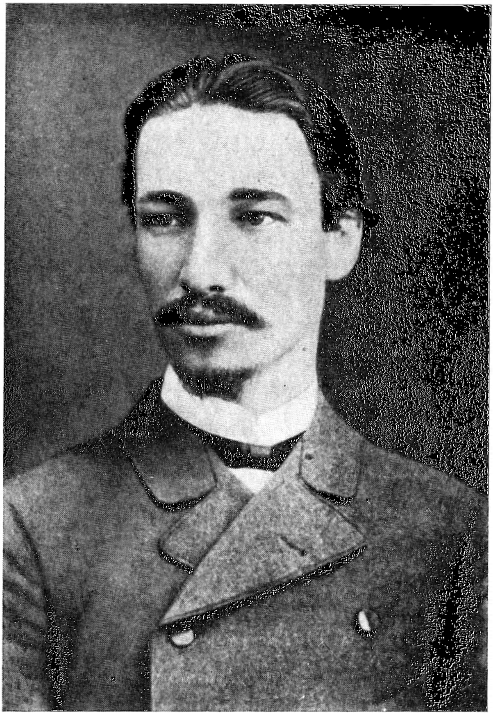
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

НАУЧНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ СЕРИЯ



А. П. КОТЕЛЬНИКОВ

Т. В. ПУТЯТА, Б. Л. ЛАПТЕВ,
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД, Б. Н. ФРАДЛИН

Александр Петрович КОТЕЛЬНИКОВ

1865—1944

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

МОСКВА 1968

Александр Петрович Котельников — выдающийся русский математик и механик — был одним из основоположников неевклидовой механики и геометрии пространства — времени. Его труды оказали значительное влияние на развитие геометрии и теоретической механики.

Сын коллеги великого Лобачевского П. И. Котельникова, ученик крупных казанских математиков Ф. М. Суворова и А. В. Васильева, много сделавших для развития и распространения идей Лобачевского, Александр Петрович Котельников был учителем многих советских математиков и механиков, олицетворяя собой живую связь между Лобачевским и нашей советской наукой.

Книга о жизни и деятельности талантливого ученого представляет большой интерес для читателя, интересующегося развитием русской и советской науки.

2-2-1
НПЛ 64—67

ГЛАВА ПЕРВАЯ*

КАЗАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Казанский университет и Лобачевский. В Казанском университете учился и начал свою научную и педагогическую деятельность Александр Петрович Котельников, здесь он подготовил и защитил кандидатскую, магистерскую и докторскую диссертации. Физико-математический факультет Казанского университета был той средой, где сформировался и вырос ученый.

Казанский университет основан в 1804 г., но своей мировой славой он обязан прежде всего Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792—1856). В 1807—1811 гг. он был студентом этого университета, с 1816 г. стал профессором, а в 1820—1821 и 1823—1825 гг. — деканом физико-математического факультета; в 1827—1846 гг. Лобачевский был ректором университета. Создатель неевклидовой геометрии, читая многие математические, механические и астрономические курсы, сыграл исключительную роль в формировании всего учебного процесса на физико-математическом факультете. Даже здания университета, построенные в то время, когда Лобачевский был членом и председателем университетского строительного комитета и ректором, носят отпечаток его вкуса.

Великое открытие Лобачевского, первый публичный

* Главы о работах Котельникова по геометрии и о его жизни в Казани и Москве написаны Б. Л. Лаптевым и Б. А. Розенфельдом, главы о работах Котельникова по механике и о его жизни в Киеве принадлежат Т. В. Путяте и Б. Н. Фрадлину. Многими сведениями и документами авторы обязаны доценту Казанского университета А. П. Широкову, сотруднице Научно-мемориального музея Н. Е. Жуковского Н. М. Семеновой, а также семье А. П. Котельникова.

доклад о котором состоялся на факультете 23 февраля 1826 г., опубликовано в работе «О началах геометрии» (1829) в журнале «Казанский вестник». Одновременно к этому же открытию пришли венгерский геометр Янош Бойяи (1802—1860) и великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855); Бойяи опубликовал свое открытие в 1831 г., а заметки Гаусса были напечатаны только после его смерти. Сущность этого открытия состояла в отказе от постулата Евклида о параллельных и создании новой геометрии, столь же непротиворечивой, как евклидова, и близкой к ней в малых участках. Постулат Евклида равносилен утверждению: через точку вне прямой в их плоскости можно провести не более одной прямой, не пересекающей данной (если эта прямая единственная — она называется параллельной). В геометрии же Лобачевского имеет место утверждение, что через точку вне прямой в их плоскости можно провести более одной прямой, не пересекающей данной; проведенные таким образом прямые заполняют некоторый угол, граничные прямые которого называются параллельными данной прямой, а внутренние прямые — расходящимися с данной прямой. Тот факт, что евклидова геометрия хорошо согласуется с опытом, не решает вопроса: для малых участков земной поверхности согласуется с опытом и утверждение о том, что Земля плоская. Поэтому вопрос о том, какая геометрия имеет место в реальном мире, может быть решен экспериментально только для достаточно больших областей мирового пространства. Лобачевский предложил для этого измерить сумму углов треугольника с очень большими сторонами: в евклидовой геометрии эта сумма равна двум прямым углам, а в геометрии Лобачевского она меньше двух прямых.

Открытие Лобачевского было подлинной революцией в математике, опровергшей распространенное мнение о том, что наши геометрические представления являются врожденными. «Понятия приобретаются чувствами, врожденным не должно верить», — писал Лобачевский, обосновывая свою геометрию. Геометрия Лобачевского была первой неевклидовой геометрией: вторая неевклидова геометрия — эллиптическая геометрия Римана — была предложена в 1854 г. Бернгардом Риманом; в этой геометрии всякие две прямые на плоскости пересекаются, а сумма углов треугольника больше двух прямых. Вместе с этой геометрией Риман построил и более общую геометрию, включающую и геометрию Лобачевского и эллиптическую геометрию, — так называемую риманову геометрию. В дальнейшем геометры построили много разных геометрических систем, отличных от геометрии Евклида: учение о проективных свойствах фигур превратилось в проективную геометрию; учение о свойствах фигур, сохраняющихся при аффинных или конформных преобразованиях, — соответственно в аффинную и конформную геометрии; учение о свойствах фигур, сохраняющихся при произвольных взаимно непрерывных преобразованиях, — в топологию. Вслед за геометрией трехмерного пространства была построена геометрия многомерного евклидова пространства, а затем и многомерные геометрии Лобачевского—эллиптическая, проективная, аффинная и конформная. Изучение пространства — времени специальной теории относительности привело к геометрии псевдоевклидова пространства. Вслед за римановой геометрией, являющейся наиболее общей геометрией и совпадающей с евклидовой в бесконечно малом, появилась псевдориманова геометрия — наиболее общая геометрия, совпадающая в бесконечно малом с псевдоевклидовой геометрией; такой геометрией является геометрия пространства — времени общей теории относительности. Затем были созданы геометрии аффинной, проективной и конформной связности — наиболее общие геометрии, совпадающие в бесконечно малом соответственно с аффинной, проективной и конформной геометриями; с некоторыми из этих геометрий совпадают геометрии пространства — времени различных единых теорий поля. Далее, вслед за многомерной геометрией была построена геометрия бесконечномерного пространства, ставшая одним из основных методов функционального анализа, на котором основан математический аппарат квантовой физики. Кроме новых геометрий появились новые алгебраические системы — группы, кольца, поля, алгебры, — относящиеся к классическим числовым системам как новые многомерные пространства к классическому пространству Евклида, а затем и такие новые математические системы, которые не имеют классических аналогов. Все эти замечательные открытия, совершенно изменившие характер математики, смогли появиться только благодаря великому открытию Лобачевского.

Отец А. П. Котельникова [1]. Александр Петрович Котельников родился 8 (20) октября 1865 г. в Казани в семье профессора Казанского университета, помощника и коллеги Н. И. Лобачевского, Петра Ивановича Котельникова (1809—1879). Мы скажем несколько слов об этом весьма интересном человеке. Он родился в небогатой дворянской семье в г. Судже Курской губернии. В 1828 г., окончив Харьковский университет и получив степень кандидата математических наук, он был направлен в Дерптский профессорский институт, организованный в то время для подготовки русских национальных кадров ученых. Петр Иванович отличался большими математическими способностями. Его товарищ по профессорскому институту, знаменитый русский хирург Н. И. Пирогов, писал о нем в своих воспоминаниях: «Котельников, больной и хилый, но гениальный математик, по уверениям профессоров Бартельса и Струве и по уверению товарищей, он день и ночь сидит над математическими выкладками; он изучил все тонкости небесной механики Лапласа» [2]. В 1833 г. Котельников защитил в Дерптском институте диссертацию «Об аналитических формулах, определяющих возмущение движения земного шара» [3] и получил звание доктора философии и магистра свободных искусств. После этого он уехал в Берлин, где два года работал под руководством Якоба Штейнера и Петера Лежен-Дирихле. В 1838 г. Петра Ивановича пригласили в Казанский университет для преподавания алгебры и дифференциального исчисления. Здесь он получает должность профессора кафедры прикладной механики и читает курсы механики, теории функций комплексного переменного, основ проективной геометрии и векторного исчисления. С 1839 по 1862 г. Петр Иванович был деканом физико-математического факультета университета. Его ученик Ф. М. Суворов в своих воспоминаниях пишет: «Несмотря на преклонные годы и в особенности на те недуги, которые обременяли его в то время, Петр Иванович не уступал по своей энергии молодым профессорам ⟨...⟩ Если бы эти лекции были стено-

---

[1] Е. П. Котельникова и Ф. М. Суворов. П. И. Котельников (1809—1879). Казань, 1887.

[2] Н. И. Пирогов. Посмертные записки.— Русская старина, т. 16, № 3, 1885, стр. 513.

[3] P. Kotelnikoff. Exponuntur formulae analyticae quibus perturbatio motus gyratorii terrae determinantur. Dissertatio inauguralis, Dorpat, 1832.

П. И. КОТЕЛЬНИКОВ

графированы и напечатаны, то они составили бы краткий, но в то же время всеобъемлющий курс механики. Особенно увлекательны были его лекции о принципах механики» [4].

Котельников был одним из немногих, кто при жизни Лобачевского сумел правильно оценить его геометрические открытия и в ту пору, когда эти открытия еще не получили широкого признания, публично выступить с высокой оценкой работ русского ученого. В актовой речи «О предубеждении против математики» 31 мая 1842 г. Петр Иванович заявил: «При этом случае не могу умолчать о том, что тысячелетние тщетные попытки доказать со всей математической строгостью одну из основных теорем геометрии, равенство суммы углов в прямолинейном треугольнике двум прямым, побудили достопочтенного заслуженного профессора нашего университета предпринять изумительный труд — построить целую науку, геометрию, на новом предположении: сумма углов в прямолинейном треуголь-

[4] Е. П. Котельникова и Ф. М. Суворов. Цит. соч., стр. 26—27.

нике меньше двух прямых, труд, который рано или поздно найдет своих ценителей»[5].

Восторженно отзываясь о научном содержании сочинений Лобачевского, Петр Иванович подверг, однако, критике ясность их изложения. Суворов вспоминает, что Петр Иванович упрекал Лобачевского в том, «что геометрические теории последнего остаются непонятными только по недостатку ясности изложения»[6].

Университетские учителя А. П. Котельникова. Смерть отца застала Александра Петровича гимназистом. Существенную роль в его воспитании сыграла старшая сестра Елизавета Петровна (1856—1921). Е. П. Котельникова окончила в 1872 г. гимназию, затем годичные педагогические курсы и с 1877 по 1918 г. преподавала математику в казанской Ксениинской женской гимназии; с 1880 г. она состояла членом Казанского физико-математического общества. Суворов называл Елизавету Петровну «дочерью, достойной своего отца».

Александр Котельников был одним из первых учеников гимназии и окончил ее в 1883 г. с серебряной медалью. По окончании гимназии юноша несколько колеблется в выборе специальности: в 1883 г. он поступает в С.-Петербургский технологический институт, но в следующем году переводится на математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета. Чувствуется, что его в одинаковой мере привлекают и техника и математика.

В то время Казанский университет, в значительной степени благодаря деятельности Лобачевского, был одним из лучших русских университетов по постановке математического образования. В 1880 г. при университете организуется физико-математическая секция Казанского общества естествоиспытателей, которая в 1890 г. выделилась в самостоятельное Казанское физико-математическое общество. Первым председателем секции был известный астроном М. А. Ковальский. Члены секции делали научные доклады на регулярно происходивших заседаниях

---

[5] «Обозрение преподавания лекций в императорском Казанском университете на 1842—1843 академический год. Речь ординарного профессора Котельникова и отчет за 1841—1842 год, составленный исправляющим должность адъюнкта Сбоевым, произнесенные в торжественном собрании университета 31 мая 1842 года». Казань, 1842, стр. 17—18.

[6] Е. П. Котельникова и Ф. М. Суворов. Цит. соч., стр. 28.

секции; доклады публиковались в «Собрании протоколов» секции, в 1890 г. превратившегося в «Известия Казанского физико-математического общества». Таким образом, с 1880 г. в Казани имелся специальный научный журнал с физико-математической тематикой. Организуется и быстро растет библиотека общества, главным образом за счет обмена книгами с другими научными обществами и организациями. С 1883 г. общество начинает работу по распространению идей Лобачевского, опубликовав двухтомное собрание его геометрических трудов [7].

В 1884 г. в Казанском университете защищают докторские диссертации выдающиеся математики, оказавшие большое влияние на научную деятельность Котельникова — Ф. М. Суворов и А. В. Васильев.

Федор Матвеевич Суворов (1845—1911) родился в Пермской губернии (Гороблагодатский завод) в семье протоиерея местного собора, в молодости бывшего учителем математики и языков в Пермской духовной семинарии. В 1863—1867 гг. Суворов — студент Казанского университета, его учителями были ученики Лобачевского: А. Ф. Попов, И. А. Больцани, П. И. Котельников, В. Г. Имшенецкий, М. А. Ковальский.

Магистерская диссертация Суворова «О характеристиках систем трех измерений» (1871) посвящена трехмерным римановым пространствам — непосредственному обобщению трехмерных неевклидовых пространств Лобачевского и Римана; в докторской диссертации «Об изображении воображаемых точек и воображаемых прямых на плоскости» (1884) он строит теорию мнимых геометрических образов на проективной плоскости, связанную со многими вопросами неевклидовой геометрии. Свою преподавательскую деятельность в Казанском университете Суворов начал доцентом, в 1884 г. он стал профессором, в 1896 г.— заслуженным профессором; с 1899 по 1905 г. — деканом физико-математического факультета. Суворов — автор учебников по начертательной геометрии (1876), интегральному исчислению (1884, 1903), аналитической геометрии (1899, 1902). Он был одним из учредителей физико-математической секции Казанского общества естествоиспытателей, ее первым секретарем, а затем вице-председателем. «Федор

[7] Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений по геометрии, т. I—II. Казань, 1883—1886.

Матвеевич был истинно ученым необыкновенной какой-то чистоты, корректности и привлекательности. Вот почему все так любили его и уважали», — писал его ученик Н. Н. Парфентьев [8].

Александр Васильевич Васильев (1853—1929) был сыном известного казанского профессора-китаиста В. П. Васильева и внуком друга Лобачевского И. М. Симонова. Александр Васильевич окончил в 1874 г. физико-математический факультет Петербургского университета с золотой медалью и начал преподавательскую деятельность в Казанском университете приват-доцентом. Его научные интересы сложились под влиянием крупнейших русских математиков того времени П. Л. Чебышева и Е. И. Золотарева; во время заграничных командировок (1879, 1882) он заинтересовался идеями Кронекера, Вейерштрасса и Клейна. Магистерская диссертация Васильева «О функциях рациональных, аналогичных с двоякопериодичными» (1880) и его докторская диссертация «Теория отделения корней систем алгебраических уравнений» (1884) выдвинули его на первое место среди казанских математиков. С 1885 г. Васильев возглавлял физико-математическую секцию Казанского общества естествоиспытателей и Казанское физико-математическое общество; 22 года, до переезда в Петербург, его неизменно избирали председателем секции и общества.

Перу Васильева принадлежит большое количество работ по разным разделам математики и учебники по введению в анализ, по теории функций комплексного переменного, теории чисел и теории вероятностей. Не будучи геометром по своей основной специальности, Васильев живо интересовался вопросами геометрии и впоследствии посвятил им книгу «Время, пространство, движение»[9], опубликовал много геометрических работ в издававшихся им совместно с П. С. Юшкевичем (1873—1945) «Новых идеях в математике» [10].

Ученый чрезвычайно широких интересов, внимательно следивший за математической литературой, Васильев явился одним из первых в России пропагандистов ряда новых направлений в математике. В его работах и лекциях

[8] Н. Н. Парфентьев. Памяти проф. Ф. М. Суворова.— Известия КФМО, серия 2, т. 17, № 3, стр. 40.

[9] А. В. Васильев. Время, пространство, движение. Пг., 1922.

[10] «Новые идеи в математике», вып. 1—10. Пг., 1912—1915.

нашли отражение идеи теории групп, воззрения Вейерштрасса на проблемы обоснования анализа и т.д. Он всегда проявлял большой интерес к истории математики; об этом свидетельствуют многие его курсы. В последние годы жизни Васильев опубликовал популярную книгу по истории теории чисел [11] и обзор истории математики в России до середины XIX века [12].

Чрезвычайно велики заслуги Александра Васильевича в деле распространения идей Лобачевского, в преобразовании казанской математической школы в школу Лобачевского. Он редактировал первое собрание сочинений Лобачевского (1883—1886), написал его первую научную биографию [13], был организатором празднования 100-летия со дня рождения Лобачевского (1893) и международных конкурсов имени Лобачевского, сыгравших исключительную роль в привлечении внимания к идеям великого ученого в России и за рубежом и поднявших на большую высоту международный авторитет Казанского университета. С 1923 г. Васильев принимал деятельное участие в подготовке издания «Полного собрания сочинений Лобачевского», вышедшего в пяти томах в 1946—1951 гг., в 1929 г. он закончил обширную монографию «Жизнь и научное дело Н.И. Лобачевского», оставшуюся, к сожалению, ненапечатанной, но хорошо известную специалистам.

В Казанском университете Васильев читал многие математические курсы, часто выступал с публичными лекциями и впервые организовал научный семинар, умело привлекая студентов и молодых преподавателей к научным исследованиям.

Механику в Казанском университете в то время читали Ипполит Степанович Громека (1851—1889) и Георгий Николаевич Шебуев (1850—1900). Громека — сын известного публициста 60-х годов С. С. Громеки, одно время бывшего седлецким губернатором, а позже сотрудничавшего в «Отечественных записках», «Современнике» и других журналах. И. С. Громека окончил Московский университет. Защитив в этом же университете магистерскую диссертацию «Очерк теории капиллярных явлений; теория поверхностного сцепления жидкости» (1879), Громека становится доцентом аналитической механики; там

[11] А. В. Васильев. Целое число. Пг., 1922.

[12] А. В. Васильев. Математика, вып. 1 (1725—1826—1863). Пг., 1921.

[13] А. В. Васильев. Николай Иванович Лобачевский. Пг., 1914.

же вскоре защищает и докторскую диссертацию «Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости» (1882). Работы Громеки относятся главным образом к гидродинамике.

Шебуев, питомец Казанского университета, был приват-доцентом этого университета с 1879 по 1888 г. и читал основные курсы по теоретической механике. После 1888 г. Шебуев жил в Москве. Ему принадлежит ряд работ по вопросам механики, физики и прикладной математики, из которых следует отметить «Приложения теории кватерненов к механике подобно и однородно изменяемых систем» [14], содержащую приложения исчисления кватернионов к механике.

Студенческие годы. В университете Александр Котельников слушает ряд курсов Васильева (дифференциальное исчисление, теория эллиптических функций, теория вероятностей), Суворова (аналитическая геометрия, сферическая тригонометрия, начертательная геометрия, интегральное исчисление) и Громеки (кинематики абсолютных и относительных движений) [15]. Васильев отметил студента Котельникова еще на втором курсе и в одном из донесений (1886) писал: «Некоторые (Котельников, Кремлев, Полянский, Негреус) решили наиболее трудные из заданных мною вопросов, а именно вывели формулу для кратного дифференцирования функции от функции и приложили эту формулу к выводу формулы Варинга, выражающей сумму корней уравнения посредством его коэффициентов» [16]. В университете Котельников имел по всем предметам пять, кроме богословия, по которому имел четверку (впрочем, по богословию ни у кого из экзаменовавшихся вместе с ним не было большей отметки). При окончании Котельниковым университета его учитель Васильев пишет о нем: «Во время пребывания своего в университете г. Котельников отличался своими талантами и успехами, как об этом могут свидетельствовать отметки, полученные им на экзаменах» [17].

В сентябре 1888 г. Котельников экзаменовался на звание гимназического учителя математики и физики, а в

[14] Известия КФМО, серия 2, т. 2-3, 1893, стр. 111—169.

[15] Центральный государственный архив Татарской АССР (ЦГАТ), ф. 977, Дела физ.-мат. фак-та, 1885, д. 9, л. 103; д. 16, л. 84, 1887, д. 4, л. 45 и 90

[16] Там же, 1886, д. 5, л. 6.

[17] Там же, Дела Совета ун-та, 1889, д. 14455, л. 1.

октябре того же года давал пробные уроки во II и VI классах Казанской гимназии, на которых присутствовал Суворов. Как ответы на экзамене, уроки Александра Петровича были признаны вполне удовлетворительными [18].

К студенческим годам Котельникова, по-видимому, относится его первая печатная научная работа. В своей автобиографии (curriculum vitae), написанной в Киеве в 1920 г., он перечисляет свои научные труды:

«Ученые труды (напечатанные)

1) Теория календаря.

2) О давлении жидкой струи на клин.

3) Винты и комплексные числа.

4) Винтовое Исчисление (так!) и некоторые его приложения к Геометрии и Механике.

5) Проективная теория векторов» [19].

Вторая из перечисленных здесь работ — кандидатская диссертация, написанная Котельниковым в 1888 г. и напечатанная в «Собрании протоколов заседаний физико-математической секции Казанского общества естествоиспытателей». Третья работа — речь перед защитой магистерской диссертации, напечатанная в 1896 г., четвертая работа — магистерская диссертация (напечатана в 1895 г., защищена в 1896 г.), пятая работа — докторская диссертация, опубликованная и защищенная в 1899 г. «Теории календаря» пока не удалось найти, но из того, что Котельников поместил ее на первом месте, видно, что она напечатана до 1890 г. и, по-видимому, написана ранее второй работы. Можно предположить, что первая работа касалась применения математических методов к решению задач теории календаря. Примером таких задач может служить вычисление дня православной пасхи, произведенное Гауссом в 1800 г. с помощью теории чисел. Решение Гаусса состоит в следующем: если a, b, c — остатки от деления номера года на 4, 7 и 19, d — остаток от деления суммы $19c + 15$ на 30, а e — остаток от деления суммы $2a + 4b + 6d + 6$ на 7, то первый день пасхи по старому стилю — $22 + d + e$ марта, считая k апреля равным $(31 + k)$ марта [20]. Возможно, что первая работа Котельникова посвящена решению аналогичной задачи.

[18] Там же, Дела физ.-мат. фак-та, 1888, д. 30, л. 8, 53.

[19] Киевский город. государ. архив, ф. 18, оп. 2, ед. хр. 135, л. 29.

[20] Г. Кинкелин. Вычисление христианской пасхи.— Матем. сборник, т. 5, 1870, отд. 1, стр. 73—92.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ К ГИДРОДИНАМИКЕ

Кандидатская диссертация. В дореволюционных университетах ученой степени кандидата наук в современном понимании соответствовала степень магистра, но существовала и степень кандидата, которая присваивалась выпускникам университетов, выполнившим специальную научную работу — «кандидатскую диссертацию» — и успешно защитившим ее.

Кандидатская работа Александра Петровича была написана в 1888 г. под руководством гидродинамика И. С. Громеки. Предложенная диссертанту тема носила название «О давлении потока жидкости на плоские стенки», но в оконченном виде она получила название «Метод Гельмгольца — Кирхгофа и применение его к исследованию давления жидкой струи на клин». Рецензентом диссертации был Ф. М. Суворов. В диссертации излагается метод Гельмгольца — Кирхгофа решения плоских задач гидродинамики с помощью комплексных чисел и самостоятельное решение одной из таких задач.

27 мая 1889 г. Котельников утверждается в степени кандидата математических наук. Самостоятельную часть диссертации он докладывает под названием «О давлении жидкой струи на клин» 16 сентября 1889 г. на заседании физико-математической секции Казанского общества естествоиспытателей, а затем публикует в «Собрании протоколов секции» (1890 г.).

Применение комплексных чисел к гидродинамике. Впервые комплексные числа к гидродинамике применил французский математик и механик Жан ле Рон Даламбер (1717—1783) в «Опыте новой теории о сопротивлении жидкости» (1752) [1]. Даламбер показал, что координаты P, Q скорости движущейся жидкости в точке с координатами x, y пропорциональны выражениям

$$\Delta\left(x+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)+\Delta\left(x-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\Delta\left(x+\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)-\Delta\left(x-\frac{y}{\sqrt{-1}}\right)\right],$$

т. е. вещественной и мнимой частям функции $\Delta(z)$ комплексного переменного $z=x+\frac{y}{\sqrt{-1}}$; здесь Даламбер имел в виду аналитическую функцию комплексного переменного. В этой же работе впервые появляются условия, равносильные условиям Коши — Римана аналитичности функции комплексного переменного.

Великий математик и механик Леонард Эйлер (1707—1783), работавший в Швейцарии, России и Германии, одним из первых представивший комплексные числа $x+iy$ точками плоскости с координатами x, y, в своей работе «Продолжение исследований по теории движения жидкостей» (1755) [2] уже систематически пользовался положением: комплексное переменное, координаты которого равны координатам скорости жидкости в точке с координатами x, y, является функцией комплексного переменного $z = x+iy$, определяющей конформное отображение плоскости комплексного переменного z на вторую плоскость.

В 1868 г. крупнейший немецкий физик, математик и физиолог Герман Гельмгольц (1821—1894) применил комплексные числа для изучения плоскопараллельного движения жидкости, при котором образуются поверхности разрыва. Возможность появления таких поверхностей, вдоль которых тангенциальная слагающая скорости претерпевает разрыв, была доказана в работе Гельмгольца «Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствую-

---

[1] J. le R. d'Alembert. Essai d'une nouvelle théorie sur la resistance des fluides. Paris, 1752.

[2] L. Euler. Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides.— Opera omnia, II seria. t. 12. Lausanae, 1954, p. 92–132.

щих вихревым движениям» (1858) [3], где впервые рассматривалось исключительно важное в гидродинамике и аэродинамике вихревое движение жидкости. В работе «О прерывном движении жидкости» (1868)[4] Гельмгольц изучает разрывное плоскопараллельное движение жидкости, связанное с образованием струй. Здесь, в случае стационарного и безвихревого движения несжимаемой жидкости, он предложил рассматривать комплексное переменное $\omega = \varphi + i\psi$. Здесь координата φ — потенциал скорости, а ψ — функция тока, т. е. линии $\psi = \text{const}$, или линии тока движущейся жидкости; разность значений функции ψ в точках A и B равна объему жидкости, протекающей в единицу времени через отрезок AB. В этом случае функция $\omega = f(z)$ является аналитической функцией, причем, если мы обозначим скорость движения жидкости в точке z через v, а угол, составляемый этой скоростью с осью Ox, через θ, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v \cos \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v \sin \theta \tag{1}$$

Отсюда получается, что производная

$$\frac{d\omega}{dz} = v (\cos \theta - i \sin \theta) \tag{2}$$

и, следовательно, функция, рассматриваемая Даламбером и Эйлером, комплексно сопряжена с функцией $d\omega/dz$. С помощью конформного отображения плоскости z на плоскость ω Гельмгольц определил вид струи жидкости, втекающей из бесконечного пространства в канал, заключенный между параллельными плоскостями.

