

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. И. Мартынова, В. В. Орлов,  
А. В. Рубинов, Л. Л. Соколов,  
И. И. Никифоров

# ДИНАМИКА ТРОЙНЫХ СИСТЕМ

*Учебное пособие*

ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010

ББК 22.62  
Д46

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *В. А. Антонов* [Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН], к-т физ.-мат. наук, доц. *Л. П. Осипков* (С.-Петербург. гос. ун-т)

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
математико-механического факультета  
С.-Петербургского государственного университета*

**Динамика** тройных систем: Учеб. пособие / А. И. Мар-  
Д46 тынова, В. В. Орлов, А. В. Рубинов и др. — СПб.: Изд-во  
С.-Петербург. ун-та, 2010. — 216 с.

ISBN 978-5-288-05041-1

В книге освещены различные аспекты гравитационной задачи трех тел. К решению этой задачи сводится исследование динамики многих астрономических объектов, от тройных звезд и планетных систем до триплетов галактик. Изложены базовые численные и аналитические методы решения задачи трех тел в зависимости от ее особенностей — специфики начальных условий, типа и характеристик объектов и их окрестностей, а также других факторов. Описаны основные результаты, полученные этими методами. Большое внимание уделено вопросу устойчивости тройных систем. Изложение сопровождается многочисленными иллюстрациями. В книге приведен обширный список литературы, который читатель может использовать для более детального изучения заинтересовавшей его стороны проблемы. Часть результатов получена на кафедре небесной механики С.-Петербургского государственного университета.

Для студентов и аспирантов астрономических отделений и кафедр университетов, а также специалистов в области звездной динамики и небесной механики.

**ББК 22.62**

На обложке: одна из периодических орбит задачи трех тел (Титов В.Б. Четвертые Поляховские чтения. Избранные труды. СПб.: ВВМ, 2006. С. 278).

© Маргынова А. И., Орлов В. В.,  
Рубинов А. В., Соколов Л. Л.,  
Никифоров И. И., 2010

© Математико-механический  
факультет  
С.-Петербургского  
государственного  
университета, 2010

ISBN 978-5-288-05041-1

# Оглавление

|                                                                                                      |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение . . . . .                                                                                   | 7         |
| <b>Глава I. Аналитические результаты . . . . .</b>                                                   | <b>9</b>  |
| § 1. Классические интегралы. Проблема существования<br>дополнительных интегралов . . . . .           | 9         |
| § 2. Региональная интегрируемость задачи $N$ тел . . . . .                                           | 12        |
| § 3. Представление решений задачи трех тел в виде рядов                                              | 24        |
| § 4. Регуляризация уравнений движения . . . . .                                                      | 27        |
| § 5. Частные решения задачи трех тел . . . . .                                                       | 35        |
| § 6. Ограниченная задача трех тел как предельный слу-<br>чай общей задачи . . . . .                  | 43        |
| § 7. Классификация финальных движений по Шази . . . . .                                              | 53        |
| <b>Глава II. Тройные системы с положительной полной<br/>энергией . . . . .</b>                       | <b>59</b> |
| § 1. Тройные сближения одиночных звезд и образова-<br>ние двойных систем . . . . .                   | 59        |
| § 2. Эволюция двойных систем в звездном поле . . . . .                                               | 63        |
| § 3. Сопоставление гравитационной и квантово-механи-<br>ческой задач трех тел . . . . .              | 78        |
| <b>Глава III. Динамическая эволюция тройных систем<br/>с отрицательной полной энергией . . . . .</b> | <b>84</b> |
| § 1. Два подхода к изучению динамики тройных систем                                                  | 84        |
| § 2. Классификация типов движений и состояний . . . . .                                              | 89        |
| § 3. Динамика неустойчивых тройных систем . . . . .                                                  | 97        |
| § 4. Устойчивость тройных звезд . . . . .                                                            | 114       |
| § 5. Периодические орбиты . . . . .                                                                  | 124       |
| § 6. Метастабильные системы . . . . .                                                                | 136       |
| § 7. Частные случаи задачи трех тел . . . . .                                                        | 142       |

|                                                                                     |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Глава IV. Динамика тройных звезд . . . . .</b>                                   | <b>168</b> |
| § 1. Возможные сценарии формирования тройных звезд . . . . .                        | 168        |
| § 2. Устойчивость наблюдаемых тройных звезд . . . . .                               | 171        |
| § 3. Астрофизика и динамика . . . . .                                               | 175        |
| <b>Глава V. Динамика триплетов галактик . . . . .</b>                               | <b>182</b> |
| § 1. Основные факторы, влияющие на эволюцию тройных галактик . . . . .              | 182        |
| § 2. Динамика, кинематика и конфигурации триплетов галактик . . . . .               | 184        |
| § 3. Влияние темной материи и темной энергии на динамику тройных галактик . . . . . | 189        |
| <b>Заключение . . . . .</b>                                                         | <b>194</b> |
| <b>Задачи для самоконтроля . . . . .</b>                                            | <b>196</b> |
| <b>Литература . . . . .</b>                                                         | <b>200</b> |

*Светлой памяти нашего Учителя  
Татеоса Артемьевича Агекяна  
посвящается*



## Введение

Статистический анализ наблюдательных данных показывает, что звезды часто образуют кратные системы (см., например, [44, 48, 52]). Такие объекты могут формироваться изначально в ходе звездообразования или могут являться продуктом распада групп и скоплений звезд (см., например, [69, 109, 160, 224]). Среди кратных звезд, состоящих из трех и более компонент, большую часть составляют тройные системы.

Построение решений классической небесно-механической задачи  $N$  тел ( $N \geq 3$ ) и исследование свойств этих решений является важнейшей проблемой математики и механики со времен Ньютона. Постановка этой задачи эволюционировала вместе с развитием естественных наук и математики. Большинство работ посвящено важнейшему частному случаю — задаче трех тел. С тех пор уже почти 300 лет эта задача служит пробным камнем, на котором поколения математиков испытывают новые методы исследования. А. Уинтнер заметил однажды, что каждое поколение по-своему формулирует «основные проблемы в задаче трех тел» и по-своему их решает [9, 10]. Поразительно внутреннее богатство задачи трех и большего числа тел. И сегодня она остается вдохновляющим источником новых идей, методов и результатов в различных областях науки.

Численное моделирование динамической эволюции тройных систем представляет интерес, поскольку до сих пор не найдено приемлемого аналитического решения гравитационной задачи трех тел (см., например, монографию [121]).

В ряде случаев можно рассматривать динамику тройных систем в рамках возмущенной задачи двух тел. Такой подход используют при изучении движения компонентов сильно иерархических трой-

ных звезд, применяя разного рода разложения по малому параметру, например, по отношению больших полуосей орбит внутренней и внешней двойных (см., например, [178]).

Однако в общем случае аналитические исследования задачи трех тел сталкиваются с принципиальными трудностями. Существенный прогресс в изучении динамики тройных систем был связан с численным моделированием на ЭВМ. Первые работы в этом направлении появились во второй половине 60-х годов прошлого века [2, 60, 165, 232]. За истекшие 40 лет численные эксперименты в гравитационной задаче трех тел позволили получить ряд новых интересных результатов. Данное учебное пособие посвящено изложению этих подходов и установленных закономерностей в динамической эволюции тройных звезд.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-02-00267), гранта Президента РФ для государственной поддержки коллективов ведущих научных школ РФ (НШ-1323.2008.2) и Аналитической ведомственной целевой программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (проект 2.1.1/504).



## Глава I

# Аналитические результаты

### § 1. Классические интегралы. Проблема существования дополнительных интегралов

Запишем уравнения движения классической задачи трех тел (см., например, [121]):

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $m_i$  — массы тел,  $\mathbf{r}_i$  — их радиус-векторы в произвольной системе отсчета,  $U$  — потенциал:

$$U = G \left( \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right), \quad (2)$$

где  $G$  — постоянная тяготения,  $r_{ij}$  — взаимные расстояния между телами. Система уравнений (1) имеет десять классических интегралов:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{A}t + \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) = \mathbf{L}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U = E. \quad (5)$$

Часто векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  выбираются нулевыми, т.е. система координат связывается с центром масс системы трех тел. Такая система координат называется *барицентрической*. Формула (4) определяет момент вращения тройной системы, а формула (5) — ее полную энергию. Известно также тождество Лагранжа–Якоби для полумомента инерции тройной системы,  $I$ :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = U + 2E, \quad (6)$$

здесь

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2. \quad (7)$$

Для иерархических тройных звезд бывает полезно введение *координат Якоби*. В этом случае рассматриваются два относительных движения: во внутренней паре — движение тела  $m_2$  относительно  $m_1$ , во внешней паре — движение удаленного компонента  $m_3$  относительно центра масс внутренней двойной  $m_1 m_2$ . Вводим радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , соединяющий компоненты  $m_1$  и  $m_2$ , и радиус-вектор  $\mathbf{R}$ , соединяющий центр масс пары  $m_1 m_2$  и тело  $m_3$ . Также можно ввести так называемые *приведенные массы*

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (8)$$

Тогда кинетическая энергия  $T$  и полумомент инерции тройной системы принимают вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} (m \dot{\mathbf{r}}^2 + M \dot{\mathbf{R}}^2), \quad (9)$$

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 = \frac{1}{2} (m r^2 + M R^2). \quad (10)$$

Для тройных систем с отрицательной энергией ( $E < 0$ ) существует верхняя оценка минимального взаимного расстояния, которая непосредственно вытекает из формул (2) и (5):

$$\inf(r_{12}, r_{13}, r_{23}) \leq -\frac{G}{E} (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3). \quad (11)$$

Уравнения движения в координатах Якоби имеют вид:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} + Gm_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} - \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} \right), \quad (12)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -G \sum_{i=1}^3 m_i \left( \frac{\alpha \mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} - \frac{\beta \mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \right), \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \beta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (14)$$

$$\mathbf{r}_{13} = \mathbf{R} + \beta \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_{23} = \mathbf{R} - \alpha \mathbf{r}. \quad (15)$$

Уравнения движения (1) можно записать в *канонической форме*

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad (16)$$

если ввести *гамльтониан*

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{m_i} - U, \quad (17)$$

где  $\mathbf{q} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  обозначает девятимерный вектор координат,  $\mathbf{p} = (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1, m_2 \dot{\mathbf{r}}_2, m_3 \dot{\mathbf{r}}_3)$  — девятимерный вектор импульсов.

Важнейшим фундаментальным результатом в задаче  $N$  тел, несомненно, является интегрирование «в квадратурах» задачи двух тел и полное описание ее решений с помощью полученных квадратур. Одним из следствий этого значительного успеха явилось признание нахождения полного набора интегралов уравнений движения как основного или даже единственного способа решения задачи трех и большего числа тел. Термины «проинтегрировать» и «решить» (задачу трех тел, например) нередко употребляются, как синонимы. В неблагоприятных случаях такая замена терминов может привести к путанице. Однако эта неоднозначность сложилась исторически. Так, Биркгоф [45], обсуждая понятие интегрируемости, пишет: «Если, однако, мы попытаемся сформулировать точное определение интегрируемости, то оказываются возможными многие различные определения, каждому из которых присущ известный теоретический интерес». Далее: «... не забывая указание Пуанкаре о том, что система дифференциальных уравнений может быть только более или менее интегрируемой».

Длительные бесплодные попытки решить задачу трех тел по аналогии с задачей двух тел привели в конце концов к нескольким фундаментальным отрицательным результатам. В конце XIX века Брунс, Пенлеве [190] и Пуанкаре [152] доказали отсутствие в задаче  $N$  тел дополнительных интегралов определенного вида, помимо классических (Брунс и Пенлеве — алгебраических интегралов, Пуанкаре — аналитических интегралов при условии, что движение происходит в ограниченной области). С тех пор задачу  $N$  тел именуют неинтегрируемой.

В дальнейшем многие авторы получали результаты об интегрируемости и неинтегрируемости различных задач динамики (например, [33, 81, 102, 103]). Причиной отсутствия интегралов является, вообще говоря, сложное поведение траекторий, аналогичное расщеплению сепаратрис, качественно описанному Пуанкаре. Строгое доказательство отсутствия интегралов оказывается весьма трудоемким.

