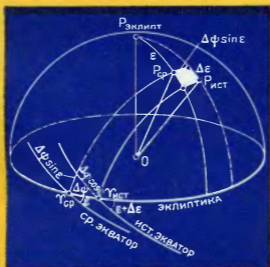


# ВВЕДЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКУЮ АСТРОНОМИЮ

В. Б. ГУРЕВИЧ



В. Б. ГУРЕВИЧ

# ВВЕДЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКУЮ АСТРОНОМИЮ

Под редакцией  
В. В. ПОДОБЕДА



Москва «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
1979

22.6

Г 95

УДК 522.7

**Введение в сферическую астрономию.** Гуревич В. Б. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 128 с.

В отличие от обычных курсов сферической астрономии основное внимание в книге уделено не математическим выкладкам, а принципам сферической астрономии, ее качественной стороне.

Количество формул в основном тексте сведено к минимуму, а те формулы, которые удобно иметь под рукой при проведении не очень строгих расчетов, вынесены в приложение. В приложении содержится большое количество справочного материала, который позволяет ориентироваться в астрономических таблицах, в Ежегоднике, а также производить расчеты положений светил с точностью до минуты.

Книга может заинтересовать всех, перед кем возникают задачи расчета положений на небе каких-либо светил.

Табл. 9, илл. 31, библи. 34.

*Виталий Борисович Гуревич*

## ВВЕДЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКУЮ АСТРОНОМИЮ

М., 1978 г., 128 стр. с илл.

Редактор *Г. С. Куликов*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *Е. А. Белицкая, О. М. Кривенко*

ИБ № 11217

Сдано в набор 22.11.78. Подписано к печати 13.04.79. Т 08942. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 6,72. Уч.-изд. л. 6,64. Тираж 3800 экз. Заказ № 1384. Цена книги 30 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Г 20602—073  
053(02)-79 187-79. 1705020000

© Главная редакция  
физико-математической  
литературы  
издательства «Наука», 1979

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	4
<i>Глава 1.</i> Движение и вращение Земли . . . . .	7
<i>Глава 2.</i> Системы небесных координат . . . . .	21
<i>Глава 3.</i> Взаимосвязь систем небесных координат . . . . .	30
<i>Глава 4.</i> Координаты на земной поверхности и их взаимосвязь . . . . .	45
<i>Глава 5.</i> Время в астрономии . . . . .	58
<i>Глава 6.</i> Изменения координат светил . . . . .	71
<i>Приложение 1.</i> Приведение светил на видимые места . . . . .	90
<i>Приложение 2.</i> Формулы для вычислений на сфере . . . . .	111
<i>Приложение 3.</i> Значения астрономических постоянных и некоторых других величин . . . . .	114
<i>Приложение 4.</i> Обозначения, используемые в сферической астрономии и примыкающих разделах астрономии . . . . .	118
Литература . . . . .	124
Предметный указатель . . . . .	126

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга по высшей математике начинается словами: «Мы знаем...».

*И. Ильф*

Мы знаем, что общий рост интереса к астрономии, в большой степени обусловленный успехами космонавтики, коснулся не только астрономии Луны и планет, но и такой «прикладной» дисциплины, как сферическая астрономия. Нужно особенно отметить интерес к сферической астрономии со стороны специалистов по авиационно-космическим навигационным системам.

Этот круг читателей, не имеющих специальной астрономической подготовки, интересуют не столько формулы сферической астрономии и подробности вычислений, сколько качественная сторона вопроса. Имеющиеся отечественные курсы сферической астрономии [1—6] не рассчитаны на такого читателя, хотя для астрономов-профессионалов они являются прекрасными руководствами.

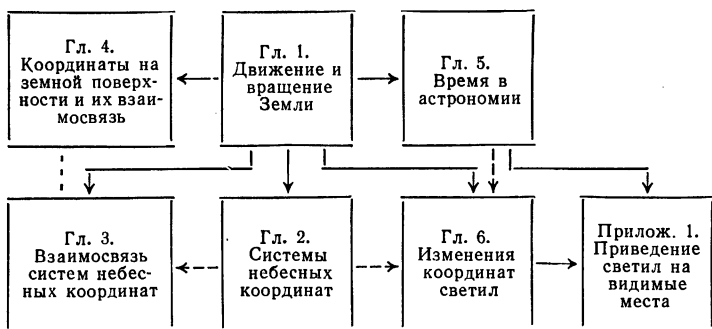
Поэтому автор стремился изложить лишь принципы сферической астрономии, сведя количество математических выкладок до минимума. Формулы же (специально адаптированные для применения к задачам навигации) вынесены в приложение.

Задача сферической астрономии в общем сводится к выводу математических выражений для определения направлений на светила в любой системе отсчета, в любой момент времени и при любом положении наблюдателя или автоматической астроследящей системы. Для решения этой задачи нужно выбрать исходную систему координат и найти значения координат конкретных светил в этой системе. Далее, надо установить, как расположена эта система относитель-

но системы координат, интересующей наблюдателя, и преобразовать координаты светил из исходной в заданную систему.

Чтобы познакомиться со сферической астрономией, надо рассмотреть, какие существуют исходные системы координат и какие системы могут интересовать наблюдателя; определить положение каждой из этих систем координат и их взаимное расположение; с учетом этого расположения установить правила преобразования координат из системы в систему. Поскольку основные исходные системы координат задаются движением и вращением Земли, нужно рассмотреть также характер этого движения.

Перечисленные требования и определяют содержание книги и ее структуру, которую условно можно представить следующей схемой:



Изложение предмета начинается с описания движения и вращения Земли (гл. 1), так как эти процессы определяют собой положение большинства основных кругов и точек на небесной сфере, положение оси вращения в теле Земли и основные единицы счета времени.

Затем описываются существующие системы координат на небесной сфере (гл. 2) и на земной поверхности (гл. 4).

Преобразования координат разделены на три группы, рассматриваемые отдельно:

1) взаимный переход между разными системами небесных координат (гл. 3);

2) взаимосвязь систем координат на земной поверхности (гл. 4);

3) связь небесных координат с координатами на поверхности Земли. В преобразованиях этой группы должно учитываться вращение Земли, т.е. они тесно связаны с измерением времени (гл. 5).

В гл. 6 дается обзор изменений координат светил и описывается порядок учета этих изменений; это нужно для того, чтобы довести преобразование координат до числового решения. Формулы для вычисления координат с учетом этих изменений приводятся в приложении 1.

В приложениях можно также найти формулы сферической тригонометрии и полигонометрии, значения астрономических постоянных и некоторых других величин, используемые в сферической астрономии обозначения, библиографический и предметный указатели.

## Глава 1

### ДВИЖЕНИЕ И ВРАЩЕНИЕ ЗЕМЛИ

**Движение Земли в Солнечной системе.** Земля со своим спутником — Луной — движется в гравитационном поле Солнца и других тел Солнечной системы. Поскольку притяжение Солнца несравненно сильнее притяжения планет, движение системы Земля — Луна главным образом и определяется полем тяготения Солнца; в этих условиях притяжение планет рассматривается как возмущающее. В теории движения системы Земля — Луна планеты считаются точечными телами, поскольку их размеры по сравнению с расстояниями в Солнечной системе чрезвычайно малы. Точечным телом может считаться и Земля в совокупности со своим спутником. Будем считать, что вокруг Солнца движется не сама Земля, а центр массы (центр тяжести) системы Земля — Луна, или, как его иногда называют, *барицентр*.

**Невозмущенное движение.** Так как Луна по массе приблизительно в 80 раз меньше Земли, барицентр находится недалеко от центра Земли, примерно в 6 тыс. км от него, т.е. внутри Земли. Поэтому при не очень точных расчетах орбитальное движение барицентра вокруг Солнца отождествляется с движением Земли. Если еще отбросить возмущения от планет, то получится невозмущенное орбитальное движение Земли, описываемое двумя законами Кеплера:

(1) *Земля движется вокруг Солнца по эллипсу, причем Солнце находится в одном из фокусов этого эллипса;*

(2) *за равные промежутки времени гелиоцентрический радиус-вектор Земли (прямая, соединяющая центры Солнца и Земли) покрывает равные площади.*



Существует еще третий закон Кеплера, который косвенно связывает размеры орбит планет и периоды их обращения вокруг Солнца с массой Солнца и с гравитационной постоянной. Этот закон (в формулировке Кеплера) нестрог, так как не учитывает массы планет. В дальнейшем изложении он не понадобится.

Вернемся к первому закону Кеплера. На рис. 1 показана эллиптическая орбита Земли  $\oplus$ . Солнце обозначено символом  $\odot$ .

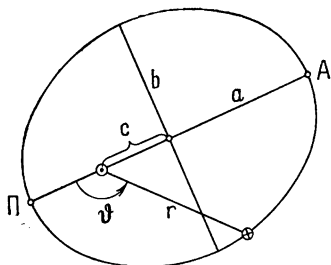


Рис. 1.

Как всякий эллипс, земная орбита имеет две оси симметрии — большую и малую. Большая ось,  $AP$ , имеющая в астрономии специфическое наименование *линии апсид*, проходит через фокусы эллипса, т. е. через Солнце. На этой оси лежат точки, в которых расстояние между Землей и Солнцем

принимает экстремальные значения, а скорость изменения этого расстояния становится равной нулю. Точка  $П$ , где Земля ближе всего к Солнцу, называется *перигелием* (Солнце — Гелиос), точка  $А$  — *афелием*. Если же рассматривать видимое движение Солнца вокруг Земли, то можно сказать, что при максимальном приближении Солнца к Земле оно находится в *перигее* (Земля — Гея), при удалении — в *апогее*.

**Элементы земной орбиты.** Положение Земли на орбите задается углом, отсчитываемым от перигелия в направлении движения Земли до ее радиуса-вектора  $r$ . Этот угол называется *истинной аномалией* Земли и обозначается  $\varphi$ . Сама же орбита определяется своими *полуосями*, хотя вместо малой полуоси  $b$ , как правило, дается *эксцентриситет* орбиты  $e$ , равный  $c/a$ , где  $a$  — большая полуось и  $c$  — расстояние от фокуса до центра эллипса. Иначе,

$$e = \frac{a - П\odot}{a}.$$

$П\odot$  — перигелийное расстояние Земли от Солнца.

Итак, расстояние Земли от Солнца переменное. Но согласно второму закону Кеплера при удалении от Солнца Земля должна уменьшать скорость. Это уменьшение линейной скорости по мере движения Земли от перигелия к афелию (или Солнца — к апогею) проявляется в уменьшении угловой скорости перемещения Солнца на фоне звезд. Так как перемещение более удаленных объектов перпендикулярно к лучу зрения менее заметно, наблюдается дополнительное уменьшение скорости Солнца на фоне звезд близ апогея.

Меняющуюся в течение года скорость перемещения Солнца обычно рассматривают как сумму некоторой средней постоянной скорости и поправки, в течение года меняющейся по синусоидальному (в первом приближении) закону. Это удобнее, чем непосредственно вычислять скорость в эллиптическом движении.

Здесь интересно провести историческую параллель. Как известно, до гелиоцентрической системы мира Коперника была общепринята геоцентрическая система Птолемея, в которой в известной степени были обобщены идеи и знания ученых Древней Греции — Платона, Гиппарха и других. В центре мира согласно Птолемею находилась Земля, а по круговым орбитам вокруг нее равномерно двигались Луна, Солнце и планеты. Одни из греческих астрономов считали круговые орбиты удобным геометрическим построением, другие абсолютизировали окружность как траекторию движения. Так или иначе, считалось, что небесные тела движутся именно по окружностям. Но наблюдения показывали, что скорости движения небесных тел (и, в частности, Солнца) вокруг Земли переменны, чего не должно быть при равномерном движении по круговым орбитам. Для объяснения результатов наблюдений древние астрономы вынуждены были прибегнуть к дополнительным круговым движениям — построить систему эпициклов и деферентов. На рис. 2 деферент — круговая орбита, в центре которой находится Земля. По деференту движется не само Солнце, а центр маленькой окружности — эпицикла, и уже по эпициклу перемещается Солнце, тоже с постоянной скоростью. Можно заметить, что

современный способ деления видимого движения Солнца на равномерное (т. е. круговое) и колебательные отклонения от него — это, по сути, возвращение к формальному аппарату древних греков — к деференту и эпициклу. Любопытный пример к закону отрицания отрицания!

**Возмущенное движение Земли.** Благодаря притяжению Луны и планет Земля отклоняется от траектории невозмущенного движения. Планеты смещают с кеплеровской орбиты барицентр вместе с движущимися вокруг него Землей и Луной, а лунная масса постоянно отклоняет центр Земли от барицентра.

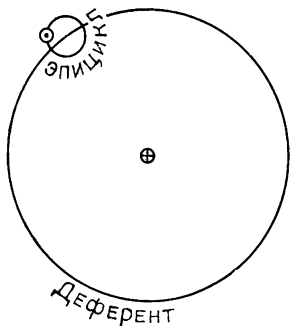


Рис. 2.

Обращение Земли и Луны вокруг барицентра, происходящее с одним и тем же периодом и в одной и той же плоскости (*плоскости лунной орбиты*), вносит в видимое с Земли движение

Солнца периодическую составляющую, называемую *лунным неравенством*. Плоскость лунной орбиты не совпадает с плоскостью орбиты барицентра вокруг Солнца. Поэтому и Земля в своем движении вокруг барицентра периодически выходит из плоскости его орбиты, и это также сказывается на видимом движении Солнца.

Гравитационные возмущения от планет проявляются прежде всего в непрерывном повороте плоскости орбиты барицентра. Если величину поворота выразить углом, отсчитываемым от какого-то неподвижного «абсолютного» начала, то зависимость этого угла от времени может иметь вид, представленный на рис. 3. Вращение плоскости орбиты барицентра содержит линейную составляющую, изображенную на рис. 3 прерывистой линией и представляющую собой небольшой и потому выглядящий линейным участок синусоиды с очень долгим периодом, а также переменную составляющую, имеющую колебательный характер.

**Эклиптика.** Если исключить из рассмотрения переменную составляющую, получится плоскость, поворачивающаяся с той же средней скоростью, что и плоскость орбиты, и временами совпадающая с ней. Эта плоскость называется *плоскостью эклиптики*. Собственно *эклиптикой* называется линия пересечения этой плоскости со сферой большого радиуса — небесной

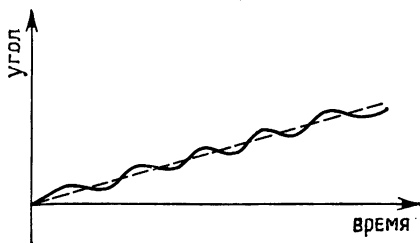


Рис. 3.

сферой, центр которой в этом случае лежит в плоскости эклиптики. Центр небесной сферы можно поместить и *вне* плоскости эклиптики; тогда эклиптикой будет большой круг, параллельный плоскости эклиптики (см. также гл. 2).

Поскольку эклиптика поворачивается, ее обычно называют *подвижной эклиптикой*. Чтобы охарактеризовать положение плоскости подвижной эклиптики в каждый текущий момент времени, вводится понятие *мгновенной эклиптики* этого момента (или этой эпохи).

Ряд последовательных мгновенных эклиптик для каких-либо эпох называют *неподвижными эклиптиками* этих эпох. Например, можно говорить о неподвижной эклиптике 1 января 1900 года (или, если время, прошедшее от начала года, выражать в его долях, о неподвижной эклиптике 1900,0). Точно так же можно дать определение неподвижных эклиптик, скажем, года 1950,0 или начала текущего года. Положение подвижной эклиптики на любой момент можно задавать относительно одной из неподвижных эклиптик.

**Оскулирующие элементы орбиты.** Из-за возмущений от планет меняется не только ориентировка орбиты барицентра, но и ее параметры — большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$ . В этих изменениях есть

регулярные и периодические составляющие. Такие изменяющиеся элементы орбиты называют *варьирующими*, или *оскулирующими элементами*, а саму орбиту — *оскулирующей орбитой*. Это словосочетание означает лишь, что орбита постепенно меняет форму и размеры.

Периодические возмущения в движении Земли обычно представляют в виде синусоидальных поправок к среднему, невозмущенному движению. Таких поправок может быть много: каждая со своим периодом и амплитудой. Возвращаясь к нашей исторической аналогии, можно сказать, что формально это означает добавление новых эпициклов для объяснения неправильностей в видимом движении Солнца.

Для учета всех неравенств в движении Земли в настоящее время пользуются таблицами, выпущенными в конце XIX в. американским астрономом С. Ньюкомбом [33]. Эти таблицы называются «Таблицы движения Земли вокруг Солнца», а так как вместо этого движения обычно рассматривается видимое движение Солнца вокруг Земли, из названия выпускают два слова и именуют их «Таблицы движения Солнца» или, еще проще, «Таблицы Солнца».

**Вращение Земли.** Вторым существенным для сферической астрономии динамическим процессом является вращение Земли.

Математическая теория вращения Земли [8] рассматривает ее как абсолютно твердое тело. Хотя это не совсем справедливо, все же закон вращения Земли, выведенный в предположении ее абсолютной твердости, хорошо отражает действительные закономерности вращения. Эта теория, естественно, не предусматривает влияния на вращение Земли таких факторов, как упругость вещества Земли, сезонные перемещения воздушных масс, конвекционные токи в земных недрах и некоторые другие факторы. Поэтому наблюдаемое вращение Земли несколько отклоняется от теории (например, обнаруживаются небольшие колебания скорости вращения). Эти отклонения служат изучению геофизических явлений и исследуются с привлечением геофизических методов [15].

**Эллипсоид инерции.** Чтобы изложить основы теории вращения Земли, введем некоторые понятия.

Сумма произведений квадратов расстояний элементарных частиц твердого тела от любой оси, проходящей через центр его массы, на массы этих частиц называется *моментом инерции* тела относительно этой оси. Через центр массы тела можно провести бесчисленное множество направлений; относительно каждого из них можно вычислить момент инерции. Если величины, обратные корням из моментов инерции, отложить в одном и том же масштабе по соответствующим направлениям в виде векторов и провести поверхность, огибающую эти векторы, то такая поверхность в общем случае окажется трехосным эллипсоидом. Она называется *эллипсоидом инерции* тела. Как и всякий эллипсоид, эллипсоид инерции имеет три главные оси; моменты инерции по этим осям называются *главными моментами инерции* и обозначаются  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , причем по наименьшей оси эллипсоида инерции направляется наибольший момент  $C$ .

**Эллипсоид фигуры.** Физическая поверхность Земли очень неровная. Геометрическая фигура, наилучшим образом ее представляющая, — также трехосный эллипсоид. Полярная ось этого эллипсоида называется *осью фигуры*, а ортогональная ей плоскость — *экватором фигуры*. Контуры земной поверхности относительно сетки координат, привязанной к экватору фигуры, неподвижны.

Любопытно, что не существует точного определения такого широко используемого понятия, как *географический экватор*. По-видимому, по вкладываемому в него (или подразумеваемому) смыслу географический экватор нужно отождествить именно с экватором фигуры.

В теории вращения Земли как абсолютно твердого тела оси эллипсоида фигуры Земли совмещаются с осями эллипсоида инерции, причем наименьшей оси одного эллипсоида соответствует наименьшая ось другого. В действительности перемещения земных масс могут вызывать небольшие развороты эллипсоида инерции в теле Земли, вследствие чего эллипсоид фигуры можно совместить лишь с некоторым средним положением эллипсоида инерции.

Надо заметить, что экваториальные оси эллипсоида инерции Земли практически равны; то же можно сказать и об осях эллипсоида фигуры (см. гл. 4). Поэтому Землю обычно считают не трехосным, а двухосным эллипсоидом (эллипсоидом вращения).

**Уравнения вращения.** Вращение твердого тела характеризуется величиной и положением в пространстве вектора угловой скорости вращения. Если этот вектор представлен своими проекциями  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$  на оси инерции  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , то вращение описывается так называемыми динамическими уравнениями Эйлера

$$A\dot{\omega}_A + (C - B)\omega_B\omega_C = M_A,$$

$$B\dot{\omega}_B + (A - C)\omega_A\omega_C = M_B,$$

$$C\dot{\omega}_C + (B - A)\omega_A\omega_B = M_C,$$

все элементы левых частей которых нами уже объяснены, а в правых частях стоят проекции на те же оси момента внешних сил относительно центра массы. Момент внешних сил  $M$  возникает в основном благодаря действию притяжения Луны и Солнца на экваториальное утолщение эллипсоида фигуры Земли. Из-за вращения Земли и изменения взаимного положения Земли, Солнца и Луны в пространстве величина вектора  $M$  и положение его относительно осей  $A$ ,  $B$ ,  $C$  меняются достаточно быстро и весьма сложным образом; тем не менее, используя теории движения Земли и Луны, их можно вычислить для любого момента времени; следовательно, уравнения Эйлера могут быть решены. Как известно, решение дифференциальных уравнений состоит из общего решения уравнений без правых частей (однородных) и частного решения неоднородных уравнений. Существованием общего решения устанавливается возможность *свободного движения полюсов* (см. ниже) с амплитудой, которая в этом решении фигурирует как произвольная постоянная и может быть определена только из наблюдений. Частное решение дает компоненты  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$  скорости вынужденного вращения Земли, обусловленного существованием внешнего момента  $M$ .

**Ось вращения.** Обозначим скорость, определенную из частного решения, вектором  $\omega$ , проходящим через

центр масс Земли  $O$  (рис. 4). Вектор  $\omega$  называется *осью вращения*, или *мгновенной осью вращения* Земли. Точки пересечения оси вращения с земной поверхностью (поверхностью эллипсоида фигуры) называются *мгновенными полюсами* Земли, а с геоцентрической небесной сферой — *полюсами мира*, или, точнее, *истинными полюсами мира*.

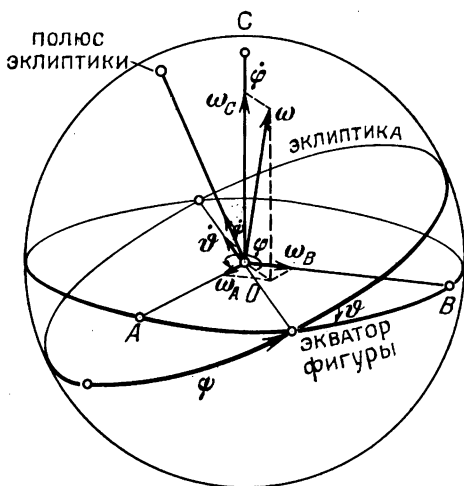


Рис. 4.

Пересечение плоскости, ортогональной оси вращения и проходящей через центр массы Земли, с земной поверхностью называется *экватором вращения*, или *мгновенным экватором* Земли, а с небесной сферой — *истинным небесным экватором* (чаще просто *небесным экватором*).

Казалось бы, ось вращения должна быть ортогональна «географическому экватору» (экватору фигуры Земли) и совпадать с осью фигуры, а компоненты скорости  $\omega_B$ ,  $\omega_C$  должны быть равны нулю. Однако в действительности это не совсем так,  $\omega_B$  и  $\omega_C$  отличны от нуля, хотя и малы.

**Компоненты скорости вращения Земли.** Определив из решения уравнений Эйлера скорость  $\omega$ , можно,



далее, спроецировать ее на оси, не вращающиеся вместе с Землей, например, на оси, связанные с эклиптической. Положение осей  $A, B, C$  относительно осей, связанных с эклиптической, всегда известно (как устанавливается их взаимосвязь, будет показано в гл. 3). Поэтому по составляющим  $\omega_A, \omega_B, \omega_C$  скорости  $\omega$  можно вычислить составляющие той же скорости по трем эклиптическим осям. Три такие оси могут быть расположены как угодно; в частности, они могут быть неортогональны, а их взаимное положение может меняться со временем. Удобна следующая тройка осей: нормаль к плоскости эклиптики; линия пересечения эклиптики с экватором фигуры; ось фигуры  $C$ . Проекции  $\omega$  на эти оси обозначим соответственно  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  (рис. 4).

Что означают эти составляющие скорости вращения Земли? Со скоростью прецессии  $\dot{\psi}$  Земля вращается вокруг нормали к плоскости эклиптики. За счет прецессии ось  $C$  перемещается вокруг этой нормали по круговому конусу, а линия пересечения плоскостей эклиптики и экватора сдвигается по эклипике. Результатом вращения  $\dot{\theta}$  должно быть изменение угла наклона экватора фигуры к эклипике. Наконец,  $\dot{\phi}$  — это скорость вращения Земли вокруг оси ее фигуры.

В теоретической механике угловая скорость  $\dot{\phi}$  называется скоростью собственного вращения; в связи с этим и ось фигуры иногда называют *осью собственного вращения*, а экватор фигуры — *экватором собственного вращения*.

Скорость собственного вращения Земли  $\dot{\phi}$  несоизмеримо больше скоростей  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\theta}$ . Это соответствует правилу механики, что устойчивое вращение твердого тела происходит вокруг оси, близкой к оси наибольшего момента инерции, т. е. наименьшей оси эллипсоида инерции.

Каждая из скоростей  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  содержит одну постоянную (или почти постоянную) составляющую и сумму большого количества небольших периодических членов. Периодические члены называются *нutationями*. Оставим пока их в стороне и рассмотрим регулярное вращение Земли.

**Регулярное вращение Земли.** Постоянная составляющая  $\dot{\psi}$  называется *прецессией в долготе*; она вызывает равномерное перемещение оси фигуры Земли по круговому конусу, а линии пересечения экватора с эклипстикой — по эклиптике по часовой стрелке, если смотреть с северного полюса эклиптики (вектор прецессии направлен к южному полюсу эклиптики). Скорость прецессии — примерно  $50''$  в год.

Постоянная составляющая  $\dot{\theta}$  в нашу эпоху приблизительно равна  $-0,5''$  в год; это свидетельствует о том, что средний наклон экватора фигуры к эклиптике очень медленно уменьшается.

Постоянная составляющая  $\dot{\phi}$  — среднее *собственное вращение* Земли, совершаемое с периодом в одни сутки вокруг оси  $S$  против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса Земли.

Мгновенной скоростью регулярного вращения Земли будет векторная сумма постоянных составляющих  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\phi}$ . Точки пересечения вектора этой мгновенной скорости с небесной сферой называются *средними полюсами мира* соответствующей эпохи; ортогональная ей плоскость называется плоскостью среднего эк-

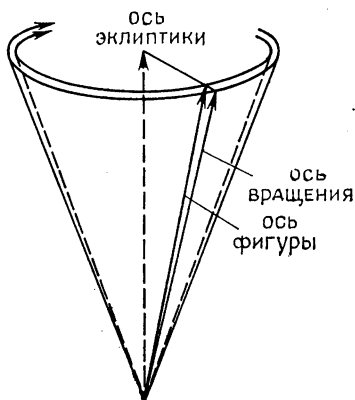


Рис. 5.

ватора, а ее пересечение с небесной сферой — *средним экватором*. Ось регулярного вращения должна лежать в одной плоскости с нормалью к эклиптике и осью фигуры. Сохраняя этот строй, оси фигуры и вращения за счет прецессии перемещаются в пространстве вокруг оси эклиптики, как показано на рис. 5.

**Нутация.** Нутационные члены в  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  искажают нарисованную здесь стройную картину вращения Земли. Нутации в  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\theta}$  — это покачивания оси фигуры (и мгновенной оси вращения Земли) относительно эклиптики. Благодаря нутации обе эти оси в своем

движении вокруг нормали к плоскости эклиптики непрерывно отклоняются от конических поверхностей, и след перемещения оси фигуры в пространстве выглядит не правильной окружностью, как на рис. 5, а сложной волнистой линией. Нутация в  $\dot{\phi}$  — малое отклонение скорости вращения Земли от среднего значения. Скорости  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\theta}$  — это скорости перемещения оси фигуры в пространстве, на фоне звезд; в теле Земли ось фигуры неподвижна.

**Движение полюсов.** Ось вращения Земли не сохраняет постоянного положения не только в пространстве, но и в теле Земли. Движение оси в теле Земли, а полюсов — по поверхности включает несколько независимых движений.

*Свободное движение полюсов* имеет амплитуду до 0,5". Его обычно трактуют как общее решение динамических уравнений Эйлера при  $M_A = M_B = M_C = 0$ , в связи с чем называют также *эйлеровым движением полюсов*. Однако из-за свойств вещества Земли, в первую очередь — упругости реально наблюдаемое движение не похоже на предсказанное теорией. В соответствии с общим решением мгновенные полюсы должны двигаться с периодом  $\sim 10$  мес. по окружностям, центры которых называются *средними полюсами*. В действительности же прослеживается движение с периодом  $\sim 14$  мес. (*чандлеровский период*) и непостоянной амплитудой.

Другая компонента движения полюсов, по амплитуде соизмеримая с эйлеровым движением, обусловлена геофизическими процессами в твердом теле Земли и в атмосфере. Из наблюдений устойчиво определяются годовой и полугодовой периоды этого движения.

Существует еще движение полюсов с периодом в одни сутки и очень небольшой амплитудой (до нескольких сотых долей секунды дуги), связанное с тем, что взаимное положение осей вращения и фигуры, будучи практически неизменным в пространстве, должно непрерывно меняться в теле вращающейся Земли. Это движение обусловлено в основном наличием компоненты  $\dot{\psi}$  в скорости вращения Земли — следствием притяжения Луны и Солнца и потому называется

лунно-солнечным (или вынужденным) движением полюсов.

Отличие траекторий двух первых слагаемых движения полюсов от предписываемых общим решением уравнений Эйлера окружностей, т. е. нерегулярность, больше всей амплитуды лунно-солнечного движения. В этих нерегулярных движениях лунно-солнечное движение просто теряется; поэтому, когда говорят о движении земных полюсов, как правило, лунно-солнечную компоненту не рассматривают.

Интересно, что в движении полюсов Луны наблюдается обратное соотношение. По ряду причин (скорость собственного вращения в 27,3 раза меньше, чем у Земли; скорость прецессионного движения оси фигуры в 1400 раз больше; велики нутационные члены в компонентах скорости вращения) амплитуда вынужденного перемещения полюсов вращения по поверхности Луны достигает 2'. Свободное же движение лунных полюсов не наблюдается с Земли, т. е., по-видимому, его амплитуда не превышает 1'. Поэтому под движением полюсов Луны сейчас понимают прежде всего вынужденное движение [14].

**О мгновенных и средних полюсах.** Движение земных полюсов (кроме лунно-солнечной компоненты) есть проявление некоторой дополнительной угловой скорости Земли. Ее вектор суммируется с вектором  $\omega$ , и вектор результирующей скорости  $\omega^*$  оказывается отклоненным от  $\omega$ . Но если полная скорость вращения Земли не направлена по  $\omega$ , то данное выше определение мгновенной оси некорректно. Это действительно так, но существующие формулировки не пересматриваются по чисто практическим соображениям, связанным с особенностями *редукционных вычислений* координат светил, изложенных в гл. 6.

Еще раз подчеркнем, что мгновенные полюсы — это точки пересечения с земной поверхностью (поверхностью эллипсоида фигуры) не вектора результирующей скорости вращения  $\omega^*$ , а *мгновенной оси*, совпадающей с вектором  $\omega$ .

Поскольку амплитуды всех движений полюса непостоянны, перемещение мгновенных полюсов Земли вокруг средних полюсов происходит по неправильным кривым. Возникает вопрос: что же тогда считать

средними полюсами? Единой договоренности на этот счет нет. В теории вращения Земли подразумевается совпадение средних полюсов с полюсами эллипсоида фигуры.