Исследования Гельмгольца были вскоре продолжены немецким физиком Густавом Кирхгофом (1824—1887), который в работе «К теории свободных струй жидкости» (1869)[5] предложил общий прием решения подобных задач; с помощью этого приема определяется движение жидкости с линией тока, на которой скорость постоянна, в зависимости от значения функции ω. В 1876 г. Кирхгоф видоизменил свой метод и ввел новое комплексное пере-

[3] Г. Гельмгольц. Два исследования по гидродинамике. I. О вихревом движении; II. О прерывном движении жидкости. М., 1902, стр. 5—51.

[4] Там же, стр. 52—68.

[5] G. Kirchhoff. Zur Theorie freier Flussigkeitsstrahlen.— J. für reine und angewandte Mathematik, Bd 70, 1869, S. 289—298.

менное, равное обратной величине функции (2)[6].

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{v}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Функция $\zeta = \zeta(z)$ ставит в соответствие каждой точке z плоскости комплексное число, аргумент которого равен углу θ, составляемому скоростью и осью Ox, а модуль — обратной величине скорости. Поэтому бесконечно удаленная точка плоскости ζ соответствует точке с нулевой скоростью, а нулевая точка плоскости ζ — точке с бесконечной скоростью.

В частности, Кирхгофом была решена задача о струе жидкости, ударяющейся о плоскую стенку конечной длины и разбивающейся на две струи. Кирхгоф показал, что область переменного ω в этом случае ограничена двумя параллельными прямыми $\psi = C$; $\psi = -C$ и имеет разрез в виде луча на вещественной оси, а область переменного ζ является полуплоскостью, ограниченной вещественной осью, из которой вырезан полукруг радиуса $1/v_0$, равного обратной величине скорости течения жидкости на границе свободной струи. Прямолинейная граница этой области соответствует точкам жидкости, примыкающим к стенке; в частности, той точке стенки, где струя разбивается на две и скорость движения жидкости равна нулю, соответствует бесконечно удаленная точка плоскости ζ. Полукруглая граница области соответствует точкам на границе струи, имеющим постоянную скорость v_0. Аналогичный метод Кирхгоф применил для определения вида струи, вытекающей из весьма большого сосуда, ограниченного двумя плоскими стенками, а также в задаче об ударе о плоскую стенку бесконечного широкого потока жидкости. В обоих случаях Кирхгоф ограничился определением линий тока. В том же 1876 г. этими задачами заинтересовался крупный английский физик Стрэтт Рэлей (1842—1919). Рэлею принадлежат детальные способы решения этих задач, а также задач о количестве вытекающей жидкости, о сжатии струи и о давлении бесконечно широкого потока жидкости на пластинку.

Вскоре задачи о плоскопараллельном течении жидкости оказываются в центре внимания русских ученых.

[6] Г. Кирхгоф. Механика. Лекции по математической физике. М., 1962, стр. 243—256.

В 1881 г. профессор Петербургского университета Д. К. Бобылев (1842—1917) в «Заметке о давлении, производимом потоком неограниченной ширины на две стенки, сходящиеся под каким бы то ни было углом» [7], исследовал движение жидкости при ударе бесконечно широкого потока на равнобокий клин. В 1886 г. И. В. Мещерский (1859—1935), впоследствии один из основоположников теории движения тел переменной массы, из которой выросла теория движения ракет, а в то время молодой ученый, в работе «К вопросу о сопротивлении жидкостей»[8] решил аналогичную задачу для неравнобокого клина. В работе Мещерского были вычислены многие интегралы и приведены обширные таблицы для определения давления потока при различных углах между направлением потока и осью клина.

«О давлении жидкой струи на клин». Работа Котельникова «О давлении жидкой струи на клин» посвящена изучению движения жидкости при ударе струи конечной ширины $2в$ на клин, разрезающий струю на две. Так же как Кирхгоф, Котельников предполагает движение жидкости установившимся и безвихревым, что дает ему возможность применить введенные Гельмгольцем и Кирхгофом функции комплексного переменного ω и ζ. Котельников показывает, что область переменного ω в его случае, так же как у Кирхгофа, ограничена двумя параллельными прямыми $\psi = C$ и $\psi = -C$ и имеет разрез в виде луча на вещественной оси, а область переменного ζ ограничена дугой сектора круга радиуса $1/v_0$, равного обратной величине скорости течения жидкости на границе свободной струи, и двумя лучами, являющимися продолжениями радиусов, ограничивающих сектор. Точки этих лучей здесь соответствуют точкам жидкости, примыкающим к щекам клина. Дуга сектора делится на четыре участка: точки двух участков по краям дуги изображают точки жидкости на границах струй, являющихся продолжениями щек клина; точки двух внутренних участков изображают точки жидкости на внешних границах струй.

Котельников обозначает угол клина $p\pi$, а углы, образуемые с осью Ox направлениями начальной струи и двух конечных струй, образовавшихся после удара о клин в

[7] Д. К. Бобылев.— ЖРФХО, т. 13, 1881.
[8] И. В. Мещерский.— ЖРФХО, т. 18, 1886.

бесконечности, соответственно $p\Theta$, $p\alpha_1$ и $p\alpha_2$. Тогда точки круглой части границы области переменного ζ, разделяющие ее на четыре участка, изображают бесконечно удаленные точки начальной и двух конечных струй и являются комплексными числами с модулем $1/v_0$ (как и все точки круглой границы) и с соответствующими аргументами $p\Theta$, $p\alpha_1$ и $p\alpha_2$.

Котельников показывает, что точкой разветвления струи является вершина клина, и находит давления P_1 и P_2 жидкости на щеки клина. Если h — высота жидкости, а ρ — ее плотность, то

$$P_1 = \frac{bh\rho v_0^2}{\sin p\tau}\,[2\cos p(\pi - \theta) - \cos p(\pi - \alpha_1) - \cos p(\pi - \alpha_2)] \tag{3}$$

и

$$P_2 = \frac{bh\rho v_0^2}{\sin p\pi}\,(2\cos p\theta - \cos p\alpha_1 - \cos p\alpha_2) \tag{4}$$

При $p = 1$ из формул Котельникова получаются формулы давления на стенку, которую он называет пластинкой. В частности, при бесконечно широком потоке, т. е. при стремлении ширины струи $2b$ к бесконечности, Котельников получает формулу Рэлея для давления на стенку при потоке, составляющем со стенкой длиной l угол θ,

$$P = lh\rho v_0^2 \frac{\pi \sin\theta}{4 + \pi\sin\theta} \tag{5}$$

и, в частности, при $\theta = \pi/2$ — формулу Кирхгофа

$$P = lh\rho v_0^2 \frac{\pi}{4 + \pi} \tag{6}$$

В пределе, при стремлении $2\,в$ к бесконечности, Котельников получает также формулы Мещерского для давления бесконечно широкого потока на щеки клина.

Уже в этой ранней работе выявился глубокий аналитический подход молодого ученого к сложной и весьма актуальной для того времени проблеме.

Дальнейшее развитие теории. Вскоре после появления работы Котельникова, в 1890 г. выходит в свет обширная работа великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского (1847—1921), посвященная применению комплексных чисел к задачам плоской гидродинамики; решение задачи Котельникова входит в это исследование как частный случай.

Жуковский, в то время уже заведующий кафедрой механики в Московском высшем техническом училище, где впоследствии работал и Котельников, и профессор Московского университета, выступает на VIII съезде русских естествоиспытателей и врачей с докладом «Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока»; в том же году он публикует эту работу в «Математическом сборнике» [9]. Перечисляя труды своих предшественников, Жуковский неоднократно упоминает «недавно появившееся сочинение А. П. Котельникова», в котором задача об ударе струи о клин «решается для удара струи конечной ширины, причем, переходя к пределу и допуская ширину струи бесконечно большой, А. П. Котельников получает из своих формул формулы Мещерского» [10].

Жуковский предложил вместо функции ζ пользоваться более удобной функцией $\vartheta + i\theta = \lg v_0 \zeta$, вещественная часть которой равна $\lg v_0/v$, и применил свой метод к решению задач Кирхгофа, Мещерского, Котельникова и многих новых задач. Задача об обтекании пластинки (стенки) — одна из центральных в работе Жуковского — интересовала автора, по-видимому, потому, что первоначально он рассматривал пластинку как простейшую модель крыла и предполагал, что давление жидкости или газа на пластинку позволит установить причину подъемной силы, лежащей в основе парения птиц. Однако эксперимент, которым Жуковский проверял все свои теоретические рассуждения, показал, что действительная подъемная сила крыла вдвое больше, чем сила, вычисленная по правилам этой работы. Дальнейший анализ Жуковского показал, что при обтекании крыла не выполняется одно из его основных предположений — поле скоростей жидкости является не потенциальным, а циркуляционным. Изучение обтекания крыла привело Жуковского (1904) к его знаменитой теореме о подъемной силе тел, находящихся в потоке жидкости и газа; эта теорема явилась основой всей современной теории самолета.

[9] Н. Е. Жуковский.— Математ. сборник, т. 15, вып. 1, 1890, стр. 121—276; ПСС, т. 3, М.— Л., 1936, стр. 195—341.

[10] Н. Е. Жуковский. ПСС, т. 3, стр. 197.

После появления работы Жуковского «Видоизменение метода Кирхгофа», далеко продвинувшей теорию этого вопроса, Котельников отошел от исследований по применению к механике комплексных чисел $a + bi$, $i^2 = -1$ и занялся проблемой применения к механике более общих комплексных чисел $a + b\omega$, где $\omega^2 = 0$, а затем $\omega^2 = 1$, и их дальнейшим обобщением — кватернионами и бикватернионами; этим вопросам и были посвящены его магистерская и докторская диссертации.

Подготовка к профессорскому званию. С июля 1888 по август 1890 г. Александр Петрович работал учителем математики в IV и V классах той же Ксениинской гимназии, где работала его старшая сестра. Успех кандидатской работы открыл ему путь к «оставлению при университете стипендиатом для подготовки к профессорскому званию», что соответствовало нашей аспирантуре. В 1890 г. по представлению А. В. Васильева, к которому присоединились Ф. М. Суворов, Н. П. Слугинов и Д. И. Дубяго, он был оставлен при Казанском университете стипендиатом для подготовки к профессорскому званию по механике.

В своем представлении Васильев, указав на успехи Котельникова в занятиях и высоко оценив его кандидатскую диссертацию, доклад о ней на заседании физико-математической секции и пробные уроки в гимназии, а также хорошее знание немецкого, английского и французского языков, пишет: «Оставление столь достойного кандидата стипендиатом для приготовления к профессорскому званию по кафедре механики, надеемся, встретит большое сочувствие и в факультете и в министерстве ввиду имеющегося в настоящее время недостатка в специалистах по механике. В нашем Казанском университете уже несколько лет прекращено преподавание практической механики, которое могло бы быть возобновлено г. Котельниковым в качестве приват-доцента тотчас по получении им степени магистра» [11].

Программа занятий Котельникова, составленная Васильевым, включала классические сочинения Лагранжа, Пуансо, Якоби, Дирихле, Римана, Лэмба, а также курсы Бобылева и Жуковского [12].

В течение 1892 г. А. П. Котельников сдает магистерские экзамены: 20 марта — по теоретической механике,

[11] ЦГАТ, ф. 977, Дела Совета ун-та, 1889, д. 14455, л. 1.
[12] Там же, Дела физ.-мат. фак-та, 1889, д. 13, л. 22.

30 марта — по прикладной механике, 7 мая — по чистой математике, 9 ноября — по практической механике, 7 декабря — по теории вероятностей. По теоретической механике, чистой математике и теории вероятностей экзаменаторами были Васильев и Суворов, по прикладной и практической механике — Шебуев и Зейлигер [13]. Шебуев, по-видимому, и привлек внимание Котельникова к теории кватернионов и ее связи с механикой.

19 марта и 6 апреля 1893 г. Котельников читает две пробные лекции на темы «Уравнения малых колебаний системы материальных точек около положения равновесия» и «Кинематика твердого тела около точки». Обе лекции признаны прочтенными удовлетворительно [14]. После этого 24 апреля 1893 г. попечитель Казанского учебного округа утвердил А. П. Котельникова в звании приват-доцента механики с разрешением читать с осеннего полугодия 1893 г. курс графической статики [15].

С 1893 по 1899 г. Александр Петрович Котельников читает в Казанском университете курсы графической статики и теории упругости и курс оснований высшей математики для натуралистов, а в 1897—1899 гг. ведет практические занятия по теоретической механике [16]. В 1894—1895 гг. он, кроме того, работает учителем математики в I Казанской мужской гимназии, а несколько позже — учителем математики в III Казанской мужской гимназии и в техническом училище.

Еще будучи преподавателем Ксениинской женской гимназии (1888), Котельников принимается в члены физико-математической секции Казанского общества естествоиспытателей и вскоре становится активным членом секции и Казанского физико-математического общества, где его избирают казначеем общества. В качестве казначея Котельников проводит огромную работу по сбору средств на премию имени Лобачевского и на памятник Лобачевскому в связи с празднованием 100-летия со дня рождения гениального математика. Памятник Лобачевскому был установлен в 1896 г. в сквере между зданиями Казанского университета и Ксениинской гимназии (ныне институты Академии наук СССР).

---

[13] ЦГАТ, Дела физ.-мат. фак-та, 1892, д. 21, 1—12.
[14] Там же, 1893, д. 20, л. 2—3.
[15] ЦГАТ, ф. 977, Дела Совета ун-та, 1893, д. 15255, л. 2.
[16] Там же, 1898, д. 16250, л. 1.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ВИНТОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Магистерская диссертация. В 1893 г. Александр Петрович пишет новую работу, которую он докладывает 18 декабря этого года на заседании Казанского физико-математического общества под названием «О винтовых системах материальных точек» [1] и 8 января следующего года на заседании секции математики, механики и астрономии IX съезда русских естествоиспытателей и врачей в Москве под названием «Обобщение некоторых теорем механики» [2]. Под тем же названием эта работа была опубликована в 1894 г. по представлению Дарбу в «Докладах Парижской Академии наук». В этой работе Котельников формулирует общую теорему механики, частными случаями которой являются известные теоремы об интеграле движения центра тяжести системы материальных точек и об интеграле площадей: указанные интегралы являются частными случаями вводимых Котельниковым винтовых интегралов.

Далее, изучая образование из двух винтовых интегралов третьего с помощью скобок Пуассона, Котельников приходит к операции умножения винтов, аналогичной операции векторного умножения векторов. В 1894 г. он строит новое исчисление, названное им «винтовым счислением». Винтовое исчисление Котельникова является математическим аппаратом, описывающим силовые винты статики и винтовые перемещения кинематики, так же как

[1] А. П. Котельников.— Известия КФМО, т. 4, 1894, стр. 29.
[2] А. П. Котельников.— Дневник IX съезда русских естествоиспытателей и врачей. М., 1894, вып. 6, стр. 12.

векторное исчисление описывает векторы сил и перемещений. Винтовое исчисление оказывается тесно связанным с комплексными числами вида $a + \omega b$, где $\omega^2 = 0$, и с кватернионами. Наряду с приложениями к механике винтовое исчисление чрезвычайно полезно для геометрии, а именно для линейчатой геометрии (геометрии многообразия прямых линий).

Мы видим, что здесь Котельников снова приходит к тому же методу, что и в своей кандидатской диссертации— к приложению комплексных чисел к механике, но здесь обычные комплексные числа $a + ib$, где $i^2 = -1$, занимают новые виды комплексных чисел.

Свои результаты он излагает в докладах на заседаниях Казанского физико-математического общества: 18 марта 1894 г. «Основания винтового исчисления» [3] и 9 марта 1896 г. «О геометрическом изображении комплексных чисел $q = a_0 + \omega a_1 + i(b_0 + \omega b_1)$, где $\omega^2 = 0$, $i^2 = -1$»[4]. В последнем докладе была продемонстрирована искусно изготовленная автором нитяная модель цилиндроида; многие годы эта модель сохранялась в Казанском университете.

Итог своих исследований Котельников опубликовал в 1895 г. в большой работе «Винтовое счисление и некоторые его применения к геометрии и механике». Эту работу он представил в качестве магистерской диссертации. Защита состоялась 5 мая 1896 г., и А. П. Котельников получает звание магистра прикладной математики, т. е. теоретической механики.

Оппонентами Котельникова при защите магистерской диссертации, так же как и докторской, были П. С. Назимов и Д. Н. Зейлигер.

Петр Сергеевич Назимов (1851—1901) окончил Московский университет и в 1885 г. за работу «О приложениях теории эллиптических функций к теории чисел», представленную на соискание магистерской степени, получил степень доктора чистой математики. С 1886 по 1889 г. Назимов был профессором Варшавского университета, а с 1889 г. до конца жизни — профессором Казанского университета. Назимов — автор целого ряда работ по теории чисел, высшей алгебре, теории дифференциальных уравнений, теории вероятности и геометрии.

[3] Известия КФМО, т. 5, 1895, стр. 35.

[4] Там же, т. 6, № 1, 1896, стр. 26.

А. П. КОТЕЛЬНИКОВ—МАГИСТР

Дмитрий Николаевич Зейлигер (1864—1936) родился в Тирасполе, в 1887 г. окончил университет в Одессе, где его оставили для подготовки к профессорскому званию по кафедре механики. В 1891 г. он защитил в том же университете магистерскую диссертацию «Механика подобно-изменяемого тела» и получил звание приват-доцента. В 1892 г. он перешел на кафедру механики Казанского университета, где после защиты в 1894 г. в Московском университете докторской диссертации «Теория движения подобно-изменяемого тела» получил звание профессора. Именно в этот период Зейлигер встречается с Котельниковым. В отзыве на магистерскую диссертацию Александра Петровича он пишет: «Дело специалистов дать достойную оценку тому вкладу в геометрию линейчатого пространства, который сделан нашим автором и который нам кажется весьма интересным и имеющим будущность. Наше дело заявить, что приложения теории бикватернионов к механике, содержащиеся в разбираемом труде, имеют серьезное значение»[5]. Таким образом, не считая себя специалистом по линейчатой геометрии, Зейлигер как специалист по механике признает, что развитие вклада Котельникова в линейчатую геометрию имеет будущность.

В 1897 г. Зейлигер выпускает свою первую статью из серии «Основные формулы комплексной геометрии прямой» [6], вторая статья из этой серии, содержащая итог десятилетней работы, выходит в 1908 г. [7], а третья — в 1928 г.[8] В 1934 г. Зейлигер подводит итоги своей 35-летней работы в этой области в книге «Комплексная линейчатая геометрия» [9], первая часть которой посвящена «аналитической геометрии» многообразия прямых евклидова пространства, вторая — дифференциальной геометрии линейчатых поверхностей (однопараметрические семейства прямых линий), третья — дифференциальной геометрии прямолинейных конгруэнций (двупараметрические семейства прямых линий). Таким образом, вся дальнейшая научная деятельность Зейлигера была посвящена разработке геометрических применений винтового исчисления Котельникова.

Д. Н. Зейлигер работал в Казанском университете до 1914 г. и с 1917 по 1929 г., в Петроградском университете с 1914 по 1917 г.; после 1929 г. он преподавал в Донецком горном институте (г. Донецк) и в Донском политехническом институте (г. Новочеркасск).

Теория винтов до А. П. Котельникова. Рассмотрим более подробно магистерскую диссертацию Александра Петровича. Теория винтов, создание которой было завершено его «винтовым счислением», представляет собой результат развития векторного исчисления, созданного в середине XIX в. ирландским математиком Вильямом Роуаном Гамильтоном (1805—1865) в его знаменитых «Лекциях о кватернионах» [10]. Гамильтон ставил своей целью обобщить на трехмерное пространство обычные комплексные числа, которые часто интерпретируют в виде векторов на плоскости. Однако оказалось, что аналогичную систему с тремя единицами построить нельзя, но можно построить систему чисел с четырьмя единицами, облада-

[5] Ученые записки Казанского университета, т. 63, № 12, 1896, стр. 44.
[6] Там же, т. 64, № 12, 1897, стр. 92—108.
[7] Там же, т. 75, № 8-9, 1908, стр. 1—66.
[8] Известия КФМО, серия 3, т. 3, 1928, стр. 56—92.
[9] Д. Н. Зейлигер. Комплексная линейчатая геометрия, Л.—М., 1934.
[10] W. R. Hamilton. Lectures on quaternions. Dublin, 1853.

ющих всеми основными свойствами вещественных и комплексных чисел, за исключением коммутативного закона умножения. Гамильтон назвал эти числа кватернионами [11] и записывал их в виде.

$$q = a + bi + cj + dk \tag{1}$$

«Кватернионные единицы» i, j, k умножаются по правилам

$$\left.\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

а сами кватернионы складываются и умножаются по правилам сложения и умножения многочленов. Кватернион вида

$$\boldsymbol{a} = bi + cj + dk \tag{3}$$

Гамильтон назвал вектором и говорил, что кватернион q является суммой вещественного числа (скаляра) a и вектора $\boldsymbol{a}$.

Произведение $\boldsymbol{ab}$ двух векторов, рассматриваемых как кватернионы, связано со скалярным и векторным произведениями этих векторов $(\boldsymbol{ab})$ и $[\boldsymbol{ab}]$ соотношением

$$\boldsymbol{ab} = -(\boldsymbol{ab}) + [\boldsymbol{ab}] \tag{4}$$

Для всякого кватерниона (1) определен сопряженный кватернион.

$$\tilde{q} = a - bi - cj - dk \tag{5}$$

Легко проверить, что

$$\widetilde{q + r} = \tilde{q} + \tilde{r}, \quad \widetilde{qr} = \tilde{r}\tilde{q}, \quad \tilde{\tilde{q}} = q \tag{6}$$

Произведение $q\tilde{q}$ является вещественным числом

$$q\tilde{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{7}$$

Квадратный корень из этого числа Гамильтон называл тензором (по современной терминологии «модуль»).

---

[11] Кватернионы до Гамильтона рассматривались также Эйлером (L. Euler Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum, esse summam quat nor quadratorum.— Opera omnia, ser. 1, t. II. Leipzig — Berlin, 1911, p. 338—379) и Гауссом (C. F. Gauss. Mutationen des Raumes.—Werke, Bd 8. Leipzig, 1908, S. 357—362).

Модуль кватерниона q обозначается $|q|$. Кватернион единичного модуля (верзор) может быть записан в виде

$$u = \cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi, \tag{8}$$

где ε — вектор единичного модуля (единичный вектор). Поэтому всякий кватернион может быть представлен в виде

$$q = |q|(\cos\varphi + \varepsilon\sin\varphi) \tag{9}$$

Кватернион q^{-1}, обратный кватерниону q, имеет вид

$$q^{-1} = \frac{\tilde{q}}{|q|^2} = \frac{1}{|q|}(\cos\varphi - \varepsilon\sin\varphi) \tag{10}$$

Скалярное произведение $(\boldsymbol{ab})$ двух векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ связано с модулями этих векторов $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ и углом φ между ними соотношением

$$(\boldsymbol{ab}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi, \tag{11}$$

а векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$ тех же векторов связано с модулями $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$, углом φ и единичным вектором ε, перпендикулярным к плоскости векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, соотношением

$$[\boldsymbol{ab}] = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi\cdot\boldsymbol{\varepsilon} \tag{12}$$

Формула (4) вместе с формулами (11) и (12) дает нам

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|(-\cos\varphi + \boldsymbol{\varepsilon}\sin\varphi) \tag{13}$$

В силу (10) кватернионом, обратным вектору $\boldsymbol{b}$, является вектор $-\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$. Поэтому, заменяя в формуле (13) $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{b}^{-1}$ и изменяя направление вектора ε на обратное, мы получим

$$\boldsymbol{ab}^{-1} = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}(\cos\varphi + \boldsymbol{\varepsilon}\sin\varphi) \tag{14}$$

Формула (14) показывает, что кватернион можно рассматривать как отношение двух векторов, причем модуль этого кватерниона равен отношению модулей векторов, а его верзор определяется единичным вектором, перпендикулярным к обоим векторам, и углом φ между этими векторами. Поэтому модель кватерниона можно рассматривать как оператор растяжения в отношении $\frac{|b|}{|a|}$, а верзор — как оператор поворота около оси вектора ε на угол φ.

Гамильтон рассматривал также кватернионы с комплексными координатами, которые называл «бикватернионами».

Понятие вектора дало возможность Роберту Боллу (1840—1913) в его «Теории винтов»[12] сформулировать понятие винта (динамы), охватывающее силовые винты статики и винтовые перемещения кинематики, и определить действия сложения винтов, построения относительного момента двух винтов (величины, пропорциональной работе, которую производит первый винт, рассматриваемый как силовой, по второму винту, рассматриваемому как кинематический) и два вида умножения винтов на числа.

Важное развитие идеи Гамильтона получили также в работе английского математика Вильяма Кингдона Клиффорда (1845—1879) «Предварительный очерк бикватернионов» (1873)[13]. В этой небольшой, но весьма насыщенной идеями работе Клиффорд вводит помимо обычных комплексных чисел, называемых им гиперболическими, два новых вида комплексных чисел:

$$a + b\omega, \quad \omega^2 = +1 \tag{15}$$

и

$$a + b\omega, \quad \omega^2 = 0 \tag{16}$$

Первые он назвал «эллиптическими», а вторые — «параболическими» комплексными числами. (В настоящее время числа вида (15) обычно записывают $a + be$ и называют двойными числами, а числа (16), или дуальные числа, в виде $a+b\varepsilon$.) Помимо гиперболических бикватернионов Гамильтона, Клиффорд вводит бикватернионы с эллиптическими и параболическими комплексными координатами, которые именует соответственно «эллиптическими» и «параболическими» бикватернионами.

Далее Клиффорд рассматривает винты в евклидовом пространстве и в неевклидовом пространстве Римана и определяет отношение этих винтов, аналогичное определенному Гамильтоном отношению векторов. При этом

[12] R. S. B a l l. The theory of screws. Dublin, 1876.

[13] В. К. К л и ф ф о р д. Здравый смысл точных наук. Пг., 1922, стр. 203—221 (приложение).

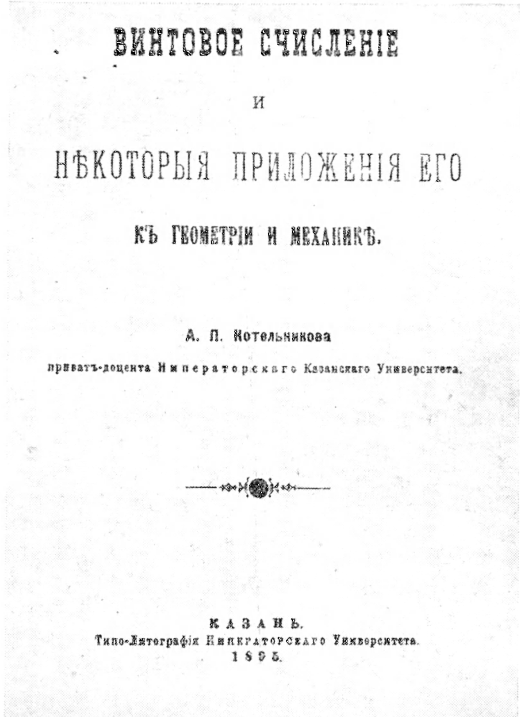
оказывается, что отношение винтов евклидова пространства можно рассматривать как параболический бикватернион, а отношение винтов пространства Римана — как эллиптический бикватернион. Основная часть работы посвящена геометрии пространства Римана: в ней впервые рассматриваются так называемые параллели Клиффорда и поверхности Клиффорда в этом пространстве.

Действия над винтами. «Винтовое счисление» Котельникова состоит из двух частей, каждая из которых делится на три главы. Первая часть посвящена разработке самого исчисления, а вторая часть — его приложениям к геометрии и механике.