## § 2. Региональная интегрируемость задачи $N$ тел

Как было указано выше, задача трех (и более) тел в общем случае неинтегрируема. Однако для ряда динамических систем удается установить так называемую *региональную интегрируемость*. Прежде чем рассматривать «простые» решения, для которых имеет место такая интегрируемость, приведем некоторые результаты, касающиеся сложно устроенных семейств траекторий задачи трех и более тел.

### Сложные траектории в задаче трех тел

В середине XX века московским математиком В. М. Алексеевым была разработана теория «квазислучайных движений» в динамических системах с небольшим числом степеней свободы. Важную роль при этом сыграла так называемая *проблема финальных движений* в задаче трех тел. Сравнительно простой вариант задачи трех тел, «задача Ситникова–Алексеева», демонстрирует возможность существования семейств сложных траекторий; в определенном смысле

эти семейства неотличимы от случайных процессов [10]. Для таких траекторий интегрируемость не может иметь места.

Практически важные приложения сложных, неинтегрируемых семейств траекторий связаны с многократными гравитационными маневрами космических аппаратов у планет [85], а также с движением астероидов, сближающихся с Землей [175]. Рассмотрим последнюю тему подробнее.

Открытый в 2004 году астероид 99942 Апофис имеет сближение с Землей 13 апреля 2029 года, минимальное геоцентрическое расстояние составит 37–38 тысяч километров. После этого сближения в результате рассеяния возможных траекторий резко теряется точность прогнозирования. Возможны орбиты, ведущие к соударению с Землей в 2036 году. Если же и в 2036 году будет иметь место лишь тесное сближение, а не соударение с Землей, далее движение становится практически недетерминированным. Учитывая, что Апофис ненаблюдаем с Земли до 2012 года, эта недетерминированность будет иметь место по крайней мере еще несколько лет. Для решения важной задачи определения возможных траекторий соударения этого астероида с Землей после 2036 года целесообразно использовать теорию и методы описания квазислучайных движений, разработанные Алексеевым [10], в сочетании с современными методами численного интегрирования (подробности см. в [175]). Таким образом были найдены возможные траектории астероида Апофис, ведущие к соударениям с Землей в 2040, 2041, 2042, 2044 годах, и к тесным сближениям с Землей в 2037, 2038, 2039, 2040, 2045, 2046, 2049, 2051, 2052 годах, а также другие опасные траектории. Несмотря на то, что вероятность указанных соударений весьма мала, всестороннее исследование этих траекторий исключительно актуально. Причина в том, что столкновение астероида Апофис (имеющего размеры около 250 метров) с Землей может вызвать катастрофу, масштабы которой трудно предвидеть.

### **Простые траектории в сложных динамических системах**

Для ряда гамильтоновых динамических систем сравнительно недавно удалось доказать полную интегрируемость. Упомянем известный пример цепочки Тоды. Разработаны соответствующие об-

щие методы (представление Лакса и т.п.). Подробности и дальнейшие ссылки можно найти в монографиях [32, 33, 104].

При отсутствии полного набора глобальных интегралов, т.е. заданных на всем фазовом пространстве, иногда удается достичь успеха в описании траекторий не на всем фазовом пространстве, а на меньшем множестве. Так, в работе [79] построены две инвариантные области (траектория, проходящая через любую точку инвариантной области, всегда остается в этой области) в фазовом пространстве консервативной системы с тремя степенями свободы, определяемой аналитическим гамильтонианом, в одной из которых существуют только два классических интеграла движения, а в другой еще и третий независимый интеграл. В работе [153] показана интегрируемость гамильтоновой динамической системы при одном фиксированном значении интеграла энергии и неинтегрируемость — при других его значениях. Для такого поведения решений Пукакко и Росквист [153] используют термин «слабая интегрируемость».

Классическая КАМ-теория (Колмогоров–Арнольд–Мозер) также утверждает существование множества в фазовом пространстве маловозмущенной гамильтоновой системы, в котором движения интегрируемы, т.е. инвариантные торы невозмущенной системы сохраняются и при наличии возмущений. К сожалению, это множество очень сложно устроено, и доведение «до числа» замечательных результатов КАМ-теории в конкретных задачах, в том числе в задаче трех тел, обычно требует серьезной дополнительной работы. В дополнении к этому «хорошему» множеству в фазовом пространстве содержатся сложно устроенные семейства траекторий, содержащие, вообще говоря, диффузию Арнольда и другие атрибуты хаотической динамики. Это дополнение тяготеет к окрестностям резонансных начальных данных невозмущенной системы и мера его мала вместе с величиной возмущений.

В докторской диссертации Антонова [30] сочетание семейств просто и все более сложно устроенных семейств траекторий рассматривается в модельных системах, аналогичных встречающимся в звездной динамике.

Необходимо подчеркнуть, что отсутствие полного набора глобальных интегралов не обязательно свидетельствует о сложном поведении траекторий или служит препятствием для их исследования [102, 104, 205]. Так, линейная однородная автономная сис-

тема на плоскости не имеет непрерывного интеграла  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  в случае точек покоя (равновесия) типа узла или фокуса. Однако плоскость можно разбить на конечное число инвариантных областей и отдельных траекторий, внутри которых интеграл существует. Подробности см. в [205]. Для таких ситуаций естественно использовать термин «региональная интегрируемость». На торе самые простые системы оказываются неинтегрируемыми даже регионально по причине отсутствия инвариантных областей, отличных от всего фазового пространства. Такова, например, система  $\dot{x}_1 = 1$ ,  $\dot{x}_2 = \sqrt{2}$ , где  $x_1, x_2$  — угловые переменные, понимаемые по mod  $2\pi$ .

Вернемся к задаче  $N$  тел. Наличие сложных, запутанных траекторий в какой-либо области фазового пространства препятствует существованию там хотя бы одного дополнительного к классическим гладкого интеграла. В то же время в этой задаче существуют и простые траектории, когда тела неограниченно удаляются друг от друга и их взаимодействие быстро убывает. Еще Шази [216–218], автор известной классификации финальных движений в задаче трех тел, приводил аргументы в пользу интегрируемости в области таких простых движений. В середине прошлого века Алексеев [9, 10] сформулировал гипотезу о том, что задача трех тел для гиперболических, гиперболо-эллиптических и гиперболо-параболических движений интегрируема в смысле существования полного набора автономных интегралов движения. Очевидно, речь идет о региональной интегрируемости. Излагаемые ниже результаты об интегрируемости задачи  $N$  тел касаются лишь части «гиперболических» движений, однако справедливы для произвольного значения  $N$ , а не только для  $N = 3$ .

Традиционно классическая небесная механика больше интересуется траекториями, лежащими в ограниченной области, а не уходящими в бесконечность. Таковы траектории постоянных членов Солнечной системы. Возмущенное эллиптическое движение обычно сложнее, чем возмущенное гиперболическое. В своей классической работе [105], посвященной идейным основам КАМ-теории, Колмогоров отмечает, что специалисты мало занимаются задачами об уходящих траекториях различных типов, и указывает на важность этого направления исследований. Он пишет: «Замечу, что из более элементарных вопросов специалисты по качественной теории дифференциальных уравнений мало занимаются конкретными

задачами об уходящих траекториях различных специальных типов. Ярким примером этого является то обстоятельство, что опровержение утверждения Шази о невозможности „обмена“ и „захвата“ в задаче трех тел было сначала достигнуто тяжелым (и без точных оценок ошибок логически неубедительным!) путем численного интегрирования (Беккер, Шмидт), и лишь недавно пример „захвата“ был построен Ситниковым весьма просто и почти без вычислений».

Уходящие траектории представляют несомненный интерес для астрономии и космологии. Исследуя общие свойства движений в задаче  $N$  тел, Саари [163] установил, что обычный результат динамической эволюции системы — распад на подсистемы, которые разлетаются друг от друга. Это свойство подтверждается и многими результатами численного моделирования динамической эволюции систем, содержащих от трех до нескольких десятков тел [159, 161, 224, 226]. По современным представлениям, звезды образуются группами в молекулярных облаках, и в результате динамической эволюции эти группы распадаются на устойчивые подсистемы малой кратности, большинство из которых — одиночные, двойные или иерархические тройные.

Как хорошо известно из общей теории дифференциальных уравнений [149], локальные «интегралы», явно зависящие от времени, всегда существуют вместе с решениями уравнений. Поэтому в случаях, когда существование решения гарантировано для всех значений времени, появляется надежда на существование нелокальных интегралов, которые не зависят явно от времени. В задаче  $N$  тел, очевидно, есть простые варианты очень быстрого разлета тел без сближений. «Очевидно» также, что решения в этих случаях существуют вечно, вещественных особенностей нет. Эти неформальные наводящие соображения наряду с идеей о возможности модификации классического метода Пикара для получения точных решений для всех значений времени разрабатываются в диссертации [174] и лежат в основе полученных там результатов. Как хорошо известно, классические пикаровские итерации сходятся к точному решению дифференциального уравнения, вообще говоря, лишь на малом временном интервале. Однако при выполнении определенных условий сходимости имеет место на всей оси времени.



## Уравнения движения задачи $N$ тел

Слабовозмущенная задача нескольких тел в подходящих переменных может быть представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида (см. [204]):

$$\dot{x}_i = \mu f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{y}_j = \omega_j(\mathbf{x}) + \mu g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (18)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x_i)$  — вектор медленных переменных,  $\mathbf{y} = (y_j)$  — вектор быстрых переменных,  $i = 1, \dots, n_1$ ;  $j = 1, \dots, n_2$ ;  $\mathbf{f} = (f_i)$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_j)$ ,  $\mathbf{g} = (g_j)$  — вектор-функции;  $\mu$  — малый скалярный параметр.

Напомним, что «медленные переменные» — те, скорость изменения которых обращается в нуль при нулевом значении малого параметра. Скорость изменения «быстрых переменных» при этом отлична от нуля. Для кеплеровых оскулирующих элементов быстрыми являются угловые переменные типа средней аномалии или ее аналогов, остальные переменные — медленные.

Систему (18) можно упростить (подробности приведены в работе [176]). В результате уравнения примут форму

$$\dot{x}_i = \mu f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{y}_j = ax_j, \quad (19)$$

где скалярный множитель  $a$  согласует физические размерности. Приведем и векторную форму уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathcal{A}\mathbf{x}, \quad (20)$$

где на главной диагонали прямоугольной матрицы  $\mathcal{A}$  размера  $k_1 \times (k_1 + k_2)$  стоит  $a$ , остальные элементы  $\mathcal{A}$  равны нулю.

### Итеративный метод построения решений

Заменим (20) с начальными данными  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  при  $t = 0$  равносильной системой интегральных уравнений

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} + \mu \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{y}(\tau)) d\tau, \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{Y} + \mathcal{A} \int_0^t \mathbf{x}(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Образует последовательность приближений пикаровского типа:

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{X}, \quad \mathbf{y}^0(t) = \mathbf{Y} + \mathcal{A}\mathbf{X}t; \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{n+1}(t) &= \mathbf{X} + \mu \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}^n(\tau), \mathbf{y}^n(\tau)) d\tau, \\
\mathbf{y}^{n+1}(t) &= \mathbf{Y} + \mathcal{A} \int_0^t \mathbf{x}^{n+1}(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{23}$$

Обозначим через  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{y}^*(t)$  пределы  $\mathbf{x}^n(t)$ ,  $\mathbf{y}^n(t)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Ниже приводится формулировка теоремы о том, что при соответствующих условиях эти пределы существуют и представляют собой решение (20). Доказательство этой теоремы по сути повторяет доказательство классической теоремы Пикара–Линдедефа [197].