**Точка весеннего равноденствия.** Два больших круга небесной сферы — эклиптика и экватор — пересекаются (под углом  $\sim 23^{\circ},5$ ), и Солнце в своем годичном движении вдоль эклиптики дважды пересекает экватор. Точка пересечения эклиптики и экватора, около которой Солнце переходит в северное полушарие, называется *точкой весеннего равноденствия* (рис. 6).

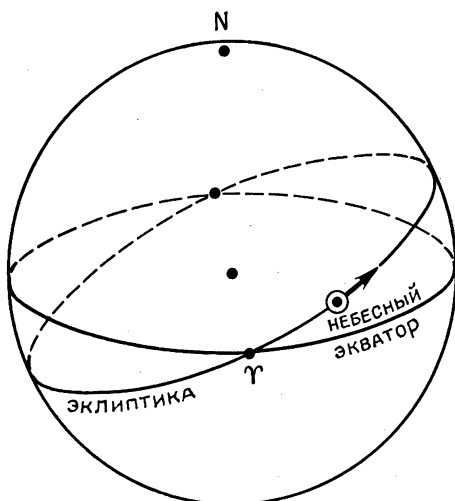


Рис. 6.

Поскольку эклиптика (подвижная эклиптика) под воздействием возмущений от планет поворачивается, точка весеннего равноденствия постепенно перемещается вдоль экватора (одновременно смещаясь и по эклиптике). Поскольку под действием лунно-солнечного притяжения поворачивается в пространстве небесный экватор, точка весеннего равноденствия постепенно перемещается вдоль эклиптики, одновременно смещаясь и по экватору.

Смещение точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики и вдоль экватора можно разделить на ре-

гулярное смещение (прецессию) и периодическое (нутацію).

Лунно-солнечная прецессия и прецессия от планет, складываясь, дают полную *прецессию точки весеннего равноденствия*. Во втором веке до нашей эры эта точка находилась в созвездии Овна, и ей было дано обозначение этого созвездия  $\Upsilon$ . К настоящему времени в результате прецессии она сместилась в созвездие Рыб, пройдя по небу более  $30^\circ$ , но ее обозначение осталось прежним.

Так как прецессия совершается равномерно, точка весеннего равноденствия, положение которой определяется без учета нутации, т. е. по пересечению *мгновенной* эклиптики и *среднего* экватора эпохи, называется *средней точкой весеннего равноденствия*.

Нутація вызывает периодические колебания *истинной точки весеннего равноденствия*, определяемой по пересечению *мгновенной* эклиптики с *истинным* небесным экватором эпохи.

## Глава 2

### СИСТЕМЫ НЕБЕСНЫХ КООРДИНАТ

**Формы задания координат.** Каждое небесное тело занимает определенное положение в трехмерном пространстве Вселенной. Чтобы определить положение тела, нужно задать три координаты его центра. Прямоугольные (декартовы)  $x_1, x_2, x_3$  и полярные  $m, n, x$  координаты могут быть применены для этой цели с равным успехом (рис. 7).

Исторически сложилось, что в астрономии вошли в обиход полярные координаты звезд. Дело в том, что декартовы координаты звезды — это проекции на выбранные координатные оси расстояния до нее; из полярных же координат две определяют направление на звезду и лишь одна — расстояние. Расстояния до близких звезд стали известны лишь недавно, а до громадного их большинства неизвестны и поныне. Но направления на звезды уже давно научились измерять с высокой степенью точности, и две из трех полярных координат хорошо известны для очень многих звезд. К тому же именно они представляют основной интерес для практической астрономии. Поэтому обычно

принимают расстояния до всех звезд одинаковыми. При этом все звезды оказываются расположенными на одной сфере, центр которой совпадает с началом координат. Эта сфера называется *небесной сферой*. Радиус небесной сферы можно принять равным 1, и тогда полярная координата  $x$  у всех звезд также будет равна 1; углы при центре сферы между направлениями можно заменить дугами больших кругов на

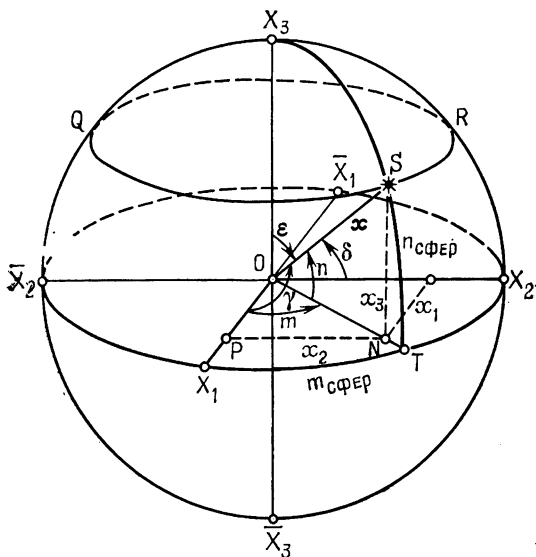


Рис. 7.

сфере между точками пересечения сферы и этих направлений. *Полярные* координаты при центре сферы заменяются, таким образом, *сферическими* координатами на сфере, причем численно сферические координаты  $m_{\text{сфер}}$ ,  $n_{\text{сфер}}$  (см. рис. 7) равны полярным  $m, n$ . *Декартовы* координаты звезд, перенесенных на сферу единичного радиуса, равны направляющим косинусам направлений на эти звезды (см. гл. 3).

**Положение центра системы.** Параллельный перенос системы координат к новому центру вызывает изменение декартовых координат небесных тел. Оно сопровождается поворотом направлений на светила, называемым *параллактическим смещением* светил по

небесной сфере (подробнее явление параллакса рассматривается в гл. 6). Из-за параллакса положение центра сферы, а с ним и начала координат, приходится специально оговаривать. Различают небесную сферу и координаты гелиоцентрические (начало в центре массы Солнца), барицентрические (начало в центре масс системы Земля — Луна), геоцентрические (начало в центре массы Земли), топоцентрические (начало на земной поверхности в месте расположения наблюдателя) и т. п.

Положение центра небесной сферы (и начала координат) не оговаривается в двух случаях: если не вызывает сомнения, что речь идет о топоцентрической системе координат (существует формула «центр сферы совпадает с глазом наблюдателя»), и если сфера используется только для анализа взаимного положения объектов, которые при параллельном переносе системы координат не перемещаются по сфере, например, эклиптики, небесного экватора и других больших кругов (такой анализ делается при установлении взаимосвязи систем координат; см. гл. 3).

**Ориентировка осей системы.** Система сферических координат однозначно определяется положением большого круга на небесной сфере, часто называемого *экватором* системы, и положением точки на экваторе.

На сфере можно провести сколь угодно много больших кругов, каждый из которых может послужить экватором системы координат звезд. Но удобно реализуемых экваторов очень мало. В «классической» сферической астрономии используют лишь три больших круга: *эклиптику*, образованную пересечением небесной сферы с плоскостью эклиптики, *небесный экватор* — сечение сферы плоскостью экватора вращения Земли и *горизонт* — сечение сферы горизонтальной плоскостью места наблюдения, т. е. плоскостью, ортогональной местной вертикали (понятие местной вертикальной линии, или вертикали, уточняется в гл. 4).

Плоскость, задающая экватор системы координат, называется *основной*, или *экваториальной плоскостью* системы. Вне зависимости от того, лежит ли центр системы в ее основной плоскости или он вынесен из этой плоскости при параллельном переносе, система



небесных координат, связанная с первым из перечисленных кругов, называется *эклиптической*, со вторым — *экваториальной* \*), с третьим — *горизонтальной* или, реже, *горизонтной*.

*Галактическую* систему координат, экватор которой проходит на небесной сфере условно посреди Млечного Пути, для точных расчетов не употребляют, и галактические координаты звезд вычисляются только приближенно.

Предлагалась также система координат, у которой экваториальной плоскостью служит так называемая *неизменная плоскость Лапласа*, перпендикулярная к главному моменту количества движения Солнечной системы и, следовательно, не вращающаяся в «инерциальном» пространстве. Положение плоскости Лапласа в настоящее время известно с недостаточной высокой точностью из-за ошибок в оценках масс планет, что и лимитирует ее использование.

Развитие астрономической навигации дальних самолетов и искусственных спутников Земли привело к использованию *ортодромических* и *орбитальных* координат. Дальние трассы самолетов обычно проходят по ортодромиям — дугам больших кругов на Земле, если ее для простоты считать сферической. Проекция орбиты спутника Земли на небесную сферу, если пренебречь гравитационными и др. возмущениями в его движении, — также большой круг. Эти большие круги и являются экваторами двух названных систем.

Чтобы полностью определить систему координат, надо указать оба ее названия. Например, гелиоцентрическая экваториальная система имеет начало в центре массы Солнца и основную плоскость, параллельную экватору вращения Земли.

**Отсчитывание сферических координат.** Для точек и кругов любой системы применяются одни и те же наименования. Точки небесной сферы, удаленные от экватора на  $90^\circ$ , называются *полюсами* системы. Большие круги, проходящие через полюсы и пересекаю-

---

\*) Успехи космонавтики расширили в последние годы применение координат селеноэкваториальных (система лунного экватора), ареоэкваториальных (система экватора Марса) и т. п. В связи с этим предлагалось и для системы земного экватора, как более строгое, наименование *геоэкваториальная система*.

щие экватор под прямыми углами, т. е. сферические перпендикуляры к экватору, — *меридианы* этой системы, а параллельные экватору малые круги — *параллели*. Если на рис. 7 полюсы системы —  $X_3$  и  $\bar{X}_3$ , а экватор — круг, проходящий через точки  $X_1$  и  $X_2$ , то через звезду  $S$  проходят меридиан  $X_3ST\bar{X}_3$  и параллель  $SQR$ .

Одной из сферических координат обычно считается дуга меридиана от экватора до звезды, т. е.  $TS$ , второй координатой — дуга экватора от заданной начальной точки на нем (скажем, от точки  $X_1$ ) до точки  $T$ , численно равная двугранному углу между *нулевым* меридианом, проходящим через  $X_1$ , и меридианом звезды. Первая из координат равна 0 на экваторе и к полюсам возрастает до  $+90^\circ$  или  $-90^\circ$ , вторая отсчитывается вдоль экватора в обусловленном направлении и возрастает от 0 до  $360^\circ$  (реже — в обоих направлениях от 0 до  $\pm 180^\circ$ ).

Рассмотрим перечисленные системы координат подробнее.

**Эклиптические координаты.** В эклиптической системе координата  $m$  отсчитывается от точки весеннего равноденствия, называется *долготой* или *эклиптической долготой* и обозначается  $\lambda$ , координата  $n$  называется *широтой* или *эклиптической широтой*  $\beta$ . Меридианы этой системы называются *кругами широт*. Долгота возрастает в направлении видимого годового движения Солнца по эклиптике и навстречу видимому суточному движению Солнца. Эклиптическое полушарие, из которого увеличение долгот по эклиптике наблюдается происходящим против часовой стрелки, считается северным (северный полюс эклиптики расположен в созвездии Дракона). В северном полушарии широты  $\beta$  положительны.

Если начало эклиптической системы координат совмещено с барицентром системы Земля — Луна, то кажущееся движение Солнца вокруг барицентра при отсутствии возмущений от планет должно происходить точно по эклиптике, а широта Солнца должна быть равна нулю. Если же начало координат находится в центре Земли, то широта Солнца в общем случае уже не равна нулю, хотя и мала. Это — один из случаев параллактического смещения близких

небесных тел при переносе начала координат из одной точки пространства в другую.

**Экваториальные координаты.** В экваториальной системе координата  $m$ , отсчитываемая от точки весеннего равноденствия в ту же сторону, что и долгота, называется *прямым восхождением* и обозначается  $\alpha$ ; координату  $n$  называют *склонением*  $\delta$ . Склонения положительны в сторону северного и отрицательны в сторону южного полюса, причем северным считается полюс, имеющий положительную эклиптическую широту (он расположен в созвездии Малой Медведицы).

Полюсы небесного экватора называются *полюсами мира*, меридианы — *кругами склонений* или *часовыми кругами*.

В гл. 1 показано, что эклиптика, небесный экватор и точка весеннего равноденствия перемещаются среди звезд очень медленно. Поэтому и координаты звезд в двух названных системах изменяются медленно, что является главным достоинством этих систем. Стабильность эклиптических и экваториальных координат звезд позволяет составлять звездные каталоги длительного пользования. Правда, в астрометрии пользуются лишь каталогами экваториальных координат звезд. Эклиптическая система координат используется в основном для определения положений тел Солнечной системы. Для звезд она широко применялась до XVII в., а впоследствии была вытеснена экваториальной системой. Только совсем недавно появились новые каталоги эклиптических координат звезд \*), так как было признано полезным использование эклиптических координат при наблюдениях с поверхности Луны, небесный экватор которой образует с эклипкой угол всего лишь в  $1^{\circ},5$ .

**Некоторые другие системы координат.** В галактической системе и системе, заданной плоскостью Лапласа, координаты звезд также стабильны, но эти системы, как сказано выше, в астрометрии не применяются.

Относительно *ортодромической* и *орбитальной* систем координат нет единой договоренности ни в вопросе о названиях каждой координаты, ни в вопросе о

---

\*) Например, в книге [21].

выборе начала отсчета координаты  $m$ . Это начало может перемещаться вместе с самолетом или спутником Земли или может быть связано с определенной фиксированной точкой ортодромии или орбиты. Например, ось  $X_1$  орбитальной системы координат может быть направлена по вектору скорости ИСЗ (по касательной к орбите), ось  $X_2$  по главной нормали, ось  $X_3$  — по бинормали.

Эти координаты используются для определения положений светил относительно корпуса самолета или спутника, когда ориентация корпуса относительно осей ортодромической или орбитальной системы задана.

**Некоторые круги и точки небесной сферы.** Ряд важных точек и кругов небесной сферы связан с *горизонтальной* системой координат. На рис. 8 показан

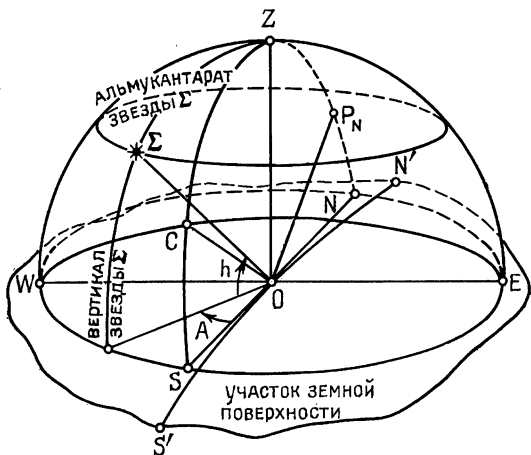


Рис. 8.

участок земной поверхности, в точке  $O$  которого находится наблюдатель. Вертикаль, или отвесная линия  $OZ$  пересекается с небесной сферой над наблюдателем (в *зените*  $Z$ ) и под ним (в *надире*). Круг  $WSEN$  в плоскости, ортогональной вертикали, — *горизонт*. Проведем параллельно оси вращения Земли линию  $OP_N$ . Плоскость, проходящая через прямые  $OZ$  и  $OP_N$ , называется плоскостью меридиана места наблюдения.

С земной поверхностью она пересекается по *меридиану места наблюдения*  $S'ON'$ , с небесной сферой — по *небесному меридиану*  $SZN$ , с линией горизонта — в *точке севера*  $N$  и *точке юга*  $S$ . Вертикальный круг  $WZE$ , ортогональный небесному меридиану и пересекающий горизонт в *точках востока*  $E$  и *запада*  $W$ , называется *первым вертикалом*. Вообще, все вертикальные круги называются *вертикалами* (или *кругами высот*), а все горизонтальные малые круги — *альму-кantarатами*.

**Горизонтальные координаты.** Горизонтальная координата  $t$  называется *азимутом* и обычно обозначается  $A$ . *Геодезические азимуты* отсчитываются от точки севера  $N$  через  $E$ ,  $S$ ,  $W$  и возрастают от  $0$  до  $360^\circ$ . *Астрономические азимуты* принято отсчитывать в том же направлении от точки юга  $S$ . Координата  $p$  — *высота*  $h$  светила над горизонтом — часто заменяется *зенитным расстоянием*  $z$ , которое равно  $90^\circ - h$  и на рис. 8 представлено дугой  $Z\Sigma$ .

На рис. 8 показано, какие положения на топоцентрической сфере занимают небесный экватор ( $WCE$ ) и северный полюс мира ( $P_N$ ) для наблюдателя в северном полушарии. Если же наблюдатель будет находиться в южном полушарии, то полюс  $P_N$  будет опущен ниже горизонта, над горизонтом в южной половине неба окажется южный полюс мира  $P_S$ , и небесный экватор пройдет севернее зенита. Для наблюдателя на экваторе небесный экватор совпадает с первым вертикалом. Дуга  $ZC$  равна склонению  $\delta$  зенита места наблюдения.

**Суточное движение светил.** Оставаясь неподвижными относительно звезд, экваториальная и эклиптическая системы координат участвуют в видимом суточном вращении небесной сферы, вызванном вращением Земли. Горизонтальная система, наоборот, в этом движении не участвует; поэтому горизонтальные координаты звезд непрерывно меняются.

Суточное движение звезд происходит с востока на запад по *суточным параллелям* — малым кругам, параллельным небесному экватору. В восточной половине неба все звезды движутся вверх, от горизонта; в западной половине звезды опускаются. Так как на западную и восточную половины неба делится небес-

ным меридианом, то ясно, что на меридиане направление движения звезд меняется, и меридиан они пересекают, двигаясь горизонтально. Прохождения звездами меридиана называются *кульминациями*, а моменты прохождений — *моментами кульминаций*. Каждая звезда за сутки кульминирует дважды: ближе к зениту и дальше от него. Эти кульминации называются соответственно *верхней* и *нижней*. Если обе кульминации звезды происходят над горизонтом, звезда никогда не заходит за горизонт и называется *незаходящей* (устаревшее название — *циркумполярной*) звездой; если обе кульминации происходят ниже горизонта, звезда — *невосходящая*, она никогда не видна из данной точки земной поверхности. Остальные звезды восходят и заходят.

**Восходы и заходы светил.** Звезды с отрицательными склонениями восходят на юго-востоке и заходят на юго-западе; звезды с  $\delta > 0$  восходят на северо-востоке и заходят на северо-западе.

Солнце летом находится в северной полусфере неба; поэтому для наблюдателя в СССР оно восходит на *NE* и заходит на *NW*, находясь над горизонтом больше 12 часов в сутки. В моменты осеннего и весеннего равноденствий, когда Солнце находится на небесном экваторе, центр Солнца пересекает линию горизонта точно на востоке и на западе; день продолжается 12 часов \*).

Изложенные соображения относительно восхода и захода светил относятся к математическому горизонту. Если же говорить о реальной видимости светил, нужно обратиться к *физическому* горизонту, т. е. фактической нижней границе неба. На море, например, физическим горизонтом является альмукантарат, проходящий ниже математического горизонта. Отрицательная высота этого альмукантарата называется в мореходной астрономии *понижением горизонта*. Если наблюдатель поднимается выше, понижение горизонта

---

\*) Здесь не принимаются в расчет атмосферная рефракция (см. гл. 6), «приподнимающая» Солнце над горизонтом и увеличивающая продолжительность дня, и несовпадение моментов восхода и захода с моментами равноденствий, из-за которого склонение Солнца при прохождении горизонта несколько отличается от нуля.

возрастает, и время видимости светил увеличивается. Это должно быть особенно заметно при наблюдениях с искусственных спутников Земли или удаляющихся от Земли космических кораблей. По мере удаления от Земли ее угловой диаметр уменьшается, и она заслоняет собою всё меньшую часть неба.

### Глава 3

## ВЗАИМОСВЯЗЬ СИСТЕМ НЕБЕСНЫХ КООРДИНАТ

**Классификация координат.** В предыдущей главе системы небесных координат были классифицированы по трем признакам: по положению начала отсчета (координаты подразделяются на гелиоцентрические, геоцентрические, топоцентрические и т. д.), по положению основной плоскости (горизонтальные, экваториальные, эклиптические, ортодромические и др.), по форме задания координат (декартовы или сферические). Теперь необходимо научиться переходить от одной из этих систем к другим.

**Связь декартовых и сферических координат.** Наиболее просто устанавливается связь декартовых и сферических координат. На рис. 7  $x$  — радиус-вектор точки  $S$ ,  $x_1, x_2, x_3$  — декартовы и  $m, n, x$  — полярные координаты этой точки, причем  $m, n$  являются также ее сферическими координатами. Из решения прямоугольных треугольников  $OSN$  и  $ONP$  выводится для декартовых координат группа формул

$$x_1 = x \cos m \cos n,$$

$$x_2 = x \sin m \cos n,$$

$$x_3 = x \sin n,$$

и для обратного перехода — следующая группа формул:

$$m = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1},$$

$$n = \operatorname{arctg} \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$x = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}.$$

Вместо углов  $m, n$  направление на точку  $S$  можно задавать углами  $\gamma, \delta, \varepsilon$  между ее радиусом-вектором  $\mathbf{x}$  и осями  $X_1, X_2, X_3$  соответственно (см. рис. 7). Так как  $\gamma, \delta, \varepsilon$  — углы (которым соответствуют равные им дуги на сфере), то это, очевидно, разновидность сферических координат. Но, с другой стороны, можно показать, что  $\cos \gamma = \cos m \cos n$ ,  $\cos \delta = \sin m \cos n$  и  $\cos \varepsilon = \sin n$ ; следовательно,  $\cos \gamma, \cos \delta, \cos \varepsilon$  — это *нормированные декартовы* координаты  $x_1/x, x_2/x, x_3/x$ . Величины  $\cos \gamma, \cos \delta, \cos \varepsilon$ , называемые *направляющими косинусами* радиуса-вектора  $\mathbf{x}$ , занимают как бы промежуточное положение между декартовыми и сферическими координатами. В отличие от сферических координат их нужно знать три, а не две; в противном случае направление задается неоднозначно.

**Параллельный перенос к новому центру.** На рис. 9  $y_1, y_2, y_3$  — координаты *старого* центра отсчета  $O$  в *новой* системе,  $x_1, x_2, x_3$  — старые и  $x'_1, x'_2, x'_3$  — новые координаты точки  $S$ . Как следует из рисунка, в векторной записи

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

а по отдельным осям

$$x'_1 = x_1 + y_1,$$

$$x'_2 = x_2 + y_2,$$

$$x'_3 = x_3 + y_3.$$

Последние зависимости объединяются в единое соотношение *матричной* записью

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Каждая из трех помещенных в скобки таблиц называется матрицей. В нашем случае каждая матрица представляет собой запись соответствующего вектора:

$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ , и т. п. Это соотношение определяет связь

между двумя системами координат, имеющими разные центры и одинаковую ориентировку осей.



Если перенос начала координат сопровождается большим поворотом направления на светило, то преобразование приходится выполнять только в декартовой системе. Когда заданы сферические координаты светила, перед этим преобразованием их надо перевести в декартовы, а после преобразования перевести обратно в сферические. Такая необходимость может возникнуть, например, при вычислении гелиоцентрических координат Луны по геоцентрическим.

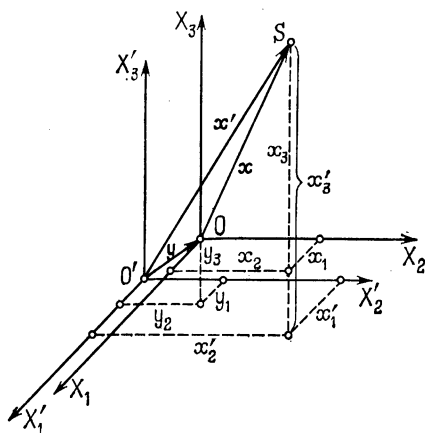


Рис. 9.

Но когда дело касается звезд, перенос начала координат, который всегда ограничен пределами Солнечной системы, вызывает очень малые повороты направлений, и эти *параллактические* повороты можно учесть прямо в сферических координатах. Из рис. 10 видно, что параллактические смещения звезд направлены по дугам больших кругов, расходящимся от точки пересечения вектора переноса начала координат с небесной сферой. Классический подход заключается в том, что эти смещения раскладывают на составляющие вдоль меридиана и параллели системы координат. Величину этих составляющих рассчитать очень легко, так как треугольники  $ABC$  и  $DEF$  по малости  $AB$  и  $DF$  можно считать плоскими и прямоугольными. Если расчет делается в экваториальных координатах, то одна из составляющих (умноженная

на коэффициент, зависящий от склонения звезды) является поправкой в  $\alpha$ , вторая — поправкой в  $\delta$ .

**Поворот системы координат.** Теперь рассмотрим случай, когда две системы координат, «старая» и «новая», имеют общее начало.

Под операцией «поворот системы координат» будем понимать вычисление в «новой» системе координат заданного радиуса-вектора  $x$ , исходящего из

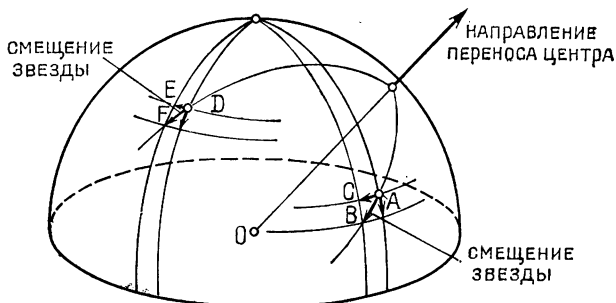


Рис. 10.

начала координат, по его координатам в «старой» системе. Термин «поворот» применяется независимо от того, действительно ли новая система получена из старой путем ее разворотов или же каждая из двух систем существует самостоятельно. Зависимости, полученные для радиуса-вектора  $x$ , естественно, применимы и для любого другого радиуса-вектора.

Операции поворота систем координат выполняются с помощью матриц или тригонометрическими методами.

**Использование сферической тригонометрии для поворотов системы координат.** Основные линии небесной сферы, вдоль которых измеряются сферические координаты звезд, и дуги больших кругов, пересекаясь между собой, образуют сферические треугольники. Решением сферических треугольников занимается сферическая тригонометрия \*).

\*) Изредка в практике астрономических вычислений приходится рассматривать сферические *многоугольники*. Их решение относится к разделу тригонометрии, называемому сферической полигонометрией (см. Приложение 2).

Сферический треугольник имеет шесть элементов (рис. 11). Три стороны измеряются плоскими углами  $a, b, c$  между направлениями из центра сферы к вершинам треугольника; три угла при вершинах измеряются двугранными углами  $A, B, C$  между плоскостями, при пересечении со сферой образующими стороны треугольника. Для решения сферического треугольника, т. е. для отыскания всех его элементов,

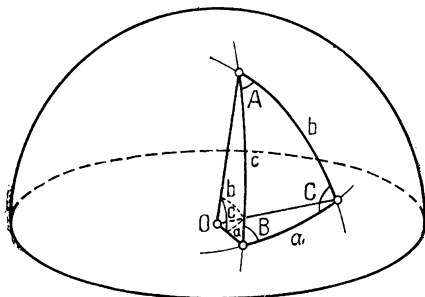


Рис. 11.

всегда достаточно знать три элемента (в отличие от плоского треугольника, который, например, нельзя решить, если известны три угла при вершинах).

Формулы сферической тригонометрии дадим в приложении, а здесь прямо рассмотрим пример, в который подставим необходимые зависимости.

На рис. 12 показаны две произвольно выбранные системы координат  $a, b$  и  $a', b'$ . Для определенности положим, что долготы в этих системах отсчитываются от точек  $Q$  и  $Q'$  большого круга, проходящего через полюсы обеих систем, и угол между основными плоскостями (или между полярными осями) обеих систем равен  $\varphi$ . Координаты звезды  $S$  в первой системе  $a = \overline{QN}$ ,  $b = \overline{NS}$ , во второй системе  $a' = \overline{Q'N'}$ ,  $b' = \overline{N'S}$ . Допустим, что заданы координаты  $a'$  и  $b'$  и нужно вычислить  $a$  и  $b$ . В треугольнике, вершины которого — звезда  $S$  и полюсы обеих систем, известны элементы  $\overline{SP'}$ ,  $\angle SP'P$  и  $P'P$ . Для этого треугольника общие формулы сферической тригонометрии (49), (50) и (52)

(см. Приложение 2) принимают следующий вид:

$$\cos a \cos b = \sin b' \sin \vartheta + \cos b' \cos \vartheta \cos a',$$

$$\sin a \cos b = \sin a' \cos b',$$

$$\sin b = \sin b' \cos \vartheta - \cos b' \sin \vartheta \cos a'.$$

Эти уравнения и служат для определения искоемых координат. Заметим, что для двух неизвестных ( $a$  и  $b$ )

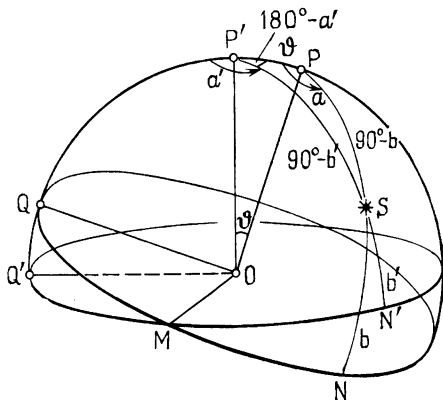


Рис. 12.

необходимы три уравнения. Дело в том, что широта  $b$  от полюса до полюса изменяется на  $180^\circ$ , от  $+90^\circ$  до  $-90^\circ$ ; при этом ее синус изменяется от  $+1$  до  $-1$ , и каждому значению  $\sin b$  соответствует одно значение  $b$ . Долгота же возрастает от  $0$  до  $360^\circ$ ; при этом ее синус и косинус дважды проходят через каждое значение; для устранения этой двузначности, делающей решение неопределенным, и служит третье уравнение.

**Поворот с применением матриц.** Матричный способ поворота координат основан на соответствии дуг на небесной сфере углам при ее центре. Рассмотрим для простоты поворот плоских координат. На рис. 13 представлено такое преобразование, при котором координатные оси из старого положения  $X_1, X_2$  поворачиваются на угол  $\alpha$  в новое положение  $X'_1, X'_2$ .

Элементарные построения на рис. 13 показывают, что

$$x'_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha,$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.$$

Принята следующая *матричная* форма записи этих равенств:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

правая часть которой представляет собой произведение матриц. Матрица  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  называется матрицей элементарного поворота.

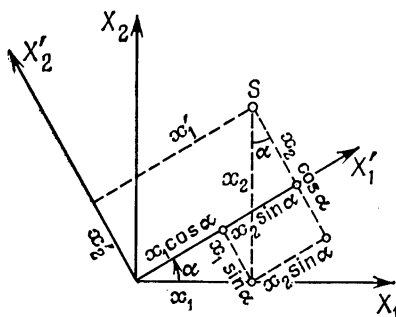


Рис. 13.

Когда матрицы записываются в общем виде, их элементы снабжаются индексами, формируемыми из порядковых номеров строк и столбцов (матрицы-столбцы несут одинарные индексы). В нашем случае имеем

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Вводя для квадратной матрицы обозначение  $m$ , а для матриц-столбцов соответственно  $x'$  и  $x$ , приводим это соотношение к виду

$$x' = mx.$$

Это — наиболее лаконичная форма записи матричного уравнения.

