маркова президенту. Константин Романов сделал все, что-

[73] ЛО ААН, ф. 1, оп. 2, д. 63, л. 3.

бы голос неутомимого А. А. Маркова в защиту поруганной науки не получил откликов в Академии [74].

В декабря 1912 г. на заседании Физико-математического отделения Академии предстояло избрать комиссию для участия в праздновании 300-летия дома Романовых. В протоколе заседания от 5 декабря 1912 г. читаем: «Академик А. А. Марков заявил, что он не находит возможным участвовать в юбилее, а потому от баллотировки устраняется» [75]. Более того, в противовес лакейски верноподданническому юбилею, проводимому за четыре года до позорного краха царского самодержавия, он организует научный юбилей — празднование 200-летия математического закона больших чисел.

12 января 1913 г. А. А. Марков на Общем собрании выступил с предложением ознаменовать 200-летний юбилей закона больших чисел торжественным заседанием. Его идею поддержали академики К. Г. Залеман, И. И. Янжул, А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов, которые и образовали вместе с А. А. Марковым юбилейную комиссию [76]. 22 января (4 февраля) газета «Речь» поместила следующее обращение:

«Представителям науки и ее почитателям.

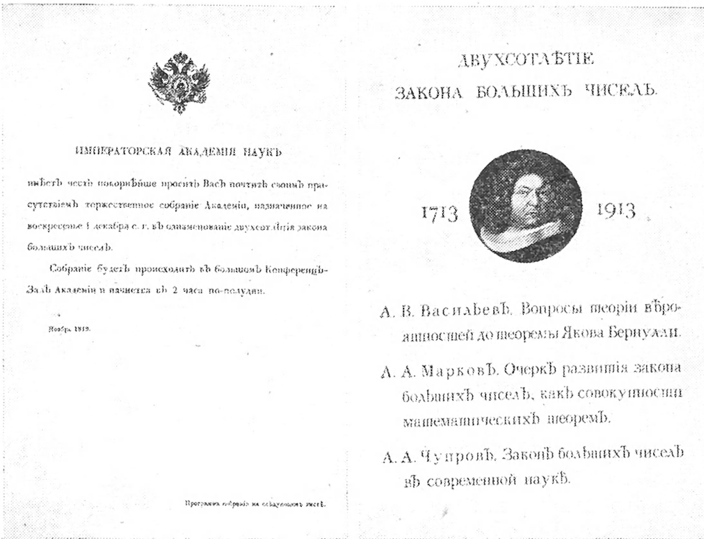
В 1713 г. появилось в свет посмертное сочинение Якоба Бернулли «Ars conjectandi», где впервые установлена его знаменитая теорема, развившаяся впоследствии в закон больших чисел. Теорема эта непосредственно относится к математике и специально к теории вероятностей; но она встречает и должна встречать, как заметил сам Якоб Бернулли, многочисленные приложения во всех науках и вопросах практики, где приходится пользоваться статистическими приемами. Полагая, что следует, так или иначе, торжественно ознаменовать этот 200-летний юбилей, обращаюсь ко всем сочувствующим этой идее с предложением помочь мне в осуществлении ее.

Академик А. Марков» [II, 98].

Андрей Андреевич написал предисловие к изданному Академией наук русскому переводу сочинения Якоба Бернулли, опубликованному в 1713 г., в котором доказана его знаменитая теорема, положившая начало закону больших чисел [I, 99].

---

[74] Там же, оп. 1а — 1911, д. 158, л. 130.
[75] Там же, оп. 1а — 1912, д. 159, л. 238 об.
[76] Там же, оп. 1а — 1913, д. 160, л. 11, 11 об., 19 об.



ИМПЕРАТОРСКАЯ АКАДЕМІЯ НАУКЪ

имѣетъ честь покорнѣйше просить Васъ почтить своимъ присутствіемъ торжественное собраніе Академіи, назначенное на воскресенье 1 декабря с. г. въ ознаменованіе двухсотлѣтія закона большихъ чиселъ.

Собраніе будетъ происходить въ большомъ Конференцъ-Залѣ Академіи и начнется въ 2 часа по-полудни.

Ноябрь 1913.

Программа собранія на слѣдующемъ листѣ.

ДВУХСОТЛѢТІЕ

ЗАКОНА БОЛЬШИХЪ ЧИСЕЛЪ.

1713 1913

А. В. Васильевъ. Вопросы теоріи вѣроятностей до теоремы Якова Бернулли.

А. А. Марковъ. Очеркъ развитія закона большихъ чиселъ, какъ совокупности математическихъ теоремъ.

А. А. Чупровъ. Законъ большихъ чиселъ въ современной наукѣ.

Объявление о праздновании 200-летия закона больших чисел

Торжественное заседание Академии наук, посвященное 200-летию закона больших чисел, состоялось 1 декабря 1913 г. Первым выступил А. В. Васильев с докладом «Вопросы теории вероятностей до теоремы Якоба Бернулли». Затем состоялось выступление А. А. Маркова. Его доклад «Очерк развития закона больших чисел как совокупности математических теорем» привлек всеобщее внимание. По воспоминаниям академика В. И. Смирнова, желающих попасть на выступление А. А. Маркова оказалось столько, что мест в зале не хватило и многим пришлось слушать ученого, находясь в соседнем помещении. Заседание закрылось сообщением А. А. Чупрова «Закон больших чисел в современной науке».

Как известно, вскоре после начала первой мировой войны президент Академии наук, испугавшись возможного «изъявления Высочайшего неудовольствия», обратился к вице-президенту П. В. Никитину с письмом, в котором напомнил о необходимости рассмотреть вопрос об исключении из членов Академии подданных воюющих с Россией государств [77]. Спустя несколько

[77] ЛО ААН, ф. 36, оп. 1, д. 307, л. 1, 2.

дней, 30 января 1915 г., свое мнение по этому вопросу высказал А. А. Марков. От имени Академии наук он составил проект ответа президенту. В нем, в частности, говорилось: «Сношения Академии наук с ее почетными членами и членами-корреспондентами, состоящими в германском и австрийском подданстве, прерваны войною, и возникает вопрос, не должна ли Академия наук немедленно закрепить это положение как постоянное, т. е. исключить их или считать выбывшими. При решении вопроса Академия может руководствоваться только указаниями прошлого, примерами иностранных академий и своими обязанностями, но ни в каком случае не страхом перед недопустимыми обвинениями в отсутствии патриотизма.

Академия пережила не одну войну, и если бы держалась правила исключать из своих почетных членов подданных воюющих против России держав, то ей пришлось бы применить эту меру к ряду выдающихся ученых: к Лапласу (поч. член 1802—1827), Кювье (1802—1832), Гершелю (1826—1871), Фарадею (1830—1867) и др., что принесло бы ей большой ущерб.

Для настоящего времени важны примеры иностранных академий: Académie des sciences de Paris по поводу войны не исключила немцев из числа своих членов, а Academie der Wissenschaften in Berlin не исключила ни французов, ни русских...

Не нарушая своих обязанностей, Академия не может порвать существующие связи с другими академиями и учеными обществами. А отсюда вытекает невозможность исключения и отдельных ученых. Исключение даже одного лица, не принося никакой пользы для России, ни, в частности, Академии наук, может повлечь за собой неожиданные и нежелательные последствия: прекращение связи с целыми обществами и академиями и неуспех начатых международных научных предприятий. В данном случае вопрос несколько осложняется выступлениями некоторых немецких ученых [78]. Академия не может останавливаться на этих выступлениях,

[78] А. А. Марков имеет в виду «Воззвание к культурному миру», с которым выступили немецкие ученые, художники и писатели и в котором оправдывалось «чистое дело Германии в навязанной ей тяжелой борьбе за существование». Среди подписавших воззвание были химик Вильгельм Оствальд, физик Макс Планк, математик Феликс Клейн. Перевод воззвания на русский язык хранится в ЛО ААН (ф. 306, оп. 1, д. 309, 4 л.).

не делающих чести ученым и объясняемых военным угаром или военным психозом. Окончится война, пройдет и угар. Тогда, и только тогда Академии, быть может, придется признать связь с тем или иным лицом окончательно прерванною, но подобные лица будут представлять тогда редкое исключение»[79].

В те тревожные дни многие русские академики высказались против исключения «немцев», вызвав бешеный вой черносотенной прессы. Досталось и А. А. Маркову. В одном из фельетонов, опубликованных в «Новом времени», писалось: «Корни нашей академической науки — в Германии, а лепестки здесь, в трудах Маркова, поминутно озирающегося на Гейдельберг и „глядящего в корень“. Академические русские труды — это надстройка из пробкового дерева над германским каменным научным цейгаузом; по типу этой надстройки пишутся давно наши научные труды, одобряемые Академией: пустой дом с окнами в Европу сверху, а внизу огромный пыльный подвал с Кантом, Гауссом, Вундтом, Оствальдом, Иерингом[80], Шлиманном[81]. Всякое германское тряпье, в которое когда-либо одевалась немецкая мысль, Академией и академической нашей наукой без конца перетряхивалось и оценивалось гораздо больше, чем одежды русских природных мыслителей» [II, 100].

В конце концов Академия была все же вынуждена исключить почетных членов и членов-корреспондентов, являющихся подданными государств, воюющих с Россией [II, 101].

А. А. Марков деятельно участвовал в работе Академии и в послереволюционное время. В ноябре 1918 г. он избирается представителем Академии в Совет по делам статистики Центрального статистического управления (Москва)[82], а с начала 1920 г. представляет Академию в Петроградском совете по делам статистики[83]. В последние годы жизни А. А. Марков входил в Комитет по делам Главной Российской астрономической обсерватории[84].

В январе 1919 г. по предложению академиков

---

[79] ЛО ААН, ф. 36, оп. 1, д. 307, л. 5, 5 об., 6, 6 об.
[80] Иеринг Г. фон (1818—1892) — немецкий юрист.
[81] Правильно: Шлиман Г. (1822—1890) — немецкий археолог.
[82] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1918, д. 165, л. 208.
[83] Там же, оп. 1а — 1920, д. 168, л. 34
[84] Там же, л. 22; оп. 1а — 1921, д. 169, л. 28.

В. А. Стеклова, А. А. Маркова и А. Н. Крылова Общее собрание Академии наук признало необходимым создать при Академии математический кабинет, включавший в свой состав музей П. Л. Чебышева. В этой связи Андрей Андреевич принес в дар Академии наук свою личную библиотеку и ряд уникальных фотографий [85].

С 1909 г. до последних дней А. А. Марков был членом комиссии [86] по изучению научного наследия Л. Эйлера и изданию его сочинений, образованной при Общем собрании [II, 102, с. 6]. 1 апреля 1922 г. он в последний раз присутствовал на заседании Общего собрания Академии наук [87].

31 мая 1922 г. на заседании Физико-математического отделения было зачитано заявление Андрея Андреевича, который был уже неизлечимо болен. В нем ученый просил членов отделения выяснить судьбу его заметки «Об эллипсоидах рассеяния и корреляции», представленной отделением для «Известий» в мае 1921 г. «Я опасаюсь,— указывал А. А. Марков,— не пропала ли она, хотя за все время моего пребывания в Академии я не слыхал о подобном случае. Мое опасение основано на том, что набраны уже мои заметки 1920 г. и 1922 г., а эта не набрана и в типографии не находится... Восстановить по всей точности эту заметку для меня невозможно; но если она действительно потеряна, надо узнать об этом поскорее, чтобы я мог воспроизвести ее, пока жив и не ослеп» [88].

Жить ему оставалось 50 дней. Работа, о которой Андрей Андреевич проявлял беспокойство в последние дни, увидела свет уже после его смерти [I, 122].

Глава 4

Ученый-гражданин

В предыдущих главах, посвященных деятельности А. А. Маркова в университете и Академии наук, мы отмечали его гражданственность, неукротимое стремление к правде и справедливости. Теперь остановимся на фактах биографии ученого, которые прямо не связа-

[85] Там же, оп. 1а — 1919, д. 167, л. 12, 143, 144.
[86] Там же, оп. 1а — 1909, д. 156, л. 45 об.
[87] Там же, оп. 1а — 1922, д. 171, л. 23.
[88] Там же, л. 68—69.

ны с его профессией, но также свидетельствуют о его неиссякаемой смелости и высокой принципиальности.

Вспоминая отца, А. А. Марков-сын писал: «Это был человек открытый, прямой и смелый, никогда не изменявший своим убеждениям, всю жизнь яростно боровшийся со всем, что считал глупым и вредным» [I, 128, с. 604]. Его гражданское мужество было очень стойким: он не считался ни с лицами, против которых выступал, ни с последствиями, которые его высказывания могли иметь для него самого. Когда ему однажды возразили, что его предложение идет вразрез с «высочайшим постановлением», он во всеуслышание сказал: «Я вам дело говорю, а вы мне — высочайшее постановление!»

Как-то петербургский городской голова приветствовал «от имени всех жителей Санкт-Петербурга» приехавшую в столицу государыню — императрицу Александру Феодоровну. Текст приветствия был напечатан в газетах. А. А. Марков послал в редакцию опровержение, в котором просил сообщить, что он, Андрей Андреевич Марков, вовсе не уполномочивал городского голову приветствовать императрицу от его имени [1].

Привлекает внимание и заявление А. А. Маркова от 23 марта 1903 г.:

«В Правление Академии наук.

Ввиду присланного мне, по определению Правления, уведомления о порядке производства вычета за ордена, честь имею покорнейше просить Правление принять во внимание, что я никаких орденов не прошу и не желаю получать.

А. Марков» [I, 128, с. 606—607].

Суть заявления состояла, конечно, не в том, что Андрей Андреевич не хотел платить взимавшиеся тогда у орденоносцев налоги, а в его отказе от дальнейшего получения орденов от царского правительства. Ранее академик А. А. Марков был «всемилостивейше пожалован» орденами Св. Станислава 3-й степени (1887 г.), Св. Анны 3-й степени (1890 г.) и Св. Станислава 2-й степени (1895 г.) [2]. Он воспользовался представившимся поводом, чтобы заявить о своем пренебрежительном отношении к орденам имевшимся. Об отказе А. А. Мар-

---

[1] Из воспоминаний А. А. Маркова-сына.— Архив автора.
[2] ЦГИА, ф. 740, оп. 21, д. 622, л. 10.

кова получать ордена упоминается и в письме П. Никитина президенту Академии от 10 сентября 1903 г. Препровождая наградной список, вице-президент дает объяснение отсутствию в нем имени А. А. Маркова: «Академик А. А. Марков при одном случае заявил Правлению, что не желает быть представляем к награждению орденами» [3].

Андрей Андреевич живо откликался на все важные общественно-политические события. В русско-японской войне 1904—1905 гг. царская Россия потерпела тяжелое поражение. Петербургская газета «Новое время» в номере от 6 декабря 1904 г., когда контуры окончательной военной неудачи были уже вполне обозначены, поместила «Военные заметки» своего обозревателя. Он, в частности, писал: «Кто же виноват в том, что до настоящего времени японцы были сильнее нас на театре войны и они делали то, что хотели, а не мы? Ответ напрашивается сам собою: все мы виноваты и теперь лишь пожинаем плоды посеянного нами; в силу этого вопрос о виновности надо совершенно отодвинуть в сторону как праздное препирательство» [II, 103].

На следующий день Андрей Андреевич послал письмо издателю беспринципной газеты А. С. Суворину: «В № 10334 (6-го дек.) Вашей газеты неудачная война с Японией поставлена в вину всем,— писал ученый.— Такое обвинение всем представляет, с одной стороны, клевету, а с другой — попытку скрыть настоящих виновных. К счастью, клевета нелепа и должна быть рассматриваема как глумление над всеми, и в особенности над читателями, которых газета старается обморочить. Для опровержения ее достаточно заметить, что в России нет ни республики, ни конституции, а только неограниченный деспотизм» [4]. Понятно, кого имел в виду А. А. Марков под «истинными виновными». Свою антиправительственную позицию он еще более активизировал в годы первой русской революции.

В начале ноября 1905 г. сначала в Москве, а затем в Петербурге была основана контрреволюционная партия крупных помещиков и торгово-промышленной буржуазии, получившая название «Союз 17 октября» от «конституционного» царского манифеста 17 октября 1905 г. „Октябристы“ в целом поддерживали велико-

---

[3] ЛО ААН, ф. 6, оп. 1, д. 23, л. 14.
[4] ЦГАЛИ, ф. 459, оп. 1, д. 2542, л. 2, 2 об., 3,3 об.

державно-шовинистическую политику царского правительства с его политическими свободами в рамках манифеста 17 октября.

А. А. Марков решительно выступил против программы этой организации. 22 декабря 1906 г. он писал в ответ на одно из воззваний «октябристов»:

«Ответ „Союзу 17-го октября“.

Сегодня получил я ваше воззвание, на которое считаю необходимым ответить гласно.

Во-первых, я не разделяю взглядов „Союза“ на выборгское воззвание [5] и на первую Думу, деятельность которой была парализована правительством».

Во-вторых, „Союз“ в своем воззвании упоминает о „темных силах реакции, стоящий у престола“, но не указывает никаких средств для борьбы с этими силами. Впрочем, судя по воззванию, я полагаю, что средством борьбы с этими „темными силами“ „Союз“ считает подбор такой „деловой“ Думы, которая вполне подчинялась бы им, как добрый раб, „не только за страх, но и за совесть“ и таким образом избегла бы роковой судьбы первой Думы.

Наконец, меня крайне удивляет, что „Союз“ продолжает называться „Союзом 17-го октября“, хотя он мирится со всеми нарушениями манифеста 17-го октября, исходящими, конечно, не от «революционеров». Правильнее было бы называться „Союзом последнего манифеста“ [6] (такое название мне приходилось уже слышать) или, быть может, еще лучше «Союзом добрых рабов».

Просто русский

академик А. Марков» [7].

Чуть раньше партии октябристов в Петербурге возникла черносотенная организация «Союз русского народа». В нем для борьбы с революцией объединились реакционные представители мелкой городской буржуазии, помещиков, духовенства, некоторой части интел-

---

[5] Обращение группы депутатов I Государственной думы (кадетов, трудовиков, социал-демократов), принятое в Выборге 10 июля 1906 г. в ответ на решение царя о роспуске Думы. Выборгское воззвание содержало призыв к пассивному сопротивлению.

[6] Имеется в виду царский манифест 9 июля 1906 г. о роспуске I Государственной думы.

[7] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 60, л. 36, 37.

лигенции, малосознательных рабочих и крестьян. «Союзу» покровительствовал Николай II.

Против действий «союзников» активно выступали передовые слои населения, в том числе революционно настроенное студенчество.

19 марта 1907 г. первокурсники Военно-медицинской академии изгнали из аудитории нескольких членов «Союза русского народа». Первокурсников поддержали студенты старших курсов. В резолюции студенческой сходки говорилось: «Признавая, что в стенах учебного заведения не должно быть места лицам, принадлежащим к союзам погромщиков и палачей, считая позором и осквернением студенчества, когда его именем прикрываются агенты охранного отделения и черной сотни, мы, студенты Военно-медицинской академии, поддерживаем требование студентов первого курса и заявляем, что не потерпим в своей среде ни членов „Союза русского народа", ни агентов сыска и впредь будем защищать Академию от таких элементов всеми имеющимися у нас средствами вплоть до активного бойкота» [II, 104].

Нужно сказать, что студенты Военно-медицинской академии, быть может, более, чем учащиеся других учебных заведений, испытывали на себе гнет самодержавия. Студентов — военных медиков по одному подозрению в сочувствии революционному движению сдавали в солдаты, отправляли в ссылку, заключали в тюрьмы. Не случайно поэтому студенты академии объявили «союзникам» столь активный бойкот.

В этой острейшей ситуации академик А. А. Марков публично заявил о своей поддержке действий студентов. 27 марта студенты-первокурсники Военно-медицинской академии на своей сходке выразили ему свою благодарность [II, 105].

Смелая позиция академика буквально взбесила черносотенцев. Их главарь председатель «Союза русского народа» В. Грингмут 23 марта 1907 г. направил вице-президенту Академии наук П. Никитину лицемерный протест относительно поддержки А. А. Марковым студентов Военно-медицинской академии и его осуждения действий «Союза русского народа» [8]. В полученном затем вице-президентом письме «союзники» настоятельно требовали изгнания А. А. Маркова из Академии наук [9].

[8] ЛО ААН, ф. 6, оп. 1, д. 29, л. 21, 21 об.
[9] Там же, л. 22.

Черный стан и в дальнейшем не оставлял А. А. Маркова в покое. Однако реакционерам не удалось добиться своей цели: ученый-гражданин продолжал выступать против мракобесия и черносотенства.

3 июня 1907 г. царское правительство разогнало неугодную ему II Государственную думу и издало новый закон о выборах в III Думу. Этот акт произвола вызвал глубокое возмущение А. А. Маркова. 11 июня 1907 г. он писал в Правление Академии наук: «Ввиду того, что созыв III Государственной думы соединен с нарушением закона и потому она не будет собранием народных представителей, а каким-то незаконным сборищем, честь имею покорнейше просить Правление не вносить мое имя в списки избирателей» [I, 128, с. 607]. В письме в газету «Товарищ» Андрей Андреевич Марков протестовал против обвинений двух первых Государственных дум, что «может только содействовать продлению того состояния России, которое в воззвании неизвестных определено словами „Позор и разорение“» [II, 106].

Молчаливое соглашательство с начальством, нарушающим закон, А. А. Марков считал чуть ли не соучастием в преступлении. В одном из номеров газеты «Товарищ» за 1907 г. было опубликовано следующее письмо:

«М.г.г. Редактор!

Позвольте мне через посредство вашей уважаемой газеты обратиться к г. юристам с просьбою выяснить один важный для меня вопрос.

Положим, что кто-нибудь, не боящийся ответственности, нарушил закон, а я действую согласно этому нарушению; не являюсь ли я в таком случае участником преступления, хотя бы я его и не восхвалял. Для примера приведу небывалый случай, что ректор университета, с согласия высшего начальства, стал приглашать в Совет только ординарных профессоров или какую-нибудь другую группу профессоров. Участник такого Совета, знающий о его незаконности, не подлежит ли ответственности вместе с ректором?

Весьма возможно, что мой вопрос покажется юристам слишком простым, особенно ввиду приведенного мною примера. Но я покорнейше прошу их обсудить вопрос, и по возможности полнее, принимая во внимание и другие более сложные примеры. Повторяю, что для меня, а может быть и для других, указанный вопрос имеет весьма важное значение.

Академик А. Марков» [II, 62].

Смелая позиция академика А. А. Маркова и на этот раз вызвала неудовольствие властей. Показательно в этом отношении письмо П. В. Никитина президенту Академии наук от 12 июня 1907 г. Он сообщал о своей беседе с министром просвещения. «Прежде чем я начал доклад об этом деле,— писал П. В. Никитин,— министр заговорил о другом, гораздо более неприятном. Как он слышал, в какой-то мне неизвестной газете (кажется, называется «Свободным словом») (имеется в виду заметка А. А. Маркова в газете «Товарищ» [II, 62].— *С. Г.*) Марков напечатал новое письмо такого приблизительно содержания: преступно участвовать в выборах членов Госуд[арственной] думы по новому избирательному закону, потому что самый этот закон есть преступление. Министр, если я верно его понял, находит, что за такое письмо автор должен быть удален со службы. Я не мог отрицать, что между состоянием на правительственной службе и таким отношением к правительству есть непримиримое противоречие... Министр, между прочим, высказал, что по поводу прежнего письма Маркова, подстрекавшего военно-медицинских студентов к беспорядкам, Академия ничего против него не предприняла. Я на это отвечал, что если имеется в виду что-нибудь вроде замечания или выговора, то они ни мало не смутили бы человека, обладающего такой болезненной уверенностью в своей всегдашней правоте, что на самое основательное вразумление он отвечал бы: „Эти вещи я отлично и без Вас понимаю“ или что-нибудь в этом роде и гордился бы своим ответом как подвигом» [10].

В своем ответе вице-президенту К. К. Романов, в частности, подчеркнул: «Против академика Маркова на этот раз едва ли можно что-нибудь предпринять. Про заметку его в газете „Русь“ (речь идет о заметке А. А. Маркова в газете „Товарищ“ [II, 62].— *С. Г.*) я слышал; мне говорили, что она написана очень искусно, т. е. представляет принципиальный юридический вопрос без какого-либо упоминания о думе и выборах. Другие газеты раскрыли ее истинный смысл и разъяснили предмет запроса. Но Марков за эти разъяснения не ответствен: по закону он неуязвим» [11].

---

[10] ЛО ААН, ф. 6, оп. 1, д. 29, л. 44 об., 45.
[11] Там же, л. 47.

Когда 7 ноября 1907 г. в Академии обсуждался вопрос о возможности отделения от нее Главной физической обсерватории, А. А. Марков воспользовался этим случаем, что бы еще раз выразить свой протест против действий самодержавия, связанных с разгоном II Думы. «Хотя вопрос об отделении в хозяйственном отношении Физической обсерватории от Академии наук возник по моему предложению,— заявил он,— я в настоящее время нахожу невозможным участвовать в обсуждении его, как и всех вопросов, поднятых в последнее время в Академии паук и связанных с законодательной деятельностью. Я считаю по меньшей мере излишним заниматься такими вопросами по той причине, что они не могут получить окончательного законного решения, так как нет Государственной думы, без одобрения которой ни один закон не может получить силы» [12].

В 1908 г. общественный резонанс вызвало разоблачение деятельности провокатора Азефа, бывшего организатором нескольких политических убийств. Делу Азефа много внимания уделяла пресса, в том числе и орган партии кадетов газета «Речь», бывшая в то время популярной в среде либерально настроенной буржуазии. После разоблачения Е. Ф. Азефа А. А. Марков писал в газету «Речь» 25 января 1909 г.: «...Конечно, дело Азефа привлекает к себе особое внимание, благодаря продолжительности деятельности Азефа и осуществлению некоторых из подготовленных им убийств. Но эти самые обстоятельства делают возможным при обсуждении дела Азефа отнести многое к давно прошедшим временам и затушевать главный вопрос, о недопустимости такого положения, при котором агенты правительства организуют заговоры и подают мысль о возможности их осуществления» [13].

Многое отравляло настроение А. А. Маркову. Порой даже случайные факты. Например, надо же было случиться, что однофамильцем его был Марков 2-й [14] — член ЦК «Союза русского народа», к которому, как мы

---

[12] ЛО ААН, ф. 1а — 1907, д. 154, л. 195.
[13] ЦГАЛИ, ф. 1666, оп. 1, д. 1822, л. 4, 5.
[14] Марков Н. Е. (Марков 2-й) — крупный помещик, реакционер и монархист. Член ЦК «Союза русского народа», позднее активный деятель «Союза Михаила Архангела»; будучи лидером крайних правых в III и IV Государственных думах, выступал с погромно-шовинистическими речами.

уже могли убедиться, академик А. А. Марков относился с нескрываемым презрением. В марте 1910 г. Андрей Андреевич обратился с письмом в редакцию газеты «Речь»: «Покорнейше прошу уважаемую редакцию дать место в газете „Речь" прилагаемому письму. Должен заметить, что выражение „Марков" меня крайне возмущает. Если оно будет повторяться, то, к моему прискорбию, я вынужден буду отказаться от писем в газету „Речь". Льщу себя надеждою, что обе мои просьбы будут исполнены. С совершенным почтением А. Марков» [15].

Неудивительно, что многие письма А. А. Маркова в газету «Речь» не были опубликованы. Возможно, их не пропустила цензура, а может быть, не приняла кичившаяся своим либерализмом редакция. На «факт замалчивания» указывал и сам академик. В одном из его писем читаем: «Месяц тому назад я просил члена 3-й Государственной думы, носящего, к моему глубокому прискорбию, одинаковую со мной фамилию, присоединить к его фамилии какое-нибудь добавочное слово, соответствующее его деятельности. Конечно, я не рассчитывал, что моя просьба будет исполнена, но я надеялся, что мое письмо, помещенное в «Речи», будет принято во внимание уважаемыми мною органами печати и что они сами сделают надлежащее добавление к фамилии члена 3-й Думы и, во всяком случае, перестанут употреблять множественное число там, где необходимо единственное. Однако моя надежда не оправдалась: сегодня, например, мне пришлось в «Речи» прочесть «если Марковы являются паладинами [16] честности». Поэтому я вынужден обратиться ко всем органам печати, за исключением презираемых мною, с покорнейшею просьбою принять во внимание мое заявление и избавить меня от излишних огорчений» [17].

В ноябре 1910 г. в столице открылся клуб, назвавшийся «клубом академистов». Несмотря на свое созвучное науке имя, новая организация сразу показала свое лицо, установив контакты с черносотенной организацией «Союз Михаила Архангела». А. А. Марков писал в газету «Речь»:

---

[15] ЦГАЛИ, ф. 1666, оп. 1, д. 1822, л. 6, 6 об.
[16] Паладин — храбрый, доблестный рыцарь.
[17] ЦГАЛИ, ф. 1666, оп. 1, д. 1822, л. 7, 7 об., 8, 8 об.

«Привет клубу академистов.

Вчера открылся новый клуб академистов при обстоятельствах, заставляющих усомниться в правильности присвоенного им имени. На открытии его не было заметно представителей науки, но зато были специалисты по сыску. Однако так как этот клуб называется клубом академистов, то я считаю своим долгом послать его членам пожелания заниматься не политикой и сыском, а наукой. Для этого, конечно, прежде всего необходимо расстаться с г. Пуришкевичем [18] и его единомышленниками, так как наука и Пуришкевич несовместимы. Если же Вы не можете расстаться с Пуришкевичем и его компанией, то не обижайтесь и не удивляйтесь, что Вас будут звать не академистами, а как-нибудь иначе.

15-го ноября 1910 г. Академик А. Марков» [19].

Вскоре ученый обращается с открытым письмом к одному из лидеров националистов депутату Государственной думы В. Шульгину [20]. В нем говорилось: «Письмом в газету „Новое время" (№ 12492) ([II, 107].— *С. Г.*) Вы подтверждаете свое приказание, или совет, студентам, которые называют себя «академистами», ходить в университет вооруженными и в случае надобности стрелять. Исключая предположение, что академисты являются агентами полиции и соответственно этому повинуются не Вашим советам, и предполагая, что слово «академист» должно, по своей идее, означать лицо, которое желает заниматься наукой, нельзя не признать Ваш совет в высшей степени рискованным и нельзя не поражаться, что подобный совет исходит от лица, призванного к законодательной деятельности. Для студента, действительно желающего заниматься наукой, револьвер никакой пользы в университете принести не может, а вред может принести огромный, так как револьвер указывает, как это надо заключить из Вашего совета, что студент как будто должен принимать активное участие во всех университетских волнениях, стараясь подавить их. На самом же деле студент не может и не должен этого делать, пока он не забыл

[18] В. М. Пуришкевич — русский политический деятель, монархист, черносотенец, один из основателей «Союза русского народа», после раскола которого в 1908 г. возглавил «Союз Михаила Архангела».

[19] ЦГАЛИ, ф. 1666, оп. 1, д. 1822, л. 10, 10 об., 11, 11 об.

[20] В. В. Шульгин — русский политический деятель, в 1913 г. разошелся с националистами из-за дела М. Бейлиса.

единственной обязанности, в которой состоит весь смысл пребывания его в университете,— заниматься наукой...

Экзаменовать же подобных револьверных «академистов» совершенно невозможно: научный багаж их не может быть велик, а имея, по Вашему совету, револьверы в кармане, они могут пустить их в ход и помимо Вашего совета. Итак, Милостивый государь, я надеюсь, что Вы сами признаете свой совет необдуманным и вполне согласитесь со мной, что револьверных «академистов» необходимо удалить из университета, равно как и из всех высших учебных заведений» [21].

Особенно ярко и полно гражданское мужество А. А. Маркова проявилось в его протестах против антисемитских выходок властей. 3 сентября 1913 г. А. А. Марков писал В. А. Стеклову: «Здесь д[октор] Нерц огорошил меня задачей, которую будто бы предложил на конкурсном экзамене г. Столяров как «специально еврейскую». Вы были в Харькове и, наверно, знаете все это дело. Если судить по тому, что напечатано в газетах, то действия г. Столярова рисуются в весьма некрасивом виде... В газете, которую мне показал г. Нерц, задача напечатана с опечаткой; но и по исправлении опечатки она представляется мне недопустимой: предложено решить уравнение десятой степени, причем определение одного корня (по догадке) признано недостаточным, что и справедливо» [22].

Дело в том, что экзаменующемуся М. Жовтису было предложено решить уравнение

$$\frac{x^4+5}{x+1}+\sqrt{\frac{2x^3}{x^2+1}}=4x.$$

Когда М. Жовтис указал, что способом Безу есть возможность найти один из корней ($x = 1$), это было признано недостаточным. По окончании экзамена М. Жовтис обратился к экзаменатору с просьбой показать ему полное решение уравнения, но натолкнулся на высокомерный отказ. Это и побудило пострадавшего обратиться в газету [II, 108]. Среди откликов на «Открытое письмо профессору Столярову» М. Жовтиса одной из первых была небольшая заметка профессора П. Шепелева, фактически взявшего Столярова под

[21] ЦГАЛИ, ф. 1666, оп. 1, д. 1822, л. 12—17.
[22] ЛО ААН, ф. 162, оп. 2, д. 265, л. 61—63.

защиту. Шепелев полагал, что от экзаменуемого требовалось нахождение частных корней уравнения?!

Свое мнение об «экзамене Столярова» высказал и А. А. Марков. 10 сентября 1913 г. он послал в харьковскую газету «Южный край» письмо, в котором осудил не только поступок Столярова, но и «Шепелева и директора Техн[ологического] Инст[итута], которые представляются „истинно русскими деятелями"» [23]. В письме, в частности, говорилось: «Недавно и совершенно случайно из „Одесских Новостей" я узнал о случае с г. Жовтисом на экзамене г. Столярова. В настоящее время мне доставлены вырезки из вашей газеты, относящиеся к этому делу, а также точное указание предложенного уравнения; и потому я могу высказать свое суждение, что я считаю необходимым сделать не на страницах математического журнала, а в газете. С математической точки зрения уравнение г. Столярова не представляет интереса, и потому посвящать ему страницы специального математического журнала не стоит; но важно, чтобы мнение компетентных лиц об этом деле получило возможно большее распространение, что и можно сделать только при посредстве газет. В газете же до сих пор напечатаны только письма заинтересованных и неизвестных лиц, и потому остается неясным: кто прав? Конечно, некоторое заключение можно вывести, сопоставляя действия двух сторон: в то время как г. Жовтис стремится к возможно большей гласности, г. Столяров и г. директор Технологического института отмалчиваются, а г. Шепелев ограничивается ничего не стоящей отпиской.

В письме редакции «Одесских Новостей» г. Жовтис спрашивает, кто защитит?

Защитить его против «истинно русских» деятелей я не могу, но вот мое мнение. Предлагать на конкурсном экзамене по элементарной математике решать уравнение 10-й степени нельзя даже в том случае, если бы это уравнение при помощи каких-нибудь специальных условий приводилось к уравнениям первой и второй степени, которыми исключительно занимаются в элементарной математике. Предлагать находить для подобного уравнения частные решения также нельзя, ибо в гимназическом курсе не дается даже правил для разыскания рациональных решений. Можно было только

---

[23] Там же, л. 66.

предложить испробовать, не будет ли данное число корнем уравнения, и затем исключить этот корень; но подобного упражнения г. Жовтису, как видно, не было предложено, а предложено ему было найти все корни. Если бы г. Жовтис не нашел единственного рационального корня — единицы, то он не показал бы этим незнания какого-либо отдела гимназического курса математики. После же выделения корня „единица“ получалось сложное уравнение девятой степени. Заставлять решать это уравнение г. Столяров не имел никакого права. Итак, г. Столяров не экзаменовал г. Жовтиса, а издевался над ним, а г. директор своими объяснениями еще усилил это недопустимое издевательство, что меня глубоко возмущает.

Акад. А. Марков» [II, 109].

В сентябре — октябре 1913 г. царским правительством и черносотенцами в Киеве был организован судебный процесс над приказчиком кирпичного завода евреем М. Бейлисом, клеветнически обвиненным в убийстве русского мальчика А. Ющинского, совершенном якобы в ритуальных целях. При содействии министра юстиции И. Щегловитова действительные убийцы были укрыты от суда. Следствие по делу Бейлиса длилось с 1911 по 1913 г. В условиях начинавшегося в России нового революционного подъема черносотенцы, развернув антисемитскую кампанию, пытались использовать дело Бейлиса для наступления на демократические силы.

С разоблачением лживости обвинений против Бейлиса выступили деятели передовой русской интеллигенции — А. М. Горький, В. Г. Короленко, А. А. Блок, В. И. Вернадский — и общественные деятели зарубежных стран (в частности, А. Франс и др.). За процессом над Бейлисом пристально следил и А. А. Марков. 1 октября 1913 г. он писал В. А. Стеклову: «Относясь несочувственно ко всяким еврейским сектам... я, однако, вижу, что здесь дело идет не о преступлении Бейлиса, а о преступлении русской юстиции, руководимой союзом русских убийц. Каков бы ни был приговор присяжных, русский суд уже сам осудил себя, составив бессмысленный обвинительный акт, где Бейлису отведено самое малое место, а говорится о многом не относящемся к делу» [24].

[24] ЛО ААН, ф. 162, оп. 2, д. 265, л. 88, 88 об.

В те дни А. А. Марков выступил с открытым письмом к лидеру крайне правых в III Государственной думе черносотенцу Замысловскому. Ученый-гражданин обвинял черносотенцев в организации антисемитской кампании. «Несмотря на то,— указывал А. А. Марков,— что никаким судом не установлено, чтобы евреи принимали участие в убийстве Андрюши Юшинского, вы решаетесь публично и настойчиво заявлять, что они его замучили,— писал А. А. Марков лидеру крайне правых в 3-й Думе — черносотенцу Замысловскому. Такая настойчивость заставляет меня указать вам, что об этом убийстве возможно совершенно иное предположение. А именно что оно совершено не «жидами», как Вы выражаетесь, а организациями, осмеливающимися именовать себя истинно русскими, или по их указанию и их поручению.

Не разбирая подробно соображений, на которых можно основывать такое предположение, приведу два пункта.

Во-первых, «союзники» старались сразу захватить в свои руки следствие по делу и провести его сообразно своим интересам, устраняя все, что им противоречило.

Во-вторых, убийство Юшинского, сваленное на «жидов», вполне соответствовало целям «союзников», выражающимся в ваших погромных речах; о том, чтобы «союзники» были разборчивы в средствах для достижения своих целей, едва ли можно говорить. Итак, м. г., смею полагать, что Вы сами признаете высказанное здесь предположение не лишенным основания; хотя едва ли Вы присоединитесь к моему пожеланию скорейшего прекращения деятельности этих „союзников“» [25].

Следствие по делу Бейлиса длилось свыше двух лет. Несмотря на показания лжесвидетелей, а также данные судебно-медицинских лжеэкспертов, присяжные заседатели признали Бейлиса невиновным.

О высокой гражданской принципиальности А. А. Маркова можно говорить много. Особенно ярко эта черта характера ученого проявилась в нашумевшем в свое время деле об его отказе от религии. Как известно, святейший синод в свое время отлучил от православной церкви великого русского писателя Л. Н. Толстого. Так вот, А. А. Марков, стремясь как можно отчетливее показать всю смехотворность этой пахнув-

[25] ЛО ААН, разряд V, оп. 1-М, д. 6, л. 20.

шей средневековьем акции, 12 февраля 1912 г. обратился в синод с просьбой отлучить его от церкви. «Надеюсь,— подчеркивал в прошении академик,— что достаточным основанием для отлучения может служить ссылка на мою книгу „Исчисление вероятностей“, где ясно выражено мое отрицательное отношение к сказаниям, лежащим в основании еврейской и христианской религии. Вот выдержка из этой книги (с. 213—214): «Независимо от математических формул, на которых мы не остановимся, не придавая им большого значения, ясно, что к рассказам о невероятных событиях, будто бы происшедших в давно минувшее время, следует относиться с крайним сомнением. И мы никак не можем согласиться с акад. Буняковским („Основания математической теории вероятностей“, с. 326) [26], что необходимо выделить известный класс рассказов, сомневаться в которых он считает предосудительным. Чтобы не иметь дело с еще более строгими судьями и избежать обвинений в потрясении основ, мы не останавливаемся на этом предмете, не относящемся непосредственно к математике.

Чтобы не оставалось никаких сомнений, о чем идет здесь речь, приведу соответствующую выписку из книги Буняковского: „Некоторые философы, в видах предосудительных, пытались применять формулы, относящиеся к ослаблению вероятности свидетельств и преданий, к верованиям религиозным, и тем поколебать их“ ([II, 110, с. 326].— *С. Г.*).

Если приведенной выдержки недостаточно, то покорнейше прошу принять во внимание, что я не усматриваю существенной разницы между иконами и идолами, которые, конечно, не боги, а их изображения, и не сочувствую всем религиям, которые, подобно православию, поддерживаются огнем и мечом и сами служат им» [I, 128, с. 608—609].

Это заявление А. А. Маркова вызвало переполох в правительственных кругах. Зашумели черносотенные газеты. Петербургский митрополит направил к «заблудшему» академику для «наставления и увещания» «духовного пастыря» — протоиерея Орнатского [27]. Од-

[26] А. А. Марков имел в виду то, что В. Я. Буняковский в своей книге нападал на философов-материалистов и превозносил мистические сочинения католических аббатов.

[27] Письмо протоиерея А. А. Маркову с просьбой о беседе от 4 апреля 1912 г. передано в ЛО ААН.

АКАДЕМИКЪ МАРКОВЪ—ВНѢ РЕЛИГІИ

Заслуженный профессоръ с.-петербургскаго университета академикъ А. А. Марковъ отлученъ отъ церкви по его желанію

Небывалый переполохъ вызвало въ синодѣ ходатайство заслуженнаго профессора спб. университета, ординарнаго академика академіи наукъ, извѣстнаго математика д. с. с. Андрея Андреевича Маркова объ отлученіи его отъ церкви.

Въ своемъ прошеніи, поданномъ въ синодъ, академ. А. А. Марковъ въ корректной формѣ заявляетъ, что онъ въ теченіе 20 лѣтъ на основаніи выводовъ науки и собственныхъ наблюденій пришелъ къ полному атеизму и выработалъ опредѣленный критическій взглядъ на догматы и обязанности всѣхъ церквей и религій.

Поэтому А. А. Марковъ проситъ св. синодъ отлучить его отъ церкви.

Онъ утверждаетъ, что это желаніе не мимолетная прихоть, а продуманная мысль.

Для большей убѣдительности А. А. Марковъ ссылается на рядъ своихъ сочиненій, въ которыхъ онъ проводилъ мысль, безусловно отрицающую церковь и религію.

Св. синодъ переслалъ прошеніе А. А. Маркова въ с.-петербургскую духовную консисторію на усмотрѣніе митрополита с.-петербургскаго и ладожскаго Антонія, по принадлежности епархіи.

Бесѣда съ архіепископомъ Антоніемъ Волынскимъ

По поводу необычайнаго ходатайства академика А. А. Маркова мы бесѣдовали съ виднымъ членомъ св. синода архіепископомъ Антоніемъ Волынскимъ.