В главе I первой части вводится понятие винта и определяются действия над винтами, или, как их часто называет в этой работе Котельников, бивекторами. Остановимся прежде всего на силовом и кинематическом винтах, приведших к понятию винта. В силу известной теории статики, принадлежащей Пуансо, всякую систему сил $\boldsymbol{f}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, приложенных к твердому телу, можно охарактеризовать двумя векторами: главным вектором $\boldsymbol{f} = \sum\limits_i \boldsymbol{f}_i$ и главным моментом $\boldsymbol{m} = \sum\limits_i [\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{f}_i]$, где $\boldsymbol{r}_i$ — вектор, соединяющий точку приложения вектора $\boldsymbol{f}$ с точкой приложения силы $\boldsymbol{f}_i$; таким образом, вектор $\boldsymbol{f}$ определяется системой сил однозначно, а вектор $\boldsymbol{m}$ зависит от точки приложения силы $\boldsymbol{f}$. При переносе вектора $\boldsymbol{f}$ из точки O в точку O', причем $\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{P}$, вектор $\boldsymbol{m}$ заменяется вектором

$$\boldsymbol{m}' = \sum_i [\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{p} \ \ \boldsymbol{f}_i] = \sum_i [\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{f}_i] - \left[\boldsymbol{p} \ \ \sum_i \boldsymbol{f}_i\right] = \boldsymbol{m} - [\boldsymbol{p}\boldsymbol{f}] \tag{17}$$

Поэтому при смещении точки O вдоль линии действия вектора f (векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{f}$ коллинеарны и $[\boldsymbol{p}\boldsymbol{f}] = 0$) вектор $\boldsymbol{m}$ не изменяется. Таким образом, для того чтобы не изменять обоих векторов $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{m}$, мы должны передвигать вектор $\boldsymbol{f}$ только по линии его действия; вектор $\boldsymbol{m}$ не связан ни с какой точкой приложения. Поэтому говорят, что вектор $\boldsymbol{f}$ является скользящим вектором (связанным с определенной прямой), а вектор $\boldsymbol{m}$ — свободным вектором. Можно считать, что векторы $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{m}$ приложены к одной и той же точке и при переходе от этой точки к другой вектор $\boldsymbol{f}$ не


ВИНТОВОЕ СЧИСЛЕНІЕ

И

НѢКОТОРЫЯ ПРИЛОЖЕНІЯ ЕГО

КЪ ГЕОМЕТРІИ И МЕХАНИКѢ.

А. П. Котельникова

приватъ-доцента Императорскаго Казанскаго Университета.

КАЗАНЬ.
Типо-Литографія Императорскаго Университета.
1895.

Титульный лист «Винтового счисления»

изменяется, а вектор $\boldsymbol{m}$ заменяется вектором

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m} - [\boldsymbol{p}\boldsymbol{f}] \tag{18}$$

С другой стороны, в силу известной теоремы кинематики, принадлежащей Шалю, движение твердого тела в каждый момент времени также можно охарактеризовать двумя векторами: вектором $\boldsymbol{v}$ скорости поступательного движения параллельно некоторой прямой и вектором $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости вращения около некоторой оси. Направление вектора $\boldsymbol{v}$ совпадает с направлением поступательного движения, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по оси вращения, поэтому, если мы определим каждую точку тела ее радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ с началом $\boldsymbol{O}$ на оси вращения, скорость этой точки выразится вектором

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = [\boldsymbol{\omega r}] + \boldsymbol{v} \tag{19}$$

Отсюда видно, что вектор $\boldsymbol{v}$ прилагается ко всем точкам нашего тела, т. е. является свободным вектором, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ прилагается только к точкам оси вращения, т. е. является скользящим вектором. Но то же самое движение мы получим и рассматривая его как соединение вращения с той же угловой скоростью вокруг некоторой другой оси, параллельной первой, и поступательного движения с некоторой другой поступательной скоростью $\boldsymbol{v}'$. Если мы перейдем от старой оси вращения к новой оси, проходящей через точку O^1, причем $\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{p}$, в формуле (18) мы должны заменить вектор $\boldsymbol{r}$ на вектор $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}$, а вектор $\boldsymbol{v}$ на вектор $\boldsymbol{v}'$; тогда формула перепишется в виде

$$\frac{d(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}] + \boldsymbol{v}' \tag{20}$$

Но так как вектор $\boldsymbol{r}$ постоянен, $\frac{d(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, то, сравнивая (18) и (19), мы получим

$$[\boldsymbol{\omega r}] + \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega r}] - [\boldsymbol{\omega p}] + \boldsymbol{v}', \tag{21}$$

откуда

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - [\boldsymbol{p\omega}] \tag{22}$$

Мы видим, что и система сил, приложенных к твердому телу, и движение твердого тела в каждый момент времени характеризуется двумя векторами: скользящим вектором $\boldsymbol{a}$ и свободным вектором $\overline{\boldsymbol{a}}$, которые можно считать приложенными в одной точке O, причем при переходе от точки O к другой точке $O'(\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{p})$ вектор $\boldsymbol{a}$ не изменяется $(\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}')$, а вектор $\boldsymbol{a}$ заменяется вектором

$$\overline{\boldsymbol{a}}' = \overline{\boldsymbol{a}} - [\boldsymbol{pa}] \tag{23}$$

Такая пара векторов и называется винтом$\{\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{a}}\}$, приложенным к точке O, а координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\overline{\boldsymbol{a}}$ — координатами винта. Винт, состоящий из векторов $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{m}$, называется силовым винтом, а винт, состоящий из векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{v}$, называется кинематическим винтом.

Если мы представим вектор $\bar{a}$ в виде $\bar{a}=\lambda a+b$, где $(ab)=0$, то, полагая $p=[ab](ab)$, получим

$$\bar{a}'=\bar{a}-[pa]=\lambda a+b-\frac{[[ab]\,a]}{(aa)}=\lambda a+b-\frac{b\,(aa)}{(aa)}=\lambda a, \tag{24}$$

откуда видно, что, перенеся винт в такую точку O^1, где $\overrightarrow{OO^1}=p=\frac{[ab]}{(ab)}$, мы сделаем векторы a и $\bar{a}'$ коллинеарными. Общая линия действия векторов a и $\bar{a}$ в этом случае называется осью винта, а отношение модуля $|\bar{a}|$ вектора $\bar{a}$ к модулю $|a|$ вектора a — параметром винта.

Сумма двух винтов $\{a, \bar{a}\}$ и $\{b, \bar{b}\}$, заданных в одной точке, определяется как винт

$$\{a+b,\ \bar{a}+\bar{b}\}, \tag{25}$$

заданный в той же точке.

Далее ставится задача определить операции над винтами, аналогичные скалярному и векторному произведению векторов. Эти операции определяются как операции, не зависящие от систем координат и точек приложения винтов, как дистрибутивные относительно сложения и дающие в одном случае скаляр, а в другом винт. Оказывается, что скаляр, удовлетворяющий указанным условиям, имеет вид

$$\lambda=(ab)+\mu((a\bar{b})+(\bar{a}b)), \tag{26}$$

где λ, μ — произвольные вещественные числа. Поэтому если мы хотим определить однозначное «скалярное произведение» двух винтов, то должны считать таким произведением не одно число, а пару чисел

$$\{(ab),\ (a\bar{b})+(\bar{a}b)\} \tag{27}$$

Второе из этих чисел $(a\bar{b})+(\bar{a}b)$ и есть то, что Болл называл относительным моментом двух винтов.

Оказывается также, что винт, удовлетворяющий указанным условиям, имеет вид

$$\{[ab],\ [a\bar{b}]+[\bar{a}b]\}; \tag{28}$$

2*

этот последний винт мы должны считать «винтовым (или бивекторным) произведением» двух винтов. Если умножение винта на число и скалярное произведение винтов до некоторой степени связаны с построениями Болла, то винтовое произведение винтов уже не имеет аналогов в его построениях.

Определенные указанным способом действия над винтами могут быть записаны весьма компактно, если ввести символ ω, обладающий свойством $\omega^2 = 0$, т. е. являющийся второй единицей параболических комплексных чисел. Мы можем рассматривать пару чисел $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ как комплексное число

$$\Lambda = \lambda + \bar{\lambda}\omega, \tag{29}$$

а винт $\{\boldsymbol{a}, \bar{\boldsymbol{a}}\}$ — как комплексный вектор

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}}\omega, \tag{30}$$

причем последний, так же как обычный вектор, определяется в каждой системе координат тремя координатами, являющимися комплексными числами. Тогда, считая символ ω перестановочным со всеми числами и применяя к комплексным векторам обычные действия над векторами, мы получим

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}}\omega) + (\boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{b}}\omega) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{b}})\,\omega, \tag{31}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}}\omega,\ \boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{b}}\omega) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) + ((\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{b}}) + (\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}))\,\omega, \tag{32}$$

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}}\omega,\ \boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{b}}\omega] = [\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] + ([\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{b}}] + [\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}])\,\omega, \tag{33}$$

откуда непосредственно вытекают формулы (25), (27) и (28).

Параболические комплексные числа и бикватернионы. Глава II первой части посвящена изложению теории параболических комплексных чисел и параболических бикватернионов.

Здесь показывается, что всякая аналитическая функция параболического комплексного переменного, выражаемая степенным рядом с вещественными коэффициентами, имеет вид

$$f(x+y\omega)=\sum_k a_k (x+y\omega)^k=\sum_k a_k x^k+\omega y\sum_k k x^{k-1}=$$
$$=f(x)+\omega y f'(x), \tag{34}$$

где $f'(x)$ — производная функции $f(x)$. Поэтому, в частности,

$$\sin(x+y\omega)=\sin x+\omega y\cos x, \tag{35}$$

$$\cos(x+y\omega)=\cos x-\omega y\sin x, \tag{36}$$

$$e^{x+y\omega}=e^x(1+y\omega) \tag{37}$$

Параболический бикватернион может быть записан в виде

$$Q=q+r\omega, \tag{38}$$

где q, r — обычные кватернионы, или в виде

$$Q=A+Bi+Cj+Dk, \tag{39}$$

где i, j, k — кватернионные единицы, умножающиеся по правилам (2), а A, B, C, D — параболические комплексные числа. Бикватернион вида

$$\boldsymbol{A}=Bi+Cj+Dk \tag{40}$$

можно рассматривать как винт (бивектор), т. е. как сумму параболического комплексного числа и винта.

Здесь показывается, что произведение $\boldsymbol{AB}$ двух винтов, рассматриваемых как бикватернионы, связано со скалярным и винтовым произведениями этих винтов $(\boldsymbol{AB})$ и $[\boldsymbol{AB}]$ соотношением

$$\boldsymbol{AB}=-(\boldsymbol{AB})+[\boldsymbol{AB}], \tag{41}$$

аналогичным соотношению (4).

Для всякого бикватерниона (39) определяется сопряженный бикватернион

$$\tilde{Q}=A-Bi-Cj-Dk, \tag{42}$$

причем

$$\widetilde{Q+R}=\tilde{Q}+\tilde{R},\quad \widetilde{QR}=\tilde{R}\tilde{Q},\quad \tilde{\tilde{Q}}=Q, \tag{43}$$

а произведение $Q\hat{Q}$ является параболическим комплексным числом

$$Q\widetilde{Q} = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \tag{44}$$

Квадратный корень из этого числа Котельников называл тензором (по современной терминологии «модуль»). Будем обозначать модуль бикватерниона Q через $|Q|$.

Бикватернион единичного модуля, или верзор,

$$U = \cos \Phi + \varepsilon \sin \Phi, \tag{45}$$

где Φ — некоторое параболическое комплексное число ($\cos \Phi$ и $\sin \Phi$ определены по формулам (35) и (36), а ε—винт единичного модуля, или единичный винт. Поэтому всякий бикватернион может быть представлен в виде

$$Q = |Q| (\cos \Phi + \varepsilon \sin \Phi) \tag{46}$$

Бикватернион, обратный к бикватерниону Q,

$$Q^{-1} = \frac{\widetilde{Q}}{|Q|^2} = \frac{1}{|Q|} (\cos \Phi - \varepsilon \sin \Phi) \tag{47}$$

Глава III первой части посвящена выяснению геометрического смысла скалярного и винтового произведений винтов и действий с бикватернионами. Здесь вводится понятие комплексного угла между двумя прямыми: если две прямые обладают углом φ и кратчайшим расстоянием δ, то комплексным углом между этими прямыми следует считать комплексное число

$$\Phi = \varphi + \delta\omega \tag{48}$$

Доказывается, что скалярное произведение $(\boldsymbol{AB})$ двух винтов связано с модулями $|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{B}|$ этих винтов и комплексным углом Φ между их осями соотношением

$$(\boldsymbol{AB}) = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \cos \Phi, \tag{49}$$

аналогичным соотношению (11). Точно так же винтовое произведение $(\boldsymbol{AB})$ этих винтов связано с модулями $|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{B}|$ этих бивекторов, комплексным углом Φ между их осями и единичным винтом ε, ось которого является общим перпендикуляром осей винтов, соотношением

$$[\boldsymbol{AB}] = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \sin \Phi\varepsilon, \tag{50}$$

аналогичным соотношению (12).

Из формулы (41) и формул (49) и (50) вытекает, что

$$AB = |A|\,|B|\,(-\cos\Phi + \varepsilon\sin\Phi) \qquad (51)$$

В силу формулы (47) бикватернионом, обратным к винту B, является винт $-\frac{B}{|B|^2}$. Поэтому, заменяя в формуле (51) B на B^{-1} и изменяя направление винта ε на обратное, мы получаем

$$AB^{-1} = \frac{|A|}{|B|}(\cos\Phi + \varepsilon\sin\Phi) \qquad (52)$$

Формула (52) определяет отношение двух винтов, причем, как видно из нее, отношение винтов является бикватернионом, модуль которого есть отношение модулей этих винтов бивекторов, а верзор этого бикватерниона определяется комплексным углом Φ между осями данных винтов и единичным винтом, ось которого есть общий перпендикуляр осей данных винтов.

Изложенные результаты Котельникова представляют собой реализацию мыслей Клиффорда, которые намечены в его «Предварительном очерке бикватернионов», относящихся к винтам евклидова пространства.

Интерпретация многообразия евклидовых прямых. В главе I второй части излагаются наиболее важные результаты магистерской диссертации А. П. Котельникова, получающиеся благодаря применению его винтового исчисления к геометрии. Это применение идет по двум направлениям: 1) интерпретация многообразия прямых евклидова пространства; 2) представление групп движений евклидова пространства.

Интерпретация многообразия прямых (или, как его называет Котельников, «метод перенесения») основана на том, что все винты, отличающиеся комплексным множителем, имеют одну и ту же ось. Поэтому прямые трехмерного евклидова пространства взаимно однозначно определяются совокупностями винтов, отличающихся комплексным множителем. Если мы нормируем эти винты условием равенства модуля единице, мы оставим из всего этого множества винтов только два единичных винта, отличающихся знаком. Если мы будем рассматривать ориентированные прямые (лучи), мы получим взаимно однозначное соответствие между лучами евклидова пространства и единичными винтами.

Условие равенства модуля винта единице

$$(\boldsymbol{AA}) = (\boldsymbol{a} + \overline{\boldsymbol{a}}\omega,\ \boldsymbol{a} + \overline{\boldsymbol{a}}\omega) = (\boldsymbol{aa}) + 2(\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}})\,\omega = 1 \quad (53)$$

равносильно двум вещественным условиям

$$(\boldsymbol{aa}) = 1, \quad (\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{a}}) = 0 \quad (54)$$

Так как вектор $\boldsymbol{a}$ направлен по оси винта, то, приведя все единичные винты к одной и той же точке O, мы увидим, что векторы $\boldsymbol{a}$ являются единичными векторами, определяющими направление лучей, представляемых винтами, а векторы $\overline{\boldsymbol{a}}$ позволяют выбрать из всех лучей данного направления именно тот луч, который представляется данным винтом. Для определения вектора заметим, что, если перенести начало винта в точку O' на его оси, вектор $\overline{\boldsymbol{a}}'$ должен будет быть коллинеарным вектору $\boldsymbol{a}$ и в то же время в силу (54) — перпендикулярным к тому же вектору; отсюда следует, что в этом случае $\overline{\boldsymbol{a}}' = 0$. Поэтому, учитывая (23), мы видим, что

$$\overline{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{pa}], \quad (55)$$

где $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OO'}$, т. е. вектор $\boldsymbol{a}$ есть векторное произведение радиуса-вектора произвольной точки данного луча с вектором $\boldsymbol{a}$.

Заметим, что координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\overline{\boldsymbol{a}}$ являются плюккеровыми координатами данной прямой. Если однородные координаты двух точек x и y некоторой прямой x_0, x_1, x_2, x_3 и y_0, y_1, y_2, y_3, то плюккеровыми координатами [14] этой прямой будут шесть чисел

$$\left.\begin{aligned} P_{01} &= x_0y_1 - x_1y_0, & P_{02} &= x_0y_2 - x_2y_0, \\ P_{03} &= x_0y_3 - x_3y_0, & P_{12} &= x_1y_2 - x_2y_1, \\ P_{31} &= x_3y_1 - x_1y_3, & P_{23} &= x_2y_3 - x_3y_2 \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Координаты P_{ij}, так же как координаты x_i и y_i, определены с точностью до произвольного множителя. Плюккеровы координаты не зависят от выбора точек на прямой: если мы заменим точки с координатами x_i и y_i точками с

[14] Эти координаты были введены Плюккером в его книге: J. Plücker. Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linien als Raumelement. Leipzig, 1868.

координатами $ax_i + by_i$ и $cx_i + dy_i$, новые плюккеровы координаты получаются из старых умножением их на один и тот же множитель $ad - bc$. Плюккеровы координаты связаны соотношением

$$P_{01}P_{23} + P_{02}P_{31} + P_{03}P_{12} = 0, \tag{57}$$

получающимся при развертывании по первым двум строкам определителя четвертого порядка; первые две и последние две строки определителя состоят из координат x_i и y_i. Если мы обозначим однородные координаты точки $\boldsymbol{O}'$ некоторой прямой через $x_0 = 1$, x_1, x_2, x_3, а однородные координаты точки той же прямой с радиусом-вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{OO}'} + \boldsymbol{a}$ через $y_0 = 1$, y_1, y_2, y_3, то плюккеровы координаты этой прямой равны

$$\left.\begin{aligned}
P_{01} &= x_0y_1 - x_1y_0 = y_1 - x_1 = a_1,\\
P_{02} &= x_0y_2 - x_2y_0 = y_2 - x_2 = a_2,\\
P_{03} &= x_0y_3 - x_3y_0 = y_3 - x_3 = a_3,\\
P_{23} &= x_2y_3 - x_3y_2 = x_2a_3 - x_3a_2 = \bar{a}_1,\\
P_{31} &= x_3y_1 - x_1y_3 = x_3a_1 - x_1a_3 = \bar{a}_2,\\
P_{12} &= x_1y_2 - x_2y_1 = x_1a_2 - x_2a_1 = \bar{a}_3
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

При этом второе условие (54) совпадает с условием (57).

Из формулы (49) при $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = 1$ следует, что комплексный угол между двумя винтами, представляющими две прямые, совпадает с комплексным углом между этими прямыми.

Из формулы (50) следует, что ось винта, являющегося винтовым произведением двух винтов, представляющих две прямые, совпадает с общим перпендикуляром этих прямых.

Два ортогональных единичных винта $((AB) = 0)$ представляют две прямые, пересекающиеся под прямым углом (в этом случае $\Phi = \varphi + \delta\omega = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\delta = 0$). Отсюда следует, что множество единичных винтов, лежащих в одной комплексной плоскости (т. е. ортогональных одному винту), представляет множество перпендикуляров к одной прямой. Такое множество прямых Котельников называет «щеткой» прямых.

Вместо единичных винтов можно говорить о точках сферы единичного радиуса в пространстве, получающемся из обычного евклидова пространства заменой всех координат параболическими комплексными числами; будем называть это пространство комплексным евклидовым пространством, а сферу в нем — комплексной сферой. Тогда мы получим, что множество лучей евклидова пространства взаимно однозначно изображается комплексной сферой, причем комплексный угол между прямыми равен сферическому расстоянию соответственных точек комплексной сферы, а щетки прямых изображаются большими кругами комплексной сферы.

Радиус-вектор всякой точки большого круга комплексной сферы может быть записан в виде

$$\boldsymbol{A}\cos\Phi + \boldsymbol{B}\sin\Phi, \tag{59}$$

где $(\boldsymbol{AB}) = 0$. Поэтому выражение (59) можно переписать в виде

$$(\cos\Phi + \varepsilon\sin\Phi)\,\boldsymbol{A}, \tag{60}$$

где $\varepsilon = \boldsymbol{BA}^{-1}$ (в силу (52) при условии $(\boldsymbol{AB}) = 0$). Точки этого большого круга определяются бикватернионами $\cos\Phi + \varepsilon\sin\Phi$, которые можно рассматривать как комплексные числа, у которых в силу того, что $\varepsilon^2 = -1$, ε играет роль обычной мнимой единицы. Двойное («ангармоническое») отношение четырех чисел такого вида является обычным параболическим комплексным числом. Так как всякая точка большого круга комплексной сферы изображает луч, принадлежащий к некоторой щетке, то всякие четыре луча щетки определяют двойное отношение — параболическое комплексное число, равное двойному отношению соответственных комплексных чисел. Доказывается, что линейчатые поверхности, принадлежащие одной щетке и обладающие тем свойством, что двойное отношение любых четырех прямолинейных образующих такой поверхности является вещественным числом, представляют собой цилиндроиды. Связи комплексных чисел указанного вида с геометрией щетки прямых был посвящен упомянутый выше доклад Котельникова 9 марта 1896 г.

Представление группы евклидовых движений. Поскольку всякое взаимное однозначное преобразование множества лучей евклидова пространства, сохраняющее угол и кратчайшее расстояние двух лучей, т. е. их комплексный угол, является движением евклидова пространства и обратно, а всякое взаимно однозначное преобразование комплексной сферы, сохраняющее сферическое расстояние ее точек, является вращением этой сферы и обратно, мы получаем, что движения евклидова пространства изображаются вращениями комплексной сферы и обратно.

Связь между движениями евклидова пространства и бикватернионами единичного модуля видна уже из формулы (52), которая при $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = 1$ может быть переписана в виде

$$\boldsymbol{A} = (\cos \Phi + \varepsilon \sin \Phi)\, \boldsymbol{B} \tag{61}$$

Здесь бикватернион единичного модуля $\cos \Phi + \varepsilon \sin \Phi$, примененный к единичному винту $\boldsymbol{B}$, переводит его в единичный винт $\boldsymbol{A}$ и, значит, переводит ось винта $\boldsymbol{B}$ в ось винта $\boldsymbol{A}$, т. е. поворачивает ее на угол φ и сдвигает в направлении оси винта ε на расстоянии δ. Однако такое действие указанный бикватернион оказывает только на те винты $\boldsymbol{B}$, оси которых пересекаются с осью винта ε под прямым углом.

То же движение в применении к произвольному единичному винту $\boldsymbol{B}$ получается при преобразовании

$$\boldsymbol{A} = \left(\cos\frac{\Phi}{2} + \varepsilon \sin\frac{\Phi}{2}\right) \boldsymbol{B} \left(\cos\frac{\Phi}{2} - \varepsilon \sin\frac{\Phi}{2}\right) \tag{62}$$

или, если обозначить бикватернион $\cos\frac{\Phi}{2} + \varepsilon \sin\frac{\Phi}{2}$ через Q,

$$\boldsymbol{A} = Q\boldsymbol{B}Q^{-1} \tag{63}$$

Нетрудно проверить, что если $\boldsymbol{B}$ — произвольный единичный винт, то и $\boldsymbol{A}$ — тоже единичный винт, а при $(\boldsymbol{B}\varepsilon) = 0$ формула (62) совпадает с формулой (61).

Формула (62) ставит в соответствие всякому бикватерниону единичного модуля $\cos \Phi + \varepsilon \sin \Phi$ винтовое движение, ось которого является осью винта ε, а угол φ поворота и длина δ сдвига определяются комплексным числом $\Phi = \varphi + \delta\omega$. Этим устанавливается гомоморфное соответствие между группой бикватернионов единичного модуля и связной группой движений евклидова пространства, причем одному движению соответствуют два бикватерниона: Q и $-Q$.

Заметим, что если представить бикватернионы единичного модуля комплексными матрицами, поставив в соответствие бикватерниону $A + B_j + C_j + Dk$ матрицу

$$\begin{pmatrix} A+Di & B-Ci \\ -B+Ci & A-Di \end{pmatrix} \qquad (64)$$

с единичным определителем (A, B, C, D — параболические комплексные числа), то указанные матрицы образуют так называемое спинорное представление связной группы движений евклидова пространства; векторы двумерного комплексного пространства, линейно преобразуемые этими матрицами, называются спинорами евклидова пространства.

Указанная связь между группой движений евклидова пространства и группой параболических бикватернионов единичного радиуса была чисто алгебраическим путем установлена незадолго до Котельникова немецким математиком Штуди в его работе «О движениях и отражениях» [15].

В главе II второй части Котельников рассматривает бесконечно малые преобразования группы движений и ее подгрупп. Теория бесконечно малых преобразований была построена в 1873—1874 гг. норвежским математиком Софусом Ли (1842—1899) [16], разработавшим общую теорию групп, которые можно рассматривать как n-мерные многообразия, в окрестности каждой точки этих многообразий можно ввести координаты. Такие группы называются в настоящее время группами Ли, а число n — порядком группы Ли. Можно показать, что в окрестности единицы группы Ли всегда можно выбрать такие координаты, что в этой окрестности для точек x, y и $z = xy$ с координатами x_i, y_i и z_i функции $z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ являются аналитическими функциями. Группы движений евклидова пространства, так же как и группы преобразований подобия, аффинных, проективных и конформных преобразований этого пространства, являются группами Ли.

Если в группе Ли задано однопараметрическое семейство элементов $g(t)$, проходящее через единицу группы,

[15] E. Study. Von der Bewegungen und Umlegungen.— Math. Ann., Bd 39, 1891, S. 441—566.

[16] S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I. Leipzig, 1888; Bd II, 1890; Bd III, 1894.

то бесконечно малым преобразованием этой группы называется производная dg/dt в единице группы. Если $g(t)$ и $h(t)$ — два однопараметрических семейства, которым соответствуют бесконечно малые преобразования G и H, то семейству $g(t)\,h(t)$ соответствует сумма $G+H$ соответственных бесконечно малых преобразований, а семейству $g(\lambda t)$ — произведение λG бесконечно малого преобразования G на число λ. Вследствие этого бесконечно малые преобразования можно рассматривать как векторы некоторого линейного пространства, размерность которого равна порядку группы. Семейству $g(t)\,h(t)\,g^{-1}(t)\,h^{-1}(t)$ при этом соответствует некоторое новое бесконечно малое преобразование $\mu\,[GH]$, называемое коммутатором бесконечно малых преобразований G и H. Операция $[GH]$ удовлетворяет условиям

$$[GH] = -[HG] \tag{65}$$

и

$$[[GH]K] + [[HK]G] + [[KG]H] = 0 \tag{66}$$

Пространство бесконечно малых преобразований группы Ли называют в настоящее время алгеброй Ли. Подгруппе группы Ли соответствует подалгебра алгебры Ли, т. е. линейное подпространство, замкнутое относительно операции $[G\,H]$.

В качестве однопараметрического семейства движений, проходящего через единицу группы, рассмотрим группу винтовых движений с одним и тем же параметром, представляемых бикватернионами

$$Q(t) = \cos Kt + \varepsilon \sin Kt \tag{67}$$

Производная $\frac{dQ}{dt}$ в единице группы равна

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_0 = \varepsilon K \tag{68}$$

Так как ε — произвольный единичный винт, а K — произвольное параболическое комплексное число, то бесконечно малые преобразования группы движений евклидова пространства взаимно однозначно изображаются произвольными винтами [17]. При этом бесконечно малым преоб-

[17] К этому результату Котельникова позже пришел П. К. Рашевский в работе «Об инфинитезимальном истолковании аппарата дуальных векторов» (Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. 2—3, 1935, стр. 336—350).

разованиям группы винтовых движений с параметром $\lambda/\varkappa$ соответствует винт, ось которого совпадает с осью этих движений, а модуль $K = \varkappa + \lambda\omega$. Когда другая группа винтовых движений представляется бикватернионами

$$R(t) = \cos \Lambda t + \boldsymbol{\eta} \sin \Lambda t, \tag{69}$$

бесконечно малое преобразование семейства

$$S(t^2) = Q(t) R(t) Q^{-1}(t) R^{-1}(t) \tag{70}$$

имеет вид

$$\frac{dS}{d(\overline{t^2})} = [\boldsymbol{\varepsilon\eta}] (K + \Lambda) \tag{71}$$

Таким образом, если два бесконечно малых преобразования группы движений изображаются двумя винтами, то коммутатор этих бесконечно малых движений изображается винтом, отличающимся от винтового произведения этих двух винтов только комплексным множителем.