**Теорема 1.** *Дана система уравнений (20). От границ области начальных данных  $D_0 = D_{01} \times D_{02}$  по переменным  $x$  отступаем внутрь на  $r$ . Получаем  $D_0(r) = D_{01}(r) \times D_{02}$ . Обозначим через  $\xi$  диаметр множества  $D_0$ . Пусть*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_t &\leq \Phi(t), \\
\|\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_t &\leq \Phi_1(t) \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|_t + \Phi_2(t) \|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|_t,
\end{aligned} \tag{24}$$

причем мажоранты допускают интегральные оценки

$$\int_0^\infty \Phi(t) dt \leq C, \quad \int_0^\infty \Phi_1(t) dt \leq C_1, \quad \int_0^\infty t \Phi_2(t) dt \leq C_2. \tag{25}$$

Норма вектор-функции времени – сумма максимумов модулей компонент вектора в момент времени  $t$  при значке нормы. Норма без значка  $t$  – супремум норм со значком  $t$  по всем  $t$ . Тогда при всех положительных  $r$ ,  $\mu$ , подчиненных условиям

$$0 < r < \xi, \tag{26}$$

$$\mu < \frac{r}{C + r(C_1 + aC_2)}, \tag{27}$$

справедливо следующее:

1. Решения системы (20) с начальными данными из  $D_0(r)$  продолжимы на всю полуось  $t \geq 0$  и не выходят из  $D$ .
2. Решения, начинающиеся в  $D_0(r)$ , можно найти, используя итерации, сходящиеся со скоростью геометрической прогрессии; сходимость к  $\mathbf{x}$  равномерна относительно начальных данных и времени на множестве  $D_0(r) \times [0, \infty)$ , сходимость к  $\mathbf{y}$  равномерна на множестве  $D_0(r) \times [0, T]$  при любом  $T > 0$ .

3. При  $t \rightarrow \infty$  переменные  $x$  стремятся к постоянным; переменные  $y$  — к линейным функциям времени.

Чисто качественно теорему 1 можно сформулировать так: если возмущения достаточно быстро убывают со временем в окрестности порождающего ( $\mu = 0$ ) решения, то движение определено на всей полуоси (или оси) времени, причем медленные переменные стремятся к постоянным, быстрые — к линейным функциям времени; точное решение есть предел итераций пикаровского типа.

Эта теорема может быть применена к быстро разбегающимся одиночным или тесным двойным подсистемам без сближений между подсистемами. Доказательство теоремы 1 и ее следствий (см. ниже теоремы 2–4), а также более подробное их обсуждение приведены в [176].

### Разлет одиночных тел

Пусть  $\mathcal{Q}$  — система  $N$  точек  $Q_n$  масс  $m_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , притягивающих друг друга по закону Ньютона. Обозначим через  $\mathbf{x}_n$ ,  $\mathbf{y}_n$  трехмерные векторы скорости и положения  $Q_n$ . Движение  $\mathcal{Q}$  описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{f}_n(\mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{x}_n \quad (n = 1, \dots, N), \quad (28)$$

где

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{y}) = G \sum_{k \in \mathcal{N}(n)} m_k \frac{\mathbf{y}_{nk}}{|\mathbf{y}_{nk}|^3}. \quad (29)$$

При этом

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \xi, \quad \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| \leq \eta, \quad (30)$$

если  $\xi, \eta$  — положительные. Область  $D_0(r)$  получается из  $D_0$  заменой  $\xi$  на  $\xi - r$ . Здесь  $\mathcal{N}(n) = \{k: 1 \leq k \leq N, k \neq n\}$ .

Пусть

$$r < \xi, \quad |\hat{\mathbf{x}}_{nk}| > 2\xi, \quad |\hat{\mathbf{y}}_{nk}| > 2\eta, \quad D_{nk} > 0. \quad (31)$$

Здесь

$$D_{nk} = A_{nk}C_{nk} - B_{nk}^2, \quad A_{nk} = (|\hat{\mathbf{x}}_{nk}| - 2\xi)^2, \quad C_{nk} = (|\hat{\mathbf{y}}_{nk}| - 2\eta)^2, \\ B_{nk} = |\hat{\mathbf{x}}_{nk}\hat{\mathbf{y}}_{nk}| + 2\eta|\hat{\mathbf{x}}_{nk}| + 2\xi|\hat{\mathbf{y}}_{nk}| + 4\xi\eta.$$

Введем два параметра:

$$C = 2\pi \max_n \sum_{k \in \mathcal{N}(n)} \frac{Gm_k}{\sqrt{D_{nk}}}, \quad C_2 = 16G \max_n \sum_{k \in \mathcal{N}(n)} \frac{m_k \sqrt{C_{nk}}}{D_{nk}}. \quad (32)$$

**Теорема 2.** При всех положительных  $r, \xi, \eta$  и векторах  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ , подчиненных условиям (31) и

$$C_2 < 1, \quad C < (1 - C_2)r, \quad (33)$$

где  $C$  и  $C_2$  определены формулами (32), верно следующее:

1. Решения системы (28) с начальными данными из  $D_0(r)$  продолжимы на всю ось времени и не выходят из  $D$ .
2. Решения, начинающиеся в  $D_0(r)$ , можно найти с помощью итераций, сходящихся со скоростью геометрической прогрессии; сходимость к  $\mathbf{x}$  равномерна относительно начальных данных и времени на множестве  $D_0(r) \times (-\infty, \infty)$ , сходимость к  $\mathbf{y}$  равномерна на множестве  $D_0(r) \times [-T, T]$  при любом  $T > 0$ .
3. При  $t \rightarrow \infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  переменные  $x$  стремятся к постоянным, переменные  $y$  — к линейным функциям времени.

## Разлет двойных

Пусть система  $\mathcal{Q}$  состоит из  $N$  пар точек  $Q_{ns}$  масс  $m_{ns}$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $s = 1, 2$ . Если пары тесные, а их центры масс  $Q_n$  быстро разлетаются, то к системе  $\mathcal{Q}$  применима теорема 1.

## Теоремы об интегрируемости

Рассмотрим теперь собственно интегрируемость задачи  $N$  тел, т.е. существование  $6N - 1$  гладких функций координат и скоростей, не являющихся константами и постоянных на траекториях в инвариантной области (не во всем пространстве — интегрируемость региональная!).

Основные идеи доказательства интегрируемости, проведенного в [174, 176], следующие: из существования решения на всей временной оси следует существование «интегралов, явно зависящих от

времени». Достаточно поменять начальные и текущие значения переменных в зависимостях текущих значений от начальных данных и времени. Чтобы исключить явную зависимость от времени, следует использовать существование в данной задаче «быстрых переменных», монотонно растущих со временем. В результате получаем теорему об интегрируемости.

Пусть  $D_1 \subset D_2$  — непустые области пространства  $\mathbf{R}^n$ . Рассмотрим задачу Коши с начальными данными из  $D_1$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{X} \in D_1, \quad (34)$$

где  $\mathbf{f}: D_2 \mapsto \mathbf{R}^n$  — функция гладкости  $\sigma$  (т.е. функция имеет  $\sigma$  непрерывных производных). Решение (34) обозначим  $\mathbf{x} = \mathbf{h}(t, \mathbf{X})$ .

**Теорема 3.** Пусть решения системы (34) определены при всех  $t \in \mathbf{R}$  и не выходят из  $D_2$ ; существуют функция  $\tilde{g}(\mathbf{x}): D_2 \mapsto \mathbf{R}$  гладкости  $\sigma$  и постоянная  $c > 0$  такие, что

$$\partial g(t, \mathbf{X})/\partial t \geq c, \quad (t, \mathbf{X}) \in \mathbf{R} \times D_1, \quad (35)$$

где  $g(t, \mathbf{X}) = \tilde{g}(\mathbf{h}(t, \mathbf{X}))$ . Тогда существует инвариантная область  $D$  ( $D_1 \subset D \subset D_2$ ), в которой существует набор  $n - 1$  независимых автономных интегралов  $F_i: D \mapsto \mathbf{R}$  гладкости  $\sigma$ .

Теорема 3 применима к задаче  $N$  тел.

**Теорема 4.** В фазовом пространстве задачи  $N$  тел существуют инвариантные области  $D$  бесконечной лебеговой меры, в которых определен полный набор  $6N - 1$  независимых автономных однозначных аналитических интегралов движения. Все решения в  $D$  определены при всех  $t \in \mathbf{R}$ ; каждая орбита в  $D$  диффеоморфна прямой.

## Простые траектории в задаче $N$ тел: выводы

Результаты, изложенные выше в этом параграфе, можно суммировать следующим образом.

Для задачи  $N$  тел при произвольном  $N$  и произвольных значениях масс  $m_n$  разработан итеративный метод построения решений в конструктивно построенных областях фазового пространства.

В этих областях бесконечной лебеговой меры:

- 1) движение определено для всех  $t \in (-\infty, \infty)$ ,
- 2) быстрая сходимость итераций к точному решению гарантирована для всех значений времени,
- 3) существует полный набор автономных однозначных аналитических интегралов.

В частности, как следствие верно следующее утверждение:

*Пусть заданы массы, начальные координаты и начальные скорости тел, и прямолинейные равномерные движения, определяемые этими начальными координатами и скоростями, не содержат соударений. Умножим массы, координаты и скорости на масштабные скалярные множители  $M$ ,  $R$ ,  $V$ , соответственно. Гравитационную постоянную обозначим  $G$ . Тогда, если величина  $GM/(RV^2)$  достаточно мала, мы оказываемся в вышеуказанной области фазового пространства задачи  $N$  тел, где итерации сходятся к точному решению.*

Качественно эти области можно описать следующим образом. Система  $N$  тел разбивается на тесные двойные и одиночные подсистемы. Пусть начальные координаты и скорости заданы так, что в порождающем прямолинейном равномерном движении центров масс подсистем нет тесных сближений (на расстояния порядка размеров тесных двойных). Истинное движение слабо отличается от порождающего либо для достаточно малых масс тел, либо для достаточно больших скоростей центров масс подсистем, либо для достаточно больших расстояний между этими центрами масс в начальный момент. Оскулирующие векторы площадей и Лапласа двойных будут всегда близки к своим начальным значениям; движение центров масс двойных близко к прямолинейному равномерному. Тесные сближения центров масс подсистем отсутствуют. Асимптотически «на бесконечности» движение центров масс стремится к прямолинейному равномерному, относительное движение компонентов тесных двойных — к эллиптическому.

Решения в этой области построены конструктивно с помощью итеративной процедуры, являющейся модификацией итераций пикаровского типа. Быстрая сходимость итераций гарантирована для

всех значений времени. В вышеуказанных областях фазового пространства существует полный набор автономных однозначных аналитических интегралов. Эти результаты доказывают ослабленную гипотезу Алексева: задача трех тел интегрируема в некоторой части областей, указанных автором гипотезы. Другими словами, система интегрируема либо при достаточно малых массах тел, либо при достаточно больших скоростях тел, либо при достаточно больших расстояниях между телами.

### Области применимости итеративного метода построения точных решений задачи N тел

Для того, чтобы оценить ограничения в условиях теоремы, рассмотрим примеры.

1. Пусть три тела равной массы  $m$  имеют в начальную эпоху координаты  $\hat{y}_1 = (0, 1, 0)$ ,  $\hat{y}_2 = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{y}_3 = (0, 0, 1)$ , и скорости  $\hat{x}_1 = (0, 0, 1)$ ,  $\hat{x}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\hat{x}_3 = (1, 0, 0)$ .

Умножим все массы, координаты и скорости на масштабные множители  $M$ ,  $R$ ,  $V$ , соответственно.

Для выполнения условий теорем об интегрируемости достаточно потребовать  $GM/(RV^2) < 1/253$ , причем этому условию можно удовлетворить как за счет малой массы, так и за счет большой скорости или большого расстояния в начальный момент.

2. Пусть три тела равной массы движутся в одной плоскости и имеют в начальную эпоху координаты  $\hat{y}_1 = (0, 1)$ ,  $\hat{y}_2 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ ,  $\hat{y}_3 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$  и скорости  $\hat{x}_1 = (1, 0)$ ,  $\hat{x}_2 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$ ,  $\hat{x}_3 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ .

Получим условие  $GM/(RV^2) < 1/70$ . Пусть в последнем примере  $R = V = 1$ . Численно интегрируя уравнения движения задачи трех тел при разных  $M$ , увидим, что при  $M = 0.9$  три тела уже не разлетаются сразу «на бесконечность», а взаимодействуют сложным образом. При  $M = 0.8$  тела сразу разлетаются, однако направления начальных скоростей заметно меняются. При  $M = 0.1$  практически все время имеет место прямолинейное движение.