— Да, дѣйствительно, ходатайство А. А. Маркова объ отлученіи его отъ церкви въ синодѣ получено и переслано по принадлежности митрополиту с.-петербургскому и ладожскому Антонію—сказалъ намъ владыко Антоній.

По правиламъ церкви, къ А. А. Маркову для увѣщанія былъ посланъ протоіерей Орнатскій.

А. А. Марковъ остался при своемъ мнѣніи. Увѣщанія остались безплодными.

Послѣ этого А. А. Марковъ былъ отлученъ отъ церкви.

Но почему-то все это носило слишкомъ деликатную форму и отпавшему отъ православія не была провозглашена анаѳема.

Вообще подобные случаи отпаденія отъ церкви безъ перехода въ какую-либо другую религію весьма рѣдки.

У насъ на Волыни бываютъ отпаденія въ католичество или штунду. Тамъ отпадавшимъ провозглашается анаѳема при торжественной обстановкѣ.

А. Невскій

Заметка, опубликованная в одной из газет в связи с прошением А. А. Маркова отлучить его от церкви, 1912 г.

нако А. А. Марков написал своему новоявленному пастырю полное достоинства письмо с решительным отказом «от таких бесед, которые не могут принести никакой пользы ни мне, ни моему собеседнику, а могут вести только к напрасной потере времени и к взаимному раздражению» [II, 111, 112]. Ученый заявил протоиерею, что согласен разговаривать с ним лишь о математических вопросах, а это совсем не устраивало священнослужителя. Синоду пришлось удовлетворить прошение А. А. Маркова, в связи с чем производилось забавное расследование того, не был ли он сектантом, был ли он крещен, кем были его родители и т. д.

В метрических книгах Рязанского уезда и г. Рязани имеется указ «из Рязанской Консистории архивариусу оной...»: «По Указу Его Императорского Величества Рязанская Духовная Консистория вследствие отношения Санкт-Петербургской Духовной Консистории от 11 января 1913 года за № 207 предписывает... учинить отметку в метрической книге Вознесенской города Рязани церкви за 1856 г. месяца июня против статьи о рождении сына Андрея Григорьевича и Надежды Петровны Марковых — Андрея Андреевича Маркова — об отпадении последнего от православия, о чем дается сей указ 19 дня 1913 года» [28].

---

[28] Государственный архив Рязанской области, ф. 627, оп. 243, д. 91, л. 20.

В основе отказа А. А. Маркова от религии лежали два мотива: 1) религиозные сказания суть сказки, 2) религия — орудие угнетения в руках эксплуататоров. Характерно, что во всей переписке церковных канцелярий в связи с «делом Маркова», в том числе в официальной мотивировке его отлучения, всюду фигурирует отказ академика от религии из-за признания религиозных сказаний легендами, политический же мотив отказа замалчивается.

Есть основания полагать, что ученый давно замышлял отказ от религии. Выполнил же он свое намерение, как уже говорилось, в качестве акта политического протеста. В 1910 г. умер Л. Н. Толстой. В последние дни его жизни синод через своих агентов усиленно пытался добиться возвращения «блудного сына» в лоно церкви, но безуспешно — великий писатель земли русской умер «непримиримым и непобежденным борцом с официальной церковностью» [29]. На смерть Льва Толстого студенты и рабочие отозвались демонстрациями и забастовками протеста. Студенческие сходки и демонстрации повторялись ежегодно в день его кончины. К этому ряду политических выступлений следует отнести и прошение академика А. А. Маркова об отлучении от церкви.

У сына академика А. А. Маркова хранились десятки вырезок из разных газет с сообщениями о заявлении Андрея Андреевича в синод. 9 мая 1912 г. в большевистской «Правде» было помещено подробное сообщение об этом событии под заголовком «Отказ от религии» [II, 114].

Разумеется, поступок академика был оценен весьма неоднозначно: от восторженного поклонения до предания анафеме. Из писем к А. А. Маркову видно, что далеко не все, даже среди людей дружески расположенных к нему, правильно поняли его смелый шаг. И все же одобрительных писем было больше. В одном из них бывший ученик А. А. Маркова, в то время инженер путей сообщения В. Г. Розенталь писал: «...считаю себя вправе и вместе с тем для себя приятным долгом от всей души поблагодарить Вас за шаг, принятый по отношению к церкви. Ваша жизнь не только состояла в глубоком размышлении об истине,

[29] ЛГИА, ф. 19, св. 1018/34, д. 465, л. 23. Из телеграммы социал-демократической фракции III Государственной думы семье Толстого.

но и в передаче найденных результатов человечеству, т. е. Вашим ученикам, между которыми пока еще не могут преобладать высокие интеллекты. Доказывая нам невероятность нахождения истины в рамках православной, и конечно, и всех других церквей, Вы этим самым высказываетесь за предпочтительность разыскивания ее в совершенно другой плоскости, т. е. в сознании человека. Ваш пример, достойный Вашего предшественника Л. Н. Толстого, не может не ободрить очень многих, как и Вы, асимптотически стремящихся к истине» [30].

Мракобесам не удавалось заглушить голоса А. А. Маркова, деятельность которого питалась глубокими корнями — материалистическим мировоззрением. При этом А. А. Марков был не просто материалистом, а материалистом-бойцом. В своих лекциях, столь, казалось бы, далеких от вопросов общественной жизни, он не упускал случая, чтобы не нанести удар реакционерам от науки. Делал он это и на страницах своих печатных курсов. В борьбе с идейными противниками А. А. Марков бывал беспощаден. Страстный полемический задор, родственное его натуре чувство юмора разили его противников порою не менее сильно, чем его глубокие теоретические возражения.

А. А. Марков уделял большое внимание вопросам преподавания математики в средней школе [II, 115]. В этой связи заслуживает упоминания его заметка, в которой подвергается критическому разбору один из задачников по алгебре [I, 106]. Характеризуя задачник, ученый высказывал отрицательное отношение к существующей системе преподавания математики в средних учебных заведениях. По его мнению, в ее основе лежит предположение о том, что ученики не знают и не понимают того, чему они обучались в предшествующих классах, а также о загромождении курса математики сугубо физическими и физико-техническими задачами. А. А. Маркову была чужда переоценка формальных целей преподавания математики. Например, в связи с разработкой в 1915 г. программ преподавания математики в проектировавшихся средних школах различных типов с преобладанием гуманитарных или

---

[30] Письмо от 8 мая 1912 г. хранилось в семье А. А. Маркова. Передано в ЛО ААН.

естественнонаучных дисциплин А. А. Марков заявил, «что не считает необходимым для всех изучать тригонометрию с тем, чтобы после ее забыть» [31].

В течение ряда лет он вел ожесточенную борьбу против профессора Московского университета П. А. Некрасова [I, 61, 63, 89, 97] и его сподвижников, стремившихся сделать из математики опору православию и самодержавию [II, 117, с. 137—141]. 30 января 1914 г. в петербургской газете «День» было помещено письмо А. А. Маркова к министру, в котором он обращал внимание на поспешное введение теории вероятностей в программу средних учебных заведений без обсуждения этого вопроса специалистами [II, 116]. Ученый энергично протестовал против вредных экспериментов в этой области, в частности таких, которые пытался проводить П. А. Некрасов. Суть этих «нововведений» четко выражена в словах его единомышленника профессора Юрьевского университета В. Г. Алексеева. Он считал, что введением курса теории вероятностей в программу средних учебных заведений «открывается совсем новое мировоззрение в противоположность господствующему материалистическому мировоззрению, которое упрочилось во всех отраслях знаний, незаметно пронизало всю нашу культуру, весь строй нашей жизни вследствие блестящих успехов математического анализа и основанной на нем механики — в приложении последних к явлениям природы» [II, 118].

В 1915 г. П. А. Некрасов совместно с П. С. Флоровым выступил с проектом введения теории вероятностей в курс средней школы. По существу, этот проект сводился к внедрению в умы школьников путаных, лженаучных воззрений его авторов на теорию вероятностей, математическую статистику и математику в целом. Было задумано начать в средней школе преподавание фальсифицированной теории вероятностей с целью «доказательства» библейских сказок и «бытия божьего», укрепления прогнивших основ царского режима. Для реализации своего проекта авторы предполагали ознакомление учеников средней школы со статьей П. А. Некрасова [II, 119], в которой рассказывалось об опытах с картами и с работой П. С. Флорова [II, 120], посвященной вероятности свидетельских показаний.

31 ЛО ААН, ф. 162, оп. 2, д. 266.

А. А. Марков писал по этому поводу: «...в программу введен самый слабый отдел теории вероятностей — о свидетельских показаниях, который с полным основанием можно пропускать; в университетском курсе (в «Теории вероятностей» проф. В. П. Ермакова) этого отдела вовсе нет; в моей книге ему посвящено 5 стр. и на примере показано, что решению задач, сюда относящихся, нельзя придавать большого значения» [I, 108, с. 33].

Об этом же он писал 5 апреля 1908 г. академику А. С. Лаппо-Данилевскому: «Насколько я Вас понял, интересующий Вас вопрос принадлежит к числу тех, на которые нельзя дать определенного ответа, не сделав ряда произвольных допущений и предположений. Отдел о вероятности свидетельских показаний принадлежит к числу самых шатких частей теории вероятностей, даже и в том случае, когда дело идет только о подтверждении или отрицании факта. Более сложных случаев вообще, насколько мне известно, совсем в теории вероятностей не рассматривают» [32].

Ученый был уверен, «что осуществление проекта П. С. Флорова и П. А. Некрасова, хотя бы в виде опыта, в одном, например Урюпинском реальном училище, ничего хорошего средней школе не даст, а только к существующим уже поводам для ошибок и недоразумений присоединит новые» [I, 108].

В июльском номере «Журнала Министерства народного просвещения» была напечатана ответная статья П. А. Некрасова. В ней он предпринял попытку дискредитировать в глазах учителей и учеников средних учебных заведений петербургскую школу математики. По мнению Некрасова, проповедуемая этой школой теория познания «пустила довольно глубокие корни в Петербургских болотах, заволакивающих вредными испарениями действительные светила науки и ее преподавания» [II, 121, с. 15]. Не довольствуясь печатной трибуной, П. А. Некрасов пожаловался на А. А. Маркова в Академию наук.

Полемика продолжалась. В конце концов была учреждена специальная «Комиссия по обсуждению некоторых вопросов, касающихся преподавания математики в средней школе», которую возглавил академик

---

[32] ЛО ААН, ф. 113, оп. 3, д. 239, л. 3, 4.

А. А. Марков [33]. Члены комиссии подвергли представленный проект уничтожающей критике, не оставившей камня на камне от всего некрасовского сооружения [II, 122]. Были прямо осуждены попытки использования математики для «доказательства» «всемогущества божия». «Опыт показал,— отмечалось в решении комиссии,— что все эти поползновения либо рассыпались в прах перед неумолимой строгостью точной науки, либо приводили к результатам, прямо противоположным тем, которых добивались злоупотреблявшие математикой для целей, ей совершенно чуждых. Комиссия полагает, что вышеупомянутые заблуждения и ошибочные толкования основ науки и злоупотребление математикой с предвзятой целью превратить чистую науку в орудие религиозного и политического воздействия на подрастающее поколение, проникнув в жизнь школы, принесут непоправимый вред делу просвещения» [II, 122, с. 79].

Проект П. А. Некрасова и П. С. Флорова не был осуществлен, хотя последний и предпринял некоторые опыты в этом направлении в руководимом им Урюпинском реальном училище. Заметим, что в последние годы жизни П. С. Флоров полностью признал свои ошибки. В письме А. А. Маркову от 1 июня 1918 г. он выразил «искреннюю благодарность за отеческое наставление, прочитанное мне в 1915 г. Оно способствовало исправлению недочетов моего характера и моего отношения к науке» [34].

В те годы единомышленником А. А. Маркова во многих принципиальных вопросах был В. А. Стеклов. Яркое свидетельство тому их переписка, в которой затрагивались не только вопросы их любимой науки. Так, в конце июня 1915 г. А. А. Марков писал В. А. Стеклову из усадьбы Быково (в Тверской губ.): «Хотя Вы и поздно получаете газеты, но что я извлеку из них, конечно, Вы узнаете раньше моего письма. Возможно, что в Алупке Вы о многом знаете даже больше, чем в том углу, куда мы забрались. Хотя наша армия блестяще завлекает неприятеля в глубь России для их окончательного разгрома, но пока мы не находим нужным оставить наш угол и перебраться к Вам... А. В. Васильев пишет, что министры валятся как кег-

[33] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1915, д. 162, л. 243, 244.
[34] Там же, оп. 1а — 1918, д. 162, л. 25, 26.

ли, да и польза от них такая же. После 10—11 месяцев войны Россия наконец оказалась готовой. В Мин[истерстве] нар[одного] просв[ещения], как Вы знаете, идет кипучая деятельность по реформе высшей и средней школы. Сколько будет сказано слов и исписано бумаги, а если будет что-нибудь сделано, то, пожалуй, о старом пожалеешь. Поболтали о приеме женщин в университет, а о том, что для физ.-мат. факультета латинский язык является лишним, никто и не заикнулся. И в то же время кегля — Министр Нар[одного] просв[ещения] ставит вопрос о разделении средней школы на 4 типа: старо-гум[анитарную], неогум[анитарную], реал[ьно]-мат[ематическую], реал[ьно]-ест[ественную], для первого из которых программа по математике ниже минимума» [35].

«Получил недавно большое письмо от К. А. Поссе,— писал В. А. Стеклов 24 июля 1915 г. А. А. Маркову.— Очень взволнован последней статьей П. А. Некрасова, где он отчитывает Петербургское математическое болото, непосредственно Вас и косвенно (дипломатически) и К. А. [Поссе]. Я считаю, что в настоящее время обращать внимание на такого подленького идиота и «трансфинитское ничтожество» [36] не имеет никакого смысла. Дело идет о существовании всего государства, до таких ли тут мелочей, как какой-то Некрасов! Через 12 месяцев заговорили и открыли как неожиданную новость то, что было очевидно еще в октябре месяце и даже раньше. Тогда надо было делать то, что теперь только собираются начать делать и о чем робко начинают лепетать. Легковерие и страусовское малодушие нашего, с позволения сказать, общества меня всегда возмущало до глубины души. Опасение испортить на минуту свое благодушие заставляло большинство убаюкивать себя розовыми мечтами, поддаваться добровольно наглому обману, сознательно развиваемому кучей мародеров и предателей, носящих название «правительства», поддерживать и распространять вместе с ними ложь и обман с единственной целью не испортить своего аппетита и приятного расположения духа! Не одни правители во всем виноваты, но и все слабовольные и слабосильные слюнтяи, составляющие главную массу так называемых руководите-

---

[35] ЛО ААН, ф. 162, оп. 2, д. 266, л. 15—16.

[36] Намек на теоретико-множественные теории московских математиков.

лей общественного мнения и общественных деятелей...»[37].

Сразу же после февральской революции 1917 г. в России определилась группа ученых, стремящихся приблизить науку к народу и усилить ее влияние на жизнь общества. В этом движении, вдохновителем которого был М. Горький, принял горячее участие и А. А. Марков. В марте 1917 г. по предложению М. Горького была организована Свободная ассоциация для развития и распространения положительных наук. Деятельность ассоциации в силу отсутствия средств выражалась главным образом в организации популярных лекций для трудящихся — новое и увлекшее старых академиков дело, ибо это было не «старорежимное меценатство, а искреннее желание распространять положительные знания в народе» [II, 123, с. 328].

10 апреля 1917 г. состоялось организационное собрание Свободной ассоциации. Оно открылось речами М. Горького и академика И. П. Павлова. Затем был обсужден вопрос об учреждении самой ассоциации и определены ее задачи. Участники собрания избрали Организационный комитет из 38 человек. В его состав вошли М. Горький, В. Г. Короленко, Л. Б. Красин, А. Н. Крылов, А. А. Марков, Н. А. Морозов, И. П. Павлов, К. А. Поссе, В. А. Стеклов, Г. А. Тихов и другие деятели науки и культуры.

На первом заседании Ассоциации почетным председателем собрания единогласно был избран академик А. А. Марков. Так, передовая русская интеллигенция отдала дань его мужеству и смелости в период борьбы за свержение самодержавия.

Глава 5

Семья. Любимый досуг. Последние годы жизни

В 1883 г. А. А. Марков женился на Марии Ивановне Вальватьевой. Как уже говорилось, он был знаком с Машенькой Вальватьевой еще в детские годы. Будучи студентом университета, он занимался с ней матема-

[37] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 20, л. 14—16.

М. И. Маркова и А. А. Марков, 80-е годы XIX в.

тикой: Маша училась в гимназии и ей трудно давались точные науки. В результате ее успеваемость значительно улучшилась, а Андрей влюбился в свою ученицу. Вскоре он просил у Екатерины Александровны руки ее дочери и получил согласие. Однако свадьба состоялась лишь в 1883 г., когда Андрей Андреевич был уже приват-доцентом и собирался защищать докторскую диссертацию.

В 1887 г. А. А. Марков с женой переехали из дома на Псковской улице, где Андрей Андреевич жил с детских лет, в собственную квартиру дома № 30 на Торговой улице (ныне ул. Союза печатников). Здесь Марковы прожили до конца 90-х годов, когда Андрей Андреевич как академик получил квартиру в доме № 2 по 7-й линии Васильевского острова (ныне наб. Лейтенанта Шмидта, 1) — жилом доме Академии наук, в наши дни сплошь украшенном мемориальными досками в память о его знаменитых обитателях.

Своих детей у Марковых не было долго. Поэтому в их семье выросли трое дальних родственников Андрея Андреевича, потерявшие в детстве родителей: Павел Тимофеевич Емельянов, Василий Павлович Федоров и Агриппина Ивановна Зубарева. Все они получили хорошее воспитание. И лишь в 1903 г. у Марковых наконец родился сын — Андрей. Счастливые родители вряд ли догадывались, что их поздний и доставлявший столько хлопот своей болезненностью сын проживет долгую и яркую жизнь, став выдающимся ученым, преумножившим научную славу своего отца.

Рождение сына внесло в жизнь семьи Марковых много перемен. Отныне их помыслы были направлены главным образом на то, чтобы выходить малыша. Об этом, в частности, свидетельствует переписка А. А. Маркова тех лет, и в первую очередь его письма к В. А. Стеклову. Они буквально пронизаны вниманием к сыну, заботой о его здоровье, воспитании его характера, выборе увлечений. И во всех этих письмах строгий профессор и непримиримый полемист предстает перед нами нежным и любящим отцом.

В 1910—1912 гг. семья Марковых неоднократно выезжала за границу, чтобы поправить слабое здоровье маленького Андрюши. Обычно лето Марковы проводили в Германии, в курортном городке Баден-Бадене, а осень — в Италии или Швейцарии. Письма ученого, относящиеся к «заграничному периоду», в основном носят бытовой характер, но всякий раз Андрей Андреевич пишет о самочувствии, настроении и досуге Андрюши. Так, находясь в Генуе, ученый писал: «Генуя мне не понравилась, мы сократили пребывание в ней до minimum. Гулять Андрюше там негде. Отель где мы остановились, единственный отмеченный у Бедекера звездочкою, не толко отличается бессовестною дороговизною, но и непригоден для житья: спокойные сравнительно комнаты смотрят на какие-то стены и лишены света, лучшие же комнаты смотрят на дым от подъездов и очень шумны. Улица Гарибальди, в которой, по словам Б[едекера], дворец на дворце, по моему мнению, надо назвать улицей тюрем: такая масса в ней железных решеток на окнах. Я опасался, что пребывание в Генуе может отозваться вредно на Андрюше. Мы приехали в Г[еную] около 3 часов, часа два прошлись с женой по некоторым ближайшим к нам улицам, полюбовались развешан-

Дом на ул. Союза печатников (бывшей Торговой) в Ленинграде. А. А. Марков жил в этом доме в конце 80-х — 90-е годы XIX в.

Дом работников Академии наук (Ленинград), в котором А. А. Марков жил в последние годы жизни ным бельем и решили на другой же день бежать в Pallanza» [1].

Болезнь восьмилетнего сына совершенно выбивает Андрея Андреевича из колеи и приводит в отчаяние. «...Дела наши представляются мне столь плохими,— писал он 11 ноября 1911 г.,— что я даже теряю надежду когда-нибудь вернуться в Петербург. У жены корь почти прошла, по-видимому, без особых осложнений, хотя она до сих пор не выходит из наших комнат даже в столовую. У Андрюши же корь осложнилась. Итак, не могу Вам написать даже до свидания» [2].

К счастью, здоровье Андрюши скоро пошло на поправку, и тон следующего письма (от 20 ноября) совсем иной.

«Особенно порадовали Вы меня тем, что «прочли с удовольствием» мою «отповедь» П. А. Некрасову, которую К. А. Поссе нашел неубедительною. К. А. Поссе написал мне, что он думает, что я прав только по доверию ко мне.

При таких условиях невольно подумаешь, что не стоит ровно ничего писать, так как моя «отповедь» тесно связана с другими моими работами, которые соприкасаются с работами К. А. Поссе о предельных величинах интегралов...

...Андрюша, по-видимому, поправляется: сегодня ему позволено даже встать с постели. Однако еще остаются следы кори, которые, вероятно, еще не скоро исчезнут окончательно...» [3]

А последняя фраза письма показывает, что Андрей Андреевич снова «в форме»: «Как противно мне незаконное сборище с Родзянко во главе...» [4]

А. А. Марков был человеком эмоциональным. Он любил дальние пешеходные прогулки, страстно увлекался фотолюбительством и шахматами. Андрей Андреевич был не просто любителем этой древней игры, он был крупным шахматистом, соратником М. И. Чигорина — основоположника отечественной шахматной школы.

---

[1] ЛО ААН, ф. 162, оп. 2, д. 264, л. 31, 31 об.
[2] Там же, л. 66, 67.
[3] Там же, л. 80, 81.
[4] Имеется в виду III Государственная дума, возглавлявшаяся с 1911 г. одним из лидеров партии октябристов—М. В. Родзянко.

Поиск материалов о Маркове-шахматисте привел автора к сыну академика А. А. Маркову мл. Оказалось, что последний более полувека хранил шахматный архив своего отца — около полутора тысяч писем и открыток от 45 шахматистов России и различных европейских стран [II, 124]. Среди его бумаг были обнаружены неизвестные ранее письма М. И. Чигорина, корреспонденция известных русских шахматистов А. Н. Хардина, С. Ф. Лебедева, С. Л. Толстого (сына Л. Н. Толстого) и др. На ее основе удалось восстановить более 100 неопубликованных партий. Знакомясь с этим архивом, приходишь к выводу: академик А. А. Марков был первоклассным шахматистом.

Еще в 1872 г. в шахматном отделе «Всемирной иллюстрации», редактируемом одним из первых русских шахматных мастеров, И. С. Шумовым, была помещена оригинальная задача — четырехходовка ученика 5-й Петербургской гимназии:

А. Марков

Белые: Кре3 Ла6 Cg8 Кс6 Кg2 пп. а4 с4 е4 g3 (9)

Черные: Kpd7 пп. е7 g4 g5 (4)

Мат в 4 хода.

Решает **1. Се6+** с такими вариантами: **1...Кр:е6 2. Ке5+ Кр:е5 3. Kf4; 1...Крс7 2. с5 Kpb7 3. Cd7; 1...Kpd6 2. Kpd4 Крс7 3. Крс5.**

Несмотря на довольно очевидный первый ход решения, четырехходовка свидетельствует о неплохой технике начинающего составителя.

Два года спустя в немецком журнале «Дойче Шахцайтунг» появился доработанный вариант задачи.

Белые: Кре3 Ла6 Cf7 Кс6 Ке2 пп. с4 d2 h3 (8)–

Черные: Kpd6 пп. е7 h5 (3)

Мат в 4 хода.

1. Се6! цугцванг. **1...h4 2. Ked4 Крс7 3. с5 Kpb7 4. Ла7 X; 1...Крс7 2. с5 Kpb7 3. Ked4 Кр:а6 4. Сс8 X; 1...Крс5 2. Ке5 Kpb4 3. Kd3+ Kpb3 4. Kd4 X; 1...Кр:е6 2. Ке5+ Kpf5 3. Kd4+** 2. ...Кр:е5 3. Kd4 и 4 Ле6 X **3...Kpg5 4. Kef3 X.**

Гимназисту А. Маркову удалось создать отличную задачу. Но не композиция стала его главным увлечением. Приведенная четырехходовка — это почти все, что осталось в память о занятиях Андрея Маркова «поэзией шахмат».

В 1886 г. имя А. А. Маркова, бывшего уже одним из крупнейших русских математиков, впервые появилось среди подписчиков чигоринского «Шахматного листка». Как раз в это время М. И. Чигорин объявил об организации первого в России специального турнира по переписке (в наши дни такие турниры называются тематическими). Было решено допустить к участию 12 шахматистов, которые путем жеребьевки разбивались на две равные группы. Оказавшиеся в одной группе между собой не встречались, а с каждым представителем другой группы играли две партии (одну — белыми, другую — черными) заданными дебютами. Регламент турнира был довольно жестким. На обдумывание каждого хода давалось двое суток без права накопления времени.

А. А. Марков попал во вторую группу. Белыми он мог выбирать между гамбитом Альгайера в королевском гамбите 1. e4 e5 2. f4 ef 3. Kf3 g5 4. h4 g4 5. Kg5 и гамбитом Гампе — Альгайера в венской партии 1. e4 e5 2. Kc3 Kc6 3. f4 ef 4. Kf3 g5 5. h4 g4 6. Kg5; черными во всех партиях он должен был играть гамбит Эванса 1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. Cc4 Cc5 4. b4 C: b4.

Творческий характер турнира и представительный состав участников вызвали большой интерес. Игра началась 1 августа 1886 г., а к концу того же года появились первые результаты. Всех фаворитов оставил в тени 30-летний профессор университета Андрей Марков. В последнем выпуске «Шахматного вестника» (издание прекратилось в январе 1887 г.) М. И. Чигорин сообщил результаты закончившихся к тому времени партий [II, 125]. А. А. Марков уверенно лидировал — шесть побед в шести закончившихся партиях. Его ближайший преследователь — один из сильнейших первокатегорников столицы П. Арнольд,— отставал на два очка.

Заданные дебюты, ведущие к острым, даже взрывным позициям, как нельзя лучше соответствовали живому стилю игры Андрея Андреевича. Следующая его партия завершилась в тематическом турнире одной из первых.

Венская партия
(гамбит Гампе—Альгайера)
А. Марков Н. Урусов
1 августа — 10 декабря 1886 г.

1. e4 e5 2. Kc3 Kc6 3. f4 ef 4. Kf3 g5 5. h4 g4 6. Kg5 h6 7. K:f7 Kp:f7 8. d4 d6. Современные дебютные руководства рекомендуют 8...d5 или 8...f3. Ход, сделанный в партии, облегчает белым организацию атаки на короля [5].

9. С:f4 Сg7 10. Сс4+. Точнее, 10. Се3 Сf6 11. g3 Кgе7 12. Сс4+ Крg7 13. Фd2 Сd7 14. 0—0—0 с перевесом. **10...Крg6 11. Се3 Крh7.** После 11...Кgе7 12. 0—0 Лf8 черные, согласно анализу Цукерторта, отражают атаку, сохраняя материальный перевес.

12. Фd2 Кgе7 13. 0—0 Лf8 14. Л:f8 Ф:f8 15. Лf1 Фе8 16. Кb5 Фh5 17. К:с7 Лb8 18. Лf7 Ка5. «Ход 18... ...Ке5 оказывается ошибочным ввиду остроумной комбинации, придуманной г. Марковым в настоящей партии» (из комментариев М. Чигорина) [II, 125, с. 9]. **19. Ке8! Крh8.** Нельзя 19...К:с4 из-за 20. Л: g7 + Крh8 21. Кf6! Сf5 22. К:h5 К:d2 23. С:d2 и выигрывает. **20. К:g7 Ф:h4 21. Ф:а5 Кс6 22. Кf5 К:а5 23. Лf8 + Крh7 24. Сg8 + Крg6 25. К:h4+ Крg7 26. Ле8 Кс6 27. d5 Сd7 28. Сd4+.** Черные сдались.

В партии А. Марков — В. Завихойско-Ляцкий первые десять ходов те же, что и в предыдущей партии.

11. е5! Энергичный ход, впервые сделанный в этой партии. Теперь у белых сильная атака. **11...de? 12. Фd3+!** Хотя у черных лишняя фигура, им, пожалуй, уже можно сдаваться, так как инициатива белых развивается почти беспрепятственно.

12...Сf5 13. h5+ Крf6 14. de+ К:е5 15. Кd5+ Кре6 16. Ке3+ К:с4 17. Ф:f5+ Кре7 18. Кd5+ Кре8 19. К:с7+ Кре7 20. Фс5+ Кd6 21. 0—0—0! Черные сдались.

Партнер А. А. Маркова, считая, что все беды черных в этой партии — следствие неудачного 11-го хода, предложил переиграть партию с продолжением **11...Сf5.** А. А. Марков согласился, и борьба возобновилась. **12. Сd3 С:d3 13. Ф:d3+ Крf7 14. Фf5+ Кf6 15. еf Ле8+ 16. Крd2 Ф:f6 17. Фd5+ Кре7 18. Се3 Лаd 8 19. Лhf1 Фg6 20. h5 Фе6 21. Ф:е6+ Кр:е6 22. d5+.** Черные сдались.

К ходу 11. е5 М. И. Чигорин дал такой комментарий: «Новинка. Последствием этого хода является у белых очень сильная атака. Насколько она солидна и сильнее ли атаки, практиковавшейся до сих пор: Се3, Фd2 и 0—0,— это вопрос который может быть, скорее всего, разрешен только практическими партия-

---

[5] Примечания к партиям (если они не оговорены особо) написаны автором.

ми, так как точный и совершенно правильный анализ крайне труден» [II, 125, с. 10]. С тех пор минуло сто лет, а предложенный А. А. Марковым ход 11. e5 и ныне считается сильнейшим в данной позиции.

Играя остро и бескомпромиссно, А. А. Марков одержал в первом тематическом турнире по переписке блестящую победу — $10^1/_2$ очков из 12. Занявший второе место известный впоследствии русский шахматист Б. Янкович отстал от победителя на $2^1/_2$ очка [II, 126].

Очевидно, с этого тематического турнира берет начало дружба, установившаяся между Марковым и Чигориным на почве общих шахматных интересов.

В том же 1886 г., касаясь в письме к Маркову турнирных дел, Чигорин сообщает ему ходы, сделанные в происходившем в ту пору телеграфном матче Петербург—Лондон, и приглашает принять участие в их обсуждении. А в преддверии знаменитого заочного матча с чемпионом мира В. Стейницем, готовясь к нему, Чигорин надумал сыграть четыре партии по переписке, как он писал, «со специальной целью ознакомиться практически, а не путем анализа с некоторыми особенностями разных атак и защит» в оговоренных дебютах; именно Маркова он предпочел всем петербургским шахматистам в роли, как мы бы сейчас сказали, «спарринг-партнера». Марков оказался достойным помощником-оппонентом: закончил борьбу с почетным результатом $1^1/_2 : 2^1/_2$. В одной партии Андрей Марков победил великого русского шахматиста.

Защита двух коней

А. Марков М. Чигорин

6 августа — 16 октября 1890 г.

1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. Cc4 Kf6 4. Kg5 d5 5. ed Ka5 6. Cb5+ c6 7. dc bc 8. Ce2 h6 9. Kh3. Ход, рекомендованный Стейницем. Цель партии как раз и состояла в проверке корректности этого продолжения.

9...g5. В другой партии матча было сыграно 9...Cc5, что, по-видимому, сильнее. Позднее Чигорин сделал ход 9...Cc5 и в выигранной им партии матча по телеграфу со Стейницем (1890—1891 гг.). **10. c3.** Белые подготавливают b4 или d4. Поскольку они существенно отстали в развитии, следовало сразу играть 10. d3 или 10. Kc3. **10...Фd5?!** Энергичнее 10...g4 с последующим 11...Cc5. **11. Cf3 e4 12. Ce2 Cd6 13. b4 Kc4**

14. Фb3 Ке5 15. с4 Фе6 16. с5 Сс7 17. Ф:е6+ С:е6 18. Кс3 Kd3+ 19. C:d3 ed.

Белым удалось сохранить лишнюю пешку, а активность черных тем временем угасает. **20. Cb2 0—0 21. f3 C:h3 22. gh Лfe8+ 23. Kpd1 Ле6.** Заслуживало внимания 23...Лad8. **24. а4 Лае8 25. Ла3 C:h2 26. Ка2 Kd5 27. Л:d3 Cg3 28. Сс3 Cf2 29. Крс2 а6 30. Лf1 Cg3.**

31. Л:d5! Наиболее рациональный путь к выигрышу. Жертвуя качество, белые образуют связанные проходные, которые в конечном счете и решают исход борьбы.

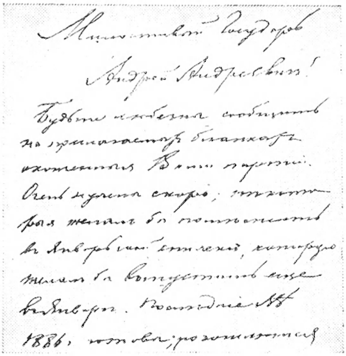
31...cd 32. b5 ab 33. ab Лd8 34. Cd4 Kph7 35. Kb4 Kpg6 36. b6 Kph5 37. Kpd3 Лс8 38. K:d5 Kph4 39. f4 f6 40. f5 Лес6 41. Ке7 Л:с5 42. К:с8 Л:с8 43. C:f6 Cd6 44. Кре4. Черные сдались.

Из материалов архива следует, что М. И. Чигорин обсуждал с А. А. Марковым ход своего телеграфного матча с чемпионом мира В. Стейницем [II, 127]. В переписке Чигорина и Маркова затрагивался ряд других вопросов, в том числе таких, как издание журнала «Шахматный вестник», петербургские клубные дела, оценка некоторых вариантов и т. д.

Чигорина и Маркова связывала многолетняя личная дружба. Характерен один пример. Когда в 1903 г. М. И. Чигорина в результате интриг исключили из числа участников международного турнира в Монте-Карло, Андрей Андреевич послал ему следующую телеграмму: «Многоуважаемый Михаил Иванович, прошу Вас принять уверение, что меня глубоко возмутил поступок президента турнира в Монте-Карло против лучшего шахматиста России, прекрасные партии которого всегда будут вызывать восторг и удивление поклонников благородной игры. Сердечно желаю Вам новых успехов. Академик Марков».

В 90-е годы А. А. Марков достиг в игре по переписке большой силы. В популярном «Самоучителе шахматной игры» Эм. Шифферса помещена партия, выигранная им у одного из сильнейших немецких шахматистов 80—90-х годов — П. Липке. Включившись в 1889 г. в турнир французского шахматного журнала «Стратежи» («Стратегия»), Андрей Андреевич и здесь не оставил партнерам никаких шансов.

А. А. Марков поддерживал дружеские отношения с одним из сильнейших русских шахматистов А. Н. Хардиным, с которым сыграл много партий по


Милостивый Государь
Андрей Андреевич!

Письмо М. И. Чигорина А. А. Маркову, 1886 г.

переписке. Вначале удачливее был Хардин, затем чаще верх брал Марков. В 1897—1899 гг. они сыграли тренировочный матч из четырех партий. Три поединка после острой борьбы закончились вничью, и судьба состязания решалась в следующей партии.

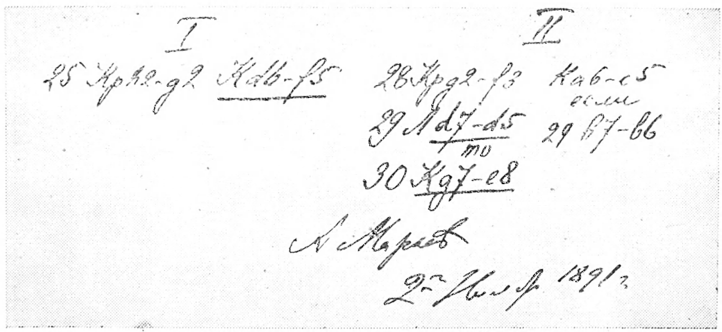
Шотландская партия
А. Хардин А. Марков
24 ноября 1897 — 15 февраля 1899 г.
Примечания А. А. Маркова

1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. d4 ed 4. К:d4 Kf6 5. К:c6 bc 6. e5 Ke4 7. Фf3 Фh4. «Сначала я,— писал А. А. Марков,— предполагал играть согласно Стейницу 6...Ke4 7. Фf3 Kg5 8. Фg3 Ke6 9. Cd3 f6, но затем мне показался опасным для черных ход белых 10. С : h7. Поэтому я решился испробовать новый ход Фd8—h4».

8. Cd3. «Мне кажется заслуживающим внимания следующий вариант: 8. g3 Kg5 9. Фe3 Фe4 10. Ф: e4 К : e4, который, по-видимому, выгоден для белых». **8...Kc5 9. 0—0 К:d3 10. Ф:d3 Cc5 11. Kc3 0—0 12. Ke4 Ca6.** «Этот ход, весьма обостряющий положение игры, мне кажется наилучшим; при ответе белых 13. Ф : a6 я надеялся получить лишнюю пешку».

13. c4 Cb6 14. Cg5 Фh5 15. Kph1 d5 16. ed f5 17. Ce7 fe 18. Ф:e4 cd. «Пешка d6 казалась мне опасною». **19. С:f8 Л:f8 20. Ф:c6 Фf7 21. f3 С:c4 22. Лfd1 Cc7 23. b3 Ce6 24. Лd4 Лc8 25. Фa6 Cb8 26. Лe1 Фd7 27. Лde4 Cf7 28. g4 Лe8 29. Л:e8 С:e8.** «Рассчитывая на проходную пешку «d», черные стремятся к обмену фигур». **30. Фe2 Cf7 31. Фe7 Фc8.** «Меняться ферзями нельзя, так как затем последует потеря слона».

32. Kpg2 h6 33. b4 d5 34. Фc5 Фa6. «И в этом положении мена ферзей представляется невыгодною». **35. a3 Cd6.** «Черные наконец могут перейти в нападение». **36. Фc3 Фc4 37. Ф:c4.** «Теперь мена ферзей



Открытка А. А. Маркова с записью очередных ходов в его партии с профессором Б. М. Кояловичем, 1891 г.

выгодна для черных». **37...dc 38. Лd1 Се5 39. Лd8+ Крh7 40. Лс8 Сb2.** Белые сдались.

Трижды играл А. А. Марков матчи по переписке с шахматистом первой категории профессором математики Б. М. Кояловичем и все три выиграл: в 1891 г.— 2 : 0, 1897 —1899 гг.— $4^{1}/_{2} : 1^{1}/_{2}$ и в 1915 г. — $2^{1}/_{2} : 1^{1}/_{2}$.

В 1901 г. «Шахматный журнал» организовал сильный турнир по переписке, в котором принял участие и академик Андрей Марков. Окончательные итоги турнира не были опубликованы, так как еще в марте 1903 г. «Шахматный журнал» прекратил существование.

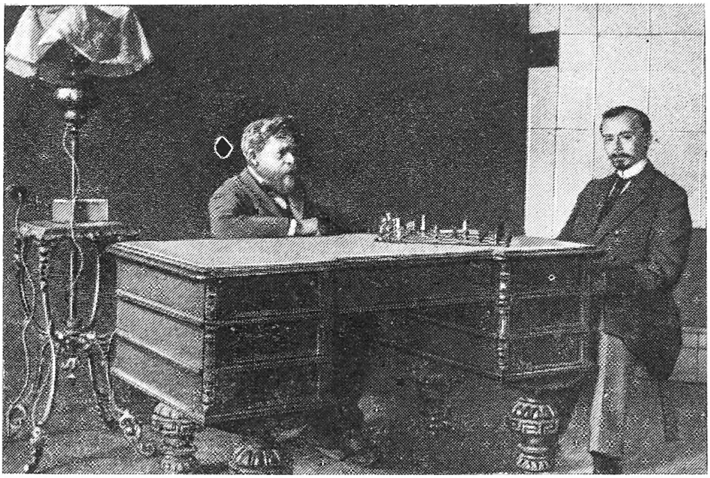
По материалам семейного архива А. А. Маркова мы установили, что ему удалось победить своих конкурентов в личных встречах и закончить турнир с отличным результатом — 11 очков из 14. Яркую победу одержал Андрей Андреевич над петербургским перворазрядником Павлом Отто, бывшим в начале 90-х годов редактором «Шахматного журнала».

Центральный дебют

П. Отто А. Марков

1901—1903 гг.

1. е4 е5 2. d4 ed 3. Ф:d4 Кс6 4. Фе3 Кf6 5. Сd2. Не заслуживает внимания 5. е5?! ввиду 5...Кg4 6. Фе4 d5 7. ed + Се6 8. Са6 Ф:d6 9. С: b7 Фb4+ 10. Ф:b4 К:b4 11. Ка3 Лb8 — и у черных инициатива. На ход, сделанный в партии,— 5. Сd2 — черные также могли с выгодой ответить 5...Кg4!? Поэтому наиболее логично



За шахматами А. А. Марков и Б. М. Коялович

5. Кс3, **5...Се7 6. Кс3 d5 7. ed К : d5 8. Фf3.** К равенству вело 8. К : d5 Ф : d5 9. Ке2 0—0 10. Кс3 Фс5 (Тартаковер — Рельстаб, Кемери, 1937). После 8. Фg3 К : с3 9. С : с3 Cf6 некоторый перевес у черных (Чигорин — Зноско-Боровский, Петербург, 1906). **8...К : с3 9. С : с3 0—0 10. Сс4 Cb4 11. Ке2.** Итоги схватки в дебюте благоприятны для черных — их шансы немного лучше. Но требуется подлинное мастерство, чтобы реализовать их в партии по переписке, когда нападение и защита часто уравновешивают друг друга.

11...Ке5! 12. Фg3 С:с3+ 13. Ф:с3 Ле8. Черные вынудили партнера потерять пару темпов, и сейчас их перевес уже ощутим. **14. 0—0 Фh4 15. Cb3 Cd7!** Смелая жертва пешки.

16. Ф : с7 Cb5 17. с4 Сс6 18. Кg3 Ле6 19. f3 Фf4 20. Фа5 Кd3. А. А. Марков четко проводит всю партию, не давая партнеру передышки.

21. с5 Ле5 22. Фс3 Фе3+ 23. Крh1 Л:с5 24. Сс4 Лd8 25. h3 Cb5 26. Лае1 Фf4 27. Ке4 Л:с4 28. Фа5 Лсd4 29. Ф:b5 К:е1 30. Л : е1 Лd1 31. Фе2 Фс1. Белые сдались.

Постоянным партнером А. А. Маркова был врач Г. Х. Вессель, с которым он дружил с гимназических лет. В школьные годы их интересы существенно разнились. Если Андрей Марков, как мы знаем, недолюбливал древние языки, то Георгий Вессель получил золотую медаль по результатам «экзамена зрелости из обоих древних языков» [II, 25, с. 55]. А. А. Марков-сын вспоминал, что Вессель приходил к его отцу регулярно — один раз в две недели. Игра начиналась поздно вечером, когда маленького Андрюшу укладывали спать. Партии продолжались до глубокой ночи, а иной раз завершались только под утро. Андрей Андреевич играл с Г. Весселем и по переписке, но здесь он был явно сильнее. В матче из шести партий (1898—1899 гг.) Г. Весселю лишь в двух удалось сделать ничью. Остальные выиграл А. А. Марков.