Далее анализируются все линейные подпространства пространств винта, рассматриваемого как шестимерное вещественное линейное пространство, и находятся те из этих подпространств, которые замкнуты относительно винтового умножения винтов. Тем самым определяются все подгруппы движений группы евклидова пространства.

Применения к механике. Глава III второй части посвящена приложениям винтового исчисления к механике системы материальных точек. Здесь напоминается, что система сил, приложенных к системе точек, описывается винтом

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{m}\omega, \tag{72}$$

а движение жесткой системы точек в каждый момент описывается винтом

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v}\omega \tag{73}$$

Определяется также винт количеств движения: если скорость точки P_i системы с массой m_i описывается вектором $\boldsymbol{v}_i$, то, составляя векторы $\boldsymbol{g}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$ и поступая с ними так же, как с силами, мы получим винт

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}\omega, \tag{74}$$

где

$$g = \sum_i g_i, \quad h = \sum_i [r_i g_i] \tag{75}$$

Когда связи материальной системы при всяком ее положении, не изменяющем относительного расположения точек, допускают некоторое винтовое движение, для системы возможен кинематический винт; бивектор и винт, определяющие возможное винтовое движение, называются возможными. В случае если все винты группы возможны, данная группа называется возможной. Аналогичные понятия вводятся относительно бивекторов и винтов сил и количеств движения.

Пусть связи, наложенные на систему, выражаются дифференциальными уравнениями в полных дифференциалах

$$\sum_i A_{ki}\delta r_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, s), \tag{76}$$

а в частном случае голономной системы, когда эта система интегрируема, — конечными уравнениями

$$f_k = C_k, \tag{77}$$

где A_{ki}, f_k — некоторые функции координат и времени. Тогда, если для системы возможен кинематический винт (73),

$$\delta r_i = (v + [\omega r_i])\,\varepsilon, \tag{78}$$

где ε — бесконечно малая величина, одинаковая для всех точек системы.

Подставляя выражения (78) в уравнения (76), получим необходимые и достаточные условия возможности винта Ω. Благодаря линейному и однородному виду этих условий относительно координат винта имеет место следующая теорема: если винты Ω_1, Ω_2 возможны, то возможна и группа, ими определяемая. Эта теорема справедлива как для голономных, так и для неголономных систем [18].

Котельников устанавливает также ряд предложений, имеющих место только для голономных систем: если для

[18] Котельников — один из немногих первых исследователей свойств неголономных систем. Большое теоретическое и практическое значение неголономной механики было установлено лишь в середине XX в.; см.: Г. Н. Савин, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин. Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики. Киев, 1964.

данной системы возможны винты Ω_1 и Ω_2, то возможен и винт $[\Omega_1\ \Omega_2]$; совокупность всех возможных винтов образует замкнутую группу относительного винтового умножения; существуют системы, для которых данная ρ-членная замкнутая группа является совокупностью всех возможных винтов. Последние две теоремы можно сформулировать и так: совокупность винтовых движений, возможных для данной системы, образуют группу движений. Обратно, каждая группа движений возможна для некоторой голономной системы.

Для всех типов замкнутых систем Котельников указывает вид независимых интегралов φ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, 3_{n-s})$ уравнения

$$X_k f = 0, \tag{79}$$

выражающего необходимое и достаточное условие возможности винта голономной системы. Здесь X_k — оператор

$$X_k = \sum_i \{(\boldsymbol{v}_i \nabla_i) + (\omega_k [\boldsymbol{r}_i \nabla_i])\}, \tag{80}$$

где∇_i — дифференциальный оператор Гамильтона. Последний можно рассматривать как вектор, координатами которого являются операторы $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial y_i}$, $\frac{\partial}{\partial z_i}$ дифференцирования по координатам x_i, y_i, z_i векторов $\boldsymbol{r}_i$, а векторы ω_k и $\boldsymbol{v}_k$ входят в состав винтов $\Omega_k = \omega_k + \boldsymbol{v}_k\,\omega$.

Далее Котельников рассматривает силовые винты (72). Силовой винт (72) называется взаимным с кинематическим винтом (73), если их скалярное произведение $(\Omega\ \boldsymbol{F})$ — вещественное число, т. е. их относительный момент $(\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{f}) + (\omega \boldsymbol{m})$ равен нулю. Здесь Котельников доказывает следующие теоремы: если винт $\boldsymbol{F}$ взаимен с винтами $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_s$, то он взаимен и со всеми винтами группы, ими определяемой; если для всех возможных положений точек консервативной системы силовые винты взаимны с винтами Ω_1 и Ω_2, то для тех же положений они будут взаимны и с винтом $[\Omega_1\ \Omega_2]$; совокупности всех винтов, взаимных с силовыми, образуют замкнутую группу; всегда можно подобрать такую силовую функцию, чтобы совокупностью всех винтов, взаимных с силовыми, была данная замкнутая группа; совокупность винтовых движений, при которых работа сил равна нулю, образует группу движений; обратно, для каждой группы движений существует такая силовая функция, что при всех движениях силы группы не производят работы; если приложенные к точкам системы силы действуют по лучам линейной конгруэнции, являющейся пересечением двух линейных комплексов [19], то они могут обладать силовой функцией только тогда, когда конгруэнция является щеткой или связкой с центром на конечном или бесконечном расстоянии.

Рассматривая в заключение винт количества движения системы, Котельников доказывает следующие теоремы: если для системы возможен кинематический винт, то производная по времени от относительного момента винта количества движения относительно возможного винта равна относительному моменту силового винта относительно того же винта; в аналитической форме эта теорема может быть выражена в виде

$$\frac{d}{dt}\{(\boldsymbol{vg}) + (\boldsymbol{\omega h})\} = (\boldsymbol{vf}) + (\boldsymbol{\omega m}) \tag{81}$$

Поэтому в случае когда силовой винт взаимен с возможным винтом, для последнего существует винтовой интеграл

$$S = (\boldsymbol{vg}) + (\boldsymbol{\omega h}) = \mathrm{const} \tag{82}$$

Из этого интеграла для частных случаев бесконечно большого и нулевого параметров возможного винта ($\boldsymbol{\omega} = 0$ и $\boldsymbol{v} = 0$) соответственно следуют интегралы сохранения скорости центра инерции и площадей; если винты $\boldsymbol{\Omega}_1$, $\boldsymbol{\Omega}_2$... независимы, то соответствующие винтовые интегралы также независимы. Линейной комбинацией этих интегралов можно составить интегралы для каждого винта группы, определяемой винтами $\boldsymbol{\Omega}_1$, $\boldsymbol{\Omega}_2$ ...; когда для системы возможна s-членная группа и силовые винты принадлежат к взаимной группе, мы получаем ∞^{s-1} винтовых интегралов, соответствующих возможным винтам. Между ними можно найти s независимых, остальные получаются линейной комбинацией этих интегралов [20]. Для голоном-

[19] Линейным комплексом называется 3-параметрическое семейство прямых, определяемое линейным соотношением между плюккеровыми координатами (56) прямых. Линейную конгруэнцию можно определить как 2-параметрическое семейство прямых, пересекающихся с двумя вещественными или мнимосопряженными прямыми. В случае щетки одна из этих прямых вещественная, а другая — бесконечно удаленная.

[20] Последние теоремы справедливы для самого общего случая неголономных неконсервативных систем. В частном случае голономных систем эти теоремы

ной и консервативной[21] системы при условии, что $S=\text{const}$ (винтовой интеграл), а $F=\text{const}$ какой-либо другой интеграл уравнений движения, скобка Пуассона $[S, F] = \text{const}$ также будет интегралом движения; совокупность винтов, для которых существуют винтовые интегралы, образуют замкнутую группу; существуют такие системы, у которых все винтовые интегралы соответствуют винтам данной замкнутой группы; совокупность движений, определяемых винтами винтовых интегралов, образует группу движений; если оси винтовых интегралов $S_1 = \text{const}$ и $S_2 = \text{const}$ совпадают или оба интеграла поступательны, скобки Пуассона $[S_1, S_2]$ тождественно обращаются в нуль и не дают новых интегралов. Во всех остальных случаях равенство $[S_1, S_2] = \text{const}$ не будет тождеством и даст винтовой интеграл, независимый от интегралов.

Диссертационная работа А. П. Котельникова заканчивается исследованием характера систем винтовых интегралов, которые получаются с помощью скобок Пуассона, в каждом частном случае в зависимости от характера данных интегралов.

Речь перед защитой. Перед защитой магистерской диссертации Котельников выступил с речью, изданной под названием «Винты и комплексные числа». В этой речи он кратко изложил содержание своей работы, высказал несколько важных мыслей, свидетельствующих о его мировоззрении, и развернул программу дальнейших исследований. В самом начале речи, указав на значение простых машин (рычага, наклонной плоскости, блока, веревочного многоугольника и винта) для практической механики, Котельников остановился на важной роли этих машин в развитии теории. «Заговорив о простых машинах, — сказал, он, — я хотел бы обратить Ваше внимание на то, что они играют еще иную роль, кроме вышеуказанных, а именно роль научных методов, которые во многих случаях служили к доказательству и открытию весьма важных теорем и принципов механики». В качестве примера докладчик указал на Архимеда, который с помощью рычага решал

еще в 1878 г. установил итальянский ученый Валентино Черрути (V. Cerruti. Nuova teorema generale di meccanica.— Atti della R. Accademia dei Lincei, III seria, t. 2, 1878, p. 1).

[21] Система называется консервативной, если силы, действующие на систему, обладают потенциалами, т. е. являются градиентами некоторых скалярных функций.

ВИНТЫ

И

КОМПЛЕКСНЫЯ ЧИСЛА.

А. П. КОТЕЛЬНИКОВА

Приватъ-доцента Казанскаго Университета.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1896.

Титульный лист речи «Винты и комплексные числа»

вопросы статики, на Стевина и Роберваля, применивших наклонную плоскость для открытия закона параллелограмма сил, на Лагранжа, использовавшего блок для открытия принципа возможных перемещений, на применение веревочного многоугольника для графической статики, позволившее Эйфелю построить его знаменитую башню, и, наконец, на применение Боллом винта для решения ряда вопросов статики, кинематики и динамики твердого тела. Котельников охарактеризовал свою работу как дальнейшее развитие идей Болла и Клиффорда. Эти мысли Котельникова свидетельствуют о его материалистическом взгляде на соотношение теории и практики.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕЕВКЛИДОВА МЕХАНИКА

Докторская диссертация. Идея обобщения винтового исчисления на неевклидовы пространства созрела у Котельникова еще до защиты его магистерской диссертации. Перед этой защитой он опубликовал тезисы («Положения»), в которых говорится: «Изучение механики неевклидовых пространств заслуживает самого серьезного внимания во многих отношениях. Вопрос о роде нашего пространства едва ли может быть решен прежде, чем будет разработана механика пространств неевклидовых. Метод перенесения приложим не только к теории винтов евклидова пространства, но и к теориям винтов пространств неевклидовых с постоянной кривизной. Ту роль, которую в евклидовом пространстве играют числа $a + \omega b$, где $\omega^2 = 0$, и их функции, в пространстве эллиптическом играют числа $a + \omega b$, $\omega^2 = 1$, а в пространстве Лобачевского — числа $a + \omega b$, $\omega^2 = -1$, и функции этих чисел» [1].

Мы видим, что Котельников, первоначально занимавшийся главным образом прикладными вопросами механики, постепенно приходит к идеям Лобачевского. Существенную роль в этом повороте сыграли, конечно, его учителя — А. В. Васильев и Ф. М. Суворов, много сделавшие для распространения и развития идей гениального математика. Слова Котельникова о разрешении «вопроса о роде нашего пространства» свидетельствуют о том, что он придерживается материалистической точки зрения Лобачевского, допуская возможность разрешения этой проблемы только опытным, практическим путем.

[1] Приложение к отдельному изданию «Винтового счисления», стр. 1.

Развитию указанных положений была посвящена докторская диссертация Котельникова «Проективная теория векторов». Принципиальная установка этой работы ясна из приведенной в качестве эпиграфа известной материалистической мысли Лобачевского из его «Новых начал геометрии с полной теорией параллельных»: «В природе мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например Геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения; а потому пространство, само собой, отдельно для нас не существует. После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии» [2].

Ту же установку подчеркивает и второй эпиграф — из известной в истории неевклидовой геометрии речи Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии»: «Такие же исследования, как произведенные в настоящей работе, именно имеющие исходным пунктом общие понятия, служат лишь для того, чтобы движению вперед и успехам в понятии связи вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки» [3].

Основная задача «Проективной теории векторов» состояла в обобщении векторного исчисления и построенного на его основе винтового исчисления неевклидовых пространств Лобачевского и Римана. Алгебраическим вопросам, связанным с этим обобщением, посвящено сообщение Котельникова на заседании Казанского физико-математического общества 15 марта 1897 г.: «О комплексных числах с двумя единицами» [4] (содержание этого сообщения составило первую главу «Проективной теории векторов»).

«Проективная теория векторов» была защищена Котельниковым в качестве диссертации на соискание ученой степени доктора прикладной математики 23 мая 1899 г. Оппонентами на этой защите были те же профессора — П. С. Назимов и Д. Н. Зейлигер [5], что и на защите его ма-

---

[2] Н. И. Лобачевский. ПСС, т. II, М.— Л., 1949, стр. 158—159.
[3] Б. Риман. Соч., М.— Л., 1948, стр. 292.
[4] Известия КФМО, т. 7, № 2, 1897, стр. 75.
[5] Отзыв Д. Н. Зейлигера.— Ученые записки Казан. ун-та, т. 66, № 11, 1899, стр. 43—44.

гистерской диссертации. В протоколе заседания Совета факультета записано: «По окончании заседания факультет постановил: признав защиту г. Котельникова названной диссертации удовлетворительной, удостоить его степени доктора прикладной математики, о чем представить в Совет университета на утверждение. Вместе с тем факультет, признавая особо выдающееся значение указанной выше диссертации для геометрии, единогласно постановил: просить Совет университета ходатайствовать об удостоении г. Котельникова также степени доктора чистой математики» [6]. Ходатайство Совета факультета было удовлетворено, и А. П. Котельников получил за «Проективную теорию векторов» обе ученые степени.

Неевклидова геометрия и неевклидова механика до А. П. Котельникова. Важнейшим вкладом в неевклидову геометрию после великого открытия Лобачевского было создание Риманом (1826—1866) римановой геометрии и неевклидовой геометрии Римана и открытие Артуром Кели (1821—1891) и Феликсом Клейном (1849—1926) проективной интерпретации неевклидовой геометрии; последнее открытие окончательно доказало непротиворечивость неевклидовой геометрии.

Риманова геометрия, основные идеи которой были высказаны Риманом в его известной речи «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» (1854) [7], является широкой геометрической схемой «пространства переменной кривизны». Пространства Евклида и Лобачевского — частные случаи римановых пространств, соответствующие случаям нулевой кривизны и постоянной отрицательной кривизны. Неевклидовым пространством Римана называют впервые рассмотренное этим ученым пространство постоянной положительной кривизны, обладающее большой аналогией с пространством Лобачевского.

Кели (1859) в своем «Шестом мемуаре о формах» [8] выдвинул идею проективной метрики. Если в проективном пространстве задана поверхность второго порядка

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (1)$$

[6] Протоколы заседания Совета Казан. ун-та от 22 мая 1899 г.— Ученые записки Казан. ун-та, т. 66, № 11, стр. 43—44.

[7] Б. Риман. Соч., стр. 279—293.

[8] См. сб. «Об основаниях геометрии». М., 1956, стр. 222—248.

называемая абсолютом, то каждым двум точкам с координатами x_i и y_i соответствует расстояние, равное логарифму двойного отношения этих точек и точек пересечения определяемой ими прямой с абсолютом, умноженным на $R/2$, если последние две точки вещественны, и на $R/2i$, если эти две точки мнимо сопряжены (R — произвольная положительная константа). Угол между двумя прямыми равен логарифму двойного отношения этих прямых и двух прямых, которые проходят через их точку пересечения в их плоскости и касательны к абсолюту, умноженному на $1/2$ (последние две прямые вещественны) или на $1/2i$ (прямые мнимо сопряжены); аналогично определяется угол между двумя плоскостями. Абсолют можно задать также уравнением

$$\sum_i \sum_j A_{ij} u_i u_j = 0 \tag{2}$$

[матрица $(A_{ij}$ — обратная для матрицы $(a_{ij}))$], связывающим координаты u_i касательных к нему плоскостей (координатами плоскости $\sum_i u_i x_i = 0$ называются коэффициенты ее уравнения). В том случае, когда абсолют является мнимой поверхностью второго порядка, для которой уравнения (1) и (2) принимают вид

$$x_0^2 + k^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \quad k^2 > 0 \tag{3}$$

и

$$k^2 u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0, \quad k^2 > 0, \tag{4}$$

мы получаем неевклидово пространство Римана кривизны k^2; его можно также определить как сферу в четырехмерном евклидовом пространстве с отождествленными диаметрально противоположными точками. Когда $k = 0$, абсолют вырождается в мнимую кривую второго порядка, определяемую уравнением (2), которое здесь принимает вид

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \tag{5}$$

В этом случае пространство совпадает с пространством Евклида, причем углы между прямыми и плоскостями определяются так же, как в общем случае, а расстояние между точками определяется с помощью задания единичной сферы, т. е. некоторой поверхности второго порядка, проходящей через абсолютную кривую второго порядка; плоскость абсолютной кривой является бесконечно удаленной плоскостью евклидова пространства.

Клейн (1871) в своей работе «О так называемой неевклидовой геометрии»[9] обнаружил, что когда абсолют Кели является вещественной овальной поверхностью, для которой уравнения (1) и (2) принимают вид

$$x_0^2 + k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \quad k^2 < 0 \tag{6}$$

и

$$k^2 u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0, \quad k^2 < 0 \tag{7}$$

полученное пространство совпадает с пространством Лобачевского кривизны k^2. Таким образом, пространство Евклида может быть получено предельным переходом и из пространства Римана и из пространства Лобачевского при стремлении кривизны к нулю. Геометрию пространств Римана, Лобачевского и Евклида называют также эллиптической, гиперболической и параболической геометрией.

Если ввести понятие о четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, отличающемся от четырехмерного евклидова пространства тем, что квадрат длины вектора в этом пространстве является не положительно определенной формой координат

$$(xx) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{8}$$

а знаконеопределенной формой

$$(xx) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{9}$$

вследствие чего в этом пространстве имеются векторы как вещественной, так и чисто мнимой длины, а также ненулевые векторы с нулевой длиной, то пространство Лобачевского можно определить как трехмерную сферу мнимого радиуса в этом пространстве с отождествленными диаметрально противоположными точками (или, так как указанная сфера состоит из двух плоскостей, — как одну из полостей этой сферы). Заметим, что четырехмерное евклидово и псевдоевклидово пространство можно рассматривать также как четырехмерное проективное про-

[9] См. сб. «Об основаниях геометрии», М., 1956, стр. 253—303.

странство, в котором в качестве абсолюта задана поверхность второго порядка, в первом случае мнимая, во втором случае вещественная овальная, в гиперплоскости (трехмерном подпространстве) этого пространства, называемой бесконечно удаленной гиперплоскостью евклидова или псевдоевклидова пространства (т. е. бесконечно удаленные гиперплоскости этих пространств можно рассматривать соответственно как трехмерное пространство Римана или Лобачевского). Указанная интерпретация пространства Лобачевского была предложена французским математиком Анри Пуанкаре [10].

В 1869—1870 гг. появляются работы итальянского математика Анджело Дженокки [11], бельгийского механика Жозефа де Тилли [12] и немецкого математика Эрнста Шеринга [13], положившие начало изучению механики в пространстве Лобачевского. Основной целью этих исследований было выяснить, не находится ли геометрия Лобачевского в противоречии с принципами механики. Мысль о необходимости такой проверки имелась уже у самого Лобачевского, который заканчивал в то время свою первую печатную работу, посвященную неевклидовой геометрии, «О началах геометрии» следующими словами: «Оставалось бы исследовать, какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику и не встретится ли здесь принятых уже и несомнительных понятий о природе вещей, но которые принудят нас ограничивать или совсем не допускать зависимости линий от углов. Однако же можно предвидеть, что перемены в Механике при новых началах Геометрии будут того же рода, какие показал Лаплас (Mécanique céleste, т. I, кн. 1, гл. II), предполагая возможной всякую зависимость скорости от силы, или — выразимся вернее — предполагая силы, измеряемые всегда скоростью, подчиненными другому закону в соединении, нежели принятому сложению их» [14].

---

[10] А. Пуанкаре. Об основных гипотезах геометрии. Сб. «Об основаниях геометрии», стр. 388—398.

[11] A. Genocchi. Intorna ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex.— Atti d. R. Accad. d. Sci. Torino, t. 4, 1869.

[12] I. de Tilly. Etudes de mécanique abstracte.— Mémoires couronnés, t. 21, 1870.

[13] E. Schering. Die Schwerkraft in Gaussischen Raume.— Göttinger Nachrichten, 1870, S. 311—321.

[14] Н. И. Лобачевский. ПСС, т. I, М.— Л., 1946, стр. 261.

В 1873 г. в упомянутой нами работе Клиффорда «Предварительный очерк бикватернионов», значительная часть которой посвящена изучению геометрии неевклидова пространства Римана, было положено начало изучению механики и в этом пространстве. Теория бикватернионов Клиффорда в 1883 г. была перенесена на пространство Лобачевского Коксом [15], показавшим, что ту роль, которую в пространствах Евклида и Римана играют параболические и эллиптические бикватернионы, в пространстве Лобачевского играют гиперболические бикватернионы.

В последующие годы выходит целый ряд работ, посвященных изучению механики в неевклидовых пространствах. Среди этих работ следует отметить исследования П. С. Юшкевича [16] и знаменитого механика Н. Е. Жуковского [17].

Эллиптические и гиперболические комплексные числа. Докторская диссертация А. П. Котельникова «Проективная теория векторов» состоит из четырех глав.

В главе I доказываются вспомогательные алгебраические предположения, которые, как уже было упомянуто, были предметом доклада Котельникова 15 марта 1897 г. Здесь исследуются комплексные числа вида $a + b\omega$, где ω — некоторый символ, перестановочный со всеми числами и обладающий тем свойством, что ω^2 равно вещественному числу k^2. Эти комплексные числа в том случае, когда $k^2 > 0$, называются эллиптическими, при $k^2 < 0$ — гиперболическими и при $k^2 = 0$ — параболическими. Обычные комплексные числа являются частным случаем гиперболических комплексных чисел при $k^2 = -1$.

Далее строится геометрическая интерпретация комплексных чисел на плоскости и находятся основные свойства функций комплексного переменного различных типов. В частности, показывается, что преобразования этих плоскостей, определяемые аналитическими функциями, переводят в себя два семейства прямых, параллельных

[15] H. C o x. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungstehre to different kinds of uniform space.— Trans. Cambridge Phil. Soc., t. 8, 1883, стр. 69—143.

[16] П. С. Ю ш к е в и ч. О сложении сил в гиперболическом пространстве.— Вестник опытной физики и элементарной математики, сем. 22, 1898, стр. 258—263 и 285—393.

[17] Н. Е. Ж у к о в с к и й. О движении материальной псевдосферической фигуры на поверхности псевдосферы (1902).— Собр. соч., т. I, М.— Л., 1948, стр. 375—418.


ПРОЭКТИВНАЯ

ТЕОРІЯ ВЕКТОРОВЪ

А. П. Котельникова

Привать-доцента Императорскаго Казанскаго Университета

КАЗАНЬ

Типо-Литографія Императорскаго Университета

1899

Титульный лист «Проективной теории векторов»

радиусам-векторам точек

$$\xi = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega}{k}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega}{k}\right) \tag{10}$$

Числа ξ и η обладают свойствами

$$\xi^2 = \xi, \quad \eta^2 = \eta, \quad \xi\eta = 0 \tag{11}$$

Прямые указанных семейств вещественны в случае эллиптических комплексных чисел и мнимы в случае гиперболических комплексных чисел; в последнем случае следует считать k равным произведению вещественного числа k' на мнимую единицу i, перестановочную с символом ω. Эти прямые называются инвариантными.

В заключение главы строится другая геометрическая интерпретация этих систем чисел на поверхностях второго порядка. Интерпретация получается из предыдущей с помощью стереографической проекции плоскости на поверхность второго порядка, при которой инвариантные прямые плоскостей соответствуют плоским образующим поверхности второго порядка. При этом система гиперболических комплексных чисел изображается овальной поверхностью, система эллиптических комплексных чисел — линейчатой поверхностью, а система параболических комплексных чисел — конусом.

Векторы в неевклидовых пространствах. В главе II определяются векторы в неевклидовых пространствах Римана и Лобачевского и основные операции над ними. Тот факт, что в работе строится единая теория векторов для всех пространств с проективной метрикой (пространства Римана, Лобачевского и Евклида), явился причиной того, что работа получила название «Проективная теория векторов».

Предшественники Котельникова в области механики в неевклидовых пространствах не рассматривали вектор в этих пространствах как направленный отрезок и определяли его точкой приложения, направлением и величиной. По существу рассматриваемые ими векторы были векторами евклидова пространства, касательного к неевклидову пространству в точке приложения вектора; именно так и рассматриваются в настоящее время векторы риманова пространства переменной кривизны.

Котельников определяет вектор неевклидова пространства как упорядоченную пару точек (что равносильно определению вектора как направленного отрезка). При этом в случае пространства Лобачевского рассматриваются и такие векторы, начало и конец которых находятся по разные стороны абсолюта или на абсолюте. Однако тензором (по нашей терминологии — модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ Котельников называет не его длину δ (расстояние между его началом и концом), а функцию этой длины

$$|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{k}\operatorname{tg} k\delta, \tag{12}$$

где k^2 — кривизна пространства, являющаяся положительной в случае пространства Римана, отрицательной в случае пространства Лобачевского и нулем в случае пространства Евклида. В случае пространства Лобачевского, когда число k чисто мнимо и равно ik', формулу (12) можно переписать в виде

$$|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{k'} \operatorname{th} k'\delta \tag{13}$$

В случае же пространства Евклида, переходя в формуле (12) к пределу при стремлении k к нулю, мы получим

$$|\overrightarrow{AB}| = \delta, \tag{14}$$

т. е. модуль вектора равен его длине. Заметим, что когда начало и конец вектора полярно сопряжены $\left(\delta = \frac{\pi}{2k}\right)$, модуль вектора обращается в бесконечность. Определяемый таким образом, он веществен для всех векторов, рассматриваемых Котельниковым.

Если считать неевклидово пространство трехмерной сферой радиуса $1/k$ в четырехмерном евклидовом или псевдоевклидовом пространстве с отождествленными диаметрально противоположными точками, каждому вектору неевклидова пространства, по Котельникову, можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор евклидова пространства, касательного к сфере в начале вектора, который имеет то же направление и тот же модуль, что и этот вектор: указанный вектор евклидова пространства является проекцией вектора неевклидова пространства из центра сферы на касательное пространство [18].

Котельников определяет сумму двух векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ неевклидова пространства, имеющих общее начало O, с помощью следующего построения: линии векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ продолжаются до пересечения с полярной плоскостью точки O. Если точка пересечения линии вектора $\overrightarrow{OA}$ с этой плоскостью есть точка A', точка пересечения линии вектора $\overrightarrow{OB}$ с той же плоскостью есть точка B', а пря-

[18] Это истолкование векторов Котельникова было предложено П. А. Широковым в его работе «Преобразование винтовых интегралов в пространствах постоянной кривизны» (П. А. Широков. Избранные работы по геометрии. Казань, 1966, стр. 307).