Таким образом, требования теоремы могут быть завышены на один — три порядка. Это естественно при использовании мажорант. Ситуация резко отличается в лучшую сторону по сравнению с КАМ-теорией или теорией Сундмана.

Как известно, самые тесные сближения Солнца со звездами происходят на расстояниях более 0.15 парсек. Характерные относительные скорости звезд — десятки км/с. Возьмем массу Солнца  $2 \cdot 10^{33}$  г, расстояние 0.1 пк и скорость 10 км/с. Безразмерная комбинация  $GM/(RV^2)$  не превосходит  $0.5 \cdot 10^{-3}$ .

### § 3. Представление решений задачи трех тел в виде рядов

Сундман [180] получил решение задачи трех тел в виде абсолютно сходящихся степенных рядов по некоторой переменной  $\tau$ , если модуль вектора углового момента  $L = |\mathbf{L}|$  тройной системы не равняется нулю. Полученный им результат можно распространить на любые движения трех тел без тройных соударений и в случае  $\mathbf{L} = 0$  при условии, что периметр системы отличен от нуля —  $r_{12} + r_{13} + r_{23} \neq 0$ . Изложение подхода Сундмана можно найти также в книге [80].

Для получения решений в виде рядов наряду с физическим временем  $t$  Сундман вводит новую глобальную переменную  $\omega$  такую, что в начальный момент времени

$$t_0 = 0, \quad \omega_0 = 0, \quad (36)$$

$$dt = \Gamma d\omega, \quad (37)$$

$$\Gamma = \prod_{i=1}^3 \left(1 - e^{-\frac{r_i}{t}}\right), \quad (38)$$

$$l = \frac{1}{3} \sqrt{m_{\min}} \Lambda, \quad m_{\min} = \min(m_1, m_2, m_3). \quad (39)$$

Параметр  $\Lambda$  содержит интегралы  $(E, L)$  и начальные значения  $\rho_0, \dot{\rho}_0$  переменной

$$\rho(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{m_i}} \quad (40)$$

и ее производной по времени  $\dot{\rho}(t)$ .



Для тройных систем в случае

$$K = -\frac{2 \sum_{i=1}^3 m_i}{\prod_{i=1}^3 m_i} E \leq 0$$

согласно Сундману [180]

$$\Lambda = \frac{c^2 \rho_0}{(\rho_0 \dot{\rho}_0)^2 + c^2}. \quad (41)$$

Если  $K > 0$ , то

$$\Lambda = \min(S_1, S_2), \quad (42)$$

где

$$S_1 = c^2 m_{\min}^2 \left( 8 + \frac{1}{32} c \sqrt{K \sum_{i=1}^3 m_i} \right)^{-2} \left( \sum_{i=1}^3 m_i \right)^{-3/2}, \quad (43)$$

$$S_2 = \frac{c^2 \rho_0}{(\rho_0 \dot{\rho}_0)^2 + 2K \rho_0^2 + c^2}, \quad c = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i}{\prod_{i=1}^3 m_i} L. \quad (44)$$

Далее Сундман вводит еще одну переменную  $\tau$ , связанную с  $\omega$  следующими соотношениями:

$$\omega = \frac{2\Omega}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}, \quad \tau = (e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} - 1) / (e^{\frac{\pi\omega}{2\Omega}} + 1), \quad (45)$$

где

$$\Omega = \sqrt{3} \chi^{3/2} G^{-1/2} \left( \sum_{i=1}^3 m_i \right)^{-1/2} \left[ \frac{15}{8m_{\min}} \sum_{i=1}^3 m_i + \frac{3}{2m_{\min}} g^2 \chi + \frac{9}{2m_{\min}} g \sqrt{G \chi \sum_{i=1}^3 m_i + \frac{3}{4} \chi |K| + \lambda} \right]^{-1}, \quad (46)$$

$$\chi = \frac{2}{87} \sqrt{m_{\min}} \Lambda, \quad (47)$$

$$g = \frac{1}{14\chi} \left[ \frac{9L^2}{2m_{\min}^2} + \chi \sum_{i=1}^3 m_i \left( 775 + \frac{3}{m_{\min}} \sum_{i=1}^3 m_i \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{29} + \frac{1}{4m_{\min}} \sum_{i=1}^3 m_i + \frac{\chi|K|}{16} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (48)$$

$$\lambda = 224 \sqrt{\frac{16}{m_{\min}} \sum_{i=1}^3 m_i + 3\chi|K|}. \quad (49)$$

Затем Сундман доказывает, что координаты трех тел, их взаимные расстояния и время  $t$  можно представить в виде рядов по целым положительным степеням переменной  $\tau$ , задаваемой соотношениями (45). Эти ряды абсолютно и равномерно сходятся при  $|\tau| < 1$  и определяют движение тройной системы в любой момент времени.

Двойные соударения тел допускают аналитическое продолжение (см. книгу Дубошина [80] и далее в § 4). Тройные соударения в задаче трех тел с ненулевым угловым моментом ( $L \neq 0$ ) не реализуются согласно теореме Слудского (см. книгу Дубошина [80]).

Заметим, что переменная  $\omega$  принимает значения в бесконечном промежутке, как и физическое время  $t$ , а переменная  $\tau$  меняется в интервале от  $-1$  до  $+1$ . Любому вещественному значению  $\tau$  в промежутке  $(-1, 1)$  соответствует единственное значение  $\omega \in (\infty, -\infty)$ . Координаты тел, взаимные расстояния между телами и время являются регулярными функциями  $\omega$  в бесконечной полосе шириной  $2\Omega$ . Преобразование (45) переводит бесконечную полосу для переменной  $\omega$  в круг единичного радиуса для переменной  $\tau$ .

Ряды Сундмана имеют важное теоретическое значение, однако пока они не нашли практического применения из-за чрезвычайно медленной сходимости.

Бабаджанянц [40, 41] показал, что систему дифференциальных уравнений общей задачи  $N$  тел (в том числе и для  $N = 3$ ) можно свести с помощью замен и введения дополнительных переменных к полиномиальной системе дифференциальных уравнений, в которых правые части являются многочленами относительно неизвестных функций. Представление ограниченных решений такой системы на бесконечном промежутке времени получается сведением исходной задачи Коши к бесконечной системе линейных уравнений в некото-

ром сепарабельном гильбертовом пространстве. Оценивается максимальный интервал существования решения такой, что взаимное расстояние между некоторой фиксированной парой тел ограничено снизу для всех моментов времени внутри этого интервала.

Сходный подход применен в работе Ван Цю-Дуна [58], который предложил обобщение теории Сундмана на случай задачи  $N > 3$  тел и для задачи трех тел с нулевым угловым моментом.

## § 4. Регуляризация уравнений движения

В ходе эволюции тройных систем могут происходить тесные сближения компонентов, когда одно или все три расстояния становятся очень малыми. В этих случаях правые части уравнений движения (1) быстро возрастают. Тогда при численном интегрировании системы (1) происходит сильное накопление ошибок.

Чтобы избежать накопления ошибок, применяются различные методы регуляризации уравнений движения (см., например, работы Леви-Чивиты [110], Пуанкаре [151], Сундмана [180], Кустаанхеймо и Штифеля [108], Себехея [165], Арсета и Заре [38], Заре [91], Хегги [198], Мазера и Мак Гихи [114], Мячина [133], Микколы и Арсета [125, 126], Кузьминых [107], а также книгу Полешикова и Холопова [150] и ссылки в ней). Заметим, что впервые регуляризацию уравнений движения для задачи двух тел предложил Эйлер [230].

Общая идея регуляризации уравнений движения состоит в преобразованиях переменной времени и, в некоторых случаях, координат таким образом, чтобы исключить сингулярность в правых частях уравнений движения (1). По сути дела, регуляризующее преобразование переводит истинные движения трех тел из трехмерного пространства в движения в пространствах большей или меньшей размерности, где они являются регулярными. С другой стороны, видимые столкновения тел в рассматриваемых движениях могут являться проекциями (т.е. наложениями) истинных бесстолкновительных движений. Наглядно это можно проиллюстрировать на примере известного решения Лагранжа, если формально спроектировать плоское движение на прямую, лежащую в плоскости треугольника.

Общую схему регуляризации можно показать на примере задачи

двух тел, двигающихся вдоль одной прямой. Запишем уравнение относительного движения

$$\ddot{x} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{x^2}. \quad (50)$$

Уравнение (50) обладает интегралом энергии

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{G(m_1 + m_2)}{x} = E. \quad (51)$$

Уравнения (50) и (51) имеют особенность при  $x \rightarrow 0$ . Их можно сделать регулярными с помощью замены времени

$$dt = x d\tau, \quad (52)$$

откуда

$$\tau = \int_{t_0}^t \frac{d\xi}{x(\xi)}, \quad t - t_0 = \int_0^\tau x d\xi. \quad (53)$$

Замена времени (52) обусловлена тем, что при двойном соударении  $x \sim t^{2/3}$ , т.е.  $\tau \sim t^{1/3}$ . Тогда уравнения (50) и (51) принимают вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = G(m_1 + m_2) + 2Ex, \quad (54)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - G(m_1 + m_2)x - Ex^2 = 0. \quad (55)$$

Уравнения (54) и (55) не имеют особенностей при  $x \rightarrow 0$ .

В общем случае движения двух тел происходят на плоскости. Уравнение относительного движения (50) можно записать в векторной форме

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} = 0, \quad (56)$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, направленный от тела  $m_1$  к телу  $m_2$ . Применим преобразование координат

$$\mathbf{r} = \mathcal{L}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \quad (57)$$

где  $\mathcal{L}(\mathbf{u})$  — обобщенная матрица Леви-Чивиты (см. книгу Полещикова и Холопова [150]). Например,

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Кроме того, проведем преобразование времени

$$dt = |\mathbf{u}|^2 d\tau. \quad (59)$$

После перехода к новым переменным  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  и переменной интегрирования  $\tau$  получим уравнения движения

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{G(m_1 + m_2) - 2\left|\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}\right|^2}{2r} \mathbf{u} = 0 \quad (60)$$

и интеграл энергии

$$E = -\frac{G(m_1 + m_2) - 2\left|\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}\right|^2}{r}. \quad (61)$$

Подставляя выражение для квадрата скорости  $\left|\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}\right|^2$  из соотношения (61) в (60), получим регулярное уравнение движения

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{E}{2} \mathbf{u} = 0. \quad (62)$$

Один из вариантов регуляризирующего KS-преобразования для задачи двух тел был предложен в работе Кустаанхеймо и Штифеля [108]. В этом случае для регуляризации двойного сближения (в том числе и соударения) в трехмерном случае используется кватернионная матрица  $\mathcal{L}$  (матрица Леви-Чивиты размерности  $4 \times 4$ ), т.е. расширяется пространство координат. Примеры кватернионных  $\mathcal{L}$ -матриц представлены в книге Полецикова и Холопова [150].

Для задачи трех тел можно использовать одновременно два KS-преобразования [38]. Рассматриваются движения тел  $m_1$  и  $m_2$  относительно тела  $m_3$ , причем тело  $m_3$  выбирается так, чтобы расстояние

$$r_{12} \geq \min(r_{13}, r_{23}). \quad (63)$$

Введем векторы координат и импульсов относительных движений тел  $m_1$  и  $m_2$  относительно тела  $m_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6), \\ \mathbf{p} &= (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6). \end{aligned} \quad (64)$$

Индексы 1, 2, 3 относятся к телу  $m_1$ , а индексы 4, 5, 6 — к телу  $m_2$  (рис. 1).

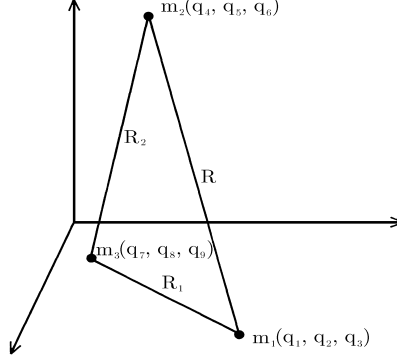


Рис. 1. Относительное расположение тел при регуляризации Арсета-Заре [38].