Среди шахматных партнеров Андрея Андреевича упомянем выдающегося русского историка академика Павла Гавриловича Виноградова. Хотя П. Г. Виноградов имел репутацию одного из сильнейших первокатегорников Москвы, верх почти всегда одерживал А. А. Марков.

Шахматы были любимы в семье Марковых. Часто упорное сопротивление своему именитому брату оказывал Михаил Андреевич Марков. Партнером Андрея Андреевича бывал и младший брат Владимир [II, 128].

В кабинете А. А. Маркова рядом с рабочим столом всегда находилась шахматная доска, на которой была расставлена позиция. Едва выдавалась свободная минута, Андрей Андреевич анализировал свои партии по переписке. Ведь многие годы по адресу: «Петербург, 7 линия Васильевского острова, профессору Маркову» — письма с шахматными ходами приходили со всех концов Европы. Академик А. А. Марков оставался сильным шахматистом и в последние годы жизни.

В 1915 г. он проводил летний отпуск в захолустной усадьбе Быково. В письме к академику В. А. Стеклову от 21 июня 1915 г. грустные раздумья о судьбах родины Андрей Андреевич прерывает фразой: «Здесь, в Быково, хотя мало интересного, но жить можно... Здесь нашелся даже для меня шахматный игрок. Хотя он не очень силен, но доказывает мне, что я сам играю довольно плохо...» [6] Шахматный мотив звучит и в другом письме В. А. Стеклову от 20 ноября 1911 г.: «Здесь я ничего не могу делать и только по вечерам играю с доктором Нертцем в шахматы» [7]. В мае — июне 1913 г.

---

[6] ЛО ААН, ф. 162, оп. 2, д. 266, л. 17.
[7] Там же, д. 264, л. 72.

Андрей Андреевич делится в письмах впечатлениями о местечке Везо (Эстляндская губ.); «Что касается моей дачи, то о ее недостатках Вы составили преувеличенное понятие. Музыка меня совершенно не беспокоит, так как я к ней вообще отношусь довольно безразлично... Здесь, однако, имеется нечто вроде клуба, и хозяин обнадеживает меня, что я найду шахматных игроков (карточные наверно есть)» (из письма от 31 мая 1913 г.). «Здесь нашлись для Андрюши англичанка, музыкантша и учитель гимнастики, а для меня шахматист, который сначала даже обыгрывал меня» [8] (из письма от 20 июня 1913 г.).

По воспоминаниям А. А. Маркова-сына, в последние годы жизни Андрей Андреевич стал замечать, что при игре в шахматы у него ухудшается зрение и появляется боль в глазах. Это были первые симптомы развившейся впоследствии глаукомы. Андрей Андреевич стал избегать шахмат, но продолжал довольно сильно играть, не глядя на доску. В 1921 г., незадолго до смерти, на естественнонаучной станции в Новом Петергофе А. А. Марков сражался «вслепую» с профессором Н. М. Гюнтером. До конца своих дней он оставался грозным противником для любого шахматиста.

Академик А. А. Марков научил играть в шахматы и своего сына, когда тому исполнилось восемь лет. Отец был первым постоянным партнером Андрея [II, 129]. Став первокатегорником еще в 30-е годы, А. А. Марков-сын активно выступал во многих официальных соревнованиях. Однажды на вопрос автора: «Кто играл сильнее — Вы или Ваш отец?» — профессор А. А. Марков, не задумываясь, ответил: «Отец играл лучше. Помню, что, даже когда он играл со мной, не глядя на доску, мне приходилось тяжело».

В этом ответе не было ложной скромности. Ведь академика Маркова по силе игры можно считать шахматным мастером. Что же касается его сына, то о нем можно сказать, что он с честью пронес принятую от отца эстафету и в науке и в шахматах...

Шахматное творчество академика Андрея Андреевича Маркова свидетельствует о том, что этот выдающийся русский ученый был человеком многогранной одаренности и в шахматах всегда стремился к энергичной бескомпромиссной борьбе.

---

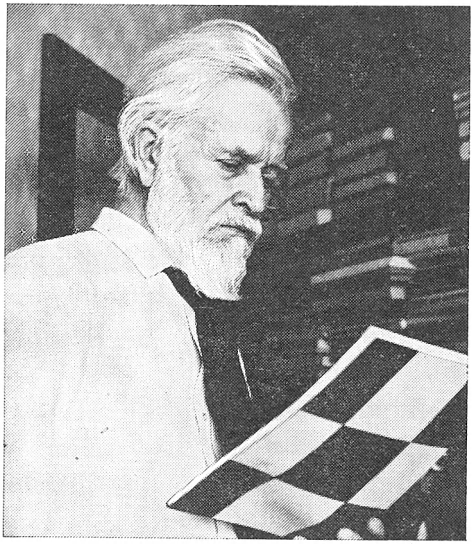
[8] Там же, д. 265, л. 48 об., 52.

А. А. Марков-младший (слева) и автор за разбором шахматного архива академика А. А. Маркова (Фото А. А. Маркова-внука)

В 1977—1979 гг. Всероссийский шахматный клуб организовал тематический турнир по переписке с участием известных советских шахматных мастеров. Это соревнование было посвящено памяти Андрея Андреевича Маркова — победителя первого тематического турнира по переписке в России, выдающегося ученого-патриота, одного из сильнейших русских шахматистов своего времени [II, 130, 131]. Закончив этим сообщением шахматную страницу в биографии А. А. Маркова, перейдем к описанию последнего периода его жизни.

В августе 1914 г. грянула первая мировая война. Ее начало застало А. А. Маркова на даче под Псковом на р. Черёхе. Ученый с тревогой воспринял нахлынувшие события. Изменилось и содержание его писем. В них он все чаще и чаще высказывался по различным мировым проблемам.

В этот сложный период А. А. Марков не прекращает научной и общественной работы, оказывает помощь другим ученым. В этой связи примером может служить



А. А. Марков-младший, 1978 г.

письмо М. В. Птухи, в то время приват-доцента Петроградского университета, а впоследствии выдающегося советского статистика и демографа, действительного члена АН УССР и члена-корреспондента АН СССР. В 1916 г. М. В. Птуха издал магистерскую диссертацию [II, 132], посвященную вопросам общей теории статистики. А. А. Марков сделал к ней ряд замечаний, в частности по поводу математического аппарата в демографических исследованиях, которому М. В. Птуха отводил только вспомогательную роль. В своем письме А. А. Маркову молодой ученый с благодарностью оценил рекомендации академика и его высказывания по диссертации [9].

Тогда же, в 1916 г., А. А. Марков получил благодарственное письмо от профессора Донского (в Ростове-на-Дону) университета В. И. Романовского. Всеволод Иванович был признателен А. А. Маркову за его замечания. Пройдут годы, и академик АН УзССР В. И. Романовский получит важные научные результаты по разделу теории вероятностей, названному «цепями Маркова», а на его монографии «Дискретные цепи Маркова»

[9] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, д. 16, л. 1, 2.

будут стоять слова: «Посвящается памяти великого учителя Андрея Андреевича Маркова» [II, 133].

В 1917/18 учебном году А. А. Марков преподавал математику в средней школе. Дело в том, что в сентябре 1917 г. создалась угроза захвата Петрограда немцами. А. А. Марков, «не имея возможности ввиду создавшихся обстоятельств спокойно заниматься наукой в Петрограде», обратился в Академию наук с просьбой откомандировать его «для продолжения научных занятий на год внутрь России» [10]. Вскоре он с семьей выехал в город Зарайск (быв. Рязанской губернии), где жили его родственники. Позднее, вспоминая свою жизнь в Зарайске, сын ученого, Андрей Марков, писал:

«Зиму 1917/1918 г. мы провели в Зарайске («Мы» — это в данном случае мои родители, тетя моей матери, Серафима Александровна Москвина, и я). Мне пришлось перейти из 5-го класса Петроградской 8-й гимназии в 6-й класс Зарайского реального училища. Математику в 6-м классе преподавал директор училища Гильвег, старательный и педантичный. Он неукоснительно требовал на уроках геометрии, чтобы все чертежи делались тщательно: чтобы прямые проводились обязательно по линейке, окружности обязательно циркулем и т. п. Неожиданно он вышел в отставку, и старшие классы остались без математики. Чтобы выручить училище, а быть может, и для удовлетворения своей постоянной потребности в педагогической деятельности (ведь он до этого 37 лет подряд преподавал в университете!) отец безвозмездно предложил свои услуги в качестве преподавателя математики. Это предложение было с благодарностью принято, и я стал таким образом официальным учеником отца. Первый его урок несколько испугал и озадачил нас. Тут не было ничего похожего на внешнюю аккуратность его предшественника. Даже формулы писались отцом не очень в ранжир. Потом к «профессору» (так называли отца его юные ученики) стали привыкать, однако усвоенные от Гильвега навыки некоторое время мешали взаимному пониманию. Так, однажды отец, вызвав к доске на уроке геометрии одного из лучших учеников, пришел в ярость, когда тот, вместо изложения решения задачи, стал медленно делать на доске тщательный чертеж циркулем и линейкой. «У нас тут урок геометрии, а не черчения!» — гневно крикнул отец.

[10] Там же, ф. 1, оп. 1а — 1917, д. 164, с. 276.

Главный упор отец делал на решение задач. Для желающих усовершенствоваться в этом деле он вел дополнительные занятия во время каникул и по воскресеньям. Эти необязательные занятия охотно посещались многими учениками и принесли им пользу». За свою краткую, но интенсивную деятельность А. А. Марков получил от педагогического совета Зарайского реального училища благодарственный адрес [I, 128, с. 611—612]:

«Глубокоуважаемый Андрей Андреевич!

В середине октября настоящего учебного года Зарайское реальное училище оказалось в очень тяжелом положении. С уходом директора Гильвега уроки математики в 6-м и 7-м классах остались незанятыми. Преподавателя математики для столь ответственных классов найти было невозможно. Узнав об этом, Вы любезно согласились взять на себя преподавание математики в упомянутых классах бесплатно и с присущей Вам необыкновенной энергией и талантом ревностно взялись за новое для вас дело обучения в средней школе. Начиная с конца октября до конца учебного года в апреле Вы не пропустили ни одного урока, мало этого, во время Рождественских каникул и в воскресные и праздничные дни Вы неустанно и плодотворно, не жалея себя, давали лишние уроки ученикам. Благодаря Вам наше дорогое нам всем реальное училище сразу заняло особое положение среди других учебных заведений России, имея преподавателем ординарного академика и талантливого математика.

Педагогический совет, ценя Ваши услуги реальному училищу, выражает Вам свою глубокую признательность» [11].

Адрес подписали все преподаватели реального училища. Все они остались вполне довольны профессором Марковым в роли учителя математики.

В Зарайске жизнь семьи Марковых складывалась нелегко. Там, под Рязанью, он узнал об успешном штурме Зимнего. Как встретил он победу пролетарской революции? Известно, что далеко не все из представителей тогдашней интеллигенции приняли ее. И совсем немногие даже среди либералов могли присоединиться к поэту, во весь голос заявившему: «Моя революция!»

---

[11] В настоящее время хранится в ЛО ААН.

О настроении Андрея Андреевича в ту пору говорят письма ученого к В. А. Стеклову. Так, 15 октября 1917 г. он писал:

«Все идет так скверно, что и писать крайне трудно. Заехали мы под давлением разных обстоятельств и лиц в совершенно дикое место, и назад нет нам возврата.

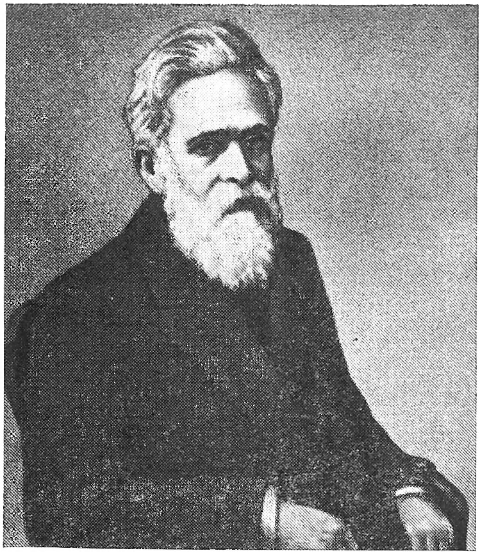
Около 20-го сентября я был в Петрограде и нашел Вашу открытку. Но поездка из З[арайска] в Петроград даже для одного меня оказалась весьма затруднительною ввиду необходимости сделать пересадку в каких-то проклятых Луховицах. Поезда всегда переполнены, и мне пришлось влезать в окно. Очевидно, всем семейством никак через эту станцию не проехать. Думал я, что для Андрюши будет в З[арайске] лучше; но, может быть, ему будет еще хуже: приходится подвергаться экзамену для перехода в реальное училище (гимназии здесь нет); пища тяжелая, отхожее место холодное, помещение тесное (четверо в одной комнате), а зимой, вероятно, будет очень холодно...

Чтобы меня не совсем забыли, пока я еще не умер, вчера я послал С. Ф. Ольденбургу небольшую заметку, которую прошу поместить в Известиях» [12].

В следующем письме от 29 ноября 1917 г. А. А. Марков снова жалуется на неустроенность быта. «Мы находимся в тяжелой зависимости от наших родственников,— пишет он.— В училище также дела идут неважно: до сих пор Андрюша еще не зачислен в ученики и должен сдавать еще неизвестно сколько экзаменов. Сверх того, разыгралась вчера история, которая может повести к скверным последствиям. Ученики в день предполагаемого открытия У[іченического] С[овета] не пожелали заниматься и ушли из училища после второго урока. Был созван Совет, который постановил сделать ушедшим, в числе которых был и Андрюша, выговор от Пед[агогического] совета с уменьшением отметки за поведение. Я преподаю теперь математику в двух старших классах и считаюсь также членом П[едагогического] С[овета]. Выяснив, что наказание, назначенное Советом, считается самым серьезным после исключения, я заявил, что не могу к нему присоединиться, и сегодня подал директору письменное изложение своего мнения. Этим, конечно, вооружил против себя педа-

---

[12] ЛО ААН, ф. 162, оп. 1, д. 266, л. 24—27.



А. А. Марков, 1918 г.

гогов. Сегодня ученики что-то обсуждают, и боюсь, что все окончится плохо.

Очень и очень жалко, что я не с Вами в Петрограде; на людях и смерть красна. А здесь прозябать в захолустном Зарайске и в конце концов пропасть ни за что, скверно» [13].

Наступил 1918 год. К прежним трудностям он добавил новую и самую страшную — угрозу голода! «Голод надвигается и на нас: дают уже по 1/4 фунта хлеба на человека... а скоро и вовсе не будет хлеба,— писал А. А. Марков 5 января 1918 г.— Запасы моей двоюродной сестры невелики и быстро истощаются. Но все-таки, вероятно, в Петрограде еще хуже, чем у нас... Пожалуй, Вы найдете, что мы живем припеваючи. Но нам грозит, что вскоре останемся совсем без денег и что нас выгонят из квартиры; пока только повышают плату и сокращают хлебный рацион».

А. А. Маркова беспокоит положение дел в Академии наук. Ученый опасается, что она будет закрыта. Он еще не знает, что, несмотря на очень тяжелое положение в стране, правительство большевиков уже изыски-

[13] ЛО ААН, ф. 162, оп. 1, д. 266, л. 29, 30, 37.

вало возможности для улучшения материального положения ученых.

23 апреля (6 мая) 1918 г. А. А. Марков пишет В. А. Стеклову: «...Вы сообщили о повышении месячного содержания академикам до 1000 руб... В З[арайске], конечно, мы не испытываем того голода, какой у Вас в П[етрограде]. Хлеба получаем по 1/4 фунта на человека, но сверх того покупаем у хозяйки по 1 фунту в день на четверых».

Ради хлеба насущного А. А. Марков занялся огородничеством. Для начала академик вместе с сыном взяли в руки ломы и стали выкорчевывать корни да выкапывать камни, расчищая площадку, отведенную для будущего огорода. Тем временем дополнительные пайки хлеба получает А. А. Марков и за занятия по основам высшей математики, которые он проводит на курсах, организованных Комиссариатом по народному образованию.

Мнение академика о новых порядках типично для либерального интеллигента той поры. Профессору непонятно, почему комиссаром по делам просвещения назначен бывший студент. А. А. Маркову кажется, что педагогический совет реального училища потерял свое значение, а «судьба любого из учителей в руках Совета рабочих депутатов». Не все в сложившейся обстановке ясно, кое-что пугает. Но если академик А. А. Марков выглядит несколько настороженным, то его сын воспринимает происходящее всей душой. Юный Андрей Марков был избран в Совет ученических депутатов и, как замечает отец, стал в Зарайске важным лицом. «Хотелось бы, хотя бы осенью, вернуться в П[етроград],— пишет А. А. Марков В. А. Стеклову,— но опасаюсь, что придется еще долго жить в З[арайске], где мы все-таки существуем, а Андрюша желал бы закончить среднее образование — ему остается один дополнительный класс...» [14]

Осенью 1918 г. Марковы все же предпочли вернуться в Петроград. Андрея Андреевича непреодолимо потянуло к любимой педагогической работе в университете, начавшей в это время налаживаться. В протоколе заседания Академии наук от 26 ноября 1918 г. записано: «Академик А. А. Марков доложил, что он приглашен Петроградским университетом для чтения лекций.

[14] ЛО ААН, ф. 162, оп. 1, д. 266, л. 42—44.

Вместе с тем академик А. А. Марков просил указаний, нет ли со стороны Академии возражений против принятия им этого приглашения.

Разрешено, о чем положено сообщить в Правление для сведения» [15].

В декабре 1919 г. Совнарком РСФСР учредил Комиссию по улучшению быта ученых (КУБУ), в работе которой активное участие принимал М. Горький. В документах, находящихся в фонде Петроградской КУБУ, несколько раз упоминается имя А. А. Маркова. В частности, академик А. А. Марков был включен в «список русских ученых, проживающих в Петрограде, представляемый Русскому в Бельгии комитету помощи голодающим» [16], и в список ученых на получение усиленного пайка, в который входили присланные из-за границы продукты [17]. В мае 1922 г., когда Андрей Андреевич был уже смертельно болен, в список на получение академического пайка включили его сына — студента А. А. Маркова [18].

5 марта 1921 г. А. А. Марков сообщил Общему собранию, что из-за отсутствия обуви он лишен возможности посещать заседания Академии [19]. Спустя пару недель КУБУ, заседавшая под председательством М. Горького, удовлетворила эту прозаическую просьбу известного математика [20]. Но время проявило своеобразный «колорит». На заседании Физико-математического отделения Академии наук 25 мая 1921 г. Андрей Андреевич заявил: «Наконец я получил обувь; но она не только дурно сшита, но и совершенно мне не подходит по своим размерам. Таким образом, я по-прежнему лишен возможности правильно посещать заседания Академии. Полученную мною обувь я предлагаю поместить в Этнографическом музее как образец материальной культуры текущего момента, ради чего я готов ею пожертвовать» [21].

В последние годы жизни А. А. Марков по-прежнему деятельно участвовал в общественной жизни. Он активно выступал за перестройку научной и педагогической

---

[15] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1918, д. 165, л. 210.
[16] ЦГАОР, ф. 2995, оп. 1, д. 469, л. 13.
[17] Там же, оп. 2, д. 14, л. 1.
[18] Там же, оп. 1, д. 378, л. 10 об.
[19] ЛО ААН, оп. 1а — 1921, д. 169 с. 20.
[20] ЦГАОР, оп. 1, д. 4, л. 14, 24 об.
[21] ЛО ААН, ф. 1, оп. 1а — 1921, д. 169, с. 82.

деятельности Петроградского университета. В этой связи представляет интерес следующее заявление группы профессоров университета, зачитанное 24 октября 1921 г. на одном из заседаний Ученого совета:

«Ввиду того что для успешности занятий в университете студенты должны иметь лишь соответствующую подготовку, прием слушателей в университет должен производиться согласно их знаниям, а не по каким-либо классовым или политическим соображениям. Тем более необходимо, чтобы преподавательский состав университета обладал надлежащей научной квалификацией, каковая может быть установлена лишь самим университетом. Основы университетской реформы, которые выяснились на реформе общественного факультета и в уставе исследовательских институтов, разделяют учебные и ученые функции университета и тем самым противоречат самой идее университета, главной задачей которого является подготовлять ученых деятелей, могущих содействовать развитию науки, и одновременно с тем давать широкое научное образование» [22].

В архиве автору удалось разыскать рукопись вышеприведенной записки, которую подписали 15 преподавателей, в том числе, А. А. Марков, В. А. Стеклов, Н. М. Гюнтер. Есть основания предполагать, что она написана рукой А. А. Маркова, чья подпись стоит первой [23].

В 1921 г. состояние здоровья Андрея Андреевича заметно ухудшилось. Он уже несколько лет страдал глаукомой, которая обострилась, когда Марковы жили еще в Зарайске. Именно тогда возникла необходимость операции; ее удачно провел доктор Выгодский в Петрограде. Однако переезд в Петроград отрицательно отразился на зрении ученого и общем состоянии его здоровья.

Осенью 1921 г. А. А. Марков слег в постель с тяжелой формой радикулита, вызывающей у больного мучительные боли. Весной 1922 г. к этому добавилась образовавшаяся в ноге аневризма. Между тем натуре Андрея Андреевича весьма тягостно было постоянное лежание в постели, он стремился на воздух. Лечащий врач разрешил ему переезд в находившийся в Детском Селе (ныне г. Пушкин) санаторий. Вероятно, это было ошибкой, так как поездка в автомобиле подействовала

---

[22] ЦГАОР, ф. 7240, оп. 14, д. 16, л. 185.
[23] Там же, л. 187.

неблагоприятно. Пришлось немедленно возвращаться в Петроград для срочной операции по удалению аневризмы.

В первые дни после операции Андрей Андреевич чувствовал себя получше, температура нормализовалась. Но уже через несколько ней появились угрожающие симптомы, вновь резко подскочила температура. Врачи установили общее заражение крови и признали состояние больного безнадежным. Утром 19 июля Андрей Андреевич впал в бессознательное состояние и на следующий день в 10 час. вечера скончался. Он похоронен на Митрофаниевском кладбище в Ленинграде [24].

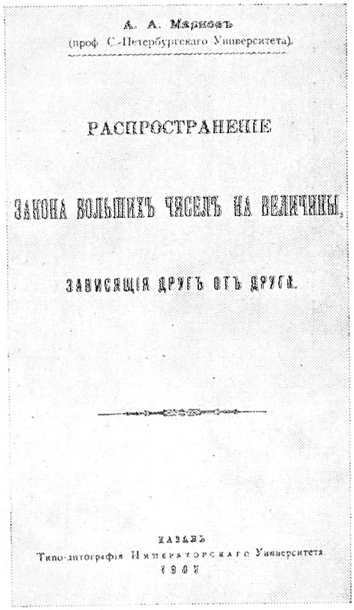
Лежа в постели, в последние недели жизни А. А. Марков корректировал рукопись «Курса по теории непрерывных дробей». Однако работа так и не была опубликована, затерявшись в издательстве [II, 134]. В. А. Стеклов, посетивший А. А. Маркова незадолго до смерти последнего, вспоминал, что на вопрос о здоровье тот только махнул рукой и начал декламировать первые строки «Евгения Онегина», перефразировав последние слова первой строфы: «„А мне — лежать и думать про себя, когда же черт возьмет меня!“ — и... заплакал» [II, 74, с. 183].

В 1923 г. в Академии наук отмечалась годовщина смерти А. А. Маркова. С яркой речью о А. А. Маркове как ученом, человеке и гражданине выступил вице-президент Академии наук В. А. Стеклов [II, 135]. Сказал о нем в своей речи и непременный секретарь Академии наук С. Ф. Ольденбург:

«Работы А. А. [Маркова] известны всюду, и всеми отмечается исключительная строгость методов его исследований, то, что он не выпускал в свет работ не вполне законченных, как это часто делают и очень выдающиеся ученые. Марков позволил себе только одно исключение из этого основного правила своей жизни; непосредственно почти перед смертью, в последнем своем труде «Трудность метода моментов, два примера неполного разрешения ее» ([I, 120].— *С. Г.*). Вот как об этом говорит его товарищ по Академии: «Передавая мне эту работу для доклада в Академии, он просил сообщить, что при нормальных условиях он ни за что не стал бы печатать исследование, не вполне законченное, но те-

[24] В 1954 г. в связи с ликвидацией Митрофаниевского кладбища прах А. А. Маркова перенесен на Литераторские мостки Волкова кладбища.

перь, говорил он, я чувствую близкий конец, опасаюсь, что до смерти не успею закончить начатое исследование, а потому и решаюсь опубликовать его как последний свой труд...» Достаточно ознакомиться с работами Маркова, чтобы понять, какое большое и практическое значение имеют многие из них. Товарищи А. А. по Академии и университету, да, вероятно, и многие другие, помнят разнообразные выступления А. А. и в печати и в собраниях, всегда, когда ему казалось, что совершена несправедливость; делалось это с таким полным пренебрежением к форме заявления и к последствиям, какие оно могло иметь для А. А., что эти выступления создали ему, несправедливо конечно, репутацию чудака; нет, он не был чудаком, А. А. только принадлежал к числу людей, которые не могут молчать, когда нарушена справедливость. Ясные, законченные, определенные были все его работы, определенным был и он сам, таким жил, таким и умер, определенно сознавая, что умирает» [II, 136, с. 1—3].


А. А. Марковъ
(проф. С.-Петербургскаго Университета).

РАСПРОСТРАНЕНІЕ

ЗАКОНА БОЛЬШИХЪ ЧИСЕЛЪ НА ВЕЛИЧИНЫ,

ЗАВИСЯЩІЯ ДРУГЪ ОТЪ ДРУГА.

КАЗАНЬ
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1907

Титульный лист работы А. А. Маркова «Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга», 1907 г.

По словам Я. В. Успенского, А. А. Марков «был последним прямым носителем традиций той блестящей эпохи русской математики, которая связана с именами Чебышева и Золотарева. С его смертью, таким образом, завершился один из самых блестящих периодов русской математики» [II, 137].

Свою речь на торжественном собрании в Академии наук, посвященном 200-летию закона больших чисел, Андрей Андреевич закончил такими словами о Я. Бернулли: «В биографиях его упоминается, что, следуя примеру Архимеда, он завещал начертать на его памятнике логарифмическую спираль и сделать надпись „Eadem mutata resurgo“ [25]. Надпись эта, конечно, указывает на найденные им свойства кривой. Но она имеет и другой смысл. В ней выражается надежда Бернулли на воскрешение и вечную жизнь. Мы можем сказать, что надежда его осуществляется. Со времени смерти Бернулли прошло более 200 лет; однако он живет и будет жить в своей теореме» [I, 102, с. 64].

Точно так же живет и будет жить в науке Андрей Андреевич Марков. Его идеи, знаменитые «марковские цепи», доказательство предельной теоремы теории вероятностей, теоремы о минимумах квадратичных форм и другие результаты навсегда вошли в золотой фонд науки [II, 138, 139]. И можно не сомневаться, что в будущем математики торжественно отметят 100-летие «цепей Маркова» — одного из крупнейших достижений математики и всего естествознания XX в.

---

[25] — Изменившись, воскресаю той же (*лат.*)

Приложения

А. В. Малышев

Работы академика А. А. Маркова по теории чисел

1. Из истории вопроса

Работ по теории чисел у А. А. Маркова сравнительно немного — 15. И все же он оставил неизгладимый след в теории чисел. И в первую очередь здесь следует указать на его магистерскую диссертацию [I, 2]. Диссертация посвящена проблеме арифметических минимумов неопределенных бинарных квадратичных форм и будет подробно рассмотрена ниже.

К этой работе естественно примыкают статьи [I, 67, 71, 75, 88], в которых рассматривается проблема арифметических минимумов неопределенных тернарных квадратичных форм, и статья [I, 70], относящаяся к той же проблеме для кватернарных квадратичных форм. Впрочем, в этих работах разбираются и другие вопросы: автоморфизм форм и приведенные представления; алгоритмы нахождения представлений; вопросы табуляризации форм.

Методы своей магистерской диссертации [I, 1, 2] А. А. Марков ([I, 5], предварительное сообщение [I, 3]) применил к решению одной задачи Жана (Ивана) Бернулли из астрономии; эту задачу можно отнести к теории диофантовых приближений.

А. А. Марков [I, 37] (краткое сообщение [I, 30]) исчерпывающе развил арифметику чисто кубических полей $Q\left(\sqrt[3]{A}\right)$. Эта работа примыкает к исследованиям Е. И. Золотарева по построению арифметики целых чисел алгебраических числовых полей.

В работе [I, 45] (ее французский вариант [I, 47]) А. А. Марков, разбирая архив П. Л. Чебышева, восстановил на основе краткой неопубликованной рукописи доказательство теоремы П. Л. Чебышева о простых делителях чисел вида $1 + 4x^2$ ($x = 1, 2, 3\ldots$).

А. А. Марков интересовался теорией трансцендентных чисел, весьма новой для того времени. Ему принадлежат две статьи [I, 6, 60] критико-методического характера, где он популяризирует эту интересную тематику.

Прежде чем подробнее остановиться на работах А. А. Маркова, введем некоторые современные понятия, не свойственные А. А. Маркову, но навеянные его исследованиями.

2. Об арифметических минимумах квадратичных форм

2.1. *Определение однородного арифметического минимума.* Пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — n-арная (при $n = 2$ форма называется бинарной; при $n = 3$ — тернарной [1]; при $n = 4$ — кватернарной) квадратичная форма

$$f(x) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

с действительными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ и определителем [2]

$$d = d(f) = \det(a_{ij}) = \det \begin{pmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & \ldots, & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Эрмит [II, 141] доказал, что для любого индекса $n \geqslant 2$ имеется такая постоянная $c = c(n)$, что какую бы действительную n-арную квадратичную форму ни взять, найдутся целые числа $x_1, \ldots, x_n$, не равные одновременно нулю, удовлетворяющие неравенству

$$|f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant c\, |d(f)|^{1/n}, \tag{3}$$

т. е. диофантово неравенство

$$|f(x)| \leqslant c\, |d(f)|^{1/n}, \quad x \in \mathbf{Z}^n, \quad x \neq 0 \tag{4}$$

разрешимо; здесь и далее $\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел; $\mathbf{Z}^n$ — множество всех целых n-мерных векторов.

---

[1] Здесь и далее мы не всегда придерживаемся определений и обозначений А. А. Маркова; например, он говорил о «тройничных» формах.

[2] Разные авторы по-разному вводят понятие определителя. В частности, А. А. Марков для $n = 2$ определителем назвал $d(f)$; для $n = 3$ его определение совпадает с нашим.

Это неравенство является предшественником знаменитой теоремы Минковского [II, 142] (первое издание — 1896 г.) о выпуклом теле, имеет те же важные приложения в теории чисел и даже в некотором смысле «качественно эквивалентно» ей. Поэтому очень важно уточнение результатов типа теоремы Эрмита — нахождение возможно меньших постоянных c, для которых диофантово неравенство (3) — (4) нетривиально разрешимо (т. е. разрешимо в целых $x \neq 0$) для всех форм f из данного множества, скажем, для совокупности $F_{r,s}$ форм (1) с данной сигнатурой [3] (r, s), $r + s = n$.

И естественной является следующая система определений (современных, только неявно содержащихся в исследованиях времени А. А. Маркова). Арифметическим минимумом [4] формы (1) мы будем называть величину

$$m(f) = \inf_{\substack{x \in \mathbf{Z}^n \\ x \neq 0}} |f(x)|. \tag{5}$$

«Нормируем» арифметический минимум формы f, рассмотрев величину

$$\mu(f) = \frac{m(f)}{|d(f)|^{\frac{1}{n}}}. \tag{6}$$

Формы f_1 и f_2 назовем кратно эквивалентными над $\mathbf{Z}$, если найдется действительное число $\lambda \neq 0$ и линейная однородная подстановка с целыми коэффициентами и определителем ± 1, переводящая f_1 в λf; обозначение: $f_1 \backsim \lambda f$. Множество форм, кратно эквивалентных данной форме f, назовем лучем классов форм, определяемым формой f. Величина $\mu(f)$ — инвариант луча классов, т. е. если $f_1 \backsim \lambda f$, то

$$\mu(f_1) = \mu(f). \tag{7}$$

---

[3] Известно, что всякая форма f вида (1) с $d(f) \neq 0$ может быть преобразована линейной однородной подстановкой с действительными коэффициентами к виду $y_1^2 + \dots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \dots - y_{r+s}^2$. Пару (r, s) (она не зависит от выбора подстановки) будем называть сигнатурой.

[4] Точная нижняя граница (5) может и не достигаться (для $r > 0$, $s > 0$), но по традиции $m(f)$ называется «минимум» (точнее, однородный арифметический минимум). И мы различаем «достижимые» формы f, для которых (5) — минимум, и «недостижимые» формы f в противном случае.

2.2. *Постоянная Эрмита. Проблема спектра Маркова.* Интересно знать «наибольшее» $\mu(f)$ для совокупности форм $f \in F_{r,s}$, для чего определим

$$\gamma_{r,s} = \sup_{f \in F_{r,s}} \mu(f) — \tag{8}$$

постоянную Эрмита (в задаче об арифметических минимумах квадратичных форм данной сигнатуры). Из определения ясно, что $\gamma_{r,s} = \gamma_{s,r}$; что теорема Эрмита о диофантовом неравенстве (3) — (4) равносильна утверждению

$$\gamma_{r,s} < +\infty; \tag{9}$$

что в качестве постоянной c в неравенстве (3) — (4) для всех $f \in F_{r,s}$ можно взять [5]

$$c = \gamma_{r,s} + \varepsilon, \tag{10}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина.

Различают два случая: 1) случай определенных форм ($n = r$, $s = 0$ или $n = s$, $r = 0$), когда $\gamma_{n,0} = \gamma_{0,n} = \gamma_n$ — классическая постоянная Эрмита, тесно связанная с плотностью плотнейшей решетчатой упаковки равных n-мерных шаров (см.: [II, 143, § 38, 39]; см. также: [II, 144, с. 302—306; II, 140, с. 49—92]); 2) случай неопределенных форм ($r > 0$, $s > 0$, $r + s = n$), которым и занимался А. А. Марков. Эти два случая принципиально различаются при рассмотрении следующей задачи.

Для заданных целых чисел $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $r + s = n$ рассмотрим множество

$$M_{r,s} = \{\mu(f) \mid f \in F_{r,s}\}, \tag{11}$$

которое мы будем называть спектром Маркова нормированных арифметических минимумов квадратичных форм сигнатуры (r, s).

Проблема спектра Маркова. 1. Описать спектр Маркова $\mathrm{M}_{r,s}$ данной сигнатуры (r, s). 2. Для каждой точки $\mu \in \mathrm{M}_{r,s}$, описать множество форм $f \in F_{r,s}$ с условием

$$\mu(f) = \mu. \tag{12}$$

---

[5] Более точный анализ показывает, что можно положить $c = \gamma\ r, s$, если $r + s \leqslant 4$, или если $r = 0$, или $s = 0$. Предположительно для $r + s \geqslant 5$, $r > 0$, $s > 0$ можно взять $c = \varepsilon$.

Из сказанного выше (см. (7)) следует, что речь здесь идет об описании лучей классов, соответствующих по (12) точке μ спектра $M_{r,s}$.

Ясно, что $M_{r,s}$ содержится в отрезке $[0, \gamma_{r,s}]$:

$$M_{r,s} \subset [0, \gamma_{r,s}]. \tag{13}$$

И для определенных форм ($r = n$ или $s = n$) сравнительно просто доказывается (см. [II, 143, 144]), что

$$M_{n,0} = M_{0,n} = [0, \gamma_{r,s}], \tag{14}$$

так что в этом случае проблема описания спектра тривиальна, а постановку второй части проблемы спектра — описание форм f с условием (12) — естественно изменить, следуя А. Н. Коркину, Е. И. Золотареву и Г. Ф. Вороному (см. прекрасный обзор этих работ [II, 140, с. 49—92, 253—268]).

В противоположность этому для неопределенных форм ($r > 0$, $s > 0$, $r + s = n$), по крайней мере для[6] $n \leqslant 4$, возникает неожиданное явление «изоляции» нормированных минимумов $\mu(f)$. В простейшем виде явление изоляции выражается в том, что включение (13) — строгое:

$$M_{r,s} \neq [0, \gamma_{r,s}]. \tag{15}$$

В более сильном виде оно заключается в том, что $\gamma_{r,s} \in M_{r,s}$ является изолированной точкой множества, причем точке $\gamma_{r,s}$ отвечает ровно один луч классов форм $f \in M_{r,s}$.

2.3. *О результатах А. Н. Коркина.* Именно в таком сильном виде явление изоляции впервые обнаружил на примере $M_{1,1}$ минимумов неопределенных бинарных квадратичных форм А. Н. Коркин ([II, 145, с. 328—340] — неоконченная рукопись; его результат был сформулирован в начале статьи [II, 146]). В нашей терминологии А. Н. Коркин доказал, что

а) $\gamma_{1,1} = \sqrt{4/5}$, $\gamma_{1,1} \in M_{1,1}$ (это знал еще Лагранж);

б) точке $\gamma_{1,1} \in M_{1,1}$ отвечает единственный луч классов с представителем

$$y_1 = x^2 - xy - y^2;$$

в) $\sqrt{1/2} \in M_{1,1}$;

---

[6] Предположительно, для n-арных неопределенных форм, $n \geqslant 5$, спектр $M_{r,s}$ состоит из одной точки $\mu = 0$ — ср. прим. 5.

г) $(\sqrt{1/2}, \sqrt{4/5}) \cap M_{1,1} = \varnothing$, т. е. целый открытый отрезок $(\sqrt{1/2}, \sqrt{4/5})$ не принадлежит спектру $M_{1,1}$. Иначе говоря (это уже терминология А. Н. Коркина и А. А. Маркова), для любой неопределенной бинарной квадратичной формы $\varphi = \varphi(x, y)$ с действительными коэффициентами неравенство

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \sqrt{4/5\,|\det \varphi|} \tag{16}$$

разрешимо в целых числах $(x, y) \neq (0, 0)$; результат не улучшаем: для формы $\varphi = \varphi_1$ постоянную $\sqrt{4/5}$ в (16) нельзя уменьшить; но если φ не кратно эквивалентно φ_1, $\varphi\ \chi\lambda\varphi_1$, то неравенство (16) можно «скачкообразно» усилить: неравенство

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \sqrt{1/2\,|\det \varphi|}, \quad \varphi \not\sim \lambda\varphi_1 \tag{17}$$

разрешимо в целых числах $(x, y) \neq (0,0)$.

3. Исследования А. А. Маркова по спектру неопределенных бинарных квадратичных форм

3.1. *Магистерская диссертация.* А. Н. Коркин, бывший фактически руководителем А. А. Маркова, предложил продолжить его исследование, изучить возможность дальнейшего «скачкообразного» уточнения неравенств (16), (17), отыскания следующих точек спектра $M_{1,1}$. А. А. Марков в своей магистерской диссертации [I, 1, 2] блестяще, в некотором смысле исчерпывающе, справился со своей задачей, полностью изучив всю начальную, дискретную часть спектра. Он (в нашей терминологии) доказал, что

а) $M_{1,1} \cap (2/3, +\infty)$ есть бесконечная последовательность чисел

$$\mu_k = \left\{\frac{9}{4} - \frac{1}{Q_k^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (k = 1, 2, 3 \ldots), \tag{18}$$

где Q_k пробегает (в возрастающем порядке) все целые положительные числа x, которые вместе с некоторыми целыми положительными числами y и z удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz. \tag{19}$$

(таких троек чисел x, y, z бесконечное число).

б) Каждой точке μ_k отвечает ровно один луч классов форм φ_k с

$$\mu(\varphi_k) = \mu_k; \tag{20}$$

эти φ_k просто конструируются с помощью решений уравнения (19): пусть $x = m$, $y = n$, $z = p$, $m = \max(m, n, p)$ — k-тое по порядку (упорядочение по величине m) решение уравнения (19); определим r, $s \in Z$ условиями

$$nr \equiv p \ (mod m), \quad 0 \leqslant r < m,$$
$$r^2 + 1 = ms;$$

тогда φ_k — любая из форм луча классов форм

$$\varphi_{n, m, p} = x^2 + \left(3 - \frac{2r}{m}\right) xy + \frac{s - 2r}{m} y^2$$

[II, 147, 148]. Все формы φ_k достижимы (имеют достижимый минимум) ($k = 1, 2...$).

в) $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = {}^2/_3 \in M_{1,1}$, причем точке $\mu = {}^2/_3$ отвечает бесконечное множество лучей классов форм $f \in F_{1,1}$ с условием $\mu(f) = {}^2/_3$.

А. А. Марков детально изучает уравнение (19) (которое ныне называется диофантовым уравнением Маркова), предлагает простой метод решения и даже составляет [7] таблицу решений уравнения (19) с $|x|$, $|y|$, $|z| \leqslant 10^6$; он вычисляет и μ_k, φ_k, ($k = 1, \ldots$ $\ldots, 20$).

В терминологии, более близкой оригиналу [I, 1, 2], основные результаты А. А. Маркова выглядят следующим образом (см. их описание в [II, 140, с. 146—149]). Для любого индекса $k = 1, 2, 3 \ldots$ неравенство

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \mu_k \sqrt{|d(\varphi)|} \tag{21}$$

разрешимо в целых числах $(x, y) \neq (0, 0)$ для любой неопределенной бинарной квадратичной формы $\varphi(x, y)$ определителя $d(\varphi) \neq 0$ с действительными коэффициентами, не кратно эквивалентной формам $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $\ldots, \varphi_{k-1}$; при этом постоянную μ_k, задаваемую фор-

[7] А. А. Марков является характерным представителем петербургской математической школы — он любит вычисления, любит доводить свои результаты «до числа», многие его работы (в том числе и по теории чисел) сопровождаются собственноручно (в буквальном смысле — вычислительных машин не было!) вычисленными таблицами.

мулой (18), в неравенстве (21) нельзя уменьшить для формы φ_k. Для $\mu \leqslant {}^2/_3 = \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k$ результаты о «скачкообразном» улучшении неравенств типа (21) при выбрасывании конечного числа лучей классов форм не имеют места.

При исследовании А. А. Марков использовал теорию Лагранжа — Гаусса периодов неопределенных бинарных квадратичных форм (с перенесением ее на формы с действительными коэффициентами) и аппарат цепных [8] дробей. При этом оказалось, что числа μ_k зависят от некоторых периодических цепных дробей, все неполные частные которых суть 1 или 2; поразительно, что такие дроби тесно связаны с задачей Жана (Ивана) Бернулли, возникшей из потребностей астрономии (см. п. 6). Тонкие рассуждения А. А. Маркова восхищают и удивляют. Трудно себе представить, как молодой автор пришел к таким законченным результатам, к таким неожиданным связям и рассуждениям. Поистине, это одна из немногих гениальных работ в теории чисел, которую можно поставить в ряд со знаменитым мемуаром Римана о простых числах (правда, совсем другим по характеру).