мые AB' и BA', лежащие в одной плоскости, пересекаются в точке C, суммой векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ является вектор $\overrightarrow{OC}$. Легко проверить, что, проектируя четырехугольник $OACB$ из центра сферы на касательное евклидово пространство, мы получим параллелограмм. Значит, определение Котельникова эквивалентно определению такого вектора неевклидова пространства с тем же началом, для которого соответственный вектор касательного евклидова пространства является суммой векторов этого пространства, соответствующих данным двум векторам неевклидова пространства. Из этого определения ясно, что определенное таким образом сложение векторов неевклидова пространства обладает всеми свойствами сложения векторов евклидова пространства. Заметим, что, складывая векторы пространства Лобачевского, начала и концы которых находятся внутри абсолюта, мы можем получить вектор с тем же началом и концом вне или на абсолюте.

Вектор неевклидова пространства считается эквивалентным всем векторам, полученным из него при перенесении начала и конца указанного вектора на одно и то же расстояние вдоль его прямой, т. е. векторы неевклидова пространства рассматриваются как скользящие.

Далее определяются эквивалентные системы векторов с различными началами. Две системы векторов с произвольными началами называются эквивалентными, если одна из них может быть получена из другой с помощью трех элементарных операций: перенесение вектора вдоль его прямой, сложение векторов с общим началом и разложение вектора на несколько векторов с общим началом, сумма которых равна этому вектору.

Прежде всего показывается, что всякая система векторов, лежащих в одной плоскости, эквивалентна одному вектору, лежащему в этой плоскости. В самом деле, прямые каждого из этих векторов пересекаются друг с другом, и, перенося векторы в точки пересечения их прямых, мы можем постепенно сложить их друг с другом и получить один вектор. Полученный таким образом вектор оказывается определенным однозначно с точностью до переноса вдоль его прямой.

Далее доказывается, что всякая система векторов в пространстве эквивалентна системе, состоящей из двух векторов, причем прямая одного из них проходит через произвольную точку O, а прямая другого из них лежит в полярной плоскости точки O. В самом деле, пусть нам задана система, состоящая из векторов $\overrightarrow{A_iB_i}$. Зададимся точкой O и перенесем все векторы системы в точки пересечения их прямых с полярной плоскостью точки O. Обозначим перенесенные векторы $\overrightarrow{A'_iB'_i}$. Каждый из них можно разложить на вектор $\overrightarrow{A'_iC'_i}$, лежащий в этой плоскости, и вектор $\overrightarrow{A'_iD'_i}$, прямая которого перпендикулярна к плоскости. Так как в неевклидовых пространствах все прямые, перпендикулярные к одной плоскости, проходят через полюс этой плоскости, прямые всех векторов $\overrightarrow{A'_iD'_i}$ проходят через точку O и мы можем перенести их в точку O. В этом случае при сложении полученных векторов получается некоторый вектор с началом в точке O. С другой стороны, как мы видели, система векторов $\overrightarrow{A'_iC'_i}$, лежащих в полярной плоскости точки O, также эквивалентна одному вектору, лежащему в этой плоскости.

Задаваясь другой точкой O, мы получим другую пару векторов, эквивалентную данной системе векторов. Аналогично положению, что всякая система векторов в евклидовом пространстве может быть приведена к двум коллинеарным (скользящему и свободному) векторам, доказывается, что среди всех таких пар векторов существует пара, единственная с точностью до переноса векторов вдоль их прямых, у которой линии векторов взаимно полярны. Такие взаимно полярные прямые называются осями системы векторов.

Наряду с векторами в неевклидовых пространствах можно рассматривать двойственный образ: упорядоченные пары плоскостей, или роторы. Линия пересечения плоскостей ротора называется осью ротора. Так как всякому ротору соответствует вектор, начало и конец которого являются полюсами плоскостей ротора (такой ротор называется полярным для данного вектора), на роторы распространяются все действия, определенные нами для векторов. В частности, ротор считается эквивалентным ротору, полученному из него поворотом его плоскостей вокруг оси ротора на один и тот же угол. Тензором (модулем) ротора $\overleftrightarrow{\alpha\beta}$, образованного плоскостями α, β, угол между которыми равен φ, называется число

$$|\overrightarrow{\alpha\beta}| = \operatorname{tg} \varphi \qquad (15)$$

Очевидно, что модуль ротора с взаимно перпендикулярными плоскостями обращается в бесконечность.

Поскольку угол между плоскостями, полюсы которых находятся на расстоянии δ, равен $\varphi = k\delta$, модуль ротора, полярного данному вектору, равен модулю этого вектора, умноженному на k.

Если над роторами определены все действия векторного исчисления, ротор можно рассматривать как вектор в касательном евклидовом пространстве любой точки его оси, причем направление этого вектора определяется осью ротора, а модуль равен модулю ротора.

Вектор и полярный ему ротор считаются эквивалентными. Поэтому произвольная система векторов и роторов эквивалентна системе векторов и, в частности, паре векторов; один из этих векторов или оба можно заменить на полярный ротор. В связи с этим мы можем, в частности, сказать, что произвольная система векторов и роторов эквивалентна вектору с началом в произвольной точке O и ротору, ось которого проходит через точку O; в том случае, когда точка O находится на оси системы, вектор направлен по этой оси, а ось ротора совпадает с этой осью.

Совокупность вектора и ротора с осью, проходящей через начало вектора, представляет собой винт, или, как часто называет его Котельников в этой работе, мотор. Два винта считаются равными, если системы, состоящие из их векторов и роторов, эквивалентны. Суммой двух винтов называется винт, состоящий из вектора и ротора, эквивалентных системе, состоящей из векторов и роторов слагаемых винтов.

Если вектор есть упорядоченная пара точек, определенных с точностью до перенесения вдоль прямой вектора, а ротор — упорядоченная пара плоскостей, определенных с точностью до поворота около оси ротора, то винт можно рассматривать как упорядоченную пару прямых, определенных с точностью до сдвигов по общим перпендикулярам этих прямых: как известно, в неевклидовых пространствах в общем случае две прямые обладают двумя взаимно полярными общими перпендикулярами, по которым осуществляются стационарные расстояния этих прямых. Поэтому две прямые определяются векторами, соединяющими концы их общих перпендикуляров, или одним из этих векторов и ротором, полярным к другому.

Названия ротора и мотора, заимствованные Котельниковым у Клиффорда, объясняются тем, что подобно тому, как вектор определяет перенесение (vectio) вдоль прямой, ротор определяет поворот (rotatio) около оси, а мотор определяет произвольное движение (motio), которое в неевклидовом пространстве, так же как в евклидовом, состоит из перенесения вдоль некоторой прямой и поворота вокруг этой прямой.

При предельном переходе, когда неевклидово пространство переходит в евклидово пространство, полярные плоскости всех точек переходят в бесконечно удаленную плоскость, полюсы всех плоскостей — в бесконечно удаленные точки (в которых пересекаются все перпендикуляры к этим плоскостям), а поляры всех прямых — в бесконечно удаленные прямые (по которым пересекаются все плоскости, перпендикулярные к этим прямым). При этом предельном переходе векторы неевклидова пространства превращаются в скользящие векторы, а роторы, полярные векторам, — в упорядоченные пары параллельных плоскостей, определенные с точностью до параллельного переноса; такие пары плоскостей определяют свободные векторы, направленные по перпендикулярам к этим плоскостям и имеющие длину, равную расстоянию между плоскостями. Поэтому при указанном переходе теорема о том, что система векторов неевклидова пространства эквивалентна системе, состоящей из вектора и ротора, т. е. винту неевклидова пространства, переходит в известную теорему о том, что система скользящих векторов евклидова пространства эквивалентна винту евклидова пространства. Заметим, что винт евклидова пространства также можно рассматривать как упорядоченную пару прямых, определенных с точностью до сдвига вдоль их общего перпендикуляра и поворота около него.

Винты в неевклидовых пространствах. В главе III устанавливается связь между винтами в неевклидовых пространствах и различными видами комплексных чисел, введенных в главе I, и определяются основные операции исчисления винтов.

В случае пространства кривизны k^2 будем рассматривать комплексные числа $a + b\omega$, где

$$\omega^2 = k^2 \tag{16}$$

Эти комплексные числа являются эллиптическими в случае пространства Римана, гиперболическими в случае пространства Лобачевского и параболическими в случае пространства Евклида.

Поскольку векторы и роторы неевклидова пространства рассматриваются как векторы евклидова пространства, касательного к неевклидову пространству, винты можно считать парами векторов евклидова пространства, касательного к неевклидову пространству в точке приведения мотора. Эти пары векторов можно также рассматривать как комплексные векторы, причем винт, состоящий из вектора и ротора, которые соответствуют векторам **a** и **a**, мы будем считать комплексным вектором

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}}\omega, \tag{17}$$

где ω — мнимая единица комплексных чисел соответственного типа. Это представление позволяет определить для винтов действия сложения, умножения на комплексное число, скалярное и винтовое умножения совершенно так же, как умножение на вещественное число, скалярное и векторное умножения обычных векторов.

Для выяснения геометрического смысла скалярного и винтового умножения винтов вводится понятие комплексного угла между прямыми: если длина одного из двух общих перпендикуляров двух прямых равна δ, а угол между плоскостями, проходящими через этот перпендикуляр и данные прямые, равен φ, комплексным углом между этими прямыми будет комплексное число

$$\Phi = \varphi + \delta\omega \tag{18}$$

Поскольку длина второго общего перпендикуляра данных прямых равна $\delta' = \frac{\varphi}{k}$, а угол между плоскостями, проходящими через этот перпендикуляр и данные прямые, равен $\varphi' = k\delta$, число (18) может быть переписано в виде,

$$\Phi = k\delta' + \frac{\omega}{k}\varphi' \tag{19}$$

Очевидно, что правая часть формулы (19) примет вид правой части формулы (18), если умножить ее на ω/k.

С помощью понятия комплексного угла доказывается, что скалярное произведение $(\boldsymbol{AB})$ двух винтов равно произведению их модулей $|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$ на косинус комплексного угла между их осями

$$(\boldsymbol{AB}) = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\Phi, \tag{20}$$

а винтовое произведение $[\boldsymbol{AB}]$ этих винтов равно произведению их модулей $|A|$, $|B|$ на синус комплексного угла Φ между их осями и на единичный винт ε, оси которого являются общими перпендикулярами осей винтов,

$$[\boldsymbol{AB}] = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\Phi\varepsilon \tag{21}$$

Всякий винт в неевклидовом пространстве можно представить также в виде

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\xi + \boldsymbol{\beta}\eta, \tag{22}$$

где ξ и η — комплексные числа (10). Винты $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ называются соответственно правой и левой стрелками винта **A**. Стрелки винта вещественны в случае пространства Римана и мнимо сопряжены в случае пространства Лобачевского. Стрелки винта обладают тем интересным свойством, что в любой точке пространства прямая вектора стрелки совпадает с осью ее ротора, т. е. через каждую точку пространства проходит одна из осей стрелки. Если построить векторы стрелки во всех точках пространства, то они определят так называемый паратактический сдвиг пространства, т. е. такое движение, при котором все точки сдвигаются на одно и то же расстояние. Поэтому векторы стрелок во многом аналогичны свободным векторам евклидова пространства.

Гиперболические и эллиптические бикватернионы. Глава IV посвящена связи построенного в предыдущих главах исчисления винтов с бикватернионами и приложениям этого исчисления к геометрии и механике.

Гиперболическим и эллиптическим бикватернионом называются выражения $Q = q + r\,\omega$, где q, r — обычные кватернионы, а ω — мнимая единица гиперболических и эллиптических комплексных чисел. Бикватернионы вида $Bi + Cj + Dk$ можно рассматривать как винты соответственного неевклидова пространства, и бикватернион общего вида можно записать как сумму комплексного числа и винта $A + \boldsymbol{A}$. Произведение двух бикватернионов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, имеющих вид $Bi + Cj + Dk$, выражается через скалярное и винтовое произведения соответственных винтов в виде

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) + [\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}]. \tag{23}$$

Формула (23) дает удобный способ вычисления скалярного и винтового произведения двух винтов.

Основные свойства гиперболических и эллиптических бикватернионов выражаются теми же формулами, что и основные свойства параболических бикватернионов. В частности, здесь имеет место формула

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{B}|}(\cos \Phi + \varepsilon \sin \Phi), \tag{24}$$

где $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ — два винта, Φ — комплексный угол между их осями, ε — единичный винт, осями которого служат общие перпендикуляры осей винтов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Изложенные результаты Котельникова представляют собой реализацию мыслей Клиффорда, намеченных в его «Предварительном очерке бикватернионов», о винтах неевклидова пространства, причем если Клиффорд имел в виду только пространство Римана, то теория Котельникова в равной степени относится и к пространству Римана, и к пространству Лобачевского.

Интерпретация многообразия неевклидовых прямых. Приложения исчисления винтов неевклидовых пространств к геометрии этих пространств являются наиболее важными результатами докторской диссертации Котельникова. Эти результаты, так же как аналогичные результаты его магистерской диссертации, относящиеся к евклидову пространству, имеют два направления: 1) интерпретация многообразия прямых неевклидова пространства; 2) представление группы движений неевклидова пространства.

Интерпретация многообразия прямых основана на том, что винты, отличающиеся комплексным множителем, имеют одну и ту же пару осей. Поэтому пары взаимно полярных прямых неевклидова пространства трехмерного неевклидова пространства взаимно однозначно определяются совокупностями винтов, отличающихся комплексным множителем. Если мы нормируем эти винты условием равенства их модуля единице, то из всего множества винтов в случае пространства Лобачевского останутся только два единичных винта, отличающихся знаком, а в случае пространства Римана — четыре единичных винта, отличающихся знаком или множителем $\pm\frac{\omega}{k}$. Если для пространства Лобаческого рассматривать только собственные прямые, то одной прямой будут соответствовать два винта, так как из двух взаимных поляр в этом пространстве одна — собственная, а другая — идеальная. В то же время в случае пространства Римана паре взаимных поляр соответствуют четыре винта. Поэтому, рассматривая ориентированные прямые (лучи), мы получаем взаимно однозначное соответствие между лучами неевклидовых пространств и единичными винтами.

Заметим, что вещественные координаты единичных винтов являются плюккеровыми координатами соответственных прямых: если мы определим прямую полярно сопряженными точками с координатами x_0, x_1, x_2, x_3 и y_0, y_1, y_2, y_3, нормированным условием

$$x_0^2 + k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = k^2 \tag{25}$$

и связанными условием полярной сопряженности

$$x_0y_0 + k^2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = 0, \tag{26}$$

а также определим плюккеровы координаты (56)* , то комплексные числа

$$\left.\begin{aligned} P_1 = \frac{1}{k}(p_{01} + p_{23}\omega), \quad P_2 = \frac{1}{k}(p_{02} + p_{31}\omega) \\ P_3 = \frac{1}{k}(p_{03} + p_{12}\omega) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

можно рассматривать как комплексные координаты единичного винта. В самом деле,

$$\begin{gathered} P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = \frac{1}{k^2}[(p_{01} + p_{23}\omega)^2 + (p_{02} + p_{31}\omega)^2 + \\ + (p_{03} + p_{12}\omega)^2] = \frac{1}{k^2}[p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2 + \\ + k^2(p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2) + 2(p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12})\,\omega]. \end{gathered} \tag{28}$$

* Формулы из гл. III.

Но

$$P_{01}^2 + P_{02}^2 + P_{03}^2 + k^2(P_{23}^2 + P_{31}^2 + P_{12}^2) = (x_0y_1 - x_1y_0)^2 + (x_0y_2 - x_2y_0)^2 + (x_0y_3 - x_3y_0)^2 + k^2[(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2] = \frac{1}{k^2}\{[x_0^2 + k_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)][y_0^2 + k^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)] - [x_0y_0 + k^2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)]^2\} = k^2, \tag{29}$$

а с другой стороны, плюккеровы координаты связаны соотношением (57) *. Подставляя (29) и (57) в (28), мы получаем

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1 \tag{30}$$

Формула (21) показывает, что при $|A| = |B| = 1$ комплексный угол между двумя винтами, представляющими две прямые, совпадает с комплексным углом между этими прямыми. Из (22) следует, что оси винта, который является винтовым произведением двух винтов, представляющих две прямые, совпадают с общими перпендикулярами этих прямых.

Два ортогональных единичных винта $(\acute{A}B) = 0$ представляют две прямые, пересекающиеся под прямым углом (в этом случае $\Phi = \varphi + \omega\delta = \pi/2$, т. е. $\varphi = \pi/2$, $\delta = 0$). Отсюда следует, что множество единичных винтов, лежащих в одной комплексной плоскости (ортогональных одному винту), представляет множество перпендикуляров к одной прямой, т. е. щетку прямых.

Вместо единичных винтов можно говорить о точках комплексной сферы единичного радиуса в комплексном евклидовом пространстве, координаты которого являются комплексными числами соответственного вида. Тогда мы получим, что множество лучей неевклидова пространства взаимно однозначно изображается комплексной сферой, причем комплексный угол между прямыми равен сферическому расстоянию соответственных точек комплексной сферы, а щетки прямых изображаются большими кругами комплексной сферы.

Представление группы неевклидовых движений. Так как всякое взаимно однозначное преобразование множества лучей неевклидова пространства, сохраняющее их стационарные расстояния, т. е. их комплексный угол,

* Формула из гл. III.

является движением неевклидова пространства и обратно, а всякое взаимное однозначное преобразование комплексной сферы, сохраняющее сферическое расстояние ее точек, является вращением этой сферы и обратно, мы получаем, что движения неевклидова пространства изображаются вращениями комплексной сферы и обратно.

Котельников показывает, что, так же как в случае евклидова пространства, всякому бикватерниону единичного модуля $\cos\Phi + \varepsilon\sin\Phi$ соответствует винтовое движение

$$\boldsymbol{A} = \left(\cos\frac{\Phi}{2} + \varepsilon\sin\frac{\Phi}{2}\right)\boldsymbol{B}\left(\cos\frac{\Phi}{2} - \varepsilon\sin\frac{\Phi}{2}\right), \quad (31)$$

переводящее луч, определяемый единичным винтом $\boldsymbol{B}$, в луч, определяемый единичным винтом $\boldsymbol{A}$, причем осями этого движения являются оси винта ε; угол φ поворота и длина δ сдвига определяются комплексным числом $\Phi = \varphi + \delta\omega$. Этим устанавливается гомоморфное соответствие между группой бикватернионов единичного модуля и связной группой движений соответственного неевклидова пространства, причем одному движению отвечают два бикватерниона, отличающиеся знаком.

Заметим, что если представить бикватернионы единичного модуля комплексными матрицами, поставив в соответствие бикватерниону $A + Bi + Cj + Dk$ матрицу

$$\begin{pmatrix} A + Di & B + Ci \\ -B + Ci & A - Di \end{pmatrix} \quad (32)$$

с единичным определителем (A, B, C, D — комплексные числа вида $a + b\omega$, где мнимые единицы ω и i перестановочны между собой), то указанные матрицы образуют так называемое спинорное представление связной группы движений неевклидова пространства; векторы двумерного комплексного пространства, линейно преобразуемые этими матрицами, называются спинорами неевклидова пространства.

Так же как для евклидова пространства, показывается, что бесконечно малые преобразования группы движений неевклидова пространства взаимно однозначно изображаются произвольными винтами, причем коммутатор двух бесконечно малых преобразований только комплексным множителем отличается от винтового произведения соответственных двух винтов.

Применения к механике. Винтовое исчисление в неевклидовых пространствах допускает применение к механике в этих пространствах винтовое исчисление, используемое в механике в евклидовом пространстве. Такое применение основано на том, что система сил, приложенных к системе материальных точек в неевклидовом пространстве, сводится к винту

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{m}\omega, \tag{33}$$

а движение жесткой системы точек в этом пространстве в каждый момент определяется винтом

$$\Omega = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v}\omega \tag{34}$$

Вектор $\boldsymbol{f}$ и ротор $\boldsymbol{m}$, составляющие винт $\boldsymbol{F}$, называются соответственно главным вектором и главным ротором системы, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ и ротор $\boldsymbol{v}$, составляющие винт Ω, можно рассматривать как векторы угловой и линейной скорости. Определяется также винт количеств движения: если скорость точки P_i системы с массой m_i описывается вектором $\boldsymbol{v}_i$, то, составляя векторы $\mathbf{g}_i = m_i\, \boldsymbol{v}_i$ и поступая с ними так же, как с силами, мы получим винт

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}\omega \tag{35}$$

С помощью этих понятий доказываются теоремы, аналогичные механическим теоремам «Винтового счисления». В частности, в неевклидовых пространствах, так же как в евклидовом пространстве, имеют место теоремы о винтовых интегралах и о связи этих интегралов с группами движений.

В своей «Проективной теории векторов» Котельников полностью перенес всю теорию, построенную им в «Винтовом счислении», на неевклидовы пространства Лобачевского и Римана и создал законченную теорию винтов этих пространств, а также нашел весьма важные применения указанной теории к геометрии неевклидовых пространств.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ В КИЕВЕ И КАЗАНИ

Киевский политехнический институт. После защиты докторской диссертации Александр Петрович был избран по конкурсу заведующим кафедрой теоретической механики в организованный в 1898 г. Киевский политехнический институт (КПИ); первым ректором этого института был выдающийся ученый В. Л. Кирпичев. Здесь Котельников работает с 1899 по 1903 г.: он читает теоретическую и аналитическую механику на механическом, химико-технологическом и инженерном факультетах — первых факультетах, открытых в КПИ.

Александр Петрович организует кабинет теоретической механики. Приведем его заметку «Кабинет теоретической механики», которая была напечатана в юбилейном сборнике, посвященном 25-летию этого института(1923 г.)[1]: «Кабинет теоретической механики имеет педагогическое и научное значение. С одной стороны, в нем должны быть собраны модели и приборы, которые иллюстрировали бы законы и теоремы механики на реальных образцах и помогали бы студентам лучше усвоить основные ее положения; с другой стороны, в кабинете должны быть собраны приборы, имеющие научное значение, и изготовляться модели, чертежи и диаграммы, которые помогали бы выяснить различные научные вопросы. Из имущества кабинета интересно отметить: три гипсовые модели — а) софокусные поверхности второго порядка, б) и в) кривые,

[1] Юб. сб. «КПИ — XXV лет (1898—1923)». Киев, 1924, стр. 176 (на укр. яз.).

которые описывает сферический маятник; две нитяные модели — а) однополый гиперболоид, б) гиперболический параболоид; две проволочные модели цилиндроида; стробоскоп для иллюстрации колебаний маятника, движения волн и др.; маятник для иллюстрации явления резонанса; приборы для иллюстрации вращения твердого тела по инерции около неподвижной точки (движение Пуансо); прибор для измерения моментов инерции; гироскоп и гироскопический шар; машину Теплера для иллюстрации теорем механики о сложении и разложении сил, пар и т. д.».

В 1903 г. в Киеве А. П. Котельников женился на Варваре Петровне Литвиненко (1885—1921). От этого брака родились дочь Татьяна (в 1905 г.) и сыновья — Владимир (в 1908 г.) и Всеволод (в 1911 г.).

«Механика». В Киеве в 1901 и 1902 гг. двумя изданиями выходит учебник Котельникова «Механика». Учебник, объемом 230 страниц, состоит из введения и трех разделов — статики, кинематики и динамики. Изложение материала курса на основе векторного исчисления является для того времени необычным. Нужно думать, что здесь автор выступил как геометр. Возможно, некоторое влияние на методику построения курса оказал академик О. И. Сомов, который впервые в учебной литературе по механике применил векторное исчисление. В свою очередь Котельников оказал влияние на молодого тогда выдающегося ученого П. В. Воронца [2], ставшего пропагандистом векторного изложения теоретической механики. Очевидно, этому в значительной степени содействовала совместная работа Котельникова и Воронца на кафедре теоретической механики КП .

Изложение статики начинается с определения силы. Это определение близко к ньютонову, так как Котельников, так же как и Ньютон, рассматривает силу как причину, производящую или изменяющую движение материальных тел. Построение аксиоматики в этом учебнике отлично от ряда современных курсов. В качестве аксиом здесь выступают законы Ньютона. Излагая закон инерции, Котельников правильно указывает, что тело не может самопроизвольно изменить свое движение. Изменение мо-

[2] О научном наследии П. В. Воронца см.: Г. Н. Савин, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин. Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики.

жет произойти лишь в результате присутствия других тел, т. е., выражаясь современным языком, в результате взаимодействия с другими телами. В качестве второй аксиомы он излагает закон независимости единовременного действия сил. Третьей аксиомой в рассматриваемом курсе принимается правило параллелограмма сил, причем установлению этого правила предшествует сложение двух сил, действующих по одной прямой. После четвертой аксиомы об абсолютно твердом теле следует теорема о переносе силы вдоль линии ее действия, называемая Котельниковым принципом перенесения точки приложения силы. Вслед за изложением четырех аксиом помещены элементы векторной алгебры. Выражение проекции вектора на ось в книге дано не как определение, а как теорема. Следующие параграфы посвящены вопросу о сложении сил, приложенных в точке; изложение сопровождается рассмотрением задач.

Далее излагаются геометрическая и аналитическая теории системы сходящихся сил и устанавливаются условия ее равновесия, рассматриваются сложение и разложение параллельных сил аналитическим способом, приводится теория пар сил. Момент пары сил рассматривается как вектор и называется линейным моментом пары. При этом Котельников устанавливает условия равновесия системы пар сил. Переходя к изложению вопроса о сложении сил, как угодно приложенных к твердому телу, он вводит понятие о моменте силы относительно точки. Доказывается известная теорема Пуансо и рассматриваются случаи приведения системы сил к простейшему виду. При этом большое внимание уделяется силовому винту (динаме). В разделе «Аналитические формулы сложения сил» вводится понятие о моменте силы относительно оси и выводится условие равновесия свободного твердого тела. И только в этой главе Котельников доказывает теорему о трех силах, причем более строго, чем обычно. Оригинально и доходчиво приводится доказательство теоремы Вариньона. Здесь автор обращает внимание на то, что теорема Вариньона облегчает вычисление момента силы относительно оси. Необычно название скалярного произведения двух векторов как геометрического.

В следующей главе под названием «Плоская система сил» последняя рассматривается как частный случай пространственной системы сил. Здесь же говорится о силовом винте, эквивалентном плоской системе сил, и выводятся аналитические условия ее равновесия. Далее автор останавливается на «параллельных силах», вводит понятие момента силы относительно плоскости и центра параллельных сил и устанавливает формулы для координат центра параллельных сил. В главе «Центр тяжести» рассмотрены частные случаи определения центров тяжести линий, поверхностей, объемов и доказываются теоремы Гюльдена. В следующей главе «Равновесие несвободного тела» вводится понятие о связи и реакции связи, причем последняя определяется очень удачно. Затем приводится принцип об освобождаемости от связей и понятие о трении, устанавливаются условия равновесия несвободного твердого тела. Отдельно обсуждается вопрос о равновесии системы материальных тел. И только здесь излагается третий закон Ньютона и в необычной форме приводится принцип затвердевания. В разделе «Статика» говорится об учении о перемещениях твердого тела и рассматривается его движение — простейшее и плоскопараллельное. В отличие от ряда авторов современных учебников, Котельников рассматривает скольжение первого и второго рода. После этого он доказывает теоремы Шаля и Пуансо и останавливается на вопросе об аксоидах. К сожалению, при изучении движения тела с неподвижной точкой Котельников применяет не теорему Эйлера, а теорему Даламбера, что делает изложение более громоздким. Тема «Синтез движений твердого тела» (сложение поступательных движений, вращательных движений вокруг пересекающихся и параллельных осей, пара вращений) излагается Котельниковым не так, как обычно, а гораздо удачнее. Хорошо изложен вопрос об аналогии между статикой и кинематикой твердого тела. Далее автор останавливается на теме «Работа сил», рассматривая этот вопрос и для случая движения материальной точки и для твердого тела. После этой темы следует «Принцип возможных перемещений» и некоторые его приложения»; изложение указанных вопросов методически хорошо продумано.

Заметим, что при рассмотрении принципа возможных перемещений автор говорит о всех приложенных к системе силах, не вводя понятия об идеальных связях.

В разделе «Кинематика» последовательно рассмотрены вопросы о скорости, ускорении и сложном движении точки, ограниченные случаем переносного поступательного движения. Здесь помещен оригинальный и легко усвояемый вывод формул для определения касательного и нормального ускорений точки. Обращает внимание тот факт, что вопросы кинематики твердого тела изложены в разделе «Статика». Очевидно, этим самым автор стремился подготовить фундамент для изложения принципа возможных перемещений.