Тогда для взаимных расстояний между телами получаем

$$\begin{aligned}
 r_{13} &\equiv R_1 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \\
 r_{23} &\equiv R_2 = \sqrt{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2}, \\
 r_{12} &\equiv R = \sqrt{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2}.
 \end{aligned} \tag{65}$$

Гамильтониан записывается в виде

$$\begin{aligned}
 H = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^3 \frac{1}{\mu_{13}} p_r^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=4}^6 \frac{1}{\mu_{23}} p_r^2 + \frac{1}{m_3} \sum_{r=1}^3 p_r p_{r+3} - \\
 - \frac{m_1 m_3}{R_1} - \frac{m_2 m_3}{R_2} - \frac{m_1 m_2}{R}, \tag{66}
 \end{aligned}$$

где

$$\mu_{k3} = \frac{m_k m_3}{m_k + m_3}, \quad k = 1, 2. \tag{67}$$

Система единиц выбрана здесь так, что постоянная тяготения  $G = 1$ . Уравнения движения в переменных  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  имеют вид

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \tag{68}$$

Основная идея метода Арсета–Заре состоит в том, что мы расширяем вектора переменных  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  до восьми измерений так, что  $q_4 \equiv 0$ ,  $q_8 \equiv 0$ ,  $p_4 \equiv 0$ ,  $p_8 \equiv 0$ , и увеличиваем индексы для переменных  $q_4$ ,  $q_5$ ,  $q_6$  и  $p_4$ ,  $p_5$ ,  $p_6$  на единицу. Вводим два новых 4-мерных вектора

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{pmatrix}$$

по аналогии с тем, как это делается в KS-регуляризации задачи двух тел:

1) при  $q_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} + q_1 \right)}, & Q_2 &= q_2/(2Q_1), \\ Q_3 &= q_3/(2Q_1), & Q_4 &= 0; \end{aligned} \quad (69)$$

2) при  $q_1 < 0$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} - q_1 \right)}, & Q_1 &= q_2/(2Q_2), \\ Q_3 &= 0, & Q_4 &= q_3/(2Q_2); \end{aligned} \quad (70)$$

3) при  $q_5 \geq 0$

$$\begin{aligned} Q_5 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{q_5^2 + q_6^2 + q_7^2} + q_5 \right)}, & Q_6 &= q_6/(2Q_5), \\ Q_7 &= q_7/(2Q_5), & Q_8 &= 0; \end{aligned} \quad (71)$$

4) при  $q_5 < 0$

$$\begin{aligned} Q_6 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{q_5^2 + q_6^2 + q_7^2} - q_5 \right)}, & Q_5 &= q_6/(2Q_6), \\ Q_7 &= 0, & Q_8 &= q_7/(2Q_6). \end{aligned} \quad (72)$$

Далее мы находим две обобщенные матрицы Леви-Чивиты

$$A_1 = 2 \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ -Q_2 & Q_1 & Q_4 \\ -Q_3 & -Q_4 & Q_1 \\ Q_4 & -Q_3 & Q_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = 2 \begin{pmatrix} Q_5 & Q_6 & Q_7 \\ -Q_6 & Q_5 & Q_8 \\ -Q_7 & -Q_8 & Q_5 \\ Q_8 & -Q_7 & Q_6 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

При помощи матриц  $A_1$  и  $A_2$  мы можем вычислить 4-мерные векторы моментов количества движения

$$\mathbf{P}_1 = A_1 \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{P}_2 = A_2 \mathbf{p}_2, \quad (74)$$

где 4-мерные векторы моментов равны

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Тогда

$$R_1 = \sum_{j=1}^4 Q_j^2, \quad R_2 = \sum_{j=5}^8 Q_j^2, \quad (76)$$

$$R = \sqrt{(q_1 - q_5)^2 + (q_2 - q_6)^2 + (q_3 - q_7)^2}.$$

Рассматриваем физическое время  $t$  и гамильтониан  $H$ , взятый со знаком минус, как новые переменные

$$Q_9 = t, \quad (77)$$

$$P_9 = -H = - \left( \sum_{j=1}^8 \frac{1}{2\mu_{k3}} p_j^2 + \frac{1}{m_3} \sum_{j=1}^4 p_j p_{j+4} - \frac{m_1 m_3}{R_1} - \frac{m_2 m_3}{R_2} - \frac{m_1 m_2}{R} \right), \quad (78)$$

где  $k$  — целая часть числа  $\frac{1}{4}(j+3)$ .



В новых переменных  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, P_9$  гамильтониан приобретает вид

$$\begin{aligned} \Gamma^* = R_1 R_2 P_9 + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{8\mu_{k3}} R_l \mathbf{P}_k^2 + \frac{1}{16m_3} \mathbf{P}_1^T A_1 A_2^T \mathbf{P}_2 - \\ - m_1 m_3 R_2 - m_2 m_3 R_1 - m_1 m_2 \frac{R_1 R_2}{R}, \end{aligned} \quad (79)$$

где  $l$  — целая часть числа  $(1+k)/k$ .

Наряду с преобразованием координат и импульсов Арсет и Заре [38] вводят новую переменную времени  $\tau$  по следующей формуле:

$$\frac{dt}{d\tau} \equiv \frac{dQ_9}{d\tau} = R_1 R_2. \quad (80)$$

Для консервативной системы трех тел

$$\frac{dH}{d\tau} \equiv \frac{dP_9}{d\tau} = 0. \quad (81)$$

Регуляризованные уравнения сохраняют каноническую форму

$$\frac{dQ_j}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma^*}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial \Gamma^*}{\partial Q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 8. \quad (82)$$

Уравнения (82) не содержат особенностей при двойных соударениях  $R_1 \rightarrow 0$  и  $R_2 \rightarrow 0$ . Поэтому при численном решении системы (82) не требуется сильно уменьшать шаг интегрирования по переменной  $\tau$ . Заметим, что при переходе через точку  $q_1 = 0$  преобразования Арсета–Заре становятся другими, производные терпят разрыв, т.е. преобразования не являются аналитическими.

Заметим, что это преобразование в общем случае не применимо к тройным соударениям, когда все три взаимных расстояния  $R_1, R_2$  и  $R$  одновременно стремятся к нулю. Однако при  $N = 3$  этот случай можно исключить выбором соответствующих начальных условий.

Для того, чтобы получить координаты и скорости тел в физическом пространстве, необходимо осуществить обратный переход от векторов  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  к векторам  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ :

$$\mathbf{q}_k = \frac{1}{2} A_k^T \mathbf{Q}_k, \quad k = 1, 2, \quad (83)$$

$$\mathbf{p}_k = \frac{1}{4R_k} A_k^T \mathbf{P}_k, \quad k = 1, 2. \quad (84)$$

Здесь  $A_k^T$  обозначает транспонированную матрицу  $A_k$ .

Далее мы проводим преобразования

$$q_{j+1} \rightarrow q_j, \quad p_{j+1} \rightarrow p_j, \quad j = 4, 5, 6. \quad (85)$$

Используя интегралы центра масс (3), мы можем перейти к абсолютной системе отсчета.

Обобщение метода Арсета–Заре на случай большего числа тел  $N > 3$  было предложено Микколой и Арсетом [125, 126]. Идея этой «цепочной» регуляризации состоит в том, что система  $N$  тел представляется в виде цепочки, в которую обязательно включается пара (или несколько пар), содержащих два самых близких тела системы. Далее к каждому из звеньев цепочки применяется KS-преобразование. В результате одновременно проводится регуляризация для  $N - 1$  пары тел. Соответствующие преобразования координат и импульсов тел производятся по аналогии с преобразованиями Арсета–Заре [38].

Алгоритмы Арсета–Заре [38] и Микколы–Арсета [125, 126] реализованы в программах Арсета TRIPLE, QUAD и CHAIN, предназначенных для численного решения задач трех, четырех и большего числа тел. Эти программы эффективно используются при численном моделировании динамики кратных звезд ( $N < 20$ ). При исследовании динамики систем большей кратности (например, звездных скоплений) можно применять те же методы при тесных сближениях нескольких звезд, однако необходимо учитывать влияние внешнего возмущающего поля, создаваемого остальными членами звездной системы.

Другой метод регуляризации, отличный от метода Арсета–Заре [38], был предложен в работе Хегги [198]. Хегги [198] проводит KS-преобразования для всех трех взаимных расстояний и предлагает замену времени вида

$$dt = R_1 R_2 R_3 d\tau, \quad (86)$$

где  $R_1, R_2, R_3$  — взаимные расстояния между телами. Наряду с преобразованием (86) Хегги рассмотрел преобразование вида

$$dt = \frac{R_1 R_2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)^{3/2}} d\tau. \quad (87)$$

Полученные Хегги [198] регуляризованные уравнения движения не имеют особенностей при двойных сближениях любых тел, однако

особенность при тройном соударении остается. Уравнения Хегги симметричны для всех трех пар тел и, в отличие от уравнений Арсета–Заре, не требуют введения переобозначений при сближениях разных пар тел.

Заметим, что регуляризация двойных сближений оправдана только при наличии возмущений (например, от третьего тела), поскольку для задачи двух тел известно точное аналитическое решение.

## § 5. Частные решения задачи трех тел

Первые частные решения общей задачи трех тел были найдены во второй половине XVIII века Эйлером и Лагранжем (см., например, книги Дубошина [80] и Маршала [121]).

Лагранж в 1772 году получил **равновесное решение**, когда три тела все время находятся в вершинах равностороннего треугольника и образуют треугольную центральную конфигурацию. Тела вращаются около центра масс тройной системы с угловой скоростью

$$n = \sqrt{\frac{G \sum_{i=1}^3 m_i}{a^3}}, \quad (88)$$

где  $a$  — длина стороны треугольника. В более общем случае в системе координат, связанной с центром масс тройной системы, тела описывают компланарные эллиптические орбиты с одинаковыми эксцентриситетами (см. рис. 2).

Подробный вывод круговых равновесных решений дан Дубошиным [80]. Далее воспроизводятся основные моменты этого вывода.

Рассмотрим движения трех тел в системе координат  $XOY$ , вращающейся с постоянной угловой скоростью  $n$ . Предположим, что взаимные расстояния остаются постоянными все время эволюции и равны величине  $a$ . Тогда из интегралов центра масс (3) и уравнений движения (1) мы получим систему из шести линейных уравнений для координат тел  $x_1, x_2, x_3$  и  $y_1, y_2, y_3$

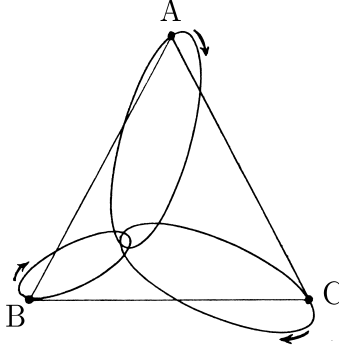


Рис. 2. Лагранжево движение трех тел (рисунок из книги Маршала [121]).

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 m_i x_i &= 0, \\
 -n^2 x_2 + Gm_1 \frac{x_2 - x_1}{a^3} + Gm_3 \frac{x_2 - x_3}{a^3} &= 0, \\
 -n^2 x_3 + Gm_2 \frac{x_3 - x_2}{a^3} + Gm_1 \frac{x_3 - x_1}{a^3} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^3 m_i y_i &= 0, \\
 -n^2 y_2 + Gm_1 \frac{y_2 - y_1}{a^3} + Gm_3 \frac{y_2 - y_3}{a^3} &= 0, \\
 -n^2 y_3 + Gm_2 \frac{y_3 - y_2}{a^3} + Gm_1 \frac{y_3 - y_1}{a^3} &= 0.
 \end{aligned} \tag{89}$$

Система (89) является линейной однородной. Она имеет бесконечное множество решений, отличающихся ориентацией треугольника. Система распадается на две независимых системы для координат  $x_1, x_2, x_3$  и  $y_1, y_2, y_3$ . Для того, чтобы эти системы имели ненулевые решения, необходимо равенство нулю их определителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^3 m_i - \frac{n^2 a^3}{G} = 0, \tag{90}$$

откуда сразу следует формула (88) для угловой скорости вращения тройной системы. Выбирая произвольно значения двух из  $x_i$  и двух из  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), мы получим решение, для которого треугольник остается равносторонним.