Используя единые правила, установленные для операций с матрицами, можно развернуть матричную запись в систему линейных уравнений обычного вида. Элемент, расположенный в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце матрицы-произведения, вычисляется следующим образом: элементы  $i$ -й строки матрицы-множимого умножаются на элементы  $j$ -го столбца матрицы-множителя с теми же порядковыми номерами, а затем произведения суммируются. В рассматриваемом случае элементы единственного столбца матрицы  $x'$  равны

$$x'_1 = m_{11}x_1 + m_{12}x_2,$$

$$x'_2 = m_{21}x_1 + m_{22}x_2$$

или, что то же самое,

$$x'_1 = \sum_{j=1}^2 m_{1j}x_j,$$

$$x'_2 = \sum_{j=1}^2 m_{2j}x_j.$$

Первые индексы при коэффициентах  $m$  здесь совпадают с индексами в левой части. Поэтому те и другие можно заменить индексом  $i$ :

$$x'_i = \sum_{j=1}^2 m_{ij}x_j \quad (i = 1, 2).$$

Опустив для краткости знак суммы, получим *тензорную* запись произведения квадратной матрицы на матрицу-столбец:

$$x'_i = m_{ij}x_j,$$

иногда используемую в астрономической литературе и внешне очень похожую на матричную запись  $x' = mx$ .

**Использование тензорной записи.** Тензорное уравнение можно развернуть в алгебраические уравнения, количество которых при одном индексе в левой части равно размерности пространства  $n$  ( $n = 2$  в рассмотренном плоском примере и  $n = 3$  в наиболее часто встречающихся преобразованиях в трехмерном пространстве). В каждом из этих  $n$  уравнений индексу,

присутствующему в обеих частях уравнения, присваивается только одно значение; остальным индексам присваиваются поочередно все значения от 1 до  $n$  так, чтобы образовать все возможные сочетания, и результаты суммируются. Если при этом встречаются *символы Кронекера*  $\delta$  (с двойным индексом) или  $\varepsilon$  (с тройным индексом), то после замены буквенных индексов цифрами им приписываются следующие значения:

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если индексы различны,} \\ +1, & \text{если индексы одинаковы;} \end{cases}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{если индексы можно уложить} \\ & \text{в последовательность } 1-3-2-1-3, \\ 0, & \text{если хотя бы два индекса одинаковы,} \\ +1, & \text{если индексы можно уложить} \\ & \text{в последовательность } 1-2-3-1-2. \end{cases}$$

Тензорная запись удобна для уравнений, при составлении которых производится перебор или циклическая перестановка величин. Рассмотрим в качестве примера запись динамических уравнений Эйлера

$$M_i = \dot{\omega}_i I_{ii} + \varepsilon_{ijk} \omega_j \omega_k I_{kk} \quad (n=3).$$

Перебором индексов получаем, например, для  $i=1$ :

$$\begin{aligned} M_1 = & \dot{\omega}_1 I_{11} + \varepsilon_{111} \omega_1^2 I_{11} + \varepsilon_{112} \omega_1 \omega_2 I_{22} + \\ & + \varepsilon_{113} \omega_1 \omega_3 I_{33} + \varepsilon_{121} \omega_2 \omega_1 I_{11} + \varepsilon_{122} \omega_2^2 I_{22} + \\ & + \varepsilon_{123} \omega_2 \omega_3 I_{33} + \varepsilon_{131} \omega_3 \omega_1 I_{11} + \varepsilon_{132} \omega_3 \omega_2 I_{22} + \varepsilon_{133} \omega_3^2 I_{33}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{123} = +1$ ,  $\varepsilon_{132} = -1$ , остальные символы  $\varepsilon$  равны нулю. Окончательно имеем

$$M_1 = \dot{\omega}_1 I_{11} + \omega_2 \omega_3 (I_{33} - I_{22}).$$

Сделав замену  $I_{11} = A$ ,  $I_{22} = B$ ,  $I_{33} = C$ , убедимся, что получено первое из уравнений Эйлера (см. гл. 1). Эта замена связана с тем, что матрица

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix},$$

характеризующая инерционные свойства тела и называемая его *тензором инерции*, в случае совпадения

осей координат с главными осями инерции тела (как это принято в теории вращения Земли) становится равной

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

**Матрицы элементарных поворотов.** После этого небольшого отступления вернемся к поворотам координат. Рассмотрим теперь поворот ортогональной правой *трехмерной* системы координат. Если бы на рис. 13 была проведена еще одна координатная ось,  $X_3$  (по нормали к плоскости рисунка вверх), а точка  $S$  лежала бы вне плоскости рисунка и имела координаты  $x_1, x_2, x_3$ , то можно было бы считать, что изображенный поворот произведен вокруг оси  $X_3$ ; поэтому зависимость новых координат  $x'_1$  и  $x'_2$  от старых  $x_1$  и  $x_2$  сохранилась бы прежней, а координата  $x_3$  не изменилась бы:

$$x'_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha,$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha,$$

$$x'_3 = x_3 \quad \text{или} \quad x'_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3.$$

Воспользовавшись установленным выше правилом, можно записать:

$$x' = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Этот поворот выполнен против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси  $X_3$ . При повороте по часовой стрелке матрица поворота будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этим исчерпываются все случаи поворотов вокруг оси  $X_3$ . Можно записать еще по две матрицы поворотов вокруг осей  $X_1$  и  $X_2$ , и тем перебрать все случаи элементарных поворотов. Для шести стандартных



матриц поворотов можно ввести, например, такие обозначения:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha}^{\mu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; & P_{-\alpha}^{\mu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \\
 P_{\alpha}^{\nu} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}; & P_{-\alpha}^{\nu} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}; \\
 P_{\alpha}^{\pi} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & P_{-\alpha}^{\pi} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Надстрочный индекс  $\mu$  соответствует оси  $X_1$ ,  $\nu$  — оси  $X_2$ ,  $\pi$  — оси  $X_3$ , т. е. каждый раз показывает номер оси, а подстрочный — величину поворота системы координатных осей вокруг этой оси против часовой стрелки.

Рассмотренный нами поворот можно теперь сокращенно записать так:

$$x' = P_{\alpha}^{\pi} x.$$

Два последовательных поворота

$$x' = P_{\alpha}^{\pi} x \quad \text{и} \quad x'' = P_{-\beta}^{\mu} x'$$

можно путем подстановки объединить в одно соотношение

$$x'' = P_{-\beta}^{\mu} P_{\alpha}^{\pi} x,$$

правая часть которого вычисляется по приведенному выше правилу. Такие же операции можно выполнять в случае трех и более последовательных поворотов.

Применяя последовательно три элементарных поворота, всегда можно осуществить переход от одной системы координат к другой, как угодно ориентированной относительно нее. Наиболее употребительны две типовые последовательности элементарных поворотов. Углы, используемые в первой из них, называются *самолетными*, во второй — *эйлеровыми* углами.

**Самолетные углы.** «Самолетные» углы чаще всего употребляются в тех случаях, когда оси двух связываемых систем координат попарно близки друг к другу. (Например, при полете самолета по ортодромии удобно связывать самолетными углами ортодромические координаты и координаты, задаваемые осями курса,

крена и тангажа самолета. Отсюда самолетные углы и получили свое название.) При использовании этих углов повороты системы координат совершаются последовательно вокруг каждой из трех координатных осей. На рис. 14 показаны последовательные повороты на самолетные углы  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\pi$  вокруг осей  $X_1$ ,  $X'_2$ ,  $X''_3$ . Самолетные углы особенно удобны при малых поворотах, когда произведения синусов двух углов в произведениях матриц поворотов становятся малыми величинами второго порядка и их можно отбрасывать. При этом делается безразличным порядок поворотов, т. е. можно считать, что

$$P_{-\beta}^{\mu} P_{\alpha}^{\pi} = P_{\alpha}^{\pi} P_{-\beta}^{\mu},$$

что в обычных условиях неверно.

Самолетные углы применяются и при решении «чисто» астрономических задач. Так, с их помощью была построена одна из математических моделей вращения Луны [19].

**Углы Эйлера.** Эйлеровы углы — это углы поворота вокруг полярной оси старой координатной системы (угол прецессии  $\psi$ ), вокруг линии пересечения основных плоскостей обеих систем (угол нутации  $\theta$ ) и вокруг полярной оси новой координатной системы (угол собственного вращения  $\varphi$ ). Если в основной плоскости каждой системы лежат оси  $X_1$  и  $X_2$ , то из трех элементарных поворотов два совершаются вокруг оси  $X_3$ .

Можно заметить, что когда в гл. 1 угловая скорость вращения Земли была разложена на составляющие  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\varphi}$ , получились именно скорости изменения эйлеровых углов, задававших переход от некоторой эклиптической системы координат, в которой точка начала отсчета долгот не прецессирует, к координатной системе, осями которой служат оси фигуры Земли (см. рис. 4).

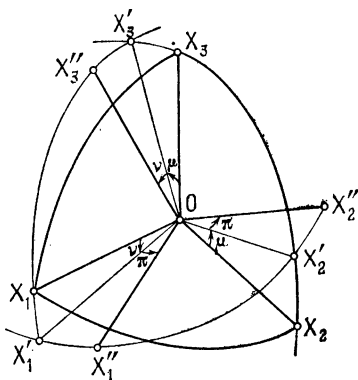


Рис. 14.

**Правила использования матриц поворотов.** Как же выполнить поворот системы с помощью матриц? Для этого нужно:

1) определить, в какой последовательности, вокруг каких осей, на какие углы и в каких направлениях должны быть выполнены повороты;

2) исходя из этого, записать в принятых обозначениях последовательность матриц поворотов (справа налево);

3) заменить сокращенные обозначения матриц поворотов самими матрицами и перемножить их по принятым правилам; если нужно выполнить поворот не декартовых, а сферических координат, то их сначала нужно перевести в прямоугольные.

Любые повороты координат можно выполнить, совершенно формально руководствуясь этими правилами.

Рассмотрим пример, приведенный на стр. 34. Направим оси  $X_3$  обеих систем по полярным осям  $OP$ ,  $OP'$  и  $X_1$  — к началам отсчета долгот  $Q$ ,  $Q'$  (рис. 12). Поворот от системы  $(a', b')$  к  $(a, b)$  можно разложить на элементарные повороты: вокруг оси  $X_3$  против часовой стрелки до совмещения оси  $X_1$  с линией  $OM$ ; вокруг нового положения оси  $X_1$  на угол  $\theta$  по часовой стрелке до совмещения оси  $X_3$  с направлением  $OP$ ; вокруг нового положения оси  $X_3$  по часовой стрелке до совмещения оси  $X_1$  с направлением  $OQ$ . Величины первого и третьего поворотов равны  $90^\circ$ , так как точка  $M$ , будучи удаленной на  $90^\circ$  от точек  $P$  и  $P'$ , является полюсом большого круга  $Q'QP'P$ , а следовательно, удалена на  $90^\circ$  и от точек  $Q$  и  $Q'$ . Записываем последовательность поворотов:

$$x = \Pi_{-90^\circ}^\pi \Pi_{-\theta}^\mu \Pi_{+90^\circ}^\pi x';$$

подставляем стандартные матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos a \cos b \\ \sin a \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a' \cos b' \\ \sin a' \cos b' \\ \sin b' \end{pmatrix},$$

и после перемножения матриц в правой части получаем

$$\begin{pmatrix} \cos a \cos b \\ \sin a \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a' \cos b' \cos \vartheta + \sin b' \sin \vartheta \\ \sin a' \cos b' \\ -\cos a' \cos b' \sin \vartheta + \sin b' \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Эти же соотношения выше получены с применением сферической тригонометрии.

Еще один пример: переход от экваториальных к эклиптическим координатам и обратно. Легко убедиться, что

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \Pi_{-\varepsilon}^{\mu} \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \Pi_{+\varepsilon}^{\mu} \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix},$$

где  $\varepsilon$  — наклон эклиптики к экватору.

Если при преобразовании координат нужно учесть и поворот координатных осей, и перенос центра, то эти операции выполняются последовательно.

Запись преобразования координат в матричной форме имеет то достоинство, что она не является только обычным уравнением: она одновременно и вычислительная схема для электронной вычислительной машины.

**Соотношения между угловыми скоростями.** С задачей поворота координат соприкасается задача определения угловой скорости вращения системы координат  $x'$  относительно пространства, заданного системой координат  $x$  (непосредственно определяются проекции этой скорости на собственные оси системы  $x'$ ). Если системы  $x'$  и  $x$  связаны соотношением

$$x' = tx$$

и если искомую угловую скорость представить матрицей

$$\check{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

называемой за свой вид кососимметричной матрицей, то компоненты искомой скорости найдутся из

матричного произведения

$$\check{\omega} = m (m^T)^*,$$

где  $m^T$  — транспонированная матрица  $m$ , полученная из последней заменой строк столбцами:

$$m_{ij}^T = m_{ji}.$$

В тензорной форме

$$\check{\omega}_{jk} = m_{jl} \dot{m}_{kl}.$$

Если учесть места размещения компонент определяемой скорости в кососимметричной матрице  $\check{\omega}$  и правило индексации элементов матриц, то можно записать

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\check{\omega}_{23} = \check{\omega}_{32} = \\ \omega_2 &= \check{\omega}_{13} = -\check{\omega}_{31} = \\ \omega_3 &= -\check{\omega}_{12} = \check{\omega}_{21} = \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \check{\omega}_{jk},$$

или, после объединения этой формулы с предыдущим соотношением для  $\check{\omega}_{jk}$ ,

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} m_{jl} \dot{m}_{kl}.$$

Чтобы постановка задачи имела смысл, матрица поворота  $m$  должна быть дифференцируемой функцией времени. Производные  $\dot{m}_{kl}$  выражаются через производные по времени аргументов матрицы, т. е. эйлеровых или самолетных углов. Так, при использовании эйлеровых углов

$$\dot{m}_{kl} = \frac{\partial m_{kl}}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial m_{kl}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial m_{kl}}{\partial \varphi} \dot{\varphi}.$$

Именно из этих уравнений можно получить, например, *кинематические уравнения Эйлера* для скорости вращения Земли:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \omega_2 &= +\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \omega_3 &= +\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

## КООРДИНАТЫ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЬ

**Форма земной поверхности.** Эта глава в основном посвящена способам задания координат точек на *физической поверхности* Земли, под которой понимают фактическую поверхность суши, а в морях и океанах — не возмущенную ветром и приливами поверхность воды.

При определении координат звезд используют единую шаровую поверхность — небесную сферу. Считать сферой физическую поверхность Земли нельзя даже с большой натяжкой. Во-первых, как известно, сложным рельефом обладает поверхность суши. Во-вторых, расстояния от центра Земли до точек физической поверхности вблизи экватора в среднем на 20 км больше расстояний до точек поверхности в полярных зонах. (Полярное сжатие Земли — логический результат приближения ее к состоянию гидростатического равновесия [9] при наличии центростремительного ускорения, создаваемого вращением Земли.)

**Геоцентрические координаты.** Если все же Землю как планету представить равным ей по объему шаром \*) с центром в центре массы Земли, то нужно решить, каким образом отнести к сферической поверхности этого шара (*редуцировать* на нее) точки земной поверхности. Наиболее удобно, по-видимому, каждую точку физической поверхности редуцировать на сферу вдоль радиуса-вектора этой точки, проведенного из центра сферы. Тогда разность радиуса-вектора точки и радиуса сферы дает высоту (положительную или отрицательную) точки над сферой, причем высота отсчитывается по нормали к сфере. Задав на этой сфере систему сферических координат, которую естественно связать с плоскостью экватора фигуры Земли, получим три координаты точки (широту, долготу и высоту), полностью определяющие ее

---

\*) Радиус такого шара  $R \approx 6371$  км или, точнее, для принятых в СССР размеров Земли, выражаемых через размеры *эллипсоида Красовского*,  $R = 6371110$  м.

положение. Такая система координат называется *геоцентрической*\*) (рис. 15). *Геоцентрическая широта* пункта равна углу между его радиусом-вектором при центре сферы и плоскостью экватора фигуры; она положительна в северном и отрицательна в южном полушарии. *Геоцентрическая долгота* равна двугранному углу между меридианом пункта и нулевым меридианом

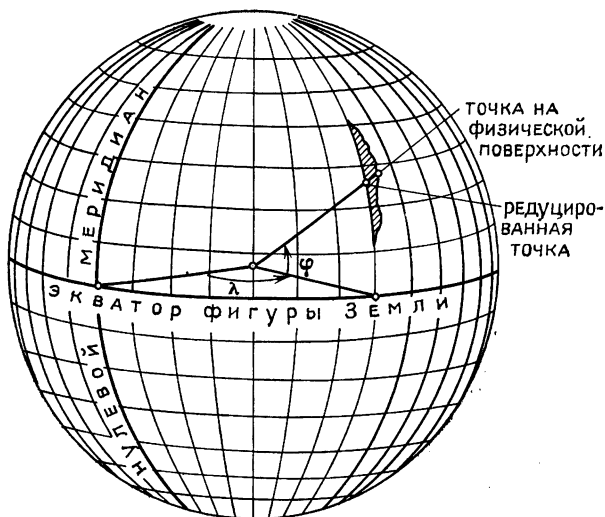


Рис. 15.

(меридианом места старого расположения Гринвичской обсерватории), долгота которого считается равной нулю. Долготы могут принимать значения от 0 до  $180^\circ$ . Будем считать их положительными в восточном и отрицательными в западном полушарии, хотя в международной практике употребляется и обратное обозначение.

Геоцентрическая система координат проста и логична, но имеет серьезный недостаток: благодаря полярному сжатию Земли около половины ее поверхности существенно возвышается над сферой; другая

\*) Не путать с геоцентрическими небесными координатами, где это название определяет лишь положение центра, но не ориентировку основной плоскости!

половина (в полярных областях) имеет значительную отрицательную высоту. Это тем более неудобно, что невозмущенную поверхность мирового океана, которая могла бы служить исходной поверхностью глобальной системы высот, нельзя использовать для отсчета геоцентрических высот, так как на разных широтах высота поверхности океана над сферой различна.

**Земной эллипсоид.** Гораздо лучше, чем сфера, форму Земли отражает надлежащим образом подобранный *эллипсоид вращения*. Близость формы поверхности мирового океана к сжатому эллипсоиду вращения (т. е. к фигуре, получаемой вращением эллипса вокруг малой оси) была установлена наблюдениями и подтверждена теоретически (впервые это сделал Клеро в XVIII в.). Ось симметрии земного эллипсоида должна совпадать с осью фигуры, центр совмещается с центром массы Земли. Экваториальный радиус (большая полуось) эллипсоида, поверхность которого в среднем совпадает с уровнем моря, примерно равен 6378 км, полярный радиус  $\sim 6357$  км. Последнее значение легко запоминается: его определяет количество букв в словах «Земной шар очень большой».

Экваториальное сечение земного эллипсоида — окружность радиусом 6378245 м (по Ф. Н. Красовскому), а меридиональные сечения — эллипсы со сжатием  $1/298,3$  или, что то же самое, с эксцентриситетом  $e = 0,08181$  (сжатие эллипса примерно равно  $0,5e^2$ ).

**Геодезические координаты.** Теперь можно повторить действия, которые выполнялись для сферы. Все точки физической поверхности нужно тем или иным способом редуцировать на эллипсоид вращения, от поверхности эллипсоида отсчитывать высоты и вдоль нее — широты и долготы. Положим, что каждая точка редуцируется на эллипсоид вдоль нормали к его поверхности, проходящей через эту точку. С геоцентрическим радиусом-вектором точки эта нормаль пересекается под некоторым углом, вследствие чего не только высота, но и широта точки зависит от принятых размеров эллипсоида. Система координат на эллипсоиде, которые называются *геодезическими*,



задается следующим образом (рис. 16): экватор системы лежит в плоскости экватора фигуры; *геодезическая долгота* равна геоцентрической долготе; *геодезическая широта* равна углу между нормалью к эллипсоиду, проходящей через определяемую точку, и плоскостью экватора. На экваторе и полюсах геодезическая широта равна геоцентрической; в остальных случаях геодезическая широта по модулю больше гео-

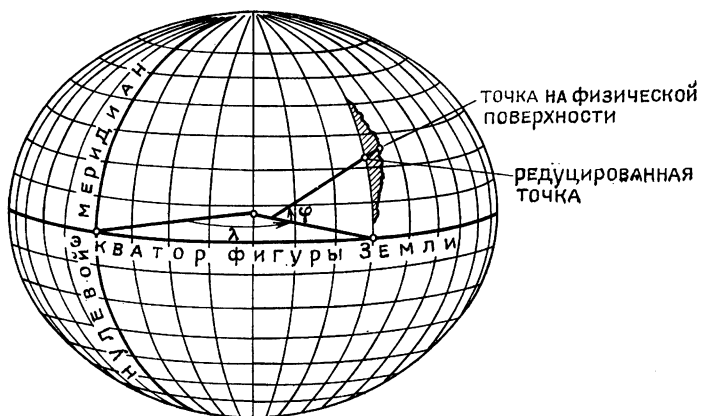


Рис. 16.

центрической; их разность пропорциональна синусу удвоенной широты и от нуля на экваторе и полюсах возрастает до  $11,5 \approx 21$  км на широте  $\pm 45^\circ$ . Это означает, что точка с геодезической широтой  $45^\circ$  расположена на 21 км ближе к экватору, чем точка с геоцентрической широтой  $45^\circ$ , лежащая на том же меридиане.

Учитывая небольшую трехосность формы Земли (т. е. небольшую, на 1:30 000, сплюснутость ее экваториального сечения), можно было бы рекомендовать как второе после сферы приближение к форме Земли не двухосный эллипсоид (эллипсоид вращения), а трехосный. Но малость сжатия земного экватора по сравнению со сжатием меридианов и сложность вычисления геодезических координат на трехосном эллипсоиде удерживают геодезистов от принятия этого предложения.

**Геоид.** Сфера и эллипсоид — геометрически правильные поверхности, но форма Земли подчиняется не законам геометрии, а законам тяготения. Приборы, устанавливаемые по вектору силы тяжести, материализуют горизонтальные, или *уровенные*, поверхности либо ортогональные им *отвесные линии* (*вертикали*). Из-за неравномерного распределения земных масс вертикали в общем не ортогональны к эллипсоиду вращения. Поэтому и такая уровенная поверхность, как поверхность мирового океана, по форме несколько отличается от эллипсоидальной. Но так как это достаточно гладкая поверхность, ее также можно приспособить для построения на ней системы сферических координат. Чтобы эта поверхность, или геоид, стала замкнутой, нужно определить ее положение под континентами. Высоты на поверхности суши определяются главным образом нивелированием, исходные пункты которого лежат на уровне моря, т. е. на геоиде; следовательно, эти *высоты над уровнем моря* отсчитаны от геоида. В связи с этим удобна трактовка геоида как поверхности, везде лежащей на глубине, равной измеренной высоте физической поверхности. (Строго говоря, результаты нивелирования можно интерпретировать по-разному; при этом высоты точек над уровнем моря, а с ними — и положение геоида под континентами могут несколько различаться.)

**Астрономические координаты.** Точки поверхности суши естественно редуцировать на геоид вдоль отвесных линий; точки водной поверхности редуцировать на него не нужно. Одна из координат точки — ее *высота над уровнем моря*. Сферические координаты на геоиде, называемые *астрономическими* \*) (иногда *географическими*) координатами, определяются так: *астрономическая долгота* равна двугранному углу между нулевым меридианом и плоскостью, проходящей через вертикаль пункта параллельно оси фигуры Земли \*\*); *астрономическая широта* равна углу между

\*) Обратим внимание на то, что «астрономическими» называются координаты не небесных тел, а точек земной поверхности. Этим названием координаты обязаны тому, что определяются из астрономических наблюдений.

\*\*\*) Эта плоскость в общем случае не проходит через ось фигуры, так как ось фигуры и вертикаль могут не пересекаться, а скрещиваться.

вертикалью и экватором фигуры. Так как геоид не является математически правильной фигурой, расстояния между пунктами и астрономические координаты пунктов не связаны простыми математическими зависимостями. Астрономические координаты при точных геодезических расчетах проще сначала переводить в геодезические или геоцентрические, и затем вести вычисления на эллипсоиде вращения или сфере.

**Форма геоида.** Форма геоида задается картой высот геоида над эллипсоидом (рис. 17) или каталогом геодезических координат (включая высоты) точек геоида, расположенных столь густо, чтобы отдельные области геоида между этими точками можно было описать линейными или какими-либо более сложными функциями этих координат.

Заметим, что существует математическое выражение, которым можно описать форму геоида в целом. Это — *ряд сферических функций*, позволяющий вычислить вертикальное отклонение геоида от эллипсоида в любом пункте как сумму того или иного количества отклонений, каждое из которых представлено отдельной сферической функцией того или иного порядка от координат пункта. Чем больше число членов ряда и выше порядок разложения, тем точнее этот ряд представляет истинный геоид. Карта высот геоида над эллипсоидом, воспроизведенная по книге [27] на рис. 17, как раз и получена с помощью ряда, включающего сферические функции до 15-го порядка. Гармонический анализ, дающий коэффициенты членов такого ряда, можно, конечно, выполнить не только для геоида, но и для реальной физической поверхности Земли. Но рельеф континентов получился бы столь обобщенным, что изготовленная этим методом гипсометрическая карта Земли не представляла бы никакой ценности. Между прочим, для Луны гармонический анализ высот физической поверхности при современном объеме знаний оказался оправданным и составил целое направление в работах по лунной картографии.

**Координаты на поверхности Луны.** В отличие от высот на Земле, высоты точек физической поверхности Луны получены геометрическими методами и поэтому отсчитываются не от какой-либо уровенной по-

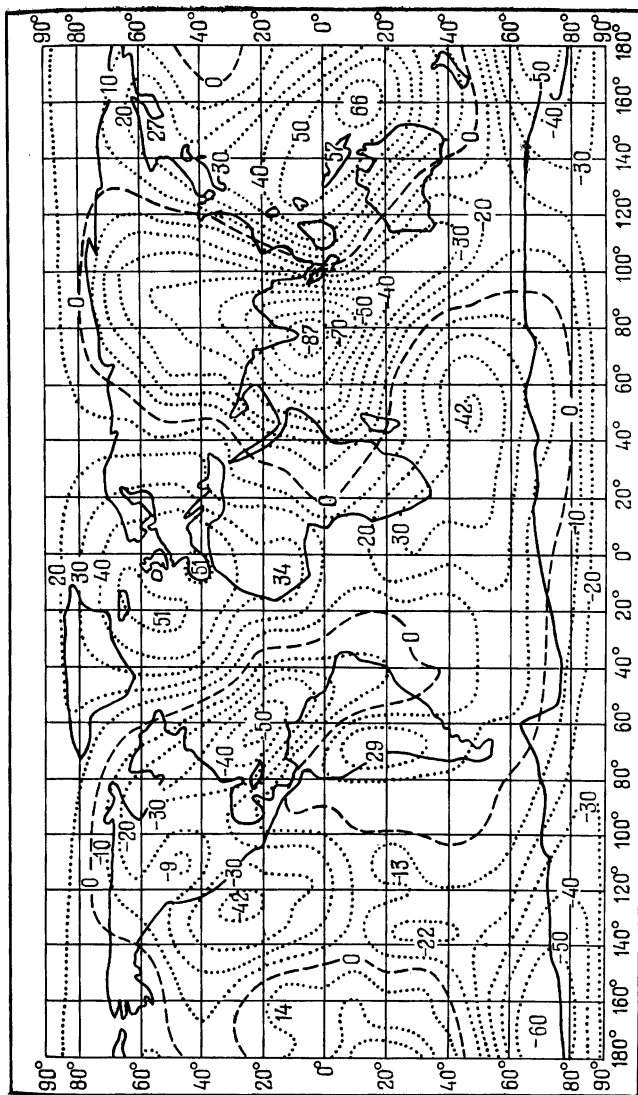


Рис. 17.

верхности, а от селеноцентрической сферы обусловленного радиуса. В совокупности с широтами и долготами на этой сфере они образуют систему *селеноцентрических* координат. Эти же координаты можно считать *селенодезическими*, так как для отображения формы Луны с ее незначительным полярным сжатием применение эллипсоида вращения нецелесообразно. Но чаще всего для этих координат применяется другое наименование — *селенографические* координаты.

Система *астрономических* координат пунктов лунной поверхности, если таковая потребуется, может быть построена на *селеноиде* — уровненой поверхности, форма которой определена из анализа гравитационных возмущений в движении искусственных спутников Луны, а размеры выбраны такими, чтобы селеноид касался упомянутой селеноцентрической сферы в точке, где широта и долгота равны нулю.

**Декартовы координаты и границы их применения.** К трем описанным выше системам координат пунктов поверхности Земли надо присоединить систему *декартовых* координат с началом в центре массы Земли и с осями, совпадающими с осями геоцентрической системы. Если результаты геодезических измерений обрабатываются в этой системе, не надо делать никаких предположений о форме Земли, так как «геодезические задачи» решаются не на криволинейной земной поверхности, а в декартовом пространстве. Поэтому в последние годы при решении некоторых специальных задач высшей геодезии, особенно из области космической геодезии, декартовы координаты находят все более широкое применение.

Всё же поверхностные координаты по-прежнему употребляются в подавляющем большинстве случаев. Главная причина этого заключается в том, что в геодезии, не говоря уже о топографии, вычислительной обработке подвергаются обычно измерения, выполненные на ограниченных территориях; расстояния между геодезическими пунктами гораздо меньше, чем их удаление от центра Земли. Центр Земли, а с ним и декартову систему координат, просто не имеет смысла «вмешивать» в эти расчеты. К тому же геодезические расчеты на сфере или эллипсоиде вращения, методика

которых хорошо разработана, дают необходимую точность. При малых расстояниях они особенно упрощаются, так как сводятся к плоской задаче. Собственно, с решения «плоских» землемерных задач и началась в Древнем Египте история геодезии. Кроме того, поверхностные координаты удобнее наносить на карты. Наконец, как будет далее показано, из астрономических наблюдений наиболее просто получаются астрономические координаты, т. е. один из видов поверхностных координат.

**Области использования различных поверхностных координат.** В каких же случаях используются геоцентрические, в каких геодезические и в каких — астрономические координаты?

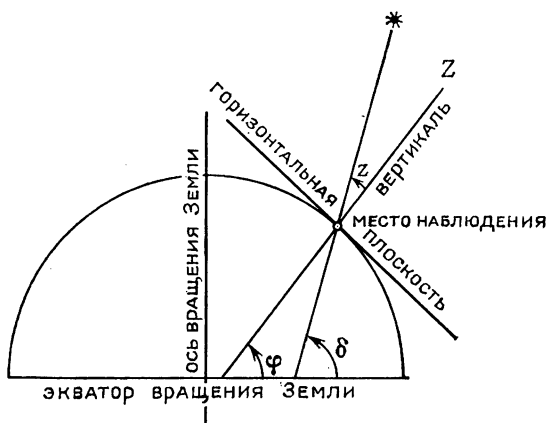


Рис. 18.

Самый распространенный прибор для определения вертикали — уровень или отвес. Он показывает направление силы тяжести, которое ортогонально геоиду. Геодезические и астрономические приборы «нивелируются», т. е. устанавливаются своими осями в горизонтальной системе координат, с помощью уровней. Какие же координаты получаются из астрономических наблюдений?

Рассмотрим в качестве простейшего примера определение широты по кульминирующей звезде (рис. 18). Чтобы найти широту, достаточно измерить зенитное

расстояние  $z$  этой звезды и подставить его в соотношение  $\varphi = \delta - z$  \*), где  $\delta$  — склонение звезды, отсчитываемое от экватора вращения. Ясно, что полученная широта — это угол между экватором вращения Земли и местной вертикалью, т. е. *астрономическая широта*, но не в системе экватора фигуры, а в системе мгновенного экватора. В той же системе получается из астрономических наблюдений и долгота. Из-за движения полюсов по земной поверхности мгновенные координаты постепенно меняются. В гл. 6 будет показано, что движение мгновенных полюсов можно учесть и привести полученные координаты к средним полюсам, т. е. *в систему экватора фигуры*.