Последний раздел «Динамика» невелик. В нем рассматриваются законы Ньютона и связанные с ними понятия, затем дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки, вводится понятие о силе инерции и принцип Даламбера для материальной точки и системы; последний применяется затем к выводу дифференциальных уравнений простейших движений твердого тела. Отдельно освещен вопрос о моменте инерции и доказывается теорема Штейнера. Далее вводятся понятия количества движения и кинетического момента материальной системы и необычным путем, на основании свойств сил инерции, доказываются соответствующие теоремы об изменении этих величин.

Не менее оригинально изложение четырех теорем статики и динамики, относящихся к случаям, когда связи системы допускают поступательное движение в направлении одной координатной оси, поступательное движение в любом направлении, вращательное движение вокруг неподвижной оси, вращательное движение вокруг неподвижной точки. Здесь введены понятия о внутренних и внешних силах системы, а также об идеальных связях. Внутренние силы автор очень удачно называет взаимными. В заключение излагается теорема об изменении кинетической энергии для точки и системы. Курс заканчивается теорией малых колебаний математического и физического маятников.

«Аналитическая механика». В 1903 г. в Киеве выходит второй учебник А. П. Котельникова «Аналитическая механика», написанный на основе лекций по динамике точки системы, кинематике и динамике твердого тела, которые он читал в КПИ в 1902/03 году.

В динамике точки дан глубокий анализ законов Ньютона, изложены решения двух основных задач динамики при действии на точку различных сил, общие теоремы и соответствующие законы сохранения. Заслуживает внимания рассмотрение теории центральных движений, в частности движения планет. Затем исследуются движение несвободной материальной точки, случай ее равновесия и принцип возможных перемещений. Отдельно рассматривается теорема об изменении кинетической энергии для несвободной материальной точки, которая применяется далее для определения реакции линии и поверхности, по которым точка движется. Динамика точки заканчивается изложением малых колебаний математического маятника.

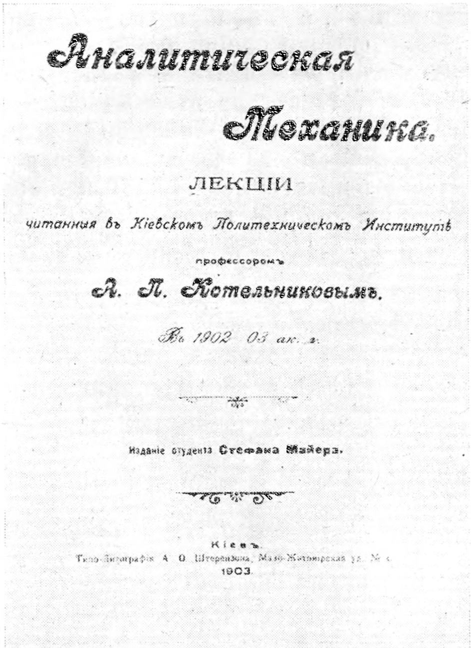
Механика системы начинается с принципа возможных перемещений, затем излагается принцип Даламбера, общее уравнение динамики и уравнения Лагранжа первого рода. Общие теоремы динамики получаются на основании принципа Даламбера — Лагранжа. После теоремы об изменении количества движения системы излагается теория удара. Из общих теорем динамики выводятся соответствующие законы сохранения и условия равновесия. Здесь же приведено понятие об устойчивости равновесия системы, а затем полная теория моментов инерции.

В кинематике твердого тела рассматриваются уравнения движения в простейших случаях, а также в случаях вращения твердого тела вокруг неподвижной точки и свободного твердого тела. Нельзя признать удачным изложение теоремы о вычислении кинетической энергии твердого тела в главе «Кинематика твердого тела».

Последняя глава книги посвящена динамике твердого тела: выводится дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси, излагается теория малых колебаний физического маятника с включением теоремы Гюйгенса; в заключение исследуется равновесие тяжелой однородной нити.

Снова Казанский университет. В 1904 г. А. П. Котельников возвращается в Казань, где получает по конкурсу кафедру чистой математики Казанского университета. Здесь с 1904 по 1914 г. он читает курсы аналитической, проективной и начертательной геометрии, высшей алгебры, дифференциального, интегрального и вариационного исчислений и интегрирования дифференциальных уравнений [3]. К ученикам Котельникова по Казанскому университету принадлежит нынешний заведующий кафедрой общей математики Казанского университета В. А. Яблоков.

[3] ЦГАТ, ф. 977. Дела физ.-мат. фак-та, 1904, д. 18, л. 8; 1905, д. 18, л. 13; 1906, д. 19; 1907, д. 48, л. 11; 1908, д. 28, л. 86; 1909, д. 21, л. 3; 1910, д. 18, л. 6; 1911, д. 27, л. 3; 1912, л. 27а, л. 3; 1913, л. 17, л. 84.



Аналитическая Механика.

ЛЕКЦІИ

читанныя въ Кіевскомъ Политехническомъ Институтѣ

профессоромъ

А. П. Котельниковымъ.

Въ 1902 03 ак. г.

Изданіе студента Стефана Майера.

Кіевъ.

Типо-Литографія А. О. Штерензона, Мало-Житомирская ул.

1903.

Титульный лист «Аналитической механики»

В 1906—1907 гг. Котельников был секретарем, а в 1910 г. деканом физико-математического факультета. Котельников создает геометрический кабинет и принимает деятельное участие в его оборудовании. Впоследствии этот кабинет с его богатой библиотекой явился материальной базой для создания научно-исследовательского института математики и механики при Казанском университете. С 1911 по 1914 г. Котельников читает также избранные отделы высшей математики на Высших педагогических курсах, в 1907—1913 гг. он руководит студенческим физико-математическим кружком (до него кружком руководил А. В. Васильев), состоит членом Совета и товарищем председателя Физико-математического общества.

Обобщение гауссовой средней. 29 сентября 1907 г. на заседании общества Котельников сделал доклад «Об ангармоническом отношении», причем в протоколе заседания отмечена «обширность сообщенных им новых результатов и обобщений» [4], а 8 ноября 1908 г.— доклад «Обобщение гауссовой средней величины» [5].

По этим же вопросам Котельников выступил 29 декабря 1909 г. на XII съезде русских естествоиспытателей и врачей с докладами «Обобщение средней арифметико-геометрической» и «Графическое построение периодов эллиптического интеграла»[6]. Гауссовой средней чисел a и b называется общий предел последовательностей $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ и $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, где $a_0 = a$, $b_0 = b$; обратная величина этой средней равна некоторому определенному эллиптическому интегралу. Котельников показал, что для четырех комплексных чисел a, b, c, d имеются две аналогичные средние m и n причем m — общий предел последовательностей $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ и $b_{n+1} = \frac{a_n b_n - c_n d_n + \sqrt{\Delta_n}}{a_n + b_n - c_n - d_n}$, а n — общий предел последовательностей $c_{n+1} = \frac{c_n + d_n}{2}$ и d_{n+1}, отличающейся от b_{n+1} знаком перед $\sqrt{\Delta_n}$, где $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$, $d_0 = d$ и $\Delta_n = \sqrt{(a_n - b_n)(b_n - c_n)(a_n - d_n)(b_n - d_n)}$. Тогда число $\frac{2\pi i}{m - n}$ равно эллиптическому интегралу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}},$$

взятому по некоторому контуру. Построение периодов этого интеграла основано на изящном построении чисел b_{n+1} и d_{n+1} по a_n, b_n, c_n, d_n.

В 1910 г. Котельников активно участвовал в обсуждении доклада Д. Н. Зейлигера о работе Г. Минковского «Пространство и время», в которой дается геометрическая интерпретация механики специальной теории относительности [7].

«Курс аналитической геометрии». В 1909 и 1910 гг. выходит литографированное издание учебника А. П. Котельникова «Курс аналитической геометрии»; первый выпуск учебника посвящен геометрии на плоскости, а

---

[4] Известия КФМО, т. 16, № 1, 1908, стр. 3.

[5] Там же, т. 16, № 3, 1908, стр. 41.

[6] Дневник XII съезда русских естествоиспытателей и врачей. М., 1909—1910, Дневник № 3, стр. 1—2.

[7] Известия КФМО, т. 16, № 4, 1910, стр. 77.

второй — геометрии в пространстве. Особенностью этого курса является то, что в обоих выпусках имеется введение, содержащее теорию векторов. Курс Котельникова является одним из первых курсов аналитической геометрии, в которых излагается и применяется векторное исчисление

Киевский университет. В 1914 г. Котельников вернулся на родину жены — в Киев, где начал работать на кафедре математики Киевского университета. Семья его в связи с начавшейся войной и эвакуацией Киевского университета в Саратов осталась в Казани и только четыре года спустя переезжает в Киев вместе с сестрой Е. П. Котельниковой. В 1921 г. Александра Петровича постигло большое горе — его жена и сестра скончались во время эпидемии сыпного тифа. Значительно позже, в 1934 г., Котельников женился на Антонине Владимировне Розановой.

В Киевском университете Котельников читал курсы сферической тригонометрии, начертательной, дифференциальной, проективной и неевклидовой геометрии. К его ученикам по Киевскому университету принадлежат Б. Н. Делоне, Ю. Д. Соколов, А. Л. Наумов и Т. В. Путята. Одновременно Котельников был профессором математики Киевских высших женских курсов, где читал курс дифференциальных уравнений; с 1920 по 1924 г. он занимал кафедру теоретической механики в Киевском политехническом институте. В этот же период в течение двух лет Котельников читал избранные отделы высшей математики на Высших педагогических курсах при Киевском учебном округе и два года состоял председателем Киевского физико-математического общества.

С первых лет революции Котельников прочно занимает место в рядах той части русской интеллигенции, которая служила народу и стремилась распространять знания в массах. В 1920—1922 гг. Александр Петрович преподавал элементарную механику рабочим сахарной промышленности.

В этот же период он готовит второе издание своей «Механики», вышедшей в 1925 г. под названием «Введение в теоретическую механику». В этом учебнике статике посвящена 181 страница, кинематике — 28 страниц, а динамике 53 страницы.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ

Работа А. П. Котельникова о геометрии пространства — времени. Открытие в 1905 г. Альбертом Эйнштейном специальной теории относительности придало интересу Котельникова к вопросам, находящимся на стыке геометрии и механики, новое направление. Мы уже отмечали, что в 1910 г. он принял активное участие в обсуждении работы Минковского, посвященной геометрическим вопросам механики специальной теории относительности.

29 апреля 1923 г. Котельников выступает на заседании Московского математического общества с докладом «Принцип относительности и геометрия Лобачевского». Об этом же он докладывает в сентябре того же года в Киеве на публичном объединенном заседании научно-исследовательских кафедр Киѐва, посвященном принципу относительности, и 25 февраля 1926 г. — на публичном заседании Казанского физико-математического общества в день празднования столетия неевклидовой геометрии. Доклад был опубликован в 1927 г. в сборнике, посвященном памяти Н. И. Лобачевского.

В 1927 г. в «Известиях Казанского физико-математического общества» был напечатан отзыв Котельникова на работы югославского ученого Владимира Варичака, присланные Казанскому физико-математическому обществу на соискание премии им. Лобачевского; большая часть работ посвящена связи между теорией относительности и геометрией Лобачевского. Отзыв содержит критику работ Варичака с точки зрения результатов Котельникова, изложенных в указанном докладе.

В первой части «Принципа относительности и геометрии Лобачевского» излагается история установления связи между этими двумя теориями. Уже в первых работах, посвященных теории относительности Эйнштейна, стали высказываться мысли о том, что между теорией относительности и геометрией Лобачевского должна существовать глубокая внутренняя связь. Эти мысли в значительной степени подсказывались следующими соображениями: геометрия Лобачевского в малых областях весьма близка к геометрии Евклида, и различие между ними выступает только при рассмотрении больших областей; в геометрии Лобачевского существенную роль играет константа — «радиус кривизны», и если считать эту константу равной бесконечности, мы получим геометрию Евклида. С другой стороны, механика Эйнштейна при малых скоростях весьма близка классической механике Галилея — Ньютона; различие между ними выступает только при рассмотрении больших скоростей: в механике Эйнштейна существенную роль играет константа — скорость света, и, если счесть эту константу равной бесконечности, мы получим механику Галилея — Ньютона.

Минковский [1] показал, что в теории относительности следует рассматривать события, т. е. материальные точки с координатами x, y, z в момент времени t как точки четырехмерного пространства с координатами x, y, z, t, в котором за расстояние между двумя событиями (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) принимается число d, определяемое соотношением

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2, \quad (1)$$

где c — скорость света.

Число d вещественно, если существует такая система координат x, y, z, t, в которой данные события одновременны; в этом случае число d равно расстоянию между этими событиями в указанной системе координат. Число d чисто мнимо, если существует такая система коорди-

[1] Г. Минковский. Время и пространство. В кн.: Г. А. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн. Г. Минковский. Принцип относительности. М.— Л., 1935, стр. 181—203.

нат, в которой данные события имеют одинаковые пространственные координаты; в этом случае число d равно $i\,|\,t_1 - t_2\,|$, где t_1, t_2 — временные координаты этих событий в указанной системе координат. Число d равно 0, если данные события можно соединить лучом света.

Минковский же показал, что формула перехода от одной системы координат в плоскости x,t к другой системе [в которой расстояние между событиями также выражается формулой (1)], движущейся относительно первой системы с постоянной скоростью v, имеет вид

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{1 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

Если положить

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th}\psi, \tag{3}$$

то это преобразование может быть переписано в виде

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\operatorname{ch}\psi - ct\operatorname{sh}\psi_1 \\ t' &= t\operatorname{ch}\psi - \frac{x}{c}\operatorname{sh}\psi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и, следовательно, может рассматриваться как поворот на мнимый угол $i\psi$.

Воспользовавшись этим выражением скорости, Зоммерфельд [2] с помощью гиперболического тангенса показал, что теорема сложения скоростей в механике Эйнштейна может быть представлена треугольником сферы мнимого радиуса.

Если вторая система координат движется относительно первой системы координат со скоростью v, а некоторая точка движется со скоростью v_1 по отношению к первой системе координат и со скоростью v_2 по отношению ко второй системе координат и угол между скоростями v и v_1 равен α, то закон сложения скоростей в механике Эйнштейна состоит в том, что скорость v_2 выражается

[2] A. Sommerfeld. Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie.— Phys. Z., Bd. 10, 1909, S. 826—829.

через скорости v и v_1 по формуле

$$\frac{v_2}{c}=\frac{\sqrt{\frac{v^2}{c^2}+\frac{v_1^2}{c^2}+2\,\frac{vv_1\cos\alpha}{c^2}-\left(\frac{vv_1\sin\alpha}{c^2}\right)^2}}{1+\frac{vv_1\cos\alpha}{c^2}}, \tag{5}$$

что равносильно

$$\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}{1+\frac{vv_1\cos\alpha}{c^2}}. \tag{6}$$

Полагая в формуле (6)

$$\frac{v}{c}=\operatorname{th}\psi,\qquad \frac{v_1}{c}=\operatorname{th}\psi_1,\qquad \frac{v_2}{c}=\operatorname{th}\psi_2, \tag{7}$$

т. е.

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{\operatorname{ch}\psi},\qquad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{\operatorname{ch}\psi_1},$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{\operatorname{ch}\psi_2}, \tag{8}$$

мы перепишем (6) в виде

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\psi_2}=\frac{1}{\operatorname{ch}\psi\operatorname{ch}\psi_1+\operatorname{sh}\psi\operatorname{sh}\psi_1\cos\alpha} \tag{9}$$

или

$$\operatorname{ch}\psi_2=\operatorname{ch}\psi\operatorname{ch}\psi_1+\operatorname{sh}\psi\operatorname{sh}\psi_1\cos\alpha \tag{10}$$

Сравнивая последнюю формулу с теоремой косинусов сферической тригонометрии для треугольника со сторонами ψ, ψ_1, ψ_2, в котором угол, противолежащий стороне ψ_2, равен $\pi-\alpha$ и

$$\cos\frac{\psi_2}{r}=\cos\frac{\psi}{r}\cos\frac{\psi_1}{r}-\sin\frac{\psi}{r}\sin\frac{\psi_1}{r}\cos\alpha, \tag{11}$$

Зоммерфельд заметил, что формула (10) совпадает с формулой (11), если положить в последней $r=i$.

Указанная связь послужила предметом исследования в целом ряде работ Варичака [3], который на основе указанной аналогии применил геометрию Лобачевского также к теории принципа Допплера, аберрации света, отражению света от движущегося зеркала и т. д.

Суть этой связи была указана Клейном в его работе «О геометрических основаниях Лоренцевой группы» [4]. Клейн доказывает изоморфизм группы Лоренца и группы движений пространства Лобачевского. Этот изоморфизм непосредственно вытекает из следующего положения: мир Минковского представляет собой, с одной стороны, четырехмерное псевдоевклидово пространство, и группа Лоренца является группой вращений этого пространства [в частности, преобразование Лоренца (2) является поворотом на мнимый угол $i\psi$ именно в этом пространстве]. С другой стороны, пространство Лобачевского можно рассматривать как сферу мнимого радиуса в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, а движения пространства Лобачевского — как вращения этой сферы [в частности, если радиус сферы равен i, поворот сферы (4) на мнимый угол $i\psi$ соответствует сдвигу в пространстве Лобачевского вдоль некоторой прямой на расстояние ψ].

Геометрическая интерпретация механики Эйнштейна. Основная часть работы Котельникова «Принцип относительности и геометрия Лобачевского» посвящена изложению геометрии псевдоевклидовой плоскости, трехмерного и четырехмерного псевдоевклидовых пространств и их проективных интерпретаций. Автор показывает, что, подобно тому как бесконечно удаленную прямую евклидовой плоскости и бесконечно удаленные плоскости трехмерного и четырехмерного евклидовых пространств можно считать соответственно прямой, плоскостью и трехмерным пространством Римана, так и бесконечно удаленную прямую псевдоевклидовой плоскости и бесконечно удаленные плоскости трехмерного и четырехмерного псевдоевклидовых пространств можно рассматривать как прямую, плоскость и пространство Лобачевского. Если при этом в случае евклидовых плоскости и пространств за расстоя-

[3] V. Varićak. Darstellung der Relativitätstheorie im dreidimensionalen Lobatschefskijschen Raume. Zagreb, 1924.

[4] Новые идеи в математике, вып. 5. СПб., 1914, стр. 144—174.

ние между двумя бесконечно удаленными точками принять угол между двумя лучами, направленными в эти точки, то в случае псевдоевклидовых плоскости и пространств расстояние между двумя бесконечно удаленными точками будет соответствовать числу ψ при условии, что угол между двумя лучами, направленными в эти точки, равен $i\psi$.

С этой точки зрения Котельников объясняет аналогию, установленную Зоммерфельдом: положения движущейся точки в определенные моменты времени определяют некоторую линию в четырехмерном пространстве — времени, и касательная к этой линии в данной точке пересекает бесконечно удаленную плоскость четырехмерного пространства — времени в некоторой точке. Если мы хотим узнать, какова скорость подобной точки по отношению к некоторой системе координат, движущейся прямолинейно и равномерно, мы должны исходить из положения, что эта система координат определяет в четырехмерном пространстве — времени прямую линию, также пересекающую бесконечно удаленную плоскость пространства —времени в некоторой точке. Из приведенного выше результата Минковского непосредственно следует, что искомая скорость v связана с мнимым углом $i\psi$ между касательной к линии, определяемой движением материальной точки, и прямой, определяемой движением системы координат, соотношением (3). Поэтому скорость v связана тем же соотношением с расстоянием ψ между бесконечно удаленными точками указанных прямых в метрике пространства Лобачевского на бесконечно удаленной плоскости четырехмерного пространства—времени. Если же дана не одна, а две системы координат, движущиеся равномерно и прямолинейно, то тем самым заданы две точки на бесконечно удаленной плоскости четырехмерного пространства — времени. В случае когда расстояния точки на этой плоскости, определяемой движущейся материальной точкой, до указанных двух точек равны ψ_1 и ψ_2, а расстояние между этими точками равно ψ, числа ψ_1, ψ_2 и ψ связаны теоремой косинусов (10). Но в то же время эти числа определяют скорости v_1, v_2 точки по отношению к двум системам координат и скорость v второй системы относительно первой по формулам (7); отсюда и вытекает закон сложения скоростей (6) или (5). При этом, как нетрудно проверить, угол между скоростями двух точек по отношению к одной системе равен углу между соответственными сторонами треугольника на бесконечно удаленной плоскости четырехмерного пространства — времени, вершины которого соответствуют этим точкам и системе координат.

Котельников устанавливает интересные связи с вопросами, рассматривавшимися в «Проективной теории векторов». Во-первых, он отмечает, что указанным видам плоскостей соответствуют определенные виды комплексных чисел. В самом деле, хорошо известно, что плоскость обычного комплексного переменного, если за расстояние между числами z_1 и z_2 принять модуль $|z_1 - z_2|$ их разности, является интерпретацией евклидовой плоскости. Если положить

$$z = x + y\omega \cdot \omega^2 = -1, \text{ то}$$

$$|x_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \tag{12}$$

Точно так же плоскость эллиптического комплексного переменного, если на ней определить расстояние таким же образом, представляет собой интерпретацию псевдоевклидовой плоскости: положив $z = x + y\omega$, $\omega = +1$, мы видим, что

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}) = (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 \tag{13}$$

При этом преобразование

$$z' = az, \tag{14}$$

где a — комплексное число единичного модуля, является поворотом на обеих плоскостях: в первом случае ($z = x + y\omega$ и $a = \cos\varphi - \omega\sin\varphi$) преобразование (14) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

т. е. является поворотом на угол φ. Во стором случае ($z = x + y\omega$ и $a = \operatorname{ch}\psi - \omega\operatorname{sh}\psi$) преобразование (14) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\operatorname{ch}\psi - y\operatorname{sh}\psi \\ y' &= -x\operatorname{sh}\psi + y\operatorname{ch}\psi, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

т. е. является поворотом на мнимый угол $i\psi$. В последнем случае ($y = ct$) мы получим формулы (4).

Во-вторых, отмечается, что координаты векторов напряженности электрического и магнитного полей, составляющих электромагнитное поле (эти координаты в электродинамике теории относительности рассматриваются как координаты единого тензора электромагнитного поля), можно считать координатами винта в пространстве Лобачевского, которым является бесконечно удаленная плоскость четырехмерного пространства — времени. Таким образом, представляется непосредственная возможность применения теории винтов неевклидова пространства к физике.

Геометрическая интерпретация механики Галилея—Ньютона. Помимо геометрической интерпретации механики Эйнштейна, непосредственно вытекающей из указанных выше результатов Минковского, Зоммерфельда и Клейна, в работе Котельникова дается оригинальная геометрическая интерпретация классической механики Галилея — Ньютона. Котельников излагает геометрию, которая возникает на проективной прямой и в трехмерном и четырехмерном проективном пространстве, когда на бесконечно удаленной или прямой плоскости вводится геометрия соответственно евклидовой прямой, евклидовой плоскости или трехмерного евклидова пространства. В настоящее время плоскости и пространства с такой геометрией называются полуевклидовыми. За расстояние между двумя точками четырехмерного полуевклидова пространства с координатами (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) принимается число d, определяемое соотношением

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \qquad (17)$$

За бесконечно удаленную плоскость трехмерного евклидова пространства, являющегося бесконечно удаленной плоскостью четырехмерного полуевклидова пространства, принимается бесконечно удаленная плоскость трехмерной плоскости $t = 0$, а за угол между двумя прямыми— расстояние между бесконечно удаленными точками этих прямых в евклидовой метрике на бесконечно удаленной плоскости

Число d равно нулю, если две точки отличаются только своими координатами t; угол между двумя прямыми равен бесконечности, если бесконечно удаленная точка одной из этих прямых лежит в бесконечно удаленной плоскости евклидова пространства.

Котельников отмечает, что, подобно тому как плоскость обычного и эллиптического комплексного переменного, если за расстояние между числами z_1 и z_2 принять модуль $|z_1 - z_2|$ их разности, является интерпретацией евклидовой и псевдоевклидовой плоскости, плоскость параболического комплексного переменного, если на ней определить расстояние таким же образом, является интерпретацией полуевклидовой плоскости: когда $z = x + y\omega$ и $\omega^2 = 0$, то

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} = (x_1 - x_2)^2 \qquad (18)$$

При этом преобразование (14), где a — комплексное число единичного модуля, является поворотом на полуевклидовой плоскости: когда $z = x + y\omega$ и $a = 1 - \varphi\omega$, преобразование (14) имеет вид

$$x' = x, \quad y' = y - \varphi x, \qquad (19)$$

т. е. является поворотом на угол φ.

Но переход от одной системы координат в плоскости x, t к другой системе, движущейся относительно первой системы с постоянной скоростью v, имеет вид

$$x' = x - vt, \quad t' = t, \qquad (20)$$

т. е. если эта плоскость представляет собой полуевклидову плоскость, то переход можно считать поворотом на угол $\varphi = v$.

Поэтому, рассматривая пространство — время механики Галилея — Ньютона как четырехмерное полуевклидово пространство, каждую материальную точку с пространственными координатами x, y, z и временной координатой t можно изображать точкой этого пространства с координатами x, y, z, t. Здесь скорость движущейся точки по отношению к некоторой системе координат, движущейся равномерно и прямолинейно, также равна углу между касательной и кривой, определяемой движением точки, и прямой, определяемой движением системы координат. Иными словами, скорость равна расстоянию между бесконечно удаленными точками этих прямых в евклидовой метрике на бесконечно удаленной плоскости четырехмерного пространства — времени. При наличии не одной, а двух систем координат, движущихся равномерно и прямолинейно, на бесконечно удаленной плоскости четырехмерного пространства — времени задаются уже не одна, а две точки. Если расстояния точки на этой плоскости, определяемой движущейся материальной точкой, до указанных двух точек равны v_1 и v_2, а расстояние между этими точками равно v, то числа v_1, v_2 и v связаны теоремой косинусов евклидова пространства

$$v_2^2 = v_1^2 + v^2 + 2v_1 v \cos\alpha \tag{21}$$

Но числа v_1, v_2 равны скоростям точки по отношению к двум системам координат, а число v равно скорости второй системы по отношению к первой, и эти скорости в силу закона сложения скоростей в механике Галилея — Ньютона связаны тем же соотношением (21).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ В МОСКВЕ

МВТУ и ЦАГИ. В 20-х годах А. П. Котельников переезжает в Москву в связи с избранием по конкурсу заведующим кафедрой математики Московского высшего технического училища имени Баумана (одно время МВТУ называлось Московским механико-машиностроительным институтом) и последние 20 лет своей жизни состоит профессором сначала кафедры математики, а позже кафедры теоретической механики этого института. Одновременно талантливый педагог вел курс теоретической механики и в других московских втузах: в Московском институте инженеров транспорта (МИИТ) с 1924 по 1930 г., в Московском химико-технологическом институте (МХТИ) с 1926 по 1930 г., в Московском лесотехническом институте (МЛИ) с 1928 по 1930 г., в Московском энергетическом институте (МЭИ) с 1933 по 1940 г. В 1929 г. Александр Петрович читал лекции по этой дисциплине в воскресном университете при МВТУ, а в 1930—1932 гг. был одним из активных организаторов Высших инженерно-педагогических курсов для подготовки преподавателей втузов; и на этих курсах он читал теоретическую механику.

С 1930 г. Котельников начал работать в Центральном гидроаэродинамическом институте (ЦАГИ), где руководил аспирантами-механиками и занимался изданием полного собрания сочинений крупнейшего русского механика Н. Е. Жуковского. Являясь главным редактором этого издания (1930—1939), Котельников не порывает связи с геометрами: с 1933 г. он — активный член семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, организованному и руководимому В. Ф. Каганом. Окончив работу по редактированию собрания сочинений Жуковского, Александр Петрович входит в состав редакции полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского.

О научной деятельности Александра Петровича в Москве мы расскажем в порядке создания его трудов.