Идеи А. А. Маркова доказательства утверждений а) — в) вместе с довольно подробным наброском самого доказательства прекрасно изложены в книге Б. Н. Делоне [II, 140, с. 146—160] (там же — с. 160—189 — интересный геометрический комментарий). Подробное и достаточно ясное изложение дано в самом оригинале [I, 1; 2] [9].

Магистерская диссертация хорошо изложена в известной монографии Диксона [II, 149, гл. 7], в основном и посвященной исследованиям А. А. Маркова по арифметическим минимумам n-арных неопределенных квад-

---

[8] А. А. Марков называет эти дроби «непрерывными» — fractions continues (как известно, в XIX в. русская математическая терминология складывалась под влиянием французской). А. А. Марков любил аппарат цепных дробей, владел им, применял его в своих исследованиях по теории чисел, по анализу, по теории вероятностей. Он многократно читал курс лекций по теории цепных дробей (и их приложениям в анализе) [I, 127, с. 292—374].

[9] [I, 1] — перевод [I, 2] с некоторыми сокращениями и редакционными изменениями. Диксон [II, 149, с. 79—107] считал изложение А. А. Маркова (он имел в виду [I, 1]) слишком сжатым. Интересно тщательно сравнить версии [I, 1] и [I, 2] и проверить это (правда, субъективное) замечание Диксона.

ратичных форм ($n = 2, 3, 4$). В значительной степени этой монографии мы обязаны той популярности, которую приобрели результаты и идеи Маркова у теоретиков-числовиков всего мира.

3.2. *О других доказательствах результатов А. А. Маркова.* Еще до публикации монографии Диксона [II, 149] (которая в идейном плане точно следует [I, 1; 2]) делались попытки дать другие доказательства результатов А. А. Маркова о бинарных квадратичных формах или хотя бы как-то переосмыслить их. Усилиями Фробениуса, Ремака, Роджерса и Касселса был получен новый вариант доказательства теоремы Маркова, не использующий аппарата цепных дробей. Этот вариант, все же идейно близкий доказательству самого А. А. Маркова, изложен во второй главе книги Касселса [II, 147] (в частности, см. исторические замечания на с. 57).

Принципиально новое, геометрическое доказательство предложил Д. С. Горшков в своей диссертации [10], защищенной в 1953 г. Метод Д. С. Горшкова позволил в дальнейшем найти аналоги теоремы Маркова для бинарных квадратичных форм над некоторыми квадратичными полями (об этих исследованиях Д. С. Горшкова, Л. Я. Вулаха и А. Шмидта см. обзор [II, 150, с. 23—30]). К сожалению, диссертация Д. С. Горшкова не была своевременно опубликована (ее публикацию без изменений см. [II, 151]). Несколько позднее (около 1955 г.) американский математик Кон независимо от Д. С. Горшкова развил метод [11], использующий аппарат модулярных форм, идейно близкий методу Д. С. Горшкова (см. библиографию и набросок варианта метода Кона в монографии [II, 143]).

3.3. *О дальнейших исследованиях по проблеме спектра Маркова и ее обобщениям.* Замечательная работа А. А. Маркова [I, 1, 2] вызвала к жизни большое число исследований (особенно многочисленных в последнее время). Во-первых, по самому классическому спектру Маркова (и его связям со спектром Лагранжа для рациональных приближений к вещественному числу),

---

[10] *Горшков Д. С.* Геометрия Лобачевского в связи с некоторыми вопросами арифметики: Автореф. дис. Л.: ЛГУ, 1953, 7 с.

[11] Эти методы различны. По-видимому, метод Д. С. Горшкова — более общий, а метод Кона вкладывается в его метод (так считал Д. С. Горшков). Интересно изучить связь этих методов.

особенно по его недискретной части, по его обобщениям на бинарные квадратичные формы над алгебраическими (фактически — квадратичными) числовыми полями. Их обзор (см. [II, 150]). К сожалению, этот обзор несколько устарел. Он охватывает литературу лишь до 1975 г., да и то — вопреки желанию автора — не совсем полно; имеется в виду в ближайшее время опубликовать дополнения к этому обзору или заменить его полным, исчерпывающим обзором.

Во-вторых, исследования по обобщениям на арифметические минимумы неопределенных квадратичных форм от трех и более переменных. Эти исследования начал сам А. А. Марков. Они будут рассмотрены в разд. 4.

В-третьих, широкие обобщения в геометрии чисел на однородные арифметические минимумы лучевых функций, выявление для них явления изоляции, исследование структуры соответственно обобщенного спектра Маркова (см. [II, 143, с. 349—373]). Наконец, исследования, связанные с разнообразными обобщениями[12] самого понятия арифметического минимума лучевой функции (или формы), изучение спектра минимумов при таком обобщении. Многочисленные исследования подобных обобщений задачи Маркова о спектре минимумов рассмотрены в шестой и седьмой главах монографии [II, 143]. Они выходят за рамки нашего обзора.

Заметим лишь, что только для небо́льшего числа прямых обобщений классической задачи о спектре $M_{1,1}$ (бинарные квадратичные формы над квадратичными полями; задачи Лагранжа и Дирихле о диофантовых приближениях; некоторые другие близкие им задачи) исследования доведены до уровня магистерской диссертации А. А. Маркова — описана бесконечная дискретная часть спектра. В остальных ситуациях (их подавляющее большинство) доказывается лишь существование явления изоляции и находятся несколько первых точек спектра Маркова. А ведь прошло более 100 лет! И это объективное свидетельство силы магистерской диссертации Маркова.

3.4. *Исследование недискретной части спектра Маркова* $M_{1,1}$. *Связь со спектром Лагранжа.* Опишем

[12] Наиболее общее понятие арифметического минимума, содержащее, по-видимому, все остальные обобщения, было предложено Б. Н. Делоне при формулировании им общей «задачи Маркова» [II, 140, с. 191].

важнейшие результаты исследований по классическому спектру Маркова [II, 148, 150]. К сожалению, в разных публикациях (а их порядка 200) используются разные определения и обозначения. Теперь большинство авторов «опрокидывают» спектр Маркова, рассматривая вместо $\mathrm{M}_{1,1}$ спектр

$$M'_{1,1}=\left\{\mu'=\frac{2}{\mu}\;\middle|\;\mu\in M_{1,1}\right\} \tag{22}$$

(мы не будем останавливаться на «обосновании», зачем так надо делать — частично это объясняется удобством при сопоставлении спектра Маркова со спектром Лагранжа — см. ниже).

Исследование А. А. Маркова [I, 1, 2] дает исчерпывающую информацию о дискретной части спектра $\mathrm{M}'_{1,1}\subset[\sqrt{5},\ +\infty]$:

$$M'_{1,1}\cap[0,3]=\left\{\sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \frac{\sqrt{221}}{5},\ \ldots;\ 3\right\}= \\ =\{\mu'_k|(k=1,\ 2,\ \ldots);\ 3\}, \tag{23}$$

где

$$\mu'_k=\frac{2}{\mu_k}=\sqrt{9-\frac{4}{Q_k^2}},$$

причем каждому μ'_k отвечает ровно один луч классов форм φ_k (описанных выше) с условием

$$m(\varphi_k)=\frac{2}{\mu'_k}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots),$$

а точке $3\in\mathrm{M}'_{1,1}$ отвечает бесконечное число лучей классов форм φ с условием

$$m(\varphi)={}^2/_3.$$

Естественно возникает вопрос: какова структура оставшейся части спектра Маркова

$$\mathrm{M}'_{1,1}\cap[3,\ +\infty]. \tag{24}$$

И эта часть спектра $\mathrm{M}'_{1,1}$ исследована ныне почти полностью. Подробное описание результатов имеется в обзоре [II, 150]. Доказано, что спектр $\mathrm{M}'_{1,1}$ (а с ним и спектр $\mathrm{M}_{1,1}$) замкнут[13]. Выяснилось (М. Холл, Б. Н. Делоне), что, начиная с некоторого места, спектр $\mathrm{M}'_{1,1}$ — сплошной: существует такое действительное число μ', при котором

$$[\mu, \ +\infty] \subset \mathrm{M}'_{1,1}; \tag{25}$$

наименьшее $\bar{\mu} = \mu'$ с условием (25) назовем началом луча Холла, т. е. $[\bar{\mu}, \ +\infty] \subset \mathrm{M}'_{1,1}$, причем $(\nu, \ +\infty] \not\subset \not\subset \mathrm{M}'_{1,1}$ для любого числа $\nu < \bar{\mu}$. Точное значение начала луча Холла нашел Г. А. Фрейман:

$$\bar{\mu} = \frac{253589820 + 283748\sqrt{462}}{491993569} = 4{,}5278\ldots \tag{26}$$

Самым сложным оказалось строение средней части спектра Маркова

$$\mathrm{M}'_{1,1} \cap [3, \ \bar{\mu}]. \tag{27}$$

Ясно, что для выявления структуры (27) надо научиться описывать интервалы смежности этого замкнутого множества — максимальные открытые отрезки $(\alpha, \ \beta)$, не содержащие точек (27). Этому вопросу посвящено много работ. Найдено большое число конкретных интервалов смежности; разработан (А. А. Берштейном) метод, позволяющий найти все интервалы смежности, длина каждого из которых не менее заданной величины $\gamma > 0$.

К сожалению, для точек μ' спектра (24) бывает трудно описать множество лучей классов φ с условием $m(\varphi) = {}^2/\mu'$; часто это континуальное множество.

Проблема Маркова спектра $\mathrm{M}_{1,\,1}$ тесно связана с проблемой Лагранжа—Гурвица рациональных приближений действительного числа θ. Величина $\lambda = \lambda(\theta) \leqslant \infty$, определяемая как точная верхняя граница[14] действитель-

---

[13] К сожалению, многие работы, цитированные в [II, 150], содержат неточности и неясности. Это касается доказательства замкнутости $M'_{1,\,1}$ (и ниже — L), а также упоминаемых ниже исследований Г. А. Фреймана (о начале луча Холла) и А. А. Берштейна (об интервалах смежности спектра Маркова). Было бы интересно тщательно разобрать и суммировать все эти исследования.

[14] Множество $\{\tau\}$ непусто, ибо диофантово неравенство (28) всегда разрешимо при $\tau = 1$ с q сколь угодно большим (см., например, учебник И. М. Виноградова [II, 152]).

ных чисел $\tau > 0$, для которых неравенство

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{\tau q^2} \tag{28}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах p и $q > 0$, называется постоянной Лагранжа числа θ. Ясно, что если θ' и θ эквивалентны, $\theta' \sim \theta$, т. е. если

$$\theta' = \frac{a\theta + b}{c\theta + d}, \quad a, b, c, d \in Z, \quad ad - bc = \pm 1, \tag{29}$$

то $\lambda(\theta') = \lambda(\theta)$. Множество

$$L = \{\lambda(\theta) | \theta \in R\} \tag{30}$$

называется спектром Лагранжа; здесь R — множество всех действительных чисел.

Проблема спектра Лагранжа. 1) Описать спектр Лагранжа L.

2) Для каждого $\lambda \in L$ описать множество действительных чисел θ (точнее — их классы эквивалентности), для которых $\lambda(\theta) = \lambda$.

3) Установить связь со спектром Маркова $M_{1,1}$.

Гурвиц [II, 153], опираясь на исследования А. А. Маркова [I, 1, 2], показал, что для отрезка [0, 3] проблема спектра Лагранжа L и проблема спектра Маркова $M_{1,1}$, по-существу, эквивалентные задачи. Он доказал, что

$$L \cap [0, 3] = M'_{1,1} \cap [0, 3]; \tag{31}$$

что каждой точке $\lambda = \mu'_k \in L \cap [0, 3]$ отвечает ровно один класс чисел θ, просто и взаимно однозначно связанный с соответствующей формой (лучом классов) Маркова φ_k.

Доказано также (Г. А. Фрейманом), что L содержит целый луч

$$[\overline{\lambda}, +\infty] \subset L, \tag{32}$$

здесь $\overline{\lambda}$ — наименьшее, удовлетворяющее (32) начало луча Холла в проблеме спектра Лагранжа; что

$$\overline{\lambda} = \overline{\mu}. \tag{33}$$

Как и в проблеме спектра Маркова $M_{1,1}$, самую сложную структуру имеет средняя часть спектра

$$L_1 = L \cap [3, \overline{\lambda}]. \tag{34}$$

Было доказано, что L_1 (а тогда и L) — замкнутое множество; что

$$L_1 \subset \mathrm{M}'_{1,1} \cap [3, \quad \overline{\mu}], \tag{35}$$

так что $L \subset \mathrm{M}'_{1,1}$. Долгое время предполагалось, что имеет место «обратное включение»: равенство в (35), совпадение спектров Лагранжа и Маркова. На этом пути было получено большое число интересных критериев, позволяющих в случае $\nu \in \mathrm{M}'_{1,1}$ при некоторых дополнительных условиях утверждать и $\nu \in L$ (см. исследования П. Г. Когония и других авторов, цитированные в обзоре [II, 150]).

Оказалось, что на самом деле включение (35) точное. Г. А. Фрейман сконструировал целый ряд действительных чисел α с условиями

$$\alpha \in \mathrm{M}'_{1,1}, \quad \alpha \notin L.$$

Конечно, при этом $3 < \alpha < \overline{\mu} = \overline{\lambda}$. Эта проблематика не исчерпана, задача описания $\mathrm{M}_{1,1} \setminus L$ остается.

4. Арифметические минимумы неопределенных квадратичных форм от трех и более переменных

4.1. *Предварительные замечания.* После исследований [I, 1, 2] арифметических минимумов неопределенных бинарных квадратичных форм было совершенно естественно рассмотреть проблему арифметических минимумов неопределенных n-арных квадратичных форм, $n > 2$. И эти вопросы первым стал рассматривать А. А. Марков [I, 67, 70, 71, 75, 88], ссылаясь на то, что эту задачу ему поставил А. Н. Коркин, который указал и первую точку минимума для $n = 3$. Работы [I, 67, 71, 75, 88] посвящены случаю $n = 3$, [I, 70] — случаю $n = 4$. Проблема арифметических минимумов для $n > 2$ оказалась принципиально сложнее, чем в случае $n = 2$, в частности, потому, что здесь нет аппарата цепных дробей (или его эквивалентов). В противоположность [I, 1, 2] исследования А. А. Маркова [I, 67, 70, 71, 75, 88] далеко не решают проблемы — в них находится лишь несколько первых точек спектра (для $n = 3$ и $n = 4$). О случае $n \geqslant 5$ см. ниже, п. 4.4.

Наряду с проблемой арифметических минимумов А. А. Марков рассматривает и другие вопросы арифметики неопределенных квадратичных форм: автоморфизмы форм, вопросы представления чисел формами, «приведенные» представления, вопросы табуляризации форм, их классов, автоморфизмов и т. д. Здесь А. А. Марков выступает предшественником многих авторов (см., в частности, глубокие исследования Зигеля и Б. А. Венкова по автоморфизмам неопределенных квадратичных форм [II, 155—157]).

4.2. *О спектре минимумов неопределенных тернарных квадратичных форм.* Мы можем следующим образом описать результаты А. А. Маркова в исследовании арифметических минимумов неопределенных тернарных квадратичных форм [15]:

а) Первые четыре точки спектра $\mathrm{M}_{1,2} = \mathrm{M}_{2,1}$ суть

$$\mu_1 = \gamma_{1,2} = \gamma_{2,1} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \quad \mu_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \quad \mu_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \quad \mu_4 = \sqrt[3]{\frac{8}{25}}, \tag{36}$$

так что

$$M_{1,2} \cap \left[\sqrt[3]{\frac{8}{25}}, +\infty\right) = \left\{\sqrt[3]{\frac{8}{25}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}. \tag{37}$$

б) Каждой из точек μ_i спектра, перечисленных в (36), отвечает ровно один луч классов форм φ_i с условием

$$\mu(\varphi_i) = \mu_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4); \tag{38}$$

в качестве представителей этих лучей можно взять формы

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -x^2 - y^2 + 2z^2 - xy, \\ \varphi_2 &= x^2 - y^2 - 2z^2 + xy, \\ \varphi_3 &= -x^2 - y^2 + 3z^2, \\ \varphi_4 &= -x^2 + y^2 - {}^5/_2\, z^2 - xy; \end{aligned} \tag{39}$$

каждая из этих форм имеет достижимый минимум.

Эти утверждения могут быть переформулированы следующим образом. Пусть $f = f(x, y, z)$ — неопреде-

[15] Не только терминология, но и обозначения А. А. Маркова несколько отличаются от наших; в частности, индексацию он начинает с $i = 0$ и говорит о формах $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (вместо наших $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$). Но в противоположность $n = 2$ для $n = 3$ понятие определителя формы, по Маркову, совпадает с нашим.

ленная тернарная квадратичная форма с действительными коэффициентами и с определителем $D = \det f \neq 0$. Тогда:

1) найдутся целые числа x, y, z, не равные одновременно нулю, т. е. $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, с условием

$$|f(x, y, z)| \leqslant \sqrt[3]{\frac{2}{3}|D|}, \tag{40}$$

причем неравенство (40) не улучшаемо (коэффициент $\sqrt[3]{2/3}$ не может быть уменьшен): для формы φ_1 и ее луча классов (40) превращается в равенство;

2) если f не эквивалентна кратному формы φ_1, то найдутся целые числа $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, для которых

$$|f(x, y, z)| \leqslant \sqrt[3]{\frac{2}{5}|D|}, \tag{41}$$

причем неравенство (41) не улучшаемо для формы φ_2;

3) если f не эквивалентна ни кратному формы φ_1, ни кратному формы φ_2, то найдутся целые числа $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, для которых

$$|f(x, y, z)| \leqslant \sqrt[3]{\frac{1}{3}|D|}, \tag{42}$$

причем неравенство (42) не улучшаемо для формы φ_3;

4) если f не эквивалентна ни кратному φ_1, ни кратному φ_2, ни кратному φ_3, то найдутся целые числа $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, для которых

$$|f(x, y, z)| \leqslant \sqrt[3]{\frac{8}{25}|D|}, \tag{43}$$

причем неравенство (43) не улучшаемо для φ_4.

Последняя формулировка (утверждения 1) — 4)) близка к оригинальной (см. [I, 75, 88]). Фактически эти результаты А. А. Марков доказал [16] только для $k = 1, 2, 3$ (см. [I, 75]); результаты о μ_4 и φ_4 были лишь сформулированы в работе [I, 88] (и долгое время не были замечены специалистами). Коротко, методика

[16] Диксон [II, 149, гл. 8] отмечает некоторые погрешности в доказательствах А. А. Маркова [I, 74], в частности его упрощающее предположение о том, что формы f с $\mu(\varphi) \geqslant \sqrt[3]{\frac{8}{25}}$ имеют достижимый минимум. А. А. Марков делает это предположение сознательно и говорит [I, 67, 75], что можно рассмотреть и общий случай.

А. А. Маркова в исследовании арифметических минимумов неопределенных тернарных квадратичных форм — некоторое «сведение» этой задачи к той же проблеме для бинарных квадратичных форм и использование затем результатов магистерской диссертации [I, 1, 2].

Результаты А. А. Маркова об арифметических минимумах неопределенных тернарных квадратичных форм подробно излагаются в гл. 8 уже цитированной монографии Диксона [II, 149] (Диксон опирался только на работу [I, 75], по-видимому, не зная работы [I, 88]). Там исправляются мелкие погрешности в рассуждениях А. А. Маркова, доказательство избавляется от предположения достижимости минимума форм (это усиление принадлежит Оппенгейму; см. [II, 149, гл. 8]), доказываются и утверждения о точке $\mu_4 \in M_{1,2}$ и форме φ_4. Однако идейная сторона исследований А. А. Маркова сохраняется полностью (и даже становится более наглядной).

Исследования А. А. Маркова [I, 67, 75, 88] о спектре $M_{1,2}$ существенно продвинул Б. А. Венков [17] с помощью разработанного им метода «внешней» вершины. К четырем точкам (36) спектра $M_{1,2}$ он добавил еще семь, так что теперь известно, что

$$M_{1,2} \cap \left[\sqrt[3]{\frac{2}{9}},\ +\infty\right] = \{\mu_{11}, \mu_{10}, \ldots, \mu_2, \mu_1\}, \tag{44}$$

где μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 выписаны в (36),

$$\mu_5 = \sqrt[3]{\frac{7^3}{1\,200}}, \quad \mu_6 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \quad \mu_7 = \sqrt[3]{\frac{4}{15}},$$

$$\mu_8 = \sqrt[3]{\frac{5^3}{3 \cdot 13^2}}, \quad \mu_9 = \sqrt[3]{\frac{3^3}{112}}, \quad \mu_{10} = \sqrt[3]{\frac{2^5}{135}},$$

$$\mu_{11} = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}; \tag{45}$$

каждой из этих точек спектра μ_k отвечает ровно один луч классов форм φ_k ($k = 1, 2, \ldots, 11$); помимо (39), это:

$$\varphi_5 = -x^2 - y^2 + \frac{17}{7}z^2 - \frac{6}{7}xy + \frac{2}{7}xz + \frac{18}{7}yz$$

---

[17] Исследование Б. А. Венкова [II, 157] очень сложно. Было бы крайне интересно его разобрать, по-возможности упростить и продолжить, скажем, найти μ_{12} и φ_{12}.

$$\varphi_6 = -x^2 - y^2 + 3z^2 - xz - yz,$$
$$\varphi_7 = -x^2 - y^2 + 5z^2 - xy,$$
$$\varphi_8 = -\frac{7}{5}x^2 - \frac{11}{5}y^2 + z^2 + 2xy + \frac{9}{5}xz + \frac{1}{5}yz,$$
$$\varphi_9 = -x^2 - y^2 + \frac{8}{3}z^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{8}{3}yz, \tag{46}$$
$$\varphi_{10} = -x^2 - y^2 + \frac{21}{8}z^2 + xy + 3yz,$$
$$\varphi_{11} = -x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + 2xz + 2yz.$$

Любопытно заметить, что в работе [I, 88] А. А. Марков, говоря о том, что ряд (36) продолжить трудно, выделяет формы $2\varphi_6$ и $2\varphi_7$, считая, по-видимому, что они должны дать следующие точки спектра $M_{1,2}$.

4.3. *Арифметические минимумы неопределенных кватернарных квадратичных форм.* Этой проблеме А. А. Марков посвятил только одну работу [I, 70]. Он доказал, что если $f = f(x, y, z, t)$ — неопределенная квадратичная форма с действительными коэффициентами и определителем $D \neq 0$, не эквивалентная ни одной из форм

$$\pm\sqrt[4]{\frac{4}{7}|D|}\left\{\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t}{2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(z-\frac{t}{2}\right)^2-\frac{7}{4}t^2\right\}, \tag{47}$$

$$\pm\sqrt[4]{\frac{4}{9}|D|}\,\{(x^2+xy+y^2)-2(z^2+zt+t^2)\}, \tag{48}$$

арифметические минимумы которых равны (и достижимы) соответственно

$$\sqrt[4]{\frac{4}{7}|D|}, \qquad \sqrt[4]{\frac{4}{9}|D|}, \tag{49}$$

то найдутся целые числа x, y, z, t, не равные одновременно нулю, для которых

$$|f(x, y, z, t)| < \sqrt[4]{\frac{4}{9}|D|}. \tag{50}$$

Для уяснения этих результатов (а они, подобно $n = 3$, получаются некоторым «сведением» задачи о минимумах кватернарных форм к минимумам тернарных форм; и здесь А. А. Марков для простоты рассматривает только формы с достижимым минимумом) заметим следующее: в противоположность $n = 3$, где $M_{1,2} = M_{2,1}$, случай неопределенных кватернарных квадратичных форм целесообразно разбить на два по их сигнатурам: а) случай $M_{1,3} = M_{3,1}$; б) случай $M_{2,2}$.

В случае а) утверждение А. А. Маркова означает, что

$$M_{3,1} \cap \left[\sqrt[4]{\frac{4}{9}}, +\infty\right) = \{\mu_1^{(3,1)}\}, \tag{51}$$

так что точка $\mu_1^{(3,1)} = \gamma_{3,1} = \sqrt[4]{4/7}$ — единственная точка μ спектра $M_{3,1}$ с условием $\mu \geqslant \sqrt[4]{4/9}$ изолирована, причем ей отвечает единственный луч классов форм, представляемый формой

$$\varphi_1^{(3,1)} = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 - xt - yz - zt. \tag{52}$$

В случае б) утверждение А. А. Маркова означает лишь, что $\mu_1^{(2,2)} = \gamma_{2,2} = \sqrt[4]{4/9}$, т. е., что

$$M_{2,2} \subset \left[0, \sqrt[4]{\frac{4}{9}}\right], \quad \sqrt[4]{\frac{4}{9}} \in M_{2,2}, \tag{53}$$

причем точке $\mu_1^{(2,2)}$ отвечает единственный луч классов форм, представляемый формой

$$\varphi_1^{(2,2)} = x^2 + y^2 - 2z^2 - 2t^2 + xy - 2zt. \tag{54}$$

По-существу, те же, но несколько более сильные результаты получены [18] в девятой главе монографии Диксона [II, 149]. Там, в частности, доказано, что

$$M_{3,1} \cap \left(\sqrt[4]{\frac{10}{27}}, +\infty\right) = \{\mu_1^{(3,1)}\}, \tag{55}$$

что несколько сильнее (51); и что

$$M_{2,2} \cap \left(\sqrt[4]{\frac{4}{15}}, +\infty\right) = \{\mu_1^{(2,2)}\}, \tag{56}$$

что усиливает (53) и показывает изолированность точки

$$\mu_1^{(2,2)} = \sqrt[4]{\frac{4}{9}} \in M_{2,2}.$$

---

[18] Как там указывается, они принадлежат Оппенгейму. По-видимому, эти авторы не знали о статье А. А. Маркова [I, 70]. Интересно сравнить эти исследования, а также работы [II, 158, 159] по методам доказательства (по-видимому, они сходны).

Эти исследования были продолжены Оппенгеймом [II, 158, 159]. В случае а) он доказал, что

$$M_{3,1} \cap \left[\sqrt[4]{\frac{1}{5}}, +\infty\right) = \{\mu_3^{3,1}, \mu_2^{3,1}, \mu_1^{3,1}\}, \tag{57}$$

где

$$\mu_1^{(3,1)} = \sqrt[4]{\frac{4}{7}}, \quad \mu_2^{(3,1)} = \sqrt[4]{\frac{4}{15}}, \quad \mu_3^{(3,1)} = \sqrt[4]{\frac{2}{9}}, \tag{58}$$

причем если $f \in F_{3,1}$ и $\mu(f) = \mu_1^{(3,1)}$, то f кратно эквивалентна форме $\varphi_1^{(3,1)}$; если $\mu(f) = \mu_2^{(3,1)}$, то f кратно эквивалентна одной из форм:

$$\begin{aligned} \varphi_2^{(3,1)} &= x^2 + 2y^2 + 2z^2 - t^2 + xt + 2yz, \\ \psi_2^{(3,1)} &= 2x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 + 2xt - yz; \end{aligned} \tag{59}$$

если $\mu(f) = \mu_3^{(3,1)}$, то f кратно эквивалентна форме

$$\varphi_3^{(3,1)} = x^2 + y^2 + z^2 - 6t^2 + xy. \tag{60}$$

В случае б) Оппенгейм доказал, что

$$M_{2,2} \cap \left(\sqrt[4]{\frac{1}{10}}, +\infty\right) = \\ = \{\mu_7^{(2,2)}, \mu_6^{(2,2)}, \mu_5^{(2,2)}, \mu_4^{(2,2)}, \mu_3^{(2,2)}, \mu_2^{(2,2)}, \mu_1^{(2,2)}\}, \tag{61}$$

$$\mu_1^{(2,2)} = \sqrt[4]{\frac{4}{9}}, \quad \mu_2^{(2,2)} = \sqrt[4]{\frac{4}{17}}, \quad \mu_3^{(2,2)} = \sqrt[4]{\frac{4}{25}},$$

$$\mu_4^{(2,2)} = \sqrt[4]{\frac{16}{117}}, \quad \mu_5^{(2,2)} = \sqrt[4]{\frac{4}{33}}, \quad \mu_6^{(2,2)} = \sqrt[4]{\frac{1}{9}},$$

$$\mu_7^{(2,2)} = \sqrt[4]{\frac{64}{625}}, \tag{62}$$

причем если $f \in F_{2,2}$ и $\mu(f) = \mu_k^{(2,2)}$, то форма f кратно эквивалентна форме $\varphi_k^{(2,2)}$ ($k = 1, \ldots, 7$) или (в случае $k = 6$) форме $\psi_k^{(2,2)}$, где [19]

$$\varphi_1^{(2,2)} = t^2 - x^2 + y^2 - z^2 + xt + zt - xy + xz,$$

$$\varphi_2^{(2,2)} = t^2 - x^2 + y^2 - z^2 + xt + zt - xy + xz + 3yz,$$

---

[19] Мы выписываем представителей лучей классов по статье [II, 159]. В формуле (54) и формулах из [II, 158] в качестве $\varphi_1^{(2,2)}$ и $\varphi_2^{(2,2)}$ берутся другие представители этих лучей.

$$\varphi_3^{(2,2)} = t^2 - x^2 + 2y^2 - 2z^2 + xt + 2yz, \tag{63}$$
$$\varphi_4^{(2,2)} = t^2 - x^2 + y^2 - z^2 + xt + zt - xy + 4yz,$$
$$\varphi_5^{(2,2)} = t^2 - x^2 - 2y^2 - z^2 + xt + zt + 6yz,$$
$$\varphi_6^{(2,2)} = t^2 - x^2 + y^2 - z^2 + xt + zt - xy + \\ + xz + 5yz,$$
$$\psi_6^{(2,2)} = t^2 + x^2 - 3y^2 - 3z^2,$$
$$\varphi_7^{(2,2)} = t^2 - x^2 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{5}{2}z^2 + tx + \frac{5}{2}yz.$$

4.4. *О случае $n \geqslant 5$.* Предполагается (см. [II, 160]), что для $r + s = n \geqslant 5$, $r \neq 0$, $s \neq 0$ спектр $M_{r,s}$ тривиален: если $f \in F_{r,s}$, то $\mu(F_{r,s}) = 0$, т. е.

$$\gamma_{r,s} = 0, \quad M_{r,s} = \{0\}. \tag{64}$$

Гипотеза (64) доказана для всех $n \geqslant 21$ (сложное аналитическое доказательство, круговой метод), а также в некоторых других частных случаях (комментарий и литературу см. в [II, 143, с. 346—349]).

5. О других работах А. А. Маркова по теории чисел

5.1. *Об одном вопросе Жана Бернулли.* Как «побочный продукт» (и как в некотором смысле ориентир [20]) магистерской диссертации [I, 1, 2] А. А. Марков [I, 5] (краткое сообщение [I, 3]) использовал ее методы в известной задаче Жана (Ивана) Бернулли, которую можно отнести к теории диофантовых приближений и которая имеет приложения в астрономии. Задача заключается в следующем. Пусть даны действительные числа α и β; найти правило, по которому можно строить

$$F(\alpha x + \beta),\ x = 0, 1, 2, \ldots,$$

где через $F(\gamma)$ обозначено ближайшее к γ целое число

$$\alpha x + \beta - {}^1/_2 < F(\alpha x + \beta) \leqslant \alpha x + \beta + {}^1/_2,$$

т. е. правило построения $[\alpha x + \beta_1]$, $\beta_1 = \beta - {}^1/_2$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$.

---

[20] Ибо цепные дроби, от которых зависят точки μ_k спектра Маркова $M_{1,1}$ как оказалось [I, 1, 2], тесно связаны с особыми рядами целых положительных чисел, которые встретились Жану Бернулли при решении совсем другой задачи.

Такие правила предложил Жан Бернулли (для $\beta = 0$) без доказательства. А. А. Марков доказал эти правила и дал их обобщения. Хорошее изложение этого исследования А. А. Маркова дано в § 13 второй главы монографии [II, 161]. Дальнейшее развитие тематики см. в статье [II, 162] и в цитированной там литературе.

5.2. *Об арифметике чисто кубических полей.* Общая теория целых алгебраических чисел, разработанная к тому времени Куммером, Дедекиндом и Е. И. Золотаревым, применяется А. А. Марковым [I, 37] (предварительное сообщение [I, 30]) к построению арифметики целых чисел алгебраического числового поля $Q(\sqrt[3]{A})$, где A — целое рациональное число, не делящееся на куб целого рационального числа, большего 1.

Такое поле, получающееся из поля рациональных чисел Q «присоединением» к нему корня θ уравнения $\theta^3 - A = 0$, называется чисто кубическим. Следуя идеям Е. И. Золотарева (см., в частности: [II, 163]), А. А. Марков описывает порядок целых чисел поля $Q(\sqrt[3]{A})$ (определение целых чисел такое же, как [II, 163], т. е. общепринятое ныне). Дано полное решение вопроса о разложении простого рационального числа на идеальные простые множители поля (т. е. полностью решается проблема разложимости в $Q(\sqrt{A})$. Рассматривается число классов идеальных чисел; для $A = 2$, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19 это число классов найдено. Приводится вычисленная А. А. Марковым таблица кубических единиц, которая заканчивается словами «я убежден, что почти все эти единицы являются основными» (из теоремы Дирихле следует, что в случае $Q(\sqrt[3]{A})$ имеется ровно одна основная единица). По-видимому, главная цель А. А. Маркова — популяризовать новую тогда арифметику целых алгебраических чисел, незаслуженно мало известный подход Е. И. Золотарева, почтить его память (работа имеет подзаголовок: «памяти Е. И. Золотарева»). О дальнейших исследованиях арифметики чисто кубического поля в [II, 164] продолжены вычисления числа классов идеалов — результаты приведены и в [II, 165, с. 115].

5.3. *О простых делителях чисел вида* $1 + 4x^2$. Работа [I, 45] (ее французская версия [I, 47]) — обработка рукописи, найденной при разборе научного наследия П. Л. Чебышева (А. А. Марков — один из редакторов собрания сочинений П. Л. Чебышева). В ней доказывается следующая теорема (которую, по-видимому, надо считать теоремой Чебышева[21]). Пусть $P = P(N)$ — наибольший простой делитель последовательности чисел

$$\prod_{x=1}^{N} (1 + 4x^2). \qquad \text{Тогда} \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{P}{N} = \infty.$$

Это предложение многократно обобщалось и уточнялось. Теперь оно известно для любых многочленов $f(x)$ произвольной степени (см., например: [II, 167]). Теорема Чебышева—Маркова — весьма отдаленное приближение к знаменитой проблеме: доказать, что число простых чисел вида $x^2 + 1$ $(x = 1, 2 \ldots)$ бесконечно.

5.4. *Теория трансцендентных чисел.* А. А. Марков интересовался новой для его времени тематикой (кстати, особенно активно развивающейся в наше время) — теорией трансцендентных чисел, т. е. чисел, не удовлетворяющих никакому алгебраическому уравнению с рациональными коэффициентами. Он дал [I, 6] свое изложение результатов Эрмита и Линдемана о трансцендентности чисел e и π, а также указал [I, 60] на ошибку Сильвестра в его доказательстве трансцендентности π.

5.5. *Другие работы.* А. А. Марков участвовал в издании собраний сочинений П. Л. Чебышева [II, 168] и А. Н. Коркина [II, 169], издал «Теорию сравнений» П. Л. Чебышева [II, 170], сопроводив ее предисловием и написав на нее рецензию в американский журнал [I, 78]. Он писал о жизни и деятельности П. Л. Чебышева [I, 62, 126], Н. Я. Сонина [I, 111] и Г. Ф. Вороного [I, 83, 84], написал свою автобиографию [I, 115]. Ему принадлежит единственная (!) работа по алгебре [I, 74].

В этом приложении мы стремились не столько к подробному изложению работ А. А. Маркова по теории чисел (это в основном можно найти в замечательной книге [II, 140]), сколько к рассмотрению дальнейшего развития его методов и результатов. Влияние работ А. А. Маркова на теорию чисел до сих пор велико. Внимательный читатель заметит в тексте главы явные и неявные формулировки проблем, выросших из этих работ и заслуживающих исследования.

---

[21] Тем более она еще ранее была сформулирована (без доказательства) как результат Чебышева в курсе анализа Эрмита (см.: [II, 166, с. 258]).

П. К. Суетин

Работы академика А. А. Маркова по математическому анализу

Как и все выдающиеся русские математики, А. А. Марков занимался многими проблемами математического анализа. Его внимание привлекали теория непрерывных дробей, исчисление конечных разностей, теория интерполирования функций, экстремальные задачи в функциональных пространствах, проблема моментов, теория ортогональных многочленов, квадратурные формулы, дифференциальные уравнения, теория функций, наименее уклоняющихся от нуля, и другие вопросы. По многим разделам математического анализа А. А. Марков получил выдающиеся результаты, которые играют важную роль и в наши дни.

В общем списке научных трудов А. А. Маркова работы по математическому анализу составляют более одной третьей части. Наиболее важные из этих работ содержатся в сборнике избранных трудов А. А. Маркова, опубликованном в 1948 г. [I, 127].

А. А. Марков воспринял идеи своего учителя великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышева и занимался решением многих задач, поставленных в его трудах. В результате этого классические работы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова о предельных величинах интегралов составили основы теории моментов и теории экстремальных задач в функциональных пространствах.

Многие результаты А. А. Маркова имеют различные интерпретации, обобщения и продолжения. При изучении научного наследия А. А. Маркова некоторые авторы по-разному понимают результаты, полученные ученым, ибо во многих случаях его оригинальные доказательства, обладая большим запасом общности, позволяют усилить формулировки и применить эти доказательства в других, более сложных случаях.

Самой характерной особенностью научных работ А. А. Маркова является то, что наиболее важные его результаты постоянно упоминаются и цитируются во многих работах по математическому анализу и в настоящее время. При этом некоторые теоремы А. А. Маркова называются классическими и формулируются в несколько ином виде, чем в работах самого А. А. Маркова. Например, сейчас наиболее цитируема классическая теорема А. А. Маркова о сходимости подходящих дробей некоторой непрерывной дроби, в которую разлагается интеграл типа Коши вне сегмента-носителя меры.

Выдающимся научным произведением является монография А. А. Маркова «Исчисление конечных разностей», изданная в 1910 г. В этой монографии А. А. Марков с большим научным и педагогическим мастерством изложил многие важные вопросы математического анализа. Эта монография — одна из самых популярных книг по математическому анализу. Она постоянно упоминается и даже конкретно цитируется не только во многих работах по математическому анализу, но и в некоторых книгах по вычислительной математике.

В настоящей работе рассматриваются наиболее важные результаты А. А. Маркова по математическому анализу, описывается также развитие и продолжение этих результатов и значение их в современной математике.

1. Неравенство А. А. Маркова для производной алгебраического многочлена

В 1889 г. вышла работа А. А. Маркова «Об одном вопросе Д. И. Менделеева». В одной из своих работ по химии Д. И. Менделеев поставил вопрос об оценке производной квадратного трехчлена через максимальное значение абсолютной величины самого трехчлена. Рассматривая этот вопрос, А. А. Марков обобщил задачу Менделеева и получил очень важное неравенство, которое впоследствии оказалось исходным пунктом многочисленных исследований по теории приближения функций.

Пусть дан алгебраический многочлен с действительными коэффициентами

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n. \tag{1}$$

Предположим, что на сегменте $[a, b]$ этот многочлен удовлетворяет неравенству

$$|P_n(x)| \leqslant M, \quad x \in [a, b]. \tag{2}$$

А. А. Марков ставит вопрос об оценке производной $P_n'(x)$ многочлена (1) при условии (2). При этом

А. А. Марков четко различает два случая. В первом случае число x фиксировано в интервале (a, b). Во втором случае x является произвольным числом из сегмента $[a, b]$, т. е. рассматривается максимум величины $|P_n'(x)|$ на сегменте $[a, b]$. В соответствии с этим А. А. Марков решает следующие задачи.

Задача 1. Для фиксированного $x \in (a, b)$ найти наибольшее значение $|P_n'(x)|$ при условии (2).

Задача 2. Найти максимум величины $|P_n'(x)|$ на сегменте $[a, b]$ при условии (2).

Решая вторую задачу, А. А. Марков установил, что при условии (2) имеет место формула

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |P_n'(x)| \leqslant \frac{2Mn^2}{b-a}.$$

В настоящее время этот результат формулируется как *теорема А. А. Маркова.* Если алгебраический многочлен (1) степени не выше n удовлетворяет условию (2), то для его производной выполняется неравенство

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{2Mn^2}{b-a}, \qquad x \in [a, b]. \tag{3}$$

В той же работе А. А. Марков показывает, что неравенство (3) является неулучшаемым относительно всех величин, входящих в него, если рассматривать весь класс многочленов степени не выше n. Впоследствии очень важное неравенство (3) получило название неравенства Маркова об оценке производной алгебраического многочлена на всем сегменте.

При решении задачи 1 А. А. Марков фактически доказал еще одно неравенство

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{Mn}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}, \qquad x \in (a, b). \tag{4}$$

В этом неравенстве производная алгебраического многочлена оценивается во внутренних точках интервала (a, b) в зависимости от положения точки x на этом интервале.

Неравенство (4) именно в таком виде впервые опубликовал С. Н. Бернштейн [II, 171], но при этом он заметил, что доказательство этого неравенства, а также его другая, не совсем удачная форма содержатся в вышеупомянутой работе А. А. Маркова.

В 1912 г. С. Н. Бернштейн [II, 171] рассмотрел аналогичный круг вопросов для тригонометрических полиномов, т. е. для полиномов вида

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{5}$$

Он доказал, что если тригонометрический полином (5) удовлетворяет условию

$$|T_n(x)|\leqslant M,\qquad x\in[-\pi,\ \pi],$$

то для его производной справедливо неравенство

$$|T_n'(x)|\leqslant Mn,\qquad x\in[-\pi,\ \pi]. \tag{6}$$

Далее, в той же работе С. Н. Бернштейн опубликовал неравенство (4) и дал его простое доказательство. Кроме того, С. Н. Бернштейн упростил и доказательство неравенства А. А. Маркова (3).

Неравенство (6) получило название неравенства Бернштейна для производной тригонометрического полинома. Следует заметить, что в монографии И. П. Натансона [II, 172] неравенство (6) называется первым неравенством Бернштейна, а неравенство (4) — вторым неравенством Бернштейна. Но чаще, например в монографии [II, 173], неравенство (4) называется неравенством Маркова—Бернштейна.