Предположим, что нормали к поверхностям геоида и эллипсоида в какой-то точке совпадают. Тогда геодезические координаты этой точки будут равны астрономическим, приведенным к средним полюсам. Геодезическими методами можно очень точно получить положение других пунктов относительно этой точки. Так как расчеты при этом проводятся на эллипсоиде, с формой геоида эти координаты никак не связаны; они будут *геодезическими* координатами. Если в этих пунктах геоид наклонен к эллипсоиду, то их астрономические координаты с геодезическими не совпадут.

По-иному обстоит дело с определением координат искусственного спутника Земли из наблюдений звезд с его борта. Можно было бы определить широту спутника из приводившегося выше соотношения  $\varphi = \delta - z$ . Но зенитное расстояние отсчитывается от вертикальной линии, а уровни, как известно, в состоянии невесомости не работают. Для определения положения вертикали может служить, например, оптический датчик вертикали. Этот прибор, вообще говоря, определяет направление со спутника на геометрический центр видимого горизонта. Чем выше орбита спутника и чем меньше угловой диаметр Земли, тем ближе это направление к *геоцентрической* вертикали. Поэтому на искусственном спутнике Земли наблюдения дают

---

\*) Для звезды, кульминирующей южнее зенита,  $\varphi = \delta + z$ , а для незаходящей звезды в нижней кульминации  $\varphi = 180^\circ - \delta - z$ .

(в идеале) *геоцентрические координаты в системе мгновенного экватора.*

Таким образом, в зависимости от подхода получаются разные координаты на земной поверхности. Даже после того как мгновенные координаты будут приведены к средним полюсам (в систему экватора фигуры Земли), останутся различия: между астрономическими и геодезическими координатами на величину *уклонения отвеса* от нормали к эллипсоиду и между геодезическими и геоцентрическими координатами — на величину угла между нормальями к эллипсоиду и к сфере. Это необходимо учитывать для правильной интерпретации результатов астрономических наблюдений.

**Движение ИСЗ.** Представляется необходимым завершить эту главу описанием параметров, определяющих в системе координат, связанной с Землей, положение искусственного спутника Земли.

Искусственные спутники Земли, с одной стороны, все чаще выступают как астроориентиры, используемые при наблюдениях с Земли; с другой стороны, искусственный спутник сам может быть объектом, положение которого нужно определить с его борта астрономическими средствами.

Взаимодействуя с Землей по закону всемирного тяготения, искусственный спутник движется вокруг центра ее массы. Если бы отсутствовали гравитационные и аэродинамические возмущения, это движение происходило бы по плоской эллиптической орбите (рис. 19), в фокусе  $O$  которой находится центр массы Земли. Характерные линии такой орбиты — линия узлов и линия апсид.

По линии узлов  $\Omega$   $\mathcal{U}$  плоскость орбиты пересекается с экватором вращения Земли. *Восходящим узлом*  $\Omega$  называется точка, в которой ИСЗ в своем движении переходит из южного в северное полушарие; *нисходящий узел* — точка перехода в южное полушарие. Соответственно половина орбиты, по которой спутник движется к северу, называется *восходящей ветвью* орбиты, а другая половина — *нисходящей ветвью*. *Линия апсид* проходит через фокусы орбиты и пересекается с орбитой в перигее и апогее. В *перигее*  $P$  ИСЗ находится на минимальном расстоянии от



центра Земли; в *апогее*  $A$  это расстояние возрастает до максимума. Говорят также о минимальном и максимальном *удалении от поверхности Земли*, но эти определения из-за несферичности Земли не могут быть строгими.

**Элементы орбиты ИСЗ.** Орбита и положение спутника на ней полностью характеризуются шестью *элементами*, два из которых определяют положение пло-

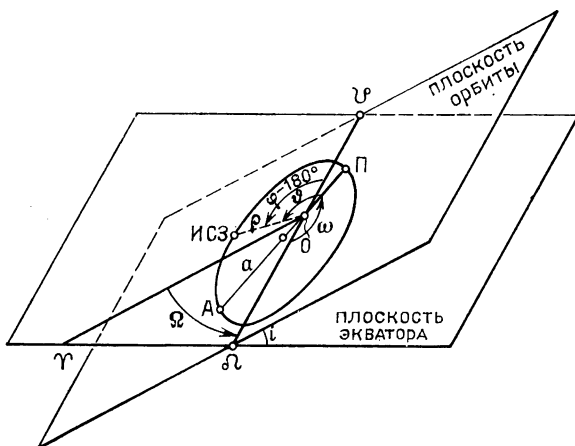


Рис. 19.

скости орбиты в экваториальной системе координат, три — размеры, форму и ориентировку орбиты в своей плоскости и один — положение ИСЗ на орбите в текущий момент времени  $t$ .

Положение плоскости орбиты ИСЗ задается *наклоном (наклонением) орбиты к экватору  $i$*  и *прямым восхождением восходящего узла орбиты на экваторе  $\Omega$* . Размеры, форма и ориентировка орбиты определяются *большой полуосью  $a$* , *эксцентриситетом  $e$*  и *расстоянием перигея от узла  $\omega$* . Положение спутника на орбите определяется либо моментом одного из проходов ИСЗ через перигей орбиты, либо текущим значением *истинной аномалии  $\phi$*  — угла, отсчитываемого от перигея в направлении движения ИСЗ до его геоцентрического радиуса-вектора. Вместо угла  $\phi$  положение спутника на орбите можно задать *орбиталь-*

ным углом, или аргументом широты  $\xi = \omega + \vartheta$ , т. е. углом от восходящего узла орбиты до радиуса-вектора ИСЗ, считаемым в том же направлении, что и  $\vartheta$ . Использование угла  $\xi$  вместо  $\vartheta$  становится необходимым для круговой орбиты, на которой положение линии апсид неопределенно.

Период обращения ИСЗ вокруг Земли  $T$  в соответствии с третьим законом Кеплера может быть выражен через большую полуось орбиты, а потому не является независимым элементом.

Под влиянием возмущений элементы орбиты ИСЗ постепенно меняются. Аэродинамические возмущения (сопротивление воздуха) приводят к уменьшению эксцентриситета и большой полуоси орбиты; гравитационные возмущения вызывают монотонное изменение углов  $\Omega$  и  $\omega$  (*регрессию линии узлов и движение линии апсид*), а также периодические изменения всех элементов орбиты. Как и у орбиты Земли, эти меняющиеся во времени элементы называют *оскулирующими* элементами.

**Координаты ИСЗ.** *Экваториальные геоцентрические* координаты  $\alpha, \delta$  спутника полностью определяются оскулирующими элементами  $\Omega, i$  и  $\xi = \omega + \vartheta$ . Пересчет  $\Omega, i, \xi$  в  $\alpha, \delta$  выполняется по формулам сферической тригонометрии. Величина геоцентрического радиуса-вектора  $\rho$  определяется элементами  $a, e$  и  $\vartheta$ . Он рассчитывается по формулам аналитической геометрии.

По  $\alpha, \delta, \rho$  могут быть вычислены и декартовы экваториальные координаты ИСЗ. Но на практике при вычислении положений ИСЗ декартовы координаты обычно получают без использования элементов орбиты. В качестве исходных данных для расчета берутся три декартовы координаты спутника и три составляющих вектора его скорости в некоторый начальный момент времени, а расчет сводится к интегрированию дифференциальных уравнений движения.

Для наблюдений спутника с земной поверхности часто необходимо знать также его *геоцентрические* координаты (в системе, вращающейся вместе с Землей). Геоцентрическая широта спутника  $\varphi'$  равна его склонению. Чтобы получить геоцентрическую долготу  $\lambda$ , нужно установить взаимосвязь  $\lambda$  и  $\alpha$ . Это будет

сделано в следующей главе, где будет показано, что гринвичский меридиан всегда находится восточнее часового круга точки весеннего равноденствия на угол, измеряемый *гринвичским звездным временем*  $S$ , и поэтому отсчитываемая от Гринвича геоцентрическая долгота спутника равна

$$\lambda = \alpha - S.$$

## Глава 5

### ВРЕМЯ В АСТРОНОМИИ

**Понятие измерения времени.** Движение небесных тел и их вращение, изменение их координат в той или иной системе отсчета — все эти процессы происходят во времени. Положения небесных тел являются функцией времени, и нельзя задать координаты небесного тела, не оговорив, к какому моменту времени эти координаты относятся.

Время есть форма существования материи, существующая независимо от того, как и чем ее измеряют и измеряют ли ее вообще. Нас интересует только практическая сторона вопроса о времени, т. е. его измерение. Для измерения времени необходима шкала. Установить шкалу времени — это значит выбрать единицу счета времени (масштаб) и момент начала отсчета  $t_0$ .

Существует понятие *равномерного*, так называемого *ньютонианского* времени. Оно названо так потому, что процессы в природе, описываемые законами классической «ньютоновой» механики, считаются происходящими в этом равномерно текущем времени. Поясним сказанное. Положим, что координаты тела  $(x_1, x_2, x_3)$  есть известная функция времени  $t$ . Но тогда и  $t = f(x_1, x_2, x_3)$ . Определяя периодически  $x_1, x_2, x_3$  и вычисляя соответствующее им  $t$ , можно получить ряд последовательных значений  $t$ , соответствующих моментам измерений на шкале ньютонианского времени. Если процесс, задающий координаты  $x_1, x_2, x_3$ , равномерен, он определяет собой также и временной масштаб. Поэтому для определения «хода времени» в

астрономии - всегда использовался процесс, считавшийся наиболее равномерным (если материальное проявление этого процесса поддавалось измерению). До недавнего времени таким процессом считалось вращение Земли.

**Сутки.** Мерой времени, которую задает вращающаяся Земля или жестко связанная с ней система координат, может служить полный оборот Земли относительно системы координат, не вращающейся в пространстве, либо относительно системы, вращающейся вокруг оси мира с постоянной, но значительно меньшей скоростью. Практически неподвижной системой отсчета может служить экваториальная система координат, а медленно и равномерно вращающейся — система, одна ось которой направлена к *среднему экваториальному солнцу*. Среднее солнце — точка, движущаяся по небесному экватору с постоянной скоростью, равной средней скорости движения истинного Солнца по эклиптике.

В первом случае время измеряется видимым суточным движением по небу *средней* точки весеннего равноденствия, причем индексами для отсчета положений вращающейся Земли служат наблюдаемые звезды. Полный оборот средней точки весеннего равноденствия происходит за *средние звездные сутки*, или 86 400 средних звездных секунд.

Во втором случае время измеряется суточным движением среднего экваториального солнца. Фактически наблюдается реальное Солнце, а положение среднего солнца относительно него для моментов измерений определяется расчетным путем. Полный оборот среднего экваториального солнца при вращении небесной сферы происходит за *средние солнечные сутки*, или 86 400 средних солнечных секунд. Так как вектор угловой скорости движения Земли вокруг Солнца направлен на север, Солнце в своем видимом годовом движении перемещается на фоне звезд с запада на восток. Видимое же вращение небесной сферы происходит с востока на запад (рис. 20), и Солнце отстает от точки весеннего равноденствия. Поэтому средние солнечные сутки длиннее звездных.

**Год.** Видимое движение Солнца вокруг Земли также определяет временную единицу — год. Длитель-

ностью перемещения среднего солнца на  $360^\circ$  на фоне далеких «неподвижных» звезд определяется *звездный* (или *сидерический*) год. Время перемещения



Рис. 20.

среднего солнца на  $360^\circ$  в экваториальной системе координат, т. е. относительно точки весеннего равноденствия, равно *тропическому году* (*тропическими* называются единицы счета времени, определяемые движением не звезд, а точки весеннего равноденствия; исключением из этого правила является термин «звездные сутки»). За счет прецессии средней точки весеннего равноденствия тропический год короче звездного примерно на 20 минут.

И тропический и звездный годы содержат дробное число средних солнечных суток. Для удобства связи этих единиц масштаба времени введен *календарный год*, который просто является округлением тропического года до ближайшего интервала времени, кратного солнечным суткам. Накапливающаяся разность (около шести часов в год) периодически добавляется к календарным годам, увеличивая их продолжительность на одни (солнечные) сутки и образуя високосные годы,

Употребляется также *аномалистический год* — время между двумя последовательными прохожденьями перигея Солнцем в его видимом движении вокруг Земли.

**Месяц.** Средняя скорость движения Луны вокруг Земли определяет продолжительность лунного месяца. Как и в случае движения Солнца, перемещение средней Луны на  $360^\circ$  среди звезд позволяет установить величину *сидерического месяца*, относительно сетки экваториальных координат — *тропического месяца*, относительно своего перигея — *аномалистического месяца*. Кроме того, существуют понятия *драконического месяца* — среднего промежутка времени между двумя прохожденьями Луны через один из двух *узлов* ее орбиты (точек пересечения орбиты с эклиптической) и *синодического месяца* — среднего интервала между двумя прохожденьями Луны вблизи Солнца на геоцентрической небесной сфере. Синодический месяц — это продолжительность цикла смены фаз Луны.

**Начало года.** Установив масштабы счета астрономического времени, нужно теперь каждую шкалу определенным образом расположить во времени, т. е. перенумеровать ее отрезки и выбрать начало отсчета  $t_0$ . Так как лунный календарь в наше время в европейских странах не употребляется, начало отсчета лунных месяцев рассматривать не будем.

За начало тропического года произвольно, по предложению Бесселя, принят момент, когда средняя эклиптическая долгота Солнца (уменьшенная на величину постоянной годичной аберрации — см. гл. 6) равна  $280^\circ$ . Тропический год, отсчитываемый от этого начала, называется *бесселевым годом*. Момент начала бесселева года всегда близок к началу суток 1 января календарного года, но каждый раз несколько не совпадает с 0 часов 1 января, поскольку тропический год содержит дробное количество суток, а календарный — ровно 365 или 366 суток. Бесселев и календарный годы имеют совпадающую нумерацию.

**Звездное время.** Рассмотрим, далее, как определяется начало отсчета суток. Необходимо сначала отметить следующее обстоятельство: прямые восхождения звезд  $\alpha$  обычно измеряются не в градусной, а в часовой мере. Как и сутки, окружность делится на

24 часа, каждый час (h) на 60 минут (m) и минута — на 60 секунд (s). Соотношение этих единиц с обычными угловыми следующее:

$$1^h = 15^\circ,$$

$$1^m = 0^\circ,25 = 15',$$

$$1^s = 0',25 = 15''.$$

В тех же единицах времени часто выражаются и географические долготы. На рис. 21 показаны меридианы на поверхности вращающейся Земли и часовые

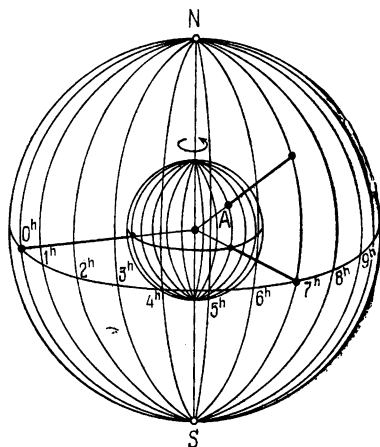


Рис. 21.

круги на неподвижной геоцентрической небесной сфере, проведенные через каждый час долготы или прямого восхождения. Сетка меридианов непрерывно поворачивается вместе с Землей, но в каждый момент времени над каждым географическим меридианом проходит определенный часовой круг, а лежащие на этом часовом круге звезды находятся в верхней кульминации.

Введем такую временную шкалу, чтобы отсчеты  $s$  по этой шкале численно равнялись прямым восхождениям  $\alpha$  звезд, проходящих небесный меридиан места наблюдения, и исследуем свойства времени  $s$ . Пусть в момент, к которому относится рис. 21, в точ-

ке  $A s = 7^h$ . За час звездного времени Земля повернется в направлении, показанном стрелкой, на  $\frac{1}{24}$  полного оборота, т. е. на один час дуги, и над точкой  $A$  будет находиться часовой круг  $8^h$ . Следовательно, за звездный час время  $s$  возрастает на 1 час, т. е. это *звездное* время. Поскольку оно связано с местным небесным меридианом, ясно, что это *местное* звездное время. Когда над точкой  $A$  будет находиться часовой круг точки весеннего равноденствия, местное звездное время там будет равным  $0^h$ . Поэтому момент верхней кульминации точки весеннего равноденствия является моментом начала местных звездных суток.

Легко убедиться, что в точке, долгота которой на  $N$  часов меньше долготы точки  $A$ , звездное время на  $N$  часов меньше. В точке, расположенной на  $M$  часов восточнее  $A$ , время на  $M$  часов больше. Иначе говоря, разность долгот пунктов равна разности местных звездных времен  $s$ . На этой закономерности основано астрономическое определение долгот пунктов, точнее, разности долгот известного и определяемого пунктов. Обычно разность определяется по отношению к нулевому (гринвичскому) меридиану. Поэтому местное звездное время нулевого меридиана, обозначаемое  $S$ , играет в астрономии важную роль. *Гринвичские звездные сутки* начинаются в момент, когда  $S$  принимает значение  $0^h$ .

**Среднее солнечное время.** Введем для удобства дальнейших рассуждений медленно вращающуюся экваториальную систему координат, в которой часовой круг  $12^h$  проходит через смещенное абберацией (см. гл. 6) среднее экваториальное солнце, а началом отсчета долгот, которые будем измерять в часовой мере и обозначать  $t$ , служит точка, противоположная этому среднему солнцу. За год эта система поворачивается относительно «обычной» экваториальной системы на  $360^\circ$  в направлении с запада на восток.

Исследуем свойства такой шкалы времени, отсчеты по которой  $t$  численно равны долготам  $t$  звезд, проходящих небесный меридиан места наблюдения. Пусть теперь сетка часовых кругов на рис. 21 представляет подвижную экваториальную систему. В момент, к которому относится рисунок, время  $t$  точки  $A$  равно  $7^h$ . За средний солнечный час Земля повер-



нется по стрелке несколько больше, чем на  $1/24$  оборота, поскольку солнечный час длиннее звездного. Но и система координат успеет немного повернуться в ту же сторону, так что через средний солнечный час над точкой  $A$  будет часовой круг  $8^h$ ; следовательно, время  $t$  за солнечный час возрастает на  $1^h$ , т. е. это *среднее солнечное* время. Ясно также, что это *местное* время.

Когда над пунктом  $A$  окажется часовой круг среднего солнца, там будет *средний полдень*, а 12 часов спустя — *средняя полночь*, которая считается моментом начала местных средних солнечных суток. Как и должно быть в полночь, истинное Солнце в среднюю полночь будет вблизи нижней кульминации.

**Всемирное время.** Легко увидеть, что разность местных средних солнечных времен (как и разность звездных времен) равна разности долгот. В связи с этим особую роль приобретает местное среднее солнечное время гринвичского меридиана, называемое *всемирным временем* и обозначаемое UT ( $UT = \text{universal time}$ ) или  $T_0$ . (Различают среднее солнечное время на мгновенном и на среднем гринвичском меридиане. Эти два всемирных времени обозначаются соответственно  $UT_0$  и  $UT_1$ . Ход того и другого времени испытывает небольшие колебания, обусловленные сезонными изменениями скорости вращения Земли. Исключение из хода времени  $UT_1$  регулярной части этих колебаний дает *квазиравномерное* всемирное время  $UT_2$ . Общему понятию всемирного времени  $T_0$  наиболее соответствует время  $UT_2$ .)

**Связь всемирного и гринвичского звездного времени.** Так как закон движения «подвижной экваториальной системы» относительно неподвижной известен, можно всегда вычислить угол между точкой весеннего равноденствия  $\Upsilon$  и средним солнцем или, лучше, между  $\Upsilon$  и началом отсчета координаты  $t$  (рис. 22). Посредством угла  $S_0$  можно связать между собой всемирное  $T_0$  и гринвичское звездное  $S$  время.

На гринвичском меридиане постоянно имеет место соотношение (см. рис. 22)

$$S = T_0 + S_0.$$

Угол  $S_0$  между  $\Upsilon$  и антиподом среднего солнца возрастает за год на  $360^\circ = 24^h$ , т. е. за один час среднего солнечного времени — на  $0^h,00\ 273\ 791$ . Значения  $S_0$  в таблицах даются дискретно, на  $0^h$  всемирного времени каждых суток. Табличное значение  $S_0$  — это момент гринвичского звездного времени, в который наступает всемирная полночь. Эта величина называется *гринвичским звездным временем в  $0^h$  всемирного времени*.

От всемирной полуночи до какого-либо момента  $T_0$  следующих за ней суток эта величина возрастает от табличного значения  $S_0$  до  $S_0 + \mu T_0$ , где  $\mu$  — обозначение коэффициента  $0,00\ 273\ 791$  перехода от среднего к звездному времени. Поэтому с учетом структуры таблиц соотношение между  $S$  и  $T_0$  записывают следующим образом:

$$S = T_0 + (S_0 + \mu T_0) \quad \text{или} \quad S = T_0(1 + \mu) + S_0.$$

**Поясное и декретное время.** Наличие на каждом меридиане своего местного времени удобно при определении долгот, но очень неудобно в быту. Чтобы устранить это неудобство, целым поясам земной поверхности шириной  $15^\circ = 1^h$  присваивают среднее солнечное время меридианов, проходящих посередине этих поясов. Это время называется *поясным временем*. Чем ближе к границе пояса, тем больше разность поясного и местного времени. Московское поясное время на 1 час больше средневропейского, хотя, скажем, разность долгот Москвы и Берлина  $25^\circ = 1,6$  часа. Границы поясов местами отклоняются от меридианов в сторону административных или государственных границ.

На рис. 23 цифрами на верхней и нижней кромках карты указаны номера часовых поясов и одновременно

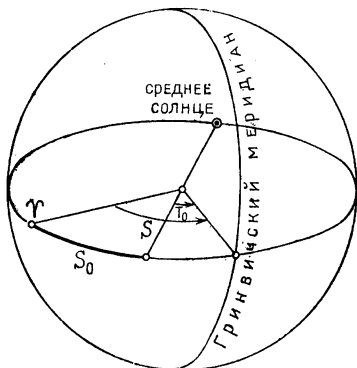


Рис. 22.

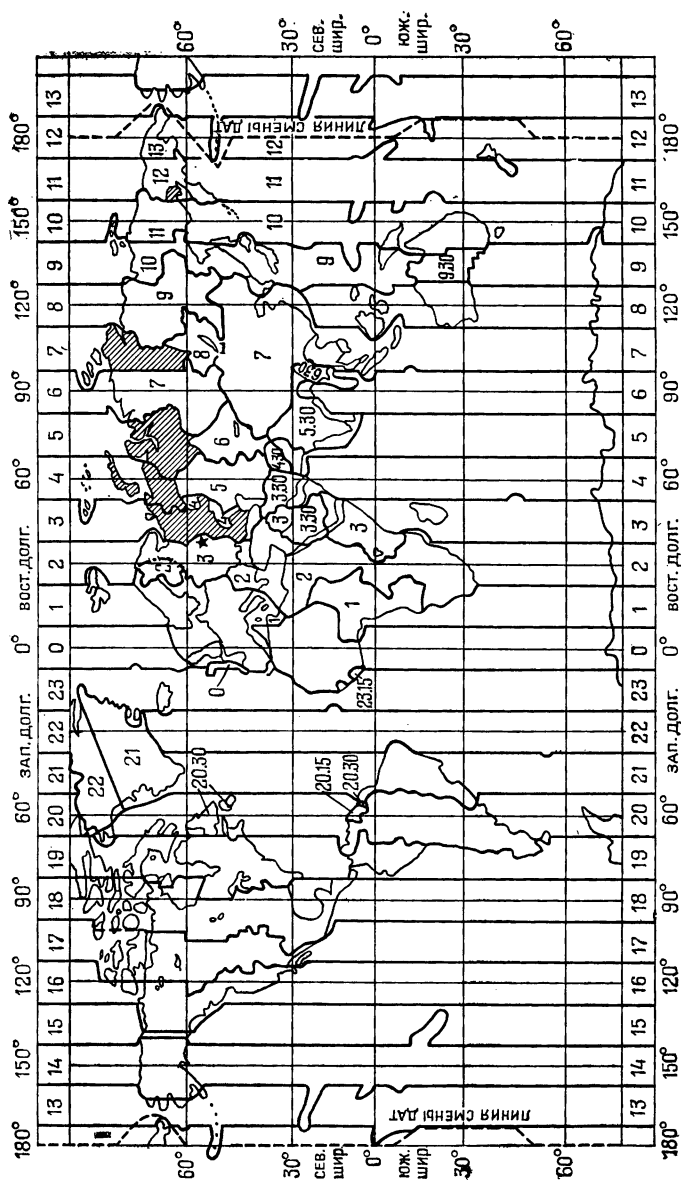


Рис. 23.

время в этих поясах в 0<sup>h</sup> всемирного времени; в некоторых местах они дублированы на карте. Отдельно указано время в 0<sup>h</sup> всемирного времени на территориях, не пользующихся поясным временем. Так, в СССР введено *декретное время*, которое в каждом часовом поясе больше поясного на 1 час. Поэтому московское декретное время больше средневропейского на 2<sup>h</sup> (и на 3<sup>h</sup> больше всемирного времени). В заштрихованных на рисунке районах вместо декретного неофициально используется поясное время.

Так как на восток от Гринвича местное (и поясное) время возрастает, а к западу уменьшается, то к меридиану  $\pm 180^\circ$  накапливается разность времен в 24<sup>h</sup>. В результате в XII часовом поясе, осевой линией которого служит меридиан  $180^\circ$ , по сторонам от этого меридиана *час* поясного времени один и тот же, но этот час относится к *разным датам*. Поэтому линия, проходящая по меридиану  $180^\circ$  (но местами несколько отклоняющаяся от него, как отходят от своих меридианов границы часовых поясов), называется *линией смены дат*. Заметим, что эта линия не является границей каких-либо часовых поясов.

Положим, что на востоке СССР, на Чукотке, 20<sup>h</sup> 2 января (по поясному времени). В Гринвиче в этот момент только 8<sup>h</sup> 2 января, а на меридиане  $120^\circ$  западной долготы — полночь с первого на второе января. Западнее и, в частности, на Аляске 2 января еще не наступило. На Аляске, в XIII часовом поясе, в этот момент 21<sup>h</sup> 1 января. Дата на Чукотке всегда на единицу больше даты на Аляске.

**Юлианские дни.** Обычная система нумерации солнечных суток, при которой даты в каждом месяце начинаются с 1 и доходят до 28, 29, 30 или 31, причиняет астрономам много неудобств, особенно если приходится определять длительность большого интервала времени по датам его начала и конца. Такая задача возникает, например, при расчете поправок в координаты звезд за прецессию (см. Приложение 1).

В этих случаях гораздо удобнее пользоваться *юлианскими днями* JD, т. е. системой непрерывной нумерации средних солнечных суток от исходной даты 1 января 4713 г. до нашей эры. Очередной юлианский день начинается в 12<sup>h</sup> всемирного (15<sup>h</sup> московского

декретного) времени и продолжается до 12<sup>h</sup> всемирного времени следующих суток. Так, в 12<sup>h</sup> всемирного времени 1 января 1978 г. начался юлианский день 2 443 510. Следовательно, юлианское время в этот момент было равно  $JD = 2\,443\,510,0$ . 12 часов спустя, т. е. в гринвичскую полночь с 1 на 2 января,  $JD = 2\,443\,510,5$ . Московской декретной полуночи этой даты соответствовало  $JD = 2\,443\,510,375$ .

Менее употребительны *юлианские звездные дни* JSD, счет которых ведется от той же исходной даты, что и счет юлианских дней. Благодаря тому, что в году звездных суток на одни больше, чем средних, за истекший с тех пор период звездных суток накопилось примерно на 6690 больше. Принято, что юлианский звездный день начинается в 0<sup>h</sup> гринвичского звездного времени (1 января это происходит около 17<sup>h</sup>,3 всемирного времени). 1 января 1978 г. в этот момент (т. е. 1,72 января)  $JSD = 2\,450\,201$ .

**Истинное солнечное время.** Рассмотренные системы солнечного и звездного времени практически равномерны. Но солнечное время можно считать не только по среднему экваториальному, но и по истинному Солнцу. При этом получается шкала *истинного солнечного времени*. Так как прямое восхождение истинного Солнца в течение года меняется с переменной скоростью, продолжительность *истинных солнечных суток* переменна; восход и заход Солнца происходят не в те моменты и не в тех точках горизонта, что восход и заход фиктивного среднего солнца. Но так как именно восходом и заходом истинного Солнца определяется продолжительность дня, движение Солнца относительно среднего солнца приходится учитывать. В каждый момент отсчет истинного времени больше отсчета среднего времени на величину разности прямых восхождений среднего и истинного Солнца, выраженную в часовой мере и называемую *уравнением времени*. Уравнение времени никогда не превосходит 17<sup>m</sup>. Его график представляет собой сумму двух синусоид с разными амплитудами, одна из которых имеет годичный и вторая — полугодичный период. В Астрономическом Ежегоднике, в таблице «Солнце», уравнение времени дается увеличенным на 12<sup>h</sup> (и потому всегда положительным).

**Истинное звездное время.** Кроме равномерного звездного времени существует истинное звездное время. Выше установлено, что местное звездное время численно равно прямым восхождениям звезд, находящихся над местом наблюдения в верхней кульминации. Если бы прямые восхождения всех звезд изменились, местное звездное время сдвинулось бы. Именно к этому приводит нутация в прямом восхождении  $\Delta\psi \cos \epsilon$  (см. гл. 6), т. е. отклонение истинной точки весеннего равноденствия от средней вдоль небесного экватора. Прямые восхождения звезд, а с ними и звездное время (местное и гринвичское) увеличиваются по сравнению со средними значениями на  $\Delta\psi \cos \epsilon$ . Если на рис. 22  $\Upsilon$  — не средняя, а истинная точка весеннего равноденствия, то угол  $S_0$  будет связывать среднее солнечное время не со средним, а с истинным звездным временем. Его табличные значения для гринвичской полуночи называются *истинным гринвичским звездным временем в 0 часов всемирного времени*.

**Эфемеридное время.** До сравнительно недавнего времени вращение Земли считалось наиболее равномерным из поддающихся измерению процессов. Но в последние десятилетия в нем выявлены некоторые неравномерности, в первую очередь из наблюдений Луны. При составлении эфемериды Луны (таблицы ее положений для фиксированных моментов времени) на основе теории ее движения интервалы времени от исходной эпохи до табличных моментов выражаются в единицах равномерного времени. При наблюдениях же используется всемирное время. Неравномерность вращения Земли, задающего всемирное время, проявляется в отклонениях наблюдаемых положений Луны от эфемеридных. Поскольку точность теории движения Луны высока, а указанный эффект накапливается со временем, эти отклонения обнаруживаются и поддаются измерению. Таким образом, появилась возможность определения времени как функции координат тела, движущегося по законам небесной механики. Об этой возможности говорилось в начале главы.

Длина секунды этого равномерного времени, называемого *эфемеридным временем* и обозначаемого ET (ET = ephemeris time), принимается равной длине

секунды всемирного времени в исходную эпоху 0 января 1900 г., 12<sup>h</sup> ET ( $JD_0 = 2415\,020,0$ ), определяемой из следующих соображений: средние солнечные сутки в исходную эпоху составляли  $1/365,2421\,988$  тропического года; сутки содержат 86 400 секунд; поэтому секунда равна  $1/(86\,400 \cdot 365,2\dots) = 1/31\,556\,925,9747$  тропического года исходной эпохи.