Работа о точках Бурместра. 3 мая 1927 г. на соединенном заседании секций геометрии и математического естествознания Всероссийского съезда математиков Александр Петрович сделал доклад о «Свойствах и построении точек Бурместра», относящийся к теории плоских механизмов. Подробному изложению результатов по этому вопросу посвящена его большая работа «Точки Бурместра, их свойства и построение», опубликованная в «Математическом сборнике» в том же году.

Точкой Бурместра называется такая точка плоской фигуры, которая при пяти заданных положениях этой фигуры имеет пять соответственных положений на одной окружности. Случаем, когда пять положений точек фигуры лежат не на окружности, а на прямой, занимался еще до Бурместра П. Л. Чебышев. Поэтому этот частный случай точки Бурместра, соответствующий бесконечно большому радиусу кривизны, Котельников называет точкой Чебышева. Точки Бурместра имеют важное значение при построении приближенных направляющих механизмов. Как известно, точки Бурместра и центры кривизны их траекторий лежат на кривых третьего порядка, называемых строфоидами. Идея работы Котельникова о точках Бурместра состоит в преобразовании строфоид в окружности и в применении геометрии окружностей, что приводит к весьма простым способам построения точек Бурместра и Чебышева.

Метод Котельникова является обобщением методов других авторов. Он установил ряд новых свойств точек Бурместра и формулы для ускорений различных порядков точек подвижной плоскости, получил условия касания различных порядков окружности с траекторией, точки и уравнения, определяющие положения точек Бурместра. В итоге им исследованы случаи вырождения строфоид в прямую и окружность или в равностороннюю гиперболу. Эти исследования не утратили своего значения до наших дней. Многочисленные диссертации и научные публикации посвящены изучению теории и приложений точек Бурместра при конструировании механизмов. При этом многие авторы таких работ исходят из основополагающих исследований Котельникова.

«Заметка о графической динамике». В 1937 г. в «Трудах МММИ им. Баумана» опубликована статья Котельникова «Заметка о графической динамике», в которой автор устанавливает теоремы, связывающие ускорения точек твердого тела в плоскопараллельном движении с силами, приложенными к телу. Эти теоремы приводят к простым методам графического определения реакций связей и к решению ряда других задач динамики.

Котельников впервые ввел понятия о редуцированных ускорениях, поле векторов и кресте ускорений. Редуцированным ускорением точки он назвал отношение ее ускорения к квадрату угловой скорости, полем векторов — совокупность векторов, изображающих редуцированные ускорения точек тела, крестом ускорений — совокупность векторов, начала которых лежат на одной прямой (начальная прямая креста), а концы — на другой (конечная прямая креста), перпендикулярной к первой.

Пользуясь этими понятиями, Котельников доказывает следующие теоремы, относящиеся к неподвижным векторам: 1. Редуцированные ускорения точек, лежащих на одной прямой, принадлежат кресту ускорений. 2. Мгновенный центр O и центр кривизны C траектории точки A определяют крест ускорений; начальной линией служит нормаль точки A, конечной — поляра центра кривизны относительно круга, описанного из центра A радиусом AO. 3. Мгновенный центр вращения O и центры кривизны Γ, C огибающей и огибаемой определяют крест редуцированных ускорений; начальной прямой креста служит общая нормаль к огибаемой и огибающей в их точке касания, конечной — поляра центра кривизны огибающей относительно круга, описанного из центра кривизны C, огибаемой радиусом OC. Из последней теоремы следует, что два креста определяют 1-параметрическое семейство крестов и что существует один вектор, общий этим крестам.

На основании этих теорем решаются задачи построения: 1) по ускорениям двух точек — ускорения третьей точки; 2) по данному кресту редуцированных ускорений и редуцированному ускорению одной точки — ускорения двух других точек. Таким образом, оказывается, что ускорение одной точки и крест ускорений определяют поле ускорений, а три креста определяют 2-параметрическое семейство крестов и поле векторов.

Переходя к скользящим векторам, Котельников вводит понятие связки и пучка векторов. Под связкой векторов $(\boldsymbol{P}, A)$ он подразумевает совокупность векторов, получаемую при сложении данного вектора $\boldsymbol{P}$ со всевозможными векторами, проходящими через данную точку A — центр связки. Пучком векторов $(\boldsymbol{P}, l)$ он называет совокупность векторов, получаемую при сложении данного вектора $\boldsymbol{P}$ со всевозможными векторами, которые лежат на данной прямой l, имеют произвольную длину и могут быть направлены по этой прямой в разные стороны. Прямая l представляет собой ось пучка, а точка ее пересечения с прямой действия вектора $\boldsymbol{P}$ — центр пучка.

Котельников определяет уравнение связки и пучка векторов. При этом он ставит и решает следующие задачи: 1) разложить заданный вектор $\boldsymbol{P}$ на два составляющих вектора, проходящих через две данные точки (задача неопределенная); 2) разложить данный вектор на два таким образом, чтобы один проходил через данную точку, а другой лежал на данной прямой (задача неопределенная); 3) найти пересечение двух связок; 4) найти пересечение пучка со связкой.

Пусть тело, с которым неизменно связаны оси координат x, y, обладает динамической симметрией по отношению к плоскости xOy, т. е. центр тяжести тела S совпадает с началом координат, а ось O_z служит главной центральной осью инерции тела. Допустим, что действующие на тело силы приводятся к силе $\{X, Y\}$ в плоскости xOy, имеющей момент $N = xY - yX$ относительно начала координат, и что тело движется параллельно плоскости xOy. Пусть M — масса тела, а $I = Mk^2$ — момент инерции тела относительно оси Oz.

Котельников доказывает следующие теоремы, устанавливающие связь между силами и ускорениями.

Теорема I. Ускорение центра тяжести равно силе (здесь и в дальнейшем ускорение и сила — это соответственно редуцированные ускорение и сила, т. е. ускорение и сила, деленные на величину $M\omega^2$).

Теорема II. Ускорение полюса прямой, по которой действует сила, имеет своим концом центр тяжести.

Теорема III. 1. Если точка A (x, y) полярно сопряжена с точкой (X, Y), то она полярно сопряжена и с точкой W_a (p, q), где W_a — редуцированное ускорение. 2. Если точка A (x, y) полярно сопряжена с концом ускорения $W_a(p, q)$, то она полярно сопряжена и с точкой (X, Y), причем $W_a(p, q)$ лежит на линии действия силы. 3. Если конец ускорения точки A (x, y), т. е. точка W_a (p,q) лежит на линии действия силы $\{X, Y\}$, то точка A полярно сопряжена с точками (X, Y) и $W_a(p, q)$, т.е. является полюсом прямой, соединяющей эти точки.

Теорема IV. Если W_a', W_a'', W_a — концы ускорений точки A (x, y), соответствующие силам $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ и их равнодействующей P, а S — центр тяжести тела, то $\overline{SW_a} = \overline{SW_a'} + \overline{SW_a''}$.

С помощью этих теорем Котельников решает три задачи: 1) найти точку на прямой действия силы $\boldsymbol{P}$, ускорение которой коллинеарно с силой, и определить это ускорение; 2) по данной силе $\boldsymbol{P}$ построить ускорения точек тела; 3) по данным ускорениям двух точек тела построить силу $\boldsymbol{P}$.

Котельников доказывает также следующие теоремы: 1. Связка сил определяет крест ускорений; начальной линией креста служит поляра центра связки, а конечной— граница пучка сил, проходящих через центр тяжести и принадлежащих данной связке. 2. Крест ускорений определяет связку сил; центром связки служит полюс на чальной прямой креста, а границей пучка сил, проходящих через центр тяжести и принадлежащих связке, конечая прямая креста. 3. Пучок сил $(\boldsymbol{P}, l)$ определяет одну и только одну точку E (x, y), ускорение которой для всех сил пучка одно и то же. Точка E есть полюс оси пучка, и вектор SW_l равен силе пучка, проходящей через центр тяжести S. 4. Силы, которые сообщают в точке Е (x,y) одно и то же ускорение $\overline{EW_l}$, образуют пучок; поляра точки E служит осью пучка, $\overline{SW_l}$ — одна из сил пучка.

Пользуясь этими теоремами, Котельников решает задачи: 1) по данной силе $\boldsymbol{P}$ построить ускорение какой-нибудь точки тела; 2) определить силу, если даны три креста, и, следовательно, ускорения всех точек; 3) определить ускорения всех точек и силу, принадлежащую связке и соответствующую этим ускорениям, если дана связка сил и два креста, т. е. ускорение $\overline{AW_a}$ одной точки A; 4) определить ускорение всех точек и соответствующую силу пучка, если даны две связки сил, т. е. дан пучок сил и крест ускорений; 5) определить ускорение точек, если даны три связки сил; 6) тело движется так, что кривая a остается всегда в соприкосновении с кривой α и на тело действует сила P; определить реакцию в точке касания кривых a и α для данного их положения; 7) тело движется так, что две кривые a и a_1, с ним связанные, остаются всегда в соприкосновении с двумя неподвижными кривыми α и α_1; на тело действует сила P; определить реакции в точках касания a с α и a_1 с α_1.

В «Заметке о графической динамике» мы снова встречаемся с применением геометрических методов к решению задач механики, на этот раз применяется теория полюсов и поляр — один из существенных разделов проективной геометрии.

Редактирование собрания сочинений Жуковского. Будучи главным редактором этого собрания сочинений, Котельников проделал гигантскую работу, далеко выходящую за пределы редактирования. В частности, работа Жуковского «Действие волнующейся жидкости малой глубины на плавающие на ее поверхности тела» была подготовлена Александром Петровичем по двум черновым рукописям, некоторые части которых содержали почти исключительно математические выкладки без сопровождающего текста. Котельников написал к этой статье Жуковского три приложения. Текст статьи и приложения Котельникова впервые опубликованы в 85-м выпуске «Трудов ЦАГИ» в 1931 г. и помещены в IV томе полного собрания сочинений Н. Е. Жуковского, вышедшем в 1937 г. О содержании статьи и о своей работе над ней Котельников доложил на заседании Московского математического общества 31 декабря 1926 г. О второй рукописи Жуковского, над которой работал Александр Петрович, сообщил П. К. Худяков в докладе «Инженерная работа Н. Е. Жуковского» на заседании Политехнического общества [1].

Обе работы Жуковского посвящены плоской задаче о малых качаниях на волнах плавающего на поверхности жидкого тела с прямоугольным сечением. В работе «Действие волнующейся жидкости малой глубины» сделан ана-

[1] Сб. «Памяти проф. Н. Е. Жуковского». М., 1922.

лиз действия волнующейся тяжелой жидкости на тела, плавающие на ее поверхности, для случая, когда жидкость заключена в резервуаре с горизонтальным дном весьма малой глубины h по сравнению с горизонтальными размерами резервуара и напряжением тяжести g. Определив давление под плавающим телом, Жуковский рассматривает колебания центра инерции тела в вертикальном направлении, вращение тела вокруг неподвижной точки и, наконец, колебания, полученные в результате сложения вертикальных поступательных колебаний и колебаний при вращении тела вокруг неподвижной точки.

Как мы говорили, дополнения к этой работе Котельников изложил в двух приложениях. Кроме того, в процессе редактирования рукописей Жуковского возникла еще одна работа Котельникова, которую он опубликовал в виде приложения III.

«*Приложение I. Общая картина колебаний плавающего тела*». Рассмотрим, согласно Жуковскому, колебания тела, плавающего на поверхности спокойной или волнующейся жидкости. Проведем на теле, плавающем в спокойной жидкости, ватерлинию; S — середина ватерлинии и h' — расстояние S от дна тела, угол наклона ватерлинии и оси Ox — θ, координата точки S — ξ_0. Затем через начало и конец тела, плавающего в жидкости, проведем два вертикальных сечения A и B, перпендикулярных к направлению движения волн. Жуковский в своей работе рассмотрел вращение тела около его центра инерции и поступательное движение в вертикальном направлении. Он считал, что если точка S остается неподвижной или тело вращается вокруг центра инерции, который отстоит от S на расстоянии первого порядка малости, то сечения A и B или остаются неподвижными, или имеют малые перемещения. По сравнению с θ эти перемещения — малости второго порядка, поэтому Жуковский пренебрегает ими, считая A и B неподвижными.

В приложении I Котельников показал, что сечения A и B можно считать неподвижными и тогда, когда их перемещения будут малыми величинами первого порядка. Он показал также, что давление на тело в горизонтальном направлении при сделанном Жуковским предположении нужно считать равным нулю и движение центра инерции тела в горизонтальном направлении может быть только равномерным, но не колебательным.

С. А. Чаплыгин обратил внимание на то, что член, отброшенный Жуковским, имеет тот же порядок, что и оставленный в формуле. Спрашивается, не повлияет ли это на весь анализ Жуковского и на его результаты. Котельников показал, что если учесть второй член, отброшенный Жуковским, критерий устойчивости колебаний тела на волнах останется без изменения. Точно так же добавление отброшенного члена не изменяет характер вертикальных колебаний. Проведя все многочисленные вычисления с учетом отброшенного члена, Котельников пришел к следующим выводам.

1. Горизонтальные колебания не зависят от вертикальных и связаны с вращательными колебаниями около центра инерции тела.

2. Собственные вращательные колебания тела являются затухающими, поэтому такими же будут колебания тела в горизонтальном направлении.

3. Если тело качается на гармонической волне, то по истечении некоторого промежутка времени собственные колебания тела затухают и остаются только вынужденные колебания.

После детальных исследований колебания тела на гармонической волне Котельников переходит к изучению и построению траекторий точек плавающего тела. Положение всего тела, как оказалось, можно задать положением двух его точек. Если указанными точками являются центр качания и одна из круговых точек тела, качание тела на гармонической волне можно представить как движение шатуна вертикальной паровой машины, у которой ползун (крейцкопф) совпадает с центром качания, а шейка (палец кривошипа) — с круговой точкой. В том случае, когда положение тела определяется двумя его круговыми точками, движение тела можно представить как движение шатуна (антипараллелограмма), подвижные шарниры которого совпадают с круговыми точками, а неподвижные — с центрами их круговых траекторий.

В заключение приложения I Котельников останавливается на вопросе об изменениях, которые вносит в характер движения тела отброшенный Жуковским второй член, и приходит к следующим выводам.

1. При отсутствии второго члена изменяется значение двух коэффициентов в дифференциальном уравнении для угла. Это влечет за собой появление в выражении для

амплитуды вынужденных колебаний множителя, зависящего от степени устойчивости.

2. Изменяется характер горизонтальных колебаний. Точки, колебания которых происходят по вертикальным прямым, существуют только при гармонической волне. Центр инерции тела всегда будет двигаться по вертикальной прямой. Центр качания при изменении длины волны перемещается по прямой, проходящей через центр инерции тела, параллельно ватерлинии.

«*Приложение II. Давление жидкости на качающееся на волнах тело*». Это исследование Котельникова посвящено определению давления, производимого волнующейся жидкостью на плавающее на ее поверхности тело. Решение этого вопроса отсутствует в рукописи Жуковского, однако, как отмечает Котельников, формулы Жуковского позволяют составить представление о давлении, оказываемом волнующейся жидкостью на плавающее тело.

Котельников показал, что «первая часть давления на все дно представляет собой вертикальную равнодействующую, которая равна площади параболы, умноженной на 3», т. е. $\frac{2}{3h}\rho l^3 \ddot{\xi}_0 l$, где h — глубина дна, $2l$—длина тела, ρ — плотность жидкости. Вторая часть давления на дно зависит только от углового ускорения $\varepsilon = \ddot{\theta}$ и приводится к паре с моментом, равным $\frac{2}{45}\rho l^5 \ddot{\theta}$. Так как обе доли давления зависят от ускорений, то это отождествляет их с силами инерции. Третья часть давления жидкости, как показал Котельников, представляет собой гидростатическое давление.

Далее он решает более общую задачу об определении давления жидкости на любое тело, погруженное в нее, предполагая при этом, что давление в каждой точке жидкости пропорционально расстоянию точки до какой-нибудь наклонной плоскости. Котельников приходит к выводу: если давление жидкости в какой-нибудь точке пропорционально расстоянию точки по вертикальному направлению от некоторой горизонтальной или наклонной плоскости, то давление на тело, погруженное в жидкость, приводится к одной силе, приложенной к центру тяжести объема, вытесненного телом (при условии, что коэффициент пропорциональности равен весу единицы объема жидкости). Кроме того, направление указанной силы перпендикулярно плоскости, а ее проекция на вертикальную прямую равна весу вытесненного телом объема жидкости. Котельников применяет этот результат к вычислению третьей части давления жидкости на плавающее тело.

В заключение он отмечает, что первая доля давления влияет на увеличение массы плавающего тела в вертикальном направлении, т. е. на величину $\frac{2}{3h}\rho l^3$, а вторая вызывает увеличение момента инерции тела, т. е. величины $\frac{2}{45h}\rho l^5$. Оказывается, если присоединить к массе плавающего тела для вертикального направления массу $\frac{2}{3h}\rho l^3$, а к моменту инерции тела относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести тела, момент инерции $\frac{2}{45h}\rho l^5$, то качание тела на волнах можно рассматривать так, как если бы давление волнующейся жидкости на тело сводилось к исключительно гидростатическому давлению. Причем это давление должно приводиться к одной равнодействующей, направленной перпендикулярно волновой поверхности. Кроме того, точкой приложения равнодействующей должен быть центр тяжести объема жидкости, вытесненного плавающим телом, а вертикальная составляющая равнодействующей должна равняться весу вытесненной жидкости.

«*Приложение III. О малых гармонических колебаниях плоскости*». В этой статье Котельников исследует кинематические свойства малых гармонических колебаний независимо от динамических условий. При этом он рассматривает только колебания, происходящие параллельно плоскости.

Рассмотрим движение плоскости $x'O'y'$ и будем считать, что координаты полюса O' (ξ_0, η_0), а также угол поворота вокруг полюса θ являются гармоническими функциями времени с одним и тем же периодом, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= a\sin(\omega t + k_1), \\ \eta_0 &= b\sin(\omega t + k_2), \\ \theta &= \theta_0\sin(\omega t + k_0), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где амплитуды a, b, θ_0, начальные фазы k_1, k_2, k_0 и период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — постоянные величины. Кроме того, предполагается, что a, b, θ_0 — величины столь малые, что их произведениями и квадратами можно пренебречь [2].

Если координаты произвольной точки M подвижной плоскости относительно неподвижных осей — x и y, то, согласно формулам преобразования координат, получим

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi_0 + x' - y'\theta, \\ y &= \eta_0 + y' + x'\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где x' и y' — координаты точки M относительно подвижных осей $x'O'y'$. Подставляя значения ξ_0 и η_0 из (1), получим

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a\sin(\omega t + k_1) - y'\theta_0 \sin(\omega t + k_0) \\ y &= y' + b\sin(\omega t + k_2) + x'\theta_0 \sin(\omega t + k_0) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Уравнения (3) являются уравнениями движения произвольной точки движущейся плоскости.

Далее Котельников устанавливает существование на плоскости $x'O'y'$ точки $M(x', y')$, колебания которой происходит по прямой

$$Ax + By + C = 0$$

Подставляя в это уравнение значения x и y, получим, что коэффициенты при $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ и член, не зависящий от времени, обратятся в нуль. Следовательно, для определения x', y', A, B и C получим три уравнения

$$\left.\begin{aligned} A(a\cos k_1 - y'\theta_0 \cos k_0) + B(b\cos k_2 + x'\theta_0 \cos k_0) &= 0 \\ A(a\sin k_1 - y'\theta_0 \sin k_0) + B(a\sin k_2 + x'\theta_0 \sin k_0) &= 0 \\ Ax' + By' + C &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Если точка $M(x', y')$ расположена на прямой, определяемой уравнением

$$ab\sin(k_1 - k_2) + a\theta_0 x' \sin(k_1 - k_0) + b\theta_0 y' \sin(k_1 - k_0) = 0, \qquad (5)$$

то отношение $\frac{B}{A}$ не зависит от координат x', y', т. е.

$$\frac{B}{A} = -\frac{a\sin(k_1 - k_0)}{b\sin(k_2 - k_0)}.$$

[2] В силу малости угла θ $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$.

Поэтому можно положить

$$A = b\sin(k_1 - k_0), \quad B = -a\sin(k_1 - k_0).$$

Коэффициент C найдем из (4). Уравнение прямой, по которой движется точка M (x', y'), примет вид

$$b\sin(k_1 - k_0)(x - x') - a\sin(k_1 - k_0)(y - y') = 0 \quad (6)$$

Таким образом, получается, что все точки подвижной плоскости, расположенные на прямой (5), называемой центральной прямой, будут совершать колебания по прямым (6), перпендикулярным центральной прямой в моменты $t = \frac{\pi n - k_0}{\omega}$, где n — целое число. Амплитуда этих колебаний равна

$$R\sqrt{A^2 + B^2}, \quad (7)$$

где R определяется из уравнений

$$AR\cos\alpha = b\cos k_2 + x'\theta_0\cos k_0;$$
$$AR\sin\alpha = b\sin k_2 + x'\theta_0\sin k_0.$$

Как показал Котельников, наименьшей амплитудой обладает центральная точка, лежащая на центральной оси. Для нее $R = \pm 1$. Уравнения движения центральной точки k_0 имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0' + B\cos(\omega t + k_0) \\ y &= y_0' + A\cos(\omega t + k_0) \end{aligned}\right\}, \quad (8)$$

где

$$x_0' = -\frac{b}{\theta_0}\cos(k_2 - k_0), \quad y_0' = \frac{a}{\theta_0}\cos(k_1 - k_0)$$

Далее Котельников построением определяет положение центральной точки и любой другой точки на центральной прямой. Как видно из уравнения движения (3) любой точки M (x', y') подвижной плоскости, всякая точка, лежащая на центральной прямой, описывает эллипс.

Котельников пришел к выводу, что движение плоскости определяется движением двух ее точек. Если при этом одна из точек K колеблется прямолинейно, а вторая N движется по окружности, то гармонические колебания плоскости представятся как колебания шатуна паровой машины, крейцкопф (ползун) которой находится в точке K, а палец кривошипа, равномерно вращающегося с угловой скоростью ω, находится в точке N; шатуном здесь будет KN.

Гармонические колебания плоскости, по мнению Котельникова, можно охарактеризовать, построив центроиды. Для рассматриваемого случая он получает следующее уравнение для неподвижной центроиды:

$$\frac{x^2\theta_0^2}{\delta_0^2} - \frac{y^2}{\delta_0^2} = 1 \text{ или } y^2 = \delta_0^2 + \theta_0^2 x^2, \tag{9}$$

где δ_0 — длина вектора, проекции которого на неподвижные оси координат равны $a\sin(k_1 - k_0) = -B$, $\theta_0 \sin(k_2 - -k_0) = A$.

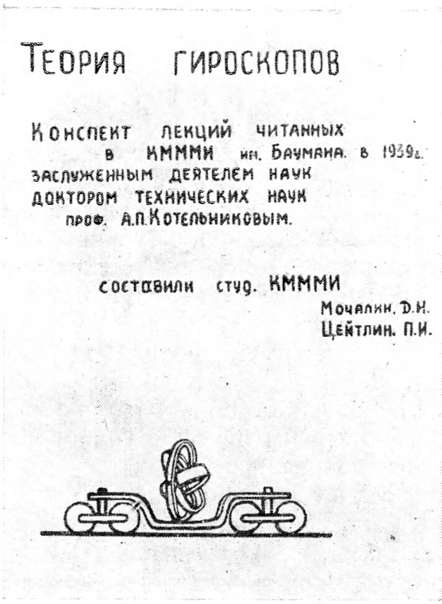
Как видно из (9), неподвижной центроидой является гипербола, центр которой находится в центральной точке K_0, вещественная ось равна δ_0, а угол между асимптотами равен $2\theta_0$.

В результате Котельников приходит к выводу, что гармонические колебания плоскости можно воспроизвести, заставив центральную прямую (5) катиться по гиперболе (9) без скольжения. При этом ординаты точек гиперболы равны амплитудам колебаний точек центральной прямой, которые колеблются по прямым, параллельным вещественной оси гиперболы между ее ветвями.

Эта работа Котельникова имеет большое значение при исследовании плоскопараллельного движения твердого тела, а также движения плоских механизмов. Она одинаково интересна и для теоретической механики и для теории механизмов и машин.

Примечание к работе Жуковского «Вихревая теория винта». К первой статье работы Жуковского «Вихревая теория гребного винта», точнее к § 2 этой статьи, где исследуется стационарность винтового вихревого шнура, Котельников написал важное примечание. Он показал простой путь для решения вопроса о протяжении точки M с массой, равной единице, кругом плотности ω, если сила притяжения обратно пропорциональна расстоянию между указанными взаимодействующими массами.

Сначала Котельников исследует притяжение точки M элементарным кольцом. В случае кольца конечной ширины он разрезает кольцо концентрическими окружностями


Теория гироскопов

Конспект лекций читанных
в КММИ им. Баумана. в 1939г.
заслуженным деятелем наук
доктором технических наук
проф. А.П.Котельниковым.

составили студ. КММИ
Мочалин. Д.Н.
Цейтлин. П.И.

Титульный лист «Теории гироскопов»

на элементарные кольца и определяет силу притяжения всего кольца как результирующую сил притяжения элементарных колец. Таким образом, он приходит к выводу, что в случае кольца конечной ширины получаются такие же результаты, как если бы кольцо притягивало точку M в предположении, что вся масса кольца сосредоточена в его центре, а точка M расположена вне кольца. Если же точка M находится внутри кольца, то кольцо не притягивает эту точку

При нахождении точки M на поверхности притягивающего ее круга с радиусом R на расстоянии r от центра круга (причем $r < R$) круг следует разрезать концентрической окружностью на круг радиуса r и на кольцо. Тогда сила притяжения точки M кругом радиуса r будет равнодействующей сил притяжения точки M кольцом и кругом радиуса r. Поскольку притяжение кольца на основании ранее сказанного равно нулю, то сила притяжения точки M кругом радиуса r с плотностью ω и массой $\pi r^2\omega$ будет равна:

$$F = \frac{\pi r^2 \omega}{r} = \pi r \omega$$

«Теория гироскопов». В 1939 г. издательство МВТУ выпустило книгу «Теория гироскопов», представляющую собой конспект лекций А. П. Котельникова, читанных в МВТУ. «Теория гироскопов» содержит обширный материал, включающий вопросы кинематики и динамики твердого тела с одной неподвижной точкой и некоторое их приложение. Работа объемом в 134 страницы состоит из 33 параграфов. Первые шесть параграфов относятся к кинематике твердого тела с неподвижной точкой, 18 параграфов — к динамике, а последние девять посвящены приложениям. Все изложенные в книге вопросы в своей совокупности образуют стройную теорию гироскопов.

В § 1—3 рассмотрены системы координат, углы Эйлера, кинематические уравнения Эйлера, теорема о распределении скоростей в теле, вращающемся вокруг неподвижной точки. Параграф 4 посвящен моментам инерции и эллипсоиду инерции, § 7—10 — вычислению кинетического момента и кинетической энергии тела, а также выводу динамических уравнений Эйлера, § 11—18 — случаям интегрируемости уравнений вращения тела с неподвижной точкой, установленным Эйлером и Лагранжем; приведена геометрическая интерпретация Пуансо. В § 14 излагается теория эллиптических функций Якоби, в § 18 — вывод уравнений движения гироскопа из уравнений Лагранжа II рода.

Характеристика движения гироскопа в общем и частных случаях дана в § 19 — 22. Здесь же подробно рассмотрены гироскопический момент и псевдорегулярная прецессия, специально исследован вопрос об устойчивости колебаний оси гироскопа вокруг вертикальной оси; составлены и проинтегрированы дифференциальные уравнения указанных малых колебаний оси гироскопа. Для приложений особенно важен § 25 — о влиянии трения на вращающийся волчок. В остальных параграфах (26—33) рассмотрены технические приложения теории гироскопов с двумя и тремя степенями свободы, в том числе гироскоп в кардановом подвесе, гирокомпас Сперри, однорельсовая железная дорога, гироскопический маятник в кардановом подвесе.

Лекции Котельникова написаны с исключительным мастерством, изложение материала отличается предельной ясностью. Несмотря на небольшой объем, книга охватывает широкий круг вопросов. Она не утратила своего значения и в настоящее время, будучи особенно полезной для студентов механико-приборостроительных факультетов. К сожалению, книга стала библиографической редкостью, ее нет даже в библиотеке МВТУ — в библиотеке учреждения, где она была издана.