Неравенства (3), (4) и (6) неулучшаемы в том смысле, что для каждого из них при любом n существуют примеры алгебраических многочленов или тригонометрических полиномов, для которых соответствующие неравенства обращаются в равенства. Вместе с тем очевидно, что неравенство А. А. Маркова (3) является точным только на концах сегмента $[a,\ b]$, а внутри интервала $(a,\ b)$ это неравенство при больших n является очень грубым, ибо в числителе правой части есть множитель n^2. В то же время неравенство Маркова—Бернштейна (4) имеет смысл только внутри интервала, но зато внутри интервала $(a,\ b)$ правая часть этого неравенства возрастает со скоростью n. Представленное в виде

$$\sqrt{(b-x)(x-a)}\,|P_n'(x)|\leqslant Mn,\qquad x\leqslant[a,\ b],$$

неравенство Маркова — Бернштейна (4) называется весовой оценкой производной алгебраического многочлена. В этом случае неравенство Маркова (3) следует назвать равномерной оценкой производной алгебраического многочлена на всем сегменте. Из неравенств (3) и (4) легко получается оценка

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{2Mn}{\sqrt{(b-x)(x-a)}+\frac{b-a}{2n}}, \quad x \in [a, b].$$

Эта оценка более наглядно характеризует возможный порядок возрастания абсолютной величины производной алгебраического многочлена на концах сегмента и внутри его. Но более точным, конечно, является неравенство

$$|P_n'(x)| \leqslant nM \min\left\{\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}, \frac{2n}{b-a}\right\}.$$

Далее, из неравенства Бернштейна (6) повторным применением его получается оценка

$$|T_n^{(k)}(x)| \leqslant Mn^k, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Аналогично повторным применением неравенства Маркова (3) получаем

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{M2^k n^2 (n-1)^2 \ldots (n-k+1)^2}{(b-a)^k}, \quad x \in [a, b].$$

Но при $k \geqslant 2$ этот результат не является точным. Точное неравенство для старших производных получено в работе В. А. Маркова [II, 20] и имеет вид

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{M2^k n^2 (n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{(b-a)^k[(2k-1)!!]}.$$

В дальнейшем многие математики рассматривали различные обобщения и аналоги неравенств А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна. Приведем только некоторые из этих результатов.

С. Н. Бернштейн обобщил неравенство В. А. Маркова на многомерный случай. А. Зигмунд установил аналог неравенства С. Н. Бернштейна для пространства $L_p[-\pi, \pi]$, где $p > 1$. Его результат имеет вид

$$\|T_n'\|_{L_p[-\pi, \pi]} \leqslant n \|T_n\|_{L_p[-\pi, \pi]}.$$

Принципиально новый результат установил С. М. Никольский в 1951 г. Он доказал, что при условии $1 \leqslant p < q < \infty$ имеет место неравенство

$$\|T_n\|_{L_q[-\pi, \pi]} \leqslant 2n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_n\|_{L_p[-\pi, \pi]}.$$

В этом неравенстве сравниваются различные нормы одного и того же тригонометрического полинома [II, 174].

Дальнейшие результаты об оценке производных алгебраических многочленов, тригонометрических полиномов, целых функций различных классов и частных производных получили С. М. Никольский [II, 174], И. И. Ибрагимов [II, 175], И. И. Привалов, Н. К. Бари [II, 176] и многие другие.

В монографии М. Я. Зингера [II, 177] подробно исследована общая задача об оценке производных алгебраических многочленов и тригонометрических полиномов, рассмотрены дальнейшие обобщения неравенств А. А. Маркова, А. А. Маркова — С. Н. Бернштейна, С. Н. Бернштейна, В. А. Маркова.

В монографии С. Карлина и В. Стаддена [II, 173] неравенства (3), (4) и (6) называются неравенствами А. А. Маркова — С. Н. Бернштейна. Все эти неравенства формулируются и доказываются в терминах теории вероятностей. Приводятся также различные обобщения этих неравенств и применение их в статистике.

Аналогичный круг вопросов в комплексной области оказался более сложным и более содержательным. Основные неравенства для алгебраических многочленов и их производных в комплексной области изложены в монографии В. К. Дзядыка [II, 178].

Все эти неравенства, которые называются основными неравенствами для алгебраических многочленов и тригонометрических полиномов в теории приближения функций, применяются при доказательстве так называемых обратных теорем теории приближения функций, а также во многих других вопросах. Хотелось бы еще раз отметить, что начало этому большому кругу вопросов было положено в работе А. А. Маркова «Об одном вопросе Д. И. Менделеева», которая была опубликована в 1889 г.

2. Классическая теорема А. А. Маркова о сходимости непрерывных дробей

Пусть дана аналитическая в окрестности бесконечно удаленной точки функция

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{z^{k+1}}, \qquad |z|>R. \tag{1}$$

Если все определители Ганкеля для последовательности $\{c_k\}$ отличны от нуля, то функции $f(z)$ сопоставляется некоторая чебышевская непрерывная дробь

$$\cfrac{\beta_1}{z-\alpha_1-\cfrac{\beta_2}{z-\alpha_2-\cfrac{\beta_3}{z-\alpha_3-\ldots}}} \tag{2}$$

Подходящая дробь порядка n для непрерывной дроби (2) имеет вид

$$R_n(z)=\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)},$$

где $P_{n-1}(z)$ и $Q_n(z)$ — некоторые алгебраические многочлены степеней соответственно $n-1$ и n. Эта подходящая дробь обладает замечательным аппроксимационным свойством, а именно справедливо разложение

$$f(z)-\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}=\frac{A_1^{(n)}}{z^{2n+1}}+\frac{A_2^{(n)}}{z^{2n+2}}+\ldots \tag{3}$$

Иными словами, имеет место равенство

$$\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{c_k}{z^{k+1}}+\sum_{k=2n}^{\infty}\frac{B_k^{(n)}}{z^{k+1}}.$$

Таким образом, функции $f(z)$, определяемой разложением (1), соответствует последовательность рациональных дробей

$$R_n(z)=\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}, \qquad n=1, 2, \ldots \tag{4}$$

Соотношение (3) означает, что каждая рациональная дробь (4) является наилучшим локальным приближением функции (1) в окрестности точки $z=\infty$. Разумеется, равенство (3) можно принять в качестве определения рациональных дробей (4) как дробей наилучшего локального приближения функции (1). Это экстремальное свойство подходящих дробей (4) лежит в основе многочисленных приложений непрерывных дробей к различным вопросам математического анализа (механические квадратуры, ортогональные многочлены, теория интерполирования функций, проблема моментов).

Наиболее важные результаты о непрерывных дробях получены в классических трудах П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, Т. Стилтьеса. Здесь мы приведем только один результат А. А. Маркова.

Теорема А. А. Маркова. Если функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \int_a^b \frac{g(x)\,dx}{z-x}, \qquad z \overline{\in} [a, b], \tag{5}$$

где функция $g(x)$ неотрицательна и интегрируема на сегменте $[a, b]$, то последовательность рациональных дробей (4) сходится к функции $f(z)$ равномерно на всяком замкнутом множестве, расположенном вне сегмента $[a, b]$.

Впервые эта теорема была доказана А. А. Марковым в работе «Доказательство сходимости многих непрерывных дробей» [I, 13], опубликованной в 1885 г. Затем эта теорема была опубликована повторно в работе А. А. Маркова [I, 38].

В настоящее время теорема А. А. Маркова формулируется в более общем виде, ибо ее доказательство позволяет установить более общий результат.

Пусть на действительной оси задана конечная положительная мера $d\alpha(x)$ с компактным носителем, который принадлежит сегменту Δ. Тогда вместо (5) можно рассмотреть функцию

$$f(z) = \int_\Delta \frac{d\alpha(x)}{z-x}, \qquad z \overline{\in} \Delta. \tag{6}$$

В этом случае аналогично формуле (1) для интеграла (6) имеем разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}}, \qquad |z| > R.$$

При этом коэффициенты разложения определяются по формуле

$$c_k = \int_\Delta x^k\, d\alpha(x), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

и называются степенными моментами меры $d\alpha(x)$.

При этих условиях последовательность рациональных дробей (4) сходится к функции (6) равномерно на всяком замкнутом множестве, расположенном вне сегмента Δ. Именно так формулируется теорема А. А. Маркова в настоящее время [II, 179, 180].

Приведем один результат А. А. Гончара из его работы [II, 179], в которой рассматривается обобщение теоремы А. А. Маркова.

Предположим, что в интеграле (6) носитель меры $d\alpha(x)$ расположен на сегменте $[-1, 1]$, а сама мера удовлетворяет так называемому условию Г. Сеге, т. е.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln \alpha'(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx > -\infty. \tag{7}$$

В частности, это условие выполняется, если мера определяется по формуле

$$d\alpha(x) = w_0(x)\,|x - x_1|^{\gamma_1}\,|x - x_2|^{\gamma_2} \ldots |x - x_k|^{\gamma_k}\,dx,$$

где $\{x_m\}$ — произвольные фиксированные точки, расположенные на сегменте $[-1, 1]$, $\gamma_m > -1$, а функция $w_0(x)$ положительна и непрерывна на этом сегменте.

Теорема А. А. Гончара. Пусть функция $F(z)$ мероморфна в дополнении D сегмента $[-1, 1]$ до полной комплексной плоскости и представима там в виде

$$F(z) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(x)}{z - x} + R(z), \qquad z \in D, \tag{8}$$

где мера $d\alpha(x)$ удовлетворяет условию Г. Сеге (7), а рациональная функция $R(z)$ имеет полосы в области D. Тогда рациональные дроби (4) для функции (8) обладают следующими свойствами:

1. Каждый полюс функции $R(z)$ в области D при возрастании n «притягивает» столько полюсов подходящих дробей (4) функции (8), какова его кратность, а остальные полюсы функции (4) стремятся к сегменту $[-1, 1]$.

2. Последовательность рациональных функций (4) сходится к функции (8) равномерно внутри области D_0, получающейся из области D удалением всех полюсов функции $R(z)$.

Таково обобщение А. А. Гончара теоремы А. А. Маркова. Некоторые другие результаты по обобщению теоремы А. А. Маркова в различных направлениях изложены в работах [II, 180—183, 185—187].

Далее, во многих современных работах классическая теорема А. А. Маркова цитируется в связи с исследованиями по теории аппроксимаций Паде. В рамках этой теории рациональные дроби (4) со свойством (3) называются диагональными аппроксимациями Паде. Рассмотрим эти аппроксимации в общем виде. Прежде всего заметим, что аппроксимации Паде можно определить как для функций, заданных своим разложением вида (1), так и для функций, определенных своими рядами Тейлора в начале координат. Пусть функция задана своим разложением

$$f_1(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k + \ldots$$

Если фиксированы два целых неотрицательных числа n и m, то при некоторых дополнительных условиях существуют такие два многочлена $P_n(z)$ и $Q_m(z)$, что имеет место разложение

$$f_1(z) - \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = A_1^{(n,\,m)} z^{n+m+1} + A_2^{(n,\,m)} z^{n+m+2} + \ldots$$

Варьируя номера n и m, получим систему рациональных функций

$$R_{nm}(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \qquad n = 0, 1, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots,$$

которые называются аппроксимациями Паде для функции $f_1(z)$ в начале координат. Очевидной заменой независимого переменного можно получить аппроксимации Паде для функций, заданных своим разложением вида (1). Ясно, что в бесконечной матрице $\| R_{nm}(z) \|$ функции (4) занимают главную диагональ, в связи с этим функции (4) называются диагональными аппроксимациями Паде.

В настоящее время теория аппроксимаций Паде развивается очень интенсивно и имеет многочисленные применения, в том числе в теоретической физике и в вычислительной математике. Важные результаты по теории сходимости аппроксимаций Паде получены в работах А. А. Гончара и его школы. Основные первоначальные свойства аппроксимаций Паде, а также их простейшие применения излагаются в монографии [II, 188].

3. Теорема А. А. Маркова о полиномах наилучшего приближения в пространстве суммируемых функций

В теории приближения функций и в вычислительной математике хорошо известно, что из всех пространств L_p, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, полиномы наилучшего приближения легко находятся только в гильбертовом пространстве L_2, а во всех других случаях нахождение полиномов наилучшего приближения — трудная задача. В связи с этим важное значение имеют конкретные признаки полиномов наилучшего приближения. В случае чебышевской метрики, т. е. при $p = \infty$, П. Л. Чебышев установил необходимый и достаточный признак полинома наилучшего приближения, этот признак содержится в теореме о чебышевском альтернансе [II, 172, 189].

В работе «О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием» [I, 127] А. А. Марков, продолжая исследования А. И. Коркина, Е. И. Золотарева, Т. Стилтьеса, рассмотрел случай пространства L_1 и указал достаточное условие полинома наилучшего приближения в метрике этого пространства. Этот результат А. А. Маркова имеет различные интерпретации, многочисленные следствия и обобщения. Разные формулировки теоремы А. А. Маркова объясняются тем, что его оригинальное доказательство применяется в различных случаях, которые сам А. А. Марков, естественно, все не рассматривал.

Приведем сначала формулировку теоремы А. А. Маркова из монографии Н. И. Ахиезера [II, 189].

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана марковская система непрерывных функций

$$\lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\ \ldots,\ \lambda_k(x),\ \ldots,\ \lambda_n(x). \tag{1}$$

В силу определения марковской системы функций при любом $k < n$ существует только один полином вида

$$F_k(x) = c_1\lambda_1(x) + c_2\lambda_2(x) + \ldots + c_k\lambda_k(x),$$

который наименее уклоняется от функции $\lambda_{k+1}(x)$ в метрике пространства L_1, т. е. выполняется условие

$$E_k(\lambda_{k+1}, L_1) = \int_a^b |\lambda_{k+1}(x) - F_k(x)|\,dx =$$

$$= \inf \int_a^b |\lambda_{k+1}(x) - P_k(x)|\,dx,$$

где точная нижняя граница берется по множеству всех полиномов вида

$$P_k(x) = a_1\lambda_1(x) + a_2\lambda_2(x) + \ldots + a_k\lambda_k(x). \qquad (2)$$

Как и в случае чебышевской метрики полиномы

$$Q_1(x) = \lambda_1(x), \qquad Q_2(x) = \lambda_2(x) - F_1(x), \ldots,$$
$$Q_k(x) = \lambda_k(x) - F_{k-1}(x), \ldots,$$

называются полиномами, наименее уклоняющимися от нуля в метрике пространства L_1. Нетрудно показать, что полином $Q_k(x)$ имеет на интервале (a, b) $k-1$ нулей, причем в этих нулях он меняет знак. Обозначим через $\{x_s\}$ нули полинома $Q_k(x)$ на интервале (a, b).

Пусть теперь на сегменте $[a, b]$ дана непрерывная функция $f(x)$. При фиксированном $k < n$ вводим для нее наилучшее приближение в метрике пространства L_1, т. е. рассматриваем величину

$$E_k(f, L_1) = \inf \int_a^b |f(x) - P_k(x)|\, dx,$$

где точная нижняя граница берется по множеству всех полиномов вида (2).

Теорема А. А. Маркова. Если некоторый полином $\Phi_k(x)$ вида (2) удовлетворяет условиям

$$f(x_s) - \Phi_k(x_s) = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, k-1,$$

причем разность $f(x) - \Phi_k(x)$ меняет знак в точках $\{x_s\}$ и только в них, то $\Phi_k(x)$ есть полином наилучшего приближения функции $f(x)$ в метрике пространства L_1 и имеет место равенство

$$E_k(f, L_1) = \int_a^b |f(x) - \Phi_k(x)|\, dx =$$
$$= \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sign} Q_k(x)\, dx \right|.$$

Приведем еще одну формулировку теоремы А. А. Маркова из монографии И. К. Дауговета [II, 191].

Пусть W_n есть конечномерное размерности n подпространство пространства L_1. Можно считать, что подпространство W_n есть множество всех полиномов степени не выше n по некоторой базисной системе n функций вида (1), причем эти функции не обязательно образуют марковскую систему. Известно, что в пространстве L_1 при любом фиксированном n существует такая функция $g(x)$, что для каждого полинома $\psi_n(x)$ из множества W_n выполняется условие

$$\int_a^b \psi_n(x) \operatorname{sign} g(x)\, dx = 0.$$

Обозначим через $\{x_k\}$ нули функции $g(x)$ на интервале (a, b).

Теорема А. А. Маркова. Пусть дана функция $f(x) \in L_1$ и $E_n(f, L_1)$ есть ее наилучшее приближение полиномами из множества W_n в метрике пространства L_1, т. е.

$$E_n(f, L_1) = \inf \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|\, dx.$$

Если для некоторого полинома $\varphi_n(x) \in W_n$ разность $f(x) - \varphi_n(x)$ меняет знак в точках $\{x_k\}$, то $\varphi_n(x)$ есть полином наилучшего приближения функции $f(x)$ в L_1, причем имеет место равенство

$$E_n(f, L_1) = \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|\, dx = \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sign} g(x)\, dx \right|.$$

В монографиях [II, 189, 191] рассматриваются различные примеры, частные случаи и применения этих теорем А. А. Маркова. В частности, в § 87 монографии [II, 189] приведен аналог теоремы А. А. Маркова в классе целых функций экспоненциального типа.

4. Классическая монография А. А. Маркова «Исчисление конечных разностей»

Как известно, в теории конечных разностей рассматриваются различные математические операции над функциями, аргумент которых принимает дискретные значения. Многие понятия и результаты математического анализа, в котором исследуются функции с непрерывно изменяющимся аргументом, имеют соответствующие аналоги в исчислении конечных разностей.

Исторически исчисление конечных разностей развивалось параллельно с математическим анализом.

Первоначальные результаты в этой области получили П. Ферма, И. Барроу, Г. Лейбниц. Как самостоятельная математическая дисциплина исчисление конечных разностей оформилось в XVIII в. после трудов И. Ньютона, Б. Тейлора, Дж. Стирлинга, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, П. Лапласа. Дальнейшие результаты по этой дисциплине получили К. Гаусс, Ф. Бессель, О. Коши, П. Л. Чебышев, Ш. Эрмит. А. Пуанкаре.

В целом исчисление конечных разностей можно рассматривать как исходный, первоначальный этап развития вычислительной математики.

А. А. Марков посвятил исчислению конечных разностей несколько своих работ. В 1889 г. вышла небольшая монография А. А. Маркова [I, 22], в которой рассматривались вопросы интерполирования функций и простейшие свойства конечных разностей (122 с.). В 1891 г. вышло продолжение этой работы [I, 29], в котором исследовались уравнения в конечных разностях и вопросы суммирования функций (124 с.). Обе эти работы имели общее название «Исчисление конечных разностей». Затем были литографированы курсы лекций А. А. Маркова по исчислению конечных разностей.

И, наконец, в 1910 г. вышла монография А. А. Маркова «Исчисление конечных разностей», которая является главным, завершающим его трудом по этой дисциплине. В этой монографии А. А. Марков систематизировал все известные к тому времени результаты многих авторов. Продолжительная научная работа по этой теме и большой опыт чтения лекций позволили А. А. Маркову создать выдающееся математическое произведение с несомненно высокими научными и методическими достоинствами. Характерной особенностью этой монографии А. А. Маркова является тот факт, что впервые в математической литературе в этой монографии тщательно цитируются работы других авторов, причем не в качестве примечания внизу страницы, а общим списком в конце почти каждой главы. Так, в конце первой главы под рубрикой «Литература» упоминаются работы А. Бриггса, И. Ньютона, Дж. Стирлинга, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, К. Гаусса, А. Ампера, О. Коши, П. Л. Чебышева, Ш. Эрмита, К. А. Поссе.

Можно считать, что до выхода этой монографии А. А. Маркова происходил процесс накопления фактов, разработки определений и методов теории конечных разностей. А монография А. А. Маркова стала первым научным, систематизированным изложением этой дисциплины, включающим все известные к тому времени результаты в наилучшем виде.

Ввиду особой важности этой монографии для развития математического анализа и вычислительной математики приведем полностью наименования всех ее глав.

Отдел первый. Интерполирование.

Глава I. О формулах интерполирования.

Глава II. Конечные разности различных порядков.

Глава III. Выражение разностей через производные и производных через разности.

Глава IV. О составлении и употреблении математических таблиц.

Глава V. Применение интерполирования к вычислению интегралов.

Глава VI. О некоторых свойствах функций Лежандра и о разложении интеграла

$$\int_{c}^{\partial} \frac{dx}{z-x} = \log \frac{z-c}{z-\partial}$$

в непрерывную дробь.

Глава VII. Некоторые обобщения.

Отдел второй. Уравнения в конечных разностях и суммирование.

Глава I. Суммирование в связи с вопросом об определении функции по ее разности первого порядка.

Глава II. Формула Эйлера.

Глава III. Приложения формулы Эйлера.

Глава IV. Об уравнениях в конечных разностях вообще.

Глава V. Линейные уравнения первого порядка.

Глава VI. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Глава VII. Связь линейных уравнений в конечных разностях второго порядка с непрерывными дробями.

Глава VIII. Приложения двукратных сумм к преобразованию рядов.

Из этого перечня глав следует, что монография А. А. Маркова охватывает большой круг важных вопросов, которые являются основой вычислительной математики. Кроме того, в монографии излагаются многие вопросы, которые на первый взгляд не относятся к теории конечных разностей и не отражены в названиях глав (свойства ортогональных многочленов, проблема моментов, сходимость подходящих дробей и др.).

В истории этой замечательной монографии совершенно четко просматриваются следующие удивительные факты.

1. Хотя со времени выхода монографии А. А. Маркова прошло уже более 75 лет, она продолжает постоянно упоминаться и цитироваться в самых разнообразных математических изданиях. Естественно и понятно упоминание этой монографии в работах по теории конечных разностей. Но часто она цитируется в статьях и книгах по теории приближения функций, например в известных монографиях Н. И. Ахиезера [II, 189], В. Л. Гончарова [II, 184], И. П. Натансона [II, 172], по теории ортогональных многочленов, например в монографиях Я. Л. Геронимуса [II, 192] и Г. Сеге [II, 193]. Очень часто эта монография цитируется в работах по вычислительной математике, например в книге Ш. Е. Микеладзе [II, 194] и в учебном пособии Б. П. Демидовича и И. А. Марона [II, 195] (в списках литературы к главам III, VI, XVI). Наконец, монография А. А. Маркова открывает списки литературы к статьям «Конечных разностей исчисление» в Большой советской энциклопедии (второе издание) и в Математической энциклопедии.

2. Как уже было отмечено, исчислением конечных разностей до А. А. Маркова занимались многие математики. Но их работы и результаты после выхода монографии А. А. Маркова не цитируются и не упоминаются; лишь иногда, главным образом в энциклопедиях, приводятся их имена.

3. По теории конечных разностей имеется несколько других монографий, например монографии Д. Селиванова, Н. Е. Нерлунда, А. О. Гельфонда, но они цитируются меньше и только в работах по теории конечных разностей.

4. Многие вопросы, рассмотренные в монографии А. А. Маркова, и в настоящее время излагаются так же, как в этом труде, причем сохраняются не только формулировки и доказательства, но даже и обозначения. Возможно, частично и этим объясняются многочисленные упоминания монографии А. А. Маркова в книгах по

теории приближений и по вычислительной математике.

5. Как известно, к настоящему времени исчисление конечных разностей распалось на отдельные разделы, которые вошли в разные математические дисциплины. Так, теория интерполирования входит теперь в теорию приближения функций, а теория конечных разностей является частью вычислительной математики. Благодаря работам В. Л. Гончарова и А. О. Гельфонда [II, 196] конечные разности нашли весьма важные применения в теории аналитических функций, что очень сильно изменило само содержание теории конечных разностей. В результате всего этого исчисление конечных разностей как отдельная математическая дисциплина в настоящее время фактически не существует. Но при всем этом монография А. А. Маркова не потеряла своего значения и продолжает оказывать влияние на развитие различных областей математики.

6. Во многих научных работах и в настоящее время монография А. А. Маркова цитируется в связи с вопросами, которые не относятся к теории конечных разностей, но рассматриваются в этой монографии. Например, на с. 112—114 приводится теорема (теперь А. А. Маркова) о сходимости подходящих дробей некоторой непрерывной дроби. Именно в связи с этой теоремой монография А. А. Маркова цитируется во многих работах по теории аппроксимаций Паде [II, 179]. Далее, в монографии А. А. Маркова (отд. 1, гл. V) рассматриваются наилучшие квадратурные формулы для определенных интегралов, в связи с чем эта монография цитируется в седьмой и девятой главах монографии В. И. Крылова [II, 197], при этом (с. 174—175) подробно излагается идея А. А. Маркова о наилучших квадратурных формулах с наперед заданными узлами.

Все вышесказанное свидетельствует о том, что монография А. А. Маркова «Исчисление конечных разностей», опубликованная в 1910 г., является выдающимся математическим произведением, которое на долгие годы определило и стимулировало развитие многих областей математического анализа.

5. Исследования П. Л. Чебышева и А. А. Маркова об экстремальных значениях интегралов

Во многих работах П. Л. Чебышева [II, 198] и А. А. Маркова рассматривается задача о нахождении предельных величин интегралов при некоторых интерполяционных условиях. Интересная сама по себе, эта экстремальная задача явилась исходным пунктом исследований в различных направлениях (экстремальные задачи в функциональных пространствах, проблема моментов, чебышевские и марковские системы функций).

Пусть дан сегмент $[a, b]$ и конечная система чисел $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Требуется найти такую положительную функцию $f(x)$, что выполняются условия

$$\int_a^b x^k f(x)\,dx = c_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

и, кроме того, интеграл

$$J(f) = \int_u^v f(x)\,dx \tag{2}$$

при фиксированных u и v $(a \leqslant u < v \leqslant b)$ имеет минимальное (или максимальное) значение. Эту задачу рассматривал П. Л. Чебышев в 1874 г. при различных условиях (n — четное либо отдельно n — нечетное, $u = a$ либо $v = b$).

В 1884 г. А. А. Марков в работе «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей» [I, 9] обобщил приведенную выше задачу П. Л. Чебышева следующим образом.

Пусть на сегменте $[a, b]$ дана некоторая функция $g(x)$. Вместо функционала (2) А. А. Марков рассматривает функционал

$$J(f) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \tag{3}$$

и ставит задачу об определении экстремальных значений этого функционала при тех же условиях (1).

В 1896 г. вышла работа А. А. Маркова «Новые приложения непрерывных дробей» [I, 50]. В этой работе искомая функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant f(x) \leqslant L, \tag{4}$$

а функция $g(x)$, определяющая функционал (3), непрерывно дифференцируема $n+1$ раз на сегменте $[a, b]$, причем производная $g^{(n+1)}(x)$ сохраняет знак. При условиях (1) и (4) А. А. Марков находит максимум и минимум интеграла (3) и определяет обе экстремальные функции. Исследуя эту экстремальную задачу, А. А. Марков подробно изучает разложения в непрерывные дроби двух выражений:

$$\exp\left\{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx\right\},$$

$$\frac{z-a}{z-b} \times \exp\left\{-\frac{1}{L}\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx\right\},$$

которые рассматриваются при тех же условиях (1) и (4).

Начиная с 1886 г. А. А. Марков в своих работах рассматривает более общую экстремальную задачу, а именно вместо степеней независимого переменного, $1, x, x^2, \ldots, x^n$ вводится некоторая система непрерывно дифференцируемых на сегменте $[a, b]$ функций

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x), \lambda_{n+1}(x). \tag{5}$$

Далее вводятся моменты неизвестной функции

$$\int_a^b \lambda_k(x) f(x)\,dx = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{6}$$

и ищутся экстремумы интеграла (3) при условиях (4) и (6).

Относительно функций (5) предполагается, что для них при $x \in [a, b]$ положительны все определители

$$\lambda_1(x), \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_2(x) \\ \lambda_1'(x) & \lambda_2'(x) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_2(x) & \lambda_3(x) \\ \lambda_1'(x) & \lambda_2'(x) & \lambda_3'(x) \\ \lambda_1''(x) & \lambda_2''(x) & \lambda_3''(x) \end{vmatrix},$$

$$\ldots, \begin{vmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_2(x) & \ldots \lambda_{n+1}(x) \\ \lambda_1'(x) & \lambda_2'(x) & \ldots \lambda_{n+1}'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{(n)}(x) & \lambda_2^{(n)}(x) & \ldots \lambda_{n+1}^{(n)}(x) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

При этом А. А. Марков замечает, что положительность определителей (7) нужна только для того, чтобы на полиномы вида

$$P_{n+1}(x) = a_1\lambda_1(x) + a_2\lambda_2(x) + \ldots + a_{n+1}\lambda_{n+1}(x) \qquad (8)$$

можно было бы перенести некоторые свойства обычных алгебраических многочленов. В частности необходимо, чтобы любой нетривиальный полином (8) имел на сегменте не более n нулей. А вспомогательная функция $g(x)$ вместе с системой функций (5) должна удовлетворять дополнительному условию

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(x) & \lambda_2(x) & \ldots & \lambda_{n+1}(x) & g(x) \\ \lambda_1'(x) & \lambda_2'(x) & \ldots & \lambda_{n+1}'(x) & g'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{(n+1)}(x) & \lambda_2^{(n+1)}(x) & \ldots & \lambda_{n+1}^{(n+1)}(x) & g^{(n+1}(x) \end{vmatrix} > 0. \qquad (9)$$

В 1898 г. вышла самая главная работа А. А. Маркова по теории экстремальных задач и проблеме моментов «О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием» [I, 56]. В книге [I, 127] эта работа занимает 85 с. В этой работе наряду с исследованием экстремальных задач ставятся и частично решаются некоторые вопросы, которые в целом составляют основы теории моментов.

Прежде всего в этой работе А. А. Марков продолжает исследование систем функций (5) при положительности определителей (7). Пусть на сегменте $[a, b]$ дана система точек $\{x_k\}$ с условием

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n+1} \leqslant b. \qquad (10)$$

Для системы (5) вводится определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(x_1) & \lambda_1(x_2) & \ldots & \lambda_1(x_{n+1}) \\ \lambda_2(x_1) & \lambda_2(x_2) & \ldots & \lambda_2(x_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n+1}(x_1) & \lambda_{n+1}(x_2) & \ldots & \lambda_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

В начале работы А. А. Марков доказывает, что если все определители (7) положительны, то при условии (10) определитель (11) тоже положителен.

Первая экстремальная задача в этой работе А. А. Маркова формулируется следующим образом. Пусть даны моменты неизвестной функции

$$\int_a^b \lambda_k(x) f(x)\,dx = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (12)$$

и два произвольных числа $A < B$. Требуется найти такую функцию $f(x)$, которая удовлетворяет интерполяционным условиям (12) и условию

$$A \leqslant f(x) \leqslant B, \tag{13}$$

причем интеграл

$$\int_a^b \lambda_{n+1}(x) f(x)\,dx \tag{14}$$

имеет экстремальное значение. При решении этой задачи А. А. Марков замечает, что числа $\{c_k\}$ в равенствах (12) не могут быть произвольными, а должны удовлетворять определенным условиям, и исследует эти условия.

Во второй экстремальной задаче при тех же условиях (12) и (13) вместо интеграла (14) рассматривается интеграл

$$J(f) = \int_a^v f(x) g(x)\,dx, \tag{15}$$

где v фиксировано с условием $a < v \leqslant b$. При этом функция $g(x)$ удовлетворяет условию (9) с заменой числа $n+1$ числом n. Рассматриваются также и другие экстремальные задачи.

При исследовании всех этих экстремальных задач А. А. Марков обращает внимание на следующие вопросы.

1. При каких условиях на систему чисел $\{c_k\}$ и на систему функций $\{\lambda_k(x)\}$ существует функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям (12) и (13)?

2. При каких условиях эта функция единственная?

3. В случае неединственности решения интерполяционной задачи необходимо изучить весь класс функций, удовлетворяющих условиям (12) и (13).

Именно в последнем случае ставится вопрос об отыскании экстремальных значений интегралов (14) или (15).

Следует заметить, что все экстремальные задачи А. А. Марков рассматривал не сами по себе, а для решения некоторых конкретных задач из теории вероятностей. Эта связь экстремальных задач А. А. Маркова с теорией вероятностей хорошо раскрывается в монографии Я. Л. Геронимуса [II, 192].

После А. А. Маркова системы функций $\{\lambda_k(x)\}$, фигурирующие в экстремальных задачах А. А. Маркова, рассматривались в работах многих математиков.

В 1926 г. С. Н. Бернштейн ввел понятие чебышевской системы функций. Эти системы функций были подробно исследованы им в монографии [II, 199].

Система действительных функций (5) называется чебышевской системой порядка n на сегменте $[a, b]$, если любой нетривиальный полином вида (8) имеет на этом сегменте не более n нулей. Нетрудно доказать, что для этого свойства необходимо и достаточно, чтобы при условии (10) был отличен от нуля определитель (11).

Затем было введено понятие марковской системы функций [II, 189]. Система функций (5) называется марковской системой на сегменте $[a, b]$, если любая ее подсистема $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_k(x)$ при $k \leqslant n+1$ является чебышевской системой порядка $k-1$.

Из содержания настоящего параграфа следует, что чебышевские системы функций фактически ввел А. А. Марков, а С. Н. Бернштейн сформулировал определение этих систем и исследовал их дальнейшие свойства. Позднее А. Хаар установил, что положительность определителя (11) необходима и достаточна для того, чтобы для всякой непрерывной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ существовал единственный полином вида (8), являющийся полиномом наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Современное изложение теории экстремальных задач П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, а также основные применения этих задач содержатся в монографиях С. Карлина и В. Стаддена [II, 173], М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана [II, 200].

6. Проблема моментов А. А. Маркова

Н. И. Ахиезер [II, 190], М. Г. Крейн [II, 201], Я. Л. Геронимус [II, 192] и многие другие совершенно справедливо считают, что своими работами по предельным значениям интегралов А. А. Марков сформулировал основные задачи, получил первоначальные результаты и заложил основы дальнейшего развития одной из важнейших проблем современной математики — проблемы моментов. В самом деле, главное содержание экстремальных задач, которые исследовал А. А. Марков, заключается в том, чтобы найти неизвестную функцию $f(x)$ по ее известным моментам, т. е. решить систему функциональных уравнений

$$\int_a^b \lambda_k(x) f(x)\,dx = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

при некотором добавочном условии на неизвестную функцию $f(x)$. Поэтому по современной терминологии экстремальные задачи А. А. Маркова можно назвать укороченной обобщенной проблемой моментов с добавочным условием.

Следует заметить, что неизвестную функцию А. А. Марков подчиняет конкретному условию

$$A \leqslant f(x) \leqslant B, \qquad x \in [a, b]. \tag{2}$$

Иными словами, ищется не решение вообще, а решение из некоторого класса функций. При этом А. А. Марков неоднократно замечает, что не при всякой системе чисел $\{c_k\}$ возможно решение рассматриваемой задачи.

После работ А. А. Маркова задача нахождения функции $f(x)$ при условиях (1) и (2) в случае конечного числа моментов стала называться проблемой моментов А. А. Маркова. Основные результаты по этой проблеме изложены в монографиях [II, 200, 201]. Приведем некоторые формулировки из этих монографий.

Прежде всего заметим, что Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [II, 201] вместо условия (2) ввели симметричное условие

$$-L \leqslant f(x) \leqslant L, \qquad x \in [a, b], \tag{3}$$

и назвали в этом случае задачу нахождения функции $f(x)$ при условиях (1) и (3) L-проблемой моментов А. А. Маркова. Используя теорию билинейных и квадратичных форм, они дали полное решение этой L-проблемы моментов А. А. Маркова сначала в случае одного, а затем двух и нескольких интервалов, причем был рассмотрен и случай бесконечного интервала. В дальнейшем была сформулирована так называемая абстрактная L-проблема моментов в нормированном пространстве, полное решение которой излагается в монографии [II, 200].

Далее, в порядке обобщения во многих работах вместо интегралов (1) стали рассматривать интегралы

Стилтьеса

$$\int_a^b \lambda_k(x)\, d\sigma(x) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где искомая функция $\sigma(x)$ не убывает и имеет ограниченное изменение на сегменте $[a, b]$. В этом случае числа $\{c_k\}$ называются обобщенными моментами функции распределения $\sigma(x)$ относительно системы функций $\{\lambda_k(x)\}$.

Пусть даны система непрерывных и линейно независимых функций

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_n(x), \tag{5}$$

и некоторая система действительных чисел

$$c_1, c_2, \ldots, c_n. \tag{6}$$

Рассмотрим множество полиномов вида

$$P_n(x) = a_1\lambda_1(x) + a_2\lambda_2(x) + \ldots + a_n\lambda_n(x). \tag{7}$$

На этом множестве введем линейный функционал $F(P_n)$ по формуле

$$F(P_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k.$$

Назовем систему чисел (6) позитивной относительно системы функций (5), если из условия $P_n(x) \geqslant 0$ при $x \in [a, b]$ следует условие $F(P_n) \geqslant 0$.

Теорема 1. Для того чтобы числа (6) были обобщенными моментами некоторой функции $\sigma(x)$, т. е. для существования функции $\sigma(x)$, удовлетворяющей условиям (4), необходимо и достаточно, чтобы система чисел (6) была позитивной относительно системы функций (5).

Можно рассматривать случай бесконечной последовательности функций $\{\lambda_k(x)\}_1^\infty$ и бесконечной последовательности чисел $\{c_k\}_1^\infty$.

Теорема 2. Для того чтобы последовательность чисел $\{c_k\}$ допускала представление (4), где функция $\sigma(x)$ не убывает и имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы при любом натуральном n система чисел (6) была бы позитивной относительно системы функций (5).

Доказательство теоремы 2 легко получается из теоремы 1 и известных теорем Хелли об интегралах Стилтьеса. Таким образом, переход от укороченной проблемы моментов А. А. Маркова к полной проблеме моментов в данных условиях не представляет затруднений.

Пусть теперь даны комплексные функции (5) и комплексные числа (6). Предположим, что существует хотя бы один полином вида (7), для которого выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n}[a_k\lambda_k(x)+\bar{a}_k\overline{\lambda_k(x)}]\geqslant 0, \qquad x\in[a,b].$$

Теорема 3. Для того чтобы система комплексных чисел $\{c_k\}$ допускала представление (4), необходимо и достаточно, чтобы при любых $\{\alpha_k\}$ из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n}[\alpha_k\lambda_k(x)+\bar{\alpha}_k\overline{\lambda_k(x)}]\geqslant 0, \qquad x\in[a,b],$$

следовало бы неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k c_k+\bar{\alpha}_k c_k)\geqslant 0.$$

А если заданы бесконечная последовательность комплексных функций $\{\lambda_k(x)\}$ и бесконечная последовательность комплексных чисел $\{c_k\}$, то для представления (4) необходимо и достаточно, чтобы теорема 3 выполнялась для любого натурального номера n.

Таковы простейшие результаты по проблеме моментов А. А. Маркова из монографий [II, 200, 201].

Как известно, после работ А. А. Маркова в проблеме моментов исследовано много задач и получено много различных результатов. Приведем наиболее важные формулировки.

1. В 1894 г. Т. Стилтьес [II, 202] исследовал степенную проблему моментов для случая полусегмента $[0,\infty)$, а именно в этом случае даны моменты

$$\int_{0}^{\infty}x^k\,d\sigma(x)=c_k, \qquad k=0,1,\ldots,$$

и требуется найти функцию $\sigma(x)$, которая не убывает и имеет ограниченную вариацию на $[0,\infty)$. Впоследствии задача определения функции $\sigma(x)$ при этих условиях получила название проблемы моментов Стилтьеса. Теоретически ясно, что переход от случая конечного сегмента $[a, b]$ к случаю бесконечного полусегмента $[0, \infty]$ связан с большими трудностями, которые Т. Стилтьес успешно преодолел с помощью теории непрерывных дробей [II, 202].

2. В 1920 г. Г. Гамбургер рассмотрел степенную проблему моментов для всей оси. В этом случае даны интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\sigma(x) = c_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и требуется найти неубывающую функцию $\sigma(x)$ с ограниченным изменением на всей оси. Впоследствии эта задача стала называться проблемой моментов Гамбургера.

3. В 1911 г. А. Герглотц и в 1921 г. Ф. Рисс исследовали задачу определения неубывающей функции $\sigma(\theta)$ ограниченной вариации на полусегменте $[0, 2\pi)$ при условии, что известны ее тригонометрические моменты

$$\int_{0}^{2\pi} e^{ik\theta} \, d\sigma(\theta) = c_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Эта задача получила название тригонометрической проблемы моментов.

4. В 1921 г. Ф. Хаусдорф рассмотрел степенную проблему моментов для сегмента $[0, 1]$. В этом случае даны моменты

$$\int_{0}^{1} x^k \, d\sigma(x) = c_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ф. Хаусдорф доказал, что для существования неубывающей функции $\sigma(x)$ ограниченной вариации на $[0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{c_k\}$ была абсолютно монотонной, т. е. при любых n и k выполнялось условие

$$\Delta^n c_k = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m c_{k+m} \geqslant 0.$$

Задача отыскания функции $\sigma(x)$ в этом случае стала называться проблемой моментов Хаусдорфа.

Подробные исследования всех этих проблем излагаются в монографиях [II, 172, 190, 200, 201].

5. В монографии Я. Л. Геронимуса [II, 192] сформулирована общая проблема моментов на комплексной плоскости, которая включает в себя все вышеприведенные частные случаи. Пусть на комплексной плоскости переменного z дано некоторое замкнутое множество точек E. С другой стороны, пусть дана бесконечная матрица комплексных чисел $\| \mu_{ks} \|$. Требуется найти такую функцию распределения $\psi(\omega)$ на множестве E, что имеют место равенства

$$\int_E z^k \bar{z}^s \, d\psi(\omega) = \mu_{ks}, \qquad k, s = 0, 1, 2, \ldots .$$

Здесь имеется в виду, что функция $\psi(\omega)$ неотрицательна, аддитивна и характеризует распределение массы на множестве E, а интеграл понимается в смысле Стилтьеса.

Важные результаты по проблеме моментов в комплексной области получил Ю. А. Казьмин [II, 203].

7. Современное изложение экстремальных задач и проблемы моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова

Большинство своих результатов по экстремальным задачам и проблеме моментов П. Л. Чебышев и А. А. Марков получили с помощью теории непрерывных дробей. Как известно, в то время непрерывные дроби являлись очень важным аппаратом исследований во многих областях математики. Но при дальнейшем развитии идей П. Л. Чебышева и А. А. Маркова непрерывные дроби утратили свое значение. На смену им в теории экстремальных задач и в проблеме моментов пришли различные новые методы из теории функций, функционального анализа, алгебры и геометрии выпуклых множеств.

В 1973 г. вышла монография М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана «Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи» [II, 200]. В этой монографии рассматриваются многие вопросы математического анализа, происходящие из классических работ П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Почти все эти вопросы связаны с проблемой моментов А. А. Маркова или являются продолжением этой проблемы в различных направлениях современной математики. В монографии подробно излагаются два современных метода исследования экстремальных задач и проблемы моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Первый метод является геометрическим и характеризуется применением понятий и результатов конечномерного евклидова пространства. Поскольку проблема моментов А. А. Маркова есть усеченная конечномерная проблема обобщенных моментов, то геометрический метод в этой проблеме связан с применением теории выпуклых множеств в конечномерных пространствах. Далее, второй метод, применяемый в теории экстремальных задач и в проблеме моментов, является теоретико-функциональным и характеризуется использованием результатов из функционального анализа, в частности из теории экстремальных задач для функционалов. В монографии рассматриваются также чебышевские и марковские системы функций, их основные свойства, а также наиболее важные примеры.