Шкалы эфемеридного и всемирного времени сравнительно близки. Медленно и нелинейно меняющаяся разность  $\Delta T$  между одновременными отсчетами эфемеридного ET и всемирного UT2 времени в начале 1977 г. составляла 48 секунд. Каждые эфемеридные сутки начинаются на  $\Delta T$  секунд раньше одноименных всемирных суток.

**Использование эфемеридного и всемирного времени.** Итак, при составлении эфемерид небесных тел интервалы времени от исходной эпохи до табличных моментов выражаются в единицах эфемеридного времени. Поэтому и сами табличные моменты являются *эфемеридными*. Положение тела в любой промежуточный момент определяется интерполяцией между ближайшими табличными моментами.

Но для практических целей обычно требуются координаты, отнесенные к тому или иному моменту *всемирного* времени. Чтобы получить их интерполяцией, необходимо сначала определить размещение заданного момента внутри интервала интерполяции; для этого заданный момент нужно вводом поправки  $\Delta T$  перевести из всемирного в эфемеридное время. Чтобы получить эти же координаты не по эфемеридам, а непосредственно из уравнений движения, поправку  $\Delta T$  нужно ввести в интервал времени от исходной эпохи. К примеру, гринвичской полуночи 19 июля 1978 г. (всемирный  $JD = 2\,443\,708,5$ ) при  $\Delta T \approx +49$  сек соответствует эфемеридное время  $0^h00^m49^s$  19 июля (эфемеридный  $JD = 2\,443\,708,50\,057$ ), и интервал от исходной эпохи нужно взять равным  $28\,688,50\,057$  суток.

Поскольку величина  $\Delta T$  устанавливается из наблюдений, более или менее точно она известна лишь на прошедший период; прогнозируются  $\Delta T$  весьма приближенно и тем грубее, чем дальше расчетный момент отстоит от текущего момента. Поэтому в предвычисляемых таблицах координат светил (например, в Аст-

рономическом Ежегоднике СССР) в качестве аргумента используется эфемеридное время.

**Атомное время.** *Международное атомное* время (international atomic time, IAT), как и эфемеридное время, равномерное, но оно удобнее для применения благодаря тому, что его материальным носителем являются часы (атомные цезиевые часы). По длине атомная секунда совпадает с эфемеридной секундой, а шкала атомного времени несколько смещена относительно шкалы эфемеридного времени: отсчеты IAT всегда отстают от одноименных отсчетов ET на  $32^s,18$  или, иначе, в один и тот же физический момент отсчет эфемеридного времени на  $32^s,18$  больше отсчета атомного времени, что выражается зависимостью

$$ET = IAT + 32^s,18.$$

В *координированном всемирном* времени (coordinated universal time, UTC) масштабной единицей служит *атомная* секунда, но счет этих секунд максимально приближен к счету секунд всемирного времени UT1. Это достигается тем, что при накоплении (за счет неравномерности времени UT1) разности  $\sim 0,7$  сек длительность завершающих текущее полугодие суток координированного времени назначается не в 86 400 сек, как обычно, а в 86 399 или 86 401 сек. Начало шкалы UTC отстоит от начала шкалы IAT на меняющуюся, но *целое* число секунд, что позволяет пользоваться для хранения времени UTC теми же атомными часами, корректируя только нумерацию их отсчетов.

## Глава 6

### ИЗМЕНЕНИЯ КООРДИНАТ СВЕТИЛ

**Пекулярное движение звезд.** В гл. 2 указывалось, что экваториальные координаты звезд медленно меняются и звезды несколько перемещаются относительно сетки экваториальных координат. Эти перемещения вызываются рядом причин, и естественно начать их рассмотрение с фактического движения звезд.

Каждая звезда определенным образом движется в пространстве. Это движение, называемое *пекулярным* движением звезды, происходит по траектории, близкой



к эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр масс галактики; периоды обращений звезд настолько велики, что с того времени, когда астрономы получили в свои руки приборы для точного измерения положений звезд, и до сегодняшнего дня движение каждой звезды можно считать не изменявшимся по направлению и скорости.

Рассмотрим сначала это равномерное и прямолинейное движение звезды с точки зрения наблюдателя, неподвижного в пространстве. На рис. 24  $N$  — непо-

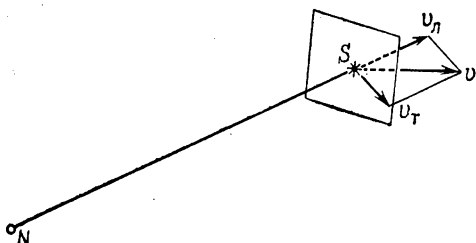


Рис. 24.

движный наблюдатель и  $S$  — звезда, движущаяся со скоростью  $v$ . Разложим скорость  $v$  на две составляющие: *лучевую*  $v_r$  по лучу зрения и *тангенциальную*  $v_t$  в нормальной к нему плоскости. Составляющая  $v_r$  не изменяет направления луча зрения (направления наблюдатель — звезда); она проявляется в сдвиге частот наблюдаемого спектра звезды, т. е. в доплеровских эффектах. Составляющая  $v_t$  непрерывно изменяет направление на звезду.

**Вековой параллакс.** В действительности наблюдатель перемещается в пространстве вместе с Солнечной системой со скоростью  $v$ . Движение Солнечной системы, как и пекулярное движение звезд, можно считать прямолинейным и равномерным. Воспользуемся принципом относительности и будем считать, что Солнце неподвижно, а все звезды движутся в обратном направлении с той же скоростью  $v$  (помимо того, что каждая из них имеет собственную скорость  $u$ ). Для каждой звезды скорость  $v$  можно разложить на лучевую  $v_r$  и тангенциальную  $v_t$  составляющие,

причем, как видно из рис. 25, у звезд на оси движения Солнца составляющая  $v_T$  равна нулю, а у звезд, удаленных от оси движения на  $90^\circ$ , она равна  $v$ . Между этими крайними значениями  $v_T$  изменяется по синусоидальному закону.  $v_L$  также изменяется по синусоиде, сдвинутой на  $90^\circ$  относительно синусоиды  $v_T$ . Движения звезд со скоростями  $v_T$  иногда называют *вековыми параллаксами* звезд.

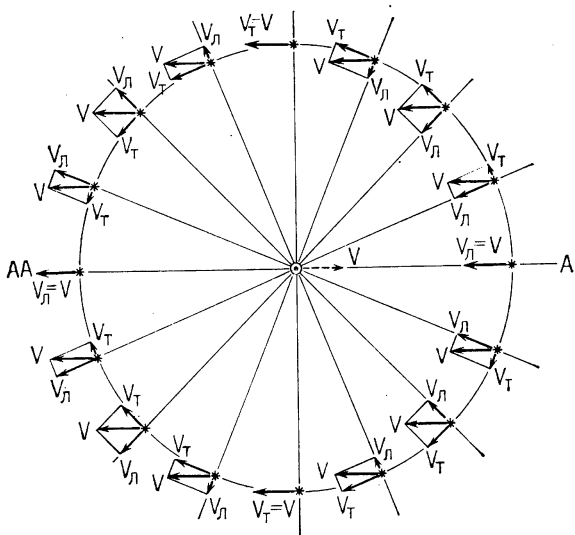


Рис. 25.

**Собственное движение звезд.** Обычно смещения звезд от пекулярных движений и от движения Солнца рассматриваются совместно. Полная лучевая скорость каждой звезды относительно Солнца равна  $V_L = v_L + u_L$ ; полная тангенциальная скорость  $V_T$  равна векторной сумме скоростей  $v_T$  и  $u_T$ . Скорость  $V_T$ , как и ее компонента  $u_T$ , изменяет направление на звезду. Величина поворота за год называется *собственным движением* этой звезды и обозначается  $\mu$ . Собственные движения звезд очень малы и их, как и скорость  $V_T$ , можно десятки лет считать постоянными.

Очевидно, что чем дальше от наблюдателя находится звезда при той же скорости  $V_T$ , тем меньше ее угловая скорость. Поэтому, несмотря на большой диапазон скоростей звезд, прослеживается определенная зависимость между расстояниями до звезд и их собственными движениями.

Собственное движение звезды  $\mu$  можно представить двумя ортогональными составляющими:  $\mu_\delta$  по кругу склонений этой звезды и  $\mu_\alpha \cos \delta$  по параллели экваториальной координатной сетки (появление коэффициента  $\cos \delta$  вызвано тем, что параллель — малый круг небесной сферы, и угловое перемещение по параллели меньше соответствующего ему изменения прямого восхождения). В звездных каталогах (в частности, в *Астрономическом Ежегоднике СССР*) даются компонента собственного движения  $\mu_\delta$ , называемая *собственным движением по склонению*, и компонента  $\mu_\alpha$  (без коэффициента  $\cos \delta$ ), называемая *собственным движением по прямому восхождению*.

**Вековая аберрация.** Информацию о положении звезды дает приходящий от нее свет. Из-за того, что свет распространяется с конечной скоростью  $\sim 63$  тыс. астрономических единиц в год \*), звезда, перемещающаяся перпендикулярно к лучу зрения со скоростью  $V_T$ , наблюдается не там, где она в действительности находится в этот момент. Свойства этого явления, называемого *вековой аберрацией*, удобно исследовать на следующем числовом примере.

Пусть звезда  $S$  на рис. 24 удалена от наблюдателя  $N$  на 1 млн. а. е. Свет проходит это расстояние за 16 лет. Но за это время звезда успевает уйти от положения  $S$  вперед на  $16 V_T$ , где  $V_T$  — скорость звезды в а. е./год. *Видимое* наблюдателем положение звезды отстает от истинного на угол, тангенс которого равен  $16 V_T/10^6$ . Если бы расстояние до звезды было равно 1 млрд. а. е., ее свет достигал бы наблюдателя за 16 тысяч лет, а звезда смещалась бы за это время от положения  $S$  на  $16\,000 V_T$ , и  $\operatorname{tg}$  угла отставания имел бы то же самое значение  $16\,000 V_T/10^9$ . В отличие от собственного движения, вековая аберра-

---

\*) Астрономическая единица (а. е.,  $A$ ) близка к величине среднего радиуса земной орбиты и равна  $1,496 \cdot 10^8$  км.

ция не зависит от расстояния до звезды и определяется только скоростью  $V_T$ . На небесной сфере вековая абберрация смещает каждую звезду по тому же большому кругу, по которому направлено собственное движение звезды, но в противоположную сторону.

Ориентировка больших кругов, по которым происходят эти смещения, совершенно различна для разных звезд, однако компоненты собственного движения и вековой абберрации от движения Солнечной системы полностью упорядочены. Указанная вековая абберрация смещает изображения всех звезд в сторону фактического движения Солнца, к точке небесной сферы  $A$  (рис. 25), называемой *апексом* движения Солнечной системы. Компонента собственного движения от скорости  $v$  направлена в обратную сторону, к *антиапексу* движения (точка  $AA$  на рис. 25).

**Составляющие движения наблюдателя.** Движение наблюдателя, находящегося на земной поверхности, относительно центра масс Галактики включает, кроме рассмотренного выше движения вместе с Солнечной системой, две другие регулярные составляющие: вместе с Землей вокруг Солнца и вместе с земной поверхностью за счет суточного вращения Земли. Если наблюдатель находится на искусственном спутнике Земли, вместо суточного надо рассматривать орбитальное движение. Для наблюдателя на межпланетном космическом корабле надо рассматривать движение Солнечной системы и полет корабля. Все эти движения меняются по величине и направлению, но свойства, которыми обладает вековая абберрация, присущи и абберрациям, возникающим при этих движениях.

**Годичный параллакс и годичная абберрация.** Снова применим принцип относительности, чтобы заменить движение Земли со скоростью  $v^{\oplus}$  по орбите вокруг Солнца движениями звезд по параллельным эклиптикам окружностям радиусом в одну а. е. с периодом в 1 год. Это движение вызывает параллактическое и абберрационное смещение звезд — *годичный параллакс* и *годичную абберрацию*. Если звезда находится близ полюса эклиптики, то ее годичная траектория проецируется на небесную сферу окружностью, если звезда лежит на эклиптике — прямой линией. Годичное

параллактическое смещение остальных звезд происходит по эллипсам, эксцентриситет которых от эклиптики к ее полюсам непрерывно уменьшается. Годичный параллакс звезд, как и вековой, обратно пропорционален их удалению от наблюдателя. Именно это свойство годичного параллакса положено в основу работ по определению расстояний до звезд.

Годичная абберрация смещает все звезды к апексу орбитального движения Земли, т. е. к точке, лежащей в плоскости эклиптики примерно на  $90^\circ$  западнее Солнца. Величина тангенса абберрационного смещения равна аналогично предыдущему  $16v_{\oplus}^{\oplus}/10^6$ , где  $v_{\oplus}^{\oplus}$  выражено в а. е./год. Абберрация максимальна у звезд, удаленных от апекса на  $90^\circ$ , когда  $v_{\oplus}^{\oplus} = v^{\oplus}$ . Скорость Земли  $v^{\oplus} = 2\pi$  а. е./год, и тангенс максимального смещения равен  $10^{-4}$ , что дает для максимума годичной абберрации значение  $\kappa \approx 20'',5^*$ ). В стороны апекса и антиапекса годичная абберрация уменьшается по синусоиде до нуля. Так как Солнце всегда удалено от апекса годичной абберрации примерно на  $90^\circ$ , абберрация Солнца в течение года почти не меняется: Солнце постоянно смещено от своего истинного положения примерно на величину  $\kappa$  к западу (т. е. в сторону меньших прямых восхождений).

**Суточный параллакс и суточная абберрация.** Движение наблюдателя вместе с земной поверхностью также вызывает параллакс и абберацию светил. У звезд *суточный параллакс* совершенно ничтожен; его приходится учитывать лишь при расчете положений тел Солнечной системы. *Суточная абберрация* звезд учитывается при точных расчетах. Апекс ее всегда находится на горизонте в точке востока; постоянная абберрации достигает максимальной величины  $\sim 0'',3$  на экваторе, где скорость движения точек земной поверхности равна  $0,46$  км/сек  $\approx 0,1$  а. е./год, и к полюсам постепенно уменьшается до нуля, так как уменьшается скорость точек земной поверхности.

**Другие виды параллакса и абберации.** «*Орбитальный*» параллакс и «*орбитальная*» абберрация на ИСЗ

---

\*) В системе фундаментальных астрономических постоянных 1964 г. [13] принято следующее значение *постоянной годичной абберации*:  $\kappa = 20'',4958$ .

решительно ничем не отличаются от аналогичных суточных явлений. Лишь положение апекса определяется направлением вектора скорости спутника Земли, а постоянная абберации определяется модулем этой скорости.

На результаты наблюдений планет (и других тел Солнечной системы) влияет абберация от движения как наблюдателя, так и планеты. Для наблюдателя на Земле из этого движения выделяют движение вместе с земной поверхностью и рассматривают, с одной стороны, суточную абберацию и суточный параллакс, а с другой стороны, — *абберацию планет* от движения планеты относительно центра Земли. Рассматривать отдельно абберацию от движения Земли (т. е. годовую абберацию) для планет не имеет смысла.

Параллактическое смещение и абберация звезд при полете космического корабля также определяются направлением и модулем его скорости. «*Корабельная*» абберация смещает светила к апексу движения; параллактическое смещение направлено к антиапексу. Параллакс звезд, как и прежде, определяется длиной перелета и расстояниями до звезд; при полетах в Солнечной системе он очень мал. Абберация, наоборот, определяется только скоростью полета. При скорости 100 км/сек постоянная «корабельной» абберации достигнет уже 1',1.

Можно себе представить, как должно выглядеть звездное небо на космическом корабле, летящем с субсветовой скоростью. Все звезды будут заметно смещены со своих мест вперед, к апексу движения, причем чем дальше звезда находится от оси движения корабля, тем это смещение будет больше. Поэтому в задней полусфере неба будет наблюдаться заметно меньше звезд, чем в передней. Что касается звезд вблизи оси движения, то они будут мало смещены со своих мест. Но зато у них сильнее всего проявятся доплеровские эффекты. Звезды впереди по курсу будут приближаться к наблюдателю, и волны их света покажутся сокращенными. Видимый их свет уйдет в ультрафиолетовую область, а инфракрасный будет восприниматься как видимый. У «задних» звезд видимый свет, наоборот, сместится в инфракрасную область, а в световой диапазон волн перейдет

энергия ультрафиолетовых лучей. При этом блеск звезд изменится, так как в разных участках спектра они излучают неодинаковое количество энергии.

Некоторое время назад высказывалась идея создания прибора, измеряющего углы между определенными парами звезд для навигации космического корабля. Так как в результате «корабельной» аберрации углы между звездами меняются, можно по этим изменениям установить скорость и курс корабля [10]. Подсчитано, что при точности измерения углов  $0'',01$  (в настоящее время такая точность нереальна) курс определялся бы с ошибкой не более  $1''$ , а скорость — с ошибкой  $15$  м/сек.

**Орбитальное движение в двойных звездах.** Особый случай собственного движения звезд представляет собой *орбитальное движение* компонент двойных звезд. На линейное движение центра масс двойной звезды накладывается эллиптическое движение каждой компоненты вокруг центра масс. Если угол между этими компонентами достаточно велик, чтобы с Земли они наблюдались раздельно, то при вычислении положений на небе компонент двойных звезд приходится учитывать сложный характер их движения.

Этим исчерпываются явления, вызывающие изменения видимого положения одних звезд относительно других.

**Рефракция.** Несколько особняком в этой группе стоит *рефракция*, или деформация общей картины звездного неба, обусловленная оптическими свойствами атмосферы (при наблюдениях с Земли) или иллюминаторов (при наблюдениях с космических аппаратов или высотных самолетов).

Математическая теория *атмосферной рефракции* рассматривает земную атмосферу как совокупность сферических концентрических слоев (рис. 26), в каждом из которых плотность воздуха постоянна, а от слоя к слою с увеличением высоты над поверхностью Земли уменьшается. При каждом переходе из менее плотного в более плотный слой воздуха луч от звезды по законам преломления света приближается к линии, нормальной к границе слоев в точке перехода (иначе говоря, становится более вертикальным). В результате наблюдателю  $N$  (см. рис. 26) кажется, что

звезда находится не по направлению  $NS$ , а по направлению  $NS'$ , т. е. ближе к зениту. Считается, что азимуты звезд рефракцией не искажаются.

Чем больше зенитное расстояние звезды  $z$ , тем сильнее оно искажено рефракцией. Поэтому в таблицах поправок в  $z$  за рефракцию аргументом является само  $z$ . Эти таблицы позволяют также учесть влияние на величину рефракции давления и температуры воздуха в нижнем слое атмосферы.

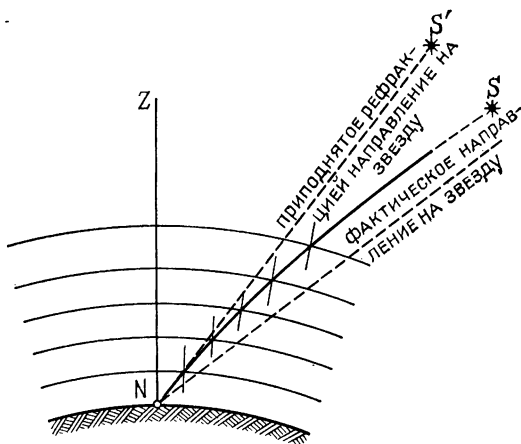


Рис. 26.

Преломление света в иллюминаторе, предназначенном для астрономических наблюдений (называемом «астролюком» или «астрокуполом»), на самолете или космическом летательном аппарате определяется исключительно формой и материалом иллюминатора, которые могут быть подобраны с таким расчетом, чтобы наблюдаемая через иллюминатор область небесной сферы или ее часть, используемая для навигационных наблюдений, не подвергалась существенному искажению.

**Прецессия.** Другая группа явлений характеризуется смещением системы координат относительно всей совокупности звезд.

Основной фактор, перемещающий сетку экваториальных или эклиптических координат по звездному



небу, — регулярная *прецессия*. В гл. 1 было показано, что прецессия точки весеннего равноденствия есть сумма *лунно-солнечной прецессии*, происходящей от движения небесного экватора, и *прецессии от планет*, связанной с движением эклиптики. Каждое из этих движений смещает точку весеннего равноденствия как вдоль экватора (изменяя прямые восхождения светил), так и вдоль эклиптики (изменяя их долготы). Поэтому в общей прецессии по прямому восхождению и в общей прецессии по долготе есть лунно-солнечные

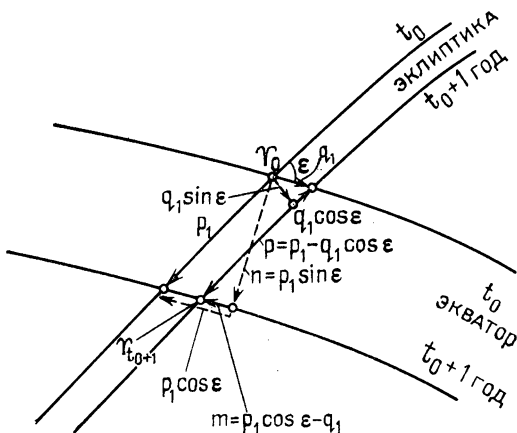


Рис. 27.

и планетные составляющие. Склонения и широты светил от положения точки весеннего равноденствия не зависят, а определяются только ориентировкой основных кругов систем. Поэтому изменение склонений связано только с лунно-солнечной прецессией, а изменение широт — с прецессией от планет.

Численное значение прецессии за один год называется *годовой прецессией*.

Компоненты годичной прецессии можно рассматривать как координаты точки весеннего равноденствия  $\gamma_0$  на момент  $t_0$  в системах среднего экватора и эклиптики на момент  $(t_0 + 1 \text{ год})$ . Долгота точки  $\gamma_0$  выражает общую годичную прецессию в долготе, склонение — прецессию по склонению, и т. д. (рис. 27).

Величины и обозначения отдельных составляющих приводятся в табл. 1. Две прецессии — лунно-солнечную в долготе  $p_1$  и планетную по прямому восхождению  $q_1$  можно рассматривать как независимые. Остальные прецессии есть функции от  $p_1$  и  $q_1$ ; как они получены, позволяют понять простые геометрические построения, выполненные на рис. 27.

Таблица 1

Годичная прецессия	В долготе	По прямому восхождению	По склонению	По широте
Лунно-солнечная	$p_1$	$p_1 \cos \varepsilon$	$p_1 \sin \varepsilon = l$	—
От планет	$q_1 \cos \varepsilon$	$q_1$	—	$q_1 \sin \varepsilon$
Общая	$p_1 - q_1 \cos \varepsilon = p$	$p_1 \cos \varepsilon - q_1 = m$	$n$	$q_1 \sin \varepsilon$

**Влияние прецессии на координаты звезд.** Рассмотрим влияние прецессии на экваториальные координаты звезд. Прецессия от планет на склонения звезд не влияет; все прямые восхождения она уменьшает с одной и той же малой скоростью  $0'',1$  в год.

Влияние лунно-солнечной прецессии проявляется более сложным образом (см. рис. 28, на котором стрелками показаны суммарные направления смещений звезд относительно сетки экваториальных координат под действием этой прецессии). Поскольку плоскость небесного экватора поворачивается, расстояния звезд от экватора — их склонения — меняются. На часовом круге точки весеннего равноденствия и вблизи него склонения увеличиваются; скорость роста склонений падает в сторону часовых кругов  $6^h$  и  $18^h$ . В противоположной полусфере; т. е. вблизи часового круга  $12^h$ , склонения звезд уменьшаются.

Из-за смещения точки весеннего равноденствия по эклиптике прямые восхождения звезд монотонно увеличиваются. Это относится ко всем звездам, эклиптические широты  $\beta$  которых по модулю меньше широты северного полюса мира, т. е. к звездам, у которых  $|\beta| < 90^\circ - \varepsilon$ . Прямые восхождения звезд вблизи

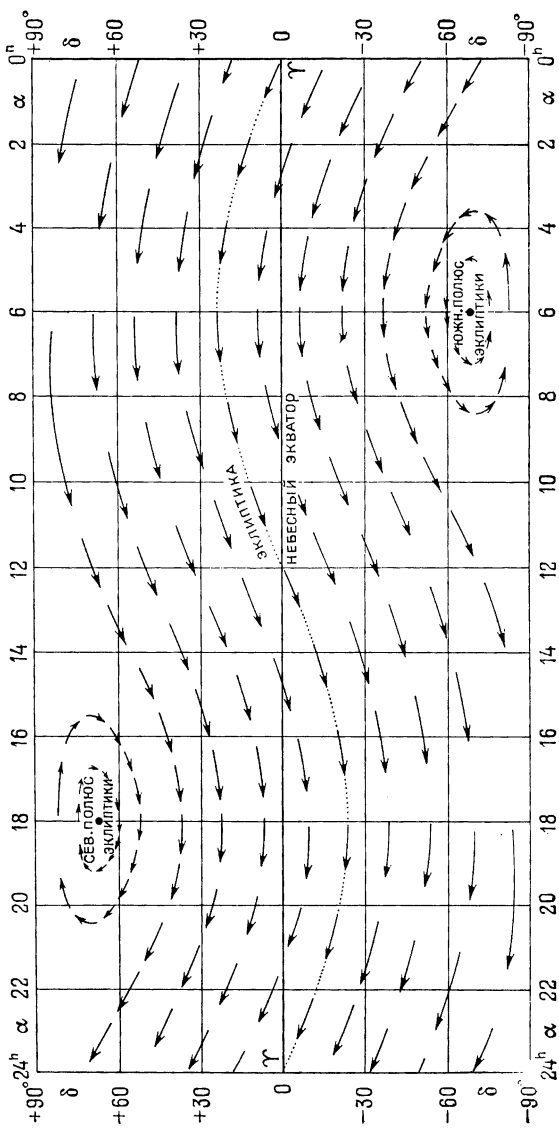


Рис. 28.

полюсов эклиптики меняются мало и периодически увеличиваются и уменьшаются. Сами полюсы неподвижны и имеют координаты: северный  $\alpha = 18^h$ ,  $\delta = 90^\circ - \varepsilon$ , южный  $\alpha = 6^h$ ,  $\delta = \varepsilon - 90^\circ$ . Звезда, в данную эпоху ближайшая к северному или к южному полюсу мира, называется *полярной звездой*. Сейчас полярная звезда северного неба —  $\alpha$  Малой Медведицы. Ярких звезд около южного полюса мира в текущую эпоху нет.

#### Учет процессии и собственного движения звезд.

Если рассмотреть прецессионное движение каждой звезды по  $\alpha$  и по  $\delta$ , то можно видеть (см. рис. 28), что оба эти движения нелинейны. Поэтому при пересчете  $\alpha$  и  $\delta$  звезд от одного момента времени ( $t_1$ ) к другому ( $t_2$ ) поправку в каждую координату представляют рядом Тейлора, например,

$$\alpha_{t_2} - \alpha_{t_1} = (t_2 - t_1) \dot{\alpha} + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2} \ddot{\alpha} + \frac{(t_2 - t_1)^3}{6} \dddot{\alpha} + \dots$$

Если интервал времени невелик (до года), обычно ограничиваются линейным членом ряда. Но и при самых строгих расчетах при  $t_2 - t_1$ , не превышающем нескольких десятков лет, двух членов ряда достаточно. Второй член на коротких и третий — на более длинных интервалах учитываются только для звезд с большими (положительными и отрицательными) склонениями. В таблицах первая производная каждой координаты, отнесенная к годовичному интервалу, обозначается VA (*variatio annua* — *годовичное изменение*). Помимо линейной составляющей прецессии она включает еще и собственное движение звезды по этой координате. Вторая производная координаты, вычисленная для годовичного интервала и умноженная на 100, обозначается VS (*variatio saecularis* — *вековое изменение*). Наконец, величина  $\frac{10^6}{6} \dddot{\alpha}$  обозначается III и называется просто «третий член». Написанная выше зависимость получает вид

$$\begin{aligned} \alpha_{t_2} - \alpha_{t_1} = \\ = VA_\alpha \cdot (t_2 - t_1) + VS_\alpha \cdot \frac{(t_2 - t_1)^2}{200} + III_\alpha \left( \frac{t_2 - t_1}{100} \right)^3. \end{aligned}$$

Так же выглядит и выражение для  $\delta$ .

**Нутация.** Нутации, или суммы периодических членов в  $\psi$  и  $\theta$ , о которых говорилось в гл. 1, — это периодические движения точки весеннего равноденствия по эклиптике вокруг среднего положения и периодические колебания наклона  $\theta$  эклиптики к экватору. Из рис. 29 видно, что нутация  $\Delta\epsilon$  в угле  $\theta = \epsilon$  (нутация в наклоне) вызывает движения полюса мира

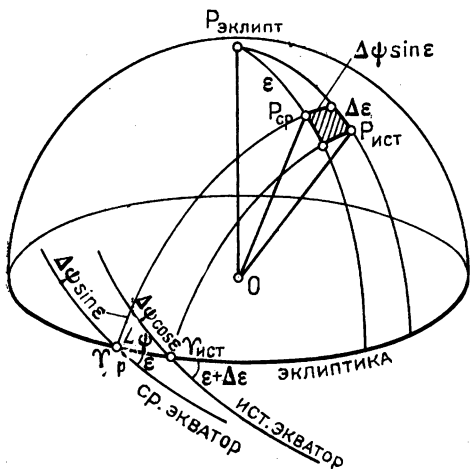


Рис. 29.

вдоль меридиана эклиптической системы координат (круга широты), т. е. к полюсу эклиптики или от него. Нутация  $\Delta\psi$  в угле  $\psi$  (нутация в долготе) смещает полюс на угол  $\Delta\psi \sin \epsilon$  по дуге эклиптической параллели; эту дугу на малом участке нутационных смещений можно считать совпадающей с дугой большого круга. Таким образом, отклонение истинного полюса мира от среднего полюса оказывается разложенным по двум ортогональным осям, которые, принимая во внимание малость нутации, можно считать лежащими не на сфере, а на плоскости (см. рис. 29).

Нутации  $\Delta\psi$  и  $\Delta\epsilon$  состоят из большого количества членов с разными периодами и амплитудами. По величинам периодов они условно делятся на не зависящие от эклиптической долготы Луны долгопериодические (период больше месяца) и короткопериодические (меньше месяца). Максимальную амплитуду имеет

нутация с периодом 18,6 года:  $\sim 17''$  по  $\psi$  (т.е.  $\sim 7''$  в  $\psi \sin \epsilon$ ) и  $\sim 9''$  по  $\theta$  \*).

Если из нутации  $\Delta\psi$  выделена компонента  $\Delta\psi \sin \epsilon$ , то в качестве второй компоненты по правилу сложения векторов надо рассматривать  $\Delta\psi \cos \epsilon$ . Нутации  $\Delta\psi \sin \epsilon$  и  $\Delta\epsilon$  влияют и на склонения и на прямые восхождения звезд. Нутация  $\Delta\psi \cos \epsilon$  направлена вдоль небесного экватора; она одинаково изменяет прямые восхождения всех звезд и не влияет на их склонения, как не влияет на них прецессия от планет. Поэтому ее называют *нутацией в прямом восхождении*. Существует еще нутация в скорости собственного вращения Земли  $\dot{\phi}$ ; она вызывает некоторую неравномерность вращения Земли и проявляется в небольших колебаниях скорости видимого вращения небесной сферы.