Редактирование собрания сочинений Лобачевского. Закончив работу над изданием собрания сочинений Жуковского, Котельников сосредоточился па подготовке собрания сочинений Лобачевского, которая, как мы видели, была начата еще его учителем А. В. Васильевым.

Котельников написал для I тома этого собрания сочинений обзор первой работы Лобачевского о неевклидовой геометрии «О началах геометрии», собрал историко-библиографические сведения об этом сочинении, дал обширные примечания. В примечаниях он довел до конца ряд вычислений сложных определенных интегралов, значение которых было указано Лобачевским без вывода.

Работа Котельникова «Теория векторов и комплексные числа (Начала механики в неевклидовом пространстве)» была написана также для собрания сочинений Лобачевского. Первоначально предполагалось включить эту работу в виде приложения в один из томов собрания сочинений, но получилось так, что она была опубликована уже после смерти Котельникова в серии «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей» вместе с работой В. А. Фока «Некоторые применения неевклидовой геометрии Лобачевского в физике» под общим заголовком «Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике». Работа Котельникова посвящена краткому, но весьма продуманному с методической точки зрения изложению результатов «Проективной теории векторов».

* * *

За многолетние выдающиеся труды А. П. Котельникову были присвоены ученая степень доктора технических наук и почетное звание заслуженного деятеля науки и техники (1934 г.) Шесть лет спустя в связи с 75-летием со дня рождения и 50-летием научно-педагогической деятельности за выдающиеся заслуги в области теоретической механики он был награжден орденом Трудового Красного

Знамени. В 1943 г. Котельников получил Государственную премию второй степени.

6 марта 1944 г. на 79-году жизни Александр Петрович скончался от воспаления легких.

Сын А. П. Котельникова. Творческие традиции «династии» Котельниковых были продолжены и умножены старшим сыном Александра Петровича Владимиром Александровичем, который унаследовал от отца любовь к теоретическим исследованиям, соединяя их, так же как и отец, с техническими приложениями. В. А. Котельников окончил МЭИ в 1931 г. и получил специальность инженера-радиотехника. Разработку конкретных образцов аппаратуры связи, за которые Владимир Александрович был удостоен Государственной премии, он сочетал с разработкой теории радиосвязи и тесно связанной с ней математической теории информации. Уже в 1933 г. в работе «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи» Котельников-сын доказывает важную теорему теории информации о том, что передача непрерывной функции с ограниченным спектром сводится к передаче последовательности дискретных чисел [3]; впоследствии к этой теореме пришел также известный американский ученый Клод Шеннон. Теории радиосвязи и теории информации посвящена докторская диссертация В. А. Котельникова «Теория потенциальной помехоустойчивости», защищенная в 1947 г. и опубликованная в 1956 г. Такое применение научных методов, зародившихся в радиотехнике, для разработки математической теории представляло собой воплощение на новом этапе развития науки и техники идеи А. П. Котельникова о том, что «машины» могут играть роль научных методов, приводящих «к доказательству и открытию весьма важных теорем и принципов»; с этой идеей ученый выступил в своей речи «Винты и комплексные числа». В настоящее время В. А. Котельников — крупнейший советский ученый в области радиотехники и теории информации, в 1953 г. он был избран действительным членом Академии наук СССР, в 1964 г. ему и возглавляемой им группе ученых была присуждена Ленинская премия за радиолокационное исследование планет Венеры, Меркурия и Марса.

---

[3] См. А. А. Харкевич. Очерки общей теории связи, М., 1955, стр. 24, 231—233.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ИДЕЙ

Котельников и Штуди. Развитие идей Котельникова за рубежом связано главным образом с именем немецкого математика Эдуарда Штуди (1862—1930). Как мы указывали, Штуди еще в 1891 г. получил чисто алгебраическим путем теорему о связи между группой движений евклидова пространства и группой параболических бикватернионов единичного модуля, к которой впоследствии пришел и Котельников в «Винтовом счислении». В дальнейших исследованиях Штуди занялся связанными с указанной теоремой вопросами геометрии и механики. В 1899 г. он пришел к интерпретации Котельникова многообразия прямых евклидова пространства в своей работе «Новое представление сил механики с помощью геометрических фигур» [1], а в 1900 г. — к интерпретации Котельникова многообразия прямых неевклидовых пространств в своей работе «О неевклидовой и линейчатой геометрии» [2]. Результаты Штуди позже были изложены в его книге «Геометрия динам, охватывающих силы и винтовые образы геометрии»[3], в которой он упоминает работы Котельникова — «Винтовое счисление» и «Проективную теорию векторов» [4]. За-

[1] E. Study. Eine neue Darstellung der Kräfte der Mechanik durch geometrische Figuren.— Ber. math.- phys. Klasse der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 51, 1899.

[2] E. Study. Über Nicht-Euklidische und Linien-Geometrie; Jahresberichte der Deut. Math. Vereinigung, Bd. 2, 1902, S. 313—342.

[3] E. Study. Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung der Kräften und verwindte Gegenstände der Geometrie. Leipzig, 1903.

[4] Ibid., S. XI, 208.

падноевропейские математики познакомились с этими интерпретациями по работе Штуди, вследствие чего интерпретации известны там главным образом под названием «перенесения Штуди».

Теорема Нетер. Теорема Котельникова о винтовых интегралах получила значительное обобщение в работе «Инвариантные вариационные проблемы» [5] одного из крупнейших немецких математиков Эмми Нетер (1882—1935). Дочь известного алгебраиста Макса Нетер, Эмми Нетер была ученицей алгебраиста Гордана. В 1907 г. она защитила докторскую диссертацию по теории алгебраических инвариантов. В 1916 г., переехав в Геттинген, бывший в то время главным математическим центром Германии, Эмми Нетер расширяет тематику своих работ, перейдя от изучения алгебраических инвариантов к изучению дифференциальных инвариантов. Этот переход был связан с только что появившейся в то время общей теорией относительности Эйнштейна, переключившей внимание многих математиков и физиков от алгебраических проблем к дифференциальным. В указанной работе Нетер рассматривает задачи вариационного исчисления, которые допускают непрерывную группу преобразований, зависящую от одного или нескольких параметров. Она показывает, что в этом случае можно получить столько же первых интегралов дифференциального уравнения, к которому сводится решение задачи, сколько параметров в группе преобразований. Нетер рассматривает различные применения этой теоремы к механике, электродинамике и теории относительности. В случае классической механики теорема дает возможность получить первые интегралы уравнений движений системы, допускающей непрерывную группу преобразований. В том случае, когда эта группа — группа винтовых движений, теорема Нетер сводится к теореме Котельникова о винтовых интегралах.

Кроме теорем о дифференциальных инвариантах, Нетер успешно решает ряд алгебраических проблем, поставленных крупнейшим геттингенским математиком начала XX в. Давидом Гильбертом (1862—1943). С 1919 г. начинается самый блестящий период математического творчества

[5] E. Noether. Invariante Variationsprobleme.— Göttinger Nachrichten Math.-Phys. Kl., 1918, S. 235—257; см. также: Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, т. I. Изд. 2. М.— Л., 1933, стр. 248—252.

Нетер — период создания ею современной абстрактной алгебры. Эти работы Нетер [6] оказали исключительное влияние на все дальнейшее развитие математики XX в., которое протекает под знаком проникновения алгебраических понятий и алгебраических методов в самые различные математические теории [7]. Этот бурный процесс алгебраизации математики, в значительной степени обязанный работам Нетер, был подготовлен работами многих математиков конца XIX и начала XX в. Среди них следует назвать и работы А. П. Котельникова.

Эмми Нетер была вынуждена эмигрировать из Германии после прихода к власти фашистов и последние полтора года своей жизни провела в США. Нетер находилась в дружеских отношениях с рядом советских математиков, зимой 1928 г. она прочла курс абстрактной алгебры в Московском университете [8].

Применение винтового исчисления к механике. Винтовое исчисление Котельникова — Штуди применялось к механике и за рубежом и в нашей стране. Из зарубежных работ по этому вопросу наиболее известны работы Рихарда Мизеса, называвшего винты, так же как и Котельников, моторами [9].

В СССР большой цикл работ по применению винтового исчисления к кинематике механизмов принадлежит С. Г. Кислицыну и Ф. М. Диментбергу. Кислицын еще в 1938 г. ввел понятие винтового аффинора, т. е. линейного оператора в дуальном векторном пространстве, и применил его к кинематике твердого тела [10]. В 1940—1941 гг. Диментберг и Я. Б. Шор применили теорию винтов к теории пространственных механизмов, но еще не пользо-

---

[6] Идеи Нетер и их дальнейшее развитие подробно изложены в книге ее ученика Б. Л. Ван дер Вардена «Современная алгебра» (т. I—II. Изд. 2. М.— Л. 1947).

[7] См., например, Н. Бурбаки. Элементы математики. М., 1958—1968.

[8] П. С. Александров. Памяти Эмми Нетер.— Успехи математ. наук, вып. 2, 1936, стр. 255—265.

[9] R. Mises. Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik.— Z. angew. Mathem. u. Mechan., Bd. 4, № 2, 1924, S. 155—181; R. Mises. Anwendungen der Motorrechnung.— Ibid., Bd 4, № 3, 1924; Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.— М., 1934, стр. 145—148.

[10] С. Г. Кислицын. Винтовые аффиноры и некоторые их приложения к вопросам кинематики твердого тела. — Уч. зап. ЛГПИ им. Герцена, т. 10, 1938, стр. 269—300.

вались винтовым исчислением [11]. Оба эти направления были соединены в 1947 г., в результате чего появилось много исследований по применению винтового исчисления к теории шарнирных механизмов, теории зубчатых зацеплений и другим конкретным вопросам технической механики [12]. Работы по применению дуальных кватернионов к пространственным механизмам публиковались и за границей [13]. Различные аспекты применения винтового исчисления к механике подробно изложены в монографии Диментберга [14].

Применение винтового исчисления к геометрии. Как мы говорили, винтовое исчисление применялось к геометрии за рубежом главным образом под названием «перене-

---

[11] Ф. М. Диментберг, Я. Б. Шор. Графическое решение задач пространственной механики при помощи изображения в одной плоскости.— Прикладная математика и механика, т. 4, № 5, 1940, стр. 109—122; Я. Б. Шор. Об определении винтовых осей в пространственных механизмах.— Там же, т. 5, № 2, 1941, стр. 267—275.

[12] Ф. М. Диментберг. Конечные перемещения пространственного четырехзвенника с цилиндрическими парами и случаи пассивных связей.— Прикладная математика и механика, т. 11, № 6, 1947, стр. 593—602; он же. Общий метод исследования конечных перемещений пространственных механизмов и некоторые случаи пассивных связей. Труды семинара по ТММ при Ин-те машиноведения АН СССР, т. 5, вып. 17, 1948, стр. 5—39; он же. Определение положений пространственных механизмов. М., 1950; С. Г. Кислицын. Тензорный метод в теории пространственных механизмов.— Труды семинара по ТММ, т. 14, вып. 54, 1954, стр. 51—75; он же. Винтовые биноры и их приложения.— Уч. зап. ЛГПИ им. Герцена, т. 125, 1956, стр. 165—188; он же. Определение положений некоторых пространственных механизмов.— Там же, стр. 189—196; В. Ф. Котов. Применение винтового исчисления к сложению и разложению движений твердого тела.— Там же, стр. 207—216; Ф. М. Диментберг, С. Г. Кислицын. Применение винтового исчисления к анализу пространственных механизмов.— Труды II Всесоюзного совещания по проблемам динамики машин. М., 1960; Ф. Л. Литвин. Применение винтового исчисления и матриц к исследованию пространственных зацеплений.— Труды Ленингр. политехн. ин-та им. Калинина, № 182, 1955, стр. 12—27.

[13] W. Blaschke. Anwendung dualer Quaternionen auf die Kinematik. — Ann. Acad. Scientiarum Fennicae, ser. A. I (Mathematica), N 250/13, 1958; W. Blaschke. Kinematik und Quaternionen. Berlin, 1960; I. Denovit. Displacement analysis of mechanisms based on (2× 2) -matrices of dual numbers.— VDI-Berichte, Bd. 29, 1958, p. 81—89; A. T. Yang, F. Freudenstein. Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of special mechanisms.— J. of Applied Mechanics. Transactions of ASME, ser. E, № 2, 1964, p. 300—308.

[14] Ф. М. Диментберг. Винтовое исчисление и его применения к механике. М., 1965.

сение Штуди». Применение «перенесения Штуди» к линейчатой геометрии подробно изложено его учеником Вильгельмом Бляшке [15].

В нашей стране, помимо работы Зейлигера «Основные формулы комплексной геометрии прямой» (1897, 1908, 1928) и его монографии «Комплексная линейчатая геометрия» (1934), развитие применений винтового исчисления к геометрии связано с именем Петра Алексеевича Широкова (1895—1944), возглавлявшего геометрическую школу Казанского университета (1923—1944). В год поступления Широкова в Казанский университет Котельников уже переехал в Киев, но, несмотря на это, научные интересы Широкова сосредоточились вокруг любимых вопросов Котельникова: неевклидовой геометрии и теории винтов. Неевклидовой геометрии посвящена первая работа Широкова «Интерпретация и метрика квадратичных геометрий». Эта работа, представленная им при окончании университета (1917), была удостоена золотой медали; ее первая публикация в «Избранных работах по геометрии» [16] относится к 1966 г. Широков, излагая разные интерпретации неевклидовых геометрий и пространств с проективными метриками, приходит к многим весьма оригинальным результатам. Он развивает ряд идей Котельникова, в частности устанавливает связь между инфинитезимальными операторами групп движений неевклидовых пространств и и векторами в этих пространствах в смысле Котельникова[17] и рассматривает двумерную полуевклидову геометрию, называя ее «квадратичной геометрией двояко-выродившейся полярности».

Здесь Широков идет тем же путем, что и Котельников в своей работе «Принцип относительности в геометрии Лобачевского» и так же, как Котельников, приходит к выводу, что «геометрия двояко-выродившейся полярности интерпретирует преобразование принципа относительности ньютоновой механики» [18]. К сожалению, эта замечательная идея не получила у Широкова дальнейшего развития.

---

[15] В. Бляшке. Дифференциальная геометрия, т. I. М.— Л., 1935, стр. 282—312.

[16] П. А. Широков. Избранные работы по геометрии. Казань, 1966, стр. 15—179.

[17] Там же, стр. 153.

[18] Там же, стр. 162.

Из других работ Широкова, посвященных неевклидовой геометрии и теории винтов, упомянем работу 1924 г. «О векторной площади», где с каждой поверхностью связывается винт, эквивалентный системе векторов, которые определяются элементами площади (векторы направлены по нормалям к элементам площади и равны по величине площадям этих элементов). Сюда же относятся работы «Об одном способе вывода формул геометрии Лобачевского» (1924), «Преобразование винтовых интегралов в пространствах постоянной кривизны» (1926) и «Об одном приложении винтового исчисления к дифференциальной геометрии» (1929) [19].

Занятия неевклидовой геометрией привели Широкова к более широкой геометрии римановых пространств, а исследования векторных и винтовых исчислений — к тензорному исчислению. Тензорному анализу и тензорной дифференциальной геометрии римановых пространств посвящено большинство его работ и его монография [20].

Под влиянием идей Котельникова находился и А. П. Норден — заведующий кафедрой геометрии Казанского университета и возглавляющий ныне геометрическую школу в Казани. Питомец московской тензорной дифференциально-геометрической школы В. Ф. Кагана, Норден работает главным образом в области дифференциальной и неевклидовой геометрии; к первой области относится его учебник [21] и монография [22], ко второй — книга о геометрии Лобачевского [23]. Еще в 1938 г. Норден читал в Московском университете курс геометрии линейчатого пространства, в основном излагавший интерпретации Котельникова. Ученик Нордена, М. С. Бродский, использовал интерпретацию Котельникова многообразия прямых неевклидова пространства Римана в дифференциальной геометрии этого многообразия[24]; другой ученик, М. Е. Цыпкин, систематически применял винтовое исчисление к

[19] П. А. Широков. Избранные работы по геометрии, стр. 209—220 и 302—318.

[20] П. А. Широков. Тензорное исчисление. Изд. 2. М.— Л., 1934, Казань, 1961.

[21] А. П. Норден. Дифференциальная геометрия. М., 1948.

[22] А. П. Норден. Пространства аффинной связности. М.— Л., 1950.

[23] А. П. Норден. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М., 1953.

[24] М. С. Бродский. Конгруэнции прямых эллиптического пространства. М., 1941.

линейчатой геометрии евклидова пространства [25]. Развивая идеи Котельникова, Норден выполнил ряд работ по применению геометрии комплексных проективного и аффинного пространств к вещественным геометриям [26].

Многие ученики Нордена, из которых отметим А.П.Широкова (сын П. А. Широкова), успешно развивают идею Котельникова о применении к геометрии различных алгебр (систем гиперкомплексных чисел) и изучают пространства, роль координат которых играют элементы этих алгебр [27]. К этим работам примыкают работы М. А. Джавадова и Б. А. Розенфельда [28].

Многомерная и неевклидова механика. Непосредственно к «Винтовому счислению» и «Проективной теории векторов» А. П. Котельникова примыкают работы по теории скользящих векторов многомерных пространств. А. М. Лопшиц [29], ученик В. Ф. Кагана, еще в 1928 г. доказал, что для эквивалентности двух систем скользящих векторов a_α, приложенных в точках $M(x_\alpha)$ n-мерного аффинного пространства (понятие скользящего вектора и эквивалентности их систем являются аффинными понятиями), необходимо и достаточно равенство их главных вектров $a = \sum\limits_\alpha a_\alpha$ и главных моментов, являющихся кососимметрическими операторами $M = \sum\limits_\alpha (x_\alpha \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha)\cdot$ ($x \cdot y$ — диадное произведение векторов x и y). Аналогичная задача решена для n-мерного евклидова и неевкли-

---

[25] М. Е. Цыпкин. Дифференциальная геометрия линейчатого пространства и ее приложение к теории линейчатых поверхностей.— Уч. зап. Казан. ун-та, т. 112, кн. 10, 1952, стр. 23—26; он же. Дифференциальная геометрия комплекса прямых.— Там же, т. 114, кн. 2, 1954, стр. 89—106; он же. О параллельном перенесении винтов и дуальных векторов.— Труды Рязан. радиотехн. ин-та, т. 1, 1956, стр. 233—238.

[26] А. П. Норден. Пространство линейчатой конгруэнции.— Матем. сб. т. 24 (66), 1919, стр. 429—455; он же. Об одной интерпретации комплексной аффинной плоскости.— Сб. «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского». М.— Л., 1953, стр. 187—194.

[27] См. А. П. Широков. Пространства, определяемые алгебрами. Казань, 1965 (докт. дисс.).

[28] М. А. Джавадов. Геометрии над алгебрами и их применения к вещественным геометриям. Баку, 1956 (докт. дисс.); Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии. М., 1955.

[29] А. М. Лопшиц. Эквивалентность систем сил в аффинном пространстве.— Доклады на научн. конф. ЯГПИ им. Ушинского, т. 2, вып. 3, 1964, стр. 75—84.

довых пространств Б. А. Розенфельдом, Т. М. Климановой и Н. Д. Пецко [30], которые показали, что каноническая система скользящих векторов (винт) в n-мерном евклидовом пространстве состоит из пар с моментами, которые равны модулям собственных чисел оператора M, расположенных в инвариантных плоскостях этого оператора, и вектора a, направленного по нулевому направлению того же оператора; задача для n-мерного эллиптического пространства, представляющего собой сферу в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве с отождествленными диаметрально противоположными точками, сводится к парам векторов $(n+1)$-мерного евклидова пространства, касающихся указанной сферы.

Следует отметить, что само название этой работы — «Проективная теория векторов» — напоминает о диссертации Котельникова. Авторы рассматривают теорию скользящих векторов не только в евклидовом и эллиптическом пространствах, но и в более общих пространствах с проективной метрикой, частным случаем которых является галилеево пространство, определенное в работе Котельникова «Принцип относительности и геометрии Лобачевского». В общем случае эти пространства определяются как проективное пространство, в котором задана вырожденная поверхность второго порядка (1*) (где $i, j = 0, 1, \ldots, n$, а определитель матрицы (a_{ij}) равен нулю), представляющая конус второго порядка с точечной или плоской вершиной. Если эта вершина плоская, в ней снова задана вырожденная поверхность второго порядка и т.д. — до тех пор, пока в вершинной плоскости последнего конуса не будет задана невырожденная поверхность второго порядка или пока конус второго порядка не будет обладать точечной вершиной. Геометрии пространства с проективными метриками посвящено довольно много работ [31].

Движению твердого тела в эллиптическом пространстве и в пространстве Лобачевского посвящены работы

---

[30] Б. А. Розенфельд, Т. М. Климанова, Н. Д. Пецко. Проективная теория векторов.— Изв. вузов, № 2, 1962, стр. 130—141; № 3, 1962, стр. 122—130; Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства. М., 1966, стр. 318—335.

* Формула из гл. IV.

[31] И. М. Яглом, Б. А. Розенфельд, Е. У. Ясинская. Проективные метрики.— Успехи матем. наук, т. 19, № 5, 1965, стр. 51—113.

югославского математика Р. Стояновича, а также А. П. Широкова и его ученика, М. С. Крюкова [32].

Рассмотренная Котельниковым в «Принципе относительности и геометрии Лобачевского» связь между пространством — временем в специальной теории относительности и геометрией Лобачевского в наше время широко применяется в физике [33].

Идеи А. П. Котельникова живы в современной науке и с каждым десятилетием приносят все большие плоды.

---

[32] Р. Стојановић. Кретање чврстог тела у дводимензионном Riemann' ову простору.— Гласник Српске АН, т. 221, 1956, стр. 63—73; А. П. Широков. Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского.— Уч. зап. Казан. у-та, т. 123, № 1, 1963, стр. 196—207; М. С. Крюков. Движение твердого тела по инерции в пространстве Лобачевского. Так же, стр. 103—127.

[33] Я. А. Смородинский. Кинематика столкновений в геометрическом изложении.— Сб. «Вопросы физики элементарных частиц». Ереван, 1963, стр. 242—271.

ПЕЧАТНЫЕ ТРУДЫ А. П. КОТЕЛЬНИКОВА

1. О давлении жидкой струи на клин.— Собр. протоколов заседаний секции физ.-матем. наук Общества естествоиспытателей при Казан. ун-те, № 8, 1890, стр. 4—51.

2. Généralisations des quelques théorèmes de mécanique.— C. r. Acad. Sci., t. 118, 1894, p. 129—131.

3. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике (магистерская диссертация). Казань, 1895, 215 стр.; была напечатана также в «Уч. зап. Казан. у-та» за 1895 г.

4. Винты и комплексные числа.— Изв. физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те, серия 2, № 6, 1896, стр. 23—33.

5. Проективная теория векторов (докторская диссертация). Казань, 1899, 317 стр.

6. Механика. Курс лекций, читанный в Киевском политехническом институте в 1900—1901 ак. г. Киев, 232 стр.

7. Аналитическая механика. Лекции, читанные в Киевском политехническом институте в 1902—1903 ак. г. Киев, 219 стр.

8. Курс аналитической геометрии. Составил студ. В. Скотницкий. Вып. I, Геометрия на плоскости. Казань, 1909, 412, стр. Вып. II, Геометрия в пространстве. Казань, 1910, 221 стр.

9. Обобщение средней арифметико-геометрической. Дневник XII съезда русских естествоиспытателей и врачей, М., 1909—1910, дневник № 3, стр. 1.

10. Графическое построение периодов эллиптического интеграла. — Там же, стр. 1—2.

11. Введение в теоретическую механику. М.—Л., 1925, 263 стр.

12. Принцип относительности и геометрия Лобачевского.— Сб. «In memoriam Lobatschevskii», т. II. Казань, 1927, стр. 37—66.

13. Отзыв о работах д-ра В.Варичака, присланных Казан. физ-матем. об-ву на премию им. Н. И. Лобачевского.—Изв. физ-матем. об-ва при Казан. ун-те, серия 3, № 2, 1927, стр. 36—108.

14. Свойства и построение точек Бурместра.— Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27/IV1927 г. М.—Л., 1928, стр. 188.

15. Точки Бурместра, их свойства и построение.— Матем. сб., 34 : 3—4, 1927, стр. 207—348.

16. Заметка по графической динамике.— Труды КММИ, вып. 29—30, 1937, стр. 3—27.

17. Примечания к работе Н. Е. Жуковского «Действие волнующейся жидкости малой глубины на плавающее на ее поверхности

тело». В кн.: Н. Е. Жуковский. ПСС, т. IV. М.— Л., 1937, стр. 118—122.

18. Общая картина колебаний плавающего тела. Приложение I.— Там же, стр. 123—152.

19. Давление жидкости на качающееся на волнах тело. Приложение II.— Там же, стр. 153—159.

20. О малых гармонических колебаниях плоскости. Приложение III.— Там же, стр. 160—174.

21. Примечания к работе Н. Е. Жуковского «Вихревая теория гребного винта».— Там же, т. VI, стр. 127—130.

22. Теория гироскопов. Конспект лекций, читанных в КМММИ в 1939 г. М., 1939.

23. Обзор сочинения Н. И. Лобачевского «О началах геометрии». В кн.: Н. И. Лобачевский. ПСС, т. I. М.— Л., 1946, стр. 179—183.

24. Примечания к тому же сочинению.— Там же, стр. 262—405.

25. Историко-библиографические сведения о сочинении «О началах геометрии».— Там же, стр. 411—415.

26. Теория векторов и комплексные числа (Начала механики в евклидовом пространстве). В кн.: А. П. Котельников, В. А. Фок. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.— Л., 1950, стр. 7—47.

ЛИТЕРАТУРА О А. П. КОТЕЛЬНИКОВЕ

1. Библиографические источники по математике и механике (1917—1952). М.— Л., 1957, стр. 85, 214.

2. Я. Л. Геронимус. Очерки о работах корифеев русской механики. М., 1952, стр. 59, 503.

3. А. Т. Григорьян. Очерки истории механики в России. М., 1961, стр. 160—172.

4. В. В. Добронравов. Кафедра теоретической механики МВТУ.— «Механика», вып. 50. М., 1956, стр. 5—6.

5. И. Я. Штаерман. Кафедра теоретической механики КИИ. Юб. сб. к 40-летию Киев, индустр. ин-та (1898—1938). Киев, 1939, стр. 138—140.

6. К 75-летию заслуженного деятеля науки и техники проф. д-ра А. П. Котельникова. Прикладная математика и механика, т. 4, вып. 5—6, 1940, стр. 3—10.

7. Котельников А. П. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. VI. М.— Л., 1948.

8. Котельников А. П. БСЭ. Изд. 2, т. 23, 1950, стр. 150.

9. Механика в СССР за тридцать лет. М.— Л., 1950, стр. 126, 128, 146, 147, 152, 232, 293.

10. Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлін. Діяльність видатних механиків на Україні. Київ, 1952, стр. 194—203.

11. Б. А. Розенфельд. Александр Петрович Котельников. Историко-математические исследования, вып. IX. М., 1956, стр. 317—400.

12. Г. Н. Савин, Ю. Д. Соколов, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин. Александр Петрович Котельников (к 100-летию со дня рождения). Прикладная механика, т. II, вып. 3, 1966, стр. 142—144.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Татьяна Васильевна Путята,
Борис Лукич Лаптев
Борис Абрамович Розенфельд,
Борис Наумович Фрадлин

Александр Петрович Котельников
(1865—1944)

Утверждено к печати редколлегией научно-биографической серии
Академии наук СССР

Редактор *В. М. Тарасенко*
Технические редакторы *Т. И. Анурова, О. Г. Ульянова*

Сдано в набор 18/XII 1967 г. Подписано к печати 3/IV 1968 г.
Формат 84×108¹/₃₂. Бумага № 1. Печ. л. 7.75+1 вкл.
Усл. печ. л. 13,12. Уч.-изд. л. 6.
Тираж 9 000. Т-06146. Тип. зак. 3807.
Цена 38 коп.

Издательство «Наука», Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ

КОТЕЛЬНИКОВ

38 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»