Сначала приведем наиболее важные формулировки по тригонометрической проблеме моментов.

Теорема 1. Для того чтобы система чисел $\{c_k\}_0^n$ допускала представление

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\, d\sigma(\theta) = c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы при любых $\{\alpha_k\}$ всегда из условия

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k e^{-ik\theta} + \bar{\alpha}_k e^{ik\theta}) \geqslant 0, \qquad \theta \in [0, 2\pi], \tag{2}$$

вытекало неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k c_k + \bar{\alpha}_k \bar{c}_k) \geqslant 0.$$

Как известно, условие (2) конкретизируется в виде следующей теоремы Ф. Рисса и Л. Фейера.

Теорема 2. Если тригонометрический полином

$$T_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k e^{-ik\theta} + \bar{\lambda}_k e^{ik\theta}), \qquad \lambda_n \neq 0,$$

неотрицателен на сегменте $[0, 2\pi]$, то он представим в виде

$$T_n(\theta) = \Big| \sum_{k=0}^{n} b_k e^{ik\theta} \Big|^2.$$

Далее приводится другая форма разрешимости тригонометрической проблемы моментов.

Теорема 3. Для того чтобы система чисел $\{c_k\}_0^n$ допускала представление (1), необходимо и достаточно, чтобы теплицева форма

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} c_{l-s}x_k\bar{x}_k, \qquad c_{-m}=\bar{c}_m,$$

была неотрицательной.

Теорема 4. Для того чтобы последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_0^\infty$ допускала представление (1), необходимо и достаточно, чтобы бесконечная теплицева форма

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} c_{k-s}x_k\bar{x}_s, \qquad c_{-m}=\bar{c}_m,$$

была неотрицательной.

Эти теоремы полностью решают тригонометрическую проблему моментов.

Аналогичные результаты имеют место и для степенной проблемы моментов в случае конечного сегмента.

С тригонометрической проблемой моментов тесно связана широко известная в теории аналитических функций проблема Р. Неванлинны—Г. Пика. Эта проблема функционального интерполирования в различных классах аналитических функций заключается в следующем. Пусть дана система точек в единичном круге

$$z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots, \quad |z_n|<1, \tag{3}$$

и система комплексных чисел

$$w_0, w_1, \ldots, w_n \ldots . \tag{4}$$

Требуется в некотором классе функций W, аналитических в круге $|z|<1$, найти такую функцию $f(z)$, которая удовлетворяет интерполяционным условиям

$$f(z_n)=w_n, \qquad n=0, 1 \ldots . \tag{5}$$

В решении этой задачи фигурируют условия на последовательность точек (3), на систему значений (4) и на класс функций W.

В 1916 г. Г. Пик и в 1919 г. Р. Неванлинна нашли необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи в классе функций W_0, аналитических в круге

$|z| < 1$ и отображающих его в правую полуплоскость. Они доказали, что для существования в классе W_0 функции $f(z)$, удовлетворяющей интерполяционным условиям (5), необходимо и достаточно, чтобы при каждом натуральном n была положительной эрмитова форма

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n} \frac{w_k + \overline{w}_s}{1 - z_k \overline{z}_s} \xi_k \overline{\xi}_s.$$

Этот результат Г. Пика и Р. Неванлинны приводится в монографии [II, 200] с подробным доказательством.

Далее, при современном исследовании проблемы моментов А. А. Маркова изучается все множество функций, которые являются решением данной проблемы моментов. При этом большое внимание уделяется так называемым каноническим и главным представлениям обобщенных моментов. Эти представления относятся к усеченной проблеме моментов и характеризуются тем, что искомая функция в них кусочно постоянна.

Полное решение получено и для экстремальных задач, сформулированных выше. При этом, конечно, вместо интегралов Римана рассматриваются интегралы Стилтьеса. Кроме того, при новых, более общих условиях, доказаны неравенства П. Л. Чебышева и А. А. Маркова для интегралов, связанные с рассматриваемыми экстремальными задачами.

Следует отметить, что в отдельных частных случаях по проблеме моментов А. А. Маркова получены более точные и конкретные результаты. Например, в случае укороченной проблемы степенных моментов дано полное описание всех решений с помощью некоторых классов аналитических функций. Аналогично общие теоремы конкретизируются в случае периодической чебышевской системы исходных функций.

К настоящему времени полностью исследованы многие конкретные задачи математического анализа, прямо или косвенно связанные с проблемой моментов А. А. Маркова. Сюда относятся задачи Т. Стилтьеса, К. А. Поссе, И. Шура, проблема К. Каратеодори, задача К. Каратеодори и Л. Фейера.

Далее, известны многочисленные обобщения экстремальных задач и проблемы моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Здесь мы упомянем только некоторые из них. Прежде всего заметим, что экстремальные задачи и усеченная проблема моментов подробно изучены в случае неограниченных множеств и, в частности, для всей оси и для полуоси. На тех же множествах изучены свойства чебышевских и марковских систем функций. Трудной задачей оказалась проблема моментов, определенных в некотором параллелепипеде. Эта задача была поставлена еще П. Л. Чебышевым. Частичное исследование этой задачи провел А. А. Марков. А полное решение изложено в монографии [II, 200].

Рассмотрим еще одно обобщение проблемы моментов А. А. Маркова.

Пусть на сегменте $[a, b]$ даны две непрерывные функции ограниченной вариации $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Будем считать, что выполняется условие

$$d\varphi(x) \leqslant d\psi(x), \quad x \in [a, b],$$

если для любых $x_1 < x_2$ из $[a, b]$ имеет место неравенство

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leqslant \psi(x_2) - \psi(x_1).$$

Пусть даны система непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций

$$u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x), \tag{6}$$

и система действительных чисел

$$c_0, c_1, \ldots, c_n. \tag{7}$$

Требуется найти условия существования такого распределения $\sigma(x)$ на сегменте $[a, b]$, которое удовлетворяет неравенству

$$d\varphi(x) \leqslant d\sigma(x) \leqslant d\psi(x), \quad x \in [a, b],$$

и интерполяционным условиям

$$\int_a^b u_k(x)\, d\sigma(x) = c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Авторы называют эту задачу (φ, ψ)-проблемой моментов, а систему чисел (7) при условиях (8) (φ, ψ)-моментной системой. Геометрическим методом выпуклых тел устанавливается ряд результатов по этой проблеме, приводятся критерии разрешимости и определенности, рассматриваются соответствующие экстремальные задачи. Наряду с этим авторы показывают, что эта общая и новая проблема моментов после некоторых преобразований сводится к проблеме моментов А. А. Маркова, в которой вместо интегрального веса $d\sigma(x)$ рассматривается дифференциальный вес $f(x)dx$ с условием

$$0 \leqslant f(x) \leqslant L, \quad x \in [a, b]. \tag{9}$$

Вместо условия (9) можно ввести неравенство

$$-L \leqslant f(x) \leqslant L, \quad x \in [a, b].$$

Кроме того, можно рассматривать случай, когда функция распределения определена на некотором линейном несвязном компакте E. В этом случае имеем уравнения

$$\int_E u_k(x)\, d\sigma(x) = c_k,$$

с помощью которых требуется определить функцию $\sigma(x)$.

Различные вариации систем функций (6), а также разные условия на дифференциальный или интегральный веса приводят к многим частным случаям проблемы моментов А. А. Маркова. Подробное исследование таких частных случаев проведено в монографии [II, 200].

Рассмотрим проблему моментов в самом общем случае.

Пусть в линейном нормированном пространстве B даны n линейно независимых элементов

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \tag{10}$$

и нетривиальная система комплексных чисел

$$c_1, c_2, \ldots, c_n. \tag{11}$$

Пусть дано также число $L > 0$. Требуется установить, при каких условиях на элементы (10) и числа (11) существует линейный функционал $F(u)$, удовлетворяющий соотношениям

$$F(u_k) = c_k, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\| F \| \leqslant L.$$

Эта задача называется абстрактной L-проблемой моментов в линейном нормированном пространстве B. Впервые она была сформулирована в монографии [II, 201]. Получены некоторые результаты, относящиеся к общему линейному нормированному пространству B.

Полное решение L-проблемы моментов получено в пространствах непрерывных функций $C[a, b]$ и суммируемых функций $L_1[a, b]$. При этом используются конкретные формулы для линейных функционалов в указанных пространствах [II, 200].

Таково современное состояние теории экстремальных задач и проблемы моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова.

8. Основные применения экстремальных задач и проблемы моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова

В 1976 г. вышла монография С. Карлина и В. Стаддена «Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике» [II, 173]. Эта книга содержит современное изложение экстремальных задач и проблемы моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, а также различные применения экстремальных задач и проблемы моментов. В некоторой своей части монография С. Карлина и В. Стаддена по содержанию пересекается с монографией М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана [II, 200]. Но в то же время эти две работы сильно отличаются одна от другой. М. Г. Крейн и А. А. Нудельман рассматривают экстремальные задачи и конечномерную проблему моментов сами по себе как теоретические вопросы, уделяя очень мало внимания их приложениям. А в монографии С. Карлина и В. Стаддена главный упор делается на приложения экстремальных задач и проблемы моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова к математическому анализу, математической статистике, теории вероятностей и к современной теории планирования эксперимента. При этом многие даже теоретические вопросы излагаются там в терминах теории вероятностей. Характерно, что монографию С. Карлина и В. Стаддена перевели с английского языка специалисты по вычислительной математике.

В монографии С. Карлина и В. Стаддена исследуются и применяются конечные чебышевские системы функций. При этом во многих случаях авторы выделяют так называемые полные чебышевские системы, которые в отечественной литературе называются марковскими системами (см., например, монографию Н. И. Ахиезера [II, 189] и Математическую энциклопедию). Поэтому можно считать, что в монографии С. Карлина и В. Стаддена рассматриваются чебышевские и марковские системы функций. Результаты А. А. Маркова по теории экстремальных задач и по конечномерной проблеме моментов в этой монографии излагаются вполне объективно. Достаточно сказать, что по всему тексту монографии А. А. Марков упоминается 61 раз, причем часто в названиях глав и параграфов.

Пусть на сегменте $[a, b]$ дана система непрерывных функций

$$u_0(t), u_1(t), \ldots, u_n(t). \tag{1}$$

Рассмотрим полиномы по этим функциям

$$P_n(t) = a_0 u_0(t) + a_1 u_1(t) + \ldots + a_n u_n(t). \tag{2}$$

Система (1) называется чебышевской системой, или Т-системой, если любой нетривиальный полином вида (2) имеет на сегменте $[a, b]$ не более n нулей. Для этого необходимо и достаточно, чтобы при условии

$$a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant b$$

был положителен определитель

$$\begin{vmatrix} u_0(t_0) & u_0(t_1) & \ldots & u_0(t_n) \\ u_1(t_0) & u_1(t_1) & \ldots & u_1(t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n(t_0) & u_n(t_1) & \ldots & u_n(t_n) \end{vmatrix}.$$

А если при любом $0 \leqslant k \leqslant n$ система функций $u_0(t), u_2(t), \ldots, u_k(t)$ является Т-системой, то исходная система (1) называется полной чебышевской системой (иными словами, марковской системой).

Рассмотрим так называемое моментное пространство M_{n+1} размерности $n+1$. Пусть фиксирована система $n+1$ действительных чисел

$$c = (c_0, c_1, \ldots, c_n). \tag{3}$$

Предположим, что на сегменте $[a, b]$ существует такая неубывающая, непрерывная в каждой точке справа функция $\sigma(t)$ ограниченной вариации, для которой выполняются условия

$$\int_a^b u_k(t)\, d\sigma(t) = c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Множество таких функций $\sigma(t)$ обозначим через $V(c)$. А множество всех чисел вида (3), которые допускают представление вида (4), обозначим через M_{n+1}. Множество M_{n+1} называется моментным пространством, соответствующим чебышевской системе (1). Нетрудно доказать, что множество M_{n+1} является замкнутым выпуклым конусом в евклидовом пространстве R_{n+1}.

Далее, положим

$$x_k = u_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{5}$$

Тогда эта система параметрически определяет некоторую кривую C_{n+1} в пространстве R_{n+1}. Обозначим через $B(C_{n+1})$ наименьший выпуклый конус в пространстве R_{n+1}, содержащий кривую C_{n+1}, определенную уравнениями (5). Ясно, что конус $B(C_{n+1})$ не зависит от системы чисел (3), удовлетворяющей условию (4). Но между множествами $B(C_{n+1})$ и M_{n+1} существует связь, а именно множество M_{n+1} является внутренней конической оболочкой множества $B(C_{n+1})$.

В настоящее время аналогично формулировкам П. Л. Чебышева и А. А. Маркова основной задачей в теории экстремальных значений интегралов является нахождение верхней и нижней границ интегралов вида

$$J(\sigma) = \int_a^b \Omega(t)\, d\sigma(t), \tag{6}$$

где функция $\Omega(t)$ определена на сегменте $[a, b]$ и фиксирована, а функция $\sigma(t)$ удовлетворяет моментным условиям (4) и варьируется во всем классе $V(c)$, т. е. ищутся величины $\max J(\sigma)$ и $\min J(\sigma)$ при $\sigma \in V(c)$.

Для фиксированной системы чисел (3), определяющей точку пространства M_{n+1}, вводятся три функции из множества $V(c)$: верхняя мера $\overline{\sigma}(t)$, нижняя мера $\underline{\sigma}(t)$ и каноническая мера $\sigma(t, \xi)$ с основной точкой $\xi \in (a, b)$, в которой она имеет максимальный по сравнению с другими мерами скачок (определения слишком громоздки). Доказывается, что если расширенная система функций

$$u_0(t), u_1(t), \ldots, u_n(t), \Omega(t), \quad t \in [a, b],$$

является чебышевской системой, то максимум интеграла (6) достигается при условии $\sigma(t) = \overline{\sigma}(t)$, а минимум — при условии $\sigma(t) = \underline{\sigma}(t)$.

Более трудной является задача отыскания экстремальных значений интеграла

$$J(\sigma, \xi) = \int_a^\xi \Omega(t)\, d\sigma(t), \tag{7}$$

при фиксированном $\xi \in (a, b)$.

Теорема А. А. Маркова—М. Г. Крейна. Пусть дана марковская система функций (1) и такая непрерывная положительная функция $\Omega(t)$, что при любом k система функций

$$u_0(t),\ u_1(t),\ \ldots,\ u_k(t),\ \Omega(t),\ 0 \leqslant k \leqslant n,$$

является чебышевской системой. Предположим, что для функций

$$w_m(t) = \frac{u_m(t)}{\Omega(t)}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n,$$

при условии

$$a \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} \leqslant b$$

положительны все определители вида

$$\begin{vmatrix} w_0(t_0) & w_0(t_1) & \ldots & w_0(t_{k+1}) \\ w_1(t_0) & w_1(t_1) & \ldots & w_1(t_{k+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_k(t_0) & w_k(t_1) & \ldots & w_k(t_{k+1}) \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Далее, пусть система чисел (3) есть внутренняя точка множества M_{n+1} и фиксирована точка $\xi \in (a, b)$. Тогда для любой меры $\sigma(t) \in V(c)$, отличной от канонической меры $\sigma(t, \xi)$, справедливо неравенство

$$\int_a^{\xi-0} \Omega(t)\, d\sigma(t, \xi) < \int_a^{\xi-0} \Omega(t)\, d\sigma(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^{\xi+0} \Omega(t)\, d\sigma(t) < \int_a^{\xi+0} \Omega(t)\, d\sigma(t, \xi). \tag{8}$$

Ввиду важности этой теоремы в монографии [II, 173] приводится два ее доказательства. Затем эта теорема обобщается и распространяется на случаи полубесконечного и бесконечного интервалов и на случай дискретного множества. При этом получаются многочисленные неравенства типа (8), в которых оцениваются интегралы вида (7). Приводятся также формулировки в терминах теории вероятностей. И все получаемые неравенства называются чебышевскими неравенствами.

Несомненно, что эта теорема А. А. Маркова — М. Г. Крейна является законченным современным результатом. Но хотелось бы обратить внимание на то, что формулировка экстремальной задачи совсем мало отличается от первоначальной ее формы, исследованной в трудах П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Только вместо интегралов Римана здесь рассматриваются интегралы Стилтьеса.

Все дальнейшие результаты в монографии С. Карлина и В. Стаддена носят прикладной характер.

Рассмотрим вкратце основные направления современных применений чебышевских и марковских систем функций, экстремальных задач и конечномерной проблемы моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, а также связь всех этих вопросов с другими областями математики.

1. В математическом анализе чебышевские и марковские системы функций применяются для исследования механических квадратур, сплайн-функций, ортогональных многочленов, в теории интерполяции абсолютно монотонных функций. К этому же направлению применений относится теорема А. М. Ляпунова о множестве значений векторной меры, ее обобщения и применения, различные неравенства чебышевского типа между интегралами. Кроме того, чебышевские и марковские системы функций применяются к аппроксимации преобразований Лапласа и Стилтьеса. Весь этот круг вопросов изложен в монографии С. Карлина и В. Стаддена.

2. В монографиях С. Карлина и В. Стаддена и М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана подробно раскрывается связь идей и проблем П. Л. Чебышева и А. А. Маркова с теорией выпуклых множеств в конечномерных пространствах. Эта связь оформляется в виде геометрического метода исследования экстремальных задач и конечномерной проблемы моментов, который заменил в этих вопросах теорию непрерывных дробей. При этом благодаря такой связи обогатилась и сама геометрия конечномерного пространства.

3. Выше уже отмечалось, что многие свои результаты по экстремальным задачам и проблеме моментов П. Л. Чебышев и А. А. Марков связывали с теорией

вероятностей, решая тем самым попутно задачи и в этой области математики. В монографии С. Карлина и В. Стаддена весьма подробно изложены применения чебышевских и марковских систем функций в теории вероятностей. Достаточно заметить, что в этой монографии многие результаты сформулированы в терминах теории вероятностей.

4. В монографии С. Карлина и В. Стаддена в связи с чебышевскими системами рассмотрены многие вопросы математической статистики, что нашло отражение даже в названии монографии. В частности, в этой дисциплине нашли применение чебышевские неравенства для интегралов.

5. Чебышевские и марковские системы функций, экстремальные задачи и проблема моментов нашли важное применение в современной теории планирования эксперимента. Этот вопрос подробно изложен в монографии С. Карлина и В. Стаддена.

6. В монографии М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана кратко излагаются применения проблемы моментов и экстремальных задач П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории оптимального управления.

7. В монографии М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана подробно проанализирована связь различных проблем моментов с задачами интерполирования аналитических функций и, в частности, с интерполяционной проблемой Р. Неванлинны—Г. Пика.

8. В монографиях М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана и С. Карлина и В. Стаддена отмечается, что чебышевские и марковские системы функций, а также экстремальные задачи и проблема моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова находят применения в краевых задачах теории дифференциальных уравнений, при исследовании осцилляционных свойств и нулей решений дифференциальных уравнений, в математическом программировании, в функциональном анализе и в некоторых других областях математики.

Таковы основные современные применения теории экстремальных задач и конечномерной проблемы моментов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова.

9. Принцип двойственности экстремальных задач от А. А. Маркова до настоящего времени

Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [II, 201] считают, что в работе А. А. Маркова [I, 56] впервые была рассмотрена связь двух различных экстремальных задач между собой и впервые сформулирован в неявной форме принцип двойственности экстремальных задач. В этой работе А. А. Марков установил, что задача о наилучшем приближении в метрике пространства L_1 сводится к определению наименьшего значения L, при котором L-проблема моментов разрешима.

В теории приближения функций и в функциональном анализе хорошо известна следующая экстремальная задача [II, 177, 200, 201].

Пусть в линейном нормированном пространстве B даны n линейно независимых элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и нетривиальная система n комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Задача 1. Требуется найти минимум величины

$$\| a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n \| \qquad (1)$$

при условии, что числа $\{a_k\}$ удовлетворяют равенству

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n = 1. \qquad (2)$$

Для искомой величины введем обозначение

$$M = \min_{\{a_k\}} \| a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n \|. \qquad (3)$$

Такого рода задачи впервые рассматривал В. А. Марков [II, 20]. В связи с этим задача 1 и аналогичные ей задачи называются задачами В. А. Маркова. В монографии М. Я. Зингера [II, 177] приводятся подробный обзор задач В. А. Маркова и список литературы по этой теме.

Далее, для системы фиксированных чисел $c = \{c_k\}_1^n$ введем множество $\Phi(c)$ всех линейных функционалов, удовлетворяющих условиям

$$F(u_k) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4)$$

и обозначим через $l = l(c)$ минимум норм всех таких функционалов, т. е. положим

$$l = l(c) = \min_{\Phi(c)} \| F \|. \qquad (5)$$

Теорема 1. Величины (3) и (5) связаны равенством

$$l(c) = 1/M. \tag{6}$$

Задача 2. Пусть даны элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$, числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и число $L > 0$. Требуется выяснить, при каких условиях существуют линейные функционалы, удовлетворяющие интерполяционным условиям (4) и условию

$$\| F \| \leqslant L. \tag{7}$$

Теорема 2. Линейный функционал $F(u)$, удовлетворяющий условиям (4) и (7), существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$L \geqslant l(c). \tag{8}$$

Теорема 1 и 2 доказываются очень просто [II, 200].

Далее, обозначим через $F(L)$ множество всех линейных функционалов, норма которых не превосходит L, т. е. выполняется условие (7). Для каждого $F \in F(L)$ определяем точку $\{F(u_k)\}_1^n$ пространства размерности n. Множество всех таких точек обозначим через $R_n(L)$. Ясно, что $R_n(L)$ есть выпуклое ограниченное тело, т. е. выпуклое ограниченное множество, имеющее внутренние точки. В то же время точка $c = \{c_k\}_1^n$ находится внутри множества $R_n(L)$ тогда и только тогда, когда имеет место представление $c_k = F(u_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $\| F \| < L$. Геометрически ясно, что $R_n(L) = LR_n(1)$.

Теорема 3. Для того чтобы точка $c \in R_n(1)$, необходимо и достаточно, чтобы при любых $\{\alpha_k\}$ из неравенства

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k \right\| \leqslant 1$$

следовало бы неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k \right| \leqslant 1.$$

А для того чтобы точка $c = \{c_k\}_1^n$ была граничной точкой множества $R_n(1)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая система чисел $\{\beta_k\}$, для которой выполняются условия

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k \Big\| = 1, \qquad \Big| \sum_{k=1}^{n} \beta_k c_k \Big| = 1.$$

Некоторый элемент $u_0 \in B$ назовем экстремальным элементом линейного функционала $F(u)$, если выполняется условие

$$|F(u_0)| = \|F\| \cdot \|u_0\|.$$

Теорема 4. Пусть дана система чисел $c = \{c_k\}_1^n$. Для того чтобы элемент

$$u_0 = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k$$

при условии

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k c_k = 1$$

был минимизирующим элементом задачи 1, необходимо и достаточно, чтобы этот элемент был экстремальным элементом какого-либо минимального по норме решения L-проблемы моментов, т. е. экстремальным элементом функционала $F(u)$, удовлетворяющего условиям

$$F(u_k) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\|F\| = l(c) = L.$$

Эта основная теорема является принципом двойственности в линейном нормированном пространстве B.

Рассмотрим теперь L-проблему моментов и наилучшее приближение в пространстве $L_1[a, b]$. Это есть пространство функций, измеримых и суммируемых на сегменте $[a, b]$. В качестве нормы принимается величина

$$\|u\| = \int_a^b |u(x)|\, dx.$$

А всякий линейный непрерывный функционал в этом пространстве имеет вид

$$F(u) = \int_a^b u(x) f(x)\, dx, \tag{9}$$

где определяющая функционал функция $f(x)$ измерима и в существенном ограничена на $[a, b]$. При этом норма функционала определяется по формуле

$$\| F \| = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \operatorname{ess} | f(x) |.$$

Проблема моментов в пространстве $L_1[a, b]$ формулируется следующим образом. Пусть в этом пространстве заданы n функций

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \quad x \in [a, b]. \tag{10}$$

Требуется найти необходимые и достаточные условия для системы чисел

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, L,$$

чтобы имелась измеримая и в существенном ограниченная функция $f(x)$, для которой выполняются соотношения

$$\int_a^b u_k(x) f(x)\, dx = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \operatorname{ess} | f(x) | \leqslant L.$$

А экстремальная задача 1 в данном случае формулируется следующим образом: при условии

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n = 1 \tag{11}$$

требуется найти величину

$$M = \min_{\{a_k\}} \int_a^b | a_1u_1(x) + a_2u_2(x) + \ldots + a_nu_n(x) |\, dx. \tag{12}$$

Здесь вместо величины (1) рассматривается интеграл (12), а условия (2) и (11) аналогичны. Поэтому и здесь справедливы соотношения (6) и (8).

Обратимся теперь к задаче о наилучшем приближении функции в метрике пространства $L_1[a, b]$. Пусть дана некоторая функция $\varphi(x) \in L_1[a, b]$. В системе (10) заменим функцию $u_n(x)$ функцией $\varphi(x)$. В результате получим систему

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_{n-1}(x), \varphi(x). \tag{13}$$

Естественно считать, что все эти функции линейно независимы между собой. Далее вводим полиномы вида

$$P_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n-1} b_k u_k(x), \qquad x \in [a, b]. \tag{14}$$

Величина

$$E_{n-1}(\varphi, L_1)=\min_{\{b_k\}} \int_a^b |\varphi(x)-P_{n-1}(x)|\,dx, \tag{15}$$

где минимум берется по всевозможным полиномам вида (14), называется наилучшим приближением порядка $n-1$ функции $\varphi(x)$ в метрике пространства $L_1[a, b]$.

Легко видеть, что эта задача связана с проблемой моментов в пространстве $L_1[a, b]$. В самом деле, введем числа

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0, \quad c_n = 1. \tag{16}$$

Тогда условие (11) выполняется всегда при $a_n = 1$ и при любых коэффициентах $\{b_k\}$ полинома (14). Следовательно, в данном случае мы имеем частный случай задачи 1 при условиях (16). Поэтому в силу основной теоремы 4 и равенства (6) имеем равенство

$$E_{n-1}(\varphi, L_1)=\frac{1}{l(c)}, \tag{17}$$

где $l(c)$ есть минимальная норма функционалов, которые при системе функций (13) и при системе чисел (16) удовлетворяют интерполяционным условиям

$$F(u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad F(\varphi) = 1.$$

Таким образом, задача о наилучшем приближении функции в метрике пространства $L_1[a, b]$ есть частный случай задачи 1 для этого пространства. При этом величина наилучшего приближения (15) может быть найдена по формуле (17). Это и есть принцип двойственности экстремальных задач в пространстве $L_1[a, b]$. Фактически этот результат впервые установил А. А Марков. Здесь доказательство проведено методом М. Г. Крейна [II, 200, 201].

Аналогичную форму принцип двойственности экстремальных задач имеет и в других функциональных пространствах. При этом с помощью конкретной формы основной теоремы 4 в различных пространствах подробно исследуется вопрос о единственности полинома наилучшего приближения в соответствующей метрике.

Принцип двойственности экстремальных задач и L-проблему моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве впервые исследовал М. Г. Крейн [II, 201]. После этого принцип двойственности экстремальных задач в разных формах переоткрывался в работах многих математиков. Затем начались применения этого принципа.

Принцип двойственности экстремальных задач оказался очень плодотворным в теории приближения функций. Первые результаты в этом направлении получил С. М. Никольский в 1946 г. Он впервые четко сформулировал принцип двойственности для приближения любого элемента пространства конечномерным подпространством.

Теорема С. М. Никольского. Если в линейном нормированном пространстве B фиксирована конечная система линейно независимых элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то для любого элемента $u \in B$ справедливо равенство

$$\inf \left\| u - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \right\| = \sup f(u),$$

где нижняя грань слева берется по всевозможным числам $\{\lambda_k\}$, а верхняя грань справа — по всевозможным функционалам из сопряженного пространства, удовлетворяющим условиям $\|f\| \leqslant 1$, $f(u_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. При этом существует функционал $f_0(u)$, для которого $\|f_0\| = 1$ и верхняя грань достигается.

Эта теорема С. М. Никольского указала метод получения точных постоянных во многих неравенствах теории приближения функций. В дальнейшем именно таким методом были вычислены значения верхних граней наилучших приближений основных классов функций. Наиболее существенные результаты в этом направлении получил Н. П. Корнейчук. В его монографии [II, 204] подробно излагаются принцип двойственности экстремальных задач в теории приближения функций и получаемые с помощью этого принципа результаты.

Принцип двойственности экстремальных задач рассматривается в монографиях М. Я. Зингера [II, 177], М. Г. Крейна и А. А. Нудельмана [II, 200], В. М. Тихомирова [II, 205]. В этих монографиях цитируются многие работы по принципу двойственности. В комплексной области принцип двойственности экстремальных задач исследован в работах С. Я. Хавинсона. Иногда считается [II, 177], что принцип двойственности экстремальных задач был впервые сформулирован в работе В. А. Маркова [II, 20].

10. Результаты А. А. Маркова по теории ортогональных многочленов

В названиях научных работ А. А. Маркова ортогональные многочлены не упоминаются. Но тем не менее и в этой области А. А. Маркову принадлежит ряд результатов. Почти все эти результаты излагаются в качестве следствий и вспомогательных вопросов в работах по другим проблемам. Пожалуй, только одна работа А. А. Маркова [I, 57] своим названием, содержащим формулу, обещает свойства нулей ортогональных многочленов, но и в этой работе ортогональным многочленам посвящено только несколько первых страниц. Заметим, что в обзорной монографии Я. Л. Геронимуса [II, 192] А. А. Марков упоминается 64 раза. Правда, некоторые результаты А. А. Маркова, упоминаемые в монографии [II, 196], уже изложены выше.

В работе А. А. Маркова [I, 57] доказывается, что для всех нулей $\{x_k^{(n)}\}$ ортогонального многочлена Чебышева—Эрмита порядка n выполняется условие

$$-\frac{n}{\sqrt{\ln n}}<x_k^{(n)}<\frac{n}{\sqrt{\ln n}}, \qquad k=1, 2, \ldots, n.$$

Далее в этой же работе отмечается, что в любом фиксированном интервале (a, b) при достаточно большом n имеются нули многочлена Чебышева—Эрмита порядка n.

В работе А. А. Маркова [I, 17] рассматривается очень важный результат о зависимости нулей ортогональных многочленов от параметра.

Если весовая функция $h(x, \alpha)$ на интервале ортогональности (a, b) зависит еще и от некоторого параметра α, то ортогональные многочлены $\{P_n(x, \alpha)\}$, соответствующие весу $h(x, \alpha)$ и интервалу (a, b), также зависят от параметра α. Примером такой зависимости являются классические многочлены Якоби и многочлены Чебышева—Лагерра. Обозначим через $\{x_k^{(n)}(\alpha)\}$ нули ортогонального многочлена $P_n(x, \alpha)$.

Теорема А. А. Маркова. Пусть весовая функция $h(x, \alpha)$ положительна, непрерывна и имеет непрерывную производную $h'_\alpha(x, \alpha)$ при условиях $a < x < b$, $\lambda < \alpha < \mu$, а все интегралы

$$\int_a^b h'_\alpha(x, \alpha)\, x^k\, dx, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1,$$

сходятся равномерно по α внутри интервала (λ, μ). Если функция

$$\frac{h'_\alpha(x, \alpha)}{h(x, \alpha)}$$

возрастает по x на интервале (a, b), то с возрастанием α на интервале (λ, μ) все нули $\{x_k^{(n)}(\alpha)\}$ многочлена $P_n(x, \alpha)$ также возрастают.

В применении к многочленам Якоби теорема А. А. Маркова дает неравенства

$$\frac{\partial x_k^{(n)}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} < 0, \qquad \frac{\partial x_k^{(n)}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} > 0.$$

Далее, если положить

$$x_k^{(n)}(\alpha, \beta) = \cos \theta_k^{(n)}(\alpha, \beta),$$

где

$$0 < \theta_1^{(n)} < \theta_2^{(n)} < \ldots < \theta_n^{(n)} < \pi,$$

то при условиях $-1/2 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 1/2$ получим неравенство

$$\frac{2k-1}{2n+1}\pi \leqslant \theta_k^{(n)}(\alpha, \beta) \leqslant \frac{2k}{2n+1}\pi. \tag{1}$$

Аналогичные результаты имеют место и для многочленов Чебышева—Лагерра.

Теорема и неравенство (1) получены А. А. Марковым в работе [I, 17]. Одновременно с А. А. Марковым неравенство (1) доказал Т. Стилтьес.

В работе [I, 10] А. А. Марков рассмотрел многочлены, ортогональные на конечной системе равноотстоящих точек $\{x_k\}$, где $x_k = kh$, с массами в этих точках, определенными по формуле $m_k = q^k$.

В работе [I, 121] А. А. Марков исследовал некоторые свойства многочленов, ортогональных на всей оси с весом $h(x) = |x|2c \times \exp\{-x^2\}$. Эти многочлены были введены Н. Я. Сониным и являются обобщением многочленов Чебышева—Эрмита. Дальнейшие весьма существенные результаты о многочленах, ортогональных на всей оси с весовыми функциями достаточно общего вида, получены в работе Е. А. Рахманова [II, 206].

Некоторые другие результаты А. А. Маркова по теории ортогональных многочленов излагаются в монографиях [II, 192, 193].

11. Лекции А. А. Маркова по теории приближения функций

В 1906 г. был литографирован курс лекций А. А. Маркова под названием «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля» [I, 127].

Прежде всего заметим, что эта работа А. А. Маркова по своему содержанию значительно шире и важнее, чем ее название. В этой работе формулируются и анализируются основные, очень важные задачи теории приближения функций. При этом формулировки носят вполне современный характер и почти без изменений повторяются и в настоящее время в монографиях и статьях по теории приближения функций. В то же время некоторые формулировки несомненно принадлежат А. А. Маркову и не встречаются в предшествующих работах других математиков. Что касается узости названия работы по сравнению с ее содержанием, то это, вероятно, объясняется тем, что в то время еще не существовало названия «теория приближения функций».

Пусть дана функция конечного числа переменных $x, y, \ldots, z$ вида

$$V = f\,(x, y, \ldots, z;\ p_1, p_2, \ldots, p_n), \qquad (1)$$

зависящая и от параметров $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Будем считать, что точка $M\,(x, y, \ldots, z)$ изменяется в ограниченной замкнутой области Ω конечномерного пространства. Предположим, что функция (1) непрерывна в области Ω при всех допустимых значениях параметров. Далее, пусть функция (1) имеет непрерывные производные первого порядка по всем параметрам и ограниченные производные второго порядка по параметрам, когда точка M изменяется в области Ω.

Рассмотрим функцию

$$u = |f(x, y, \ldots, z; p_1, p_2, \ldots, p_n)|. \tag{2}$$

Поскольку функция (1) непрерывна, то функция (2) также непрерывна, когда точка M изменяется в области Ω при любых фиксированных значениях параметров. Поэтому по теореме Вейерштрасса функция (2) при конкретных значениях параметров достигает своего максимального значения

$$L = L(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \max_{M \in \Omega} |f(x, y, \ldots, z; p_1, p_2, \ldots \\ \ldots, p_n)|. \tag{3}$$

Предположим, что максимум (3) достигается в конечном числе m точек

$$M_k = M_k(x_k, y_k, \ldots, z_k; p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Тогда число L называется уклонением функции (1) от нуля на множестве Ω при данных значениях параметров $\{p_s\}$. При изменении параметров величина (3) изменяется. Поэтому можно поставить следующую задачу. Требуется так выбрать значения параметров $\{p_s\}$, чтобы величина (3) была наименьшей. Предположим, что нашлась такая система значений параметров $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$, при которых величина (3) принимает наименьшее значение, т. е. имеем

$$L_0 = L(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n) = \min_{\{p_s\}} L(p_1, p_2, \ldots, p_n). \tag{5}$$

Тогда функция

$$V_0 = f(x, y, \ldots, z; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)$$

называется функцией, наименее уклоняющейся от нуля на множестве Ω по сравнению с другими функциями вида (1). А величина L_0, определяемая формулой (5), называется наименьшим уклонением.

Сформулировав эту общую задачу о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, А. А. Марков приводит один результат П. Л. Чебышева [II, 198].

Для частных производных функции (1) по параметрам в точках (4) введем обозначения

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_1}\right)_k, \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_k, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Теорема П. Л. Чебышева. Если при некоторых значениях параметров $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n$ линейная однородная система

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_1 \lambda_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_2 \lambda_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)_m \lambda_m = 0,$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_1 \lambda_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_2 \lambda_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)_m \lambda_m = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_1 \lambda_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_2 \lambda_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)_m \lambda_m = 0$$

имеет только тривиальное решение, то функция

$$V_1 = f(x, y, \ldots, z; \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n)$$

не будет функцией, наименее уклоняющейся от нуля на множестве Ω.

Приводится подробное доказательство этой теоремы.

Заметим, что и к настоящему времени имеется мало результатов, относящихся к общей задаче о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, сформулированной выше. Обычно рассматриваются различные более конкретные случаи, которые поддаются исследованию. Некоторые из этих случаев изложены далее в рассматриваемой работе А. А. Маркова.

Пусть на сегменте $[a, b]$ дана непрерывная функция $\varphi(x)$. Тогда в качестве функции вида (1) можно принять функцию

$$f(x, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \varphi(x) - p_1 x^{n-1} - \\ - p_2 x^{n-2} - \ldots - p_{n-1} x - p_n. \qquad (6)$$

Аналогично общему случаю здесь ставится задача найти такую систему параметров $\{\bar{p}_s\}$, чтобы величина

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)|$$

была бы наименьшей. В этом случае вводится наименьшее уклонение

$$E_{n-1}(\varphi) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)| = \\ = \min_{\{p_s\}} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi(x) - p_1 x^{n-1} - p_2 x^{n-2} - \ldots - p_n|.$$

Эта величина называется наилучшим приближением функции $\varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$ многочленами порядка не выше $n - 1$.

Далее в работе А. А. Маркова рассматриваются свойства наилучших приближений, приводится теорема П. Л. Чебышева об альтернансе, излагаются другие вопросы, частные случаи и некоторые примеры.

Пусть теперь на сегменте $[a, b]$ дан положительный многочлен $\psi(x)$. Рассмотрим задачу о наименьшем уклонении от нуля функции

$$f(x, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n}{\sqrt{\psi(x)}}. \quad (7)$$

Это есть еще один частный случай функции вида (1). Предположим, что при некоторой системе параметров $\{p_s\}$ имеем

$$L = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x, p_1, p_2, \ldots, p_n)|. \quad (8)$$

Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ все различные точки, расположенные на сегменте $[a, b]$ в возрастающем порядке, в которых максимум (8) достигается, и пусть N есть число перемен знака в системе чисел

$$f(x_1, p_1, p_2, \ldots, p_n),\ f(x_2, p_1, p_2, \ldots, p_n), \ldots$$
$$\ldots, f(x_m, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

А. А. Марковым доказано, что если $N < n$, то функция (7) не будет наименее уклоняющейся от нуля. А если $N \geqslant n$, то функция (7) при данной системе параметров наименее уклоняется от нуля. Приводя этот результат, А. А. Марков замечает, что наличие знаменателя в формуле (7) не изменяет свойства функции (7) по сравнению с функциями вида (6). Рассматриваются также частные случаи многочлена $\psi(x)$ и приводятся соответствующие результаты.

Затем разбирается следующая задача. Среди функций вида

$$f(x, p_0, p_1, \ldots, p_n) = \frac{p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n}{\sqrt{\psi(x)}},$$

удовлетворяющих дополнительному условию в фиксированной точке

$$f(x_0, p_0, p_1, \ldots, p_n) = A, \qquad |x_0| > 1,$$

найти такую, которая наименее уклоняется от нуля на сегменте $[-1, 1]$. Проводится анализ этой задачи, исследуются частные случаи и примеры.

Две последние задачи можно рассматривать как первоначальные формулировки экстремальных задач о наименьшем уклонении с весовой функцией.

При дальнейшем изложении А. А. Марков уточняет и развивает постановку задач, рассмотренных им в работе [I, 26], а также формулирует задачи из работы В. А. Маркова [II, 20].

Пусть уклонение многочлена

$$Q_n(x) = p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n \tag{9}$$

на сегменте $[a, b]$ не превосходит M, т. е. имеем

$$|Q_n(x)| \leqslant M, \quad x \in [a, b]. \tag{10}$$

Требуется при условии (10) найти точную верхнюю границу одного коэффициента многочлена (9) при произвольных остальных.

В. А. Марков в работе [II, 20] поставил следующую задачу. Пусть фиксирована система чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$.

Требуется определить величину

$$B_n(\alpha) = \sup|\alpha_0p_0 + \alpha_1p_1 + \ldots + \alpha_np_n|,$$

где точная верхняя граница берется по множеству всех коэффициентов многочленов вида (9) при условии (10). Во второй задаче В. А. Маркова вместо условия (10) вводится условие

$$\alpha_0p_0 + \alpha_1p_1 + \ldots + \alpha_np_n = \alpha \neq 0. \tag{11}$$

Среди многочленов вида (9), коэффициенты которых удовлетворяют условию (11), требуется найти тот, который наименее уклоняется от нуля на сегменте $[a, b]$.

В лекциях А. А. Маркова показывается, что из трех последних задач первые две сводятся ко второй задаче В. А. Маркова. При исследовании этой задачи А. А. Марков указывает два условия, необходимых и достаточных для того, чтобы многочлен (9) имел при равенстве (11) наименьшее уклонение на сегменте $[a, b]$. В этом условии фигурируют точки, в которых многочлен (9) имеет максимум абсолютного значения.

В своих лекциях А. А. Марков исследует различные частные задачи теории приближения функций.

Список литературы содержит 14 наименований.

Таково вкратце содержание курса лекций А. А. Маркова о функциях, наименее уклоняющихся от нуля.

Основным показателем ценности научной работы по математике является упоминание или цитирование ее в трудах других ученых. В этом смысле лекции А. А. Маркова о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, заслуживают самой высокой оценки. Эти лекции цитируются очень часто во многих монографиях и статьях по теории приближения функций.

Все вышесказанное свидетельствует о том, что работа А. А. Маркова «Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля» является выдающимся математическим произведением, которое, несомненно, сыграло важную роль в становлении теории приближения функций как самостоятельной математической дисциплины.

Здесь необходимо также отметить важное значение в развитии теории приближения функций работы Владимира Андреевича Маркова «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке» [II, 20]. Выше уже отмечалось, что многие результаты В. А. Маркова из этой его работы вошли в курс лекций А. А. Маркова. В настоящее время задачи В. А. Маркова изучаются очень интенсивно и на эту тему имеется большая литература [II, 177]. Но главное заключается в том, что эта работа В. А. Маркова очень популярна среди специалистов по теории приближения функций. Так, например, она цитируется в монографиях [II, 172, 173, 177, 178, 189, 192, 194, 199, 205, 207]. Кроме того, эта работа цитируется в монографии А. Ф. Тимана «Теория приближения функций действительного переменного» (М.: Физматгиз, 1960), в монографии В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева «Конструктивная теория функций комплексного переменного» (М.; Л.: Наука, 1964), в монографии С. Пашковского «Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева» (М.: Наука, 1983). Известно также, что эта работа В. А. Маркова была переведена на немецкий язык и напечатана в журнале «Mathematische Annalen» за 1916 г.