**Движение полюсов Земли.** Неравномерность вращения Земли, собственно, влияет уже не на экваториальные координаты звезд, а на положение наблюдателя относительно экваториальной системы координат. К этой, третьей группе подлежащих учету явлений относится также движение земных полюсов.

Экваториальная система небесных координат определяется *экватором вращения* Земли. При этом безразлично, как расположен экватор фигуры Земли. Поэтому и определенные астрономическими методами координаты пунктов земной поверхности оказываются отнесенными к экватору вращения (см. также гл. 4). Эти *мгновенные* координаты пунктов земной поверхности непригодны для использования в геодезии, так как по мере смещения экватора вращения относительно экватора фигуры они меняются. Поэтому в мгновенные координаты приходится вводить поправки для приведения их к единой системе — системе экватора фигуры. Эта операция называется *приведением координат к средним полюсам*.

Здесь надо иметь в виду следующее. «Движение полюсов» отделено от прецессии и нутации в известной мере условно. Разграничение вызвано тем, что прецессия и нутация точно предвычисляются на годы

---

\*) В системе астрономических постоянных 1964 г. [13] для последней из этих величин, называемой *постоянной нутации*, принято значение  $N = 9'',210$ .

вперед и могут быть введены в координаты звезд заблаговременно, а движение мгновенных полюсов заранее учесть нельзя, так как это движение нерегулярное. Но если бы его удавалось вычислять заранее, можно было бы предвычислять координаты звезд не в системе экватора вращения, а в системе экватора фигуры. Обработывая с этими координатами астрономические наблюдения, выполненные для определения местоположения, можно было бы получать *сразу средние* координаты пунктов земной поверхности.

**Учет изменений координат.** Перед использованием координат звезд при обработке наблюдений должно быть учтено влияние на эти координаты всех рассмотренных факторов. Эта процедура называется *редукцией координат*. Способ редукции определяется прежде всего тем, какие значения координат имеются и какие нужно получить.

Двум основным разделам астрометрии: фундаментальной астрометрии и практической, или полевой, астрономии — свойствен противоположный подход к этому вопросу [16, 20].

**Приведение звезд на средние места.** Цель фундаментальной астрометрии — получение каталогов экваториальных координат звезд путем соответствующей обработки астрономических наблюдений.

В гл. 4 и 5 установлено, что склонение  $\delta$  звезды, находящейся на небесном меридиане, равно  $\varphi \pm z$  или  $180^\circ - \varphi - z$ , и прямое восхождение  $\alpha$  равно местному звездному времени  $s = \lambda + S$ , где  $\lambda$  — долгота места наблюдения, а  $S$  — гринвичское звездное время. На этих соотношениях может быть основано определение  $\alpha$  и  $\delta$  каталогизируемых звезд. Но звезды наблюдаются, очевидно, на тех местах, куда их смещают со средних положений перечисленные выше эффекты. Координаты звезд в каталоге должны быть стабильными, т. е. освобожденными от изменений и отнесенными к определенной эпохе. Такие координаты называются *средними*. Поэтому в фундаментальной астрометрии ставится задача *приведения звезд на средние места*.

Упрощенно схема решения этой задачи выглядит так. Из измеренного зенитного расстояния звезды  $z$  исключается влияние атмосферной рефракции, а в

координаты пункта наблюдения  $\phi$  и  $\lambda$  вводятся поправки для перехода к мгновенным полюсам. Тогда формулы предыдущего абзаца позволяют получить некоторые значения экваториальных координат звезды  $\alpha$  и  $\delta$ . Эти координаты называются *видимыми*, а соответствующее им положение звезды на небе называется ее *видимым местом*. Исключение из видимых координат влияния суточной и годичной аберрации дает так называемые *истинные координаты*. Затем из них исключают влияние годичного параллакса и нутации. Получаются координаты, отнесенные к среднему небесному экватору и равноденствию момента наблюдения. Далее можно ввести поправку за прецессию с тем, чтобы отнести полученные координаты к любому принятому по тем или иным соображениям моменту времени, как правило, единому для данного каталога. Этот момент называется *равноденствием каталога*, поскольку ему соответствует определенное положение точки весеннего равноденствия. Звезды, имеющие собственные движения, зафиксированы в этом каталоге на тех местах, где они находились в момент наблюдения. Поэтому для такого каталога, кроме равноденствия, указывается *эпоха каталога* — момент наблюдения, обычно общий для всех звезд. Если же собственные движения звезд известны, они учитываются одновременно с прецессией при переходе к равноденствию каталога. В этом случае эпоха и равноденствие каталога совпадают. Так как из этих координат исключен годичный параллакс, они являются гелиоцентрическими. Вековую аберрацию из наблюдаемых координат не исключают, так как смещение звезды под действием этой аберрации сказывается одинаково на результатах всех наблюдений этой звезды: как наблюдений, дающих материал для составления каталога звезд, так и наблюдений, позволяющих с помощью этого каталога получить астрономические координаты наблюдательного пункта.

**Приведение звезд на видимые места.** Этот второй вид наблюдений относится уже к области практической (полевой или навигационной) астрономии. Для определения координат места также измеряют положения звезд. Могут быть использованы, в



частности, и наблюдения звезд в меридиане, когда местоположение определяется из приводившихся выше соотношений

$$\varphi = \delta \pm z \quad \text{или} \quad 180^\circ - \delta - z,$$
$$\lambda = s - S = \alpha - S.$$

Звезды по-прежнему наблюдаются на видимых местах, искаженных рефракцией. Поэтому влияние рефракции должно быть исключено из зенитных расстояний, и тогда при расчете местоположения в эти формулы нужно подставлять видимые координаты. А так как каталоги дают средние места, должно быть выполнено *приведение звезд на видимые места*. Гринвичское звездное время  $S$  также должно быть *истинное*, т. е. в него должна быть введена нутация в прямом восхождении (см. гл. 5).

Приведение звезд на видимое место — операция, обратная приведению на среднее место, т. е. она состоит в последовательном учете прецессии, собственного движения звезд, нутации, годичной и суточной аберрации, годичного параллакса. Из наблюдений получают мгновенные координаты пункта, которые затем приводятся к средним полюсам.

Почти всю вычислительную работу по приведению на видимые места звезд, обычно наблюдаемых в практической астрономии, берут на себя составители *астрономических ежегодников* (в СССР — Институт теоретической астрономии АН СССР). В Астрономическом Ежегоднике СССР [25] даются с 10-суточным интервалом координаты  $\sim 700$  звезд, в которых учтены все редукции, кроме рефракции и суточной аберрации (которые для каждого наблюдательного пункта и момента наблюдения имеют свои значения) и короткопериодической нутации, которую таблицы с 10-суточным интервалом надежно отразить не могут.

**Приведение планет на видимые места.** Вычисление видимых координат планет и других тел Солнечной системы отличается тем, что в качестве исходных данных берутся не постоянные средние места, а уравнения движения. Вычисленные на основе этих уравнений экваториальные гелиоцентрические координаты планеты в момент наблюдения, как правило, уже учи-

тывают прецессию. Поэтому далее в них вводятся все редукции, кроме прецессии, с учетом оговоренных выше особенностей учета аберрации.

**Приведение на видимые места для наблюдений из космоса.** При внеземных наблюдениях приведение светил на видимые места по составу операций может не соответствовать тому, что изложено выше для наземных наблюдений.

Например, наблюдатель на лунной поверхности будет видеть звезды, не сдвинутые суточной аберрацией, но добавится аберрация, связанная с движением Луны вокруг Земли. С этим движением связан и «месячный» параллакс, который (вместо суточного параллакса) нужно будет учитывать для близких небесных тел. Вместо нутации будет *физическая либрация* Луны. Кроме того, при приведении звезд на видимые с Луны места координаты звезд должны быть переведены из (гео)экваториальной системы равноденствия каталога в селеноэкваториальную систему момента наблюдения, т. е. в систему, основная плоскость которой — экватор вращения (или, возможно, экватор фигуры) Луны [14].

В некоторых случаях наблюдений из космоса перечень факторов, учитываемых при редукции координат, может быть сокращен. Например, при астрономическом определении местоположения космического корабля в пространстве важно учесть явления, изменяющие взаимное положение астроориентиров. Прецессия и нутация, которые к этой группе явлений не относятся, могут в данном случае не приниматься во внимание.

Как практически осуществляется приведение светил на видимые места, будет показано в Приложении 1.

## Приложение 1

### ПРИВЕДЕНИЕ СВЕТИЛ НА ВИДИМЫЕ МЕСТА

**Редукционные величины и постоянные.** В гл. 6 было показано, что для точного приведения координат светил на видимые места в них нужно ввести большое количество поправок. Показано также, что некоторые из редуций (например, поправки за нутацию) имеют весьма сложную структуру.

Полное вычисление их для каждого случая приведения звезды на видимое место — большой и кропотливый труд. Для облегчения этого труда составлены таблицы видимых мест звезд (без учета короткопериодической нутации и суточной аберрации), публикуемые в *Астрономическом Ежегоднике СССР*, а для звезд, видимые места которых не вычисляются, — таблицы *редукционных величин и редуционных постоянных* (эти таблицы используются и для расчета поправок за короткопериодическую нутацию)\*).

Таблицы редуционных величин и редуционных постоянных оказалось возможным составить потому, что поправки в координаты звезд за каждый из перечисленных в гл. 6 эффектов удалось представить произведением двух величин, одна из которых зависит только от экваториальных координат звезды, т. е. (благодаря своей малости) почти не зависит от времени; вторая, наоборот, есть функция времени и не зависит от координат звезды, т. е. в каждый момент времени она одинакова для всех звезд. Величины, зависящие

---

\*) Таблицы редуционных величин печатаются в *Астрономическом Ежегоднике СССР* [25]. Таблицы редуционных постоянных можно найти в звездных каталогах, например, [26]; небольшая таблица редуционных постоянных есть также в [25] (для звезд, для которых даны только средние места).

от координат, и называются *редукционными постоянными*. Только от времени зависят *редукционные величины*.

**Алгебраические формулы приведения на видимое место.** Если средние координаты звезды  $\alpha_0, \delta_0$  известны на ближайшее начало бесселева года (в первом полугодии это начало текущего года, во втором — начало следующего года), то ее видимые координаты равны

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\text{вид}} &= \alpha_0 + (A + A')a + (B + B')b + Cc + Dd + \\ &\quad + \mu_\alpha \tau + \text{малые члены,} \\ \delta_{\text{вид}} &= \delta_0 + (A + A')a' + (B + B')b' + Cc' + Dd' + \\ &\quad + \mu_\delta \tau + \text{малые члены,} \end{aligned} \right\} (1)$$

где  $A, A', B, B', C, D$  — редуцированные величины;  $a, a', b, b', c, c', d, d'$  — редуцированные постоянные;  $\tau$  — время, выраженное в долях года, от ближайшего (предшествующего или последующего) начала года до момента, для которого рассчитывается видимое место;  $\mu_\alpha$  и  $\mu_\delta$  — собственное движение звезды по  $\alpha$  и по  $\delta$ ; оно дается в звездных каталогах. Члены  $Aa, Aa', Bb$  и  $Bb'$  служат для учета прецессии от начала года и долгопериодической нутации, члены  $A'a, A'a', B'b$  и  $B'b'$  — для учета короткопериодической нутации, члены  $Cc, Cc', Dd$  и  $Dd'$  — для учета годичной аберрации и годичного параллакса, и члены  $\mu\tau$  — для учета собственного движения от начала года. Малые члены компенсируют нелинейность редукиций; к ним же можно отнести поправки за суточную аберрацию.

При отсутствии каталога средних мест звезд для начала года приходится вычислять  $\alpha_0$  и  $\delta_0$  дополнительно. Формулы для такого расчета с использованием таблиц величин  $VA_\alpha, VA_\delta, VS_\alpha, VS_\delta, III_\alpha, III_\delta$  описаны в гл. 6.

**О точности расчета видимых мест.** В практической астрономии обычным является вычисление  $\delta$  до  $0'',01$  и  $\alpha$  до  $0^s,001$  или, при менее точных расчетах,  $\delta$  до  $0'',1$  и  $\alpha$  до  $0^s,01$ . Это вычисление может быть выполнено только с учетом всех членов формул (1).

Если не считать некоторых специальных задач, например, задачи создания абберационного измерителя скорости и курса космического полета (о чем говорилось в гл. 6), в навигационной астрономии такая точность обычно не требуется. По-видимому, еще в течение длительного времени в околоземной (самолетной) навигации будет достаточно вычислять координаты с точностью до  $0',05$ , т. е.  $\delta$  до  $\sim 3''$  и  $\alpha$  — до  $\sim 0^s,2$ . При этом все поправки существенно упрощаются и становится несложно приводить светила на видимые места без помощи таблиц редуцированных величин и постоянных, а прямо по известным величинам прецессии, нутации, абберации. Такой расчет не требует значительного объема памяти ЭВМ и потому может выполняться прямо на борту самолета или космического летательного аппарата\*). Эта возможность особенно ценна при создании автоматических автономных навигационных систем, снабжаемых вычислительными машинами [10].

**Состав редукиций.** Рассмотрим особенности вычисления видимых мест звезд с указанной точностью, если момент наблюдения отстоит от эпохи каталога средних мест не далее чем на 3—5 лет.

Собственное движение существенно только для очень немногих «быстрых» звезд. Если количество «навигационных» звезд невелико, среди них может вообще не оказаться ни одной звезды, для которой надо было бы учитывать собственное движение.

Прецессию по  $\alpha$  и по  $\delta$  можно считать практически линейной.

Из всех нутационных членов существенны лишь следующие: нутация в наклоне

$$\Delta\epsilon = + 9'',2 \cos \Omega, \quad (2)$$

нутация в долготе

$$\Delta\psi = - 17'',2 \sin \Omega. \quad (3)$$

В эти выражения входит средняя эклиптическая долгота  $\Omega$  восходящего узла лунной орбиты на эклип-

---

\*) Для более мощных ЭВМ существуют программы точного расчета видимых мест, составленные по тому же принципу.

тике, изменяющаяся на  $360^\circ$  за 18,6 года. Ближайшая дата, когда  $\Omega$  будет равна нулю, — 1987,85, т. е. через 0,85 года после начала 1987 бесселева года.

Смещение каждой звезды под влиянием годичной абберации равно  $20'',5 \sin u$ , где  $u$  — угловое расстояние этой звезды от апекса. Для Солнца  $u \approx 90^\circ$ , и смещение всегда близко к  $20'',5$ .

Разницей между геоцентрическими и гелиоцентрическими координатами (т. е. годичным параллаксом) можно пренебречь даже для ближайших звезд. Можно решительно пренебречь и такими эффектами как суточная абберация звезд или движение земных полюсов.

Рефракция при наблюдениях с поверхности Земли значительно искажает картину неба, но уже на высоте 10 км для светил, удаленных от зенита не далее  $50$ — $60^\circ$ , она практически равна нулю.

**Выбор эпохи каталога.** Средние координаты звезд в каталоге, «закладываемом» в память вычислительной машины, нужно отнести к определенной эпохе  $t_0$ . В принципе можно выбрать любое значение  $t_0$ , но целесообразно назначить эпоху  $t_0$  исходя из того, чтобы она отстояла от момента наблюдения  $t$  не более, чем на 3—5 лет, и чтобы формулы получили наиболее удобный для вычислений вид.

Обоим этим условиям во второй половине 70-х годов удовлетворяет момент перехода  $\Omega$  через значение  $180^\circ$

$$t_0 = 1978,55;$$

в первой половине 80-х годов столь же удобным моментом будет  $t_0 = 1983,20$  ( $\Omega = 90^\circ$ ), а позже —  $t_0 = 1987,85$  ( $\Omega = 0^\circ$ ).

Для вычисления видимых мест звезд допустимо указывать исходный момент с точностью в 0,01 года. Для Солнца, Луны и планет, экваториальные координаты которых быстро меняются, можно произвольным образом уточнить указанные моменты, например, взять за  $t_0$  для первой даты гринвичскую среднюю полночь с 18 на 19 июля 1978 г., т. е., применяя систему дробного обозначения долей интервалов времени, «июль 19,0». В юлианских (всемирных) днях этому соответствует  $JD_0 = 2\,443\,708,5$ . Для двух других дат примем  $JD_0 = 2\,445\,408,5$  и  $JD_0 = 2\,447\,107,5$ .

Если момент наблюдения  $t$  тоже выразить в юлианских днях (JD), то интервал времени между  $t_0$  и  $t$  будет равен  $JD - JD_0 = d$  (в сутках) или  $d/365,25 = \tau$  (в годах). Очевидно, при  $t < t_0$  интервал  $d < 0$ .

Вычисление  $d$  и  $\tau$  можно предусмотреть прямо в программе ЭВМ. В ее память должно быть заложено значение  $JD_0$ , а аргументом, вводимым при расчете, будет JD.

Ниже о порядке и о точности вычисления интервала  $t - t_0$  будут сделаны некоторые дополнительные замечания.

**Исходные величины.** Теперь необходимо ввести ряд величин, определяющих среднее движение Солнца (точнее, Земли вокруг Солнца) и Луны: наклон эклиптики к экватору, долготы Луны и Солнца и их разность, долготу восходящего узла лунной орбиты на эклиптике, аномалии Солнца и Луны, эксцентриситет орбиты Солнца, разность гринвичского звездного и всемирного времени.

Эти величины выведены Ньюкомбом [22, 33] для Солнца и Брауном [31] для Луны, а нами пересчитаны для выбранных выше эпох  $t_0$  и представлены линейными двучленами вида

$$\alpha + \beta d.$$

Для компенсации расхождения всемирного и эфемеридного времени моменты  $t_0$  при этом пересчете задавались в эфемеридном времени как  $JD_0 = 2\,443\,708,50057$  (было принято  $\Delta T = +49^s$ ),  $JD_0 = 2\,445\,408,50064$  ( $\Delta T \approx +55^s$ ) и  $JD_0 = 2\,447\,107,50069$  ( $\Delta T \approx +60^s$ ).

Значения  $\alpha$  и  $\beta$  приводятся в табл. 2.

Из таблицы 2 видно, что  $S_0$  периодически будет становиться больше  $24^h$ , а  $L$ ,  $g$ ,  $\zeta$ ,  $l$  или  $D$  — больше  $360^\circ$ . В этих случаях нужно вычитать из  $S_0$   $24^h$ , а из остальных величин  $360^\circ$ .

Как сказано выше, параллельно с видимыми местами звезд должно рассчитываться истинное гринвичское звездное время. Начнем с этого расчета.

**Вычисление истинного гринвичского звездного времени.** Истинное звездное время в гринвичскую полночь равно среднему звездному времени в полночь  $S_0$ , определенному формулой (4), плюс нутация в пря-

Таблица 2

## Величины, определяющие движение Солнца и Луны

Наименование	Обозначение	α при всемирном JD <sub>0</sub> , равном		β	№№ уравнений
		2 443 708,5	2 445 408,5		
Разность гринвичского звездного и всемирного времени *)	S <sub>0</sub>	19 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 44 <sup>s</sup> ,49	11 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup> 08 <sup>s</sup> ,62	+236 <sup>s</sup> ,55536	(4)
Средняя тропическая долгота Солнца	L	{ 116 ° 26' 28"	352 ° 02' 30"	+0 °,9856473	(5)
Средняя аномалия Солнца	g	{ 116 ° 4410 193 °,870	352 °,0416 69 °,390		
Эксцентриситет орбиты Солнца	e	0,0167181	0,0167162	—	—
Средний наклон эклиптики к экватору	ε	23 ° 26' 31"	23 ° 26' 29"	—	—
Средняя долгота Луны	☾	281 °,5	1 °,4	+13 °,1764	(7)
Средняя аномалия Луны	l	351 °,1	241 °,6	+13 °,0650	(8)
Разность средних эклиптических долгот Луны и Солнца	D	165 °,0	9 °,3	+12 °,1908	(9)
Средняя долгота восходящего узла	Ω	180 °,0	90 °,0	—19 °,34 **)	(10)

\*) Абerrация включена, так как среднее солнце, определяющее гринвичское среднее солнечное (всемирное) время, всегда сдвинуто на величину абerrации Солнца.

\*\*\*) Для долготы узла указано не суточное, а годичное изменение.



мом восхождении  $\Delta\psi \cos \epsilon$ . Нутация в прямом восхождении, переведенная из градусной меры в часовую, с учетом (3) и (10) равна

$$F_1 = 1^s,05 \cdot \begin{cases} -\sin(19^\circ,34\tau) & (t_0 = 1978,55), \\ -\cos(19^\circ,34\tau) & (t_0 = 1983,20), \\ +\sin(19^\circ,34\tau) & (t_0 = 1987,85). \end{cases} \quad (11)$$

Трехстрочная запись и ниже будет использована для параметров, меняющихся от эпохи к эпохе.

Через  $F_i$ , где  $i = 1, 2, \dots$ , будем обозначать некоторые величины, которые являются функциями времени и которые, следовательно, можно отнести к категории редуцированных величин.

В соответствии с формулой (4) разность истинного гринвичского звездного времени и всемирного времени в момент наблюдения равна

$$\left. \begin{array}{l} 19^h 45^m 44^s,5 \\ 11 28 08,6 \\ 3 06 36,2 \end{array} \right\} + 236^s,55536d + F_1.$$

Добавление этой величины к значению всемирного времени  $T_0$  дает звездное гринвичское время

$$S_{\text{ист}} = \left\{ \begin{array}{l} 19^h 45^m 44^s,5 \\ 11 28 08,6 \\ 3 06 36,2 \end{array} \right\} + 236^s,55536d + T_0 + F_1. \quad (12)$$

Несколько преобразуем это выражение.

Интервал времени от  $t_0$  до гринвичской полуночи даты наблюдения обозначим  $d_0$  ( $d_0$  — целое число). Поскольку в момент наблюдения всемирное время равно  $T_0$ , интервал времени от  $t_0$  до момента наблюдения равен

$$d = d_0 + \frac{T_0}{24}, \quad (13)$$

где  $T_0$  выражено в часах.

Подстановка (13) в (12) дает

$$S_{\text{ист}} = \left\{ \begin{array}{l} 19^h 45^m 44^s,5 \\ 11 28 08,6 \\ 3 06 36,2 \end{array} \right\} + \\ + 236^s,55536d_0 + 9^s,856T_0^{(\text{часы})} + T_0 + F_1. \quad (14)$$

Выражения (12) и (14) тождественны, но (14) удобнее, если в течение суток  $S_{\text{ист}}$  приходится вычислять неоднократно.

### Вычисление видимых координат звезд.

1. Упрощенные алгебраические формулы. Средние места звезд  $\alpha_0, \delta_0$  для эпохи  $t_0$  вычисляются заблаговременно по любому звездному каталогу (например, по таблице «Средние места звезд» Астрономического Ежегодника СССР на соответствующий год, например, на 1978 г. для  $t_0 = 1978,55$  с помощью уже известных соотношений

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha_{1978,0} + 0,55VA_\alpha, \\ \delta_0 &= \delta_{1978,0} + 0,55VA_\delta.\end{aligned}\quad (15)$$

При машинном вычислении координат звезд значения  $\alpha_0$  и  $\delta_0$ , полученные по (15), вводятся в память ЭВМ.

Если подставить в формулы (1) значения редуцированных величин и отбросить малые (при принятой нами точности) члены, получатся следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned}\alpha_{\text{вид}} &= \alpha_0 + \left( \tau + \frac{\Delta\psi}{p_1} \right) na - \Delta\varepsilon \cdot b - \\ &\quad - \kappa \cos \varepsilon \cos L \cdot c - \kappa \sin L \cdot d + \mu_\alpha \tau, \\ \delta_{\text{вид}} &= \delta_0 + \left( \tau + \frac{\Delta\psi}{p_1} \right) na' - \Delta\varepsilon \cdot b' - \\ &\quad - \kappa \cos \varepsilon \cos L \cdot c' - \kappa \sin L \cdot d' + \mu_\delta \tau.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Второй и третий члены в правых частях — это поправки за прецессию от  $t_0$  до  $t$  и нутацию, четвертый и пятый — за годичную аберрацию, шестой — за собственное движение от  $t_0$  до  $t$ .

В формулах (16) употреблены следующие стандартные обозначения:  $a = \frac{m}{n} + \text{tg } \delta_0 \sin \alpha_0$ ,  $b = \text{tg } \delta_0 \cos \alpha_0$ ,  $c = \text{ces } \delta_0 \cos \alpha_0$ ,  $d = \text{sec } \delta_0 \sin \alpha_0$ ,  $a' = \cos \alpha_0$ ,  $b' = -\sin \alpha_0$ ,  $c' = \text{tg } \varepsilon \cos \delta_0 - \sin \delta_0 \sin \alpha_0$ ,  $d' = \sin \delta_0 \cos \alpha_0$  — редуцированные постоянные \*);  $p_1 =$

\*) До 1960 г. редуцированные постоянные  $a$  и  $a'$  имели другие значения:

$$a = m + n \text{tg } \delta_0 \sin \alpha_0, \quad a' = n \cos \alpha_0.$$

Поэтому величины  $a$  и  $a'$ , взятые из таблиц редуцированных постоянных старых выпусков, нужно делить на  $n$ .

$= 50'',4$  — лунно-солнечная годовая прецессия в долготе;  $m \approx p_1 \cos \varepsilon = 46'',1$  — общая годовая прецессия по прямому восхождению;  $n = p_1 \sin \varepsilon = 20'',0$  — общая годовая прецессия по склонению;  $\kappa = 20'',5$  — постоянная годовая абберации;  $\Delta\varepsilon$  и  $\Delta\psi$  — нутации, которые по (2), (3) и (10) равны:

$$\Delta\varepsilon = 9'',2 \cdot \begin{cases} -\cos(19^\circ,34\tau) \\ +\sin(19^\circ,34\tau); \\ +\cos(19^\circ,34\tau) \end{cases}$$

$$\Delta\psi = 17'',2 \cdot \begin{cases} -\sin(19^\circ,34\tau) \\ -\cos(19^\circ,34\tau). \\ +\sin(19^\circ,34\tau) \end{cases}$$

В (16) входит также значение средней тропической долготы Солнца  $L$ . Согласно (5)

$$L = \left\{ \begin{array}{l} 116^\circ,4 \\ 352^\circ,0 \\ 226^\circ,7 \end{array} \right\} + 360^\circ\tau.$$

Если теперь обозначить

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= n \left( \tau + \frac{\Delta\psi}{p_1} \right) = \\ &= 20'',0 \cdot \begin{cases} [\tau - 0,341 \sin(19^\circ,34\tau)] \\ [\tau - 0,341 \cos(19^\circ,34\tau)], \\ [\tau + 0,341 \sin(19^\circ,34\tau)] \end{cases} \\ F_3 &= -\Delta\varepsilon = 9'',2 \cdot \begin{cases} +\cos(19^\circ,34\tau) \\ -\sin(19^\circ,34\tau), \\ -\cos(19^\circ,34\tau) \end{cases} \\ F_4 &= -\kappa \cos \varepsilon \cos L = \\ &= -18'',8 \cos \left( \left\{ \begin{array}{l} 116^\circ,4 \\ 352^\circ,0 \\ 226^\circ,7 \end{array} \right\} + 360^\circ\tau \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$F_5 = -\kappa \sin L = -20'',5 \sin \left( \left\{ \begin{array}{l} 116^\circ,4 \\ 352^\circ,0 \\ 226^\circ,7 \end{array} \right\} + 360^\circ \tau \right), \quad (17)$$

то (16) примет вид

$$\alpha_{\text{вид}} = \alpha_0 + F_2 a + F_3 b + F_4 c + F_5 d + \mu_\alpha \tau, \quad (18)$$

$$\delta_{\text{вид}} = \delta_0 + F_2 a' + F_3 b' + F_4 c' + F_5 d' + \mu_\delta \tau, \quad (19)$$

где окончательный вид редуccionных постоянных

$$\left. \begin{aligned} a &= 1/15 (2,301 + \operatorname{tg} \delta_0 \sin \alpha_0), & a' &= \cos \alpha_0, \\ b &= 1/15 \operatorname{tg} \delta_0 \cos \alpha_0, & b' &= -\sin \alpha_0, \\ c &= 1/15 \sec \delta_0 \cos \alpha_0, & c' &= \cos \delta_0 (0,434 - \operatorname{tg} \delta_0 \sin \alpha_0), \\ d &= 1/15 \sec \delta_0 \sin \alpha_0, & d' &= \sin \delta_0 \cos \alpha_0. \end{aligned} \right\} (20)$$

Коэффициенты  $1/15$  вводятся, когда  $\alpha$  выражается во времени, потому что значения  $F_i$  введены в (18) не в часовой, а в градусной мере.

По внешнему виду выражения (18) — (19) не отличаются от (1), но наши редуccionные величины  $F_i$  в отличие от  $A + A', B + B', C, D$  имеют очень простую структуру и вычисляются элементарно. Так же легко рассчитываются и редуccionные постоянные, которые при постановке вычислений на ЭВМ вычислять каждый раз заново проще, чем вводить в память машины, увеличивая необходимый объем этой памяти.

2. Упрощенные тригонометрические формулы. Когда весь расчет выполняется на ЭВМ, его можно несколько упростить, отказавшись при этом от строгого деления сомножителей на «редуccionные величины» и «редуccionные постоянные». Считая

$$\frac{n}{p_1} \cdot \max(\Delta\psi) \approx \max(\Delta\epsilon) \approx 8'' \approx 0^s,5,$$

$$\kappa \cos \epsilon \approx \kappa \approx 20'' \approx 1^s,3,$$

можно представить выражения (16) в таком виде:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{вид}} = & \alpha_0 + \tau na + \frac{\Delta\psi}{\rho_1} \cdot n \cdot \frac{m}{n} + \\ & + 0^s,5 \operatorname{tg} \delta_0 \sin \alpha_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} - \sin (19^\circ,34\tau) \\ - \cos (19^\circ,34\tau) \\ + \sin (19^\circ,34\tau) \end{array} \right\} + \\ & + 0^s,5 \operatorname{tg} \delta_0 \cos \alpha_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \cos (19^\circ,34\tau) \\ - \sin (19^\circ,34\tau) \\ - \cos (19^\circ,34\tau) \end{array} \right\} - \\ & - 1^s,3 \cos \left( \left\{ \begin{array}{l} 116^\circ,4 \\ 352^\circ,0 \\ 226^\circ,7 \end{array} \right\} + 360^\circ\tau \right) \sec \delta_0 \cos \alpha_0 - \\ & - 1^s,3 \sin \left( \left\{ \begin{array}{l} 116^\circ,4 \\ 352^\circ,0 \\ 226^\circ,7 \end{array} \right\} + 360^\circ\tau \right) \sec \delta_0 \sin \alpha_0 + \mu_\alpha \tau. \end{aligned}$$

(Выражение для  $\delta_{\text{вид}}$  имеет схожую структуру; приводить его не будем.)