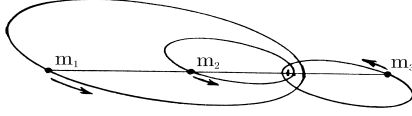


Рис. 3. Эйлерово движение трех тел (рисунок из книги Маршала [121]).

Таким образом, задача трех тел при произвольных значениях масс компонентов допускает точное решение, которое обладает следующими свойствами (Арнольд и др. [34]):

- 1) три тела все время находятся в одной плоскости, неподвижной в барицентрической системе отсчета;
- 2) равнодействующая обеих сил, приложенных к каждому из тел, проходит через центр тяжести всей системы;
- 3) треугольник, образованный тремя телами, является равносторонним;
- 4) траектории трех тел являются подобными друг другу коническими сечениями (окружностями, эллипсами или отрезками прямых) с фокусами в их общем центре масс.

В случае равных масс конические сечения конгруэнтны и смещены на  $120^\circ$  относительно друг друга.

Эйлер показал, что равновесные решения возможны и в случае, когда три тела находятся на одной прямой  $OX$ , вращающейся с угловой скоростью  $n$  (см. рис. 3).

Из условий равновесия и интеграла центра масс во вращающейся системе координат получим три уравнения для координат тел  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 m_i x_i &= 0, \\ -n^2 x_2 + \frac{Gm_1}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{Gm_3}{(x_2 - x_3)^2} &= 0, \\ -n^2 x_3 + \frac{Gm_2}{(x_3 - x_2)^2} + \frac{Gm_1}{(x_3 - x_1)^2} &= 0. \end{aligned} \quad (91)$$

Положим

$$z = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}. \quad (92)$$

Тогда мы можем выразить отношения координат

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{m_3 z - m_3 - m_2}{m_1 + m_3 z}, \\ \frac{x_3}{x_2} &= \frac{m_3 - (m_1 + m_2)z}{m_1 + m_3 z}. \end{aligned} \quad (93)$$

Если взять  $x_2$  произвольным числом, то из (93) мы можем найти координаты  $x_1$  и  $x_3$ , а затем получить выражение

$$n^2 x_1^3 = \frac{G(m_1 z^2 - m_3)(m_3 z^2 + m_1)^2}{\left(\sum_{i=1}^3 m_i\right)^2 z^2}. \quad (94)$$

Исключая  $n^2$  из системы (91), мы получим уравнение 5-ой степени для величины  $z$ :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)z^5 + (3m_1 + 2m_2)z^4 + (3m_1 + m_2)z^3 - \\ - (m_2 + 3m_3)z^2 - (2m_1 + 3m_3)z - (m_2 + m_3) = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень при любых значениях масс тел  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ . Поскольку мы брали значение  $x_2$  произвольно, то существует бесконечное множество решений, когда три тела располагаются на прямой, равномерно вращаясь вокруг общего центра масс. Изменяя порядок расположения масс, мы получаем еще два семейства решений для того же самого отношения масс. В зависимости от начальных условий возможны как круговые, так и эллиптические движения тел.

Частными случаями общей задачи являются **прямолинейная задача** (три тела движутся вдоль одной прямой) и **равнобедренная задача** (тела все время находятся в вершинах равнобедренного треугольника). Подробный анализ движений тел в этих случаях проведен в работах [92, 202, 213] (см. также ссылки в этих статьях). Уравнения движения тел в этих двух случаях при  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  и  $G = 1$  имеют следующий вид:

- для прямолинейной задачи

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -\frac{2}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{(r+\rho)^2}, \\ \ddot{\rho} &= -\frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+\rho)^2};\end{aligned}\tag{96}$$

- для равнобедренной задачи

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -\frac{2}{r^2} - \frac{8r}{(r^2 + 4R^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \ddot{R} &= -\frac{24R}{(r^2 + 4R^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{97}$$

Здесь  $r$  и  $\rho$  — взаимные расстояния между крайними телами и центральным телом в формулах (96),  $r$  и  $R$  — расстояние между компонентами внутренней пары и расстояние центрального тела от центра масс крайних тел в формулах (97). Даже в этих частных случаях пока не удалось найти общих аналитических решений.

Однако возможно исследование движений в некоторых специфических ситуациях, например, в окрестности **тройного соударения** (см., например, [172]). Таникава и Умехара [184] показали, что конфигурация вблизи тройного соударения тел стремится принять предельное положение либо равностороннего треугольника, либо отрезка прямой.

Исследование движений трех тел в этих частных случаях можно свести к изучению динамической системы с двумя степенями свободы.

В рамках описанных выше частных решений задачи трех тел отдельно рассматривают некоторые особые случаи:

- 1) центральные конфигурации (см., например, работы Нежинского [134, 135], Маршала [121] и ссылки в них);
- 2) гомографические решения (см. работы Хиетаринты и Микколы [202], Орлова и др. [142], а также ссылки в них);
- 3) периодические решения (см. работы Шубарта [229], Энона [231] и Брука [47]).

Центральная конфигурация характеризуется постоянными отношениями взаимных расстояний между телами. В этих случаях гравитационные ускорения тел пропорциональны их радиус-векторам  $\mathbf{r}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в барицентрической системе координат

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_j}{dt^2} = -K \mathbf{r}_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (98)$$

Примерами центральных конфигураций являются лагранжевы решения («трилистник», см. рис. 2) и эйлеровы решения (рис. 3). Эти конфигурации называют треугольными и коллинеарными. Все коллинеарные центральные конфигурации (тело с массой  $m_2$  находится между телами с массами  $m_1$  и  $m_3$ ) удовлетворяют следующему условию [121]:

$$\frac{\mathbf{r}_1}{r_{23}^2} + \frac{\mathbf{r}_3}{r_{12}^2} = \frac{\mathbf{r}_2}{r_{13}^2}. \quad (99)$$

Пусть координаты крайних тел заданы так:

$$x_1 = -1, \quad x_3 = +1. \quad (100)$$

Тогда имеет место следующее соотношение между абсциссами центрального тела  $x_2$  и центра масс тройной системы  $x_c$

$$x_c = \frac{x_2^5 - 2x_2^3 + 17x_2}{x_2^4 - 10x_2^2 - 7}. \quad (101)$$

Для трех фиксированных значений масс существуют три и только три коллинеарные центральные конфигурации в соответствии с массой тела  $m_2$ , которое находится между двумя другими телами  $m_1$  и  $m_3$ .

Заметим, что центральные конфигурации являются предельными случаями для тройных соударений (см. книгу Маршала [121]). В окрестности тройного соударения конфигурация системы стремится к одной из центральных конфигураций (коллинеарной или треугольной).

В прямолинейной задаче трех тел к тройному соударению приводят так называемые гомографические решения (см. работу Хие-таринты и Микколы [202] и ссылки в ней). В этом случае все время эволюции до тройного соударения выполнено условие

$$\alpha = \frac{r}{\rho} = \text{const}, \quad (102)$$



где  $r$  и  $\rho$  имеют тот же смысл, что и в формуле (96). Для тел равных масс  $\alpha = 1$ . Если массы тел различны и равны  $m_1, m_2, m_3$  (слева направо), то

$$\alpha = \frac{1+z}{1-z}, \quad (103)$$

где  $z$  — единственный вещественный корень уравнения пятой степени

$$\frac{-m_1 + m_2 z + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{z^5 - 2z^3 + 17z}{z^4 - 10z^2 - 7}. \quad (104)$$

Заметим, что правая часть (104) совпадает с правой частью выражения (101) для центральной коллинеарной конфигурации. Тогда левая часть (104) представляет собой координату центра масс системы трех тел с абсциссами  $-1, z, 1$ .

Для тел равных масс уравнение движения при гомографическом решении ( $r = \rho$ ) имеет вид

$$\ddot{r} = -\frac{5}{4r^2}. \quad (105)$$

Решение последнего уравнения можно записать в неявной форме (см. [142]):

$$\begin{aligned} \pm t = & \frac{5}{2} \sqrt{k(1-k)} - \sqrt{r \left( \frac{5}{2} - r \right)} + \\ & + \frac{5}{4} \left[ \arcsin \left( \frac{4}{5} r - 1 \right) - \arcsin(1 - 2k) \right]. \end{aligned} \quad (106)$$

Здесь полная энергия тройной системы  $E = T - U$ , массы тел  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ,  $k$  — начальное значение вириального коэффициента тройной системы, определяемого как отношение кинетической энергии к модулю потенциальной энергии [начальные скорости крайних тел должны быть равны по величине и противоположны по направлению, в начальный момент времени  $r = \rho = 2.5(1 - k)$ ]:

$$k = \frac{T}{U} = \frac{\dot{r}^2 + \dot{r}\dot{\rho} + \dot{\rho}^2}{3 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{r+\rho} \right)}. \quad (107)$$

При гомографическом решении эволюция тройной системы завершается соударением всех трех тел. Время соударения  $t_c$  зависит

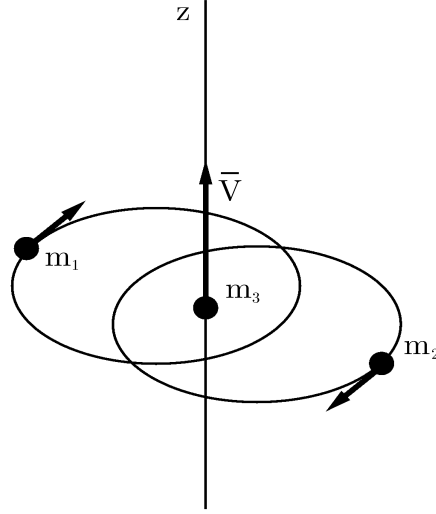


Рис. 4. Задача Ситникова (рисунок из книги Маршала [121]).

от направления скоростей крайних тел. Если эти тела сближаются, то

$$t_c = \frac{5\pi}{8} - \frac{5}{2}\sqrt{k(1-k)} + \frac{5}{4}\arcsin(1-2k). \quad (108)$$

Если крайние тела вначале расходятся, то расстояние между ними достигает максимального значения  $2r = 2\rho = 5$  (скорости равны нулю); затем тела сближаются до соударения. В этом случае суммарное время эволюции

$$t_c = \frac{15\pi}{8} + \frac{5}{2}\sqrt{k(1-k)} - \frac{5}{4}\arcsin(1-2k). \quad (109)$$

Обсудим еще кратко так называемую **обобщенную задачу Ситникова**. В своей работе Ситников [173] рассматривал пространственную ограниченную равнобедренную задачу трех тел, когда тело  $m_3$  нулевой массы движется вдоль прямой, проходящей через центр масс двух других тел  $m_1$  и  $m_2$  равных масс перпендикулярно их орбитальной плоскости (рис. 4).

Возможны различные сценарии эволюции такой системы:

- 1) тело нулевой массы покоится в барицентре тройной системы (решение Эйлера);
- 2) затухающие колебания около барицентра;
- 3) периодические колебания;
- 4) колебания с нарастающей амплитудой, завершающиеся уходом тела нулевой массы;
- 5) колебания с нарастающей амплитудой, но без ухода на бесконечность (осциллирующие движения).

Ситников [173] доказал, что осциллирующие движения существуют не только для нулевой массы центрального тела, но и в случае, когда масса этого тела ненулевая, но малая по сравнению с  $m_1$  и  $m_2$ . В случае осциллирующих движений центральное тело удаляется от плоскости орбиты двойной каждый раз на все большее расстояние, но при этом обязательно возвращается.

Алексеев [10] исследовал задачу Ситникова методами символической динамики. Он доказал, что в этой задаче может быть получено любое решение в зависимости от выбора начальных условий. Реализуются все возможные типы финальных движений по классификации Шази [218] (см. § 7).

## § 6. Ограниченная задача трех тел как предельный случай общей задачи

Частным случаем задачи трех тел является так называемая ограниченная задача. В этом случае два тела с конечными массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся под действием взаимного притяжения, как в обычной задаче двух тел. Третье тело бесконечно малой массы  $m_3$  движется под действием притяжения тел  $m_1$  и  $m_2$ , но не влияет на их движение. Задача исследования состоит в определении движения тела  $m_3$ . Уравнения движения этого тела имеют вид [121]

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = G (m_1 \mathbf{r}_{31} r_{31}^{-3} + m_2 \mathbf{r}_{32} r_{32}^{-3}). \quad (110)$$

Обычно движение тела  $m_3$  рассматривается в системе координат, связанной с центром масс пары  $m_1$  и  $m_2$ . Движение тела  $m_3$  определяется начальными условиями и заданными движениями тел  $m_1$  и  $m_2$ , которые могут быть круговыми, эллиптическими, параболическими, гиперболическими и прямолинейными. Движение тела  $m_3$ , в свою очередь, может быть прямолинейным (как, например, в задаче Ситникова), плоским или пространственным. В зависимости от характера этих двух движений возможны разные постановки ограниченной задачи трех тел. Часто рассматривается плоская круговая ограниченная задача трех тел.