12. Исследования А. А. Маркова по теории непрерывных дробей

В конце XIX и в начале XX в. теория непрерывных дробей была отдельной математической дисциплиной и важнейшим средством исследований в математическом анализе, в теории вероятностей, в теории чисел и даже в механике. Методы теории непрерывных дробей применялись для исследования вопросов приближения функций, в теории ортогональных многочленов, в теории механических квадратур и во многих других разделах математического анализа. Непрерывные дроби использовались даже для изучения иррациональных, алгебраических и трансцендентных чисел. В то время непрерывные дроби были объектом изучения в средних школах и в университетах. Почти все выдающиеся математики того времени разрабатывали теорию непрерывных дробей или применяли ее в различных проблемах. Важную роль теории непрерывных дробей в тот период можно сравнить с той ролью, которую в настоящее время играют бесконечные ряды.

В названиях многих работ А. А. Маркова фигурируют непрерывные дроби, которые часто являются объектом исследований, но больше применяются как аппарат при решении других проблем математического анализа.

В работе [I, 9] с помощью непрерывных дробей А. А. Марков доказывает и обобщает некоторые очень важные неравенства П. Л. Чебышева, опубликованные им без доказательства в 1874 г. Приведем эти неравенства.

Пусть на сегменте $[a, b]$ дана положительная непрерывная функция $f(x)$. Рассматривается интеграл типа Коши

$$F(x)=\int_a^b \frac{f(t)}{x-t}\,dt, \quad x\in[a,b]. \tag{1}$$

Обозначим через $\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}$ подходящую дробь порядка n к разложению интеграла (1) в непрерывную дробь по x. Пусть, далее $\{x_k^{(n)}\}$ суть нули многочлена $\psi_n(x)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_{x_k^{(n)}}^{x_m^{(n)}} f(t)\,dt<\sum_{j=k}^{m}\frac{\varphi_n(x_j^{(n)})}{\psi_n'(x_j^{(n)})}<\int_{x_{k-1}^{(n)}}^{x_{m+1}^{(n)}} f(t)\,dt. \tag{2}$$

В той же работе [I, 9] А. А. Марков доказал новые неравенства

$$\int_{a}^{x_{k-1}^{(n)}} f(t)\,dt < \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\varphi_n(x_j^{(n)})}{\psi_n'(x_j^{(n)})} < \int_{a}^{x_k^{(n)}} f(t)\,dt, \tag{3}$$

$$\int_{x_{m+1}^{(n)}}^{b} f(t)\,dt < \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\varphi_n(x_j^{(n)})}{\psi_n'(x_j^{(n)})} < \int_{x_m^{(n)}}^{b} f(t)\,dt. \tag{4}$$

Неравенство (3) опубликовал также Т. Стилтьес, который впоследствии признал приоритет А. А. Маркова. Все три неравенства (2)—(4) применяются в последующих работах А. А. Маркова по теории экстремальных значений интегралов. В монографии Я. Л. Геронимуса [II, 192] эти неравенства излагаются в § 15, который называется «Неравенства Чебышева—Маркова». Доказательство этих неравенств изложено в работе А. А. Маркова [I, 7].

Большой интерес к неравенствам П. Л. Чебышева—А. А. Маркова объясняется тем, что в этих неравенствах фигурируют многочлены $\{\psi_n(x)\}$, ортогональные на сегменте $[a, b]$ с весом $f(x)$, и их нули. В самом деле, в теории ортогональных многочленов [II, 172, 193] хорошо известно, что знаменатели подходящих дробей, т. е. многочлены $\{\psi_n(x)\}$, образуют систему многочленов, ортогональных с весом $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

В 1894 г. вышла работа А. А. Маркова «О функциях, получаемых при обращении рядов в непрерывные дроби» [I, 41].

Пусть дан ряд по отрицательным степеням

$$f(x) = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \ldots + \frac{s_k}{x^{k+1}} + \ldots \tag{5}$$

Предположим, что все числа $\{s_k\}$ действительны, а все определители вида

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

отличны от нуля. Тогда функцию $f(x)$ можно разложить в непрерывную дробь вида

$$f(x) = \cfrac{1}{q_1(x) - \cfrac{1}{q_2(x) - \cfrac{1}{q_3(x) - \ldots}}},$$

где все $\{q_k(x)\}$ суть многочлены первой степени. Как обычно, вводим подходящие дроби

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots, \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}.$$

Далее в работе А. А. Маркова рассматриваются свойства коэффициентов разложения

$$\psi_k(x) = b_0^{(k)} + b_1^{(k)} x + \ldots + b_k^{(k)} x^k.$$

Эти коэффициенты представляются через некоторые определители, образованные из чисел $\{c_k\}$. Аналогичным образом вводится разложение для многочлена $\varphi_k(x)$ и рассматриваются свойства его коэффициентов. Исследуются свойства определителей (6) в зависимости от свойств коэффициентов разложения (5).

Результаты работы А. А. Маркова [I, 41] находят очень важные применения в теории устойчивости. Этот вопрос подробно излагается в монографии Ф. Р. Гантмахера «Теория матриц» [208]. В последней главе этой монографии имеются следующие параграфы.

§ 15. Область устойчивости. Параметры Маркова.

§ 16. Связь с проблемой моментов.

§ 17. Связь между определителями Гурвица и определителями Маркова.

§ 18. Теоремы Маркова и Чебышева.

Во всех этих параграфах подробно цитируется работа А. А. Маркова [I, 41]. При этом А. А. Марков упоминается 40 раз. Приведем некоторые результаты из этих четырех параграфов.

При некоторых условиях многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде

$$P_n(x) = Q(x^2) + xH(x^2),$$

где многочлены $Q(x)$ и $H(x)$ взаимно просты. Далее вводится разложение

$$\frac{H(x)}{Q(x)} = s + \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \ldots$$

Если n четно, т. е. $n = 2m$, то $s = 0$ и многочлену $P_n(x)$ ставится в соответствие $2m$ чисел $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$. А если n нечетное, т. е. $n = 2m + 1$, то в качестве первого из этих чисел берется число $s \neq 0$. Таким образом, в любом случае многочлену $P_n(x)$ ставится в соответствие система n чисел $\{s_k\}$, которые называются параметрами А. А. Маркова. Эти параметры рассматриваются как координаты точки P в некотором пространстве R_n размерности n. А фактически речь идет о некоторых обобщенных степенных моментах на полуоси.

Рассматривается связь параметров А. А. Маркова с проблемой Рауса—Гурвица и с проблемой моментов. Приводится подробная громоздкая формулировка (большая цитата) теоремы А. А. Маркова об определителях вида (6) из работы [I, 41]. А затем эта теорема формулируется и доказывается по-современному, в терминах теории устойчивости.

Обозначим через G_n область устойчивости в пространстве параметров А. А. Маркова. Такая область характеризуется некоторыми неравенствами для определителей вида (6).

Теорема А. А. Маркова. Если две точки P и F принадлежат области устойчивости G_n, то и любая точка M, расположенная между точками P и F, также принадлежит G_n.

Далее, в работе А. А. Маркова [I, 41] приводится теорема о корнях алгебраического уравнения вида

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_m & s_{m+1} & \dots & s_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} = 0$$

при изменении системы параметров $\{s_k\}$. Фактически это есть теорема о движении нулей ортогональных многочленов. Важный частный случай этой теоремы рассматривал П. Л. Чебышев.

В монографии Ф. Р. Гантмахера [II, 208] опять в виде большой цитаты формулируется вышеупомянутая теорема о корнях алгебраического уравнения, а затем эта теорема А. А. Маркова и П. Л. Чебышева формулируется и доказывается в терминах теории устойчивости.

Впечатляет тот факт, что две теоремы А. А. Маркова из работы о непрерывных дробях, которые формулируются очень громоздко и на первый взгляд кажутся малосодержательными, в монографии Ф. Р. Гантмахера [II, 208] переформулированы в терминах теории устойчивости и приобрели важное практическое значение. В 1940 г. работа А. А. Маркова «О функциях, получаемых при обращении рядов в непрерывные дроби» [I, 41] ввиду ее большой научной ценности была переведена на английский язык и издана в США.

В 1885 г. была опубликована небольшая заметка А. А. Маркова «Доказательство сходимости многих непрерывных дробей» [I, 13], а затем в 1893 г.— статья под тем же названием [I, 38]. Наконец, в 1895 г. вышла работа А. А. Маркова «Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей» [I, 127]. Во всех этих работах доказывается и анализируется теорема о сходимости подходящих дробей интеграла типа Коши (1). Об этой теореме А. А. Маркова подробно говорилось в § 2.

В 1896 г. увидела свет работа А. А. Маркова «Новые приложения непрерывных дробей» [I, 53]. В этой работе с помощью непрерывных дробей исследуются экстремальные значения интегралов и конечномерная проблема моментов (см. § 4, 5).

А. А. Марков занимался не только применением непрерывных дробей, но и развитием теории этих дробей. Известен его курс лекций о непрерывных дробях. В сборнике [I, 127] этот курс опубликован в сокращенном виде. В начале этой работы А. А. Марков приводит основные определения, обозначения и простейшие свойства подходящих дробей. Затем дается теорема Зейделя, в которой сходимость непрерывной дроби сопоставляется с расходимостью некоторого ассоциированного ряда. Далее указывается необходимое и достаточное условие сходимости непрерывной дроби вида

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ldots}}}$$

Доказывается теорема о том, что значение этой непрерывной дроби иррационально, если числа $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ натуральные, причем $b_k > a_k$. Во II разделе этой работы рассматривается разложение в непрерывную дробь отношения двух гипергеометрических рядов.

Третий раздел этой работы А. А. Маркова называется «Обращение рядов в непрерывные дроби». Здесь исследуются свойства подходящих дробей и разложения в непрерывную дробь функций вида (5). Приводится также одна теорема о достаточном условии того, чтобы данная рациональная дробь была подходящей дробью некоторой непрерывной дроби.

В разделе IV работы рассматривается разложение в непрерывную дробь сумм вида

$$\sum \frac{f(t_k)}{x - t_k}, \tag{7}$$

где индекс суммирования может пробегать конечное или бесконечное число значений. Замечается, что рассуждения справедливы также и для интегралов типа Коши вида (1) с конечными пределами.

В разделе V разбирается приложение подходящих дробей непрерывной дроби для функции (7) к интерполированию функций по методу наименьших квадратов и подробно анализируется сам метод наименьших квадратов.

Раздел VI — «Приближенное вычисление определенных интегралов». Здесь рассматриваются интегралы вида

$$\int\limits_a^b F(x) f(x)\, dx,$$

где функция $f(x)$ положительна и фиксирована, а для функции $F(x)$ применяется интерполяционная формула Эрмита с кратными узлами интерполяции. Здесь выводится формула остаточного члена квадратурной формулы интерполяционного типа и приводятся его оценки. Оценивается также скорость сходимости подходящих дробей функций вида (1) и (7).

Библиография к лекциям [I, 121] содержит 21 наименование.

Все вышесказанное свидетельствует о том, что А. А. Марков был крупнейшим специалистом по теории непрерывных дробей. С помощью этой теории он получил многие из своих результатов по математическому анализу. И в самой теории непрерывных дробей ему принадлежат весьма существенные результаты. При этом лекции А. А. Маркова о непрерывных дробях [I, 121] сыграли важную роль в развитии теории непрерывных дробей и их приложений. Эти заслуги А. А. Маркова отмечаются, например, и в монографии [II, 180].

Разумеется, обзор задач и результатов А. А. Маркова по математическому анализу можно было бы продолжить. В этот обзор прежде всего следовало бы добавить квадратурные формулы с наивысшей степенью точности. О результатах А. А. Маркова в этом направлении говорится, например, в Математической энциклопедии, в работе Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [II, 209], в монографиях Я. Л. Геронимуса [II, 192] и В. И. Крылова [II, 197]. Известны биортогональные системы функций, которые связываются с именем А. А. Маркова [II, 189]. Далее, часто упоминается и обобщается следующий результат А. А. Маркова о представлении положительного многочлена четного порядка [II, 200].

Теорема А. А. Маркова. Всякий многочлен $P_{2n}(x)$ четной степени, положительный на сегменте $[a, b]$, представляется в виде

$$P_{2n}(x) = Q_n^2(x) + (x - a)(b - x) R_{n-1}^2(x),$$

где многочлены $Q_n(x)$ и $R_{n-1}(x)$ определяются с точностью до знака.

Известную теорему Ф. Рисса и Л. Фейера о представлении неотрицательного тригонометрического полинома (§ 7), которая была доказана позже теоремы А. А. Маркова, следует рассматривать как аналог этого результата А. А. Маркова.

Имеются и другие результаты А. А. Маркова по математическому анализу.

В Большой советской энциклопедии (второе и третье издания), в широко известных статьях о жизни и деятельности А. А. Маркова, а также в различных обзорах его работ главное внимание уделяется трудам А. А. Маркова по теории чисел и теории вероятностей, а его заслуги в развитии математического анализа отмечаются недостаточно. Между тем многие математики считают А. А. Маркова классиком математического анализа, ибо его выдающиеся труды явились началом многочисленных исследований в различных направлениях математического анализа, эти труды постоянно цитируются и в настоящее время, причем многие результаты названы его именем.

Б. В. Гнеденко

Работы академика А. А. Маркова по теории вероятностей

Несомненно, что исследования А. А. Маркова по теории вероятностей составляют одну из наиболее ценных частей его научного творчества. Примерно из 120 оригинальных работ, написанных ученым, свыше одной трети относятся к теории вероятностей. Многие из этих работ посвящены созданию нового научного направления — теории «цепей Маркова», переросшей в огромную и весьма важную область научных исследований — теорию марковских случайных процессов. Более того, Марков существенно продвинул классические исследования, касающиеся закона больших чисел и центральной предельной теоремы теории вероятностей. Здесь он шел своими оригинальными путями, которые привели к созданию новых методов исследования, глубоким результатам, сохранились в науке до настоящего времени и продолжают в ней играть роль не только в классических задачах, но и в совсем новых вопросах. Как всегда случается, наряду с первоклассными исследованиями, прокладывавшими новые пути в науке, Маркову приходилось заниматься и очередными задачами, требующими уточнений, более строгих формулировок, рассмотрения частных случаев.

Помимо чисто научных результатов, Марков большое внимание уделял изданию курсов своих лекций. «Введение в анализ», «Сферическая тригонометрия», «Конечные разности», «Функции, наименее уклоняющиеся от нуля», «Непрерывные дроби», «Теория вероятностей» — вот примерный перечень курсов, которые записывали, а затем литографировали студенты. Каждый из этих курсов нес в себе особенности изложения, свойственные Маркову, его понимание предмета, его представление об уровне строгости и основных результатах, которые абсолютно необходимо знать студентам. Курс теории вероятностей начиная с 1882 г. литографски издавался четыре раза, а затем с 1900 по 1924 г. выдержал четыре русских и одно переводное (на немецкий язык) издания [I, 65, 85, 98, 121].

После замечательной по своей простоте и одновременно силе результата статьи П. Л. Чебышева «О средних величинах» интерес к разысканию наиболее общих условий, при которых имеет место закон больших чисел, сильно вырос. Результат Чебышева выяснил, что знаменитая теорема Я. Бернулли и ее обобщение, данное Пуассоном, представляют лишь простейший частный случай общего предложения. Теорема Чебышева показала роль среднего арифметического для теории ошибок измерений, для количественного естествознания. Естественно, что Марков не мог оставить без внимания один из центральных результатов теории вероятностей, начавший играть важную роль в физике.

Сердцевиной доказательства закона больших чисел в форме Чебышева является, как известно, его знаменитая лемма, согласно которой для любой случайной величины и произвольного постоянного $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

или неравенство

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{M\xi}{\varepsilon}.$$

Эти неравенства принято называть соответственно вторым и первым неравенствами Чебышева.

Если $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots$ взаимно независимые случайные величины, для которых дисперсии ограничены одним и тем же числом C ($D\xi_k \leqslant C$, то из второго неравенства Чебышева следует, что

$$P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Отсюда вытекает, что при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| \geqslant \varepsilon\right\} \to 0.$$

Теорема показывает, что при весьма общих условиях суммы независимых случайных величин по мере увеличения числа слагаемых сближаются с постоянными величинами. В частности, если все случайные величины одинаково распределены, то сближение происходит с постоянной величиной, равной математическому ожиданию. Этот результат получил сразу же такую интерпретацию: если производится последовательность независимых измерений некоторой величины a и в процессе измерений нет систематической ошибки, то среднее арифметическое результатов измерений сближается по вероятности с истинным значением измеряемой величины.

А. А. Марков прежде всего сделал естественное обобщение леммы Чебышева, а именно доказал, что если постоянная $\alpha > 0$, то имеет место для любого $\varepsilon > 0$ и любой случайной величины ξ неравенство

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{M|\xi - M\xi|^{\alpha}}{\varepsilon^{\alpha}}.$$

Из этого неравенства легко получается обобщение теоремы Чебышева: если как угодно зависимые величины ξ_1 ξ_2 ... таковы, что при некотором $\alpha > 0$ и $n \to \infty$

$$\frac{1}{n^{\alpha}} M|\xi - M\xi|^{\alpha} \to 0, \qquad \xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

то имеет место закон больших чисел

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Это незначительное обобщение интересно тем, что его идея послужила С. Н. Бернштейну, Е. Е. Слуцкому и Б. В. Гнеденко (результаты получены ими независимо друг от друга) основой установления необходимого и достаточного условия для выполнения закона больших чисел. Вот этот результат: пусть ξ_1, ξ_2 ... — последовательность как угодно зависимых случайных величин, пусть далее $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M\xi_k)$. Для того чтобы при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось соотношение $P\left\{\frac{1}{n}|S_n| \geqslant \varepsilon\right\} \to 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$M\frac{S_n^2}{n^2 + S_n^2} \to 0$$

(доказательство см. [II, 210]).

А. А. Марков придавал большое значение распространению закона больших чисел на зависимые величины. Этим вопросам он посвятил несколько работ. В частности, в заключении статьи «Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга» он писал: «Итак, независимость величин не составляет необходимого условия для существования закона больших чисел» [I, 80, с. 156]. Эта работа, опубликованная в 1907 г., естественно связывала случайные величины, подчиненные цепной зависимости, с законом больших чисел для зависимых величин.

Маркова интересовал метод наименьших квадратов, предложенный в начале XIX в. Лежандром и Гауссом. В работе «Закон больших чисел и способ наименьших квадратов» [I, 58] он сделал несколько критических замечаний в адрес авторов, которые без достаточных оснований считали, что закон больших чисел в форме Чебышева обосновывает этот метод. «В русской литературе по теории вероятностей,— подчеркивал А. А. Марков,— встречаются также попытки выводить основания способа наименьших квадратов из теорем, доказанных Чебышевым в мемуаре „О средних величинах“».

Одну из таких попыток, весьма смутную по существу дела, можно усмотреть в известном сочинении «Изложение способа наименьших квадратов» Н. Маиевского. В § 31 и 32 этого сочинения говорится о каком-то «начале арифметической середины».

В § 31 автор занимается выводом этого начала для весьма большого числа наблюдений, не установив, в чем, собственно, состоит оно. И только из § 32 можно догадаться, что это начало состоит в известном предположении Гаусса, что среднее арифметическое из наблюденных величин представляет наивероятнейшее значение неизвестной измеряемой величины. Рассматривая же рассуждения § 31, мы убеждаемся, что из них не вытекает ничего подобного, так как все время говорится только об арифметическом среднем и никаких сравнений этого среднего с другими не сделано.

Заключение § 31 состоит в том, что с увеличением числа наблюдений до ∞ приводится к единице вероятность, что среднее арифметическое наблюденных величин разнится от истинного значения неизвестного менее чем на какую-нибудь данную величину. Отсюда, однако, ничего не следует, так как с увеличением числа наблюденных величин до ∞ приводится к единице и вероятность, что другие средние величины (линейного вида) из наблюденных величин разнятся от истинного значения неизвестного менее чем на какую-нибудь данную величину» [I, 58, с. 126—127].

Марков, говоря о других средних величинах линейного вида, вероятно, имел в виду следующее. Пусть α_{nk} — некоторые действительные числа, обладающие тем свойством, что при каждом n сумма $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} = n$, а каждое из этих слагаемых по абсолютной величине значительно меньше суммы остальных. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ — результаты n независимых наблюдений одной и той же случайной величины, имеющей математическое ожидание a, тогда легко показать, что при некоторых весьма общих предположениях об этой случайной величине (например, конечность ее дисперсии) при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{nk}x_k - a\right| > \varepsilon\right\} \to 0.$$

Вторая задача, которая привлекала внимание Маркова в течение весьма длительного времени, была так называемая центральная предельная теорема теории вероятностей. В ту пору Марков предпочитал называть ее второй предельной теоремой. Интерес к этому кругу идей появился у Маркова в самом конце прошлого столетия в связи с публикацией П. Л. Чебышева «О двух теоремах относительно вероятностей», в которой тот методом моментов стремился доказать центральную предельную теорему. Однако, как отмечал неоднократно Марков, рассуждения Чебышева были недостаточно строгими. А в математике результат, полученный недостаточно строгими методами, не является научной истиной. На него можно смотреть только как на возможный, но еще не установленный факт.

Марков приложил значительные усилия, чтобы как формулировка теорем Чебышева, так и их доказательство были доведены до полного совершенства. Для достижения этой цели он шел тем же путем, какой был избран Чебышевым,— использованием метода моментов. Теперь мы сформулировали бы основное положение Чебышева—Маркова таким образом: имеется последовательность функций распределения $F_n(x)$. Если для любого $k \geqslant 0$ имеют место соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx,$$

то $F_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz.$

Ни Чебышев, ни Марков не пользовались понятием функции распределения, поэтому они ограничивались случаем дискретного и непрерывного распределений. Формулировка основной леммы, данная Марковым (см. «О корнях уравнения $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$», 1898 г.), такова:

«Если все функции последовательности $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ удовлетворяют неравенству $f_n(x) \geqslant 0$, а суммы

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_n(x), \quad \sum_{-\infty}^{\infty} x f_n(x), \quad \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 f_n(x) \ldots$$

стремятся соответственно к пределам

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} \, dx \ldots,$$

когда n неограниченно возрастает, то сумма $\sum\limits_{\alpha}^{\beta} f_n(x)$, распространенная на все значения x, заключенные в заданном интервале (α, β), стремится при неограниченном возрастании n к пределу

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} \, dx\text{''}.$$

Эта изящная теорема была полностью доказана А. А. Марковым в 1898 г. [I, 57]. В ней имеется единственная неприятность — бесконечное множество условий: все целочисленные моменты должны сходиться к соответствующим моментам нормального распределения. Спустя всего два-три года А. М. Ляпунов показал, что требовать выполнения бесконечного множества условий совсем не нужно. Для формулировки замечательной теоремы Ляпунова введем обозначения

$$a_k = M\xi_k, \quad b_k = D\xi_k, \quad C_k = M\,|\,\xi_k - a_k\,|^{2+\delta},$$

где δ некоторое положительное постоянное.

Ляпунов доказал, что если для некоторого $\delta > 0$ при $n \to \infty$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \Big/ \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big)^{1+\frac{\delta}{2}} \to 0,$$

то для любого x при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

По поводу этого установленного А. М. Ляпуновым факта А. А. Марков писал: «Общность выводов в последней работе А. М. Ляпунова далеко превзошла ту, которая была достигнута методом математических ожиданий. Достигнуть столь общих выводов методом математических ожиданий казалось даже невозможным, ибо он основан на рассмотрении таких математических ожиданий в неограниченном числе, существование которых в случаях А. М. Ляпунова не предполагается.

Для восстановления поколебленного таким образом значения метода математических ожиданий необходимо было выяснить, что вышеупомянутыми работами он далеко не исчерпан до конца[1]. Об этой задаче я думал довольно долго, и мне удалось решить ее, можно сказать, в двух направлениях. С одной стороны, я нашел, как надо дополнить метод математических ожиданий, чтобы охватить все случаи А. М. Ляпунова; а с другой стороны, ряд моих работ показал, что тот же метод дает довольно легкое средство для распространения предельной теоремы на связанные величины». [I, 128, с. 322]

Метод, предложенный Марковым, в настоящее время широко используется в научных исследованиях. Его можно назвать методом урезания. Для того чтобы воспользоваться им, «введем вспомогательное число N, которое будем увеличивать беспредельно с n, и сово-

---

[1] Марков имеет в виду свои работы 1898 г., в том числе и упомянутые нами ранее.

купность всех возможных значений каждой разности $\xi_k - a_k$ разобьем на две совокупности, одну из которых пусть составят числа x_k, лежащие между $-N$ и $+N$, а другую — числа y_k, лежащие вне этих пределов. Предполагая, что

$$y_k = 0 \text{ при } -N \leqslant \xi_k - a_k \leqslant N$$

и

$$x_k = 0 \text{ при } \xi_k - a_k < -N \text{ и при } \xi_k - a_k > N,$$

мы можем положить $\xi_k - a_k = x_k + y_k$; вместе с тем нетрудно установить равенства

$$M(\xi_k - a_k) = Mx_k + My_k,$$
$$b_k = M(\xi_k - a_k)^2 = Mx_k^2 + My_k^2,$$
$$c_k = Mx^{2+\delta} + My^{2+\delta}.$$

Математических ожиданий других степеней $\xi_k - a_k$, $|\xi_k - a_k|$, y_k и $|y_k|$ при условиях А. М. Ляпунова мы не должны рассматривать. Но как бы велико ни было введенное нами число N, мы можем рассматривать математические ожидания любых положительных степеней x_k и $|x_k|$ [I, 128, с. 324].

Обозначим через q_k вероятность неравенства $|\xi_k - a_k| > N$. Марков так описал смысл проводимых им рассуждений: «Вспомогательное число N, возрастающее беспредельно вместе с n, мы подчиним двум условиям. И прежде всего постараемся распорядиться числом N так, чтобы разность между вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{B_n}} < t_2$$

и вероятностью неравенств $\left(\text{здесь } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

$$t_1 < \frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k) < t_2$$

приближалась к пределу «нуль» вместе с $1/n$.

Так как первые неравенства равносильны вторым во всех случаях, когда $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$, то числовая величина разности между вероятностями их не может превзойти вероятности нарушения по крайней мере одного из равенств $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots$

$\ldots, y_n = 0$, а эта последняя вероятность, как нетрудно видеть, не больше суммы $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$.

Обращаясь к сумме $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ и принимая во внимание равенство $c_k = M \mid x \mid^{2+\delta} + M \mid y_k \mid^{2+\sigma}$, устанавливаем неравенство $q_k < c_k/N^{2+\delta}$ и отсюда выводим

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n < \frac{1}{N^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Сообразно этому мы подчиним число N условию, чтобы дробь приближалась к нулю вместе с $1/n$. При соблюдении такого условия разность между вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k) < t_2$$

и вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{k=1}^{n} x_k < t_2$$

должна согласно вышеприведенным объяснениям приближаться к пределу «нуль» вместе с $1/n$; и, следовательно, при разыскании предела вероятности первых неравенств мы можем заменить их вторыми.

Обращаясь к разысканию предела вероятности этих вторых неравенств, мы подчиним N другому условию, при соблюдении которого вместе с первым нетрудно для всякого положительного числа m установить формулу

$$\lim_{n\to\infty} M \left(\frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{k=1}^{n} x_k \right)^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^m e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

что в силу заключительной теоремы предыдущей статьи немедленно приведет нас к цели» [I; 128, с. 324—326].

Марков высоко ценил этот свой результат и предложенный при этом метод доказательства. Об этом можно судить хотя бы по тому, что он опубликовал эту работу в качестве дополнения к своему учебнику «Исчисление вероятностей». Тем самым он показывал, что этот метод полезно изучить каждому из молодых математиков. К тому же он сам заметил и писал об этом, что его метод легко распространяется и на суммирование зависимых случайных величин, скажем, связанных цепной зависимостью. Метод Маркова действительно богат идеями и возможностями для использования не только в теории вероятностей, но и в теории функций. В последующие десятилетия он неоднократно использовался многими авторами с большим успехом.

Как ни значительны результаты Маркова в области классических предельных теорем теории вероятностей, основные его достижения относятся к созданному им новому направлению исследований — теории цепей Маркова. Это наименование было предложено французским исследователем Ж. Адамаром и привилось в науке, поскольку оно соответствует исторической правде. Теорией цепей Марков создал себе «неразрушимый, вечный памятник» (Гораций, Оды, кн. III, 30).

В работе «Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга» (1907 г.) впервые появилось обобщение схемы Бернулли на случай, когда испытания зависимы. В § 2 этой работы А. А. Марков четко и ясно объясняет смысл цепной зависимости (пока еще без использования этого термина). В частности, он пишет:

«Повторяя, что мы даем только достаточные, но не необходимые условия, остановимся на одном из тех случаев, на которые выводы Чебышева можно распространить по той причине, что влияние величин $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ друг на друга быстро убывает по мере увеличения их взаимного расстояния. В нашем случае $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ будем представлять число появлений некоторого события A при n последовательных испытаниях, связанных таким образом, что вероятность события A при каждом испытании имеет вполне определенное значение p', если событие A появилось при непосредственно предшествующем испытании, и другое определенное значение p'' — в противном случае, каковы бы ни были результаты прочих предшествующих ему испытаний; если же результаты всех испытаний остаются неопределенными, то вероятность события A для каждого из них равна одному и тому же числу p''» [I, 80]. По-видимому, это первая формулировка цепной зависимости, которую можно встретить в научной литературе. И ее дал А. А. Марков.

В конце § 2 указанной статьи А. А. Марков доказывает, что для числа появлений событий A в случае испытаний, связанных цепной зависимостью, закон больших чисел имеет место.

«Выводам § 2,— пишет А. А. Марков в начале § 5,— можно придать значительно большую общность, а именно вместо числа появления некоторого события можно рассматривать сумму величин, связанных в цепь таким образом, что когда одна из них получает определенное значение, следующие за ней становятся независимыми от предшествующих ей. Пусть будет x_1, $x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \ldots$ — бесконечный ряд величин, связанных таким образом, что x_{k+1} при всяком k не зависит от $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, когда известно значение x_k.

Пусть, далее, совокупность чисел $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ представляет все возможные значения любой из наших величин, а система

$$\begin{array}{l} p_{\alpha\alpha}, p_{\alpha\beta}, p_{\alpha\gamma} \ldots \\ p_{\beta\alpha}, p_{\beta\beta}, p_{\beta\gamma} \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

представляет вероятности, при данном значении x_k, величине x_{k+1} иметь определенное значение, причем первый значок у p' указывает данную величину x_k, а второй — предполагаемую величину x_{k+1}; например, при $x_k = \beta$ вероятность равенства $x_{k+1} = \gamma$ имеет значение $p_{\beta\gamma}$.

Эти вероятности мы предполагаем независящими от значка $к$, чтобы не очень усложнять наши обозначения и рассуждения» [I, 128, с. 355].

Таким образом, А. А. Марков ограничился однородными цепями Маркова и очень ясно, четко и выпукло разъяснил смысл этого нового математического объекта исследований. В том же § 5 Марков доказал закон больших чисел для последовательности случайных величин, связанных цепной зависимостью в предположении существования у слагаемых конечной дисперсии. Мы видим, таким образом, что Марков в одной работе доказал не только обобщение теоремы Бернулли, но и обобщение теоремы Чебышева.

В действительности, в работе, о которой только что шла речь, сделано большее, а именно обнаружены теоремы совсем нового типа, свойственные цепям Маркова. Эти теоремы, получившие позднее название эргодических, играют большую роль в практическом использовании теории цепей Маркова.

Одна из форм эргодических теорем состоит в следующем: пусть $p_{k\alpha}(n, \beta)$ — вероятность того, что случайная величина x_{k+n} примет значение β, если x_k имела значение α. Как будет вести себя вероятность $p_{k\alpha}(n, \beta)$ при стремлении n к бесконечности? Оказывается, она в широких условиях имеет предельное значение, которое не зависит от значения α. Случайные величины как бы забывают, из какого состояния они выходят, и для них играет роль лишь, какое значение они должны принять.

Вторая эргодическая теорема относится к изучению предельного поведения математического ожидания x_{k+n} (при $n \to \infty$) при условии, что нам известно значение величины x_k. Выяснилось, что роль значения x_k по мере роста n уменьшается и предельное значение математического ожидания от значения, принятого x_k, не зависит.

Значительные усилия Марков затратил на поиски достаточных условий, в которых центральная предельная теорема имеет место, и для случайных величин, связанных цепной зависимостью.

В статье «Замечательный случай испытаний, связанных в цепь» Марков доказал, так сказать, теорему Лапласа—Муавра для однородной простой цепи Маркова. «Число p_1 означает вероятность события E при $(k+1)$-м испытании, если дано, что E появилось при k-м испытании, а результаты следующих за ним испытаний остаются неопределенными. Число p_2 означает также вероятность события E при $(k+1)$-м испытании . . . при задании, что k-е испытание привело к появлению не события E, а противоположного ему события F». Введем обозначение $\delta = p_1 - p_2$. Как легко сообразить, случаи $\delta = 1$ и $\delta = -1$ не представляют интереса для исследования, поэтому мы предположим, что $-1 < \delta < 1$. Случай $\delta = 0$ приводит к схеме независимых испытаний, и поэтому классическая теорема Лапласа—Муавра будет представлять собой частный случай следующего результата Маркова. При беспредельном возрастании числа рассматриваемых испытаний n вероятность неравенства

$$t_1 < \frac{m - np}{\sqrt{2npq\,\frac{1+\delta}{1-\delta}}} < t_2 \qquad (p_2 = p(1-\delta))$$

должна приближаться к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2}\,dt,$$

каковы бы ни были данные числа t_1 и t_2,

Эту теорему Марков решил проиллюстрировать примером, явно показывающим, что ученый упорно искал реальные явления, которые могли бы считаться подчиненными закономерностям цепей Маркова. В дальнейшем оказалось, что пример Маркова представляет значительный интерес для техники связи, но это выяснилось значительно позднее. Постановку статистической задачи мы заимствуем из статьи Маркова, который писал: «Закончим статью и всю книгу поучительным примером связанных испытаний, совокупность которых, с некоторым приближением, можно рассматривать как простую цепь. Этот пример выясняет, что суммы многих связанных величин могут образовать (почти) независимые величины.

Пример наш не требует ничего, кроме какой-нибудь книги, и потому легко может быть повторен каждым в большем или меньшем размере. Мы берем последовательность 20000 букв в романе Пушкина «Евгений Онегин», не считая «ъ» и «ь»; эта последовательность обнимает всю первую главу и шестнадцать строф второй. Она доставляет нам 20000 связанных испытаний, каждое из которых дает гласную или согласную букву. Соответственно этому мы допускаем существование неизвестной постоянной вероятности p букве быть гласной и приближенную величину p ищем из наблюдений, считая число появившихся гласных и согласных букв. Кроме числа p мы найдем, также из наблюдений, приближенные величины двух других чисел p_1 и p_2, представляющих вероятности

первое p_1 — гласной букве следовать за гласной,

второе p_2 — гласной букве следовать за согласной» [I, 100].

В качестве приближенных значений Марков нашел для только что указанных вероятностей следующие величины: $p = 0{,}432$, $p_1 = 0{,}128$, $p_2 = 0{,}663$, $\delta = -0{,}535$.

Статья, о которой идет речь, была помещена в качестве дополнения в третье издание книги «Исчисление вероятностей», выпущенное им к 200-летнему юбилею Я. Бернулли [I, 98]. Этот юбилей Марков стремился отметить как можно лучше и серьезнее, поскольку он совпадал с 300-летием дома Романовых. Этим он хотел подчеркнуть непреходящую значимость научных исследований, особенно в сравнении с преходящими юбилеями самодержавной власти.

В том же 1913 г. Марков продолжил свои статистические иследования, относящиеся к чередованию гласных и согласных в русских литературных текстах. На этот раз исследовал 100000 букв повести С. Т. Аксакова «Детские годы Багрова-внука». Марков был удовлетворен результатами и считал, что его исследование подтвердило достаточно хорошее совпадение реального следования гласных и согласных с гипотезой наличия простой цепной зависимости. При этом оказалось, что $p_1 = 0{,}552$, $p_2 = 0{,}365$, $\delta = 0{,}187$.

Очерк результатов Маркова по теории вероятностей будет далеко не полным, если не дать хотя бы самого краткого описания его учебника «Исчисления вероятностей». Для него эта книга была не просто изложением некоторых сведений по теории вероятностей, которые он считал основными. Учебник являлся для него одновременно введением будущих специалистов в современные области исследований. Именно в силу таких представлений он включал в курс свои новые принципиальные результаты в науке. Особенно много добавлений было внесено в третье издание книги. Это не только обновило ее, но и превратило ее в своеобразную монографию по теории вероятностей.

На наш взгляд, некоторые детали курса А. А. Маркова заслуживают пристального внимания. Прежде всего хотелось бы отметить, что у него строго сформулирована теорема о математическом ожидании суммы случайных величин и специально подчеркнуто, что это предложение относится как к независимым, так и к зависимым величинам. В известных учебниках А. Пуанкаре, Ж. Бертрана, Чубера и ряде других эта теорема доказывается только для случая независимых слагаемых. Интересны рассуждения Маркова о «приложении исчисления вероятностей вообще и обобщенной теоремы Бернулли в частности к вопросу о выгодности и невыгодности более или менее рискованных предприятий». Он показывает, что для определения самой возможности судить о выгодности или невыгодности предприятия необходимо привлечение понятия математического ожидания. Марков стремился дать читателю не только формальные знания, но и показать, как они могут быть использованы в реальных ситуациях. Учет этого соображения заставил Маркова ввести в свой учебник две главы чисто прикладного характера: «Способ наименьших квадратов» и «О страховании жизни».

Книга Маркова была высоко оценена еще при его жизни. Она была переведена на немецкий язык и издана в Германии. В русской печати появился ряд рецензий, в которых отмечались несомненные достоинства книги.

Наш краткий очерк работ А. А. Маркова хотелось бы закончить небольшим упоминанием о недавно опубликованной переписке ученого с А. А. Чупровым [II, 77]. Она включает в себя несколько десятков писем, посвященных общим вопросам математической статистики, и хорошо характеризует отношение Маркова к этой, тогда только что начавшей развиваться науке. Из писем видно, как постепенно резко отрицательная оценка статистики Марковым сменяется его благоприятным отношением к постановкам задач и предлагаемым подходам к их решению. По-видимому, именно эта переписка натолкнула Маркова на мысль провести статистические исследования чередования гласных и согласных в романе Пушкина «Евгений Онегин» и в повести Аксакова «Детские годы Багрова-внука» [I, 100].

Следует признать, что нынешняя теория вероятностей далеко не та, какой она была в начале века, в годы, когда в ней работал А. А. Марков. Иным стал сам подход к ней, появились новые разделы, ставшие основным направлением не только теории вероятностей, но и прикладных аспектов; высокой степени совершенства достигло развитие предельных теорем. В частности, работами А. Я. Хинчина и его учеников было найдено соответствие между двумя предельными теоремами теории вероятностей, которые были известны в эпоху А. А. Маркова. Влияние А. А. Маркова на последующее развитие теории вероятностей очень велико, и трудно сказать, какой ущерб понесли бы наука и практика, если бы в ней не работал такой выдающийся мыслитель, каким был этот ученый.

Основные даты жизни и деятельности А. А. Маркова

1856, 2 (14) **июня** — рождение Андрея Андреевича Маркова
1866—1874 — учеба в 5-й Петербургской гимназии.
1874—1878 — учеба на физико-математическом факультете Петербургского университета.
1877 — награждение золотой медалью за студенческое сочинение по математике.
1879 — публикация первых научных работ.
1880, 13 (25) **апреля** — защита магистерской диссертации.
1880, **октябрь** — начало педагогической деятельности в Петербургском университете в качестве приват-доцента.
1883 — женитьба на М. И. Марковой (урожденной Вальватьевой).
1885, 28 **января** (9 **февраля**) — защита докторской диссертации.
1886, 8 (20) **апреля** — утверждение экстраординарным профессором по кафедре чистой математики.
1886, 13 (25) **декабря** — избрание адъюнктом Петербургской академии наук.
1886 — знакомство с М. И. Чигориным, победа в первом в России тематическом шахматном турнире по переписке.
1888, 4 (16) **марта** — избрание членом-корреспондентом Харьковского математического общества.
1890, 30 **января** (11 **февраля**) — избрание экстраординарным академиком Петербургской Академии наук.
1890 — шахматный матч по переписке с М. И. Чигориным.
1892, 18 **февраля** (1 **марта**) — избрание в члены Московского математического общества.
1893, **ноябрь** — назначение ординарным профессором.
1894, 30 **ноября** (12 **декабря**) — выступление на экстренном заседании Физико-математического отделения Академии наук по случаю кончины П. Л. Чебышева.
1896, 2 (14) **марта** — избрание ординарным академиком.
1900 — выход в свет учебника «Исчисление вероятностей».
1902, **сентябрь** — избрание почетным доктором математики Абельского университета (Швеция).
1903, 9 (22) **сентября** — рождение сына Андрея, будущего выдающегося советского математика, члена-корреспондента АН СССР.
1905, **январь** — участие в подготовке «Записки о нуждах просвещения в России» («Записка 342 ученых»).
1905 — утверждение в звании заслуженного профессора.
1906 — публикация статьи «Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга».
1907 — публикация статьи «Исследование замечательного случая зависимых испытаний».

1908 — публикация статьи «Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь».

1912, **12 (25) февраля** — Прошение в синод об отлучении от церкви.

1913, **1 (14) декабря** — выступление на торжественном заседании Академии наук, посвященном 200-летию закона больших чисел.

1913, **2 (15) декабря** — избрание почетным членом Петербургского университета [1].

1917, **27 апреля (10 мая)** — утверждение в звании почетного члена университета.

1918, **18 ноября** — утверждение профессором по кафедре чистой математики Петроградского университета.

1922, **20 июня** — смерть А. А. Маркова.

---

[1] Избрание А. А. Маркова почетным членом университета не было утверждено тогдашним министром народного просвещения Л. А. Кассо.

Библиографический список

I. Научные труды А. А. Маркова

1879

1. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. Pt 1—2 // Math. Ann. Bd. 15. S. 381—406; Bd. 17. S. 379—399.

1880

2. О бинарных квадратичных формах положительного определителя: (Магист. дис.). — СПб.— 48 с.
3. О Бернуллиевом вопросе // Речи и протоколы VI Съезда рус. естествоиспытателей и врачей в С.-Петербурге с 20-го по 30-е дек. 1879 г. СПб. С. 188—189.
4. Разложение $\int\limits_0^t e^{-t^2}\,dt$ в непрерывную дробь // Там же. С. 211.

1882

5. Sur une question de Jean Bernoulli // Math. Ann. Bd. 19. S. 27—36.

1883

6. Доказательство трансцендентности чисел e и π: (Невозможность квадратуры круга): По статьям Эрмита и Линдеманна / Обраб. А. Марков.— СПб.— 30 с.