Известные тригонометрические соотношения

$$\begin{aligned} \cos x \cos y \pm \sin x \sin y &= \cos (x \mp y), \\ \sin x \cos y \pm \cos x \sin y &= \sin (x \pm y) \end{aligned}$$

позволяют получить окончательно

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{вид}} = & \alpha_0 + \tau na + F_1 + \\ & + 0^s,5 \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \cos (19^\circ,34 \tau + \alpha_0) \\ - \sin (19^\circ,34 \tau + \alpha_0) \\ - \cos (19^\circ,34 \tau + \alpha_0) \end{array} \right\} - \\ & - 1^s,3 \sec \delta_0 \cos \left( \left\{ \begin{array}{l} 116^\circ,4 \\ 352^\circ,0 \\ 226^\circ,7 \end{array} \right\} + 360^\circ \tau - \alpha_0 \right) + \mu_\alpha \tau, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\delta_{\text{вид}} = \delta_0 + \tau na' - 8'' \cos \delta_0 \cos \left( \left\{ \begin{array}{l} 116^\circ,4 \\ 352^\circ,0 \\ 226^\circ,7 \end{array} \right\} + 360^\circ \tau \right) +$$

$$+ 8'' \cdot \left\{ \begin{array}{l} - \sin (19^\circ,34 \tau + \alpha_0) \\ - \cos (19^\circ,34 \tau + \alpha_0) \\ + \sin (19^\circ,34 \tau + \alpha_0) \end{array} \right\} -$$

$$- 20'' \sin \delta_0 \sin \left( \left\{ \begin{array}{l} 116^\circ,4 \\ 352^\circ,0 \\ 226^\circ,7 \end{array} \right\} + 360^\circ \tau - \alpha_0 \right) + \mu_\delta \tau. \quad (22)$$

Вторые члены в правых частях (21) — (22) — поправки за прецессию от  $t_0$  до  $t$ , третий и четвертый члены в (21) и четвертый член в (22) — поправки за нутацию, пятый член в (21) и третий и пятый в (22) — поправки за годовую аберрацию.

Заметим, что если целью вычислений является определение долготы места наблюдения, то поправку  $F_1$  за нутацию в прямом восхождении можно не вводить ни в прямые восхождения звезд, ни в гринвичское звездное время  $S$ . При этом разность прямых восхождений кульминирующих звезд и времени  $S$ , определяющая собой долготу, не изменится.

Формулы (18) — (19) и (21) — (22) могут применяться с равным успехом. Вычисленные места звезд в течение нескольких суток можно считать постоянными.

### Вычисление видимых координат Солнца.

1. Эклиптические координаты. Солнце отличается от остальных звезд наличием большого собственного движения (в среднем около  $1^\circ$  в сутки), происходящего в плоскости эклиптики, т. е. по долготе, и ощутимого суточного параллакса. Геоцентрическая широта Солнца с точностью до одной дуговой секунды равна нулю. Поэтому учесть изменения долготы Солнца гораздо проще, чем изменения его экваториальных координат, и представляется рациональным вычислять экваториальные координаты Солнца не прямо, а по предварительно вычисленной долготе.

Как показано в гл. 1, истинная долгота Солнца  $L_\odot$  меняется неравномерно. Для перехода от средней

долготы  $L$  к истинной надо ввести ряд периодических поправок (неравенств), имеющих вид

$$a = A \sin(\varphi + \omega d)$$

и собранных в табл. 3, где они расположены в порядке убывания амплитуды, чтобы в зависимости от необходимой точности расчета можно было отбросить то или иное количество членов в нижней части таблицы.

Таблица 3

**Неравенства в долготе Солнца**

Источник неравенства	A	φ при JD <sub>0</sub> , равном			ω
		2 443 708,5	2 445 408,5	2 447 107,5	
Эксцентриситет орбиты	6896'' *)	193 °,87	69 °,39	303 °,92	+0°,98560
Притяжение Юпитера	72'',0	27,7	138,8	247,9	+1,9712
Притяжение Венеры	7,2	14,5	108,8	202,2	+0,9025
Притяжение Луны	6,5	165,0	9,3	201,4	+12,1908
Притяжение Венеры	5,5	41,2	337,4	272,4	+1,2331
Притяжение Юпитера	4,8	290,5	258,6	226,1	+0,6165
Притяжение Венеры	2,7	27,1	215,7	42,4	+1,8050
Притяжение Юпитера	2,6	264,4	123,1	341,9	-0,0831
Притяжение Венеры	2,5	14,9	75,6	136,0	+0,2475
Притяжение Марса	2,0	355,8	125,2	253,7	+0,9232
Притяжение Юпитера	1,8	18,5	272,3	166,2	-0,0624
Притяжение Венеры	1,6	215,7	168,7	120,9	+0,8194
Притяжение Венеры	1,5	305,8	334,5	2,5	+0,8640
Нутация	1,3	52,9	164,1	273,3	+1,9712
Притяжение Венеры	1,0	84,8	238,1	31,4	-0,1216
Эксцентриситет орбиты	1,0	221,6	208,2	191,8	+2,9568

\*) 6897'' для JD<sub>0</sub>=2 443 708,5 и 6895'' для JD<sub>0</sub>=2 447 107,5.

В таблице не приводятся: две долгопериодические поправки  $+6'',4 \sin(231^\circ,2 + 20^\circ,2 T)$  и  $+1'',9 \sin(57^\circ,2 + 150^\circ,3 T)$  ( $T$  считается от эпохи 1900,0), которые до 1990 г. можно считать постоянными.

ными и равными соответственно  $-6''$  и  $0''$ ; поправка за аберрацию, всегда уменьшающая долготу Солнца на  $20'',5$ ; главный член поправки за нутацию (дается только второй по величине член нутации в долготе с амплитудой  $1'',3$ ).

Истинная тропическая долгота Солнца, в которую введены все поправки, кроме главного члена нутации, равна с учетом (5)

$$L_{\odot} = \left\{ \begin{array}{l} 116^{\circ},4337 \\ 352^{\circ},0342 \\ 226^{\circ},6491 \end{array} \right\} + 0^{\circ},9856473 d + \sum a, \quad (23)$$

где  $\sum a$  — сумма поправок, приведенных в табл. 3.

При оговоренных выше условиях интервалы  $d$  в этом уравнении можно измерять не эфемеридными, а средними солнечными сутками, упрощая тем самым счет времени, так как при этом исключается необходимость учета поправок к ходу времени  $\Delta T$ .

2. Экваториальные координаты. Экваториальные координаты Солнца связаны с долготой соотношениями

$$\operatorname{tg} \alpha_{\odot} = \cos \varepsilon \operatorname{tg} L_{\odot}, \quad (24)$$

$$\sin \delta_{\odot} = \sin \varepsilon \sin L_{\odot}. \quad (25)$$

Преобразуем (24) следующим образом:

$$\operatorname{tg} L_{\odot} - \operatorname{tg} \alpha_{\odot} = (1 - \cos \varepsilon) \operatorname{tg} L_{\odot},$$

$$\sin (L_{\odot} - \alpha_{\odot}) = (1 - \cos \varepsilon) \sin L_{\odot} \cos \alpha_{\odot}.$$

Окончательно, после простых тригонометрических преобразований, с учетом соотношения

$$\cos L_{\odot} = \cos \alpha_{\odot} \cos \delta_{\odot}, \quad (26)$$

получим

$$\sin (L_{\odot} - \alpha_{\odot}) = \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2L_{\odot} \sec \delta_{\odot}. \quad (27)$$

Можно убедиться в том, что  $|L_{\odot} - \alpha_{\odot}| < 2^{\circ},5$ , и, следовательно, в разложении  $(L_{\odot} - \alpha_{\odot}) = \operatorname{arc} \sin |\sin (L_{\odot} - \alpha_{\odot})|$  в степенной ряд можно ограничиться двумя членами ряда. В угловой мере

$$L_{\odot} - \alpha_{\odot} = \rho \left[ \sin (L_{\odot} - \alpha_{\odot}) + \frac{1}{6} \sin^3 (L_{\odot} - \alpha_{\odot}) \right],$$



откуда

$$\alpha_{\odot} = L_{\odot} - \rho \sin(L_{\odot} - \alpha_{\odot}) - \frac{\rho}{6} \sin^3(L_{\odot} - \alpha_{\odot}).$$

Подставим сюда (23) и (27) и получим

$$\begin{aligned} \alpha_{\odot} &= \left\{ \begin{array}{l} 116^{\circ},4337 \\ 352^{\circ},0342 \\ 226^{\circ},6491 \end{array} \right\} + 0^{\circ},9856473 d + \sum a - \\ &- 2^{\circ},3644 \sin 2L_{\odot} \sec \delta_{\odot} - 0^{\circ},0007 \sin^3 2L_{\odot} \sec^3 \delta_{\odot} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 7^{\text{h}} 45^{\text{m}},7348 \\ 23^{\text{h}} 28^{\text{m}},1368 \\ 15^{\text{h}} 06^{\text{m}},5964 \end{array} \right\} + 3^{\text{m}},9425893 d + \sum a - \\ &- 9^{\text{m}},457 \sin 2L_{\odot} \sec \delta_{\odot} - 0^{\text{s}},16 \sin^3 2L_{\odot} \sec^3 \delta_{\odot}. \quad (28) \end{aligned}$$

Может оказаться удобным использование вместо (27) зависимостей

$$\sin(L_{\odot} - \alpha_{\odot}) = \begin{cases} = \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tg} \delta_{\odot} \cos L_{\odot}, \\ = \frac{1 - \cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon} \operatorname{tg} \delta_{\odot} \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \delta_{\odot}}, \\ = \frac{(1 - \cos \varepsilon) \sin L_{\odot}}{\sqrt{1 + \cos^2 \varepsilon \operatorname{tg}^2 L_{\odot}}}, \end{cases}$$

вывод которых опускаем. Особенно нужно выделить последнюю зависимость, где  $\alpha_{\odot}$  получается независимо от  $\delta_{\odot}$ .

Разложим в степенной ряд  $\delta_{\odot} = \arcsin(\sin \delta_{\odot})$ . Так как  $|\delta_{\odot}| \leq \varepsilon$ , можно ограничиться тремя членами разложения. В угловой мере

$$\delta_{\odot} = \rho \left( \sin \delta_{\odot} + \frac{1}{6} \sin^3 \delta_{\odot} + \frac{3}{40} \sin^5 \delta_{\odot} \right)$$

или, с учетом (25),

$$\begin{aligned} \delta_{\odot} &= \left\{ \begin{array}{l} 22^{\circ},7935 \\ 22^{\circ},7929 \\ 22^{\circ},7924 \end{array} \right\} \cdot \sin L_{\odot} + \\ &+ 0^{\circ},6012 \sin^3 L_{\odot} + 0^{\circ},0428 \sin^5 L_{\odot}. \quad (29) \end{aligned}$$

Выражений (24) — (25) и (28) — (29) тождественны.

3. Учет нутации. Подставив значение долготы (23) в (24) — (25) или в (28) — (29), получим координаты Солнца  $\alpha_{\odot}$  и  $\delta_{\odot}$ , в которых уже учтены прецессия (так как взята *тропическая* долгота) и абберация. Главный член нутации в координатах Солнца учитывается так же, как в координатах звезд:

$$\begin{aligned}\alpha_{\odot \text{ вид}} &= \alpha_{\odot} + F_6 a + F_3 b, \\ \delta_{\odot \text{ вид}} &= \delta_{\odot} + F_6 a' + F_3 b',\end{aligned}\quad (30)$$

где

$$F_6 = n \frac{\Delta\psi}{p_1} = 6'',8 \cdot \begin{cases} -\sin(19^\circ,34 \tau), \\ -\cos(19^\circ,34 \tau), \\ +\sin(19^\circ,34 \tau), \end{cases}\quad (31)$$

и величины  $a$ ,  $b$ ,  $a'$ ,  $b'$  уже не будут «постоянными», так как они зависят от быстро меняющихся координат Солнца.

Как и для звезд, можно получить вместо (30) выражения

$$\begin{aligned}\alpha_{\odot \text{ вид}} &= \alpha_{\odot} + F_1 + \\ &+ 0^s,5 \operatorname{tg} \delta_{\odot} \cdot \begin{cases} +\cos(19^\circ,34 \tau + \alpha_{\odot}), \\ -\sin(19^\circ,34 \tau + \alpha_{\odot}), \\ -\cos(19^\circ,34 \tau + \alpha_{\odot}), \end{cases} \\ \delta_{\odot \text{ вид}} &= \delta_{\odot} + 8'' \cdot \begin{cases} -\sin(19^\circ,34 \tau + \alpha_{\odot}), \\ -\cos(19^\circ,34 \tau + \alpha_{\odot}), \\ +\sin(19^\circ,34 \tau + \alpha_{\odot}). \end{cases}\end{aligned}\quad (32)$$

4. Учет часовых изменений координат. Если в течение суток Солнце наблюдается неоднократно, удобнее вычислять его координаты по приведенным формулам не для каждого наблюдения, а для момента начала наблюдений, а затем учитывать их изменение, которое в течение 7—8 часов можно считать линейным. Через  $N$  часов после начала наблюдений координаты Солнца будут иметь значения

$$\begin{aligned}\alpha_{\odot \text{ вид}}(N) &= \alpha_{\odot \text{ вид}} + (\text{часовое изменение } \alpha_{\odot}) \cdot N, \\ \delta_{\odot \text{ вид}}(N) &= \delta_{\odot \text{ вид}} + (\text{часовое изменение } \delta_{\odot}) \cdot N,\end{aligned}\quad (33)$$

где  $\alpha_{\odot \text{зид}}$  и  $\delta_{\odot \text{зид}}$  — величины, полученные по формулам (30) или (32).

Чтобы определить часовые изменения  $\alpha_{\odot}$  и  $\delta_{\odot}$ , сначала найдем часовое изменение долготы Солнца  $L_{\odot}$ . Оно равно 1/24 суточного изменения и находится дифференцированием (23) по времени:

$$\dot{L}_{\odot} = 0^{\circ},04107 + 6896'' \cos \left( \left\{ \begin{array}{c} 193^{\circ},9 \\ 69^{\circ},4 \\ 303^{\circ},9 \end{array} \right\} + 0^{\circ},9856 \text{ d} \right) \times \\ \times \frac{0^{\circ},9856}{24\rho}$$

(где  $\rho = 57^{\circ},3$ ), т. е.

часовое изменение  $L_{\odot} =$

$$= 0^{\circ},04107 + 5'' \cos \left( \left\{ \begin{array}{c} 193^{\circ},9 \\ 69^{\circ},4 \\ 303^{\circ},9 \end{array} \right\} + 0^{\circ},9856 \text{ d} \right). \quad (34)$$

Изменения  $\alpha_{\odot}$  и  $\delta_{\odot}$  связаны с изменением  $L_{\odot}$  дифференциальными соотношениями, выводимыми из (24) — (25):

$$d\alpha_{\odot} = \frac{\cos^2 \alpha_{\odot} \cos \varepsilon}{\cos^2 L_{\odot}} dL_{\odot},$$

$$d\delta_{\odot} = \frac{\sin \varepsilon \cos L_{\odot}}{\cos \delta_{\odot}} dL_{\odot},$$

или, с учетом выражения (26),

часовое изменение  $\alpha_{\odot} =$

$$= \frac{1}{15} \cdot 0,9175 \sec^2 \delta_{\odot} \cdot (\text{часовое изменение } L_{\odot}), \quad \left. \vphantom{\frac{1}{15}} \right\} \quad (35)$$

часовое изменение  $\delta_{\odot} =$

$$= 0,3978 \cos \alpha_{\odot} \cdot (\text{часовое изменение } L_{\odot}). \quad \left. \vphantom{0,3978} \right\}$$

Окончательные выражения для геоцентрических видимых мест Солнца дает подстановка (34) и (35) в (33).

5. Учет суточного параллакса. Чтобы перейти от геоцентрических координат Солнца к то-

поцентрическим координатам, нужно прибавить к ним поправки

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha_{\odot} &= + 0^s,59 \cos \varphi \sec \delta_{\odot} \sin (\alpha_{\odot} - \lambda - S_{\text{ист}}), \\ \Delta\delta_{\odot} &= + 8'' ,8 [\cos \varphi \sin \delta_{\odot} \cos (\alpha_{\odot} - \lambda - S_{\text{ист}}) - \\ &\quad - \sin \varphi \cos \delta_{\odot}], \end{aligned} \right\} (36)$$

где  $\varphi$  и  $\lambda$  — географические широта и долгота места наблюдения (которые достаточно знать с ошибкой в несколько градусов дуги);  $S_{\text{ист}}$  определяется по (12) или (14).

### Вычисление видимых координат Луны.

1. О точности расчета. Эллиптичность лунной орбиты, большие возмущения в движении Луны, вносимые притяжением Солнца и планет, и близость Луны к земному наблюдателю приводят к значительной неравномерности видимого перемещения Луны по небу. Поэтому в каждую координату Луны приходится вводить большое количество периодических членов. Так, в таблицах Брауна [31] эклиптическая долгота Луны представлена суммой более чем 600 членов; в широте Луны более 300 членов. Конечно, амплитуда подавляющего большинства этих членов не превышает  $1''$ . Но даже и при точности координат в  $0',1$  остается 36 периодических членов в долготе и 21 в широте. Вычислять их для целей навигации нерационально. К тому же положение Луны из-за ее больших угловых размеров и смены фаз трудно измерять. Лучше вообще не включать ее в число «навигационных» светил.

Однако Луна может случайно закрыть намеченную для наблюдений «навигационную» звезду или оказаться близко к ней. Это несущественно при визуальных наблюдениях, когда наблюдатель, не увидев одну звезду, просто воспользуется другой. Но работа автоматической навигационной системы может быть совершенно нарушена. В этом случае положение Луны должно определяться для проверки ее удаленности от «навигационных» звезд. Точность ее видимых координат в  $0^{\circ},5$ — $1^{\circ},0$  здесь достаточна. Из всех рассмотренных в гл. 6 эффектов при такой точности должен приниматься во внимание только суточный параллакс,

2. Эклиптические координаты. Видимая геоцентрическая долгота Луны выражается формулой

$$L_{\zeta} = \zeta + 6^{\circ},3 \sin l + 1^{\circ},3 \sin (2D - l) + 0^{\circ},7 \sin 2D,$$

или, с учетом (7) — (9),

$$L_{\zeta} = \left\{ \begin{array}{l} 281^{\circ},5 \\ 1^{\circ},4 \\ 68^{\circ},1 \end{array} \right\} + 13^{\circ},1764 d +$$

$$+ 6^{\circ},3 \sin \left( \left\{ \begin{array}{l} 351^{\circ},1 \\ 241^{\circ},6 \\ 119^{\circ},1 \end{array} \right\} + 13^{\circ},0650 d \right) +$$

$$+ 1^{\circ},3 \sin \left( \left\{ \begin{array}{l} 339^{\circ},0 \\ 137^{\circ},0 \\ 283^{\circ},8 \end{array} \right\} + 11^{\circ},3165 d \right) +$$

$$+ 0^{\circ},7 \sin \left( \left\{ \begin{array}{l} 330^{\circ},1 \\ 18^{\circ},7 \\ 42^{\circ},8 \end{array} \right\} + 24^{\circ},3815 d \right). \quad (37)$$

Геоцентрическая широта Луны определяется соотношением

$$\operatorname{tg} B_{\zeta} = \operatorname{tg} i \sin (L_{\zeta} - \Omega),$$

которое выводится из сферического прямоугольного треугольника  $\Omega \zeta M$  (рис. 30). На рис. 30, сделанном «извне» сферы,  $\Omega$  — восходящий узел лунной орбиты на эклиптике,  $\zeta$  — Луна,  $\zeta M$  — круг широты и  $\zeta N$  — круг склонения (часовой круг), проходящие через центр Луны,  $i$  — наклон лунной орбиты к эклиптике, в среднем равный  $5^{\circ},15$ . Подставив из (10) значения  $\Omega$ , получим два эквивалентных выражения:

$$\operatorname{tg} B_{\zeta} = 0,09 \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\sin (L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau), \\ -\cos (L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau), \\ +\sin (L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau), \end{array} \right\} \quad (38)$$

$$B_{\zeta} = 5^{\circ},2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\sin (L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau), \\ -\cos (L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau), \\ +\sin (L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau). \end{array} \right\}$$

Выражения (37) — (38) определяют эклиптические координаты Луны.

3. Экваториальные координаты. Известные в сферической астрономии соотношения для экваториальных координат

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta_{\zeta} &= \sin B_{\zeta} \cos \varepsilon + \cos B_{\zeta} \sin \varepsilon \sin L_{\zeta}, \\ \cos \delta_{\zeta} \sin \alpha_{\zeta} &= \\ &= -\sin B_{\zeta} \sin \varepsilon + \cos B_{\zeta} \cos \varepsilon \sin L_{\zeta}, \\ \cos \delta_{\zeta} \cos \alpha_{\zeta} &= \cos B_{\zeta} \cos L_{\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

более подходят для строгих расчетов. Чтобы получить удобные рабочие формулы для  $\alpha_{\zeta}$  и  $\delta_{\zeta}$ , обратимся

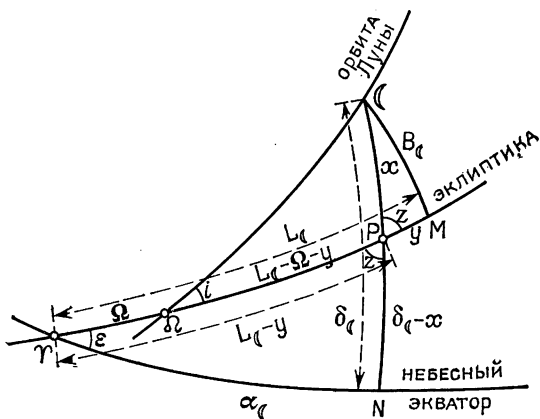


Рис. 30.

снова к рис. 30. В прямоугольном сферическом треугольнике  $\sphericalangle PN$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z &= \operatorname{tg} \varepsilon \cos (L_{\zeta} - y) = \operatorname{tg} \varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 (L_{\zeta} - y)} \approx \\ &\approx \operatorname{tg} \varepsilon \sqrt{1 - \sin^2 L_{\zeta}} = \operatorname{tg} \varepsilon \cos L_{\zeta}, \quad (40) \end{aligned}$$

$$\sin (\delta_{\zeta} - x) = \sin \varepsilon \sin (L_{\zeta} - y) \approx \sin \varepsilon \sin L_{\zeta}, \quad (41)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\zeta} = \cos \varepsilon \operatorname{tg} (L_{\zeta} - y). \quad (42)$$

Из последнего соотношения получаем, аналогично (27),

$$\begin{aligned} \sin [(L_{\zeta} - y) - \alpha_{\zeta}] &= \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2 (L_{\zeta} - y) \sec (\delta_{\zeta} - x) \approx \\ &\approx \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2 L_{\zeta} \sec (\delta_{\zeta} - x), \end{aligned}$$

откуда следует, что  $|L_{\zeta} - y - \alpha_{\zeta}| < 2^{\circ},5$ ; поэтому можно принять

$$\begin{aligned} \Delta &= L_{\zeta} - y - \alpha_{\zeta} = \\ &= \rho \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2L_{\zeta} [1 - \sin^2(\delta_{\zeta} - x)]^{-\frac{1}{2}} \approx \\ &\approx 2^{\circ},4 \sin 2L_{\zeta} \cdot \sqrt{1 + 0,158 \sin^2 L_{\zeta}}. \end{aligned} \quad (43)$$

В малом прямоугольном сферическом треугольнике  $P \ll M$ , который примем за плоский, с учетом (38) и (40),

$$y = B_{\zeta} \operatorname{ctg} z = 2^{\circ},2 \cos L_{\zeta} \cdot \begin{cases} -\sin(L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau), \\ -\cos(L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau), \\ +\sin(L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau), \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{y^2 + B^2} = B_{\zeta} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 z} = \\ &= 5^{\circ},6 \cdot \begin{cases} -\sin(L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau) \\ -\cos(L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau) \\ +\sin(L_{\zeta} + 19^{\circ},34 \tau) \end{cases} \cdot \sqrt{1 - 0,158 \sin^2 L_{\zeta}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Разложим  $\arcsin[\sin(\delta_{\zeta} - x)]$  в степенной ряд, оставив в нем два члена. В угловой мере, с учетом (41),

$$\delta_{\zeta} - x = \rho \sin \varepsilon \sin(L_{\zeta} - y) + \frac{1}{6} \sin^3 \varepsilon \sin^3(L_{\zeta} - y)$$

или, после подстановки  $\sin^3(L_{\zeta} - y) = \frac{3}{4} \sin(L_{\zeta} - y) - \frac{1}{4} \sin 3(L_{\zeta} - y)$  и отбрасывания малого последнего члена,

$$\begin{aligned} \delta_{\zeta} &= x + \rho \left( \sin \varepsilon + \frac{1}{8} \sin^3 \varepsilon \right) \sin(L_{\zeta} - y) = \\ &= x + 23^{\circ},2 \sin(L_{\zeta} - y). \end{aligned} \quad (46)$$

Выражения для экваториальных координат Луны образуются подстановкой (37), (43), (44) и (45) в (46) и в очевидное соотношение

$$\alpha_{\zeta} = L_{\zeta} - y - \Delta. \quad (47)$$

Координаты Луны изменяются очень быстро. Если в течение суток их нужно получать многократно,

целесообразно вычислить их дважды — для гринвичской полуночи даты наблюдения ( $\alpha_{\zeta 0}$ ,  $\delta_{\zeta 0}$ ) и для последующей полуночи ( $\alpha_{\zeta 1}$ ,  $\delta_{\zeta 1}$ ), а далее линейно интерполировать: в  $T_0$  часов всемирного времени будет

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\zeta}(T_0) &= \alpha_{\zeta 0} + \frac{T_0}{24}(\alpha_{\zeta 1} - \alpha_{\zeta 0}), \\ \delta_{\zeta}(T_0) &= \delta_{\zeta 0} + \frac{T_0}{24}(\delta_{\zeta 1} - \delta_{\zeta 0}). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Использование формул часовых изменений типа (33) нецелесообразно ввиду их сложности.

4. Вычисление топоцентрических координат. Суточный параллакс Луны учитывается прибавлением к ее геоцентрическим координатам поправок

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_{\zeta} &= +4^m \cos \varphi \sec \delta_{\zeta} \sin (\alpha_{\zeta} - \lambda - S_{\text{ист}}), \\ \Delta \delta_{\zeta} &= +1^{\circ} [\cos \varphi \sin \delta_{\zeta} \cos (\alpha_{\zeta} - \lambda - S_{\text{ист}}) - \\ &\quad - \sin \varphi \cos \delta_{\zeta}]. \end{aligned}$$

Обозначения  $\varphi$  и  $\lambda$  и требуемые точности их ввода — те же, что в выражениях (36).

## Приложение 2

### ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА СФЕРЕ

#### 1. Сферический треугольник.

а. Косоугольный треугольник. Стороны треугольника:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; противолежащие им углы:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (см. рис. 11).

$$\sin a : \sin A = \sin b : \sin B = \sin c : \sin C, \quad (49)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (50)$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \quad (51)$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A, \quad (52)$$

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a, \quad (53)$$

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A, \quad (54)$$

$$\operatorname{ctg} A \sin B = \operatorname{ctg} a \sin c - \cos B \cos c, \quad (55)$$



б. Первый частный случай:  $b = c = 90^\circ$ .

$$B = C = 90^\circ, \quad A = a. \quad (56)$$

в. Второй частный случай: прямоугольный треугольник,  $A = 90^\circ$ .

$$\cos a = \cos b \cos c = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C, \quad (57)$$

$$\sin b = \sin a \sin B = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C, \quad (58)$$

$$\sin c = \sin a \sin C = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} B, \quad (59)$$

$$A = 90^\circ, \quad (60)$$

$$\cos B = \cos b \sin C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c, \quad (61)$$

$$\cos C = \cos c \sin B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b, \quad (62)$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c, \quad (63)$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b, \quad (64)$$

$$\cos a \sin B = \cos b \cos C, \quad (65)$$

$$\cos a \sin C = \cos c \cos B. \quad (66)$$

## 2. Сферический $n$ -угольник\*) (рис. 31).

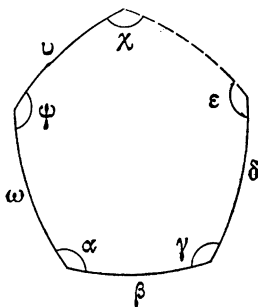


Рис. 31.

Вычисление стороны, если известны  $n$  углов и  $n-1$  сторона:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \Pi_{\pi-\alpha}^{\nu} \Pi_{-\omega}^{\pi} \Pi_{\pi-\psi}^{\nu} \Pi_{-\nu}^{\pi} \Pi_{\pi-\chi}^{\nu} \dots \Pi_{-\delta}^{\pi} \Pi_{\pi-\gamma}^{\nu}; \quad (67)$$

\*) Метод, которым получены формулы (67)–(71), разработан в Краковской обсерватории. Его изложение имеется в книге [14].

вычисление угла, если известны  $n - 1$  угол и  $n$  сторон:

$$\begin{pmatrix} -\cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \end{pmatrix} = \\ = P_{-\omega}^{\pi} P_{\pi-\psi}^{\nu} P_{-\nu}^{\pi} P_{\pi-\chi}^{\nu} \dots P_{-\delta}^{\pi} P_{\pi-\gamma}^{\nu} P_{-\beta}^{\pi}; \quad (68)$$

вычисление угла и стороны, если известны  $n - 1$  угол и  $n - 1$  сторона:

$$\begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = \\ = P_{-\omega}^{\pi} P_{\pi-\psi}^{\nu} P_{-\nu}^{\pi} P_{\pi-\chi}^{\nu} \dots P_{-\delta}^{\pi} P_{\pi-\gamma}^{\nu}; \quad (69)$$

вычисление угла и двух сторон, если известны  $n - 1$  угол и  $n - 2$  стороны:

$$\begin{pmatrix} -\cos \beta \cos \omega \cos \alpha - & -\sin \beta \cos \omega \cos \alpha + & \cos \omega \sin \alpha \\ -\sin \beta \sin \omega & +\cos \beta \sin \omega & \\ \cos \beta \sin \omega \cos \alpha - & \sin \beta \sin \omega \cos \alpha + & -\sin \omega \sin \alpha \\ -\sin \beta \cos \omega & +\cos \beta \cos \omega & \\ -\cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = \\ = P_{\pi-\psi}^{\nu} P_{-\nu}^{\pi} P_{\pi-\chi}^{\nu} \dots P_{-\delta}^{\pi} P_{\pi-\gamma}^{\nu}; \quad (70)$$

вычисление двух углов и стороны, если известны  $n - 2$  угла и  $n - 1$  сторона:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \cos \gamma - & -\sin \beta \cos \alpha & -\cos \beta \cos \alpha \sin \gamma - \\ -\sin \alpha \sin \gamma & & -\sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta & -\sin \beta \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \alpha \cos \gamma + & -\sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha \sin \gamma + \\ +\cos \alpha \sin \gamma & & +\cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix} = \\ = P_{-\omega}^{\pi} P_{\pi-\psi}^{\nu} P_{-\nu}^{\pi} P_{\pi-\chi}^{\nu} \dots P_{-\delta}^{\pi}. \quad (71)$$

Решение состоит в перемножении матриц в правой части равенства и в приравнивании элементов матрицы в левой части одноименным элементам произведения.