Удобно использовать уравнения движения ограниченной задачи трех тел в системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Пусть движения тел  $m_1$  и  $m_2$  происходят в плоскости  $XU$ , а ось вращения системы координат совпадает с осью  $OZ$ . Тогда уравнения движения тела  $m_3$  в такой вращающейся системе координат имеют следующий вид (см. [121]):

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3 &= G \left( \frac{m_1(x_1 - x_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(x_2 - x_3)}{r_{23}^3} \right) + 2\omega\dot{y}_3 + \omega^2 x_3, \\ \ddot{y}_3 &= -Gy_3 \left( \frac{m_1}{r_{13}^3} + \frac{m_2}{r_{23}^3} \right) - 2\omega\dot{x}_3 + \omega^2 y_3, \\ \ddot{z}_3 &= -Gz_3 \left( \frac{m_1}{r_{13}^3} + \frac{m_2}{r_{23}^3} \right).\end{aligned}\quad (111)$$

Система уравнений (111) выводится из (110). Если орбита двойной  $(m_1, m_2)$  круговая, то удобно принять

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r_{12}^3}.\quad (112)$$

Тогда скорость вращения системы координат совпадает со скоростью вращения двойной. В этом случае во вращающейся системе координат тела  $m_1$  и  $m_2$  располагаются на оси абсцисс и выполняются следующие очевидные соотношения:

$$r_{12} = x_2 - x_1, \quad x_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} r_{12}, \quad x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_{12}.\quad (113)$$

Обычно при изучении ограниченной задачи трех тел единицы длины, массы и времени выбираются так, что

$$r_{12} = 1, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad G = 1.\quad (114)$$

Тогда угловая скорость вращения  $\omega = 1$ , и систему уравнений движения (110) можно записать в векторной форме

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = m_1 \mathbf{r}_{13} \left(1 - \frac{1}{r_{13}^3}\right) + m_2 \mathbf{r}_{23} \left(1 - \frac{1}{r_{23}^3}\right) + \begin{pmatrix} 2y_3 \\ -2\dot{x}_3 \\ -\dot{z}_3 \end{pmatrix}. \quad (115)$$

В круговой ограниченной задаче трех тел имеется интеграл движения, называемый *интегралом Якоби*. Этот интеграл имеет вид

$$\Gamma = J - V^2, \quad (116)$$

где  $V$  — модуль скорости тела  $m_3$  во вращающейся системе координат,  $J$  — *функция Якоби*

$$J = m_1 \left( \frac{2}{r_{13}} + r_{13}^2 \right) + m_2 \left( \frac{2}{r_{23}} + r_{23}^2 \right) - z_3^2. \quad (117)$$

Поверхности  $J = \text{const}$  называют *поверхностями Хилла*, а их пересечения с плоскостью  $XU$  — *кривыми Хилла*. Примеры кривых Хилла представлены на рис. 5. На поверхностях Хилла достигается нулевое значение скорости тела  $m_3$ , однако реальная область орбиты этого тела может быть более узкой.

Функция Якоби достигает минимума  $J = 3$  в треугольных *лагранжевых точках либрации*  $L_4$  и  $L_5$ , имеет три седловые точки, совпадающие с коллинеарными *эйлеровыми точками либрации*  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ , и стремится к бесконечности при приближении тела  $m_3$  к одной из притягивающих масс  $m_1$ ,  $m_2$  и на бесконечности. На рис. 6 показана перестройка областей возможных движений, ограниченных кривыми Хилла, при увеличении постоянной  $\Gamma$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  при  $m_2 < m_1$ .

Подробное изложение результатов аналитических и численных исследований ограниченной задачи трех тел можно найти в монографиях [34, 80, 121, 165].

Общая задача трех тел в основном находит приложения в звездной динамике (кратные звезды), а ограниченная задача и ее модификации (см. ниже) находят применение, главным образом, при изучении динамики тел Солнечной системы и космических аппаратов. Например, движение астероида под действием притяжения Солнца и Юпитера можно исследовать в рамках эллиптической

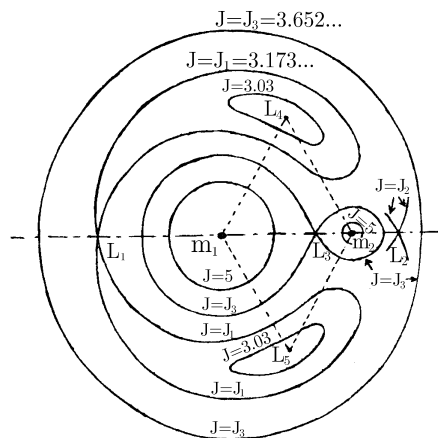


Рис. 5. Вид кривых Хилла для случая  $m_1 = 10m_2$  (из книги Маршала [121]).



Рис. 6. Перестройка областей Хилла с увеличением постоянной Якоби (рисунок из книги Арнольда и др. [34]).

ограниченной задачи трех тел. Динамику естественных и искусственных спутников больших планет с учетом гравитационных возмущений со стороны Солнца, а также взаимных возмущений спутников планет можно изучать в рамках этой задачи.

В литературе рассматривались различные модификации и частные случаи ограниченной задачи трех тел (см. [80]):

- 1) задача двух неподвижных центров,
- 2) задача Хилла,
- 3) копенгагенская задача.

В задаче двух неподвижных центров, поставленной Эйлером, точечные тела конечных масс закреплены в двух неподвижных

точках, а частица нулевой массы движется под действием гравитационного притяжения этих тел. Поместим притягивающие центры с массами  $m_1$  и  $m_2$  на оси абсцисс в точках  $M_1(c, 0, 0)$  и  $M_2(-c, 0, 0)$ . Тогда уравнения движения точки нулевой массы с координатами  $(x, y, z)$  имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -Gm_1 \frac{x-c}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{x+c}{r_{23}^3}, \\ \ddot{y} &= -Gm_1 \frac{y}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{y}{r_{23}^3}, \\ \ddot{z} &= -Gm_1 \frac{z}{r_{13}^3} - Gm_2 \frac{z}{r_{23}^3}.\end{aligned}\tag{118}$$

Здесь  $r_{13}$  и  $r_{23}$  — расстояния от тела нулевой массы до притягивающих центров. Задача двух неподвижных центров нашла применение в теории движения искусственных спутников Земли (см. книгу [80] и ссылки в ней).

В более частном случае, когда движение пробной точки происходит в плоскости  $XU$ , третье уравнение в системе (118) исчезает. Введение новых переменных, связанных с эллиптическими координатами, позволяет найти общий интеграл в квадратурах. Подобные преобразования координат применяли еще Эйлер, Лагранж и Лезандр (см. книгу Дубошина [80]).

Для новых координат система отсчета состоит из семейств софокусных эллипсов и гипербол, фокусы которых находятся в точках  $M_1$  и  $M_2$ . В частности, мы можем рассмотреть безразмерные переменные

$$\lambda = \frac{1}{2c}(r_{13} + r_{23}), \quad \mu = \frac{1}{2c}(r_{13} - r_{23}).\tag{119}$$

Геометрическое место точек  $\lambda = \text{const}$  является эллипсом с фокусами в точках  $M_1$  и  $M_2$  и большой осью, равной  $2\lambda c$ . Геометрическое место точек  $\mu = \text{const}$  является гиперболой с фокусами в тех же точках, вещественная ось которой равна  $2\mu c$ . Значения  $\lambda$  и  $\mu$  удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned}1 &< \lambda < +\infty, \\ -1 &< \mu < 1.\end{aligned}\tag{120}$$

Координаты и скорости третьего тела можно выразить через переменные  $\lambda$ ,  $\mu$  и их производные по времени  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\mu}$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x &= -c\lambda\mu, \\ y &= c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \\ \dot{x} &= -c(\mu\dot{\lambda} + \lambda\dot{\mu}), \\ \dot{y} &= c\left(\sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}\lambda\dot{\lambda} - \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \mu^2}}\mu\dot{\mu}\right). \end{aligned} \quad (121)$$

Можно принять  $\lambda$  и  $\mu$  за новые канонические переменные и определить соответствующие им импульсы

$$\begin{aligned} p_\lambda &= \frac{c^2(\lambda^2 - \mu^2)}{\lambda^2 - 1}\dot{\lambda}, \\ p_\mu &= \frac{c^2(\lambda^2 - \mu^2)}{1 - \mu^2}\dot{\mu}. \end{aligned} \quad (122)$$

Каноническая система уравнений для новых переменных  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $p_\lambda$ ,  $p_\mu$  интегрируется в квадратурах. Интегрирование можно провести при помощи метода Гамильтона–Якоби (см. книги Дубошина [80] и Герасимова [62]). Общий интеграл задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \int \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} + \int \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} &= \sqrt{2}\beta, \\ \int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} + \int \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} &= \sqrt{2}(t - \gamma), \\ p_\lambda &= \frac{\sqrt{2L(\lambda)}}{\lambda^2 - 1}, \\ p_\mu &= \frac{\sqrt{2M(\mu)}}{\mu^2 - 1}. \end{aligned} \quad (123)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= (\lambda^2 - 1) [c^2 E \lambda^2 + Gc(m_1 + m_2)\lambda + \alpha], \\ M(\mu) &= (\mu^2 - 1) [c^2 E \mu^2 + Gc(m_1 - m_2)\mu + \alpha], \end{aligned} \quad (124)$$

где  $E$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — произвольные постоянные интегрирования, причем  $E$  — интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2} V^2 - G \left( \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right), \quad (125)$$



где  $V$  — модуль скорости третьего тела. Движение тела нулевой массы происходит в пределах области возможных движений, границей которой является *кривая нулевой скорости* (кривая Хилла):

$$G \left( \frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} \right) + E = 0. \quad (126)$$

Подробный анализ геометрических свойств области возможных движений и типов траектории в задаче двух неподвижных центров проведен в книгах Дубошина [80] и Герасимова [62].

Задача двух неподвижных центров является частным случаем систем типа *Штеккеля*, для которых переменные в уравнении Гамильтона–Якоби разделяются. При моделировании гравитационного поля галактик задача часто сводится к исследованию систем такого типа.

**Задача Хилла** относится к случаю, когда тело нулевой массы движется в окрестности одного из тел конечной массы  $m_1$  или  $m_2$ . Рассмотрим случай, когда  $m_1 \gg m_2$  и движение тела нулевой массы происходит в окрестности тела  $m_2$  (например, задача «звезда–планета–спутник планеты»). В этом случае удобно использовать следующую систему единиц [121]:

- 1) единица массы  $m_1 = 1$ ,
- 2) постоянная тяготения  $G = 1$ ,
- 3) угловая скорость вращения системы координат  $\omega = 1$ .

Поместим начало координат в точку  $m_2$ . Тогда координаты тела  $m_3$  получаются следующими:

$$\begin{aligned} x &= x_3 - x_2, \\ y &= y_3, \\ z &= z_3. \end{aligned} \quad (127)$$

Уравнения движения тела  $m_3$  в этой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{x}{r^3} + 3x + 2\dot{y} + \varepsilon_1, \\ \ddot{y} &= -\frac{y}{r^3} - 2\dot{x} + \varepsilon_2, \\ \ddot{z} &= -\frac{z}{r^3} - z + \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (128)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = O\left(\frac{r}{m_1}, \frac{r^2}{m_1^{1/3}}\right).$$

Если отношение  $\frac{m_1}{m_2} \gg 1$ , то мы можем пренебречь этими членами и получим уравнения задачи Хилла в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{x}{r^3} + 3x + 2\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{y}{r^3} - 2\dot{x}, \\ \ddot{z} &= -\frac{z}{r^3} - z. \end{aligned} \quad (129)$$

Для задачи Хилла так же, как и для круговой ограниченной задачи трех тел, имеется интеграл Якоби

$$\Gamma = \frac{2}{r} + 3x^2 - z^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = -2E. \quad (130)$$

Задача Хилла является предельным случаем ограниченной задачи трех тел. В ней исчезают две треугольные и одна коллинеарная точки либрации. Остаются только две коллинеарные точки с координатами  $(\pm \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 0, 0)$ .