1884

7. Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева // Сообщ. и протоколы заседания мат. о-ва при Харьк. ун-те, 1883 г. Ч. 2. С. 105—114.
8. Записка магистра математики А. Маркова (занимающего кафедру теории вероятностей в С.-Петербургском университете) о расчете вероятных оборотов эмеритальной кассы судебного ведомства.— СПб.— 13 с.
9. О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей: Докт. дис.— СПб.— 131 с.
10. Определение наибольшего и наименьшего значений некоторой величины // Сообщ. и протоколы заседаний мат. о-ва при Харьк. ун-те, 1883, г. Ч. 2. С. 95—104.
11. Определение некоторой функции по условию наименее отклоняться от нуля // Там же. Ч. 1. С. 83—92.
12. Démonstration de certaines inégalités de M. Tchébychef // Math. Ann. Bd. 24. S. 172—180.

1885

13. Доказательство сходимости многих непрерывных дробей // Сообщ. и протоколы заседания мат. о-ва при Харьк. ун-те, 1885 г. Ч. 1. С. 29—33.

14. Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales // Math. Ann. Bd. 25. S. 427—432.

1886

15. О распределении корней некоторых уравнений // Сообщ. и протоколы заседаний мат. о-ва при Харьк. ун-те, 1885 г. Ч. 2. С. 89—98.
16. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite // Ann. sci. Ecole norm. supér. Sér. 3. T. 3, N 1. P. 81—88.
17. Sur les racines le certaines équations. Pt. 1—2 // Math. Ann. Bd. 27. S. 143—150, 177—182.

1887

18. Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tchébycheff // Acta math. 1886/1887. Vol. 9. P. 57—70.
19. О дифференциальном уравнении гипергеометрического ряда, I—II // Сообщ. и протоколы заседаний мат. о-ва при Харьк. ун-те, 1886, г. Ч. 2. С. 51—62, 95—113.
20. Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique. Pt 1—2 // Math. Ann. Bd. 28. S. 586—593; Bd. 29. S. 247—258.

1888

21. Table des valeurs de l'intégrale $\int\limits_{x}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$.— St.-Pbg.— T. 27.— 98 p.

1889

22. Исчисление конечных разностей. Отд. первый: Интерполирование.— СПб.: Тип. имп. Акад. наук.— 122 с.
23. К вопросу о черчении карт // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. Т. 1, № 3. С. 113—128.
24. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Там же. № 5/6. С. 250—276.
25. Sur les séries $\Sigma 1/k^2$, $\Sigma 1/k^3$: (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite) // C. r. Acad. sci. T. 109, N 25. P. 934—935.

1890

26. Об одном вопросе Д. И. Менделеева.— СПб.— 24 с. — (Зап. Акад. наук; Т. 62).
27. Пример распространения способа Маклорена решать вопрос о сходимости рядов на многократные суммы // Дневник VIII съезда рус. естествоиспытателей и врачей. № 6 (3 янв.). С. 2.
28. Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes.— St.-Pbg.— 18 p.— (Mém. Acad. sci. Sér. 7; T. 37, N 9).

1891

29. Исчисление конечных разностей. Отд. второй: Уравнения в конечных разностях и суммирование.— СПб.: Тип. имп. Акад. наук.— 124 с.
30. Sur la théorie des équations différentielles linéaires // C. r. Acad. sci. T. 113, N 23. P. 790—791; N 26. P. 1024—1025.
31. Sur les équations différentielles linéaires // Ibid. N 20. P. 685—688.

32. Sur une classe de nombres complexes: (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite) // Ibid. T. 112, N 15. P. 780—782; N 19. P. 1049—1050; N 20. P. 1123—1124; N 22. P. 1288.

1892

33. О целой функции, равной произведению двух гипергеометрических рядов: (Извлечение из письма к К. А. Андрееву) // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. Т. 3, № 5. С. 252—256.
34. Об одном линейном уравнении третьего порядка // Мат. сб. Т. 16, вып. 2. С. 352—355.
35. Sur la série hypergéométrique: (Extrait de deux lettres adressées à Mr. F. Klein) // Math. Ann. Bd. 40. S. 313—316.
36. Sur la série hypergéométrique // C. r. Acad. sci. T. 114, N 2. P. 54—55.
37. Sur les nombres entiers dépendant d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire: (A la mémoire de G. Zolotareff).— St.-Pbg.— 37 p.— (Mém. Acad. sci. Sér. 7; T. 38. N 9).

1893

38. Доказательство сходимости многих непрерывных дробей // Зап. Акад. наук. СПб. Т. 72. кн. 1. С. 8—15.
39. О целой функции

$$x^n F\left(\frac{-n-\Delta}{2}, \frac{2k-n+1-\Delta}{2}, 1-\Delta, \frac{1}{x}\right) \times$$
$$\times F\left(\frac{-n+\Delta}{2}, \frac{2k-n+1+\Delta}{2}, 1+\Delta, \frac{1}{x}\right)$$

и о функциях более общего характера.— St.-Pbg.— 37 p.— (Mém. Acad. sci. Sér. 7; T. 41, N 2).

1894

40. Извлечение из письма академика А. А. Маркова к профессору К. А. Андрееву: [По поводу посмертного издания работы В. Г. Имшенецкого «Сравнение способа проф. Н.В. Бугаева с другими приемами разыскивания рациональных дробных решений дифференциальных уравнений» в «Сообщениях Харьковского математического общества» (Сер. 2. 1893. Т. 4, № 1, и 2)] // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. Т. 4, № 4. С. 146—149.
41. О функциях, получаемых при обращении рядов в непрерывные дроби.— СПб.— 30 с.— (Зап. Акад. наук; Т. 72. Прил. 2).
42. По поводу комментария профессора К. А. Андреева: [К статье академика В. Г. Имшенецкого о разыскивании рациональных решений нелинейных дифференциальных уравнений, помещенной в «Сообщениях Харьковского математического общества» (Сер. 2. 1894. Т. 4. № 4)] // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. Т. 4, № 4. С. 175—176.

1895

43. О наивыгоднейших изображениях некоторой части данной поверхности вращения на плоскости // Изв. Акад. наук. Сер. 5. СПб. Т. 2, № 3. С. 177—187.
44. О предельных величинах интегралов // Там же. С. 195—203.
45. О простых делителях чисел вида $1 + 4x^2$ // Там же. Т. 3, № 1. С. 55—58.

46. О псевдоэллиптических интегралах вида $\int \frac{x\,dx}{(x^3+c)\sqrt{x^3+\partial}}$. // Зап. Акад. наук. СПб. Т. 75, кн. 2. С. 111—128.
47. Démonstration d'un théorème de Tchébycheff: (Extrait des pariers laissés par l'auteur): (Lettre adressée à M. Hermite) // C. r. Acad. sci. T. 120. N 19. P. 1032—1034).
48. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues // Acta math. Vol. 19. P. 93—104.
49. Note sur les fractions continues // Изв. Акад. наук. Сер. 5. СПб. Т. 2, № 1. С. 9—13.

1896

50. Новые приложения непрерывных дробей.— СПб.— 50 с. (Зап. имп. Акад. наук. Сер. 8. Отд. физ.-мат; Т. 3, № 5).
51. О нулях целой функции Эрмита и функции Лямэ: (Извлечение из письма академика А. А. Маркова к проф. А. М. Ляпунову) // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. Т. 5, № 1/2. С. 74—80.
52. Об одном дифференциальном уравнении.— СПб.— 17 с.— (Зап. имп. Акад. наук. Сер. 8. Отд. физ.-мат.; Т. 3, № 10).
53. Nouvelles applications des fractions continues // Math. Ann. Bd. 47. S. 579—597.
54. Sur l'équation de Lamé: (Extrait d'une lettre adressée à Mr. Klein) // Math. Ann. Bd. 47. S. 598—603.

1897

55. О дифференциальном уравнении гипергеометрического ряда с пятью параметрами.— СПб.— 23 с.— (Зап. имп. Акад. наук. Сер. 8. Отд. физ.-мат; Т. 5, № 5).

1898

56. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием.— СПб.— 69 с.— (Зап. имп. Акад. наук. Сер. 8. Отд. физ.-мат.; Т. 6, № 5).
57. Sur les racines de l'équation $e^{x^2}\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}=0$ // Изв. Акад. наук. Сер. 5. СПб. Т. 9, № 5. С. 435—446.

1899

58. Закон больших чисел и способ наименьших квадратов: (Извлечение из писем А. А. Маркова к А. В. Васильеву) // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. Сер. 2. Т. 8, № 3. С. 110—128.
59. Записка академика А. А. Маркова по вопросам, рассмотренным IV поверочною эмеритальною комиссиею: [Эмеритальная касса военно-сухопутного ведомства].— СПб.— 8 с.
60. О доказательстве Сильвестером трансцендентности числа π // Протоколы СПб. мат. о-ва, 1890—1899 гг. С. 9—10.
61. Ответ [на заметку П. А. Некрасова «По поводу статьи А. А. Маркова „Закон больших чисел и способ наименьших квадратов“ и моего сообщения, доложенного Математической секции X Съезда русских естествоиспытателей и врачей в Киеве», помещенную в «Известиях физико-математического общества при Казанском университете» (Сер. 2.

1899. Т. 9, № 1)] // Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 2 Т. 9, № 3. С. 41—43.
62. Предисловие // Чебышев П. Л. Соч. СПб. Т. 1. С. III—IV. В соавт. с Н. Я. Сониным.
63. Приложение непрерывных дробей к вычислению вероятностей // Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 2. Т. 9, № 2. С. 29—34.

1900

64. Исследование о предельных величинах интегралов.— СПб.— 32 с.— (Зап. имп. Акад. наук. Сер. 8. Отд. физ.-мат; Т. 10, № 9).
65. Исчисление вероятностей.— СПб.: Тип. имп. Акад. наук.— 279 с.
66. О вероятности a posteriori // Сообщ. Харьк. мат. об-ва. Сер. 2. Т. 7, № 1. С. 23—25.

1901

67. О неопределенных тройничных квадратичных формах // Изв. Акад. наук. Сер. 5. СПб. Т. 14, № 5. С. 509—523.
68. Об одном механизме Чебышева // Там же. №. 2. С. 201—214.
69. От издателя // Чебышев П. Л. Теория сравнений. 3-е изд. СПб. С. III.

1902

70. О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными // Изв. Акад. наук. Сер. 5. СПб. Т. 16, № 3. С. 97—108.
71. О трех неопределенных тройничных квадратичных формах // Там же. Т. 17, № 2. С. 109—119.

1903

72. К вопросу о прочности стекла // Изв. Акад. наук[1]. 8 с.
73. К вопросу о разорении игроков: (Из письма к проф. А. Васильеву) // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. Сер. 2. Т. 13, № 1. С. 38—45.
74. Об одном предложении алгебры, которое установлено Чебышевым // Изв. Акад. наук. Сер. 5. СПб. Т. 18, № 1. С. 1—13.
75. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies // Math. Ann. Bd. 56. S. 233—251.

1904

76. О предельных величинах отношения двух интегралов // Изв. Акад. наук. Сер. 5. СПб. Т. 21, № 1. С. 23—32.
77. Recherches sur les Valeurs extrêmes des intégrales et sur l'interpolation // Acta math. Vol. 28. P. 243—301.

1905

78. Tchebychef's theory of congruences // Bull. Amer. Math. Soc. Ser. 2. Vol. 11, N 6. P. 337.

1906

79. Новый случай задачи Понселе о приближенном выражении квадратного корня из суммы квадратов // Изв. Акад. наук Сер. 5. СПб. Т. 24, № 1/2. С. 65—81.

[1] Верстка статьи.— ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, № 72, л. 1—4.

80. Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. Сер. 2. Т. 15, № 4. С. 135—156.

1907

81. Исследование замечательного случая зависимых испытаний // Изв. Акад. наук. Сер. 6. СПб. Т. 1, № 3. С. 61—80.
82. О некоторых случаях теорем о пределе математического ожидания и о пределе вероятности // Там же. № 16. С. 707—714.

1908

83. Г. Ф. Вороной, 1868—1908: Некролог // Изв. Акад. наук. Сер. 6. СПб. Т. 2, № 17. С. 1247—1248.
84. [Записка об ученых трудах проф. Г. Ф. Вороного в связи с его представлением в чл.-кор. Акад. наук: (Прил. к протоколу физ.-мат. отд. от 7 нояб. 1907 г.)] // Там же. № 1. С. 11.
85. Исчисление вероятностей. 2-е изд.— СПб.: Тип. имп. Акад. наук.— 283 с.
86. О некоторых случаях теоремы о пределе вероятности // Изв. Акад. наук. Сер. 6. СПб. Т. 2, № 6. С. 483—496.
87. Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь.— СПб.— 29 с.— (Зап. имп. Акад. наук. Сер. 8. Отд. физ.-мат.; Т. 22. № 9).

1909

88. Table des formes quadratiques ternaires indéfinies ne représentant pas zéro, pour tous les déterminants positifs $D \leqslant 50$.— СПб.— 22 с.— (Зап. имп. Акад. наук. Сер. 8. Отд. физ.-мат.; Т. 23. № 7).

1910

89. Исправление неточности: [По поводу статьи П. А. Некрасова «Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты», напечатанной в «Известиях Русского географического общества». Т. 45] // Изв. Акад. наук. Сер. 6. СПб. Т. 4, № 5. С. 346.
90. Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь.— СПб.— 33 с.— (Зап. имп. Акад. наук. Сер. 8. Отд. физ.-мат.; Т. 25. № 3).
91. Исчисление конечных разностей.— 2-е изд., пересмотр. и доп. автором.— Одесса: Mathesis.— 274 с.
92. Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes // Acta math. Vol. 33. P. 87—104.

1911

93. О связанных величинах, не образующих настоящей цепи // Изв. Акад. наук. Сер. 6. СПб. Т. 5, № 2. С. 113—126.
94. Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь // Там же. Т. 6. № 3. С. 171—186.
95. Об основных положениях исчисления вероятностей и о законе больших чисел // Журн. М-ва нар. просвещения. Н С. Ч. 31. Февр. С. 369—374.

1912

96. Об испытаниях, связанных в цепь ненаблюдаемыми событиями // Изв. Акад. наук. Сер. 6. Т. 6, № 8. С. 551—572.
97. Отповедь П. А. Некрасову: [По поводу статьи П. А. Некрасова «К основам закона больших чисел, способа наименьших квадратов и статистики», помещенной в «Математическом сборнике» (Т. 27, вып. 4)] // Мат. сб. Т. 28. С. 215—227.

1913

98. Исчисление вероятностей.— 3-е изд., пересмотр. и знач. доп.— СПб.: Тип. имп. Акад. наук.— 381 с.
99. Предисловие // Бернулли Я. Часть четвертая сочинения Якова Бернулли «Ars conjectandi»: (К 200-летнему юбилею закона больших чисел). СПб.: Тип. имп. Акад. наук. С. V—VI.
100. Пример статистического исследования над текстом «Евгения Онегина», иллюстрирующий связь испытаний в цепь // Изв. Акад. наук. Сер. 8. СПб. Т. 7, № 3. С. 153—162.
101. Démonstration du second théorème — limite du calcul des probabilités par la méthode les moments: (Supplément à la 3e édition russe du «Calcul des probabilités»). Avec un portrait de Jacques Bernoulli.— St.-Pbg.— Pt. 4.—66 p. — (Bicentenaire de la loi des grands nombres, 1713—1913).

1914

102. Двухсотлетие закона больших чисел // Вестн. опыт. физики и элемент. математики. Сер. 2. Одесса. 1-й семестр. № 3 (603). С. 59—64.
103. О вероятности a posteriori. Ч. 2 // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. Т. 14, № 3. С. 105—112.
104. О задаче Якова Бернулли // Изв. Акад. наук. Сер. 6. СПб. Т. 8, № 3. С. 237—246.
105. Письмо в редакцию: [По поводу неправильной справки о мемуаре Бьенэме «considérations à l'appui de la découverte de Laplace», приведенной в заметке И. Ш. «Памяти Якова Бернулли» (Страховое обозрение. 1914. № 1. С.16—17)] // Страховое обозрение. Пг. № 8 (авг.). С. 558.

1915

106. К вопросу о преподавании математики в средних учебных заведениях: (По поводу одного задачника) // Журн. М-ва нар. просвещения. Н. С. Ч. 56. Март. С. 126—130.
107. К вопросу о функциях, наименее уклоняющихся от нуля // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. Т. 14, № 5. С. 198—199.
108. О проекте П. С. Флорова и П. А. Некрасова преподавания теории вероятностей в средней школе // Журн. М-ва нар. просвещения. Н. С. Ч. 57. Май. С. 26—34.
109. Об одной задаче Лапласа // Изв. Акад. наук. Сер. 6. Пг. Т. 9, № 2. С. 87—104.
110. Применение способа математических ожиданий к связанным рядам величин // Там же. № 14. С. 1453—1484.
111. Николай Яковлевич Сонин: Некролог // Там же. № 5. С. 369—372.

1916

112. О коэффициенте дисперсии // Изв. Акад. наук. Сер. 6. Пг. Т. 10, № 9. С. 709—718.
113. О коэффициенте дисперсии для малых чисел // Страховое обозрение. Пг. № 2 (февр.). С. 55—59.
114. Об одном применении статистического метода // Изв. Акад. наук. Сер. 6. Пг. Т. 10, № 4. С. 239—242.

1917

115. Марков Андрей Андреевич: [Автобиография] // Материалы для биографического словаря действительных членов Академии наук. Ч. 2. М — Я. Пг. С. 16—18.
116. О некоторых предельных формулах исчисления вероятностей // Изв. Акад. наук. Сер. 6. Пг. Т. 11, № 3. С. 177—186.

1918

117. Несколько задач исчисления вероятностей // Изв. Акад. наук. Сер. 6. Пг. Т. 12, № 18. С. 2101—2116.
118. Обобщение задачи о последовательном обмене шаров // Там же. № 5. С. 261—266.

1920

119. О коэффициенте дисперсии: (Вторая заметка) // Изв. Акад. наук. Сер. 6. Пг. Т. 14, № 1/18. С. 191—198.

1922

120. Трудность метода моментов: два примера неполного разрешения ее // Изв. Акад. наук. Сер. 6. Л. Т. 16, № 1/18. С. 281—286.

1924

121. Исчисление вероятностей.— 4-е изд., перераб.— М.: ГИЗ.— 558 с.
122. Об эллипсоидах (эллипсах) рассеяния и корреляции // Изв. Акад. наук. Сер. 6. Л. Т. 18, № 1/11. С. 117—126.

1936

123. Числения скінчених різниць.— Харків; Київ: ОНТИ.— 234 с.— На укр. яз.

1940

124. Functions generated by developing power series in continued fractions // Duke Math. J. Vol. 7. P. 85—96.

1944

125. Доказательство одной теоремы Чебышева: (Письмо к Эрмиту) // Чебышев П. Л. Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР. Т. 1: Теория чисел. С. 283—284.
126. Пафнутий Львович Чебышев: Крат. биогр. очерк // Чебышев П. Л. Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР. Т. 1: Теория чисел.С. 5—9. В соавт. с Н. Я. Сониным.

1948

127. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля.— М.; Л.: Гостехтеориздат.— 410 с.

1951

128. Избранные труды: Теория чисел. Теория вероятностей.— М.: Изд-во АН СССР.— 720 с.

II. *Использованная литература*

1. *Бернштейн С. Н.* Ленинградская (Петербургская) школа теории вероятностей и ее значение // 120 лет Ленинградского государственного университета: Науч. сес., посвящ. 120-летней годовщине со дня основания ун-та (1819—1939), 16—20 апр. 1939 г.: Тез. докл. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. С. 9.
2. *Стеклов В. А.* Теория и практика в исследованиях Чебышева. Пг., 1921. 21 с.
3. *Гнеденко Б. В.* Очерки по истории математики в России. М.; Л.: Гостехгеофиздат, 1946. 248 с.
4. *Кучинов Й.* А. А. Марков. София: Нар. просвета, 1967. 58 с.
5. *Гнеденко Б. В.* Андрей Андреевич Марков // Люди русской науки. М.: Физматгиз, 1961. Кн. 1. С. 193—199.
6. Биографический словарь профессоров и преподавателей императорского С.-Петербургского университета за истекшую третью четверть века его существования, 1869—1894. СПб., 1898. Т. 2. С. 3—5.
7. *Юшкевич А. П.* Математика // История естествознания в России. М.: Изд-во АН СССР, 1960. Т. 2. С. 41—221.
8. *Погребысский И. Б.* А. А. Марков // История отечественної математики. Киев: Наук. думка, 1967. Т. 2. С. 328—340.
9. *Гнеденко Б. В.* Развитие теории вероятностей в России // Тр. Ин-та истории естествознания АН СССР. 1948. Т. 2. С. 390—425.
10. *Крейн М. Г.* Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, вып. 4 (44). С. 3—120.
11. *Орлов В.* Выдающийся русский математик: (К 100-летию со дня рождения А. А. Маркова) // Пром.-экон. газ. 1956. 13 июня. С. 4.
12. *Прудников В. Е.* Пафнутий Львович Чебышев. Л.: Наука, 1976. 282 с.
13. *Ожигова Е. П.* Александр Николаевич Коркин. Л.: Наука, 1968. 148 с.
14. *Ожигова Е. П.* Егор Иванович Золотарев. Л.: Наука, 1966. 144 с.
15. *Кропотов А. И.* Николай Яковлевич Сонин. Л.: Наука, 1967. 135 с.
16. *Никифорова Т. Р.* Осип Иванович Сомов. М.; Л.: Наука, 1964. 128 с.
17. Рязанские губернские ведомости. 1847. 1 июля.
18. Рязанские губернские ведомости. 1847. 29 марта.
19. *Гродзенский С. Я.* Академик А. А. Марков: Детство и юность // Вопр. истории естествознания и техники. 1985. № 1. С. 108—112.
20. *Марков В.* О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892. 110 с.
21. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за весеннее полугодие 1892 г. СПб., 1892. № 46. 35 с.

22. *Депман И. Я.* С.-Петербургское математическое общество // Ист.-мат. исслед. 1960. Вып. 13. С. 11—106.
23. *Марков В.* О положительных тройничных квадратичных формах: Дис. ... магистра чист. математики.— СПб., 1897.—178 с.
24. Празднование пятидесятилетнего юбилея СПб пятой гимназии / Сост. К. А. Иванов. СПб., 1896. 52 с.
25. *Радонежский А.* Исторический очерк пятой С.-Петербургской гимназии (1845—1873). СПб., 1874. 174 с.
26. *Крылов А. Н.* Мои воспоминания. 7-е изд. Л.: Судостроение, 1979. 480 с.
27. *Писарев Д. И.* Избранные сочинения: В 2 т. М.: Гослитиздат, 1933. Т. 1. 600 с.
28. *Иванов К. А.* Пятидесятилетие С.-Петербургской пятой гимназии, 1845—1895. СПб., 1896. 234 с.
29. *Галченкова Р. И.* Математика в Ленинградском (Петербургском) университете в XIX в. // Ист.-мат. исслед. 1961. Вып. 14. С. 355—392.
30. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1873—1874 академического года с приложениями. СПб., 1874. № 10. 103 с.
31. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за первую половину 1874—1875 академического года с приложениями. СПб., 1875. № 11. 139 с.
32. Ленинградский университет, 1819—1944. М.: Сов. наука, 1945. 184 с.
33. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за первую половину 1873—1874 академического года с приложениями. СПб., 1874. № 9. 123 с.
34. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за первую половину 1875—1876 академического года с приложениями. СПб., 1876. № 13. 137 с.
35. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за первую половину 1876—1877 академического года. СПб., 1877. № 15. 65 с.
36. *Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1951. Т. 5. 474 с.
37. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1874—1875 академического года с приложениями. СПб., 1876. № 12. 66 с.
38. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1875—1876 академического года. СПб., 1877. № 14. 80 с.
39. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1876—1877 академического года с приложениями. СПб., 1878. № 16. 97 с.
40. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за первую половину 1877—1878 академического года. СПб., 1878. № 17. 117 с.
41. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петер-

бургского университета за вторую половину 1877—1878 академического года. СПб., 1879. № 18. 97 с.
42. Записки императорской Академии наук. СПб., 1892. Т. 68. 484 с.
43. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за первую половину 1878—1879 академического года с приложениями. СПб., 1879. № 19. 324 с.
44. Молва. 1880. 15 апр. С. 3.
45. С.-Петербургские ведомости. 1880. 16 апр. С. 2.
46. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1879—1880 академического года. СПб., 1881. № 22. 107 с.
47. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1884—1885 академического года. СПб., 1885. № 32. 49 с.
48. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за первую половину 1880—1881 академического года. СПб., 1881. № 23. 138 с.
49. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1881—1882 академического года. СПб., 1882. № 26. 90 с.
50. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1882—1883 академического года. СПб., 1884. № 28. 99 с.
51. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1885—1886 академического года. СПб., 1886. № 34. 162 с.
52. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за вторую половину 1886—1887 академического года. СПб., 1887. № 36. 152 с.
53. Общий устав императорских российских университетов. СПб., 1884. 40 с.
54. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за осеннее полугодие 1894 г. СПб., 1894. № 49. 27 с.
55. Журналы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1903 г. СПб., 1904. № 59. 135 с.
56. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1906 г. СПб., 1907. № 62. 235 с.
57. *Вейнберг Б. П.* Из воспоминаний о Дмитрии Ивановиче Менделееве как лекторе. Томск, 1910. 42 с.
58. *Гюнтер Н. М.* О педагогической деятельности А. А. Маркова // Изв. Рос. Акад. наук. 1923. С. 35—44.
59. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1896 г. СПб., 1897. № 52. 48 с.
60. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1899 г. СПб., 1900. № 55. 111 с.
61. Журналы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1904 г. СПб., 1905. № 60. 91 с.
62. Товарищ. 1907. 9 (22) июня. С. 4.
63. Журналы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1901 г. СПб., 1902. № 57. 126 с.
64. Журналы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1905 г. СПб., 1906. № 61. 316 с.
65. Журналы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1902 г. СПб., 1903. № 58. 156 с.

66. С.-Петербургские ведомости. 1908. 18 сент. (1 окт.). С. 1.
67. Правительственный вестник. 1910. 10 дек. С. 4.
68. Протоколы заседаний Совета императорского С.-Петербургского университета за 1913 г. Пг., 1915. № 69. 230 с.
69. Протоколы заседаний Совета императорского Петроградского университета за 1914 г. Пг., 1916. № 70. 135 с.
70. Записки императорской Академии наук. СПб., 1890. Т. 63, кн. 2. 244 с.
71. *Кочина П. Я.* Софья Васильевна Ковалевская. М.: Наука, 1981. 312 с.
72. Записки императорской Академии наук. СПб., 1888. Т. 57. 100 с.
73. Записки императорской Академии наук. СПб., 1888. Т. 58. 95 с.
74. *Стеклов В. А.* Андрей Андреевич Марков: (Некрол. очерк) // Изв. Рос. Акад. наук. Сер. 6. 1922. № 1/18. С. 169—184.
75. *Пасецкий В. М.* Метеорологический центр России. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 262 с.
76. *Морозов Н. А.* Лингвистические спектры // Изв. Отд-ния рус. яз. и словесности имп. Акад. наук. 1915. Т. 20, кн. 4. С. 93—134.
77. О теории вероятностей и математической статистике: (Переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова). М.: Наука, 1977. 198 с.
78. *Bruns H.* Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre. Leipzig; B.: Teubner. 1906. 328 S.
79. *Bruns H.* Das Gruppenschema für zufällige Ereignisse // Abh. math.-phys. Kl. König. Sächs. Ges. Wiss. 1906. Bd. 29, N 8. S. 580—628.
80. Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера / Сост. П. Я. Кочина, Е. П. Ожигова. М.: Наука, 1984. 312 с.
81. *Ковалевская С. В.* Воспоминания и письма // Отв. ред. М. В. Нечкина; Коммент. С. Я. Штрайха. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 576 с.
82. Извлечение из протоколов заседаний [Московского] Математического общества // Мат. сб. 1893. Т. 16, вып. 4. С. 827.
83. *Аппельрот Г. Г.* По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской «Sur le problème de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe (Acta math. 12 : 2)» // Мат. сб. 1891. Т. 16, вып. 3. С. 483—507; Вып. 4. С. 592—596.
84. *Аппельрот Г. Г.* Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., 1893. 112 с.
85. *Некрасов П. А.* К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Мат. сб. 1892. Т. 16, вып. 3. С. 508—517.
86. *Юшкевич А. П.* История математики в России (до 1917 г.). М.: Наука, 1968. 592 с.
87. *Ogigova H.* Les lettres de Ch. Hermite à A. Markoff, 1885—1899: Rev. hist. sci. 1967. T. 20. P. 1—32.
88. *Ожигова Е. П.* Шарль Эрмит. Л.: Наука, 1982. 288 с.
89. История Академии наук СССР. М.; Л.: Наука, 1964. Т. 2· 1803—1917. 772 с.
90. *Кольцов А. В.* Некоторые материалы к биографии академика А. А. Маркова // Вопр. истории естествознания и техники. 1956. Вып. 1. С. 204—207.
91. *Груздев И.* Горький. 2-е изд. М.: Мол. гвардия, 1960. 366 с.

92. *Короленко В. Г.* Собрание сочинений. М.: Гослитиздат, 1956. Т. 10. 717 с.
93. Наша жизнь. 1905. 20 янв. (2 февр.). С. 5.
94. Русь. 1905. 27 янв. (9 февр.). С. 3—4.
95. *Князев Г. А.* Порицание академикам за участие в «Записке 342 ученых» // Вестн. АН СССР. 1931. № 4. С. 13—22.
96. Летопись Московского университета. М.: Изд-во МГУ, 1979. 536 с.
97. История Московского государственного университета. М.: Изд-во МГУ, 1955. Т. 1. 562 с.
98. Речь. 1913. 22 янв. (4 февр.). С. 2.
99. *Новлянская М. Г.* К тридцатилетию со дня смерти акад. А. А. Маркова // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, вып. 6(52). С. 213—215.
100. Новое время. 1915. 17(30) апр. С. 4.
101. Речь. 1916. 6 февр. С. 5.
102. Наука в России: Справ. ежегодник. Пг., 1920. Вып. 1. 146 с.
103. Новое время. 1904. 6(19) дек. С. 3.
104. Новое время. 1907. 23 марта (5 апр.). С. 4.
105. Новое время. 1907. 28 марта (10 апр.). С. 13.
106. Товарищ. 1907. 16(29) окт. С. 5.
107. Новое время. 1910. 20 дек. (2 янв. 1911). С. 5.
108. *Жовтис М.* Открытое письмо профессору Столярову // Юж. край. Харьков, 1913. 21 авг. (3 сент.). С. 5.
109. Южный край. 1913. 13 сент. С. 5.
110. *Буняковский В. Я.* Основания математической теории вероятностей. СПб., 1846. 478 с.
111. *Шарапов Ю.* Академик Марков принимает решение... // Знание — сила. 1957. № 3. С. 15—16.
112. *Отрадных Ф. П.* Эпизод из жизни академика А. А. Маркова // Ист.-мат. исслед. 1953. Вып. 6. С. 495—508.
113. *Емелях Л. И.* Дело об отлучении от церкви академика А. А. Маркова // Вопросы истории религии и атеизма. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2. С. 397—411.
114. Правда. 1912. 9(22) мая.
115. *Минковский В. Л.* Педагогические идеи и деятельность академика А. А. Маркова // Математика в шк. 1952. № 5. С. 10—16.
116. *Марков А.* Вопрос министру народного просвещения: (Письмо в редакцию) // День. 1914. 30 янв. С. 4.
117. *Малыгин К. А.* Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. М.: Учпедгиз, 1963. 224 с.
118. *Некрасов П. А.* Теория вероятностей и математика в средней школе // Журн. М-ва нар. просвещения. 1915. Февр. С. 101—102.
119. *Некрасов П. А.* Задачи и игры из детского мира, развивающие понятия по логике и статистической теории взаимоотношений // Мат. образование. 1912. № 5. С. 229—235; № 6. С. 268—278.
120. *Флоров П. С.* Шашка вперед // Вестн. опыт. физики и элемент. математики. Одесса. 1892. № 148. С. 78—82; № 151. С. 137—141.
121. *Некрасов П.* По поводу статьи академика А. А. Маркова о проекте преподавания теории вероятностей в средней школе // Журн. М-ва нар. просвещения. Н. С. 1915. Ч. 58. Июль. С. 1—17.

122. Доклад Комиссии по обсуждению некоторых вопросов, касающихся преподавания математики в средней школе // Изв. Акад. наук. Сер. 6. 1916. Т. 10, № 2. С. 66—80.
123. *Романовский С. И.* Александр Петрович Карпинский. Л.: Наука, 1981. 484 с.
124. *Гродзенский С.* Из архива академика // 64 — Шахмат. обозрение. 1982. № 6. С. 23.
125. Шахмат. вестн. 1887. № 1. 36 с.
126. *Гродзенский С.* Архив профессора Маркова // 64 — Шахмат. обозрение. 1978. № 2. С. 10.
127. *Гродзенский С. Я., Романов И. З.* Чигорин и Марков // Шахматы в СССР. 1978. № 6. С. 23—25.
128. *Гродзенский С.* Шахматное творчество академика Маркова // Наука и жизнь. 1978. № 11. С. 146—150.
129. *Гродзенский С. Я.* Шахматы в жизни ученых. М.: Наука, 1983. 168 с.
130. *Гродзенский С.* Памяти ученого // Шахматы. 1978. № 21. С. 28—29.
131. *Гродзенский С.* Через девяносто лет // 64. 1979. № 32. С. 3.
132. *Птуха М. В.* Очерки по теории статистики населения и моральной. Пг., 1916. 381 с. (Зап. юрид. фак. Петроград. ун-та; Вып. 4).
133. *Романовский В. И.* Дискретные цепи Маркова. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. 436 с.
134. *Ахиезер Н. И.* Русский математик А. А. Марков: (К 25-летию со дня смерти, 1856—1922) // Природа. 1947. № 8. С. 76—81.
135. *Игнациус Г. И.* Владимир Андреевич Стеклов. М.: Наука, 1967. 212 с.
136. *Ольденбург С. Ф.* Российская Академия наук в 1922 году: Речь непременного секретаря акад. С. Ф. Ольденбурга. Читана в торжеств. заседании 29 дек. 1922 г. Пг., 1923. 26 с.
137. *Успенский Я. В.* Очерк научной деятельности А. А. Маркова // Изв. Рос. Акад. наук. 1923. Т. 17. С. 19—34.
138. *Сарманов О. В.* Создатель понятия математической цепи // Природа. 1956. № 11. С. 73—76.
139. *Юшкевич А. П.* Математика и ее преподавание в России XVII—XIX вв. // Математика в шк. 1949. № 1. С. 7—18.
140. *Делоне Б. Н.* Петербургская школа теории чисел. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 422 с.
141. *Hermite Ch.* Extraits de lettres de M. Hermite á M. Jacobi sur differents objects de la théorie des nombres I—IV // J. reine und angew. Math. 1850. Bd. 40. S. 261—278, 279—290, 291—307, 308—315.
142. *Minkowski H.* Geometrie der Zahlen. Leipzig; Berlin 1910. VIII + 256 S.
143. *Lekkerkerker C. G.* Geometry of numbers. Groningen a.o., 1969. X + 510 p.
144. *Касселс Дж. В. С.* Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 421 с.
145. *Коркин А. Н.* О бинарных формах положительного определителя // Золотарев Е. И. Полн. собр. соч. Л., 1932. Вып. 2. С. 328—342.
146. *Korkine A., Zolotareff G.* Sur les formes quadratiques // Math. Ann. 1873. Bd. 6. S. 366—389.

147. *Касселс Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 213 с.
148. *Малышев А. В.* Маркова проблема спектра // Мат. энцикл. 1982. Т. 3. С. 514—516.
149. *Dickson L. E.* Studies in the theory of numbers. Chicago, 1930. VIII + 230 p.
150. *Малышев А. В.* Спектры Маркова и Лагранжа: (Обзор лит.) // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. 1977. Т. 67. С. 5—38.
151. *Горшков Д. С.* Геометрия Лобачевского в связи с некоторыми вопросами арифметики // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. 1977. Т. 67. С. 39—85.
152. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1981. 176 с.
153. *Hurwitz A.* Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. I—II // Math. Ann. 1891. Bd. 39. S. 279—284; Bd. 44. S. 417—436.
154. *Siegel C. L.* Einheiten quadratisher Formen // Abh. Math. Semin. Hansishe Univ. 1940. Bd. 13. S. 209—239.
155. *Венков Б. А.* О неопределенных квадратичных формах с целыми коэффициентами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1951. Т. 38. С. 30—41.
156. *Венков Б. А.* О фундаментальной области неопределенной тройничной квадратичной формы // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та. 1955. Т. 14, Физ.-мат. фак. Вып. 1. С. 16—45.
157. *Венков Б. А.* Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. Т. 9, № 6. С. 429—494.
158. *Oppenheim A.* The minima of indefinite quaternary quadratic forms // Ann. Math. Ser. 2. 1931. Vol. 32, N 2. P. 271—298.
159. *Oppenheim A.* The minima of quaternary quadratic forms of signature zero // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1934. Vol. 37, N 1—2. P. 63—81.
160. *Oppenheim A.* The minima of indefinite quaternary quadratic forms // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1929. Vol. 15, N 9. P. 724—727.
161. *Венков Б. А.* Элементарная теория чисел. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1937. 219 с.
162. *Boshernitzan M.*, *Fraenkel A. S.* A linear algorithm for nonhomogeneous spectra of numbers // J. Algorithms. 1984. Vol. 5. P. 187—198.
163. *Zolotareff G.* Sur la théorie des nombres complexes // J. math. pures et appl. Ser. 3. 1880. T. 6. P. 51—84, 129—166.
164. *Dedekind R.* Ueber reine cubische Körper // J. reine und angew. Math. 1900. Bd. 121. S. 18—25.
165. *Делоне Б. Н.*, *Фаддеев Д. К.* Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1940. Т. 11. 340 с.
166. *Эрмит Ш.* Курс анализа. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 383 с.
167. *Erdös P.* On the greatest prime factor of $\prod\limits_{k=1}^{x} f(k)$ // J. London Math. Soc. 1952. Vol. 27. N 3. P. 379—384.
168. *Чебышев П. Л.* Сочинения. СПб., 1899. Т. 1. 356 с.
169. *Коркин А. Н.* Сочинения. СПб., 1911. Т. 1. V + 469 с.
170. *Чебышев П. Л.* Теория сравнений. 3-е изд. СПб. 1901. XVI + + 279 с.

171. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР. Т. 1. 1952. 582 с.; Т. 2. 1954. 628 с.
172. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.: Гостехиздат, 1949. 688 с.
173. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 568 с.
174. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.
175. *Ибрагимов И. И.* Теория приближения целыми функциями. Баку: Элм, 1979. 520 с.
176. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
177. *Зингер М. Я.* Элементы дифференциальной теории чебышевских приближений. М.: Наука, 1975. 172 с.
178. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
179. *Гончар А. А.* О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Мат. сб. 1975. Т. 97, № 4. С. 607—629.
180. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби: Аналитическая теория и приложения. М.: Мир, 1985. 416 с.
181. *Гончар А. А.* О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Мат. сб. 1982. Т. 118, № 4. С. 535—556.
182. *Гончар А. А., Гиермо Лопес Л.* О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде // Мат. сб. 1978. Т. 105, № 4. С. 512—524.
183. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1981. Т. 157. С. 31—48.
184. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1954. 328 с.
185. *Никишин Е. М.* О системе марковских функций // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1979. № 4. С. 60—63.
186. *Никишин Е. М.* О совместных аппроксимациях Паде // Мат. сб. 1980. Т. 113, № 4. С. 490—519.
187. *Рахманов Е. А.* О сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Мат. сб. 1977. Т. 104, № 2. С. 271—291.
188. *Бейкер Г. мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 522 с.
189. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
190. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961. 312 с.
191. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.
192. *Геронимус Я. Л.* Теория ортогональных многочленов. М.: Гостехиздат, 1950. 164 с.
193. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
194. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа. М.: Гостехиздат, 1953. 528 с.
195. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики М.: Наука, 1966. 664 с.
196. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. 3-е изд. М.: Наука, 1967. 376 с.

197. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 500 с.
198. *Чебышев П. Л.* Полное собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Т. 3. 524 с.
199. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов. М., Л.: ОНТИ, 1937. 203 с.
200. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.
201. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов. Харьков: ГОНТИ, 1938. 256 с.
202. *Стилтьес Т.* Исследования о непрерывных дробях. Харьков; Киев: ОНТИ, 1936. 156 с.
203. *Казьмин Ю. А.* К проблеме моментов в комплексной области // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 6. С. 1309—1312.
204. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.
205. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
206. *Рахманов Е. А.* Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 2. С. 163—203.
207. *Ремез Е. Я.* Основы вычислительных методов чебышевских приближений. Киев: Наук. думка, 1969. 624 с.
208. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. 3-е изд. М.: Наука, 1967. 576 с.
209. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых формулах квадратур П. Л. Чебышева и А. А. Маркова // Сборник работ, посвященный памяти академика Д. А. Граве. М.; Л.: ОГИЗ, 1940. С. 15—28.
210. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961. 406 с.

Оглавление

Приложения

С.Я.Гродзенский Андрей Андреевич МАРКОВ

С.Я.Гродзенский

Андрей Андреевич

МАРКОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГОТОВИТСЯ К ИЗДАНИЮ КНИГА:

Прищепа В. И., Дронова Г. П.

АРИ АБРАМОВИЧ ШТЕРНФЕЛЬД (1905—1980)

10 л. 70 к.

Книга является первой научной биографией одного из пионеров космонавтики, заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, доктора технических наук Ари Абрамовича Штернфельда, научные и научно-популярные труды которого издавались более 80 раз на 36 языках в 39 странах. В его классическом труде «Введение в космонавтику» содержался ряд приоритетных идей. История жизни ученого и его научное творчество изложены на фоне исторических событий эпохи.

Для научных работников, преподавателей и всех, кто интересуется историей космической науки и техники.

Заказы просим направлять по одному из перечисленных адресов магазинов «Книга — почтой» «Академкнига»:
480091 **Алма-Ата,** 91, ул. Фурманова, 91/97; 370005 **Баку,** 5, ул. Джапаридзе, 13; 320093 **Днепропетровск,** проспект Ю. Гагарина, 24; 734001 **Душанбе,** проспект Ленина, 95; 252030 **Киев,** ул. Пирогова, 4; 277012 **Кишинев,** проспект Ленина, 148; 443002 **Куйбышев,** проспект Ленина, 2; 197345 **Ленинград,** Петрозаводская ул., 7; 220012 **Минск,** Ленинский проспект, 72; 117192 **Москва,** В-192, Мичуринский проспект, 12; 630090 **Новосибирск,** Академгородок, Морской проспект, 22; 620151 **Свердловск,** ул. Мамина-Сибиряка, 137; 700187 **Ташкент,** ул. Дружбы народов, 6; 450059 **Уфа,** 59, ул. Р. Зорге, 10; 720001 **Фрунзе,** бульвар Дзержинского, 42; 310078 **Харьков,** ул. Чернышевского, 87.

85 коп.