Число матриц в правой части равно числу известных элементов многоугольника. В последовательности матриц надстрочные индексы  $\nu$  и  $\pi$  чередуются. Подстрочные индексы в матрицах  $P^{\pi}$  — стороны со знаком «—», подстрочные индексы в  $P^{\nu}$  — дополнения

углов до  $\pi$ . Обозначения матриц расшифрованы на стр. 40. При подстановке надо иметь в виду, что

$$\begin{aligned} \sin(-\varphi) &= -\sin \varphi, & \cos(-\varphi) &= \cos \varphi, \\ \sin(\pi - \varphi) &= \sin \varphi, & \cos(\pi - \varphi) &= -\cos \varphi, \\ \sin(\varphi - \pi) &= -\sin \varphi, & \cos(\varphi - \pi) &= -\cos \varphi. \end{aligned}$$

### Приложение 3

## ЗНАЧЕНИЯ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ВЕЛИЧИН

Астрономическая единица  $A = 149\,600 \cdot 10^6 \text{ м}^*) = 149\,597,87 \cdot 10^6 \text{ м}^{**})$

Скорость света  $c = 299\,792,5 \text{ км/сек}^*) = 299\,792,458 \text{ км/сек}^{**})$

Время прохождения светом астрономической единицы  $\tau_A = 499^{\text{s}},012^*) = 499^{\text{s}},004782^{**})$

Отношения масс:

Луны и Земли  $\mu = 1 : 81,30^*) = 0,01\,230\,002^{**})$

Солнца и Земли  $332\,958^*)$ ;  $332\,946,0^{**})$

Солнца и системы Земля + Луна  $328\,912^*)$ ;  $328\,900,5^{**})$

Параллакс Солнца  $\pi_{\odot} = 8'',79405^*) = 8'',794148^{**})$

Постоянная годичной аберрации  $\kappa = 20'',4958^*) = 20'',49552^{**})$

Постоянная нутации  $N = 9'',210 \text{ (1900 г.)}^*) = 9'',2109 \text{ (2000 г.)}^{**})$

Постоянная лунного неравенства  $L_0 = 6'',440^*)$

Фундаментальная эпоха таблиц движения Солнца [33]:

1900, янв. 0,  $12^{\text{h}}$  UT = JD 2 415 020,0.

Средний наклон эклиптики к экватору  $\epsilon = 23^{\circ} 27' 08'',26 - 46'',845 T - 0'',0059 T^2 + 0'',0018 T^3^{***})$

\*) Значение утверждено XII съездом Международного Астрономического союза (МАС) в 1964 г. [13].

\*\*\*) Значение одобрено XVI съездом МАС в 1976 г. и рекомендовано к применению с 1984 г. [23].

\*\*\*) По Ньюкомбу [22].  $T$  — время в юлианских столетиях по 36525 средних солнечных суток.

Эпоха	1980,0	1982,0	1984,0	1986,0	1988,0	1990,0	2000,0
$\varepsilon = 23^\circ 26'$	30",78	29",84	28",91	27",97	27",03	26",09	21",448 **)

Элементы годичного вращения эклиптики:

долгота оси вращения  $\Pi = 173^\circ 57' 03'' + 3287'' T + 0'',6 T^2$ ,

угловая годичная скорость  $\pi = 0'',4711 - 0'',0007 T$  \*\*\*)

Прецессия:

лунно-солнечная в долготе  $p_1 = 50'',3708 + 0'',0049 T$ ,

общая в долготе  $p = 50'',2564 + 0'',0222 T$ ,

по  $\alpha$  от планет  $q_1 = 0'',1247 - 0'',0189 T$ ,

общая по прямому восхождению

$m = 46'',0851 + 0'',0279 T$ ,

общая (=лунно-солнечная) по склонению

$n = 20'',0469 - 0'',0085 T$  \*\*\*)

Эпоха	1980,0	1982,0	1984,0	1986,0	1988,0	1990,0	2000,0
$p_1$	50",375	50",375	50",375	50",375	50",375	50",375	
$p$	50,274	50,275	50,275	50,276	50,276	50,276	50",290966 **)
$q_1$	0,110	0,109	0,109	0,108	0,108	0,108	
$m$	46,107	46,108	46,108	46,109	46,110	46,110	
$n$	20,040	20,040	20,040	20,040	20,039	20,039	

Средняя тропическая долгота Солнца  $L = 279^\circ 41' 48'',04 + 129\,602\,768'',13 T + 1'',089 T^2 = 279^\circ,696\,678 + 0^\circ,985\,647\,335\,4 d + 0^\circ,000302 T^2$  \*\*\*)

Средняя тропическая долгота солнечного перигея  $\Gamma = 281^\circ 13' 15'',0 + 6189'',03 T + 1'',63 T^2 + 0'',012 T^3$  \*\*\*)

Средняя аномалия Солнца  $l' = g = 358^\circ 28' 33'',04 + 129\,596\,579'',10 T - 0'',54 T^2 - 0'',012 T^3$  \*\*\*)

Эксцентриситет земной орбиты  $e = 0,016\,751\,04 - 0,000\,041\,80 T - 0,000\,000\,126 T^2$  \*\*\*)

Большая полуось земной орбиты (1900) 1,000 000 23 а. е. \*\*\*)

Прямое восхождение среднего Солнца (абerrация включена)

$$\alpha_{cp} = 18^h 38^m 45^s,836 + \left\{ \begin{array}{l} 8\,640\,184^s,542 T \\ 236^s,55536049 d \end{array} \right\} + 0^s,0929 T^2$$

Звездное время (среднее) в гринвичскую среднюю полночь

$$S_0 = 6^h 38^m 45^s,836 + 236^s,555 360 49 d + 0^s,0929 T^2 \text{ ***})$$

Коэффициенты перехода:

от среднего к звездному времени  $\mu = 0,002 737 9093$ ,  
от звездного к среднему времени  $\nu = 0,002 730 433 6$

Продолжительность тропического года (1900) в эфемеридных секундах  $31 556 925^s,9747 *$ )

Продолжительность в единицах эфемеридного времени:

тропического года (1900)	$365^d, 242 199 = 365^d 05^h 48^m 46^s, 0$ ,
сидерического года (1900)	$365,256 360 = 365 06 09 09, 5$ ,
аномалистического года (1900)	$365,259 641 = 365 06 13 53, 0$ ,
тропического месяца	$27,321 58 = 27 07 43 04,7$ ,
сидерического месяца	$27,321 66 = 27 07 43 11,5$ ,
драконического месяца	$27,212 22 = 27 05 05 35,8$ ,
аномалистического месяца	$27,554 55 = 27 13 18 33,2$ ,
синодического месяца	$29,530 59 = 29 12 44 02,9$ .

Среднее сидерическое движение Луны (1900)  $2,661 699 5 \cdot 10^{-6} \text{ рад/сек} *$ )

Средний радиус лунной орбиты  $384 400 \text{ км} *$ )

Поправки для перехода от всемирного к эфемеридному времени:

Год	1900,5	1976,5	1977,5	1978,5
$\Delta T = ET - UT2$	$-4^s,23$	$+47^s,3$	$+48^s,8$	$+49^s$

## Элементы -земного эллипсоида:

Эллипсоид	Красов-ского	Международ-ный 1924 г. (Хейфорда)	Междунар. Астрон. союза	
			1964 г. *)	1976 г. **)
Экваториаль-ный радиус $a_e, м$	6 378 245	6 378 388	6 378 160	6 378 140
Полярный ра-диус, $м$	6 356 863	6 356 912	6 356 775	—
Эксцентриситет $e$	0,081 813	0,081 992	0,081 820	—
Сжатие $\alpha$	1/298,3	1/297,0	1/298,25	1/298,257
Динамический коэффициент $J_2$	$(J_2 = \frac{C - A}{M_{\oplus} a_e^2}, \text{ где}$ $M_{\oplus} - \text{масса Земли})$		0,001 082 7	0,001 082 63

Юлианский период (на 12<sup>h</sup>UT 1-го числа каждого месяца)

Дата	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
	2 440 000+									
1 января	3875	4240	4606	4971	5336	5701	6067	6432	6797	7162
1 февраля	3906	4271	4637	5002	5367	5732	6098	6463	6828	7193
1 марта	3934	4300	4665	5030	5395	5761	6126	6491	6856	7222
1 апреля	3965	4331	4696	5061	5426	5792	6157	6522	6887	7253
1 мая	3995	4361	4726	5091	5456	5822	6187	6552	6917	7283
1 июня	4026	4392	4757	5122	5487	5853	6218	6583	6948	7314
1 июля	4056	4422	4787	5152	5517	5883	6248	6613	6978	7344
1 августа	4087	4453	4818	5183	5548	5914	6279	6644	7009	7375
1 сентября	4118	4484	4849	5214	5579	5945	6310	6675	7040	7406
1 октября	4148	4514	4879	5244	5609	5975	6340	6705	7070	7436
1 ноября	4179	4545	4910	5275	5640	6006	6371	6736	7101	7467
1 декабря	4209	4575	4940	5305	5670	6036	6401	6766	7131	7497

Юлианскую дату на каждый день текущего года можно установить по таблице «Солнце» Астрономического Ежегодника СССР [25]; юлианскую звездную дату можно получить в таблице «Редукционные величины» [25].

Коэффициенты перехода от радианной к угловой мере:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ рад} &= 206\,264''{,}806 & 1'' &= 0{,}000\,004\,848\,137 \text{ рад} \\
 &= 3\,437'7468 & 1' &= 0{,}000\,290\,8882 \text{ рад} \\
 &= 57^{\circ}{,}295\,780 & 1^{\circ} &= 0{,}017\,453\,29 \text{ рад} \\
 &= 13\,750^{\text{s}}{,}987 & 1^{\text{s}} &= 0{,}000\,072\,722\,05 \text{ рад} \\
 &= 229^{\text{m}}{,}1831 & 1^{\text{m}} &= 0{,}004\,363\,323 \text{ рад} \\
 &= 3^{\text{h}}{,}819\,719 & 1^{\text{h}} &= 0{,}261\,799\,4 \text{ рад}
 \end{aligned}$$

Зависимость между мерами площадей на сфере:

Угловая мера	Сферический избыток *)
$0{,}9549 \text{ град}^2 = 3437{,}7 \text{ мин}^2$ $1 \text{ град}^2 = 3600 \text{ мин}^2$ $57{,}296 \text{ град}^2 = 206\,265 \text{ мин}^2$ $1/4\pi \text{ сферы} = 1 \text{ стерад} = 3282{,}806 \text{ град}^2$ $\text{Полная сфера} = 4\pi \text{ стерад} =$ $= 41\,252{,}961 \text{ град}^2$	$1'$ $0^{\circ}{,}017\,453 = 1'0472$ $1^{\circ}$ $1 \text{ (рад)} = 57^{\circ}{,}296$ $4\pi \text{ (рад)} = 720^{\circ}$

\*) Сферический избыток равен сумме внутренних углов сферического  $n$ -угольника минус  $\pi(n-2)$ .

#### Приложение 4

### ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ И ПРИМЫКАЮЩИХ РАЗДЕЛАХ АСТРОНОМИИ

#### Специальные символы

- ☉ Солнце
  - ⊕ Земля
  - ☾ Луна;
- средняя эклиптическая долгота Луны ( $= l_{\oplus}$ )  
[25] \*)

\*) Источник указан для обозначений, не принятых повсеместно.

$\Uparrow$  точка весеннего равноденствия

$\Omega$  восходящий узел

$\Upsilon$  нисходящий узел

$^{\circ} \prime \prime$  градусы, минуты, секунды дуги

$\text{III}_{\alpha}$ ,  $\text{III}_{\delta}$  коэффициенты уравнений для учета прецессии в экваториальных координатах  
а. е. астрономическая единица ( $=A$ )

### Латинские обозначения

$A$  астрономическая единица ( $= \text{а. е.}$ );

азимут

$A, A', B, B', C, D, E, f, f', G, G', g, g', H, h, i$  редуцированные величины

$A, B, C$  главные моменты инерции

$a$  большая полуось

$a_e$  экваториальный радиус Земли

$a_{\zeta}$  среднее расстояние между Землей и Луной

$a, a', b, b', c, c', d, d'$  редуцированные постоянные

$B_{\odot}$  эклиптическая геоцентрическая широта Солнца  
( $= \beta_{\odot}$ )

$B_{\zeta}$  эклиптическая геоцентрическая широта Луны

$b$  малая полуось

$c$  скорость света

$D$  разность средних долгот Луны и Солнца

$d$  время в сутках (надстрочный индекс);

время в сутках от основной эпохи

$d_{\varepsilon}$  короткопериодическая нутация в наклоне

$d_{\psi}$  короткопериодическая нутация в долготе

$E$  восток;

эксцентрическая аномалия;

уравнение времени  $+ 12^h$

$e$  эксцентриситет

$ET$  эфемеридное время ( $= M^*$ )

$f$  сжатие Земли ( $= \alpha$ )

$g$  средняя аномалия Солнца ( $= g' = l' = M_{\odot}$ );

средняя аномалия Луны ( $= l = M_{\zeta}$ ) [обозначение Гайна]

$g'$  средняя аномалия Солнца ( $= g = l' = M_{\odot}$ )  
[обозначение Гайна]

$h$  время или угол в часах (надстрочный индекс);  
высота над горизонтом

$I$  средний наклон экватора фигуры Луны к эклиптике



- $i$  наклон плоскости орбиты к экватору или к эклип-  
тике
- IAT международное атомное время
- JD юлианский день
- JSD юлианский звездный день
- $k$  гауссова гравитационная постоянная;  
постоянная годичной аберрации ( $= \kappa$ ) [старое  
обозначение]
- $L, L_{\odot}$  эклиптическая геоцентрическая долгота  
Солнца ( $= \lambda_{\odot}$ ) [33]
- $L_{\zeta}$  эклиптическая геоцентрическая долгота Луны
- $L, L_0$  постоянная лунного неравенства
- $l$  астрономическая долгота ( $= \lambda$ );  
средняя аномалия Луны ( $= g = M_{\zeta}$ )
- $l'$  средняя аномалия Солнца ( $= g = g' = M_{\odot}$ )
- $l_{\zeta}$  средняя эклиптическая долгота Луны ( $= \zeta$ )
- $M$  всемирное время ( $= UT = T_0$ ) [25];  
средняя аномалия
- $M^*$  эфемеридное время ( $= ET$ ) [25]
- $M_{\odot}$  средняя аномалия Солнца ( $= g = g' = l'$ )
- $M_{\zeta}$  средняя аномалия Луны ( $= g = l$ )
- $m$  время или угол в минутах (надстрочный ин-  
декс);  
местное среднее солнечное время;  
общая годичная прецессия по прямому восхож-  
дению
- $m_{\odot}$  местное истинное солнечное время
- $N$  север;  
постоянная нутации
- $n$  общая годичная прецессия по склонению;  
среднее суточное угловое движение
- $p$  общая годичная прецессия в долготе;  
лунно-солнечная годичная прецессия в долготе  
( $= p_1$ )
- $p, p_{\odot}$  экваториальный горизонтальный параллакс  
Солнца
- $p_0$  экваториальный горизонтальный параллакс
- $p_1$  лунно-солнечная годичная прецессия в долготе  
( $= p$ )
- $q_1$  годичная прецессия от планет по прямому вос-  
хождению ( $= \lambda'$ )
- $R$  расстояние между центрами Солнца и Земли
- $r$  радиус-вектор

- $S$  юг;  
 гринвичское звездное время  
 $S_0$  гринвичское звездное время в  $0^h$  всемирного времени  
 $s$  время или угол в секундах (надстрочный индекс);  
 местное звездное время  
 $T$  время в юлианских столетиях от начальной эпохи;  
 период обращения ИСЗ вокруг Земли  
 $T_0$  всемирное время ( $= UT = M$ )  
 $t$  рассматриваемый (текущий) момент времени;  
 часовой угол  
 $t_0$  начальная эпоха  
 $u$  аргумент широты ( $= \zeta$ )  
 $UT$  всемирное время ( $= T_0 = M$ )  
 $UT0$  всемирное время мгновенного гринвичского меридиана  
 $UT1$  всемирное время среднего гринвичского меридиана  
 $UT2$  квазиравномерное всемирное время  
 $UTC$  координированное всемирное время  
 $VA_t$  годовое изменение прямого восхождения  
 $VA_\delta$  годовое изменение склонения  
 $VS_\alpha$  «вековое изменение» (2-я производная) прямого восхождения  
 $VS_\delta$  «вековое изменение» (2-я производная) склонения  
 $v$  истинная аномалия ( $= \omega = \vartheta$ )  
 $W$  запад  
 $\omega$  истинная аномалия ( $= v = \vartheta$ )  
 $z$  зенитное расстояние

### Греческие обозначения

- $\alpha$  прямое восхождение;  
 сжатие Земли ( $= f$ ) [принято в геодезии]  
 $\beta$  эклиптическая широта  
 $\beta_\odot$  эклиптическая геоцентрическая широта Солнца ( $= B_\odot$ )  
 $\Gamma$  средняя долгота солнечного перигея  
 $\Gamma'$  средняя долгота лунного перигея  
 $\Delta e$  долгопериодическая нутация в наклоне

- $\Delta\psi$  долгопериодическая нутация в долготе  
 $\Delta T = ET - UT$  разность эфемеридного и всемирного времени
- $\delta$  склонение
- $\epsilon$  наклон эклиптики к экватору
- $\zeta$  орбитальный угол (аргумент широты) ( $= u$ )
- $\eta$  уравнение времени
- $\vartheta$  истинная аномалия ( $= v = w$ );  
 эйлеров угол нутации
- $\kappa$  постоянная годичной аберрации ( $= k$ )
- $\lambda$  эклиптическая долгота;  
 астрономическая долгота ( $= l$ )
- $\lambda'$  годичная прецессия от планет по прямому восхождению ( $= q_1$ )
- $\lambda_{\odot}$  эклиптическая геоцентрическая долгота Солнца ( $= L = L_{\odot}$ )
- $\mu$  собственное движение;  
 коэффициент перехода от среднего к звездному времени
- $\mu_{\alpha}$ ,  $\mu$  собственное движение по прямому восхождению
- $\mu_{\delta}$ ,  $\mu'$  собственное движение по склонению
- $\nu$  коэффициент перехода от звездного к среднему времени
- $\Pi$  долгота мгновенной оси вращения эклиптики
- $\pi$  угловая годичная скорость вращения эклиптики;  
 долгота перигелия;  
 годичный параллакс звезды
- $\pi_{\odot}$  параллакс Солнца
- $\pi_{\zeta}$  параллакс Луны
- $\rho$  угол в радианах;  
 рефракция;  
 геоцентрический радиус-вектор;  
 физическая либрация Луны в наклонении
- $\sigma$  физическая либрация Луны в узле
- $\tau$  физическая либрация Луны в долготе;  
 время в тропических годах от заданного начального момента
- $\tau_A$  время прохождения светом одной астрономической единицы
- $\varphi$  астрономическая широта;  
 эйлеров угол собственного вращения

- $\varphi'$  геоцентрическая широта
- $\psi$  эйлеров угол прецессии
- $\Omega$  долгота или прямое восхождение восходящего узла
- $\omega$  расстояние перигея или перигелия от восходящего узла

Обозначения, принятые в английской и французской астрономической литературе, приводятся в словарях [24, 29].

## ЛИТЕРАТУРА

### А. Общие курсы сферической астрономии

1. *Блажко С. Н.* Курс сферической астрономии/При редакционном участии П. И. Бакулина.— 2-е изд.— М.: Гостехиздат, 1954.
2. *Вентцель М. К.* Сферическая астрономия — М.: Геодиздат, 1952.
3. *Загребин Д. В.* Введение в астрометрию: Основные вопросы сферической астрономии. — М., Л.: Наука, 1966.
4. *Казаков С. А.* Курс сферической астрономии: Учебник для студентов физико-математических факультетов государственных университетов/Под ред. П. П. Паренаго. — 2-е изд., перераб. — М.: Л.: Гостехиздат, 1940.
5. *Куликов К. А.* Курс сферической астрономии. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1974.
6. *Халхунов В. З.* Сферическая астрономия/Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Астрономо-геодезия». — М.: Недра, 1972.

### Б. Литература по отдельным разделам сферической астрономии

7. *Бакулин П. И., Блинов Н. С.* Служба точного времени. 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1977.
8. *Вулард Э.* Теория вращения Земли вокруг центра масс/Под ред. В. В. Подобеда; пер. с англ. А. А. Гурштейна и В. В. Нестерова. — М.: Физматгиз, 1963.
9. *Гарленд Дж. Д.* Форма Земли и сила тяжести/Под ред. М. У. Сагитова; пер. с англ. В. Б. Гуревича. — М.: Мир, 1967.
10. *Квазиус Г., Маккэнлесс Ф.* Проектирование систем астронавигации/Под ред. Г. И. Лесива; пер. с англ. В. Б. Гуревича. — М.: Мир, 1970.
11. *Куликов Д. К.* Теория эфемерид пар Цингера и каталог 500 пар звезд в системе FK3 на эпохи 1950,0 и 1970,0 — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1951.
12. *Куликов К. А.* Изменяемость широт и долгот. — М.: Физматгиз, 1962.
13. *Куликов К. А.* Новая система астрономических постоянных. — М.: Наука, 1969.
14. *Куликов К. А., Гуревич В. Б.* Основы лунной астрометрии. — М.: Наука, 1972.
15. *Манк У., Макдональд Г.* Вращение Земли/Под ред. П. Н. Успенского; пер. с англ. В. В. Нестерова. — М.: Мир, 1964.

16. *Подобед В. В.* Фундаментальная астрометрия. — 2-е изд. — М.: Наука, 1968.
17. *Подобед В. В., Нестеров В. В.* Общая астрометрия. — М.: Наука, 1975.
18. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике/Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.; под ред. Г. Н. Дубошина. — 2-е изд., доп. и перераб. — М.: Наука, 1976.
19. *Хабидуллин Ш. Т.* Нелинейная теория физической либрации Луны. — Труды Казанской городской астрон. обсерватории, 1966, № 34.
20. *Цветков К. А.* Практическая астрономия. — 2-е изд., перераб. — М.: Геодезиздат, 1951.
21. *Яковкин А. А., Деменко И. М., Мизь Л. Н.* Формулы и эфемериды для полевых наблюдений на Луне. — Киев: Наукова думка, 1964.
22. *Newcomb S.* The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy. — Washington, 1895.  
В. Справочная литература
23. *Аллен К. У.* Астрофизические величины/Под ред. Д. Я. Мартынова; пер. с англ. Х. Ф. Халиуллина. — Издание перераб. и доп. М.: Мир, 1977.
24. Англо-русский астрогеофизический словарь. — М.: Физматгиз, 1962.
25. Астрономический Ежегодник СССР. — Л.: Наука (ежегодное издание).
26. Каталог 1967 звезд программы способа Талькотта на эпоху 1950 года (система FK3) вместе с редуцированными величинами для приведения на видимое место. — Ин-т теор. астрономии АН СССР. — М.; Л., 1948.
27. Стандартная Земля: Геодезические параметры Земли на 1966 г./Под ред. К. Лунквиста и Г. Вейса; пер. с англ. П. П. Медведева под ред. Л. П. Пеллиненна. — М.: Мир, 1969.
28. Таблицы по геодезической астрономии. — Труды Центр. научно-иссл. ин-та геодезии, аэрофотосъемки и картографии. — М., 1963, вып. 163.
29. Французско-русский геофизический словарь. — М.: Физматгиз, 1960.
30. *Циммерман Н. В.* Каталог 2957 звезд со склонениями от  $-10^\circ$  до  $+90^\circ$  (Сводный каталог для эпохи 1950,0). — Труды Главной астрон. обсерватории АН СССР, 1948, т. 61, сер. 2.
31. *Broun E. W.* Tables of the Motion of the Moon. — New Haven, 1919.
32. *Fricke W., Kopff A.* Fourth Fundamental Catalogue, resulting from the revision of the FK3. — Veroff. des Astr. Rechen-Inst. — Heidelberg, 1963, № 10.
- 32a. Supplement-Katalog des FK4
33. *Newcomb S.* Tables of the Motion of the Earth on its axis and around the Sun. — Astronomical Paper, 1898, vol. VI, part I.
34. Star Catalog: Positions and Proper Motions of 258,997 stars for the Epoch and Equinox of 1950,0. — In Four Parts. — Washington, D. C.: Smithsonian institution, 1966.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация вековая 74—75, 87  
— годовичная 75—76, 87—88, 91, 93, 97, 101  
— «корабельная» 77—78  
— «орбитальная» 76  
— планет 77, 89  
— Солнца 76, 93, 95, 103, 105  
— суточная 76—77, 87—89, 91, 93  
Азимут 28, 119  
Альмукантарат 28  
Аномалия истинная 8, 56, 121—122  
— Луны 94—95, 119—120  
— Солнца 94—95, 115, 119—120  
Апекс и антиапекс 75—76  
Апогей 8, 55, 56  
Аргумент широты 56—57, 121—122  
Астрономическая единица 74, 114, 119  
Афелий 8
- Барицентр 7
- Вековое изменение координаты 83, 121  
Вертикал 28  
— первый 28  
Ветви орбиты 55  
Видимое место 87—90  
Восход 29, 68  
Вращение Земли 12—14, 59  
— собственное 16—17  
Время 58, 119—121  
— атомное 71, 120  
— всемирное 64, 69—70, 120—121  
— квазиравномерное 64, 121  
— — координированное 71, 121  
— декретное 65, 67  
— звездное 58, 63—64, 69, 88, 94, 96, 121  
— ньютонианское (равномерное) 58  
— поясное 65—66  
— солнечное 63—64, 68, 120  
— эфемеридное 69—71, 119, 120  
Высота 28  
Вычисление видимых координат звезд 91—93, 97—101  
— — — Луны 93, 107—111  
— — — планет 93  
— — — Солнца 93, 101—107
- Вычисление звездного времени по среднему времени 65  
— истинного гринвичского звездного времени 94, 101  
— координат ИСЗ 57—58  
— средних мест звезд 83, 91, 97  
— эфемеридного времени по атомному времени 71  
— — — по всемирному времени 70, 116
- Геоид 49  
Год 60—61, 116  
Годичное изменение координаты 83, 121  
Горизонт 23, 27, 29  
Гринвичское звездное время в 0 час. всемирного времени 65, 69, 94—95, 116, 121
- Движение линии апсид 57  
— орбитальное 78  
— полюсов 14, 18—19, 85—86, 93  
День 29  
Долгота 25, 94—95, 98, 101—102, 107—108, 115, 118, 120, 122  
— астрономическая 49, 54, 120, 122  
— восходящего узла 92, 94—95, 123  
— геодезическая 48  
— геоцентрическая 45—46, 57—58  
— эклиптическая 25, 122
- Единицы угловые 61—62, 118—119, 122
- Заход 29, 68  
Звезды незаходящие (циркулярные и невосходящие) 29  
— полярные 83  
Земной эллипсоид 47, 116—117  
Зенит 27  
Зенитное расстояние 28, 121
- Координаты астрономические 49, 52—55

барицентрические 23  
— видимые 87—88, 91  
— галактические 24, 26  
— гелиоцентрические 23, 30, 87—88  
— географические 49  
— геодезические 47—48, 53—55  
— геоцентрические 23, 30, 45—46, 53—55, 57  
— геоэваториальные 24, 89  
— горизонт(аль)ные 24, 27—28, 30  
— декартовы 21—22, 30—31, 52  
— ИСЗ 57  
— истинные 87  
— мгновенные 55, 85, 88  
— орбитальные 24, 26  
— ортодромические 24, 26, 30  
— полярные 21—22, 30  
— селенографические, селеноэваториальные 24, 52, 89  
— средние 86, 88, 91, 93, 97  
— сферические 22, 30  
— топоцентрические 23, 30, 106—107, 111  
— экваториальные 24, 26, 30, 88—89  
— эллиптические 24—25, 30  
Круг высот 28  
— склонений (часовой) 26  
— широты 25  
Кульминация 29

Линия апсид 8, 55  
— смены дат 67  
— узлов 55

Меридиан гринвичский 58  
— места наблюдения 27—28  
— небесный 28  
— нулевой 25  
Месяц 61, 116  
Моменты инерции 13, 119

Надир 27  
Наклон эклиптики к экватору 43, 94—95, 114—115, 122  
Небесная сфера 11, 22  
Неравенства 10, 102, 120  
Нутация 16—17, 21, 84—85, 87—91, 97—98, 101—102, 105, 119, 121—122  
— в долготе 84, 92, 103, 119, 122  
— в наклоне 84, 92, 119, 121  
— в прямом восхождении 69, 85, 88, 96, 101

Ось вращения 14—16, 19  
— фигуры 13  
Отвесная линия 49  
Параллакс (параллактическое смещение) 22—23, 25, 32  
— вековой 72—73

Параллакс годичный 75—76, 87—88, 91, 93, 122  
— Луны 107, 111, 122  
— месячный 89

«орбитальный» 76  
— Солнца 101, 114, 120, 122  
— суточный 76—77, 89, 106  
Параллель 25  
Пекулярное движение звезд 71  
Перенос начала координат 31—32  
Перигей 8, 55  
Перигелий 8  
Период обращения ИСЗ 57, 121  
Плоскость Лапласа 24  
Поворот системы координат 33, 42  
Полуоси орбиты 8, 56, 115  
Полюс мгновенный 15, 18—19, 54, 87  
— мира 15, 26, 28, 84  
— системы координат 24  
— средний 18—20, 54, 88  
Понижение горизонта 29  
Постоянная годичной аберрации 76, 98, 114, 120, 122  
— нутации 85, 114, 120  
Прецессия 17, 21, 60, 79—81, 85, 87—89, 91—92, 97, 101, 105, 115  
— лунно-солнечная 80—81, 97—98, 115, 120  
— общая 81  
— от планет 80—81, 115, 120, 122  
— по (в) долготе 17, 80—81, 115, 120  
— по прямому восхождению 80—81, 92, 98, 115, 120, 122  
— по склонению 80—81, 92, 98, 115, 120  
— по широте 81  
Приведение координат к средним полюсам 54, 85  
— на видимое место 87—92  
— на среднее место 86  
Продолжительность дня 29, 68  
Прямое восхождение 26, 56, 81, 115, 121, 123

Равноденствие каталога 87  
Расстояние перигея от узла 56, 123  
Регрессия линии узлов 57  
Редукции координат 86, 88—90, 92  
Редукционные величины и постоянные 90—91, 97, 99, 119  
Рефракция 78—79, 86, 88, 93, 122

Секунда 59, 69—71  
Селеноид 52  
Склонение 26, 81, 122  
Собственное движение звезд 73—74, 87—88, 91—92, 97, 122  
Солнце среднее (экваториальное) 59  
Среднее место 86, 90, 97  
Сутки 59, 63—65, 68, 70, 103  
Суточная параллель 28  
Сферический многоугольник 33, 112—113  
— треугольник 33—34, 111—112

Точка весеннего равноденствия 20—21, 59, 119  
Точки востока, запада, севера, юга 28, 119—121  
Третий член 83, 119



Углы самолетные 40—41  
— Эйлера 40—41, 122—123  
Угол орбитальный 56—57, 122  
Узлы орбиты 55, 119  
Уравнение времени 68, 119, 122

Физическая либрация 89, 122

Чандлеровский период 18  
Часовое изменение координаты  
105—106, 111  
Часовой пояс 65, 67

Широта 25, 101, 107—108, 119, 121  
— астрономическая 49, 54, 122  
Широта геодезическая 48  
— геоцентрическая 45—46, 57, 123  
— эклиптическая 25, 121

Экватор вращения 15, 89  
— географический 13  
— мгновенный 15, 54  
— небесный (истинный) 15, 21, 23,  
28, 87  
— собственного вращения 16  
— средний 17, 21, 54, 87  
— фигуры 13, 89  
Эклиптика 11, 21, 23, 115  
Эксцентриситет орбиты 8, 56, 94—95,  
102, 115  
Элементы орбиты 8, 11—12, 55,  
57  
Эллипсоид инерции 12—13  
— фигуры 13  
Эпоха каталога 87, 93  
— фундаментальная 114

Юлианский день 67—68, 93—94, 117,  
120  
— звездный день 68, 117, 120  
Юлианское столетие 114