Области возможных движений (области Хилла) определяются величиной  $E$ . При  $E \geq 0$  область Хилла совпадает со всем пространством. При  $E < 0$  примеры сечений областей Хилла плоскостью  $z = 0$  показаны на рис. 7. Границы областей Хилла имеют асимптоты  $x = \pm (-\frac{2}{3}E)^{1/2}$ . Показанные на рис. 7 области соответствуют значениям  $-E$ , большому, равному и меньшему критического значения потенциала, равного  $3\sqrt[3]{3}/2$ .

В задаче Хилла был обнаружен ряд семейств периодических решений (см., например, [34, 121]). Примеры периодических орбит показаны на рис. 8. Периодические решения в задаче Хилла можно искать в виде отрезков периодических рядов (см., например, [34]).

В плоском случае эти ряды могут иметь вид

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(m) \cos\left[(2n+1)\frac{t}{m}\right], \\ y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(m) \sin\left[(2n+1)\frac{t}{m}\right], \end{aligned} \quad (131)$$

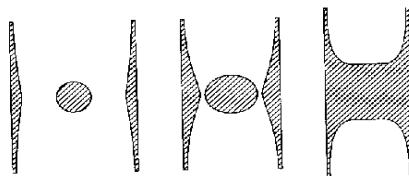


Рис. 7. Сечение областей Хилла плоскостью  $z = 0$  при  $E < 0$  (рисунок из книги [34]).

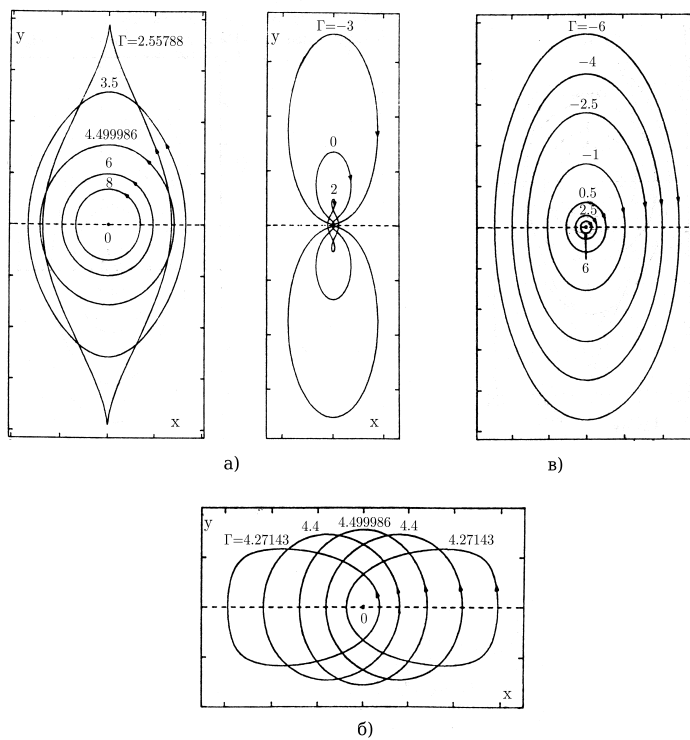


Рис. 8. Примеры периодических решений в задаче Хилла (рисунок из книги [121]).

где  $m = \frac{T}{2\pi}$ ,  $T$  — период. Для этих орбит выполняются условия симметрии:

$$\begin{aligned} x(-t) &= x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right), \\ y(-t) &= -y(t) = y\left(t + \frac{T}{2}\right). \end{aligned} \tag{132}$$

По мнению Маршала [121], задача Хилла представляет собой нечто большее, чем частный случай ограниченной задачи трех тел, и имеет такую же степень общности. Обобщением задачи Хилла является *задача Бока*, в которой рассматривается движение звезды в поле галактики и скопления, обращающегося вокруг центра галактики по круговой орбите.

Еще одним частным случаем ограниченной задачи трех тел является так называемая **копенгагенская задача**. В этой задаче массы главных тел равны  $m_1 = m_2$  (см., например, книгу Себехея [165] и ссылки в ней). Э. Стремгреном и его коллегами численно было обнаружено множество периодических орбит в этой задаче. М. Энон в 60-е годы нашел феномен хаотических движений, которые он первоначально называл *полуэргодическими* (см. ссылки в книге Маршала [121]). Подобные движения были известны еще Пуанкаре, но рассматривались им как нетипичное явление. Примеры траекторий в копенгагенской задаче приведены на рис. 9.

Для упрощения анализа движений Энон использовал *метод сечения Пуанкаре*. При построении этих сечений фиксируется последовательность точек  $(x, \dot{x})$  в моменты пересечения траекторией тела нулевой массы оси  $y = 0$  снизу вверх ( $\dot{y} > 0$ ). Для *регулярных* («квазипериодических») орбит точки на сечении Пуанкаре располагаются на гладких замкнутых кривых.

На сечении Пуанкаре точки, соответствующие квазипериодической орбите, образуют систему «островов» — замкнутых кривых, а точки, соответствующие хаотической орбите, разбросаны случайным образом в некоторой области на плоскости  $(x, \dot{x})$ .

Подобные явления наблюдаются и в общей задаче трех тел (см. ниже). Однако, есть некоторые различия между общей и ограниченной задачами. Во-первых, в произвольной системе трех тел при заданных значениях углового момента и отрицательной полной энергии квазипериодические решения во многих случаях представляют собой «торы Арнольда», которые обладают положительной

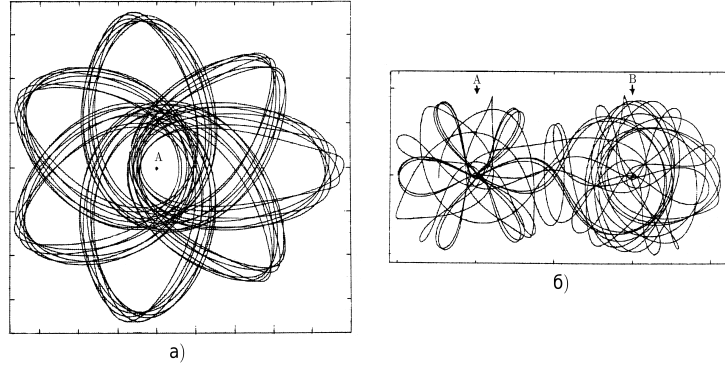


Рис. 9. Примеры траекторий в копенгагенской задаче (рисунок из [121]): а) квазипериодическая орбита, б) хаотическая («полуэргодическая») орбита.

мерой в фазовом пространстве. Во-вторых, наряду с этими торами в фазовом пространстве обнаруживаются три множества орбит [121]:

1. Множества специальных орбит нулевой меры (неустойчивые периодические орбиты, асимптотические орбиты и т.п.).
2. Множество хаотических движений, плотно заполняющих допустимую область.
3. Разбегающиеся гиперболические движения (когда взаимные расстояния пропорциональны времени  $r \sim t$ ) или разбегающиеся параболические движения ( $r \sim t^{2/3}$ ), если область допустимых движений не ограничена.

## § 7. Классификация финальных движений по Шази

Динамическая эволюция тройных систем может приводить к различным *финальным движениям* при  $t \rightarrow \infty$ . Первым начал исследовать типы финальных движений Шази [216–218]. Он описал возможные типы односторонних движений при  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$ . Также он попытался определить возможные сочетания

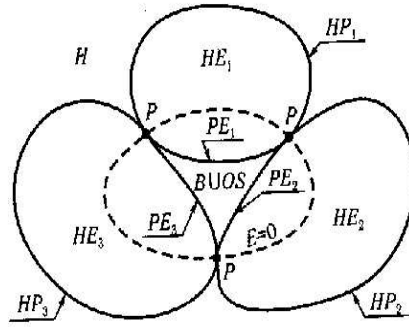


Рис. 10. Графическое представление классификации Шази (рисунок из книги Алексева [10]). Здесь  $E$  — полная энергия тройной системы.

типов движений при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Классификация финальных движений по Шази была подробно разобрана в работе Алексева [9].

Согласно Шази [216] фазовое пространство задачи трех тел можно разбить на следующие подмножества:

1.  $H$  — гиперболические движения.
2.  $HP_i$  — гиперболо-параболические движения.
3.  $P$  — параболические движения.
4.  $HE_i$  — гиперболо-эллиптические движения.
5.  $PE_i$  — парабо-эллиптические движения.
6.  $B$  — ограниченные движения.
7.  $OS$  — осциллирующие движения.

Здесь  $i = 1, 2, 3$  — номера тел. Взаимное расположение этих подмножеств схематически представлено на рис. 10 (см. [9, 10]).

При фиксированных массах трех тел фазовое пространство 18-мерно (9 степеней свободы). Используя интегралы центра масс, мы можем свести задачу к 6 степеням свободы и 12-мерному

фазовому пространству  $\mathbf{M}^{12}$ . Алексеев [9] рассматривает расслоение пространства  $\mathbf{M}^{12}$  на изоэнергетические гиперповерхности  $E = \text{const}$ .

Подмножества  $H$  и  $HP_i$  лежат в области  $E > 0$ ; подмножество  $P$  лежит на гиперповерхности  $E = 0$ ; подмножества  $B$ ,  $PE_i$  и  $OS$  — в области  $E < 0$ . Движения  $HE_i$  возможны при  $E < 0 \cup E > 0$ . Каждое из подмножеств  $H$ ,  $HE_i$  является открытым множеством в пространстве  $\mathbf{M}^{12}$ . Подмножества  $HP_i$  образуют аналитические многообразия коразмерности 1. (*Коразмерность* — разность между размерностью пространства  $\mathbf{M}^{12}$  и размерностью подмножества.) Подмножества  $P$  состоят из трех подмногообразий коразмерности 2 (точки  $P$  на рис. 10) и одного многообразия коразмерности 3.

Класс  $OS$  был введен Шази из логических предпосылок. Он был обнаружен Ситниковым [173] в равнобедренной задаче трех тел. Ситников доказал, что подмножество  $OS$  не пусто.

Представляет интерес возможность смены типа движения при переходе от  $t \rightarrow -\infty$  к  $t \rightarrow +\infty$ . Благодаря работам Шази [217, 218], долгое время считалось, что при  $E > 0$  типы движений при  $t \rightarrow \pm\infty$  должны совпадать, т.е., в частности, невозможен захват при сближении трех одиночных тел. Однако Шмидт [222] построил численный пример частичного захвата  $H^- \cap HE^+$  (верхние индексы соответствуют  $t \rightarrow \pm\infty$ ). В этом примере из трех не связанных между собой в прошлом тел формируется связанная двойная система, а третье тело уходит от нее по гиперболической орбите. Этот пример стимулировал качественный анализ финальных движений в задаче трех тел, в частности получение аналитических критериев различных типов движений.

В табл. 1 и 2 представлены различные возможные переходы типов движений при  $t \rightarrow \pm\infty$  согласно Алексееву [9, 10]. В работе Алексеева [9] приведены ссылки на более ранние публикации, откуда взяты результаты, представленные в этих таблицах. Каждая ячейка в таблицах соответствует одной из возможных комбинаций финальных движений в прошлом и будущем. Также указана лебегова мера соответствующего подмножества в пространстве  $\mathbf{M}^{12}$ .

При  $E > 0$  оказались осуществимы все пять логически возможных типов эволюций. Поскольку подмножества  $H$  и  $HE_i$  открыты, это обеспечивает положительную вероятность (мера  $\mathcal{M} > 0$ ) каждого типа эволюции.

Таблица 1. Сочетание типов финальных движений для тройных систем при  $E > 0$

| $E > 0$                 |          | $t \rightarrow +\infty$             |                                          |
|-------------------------|----------|-------------------------------------|------------------------------------------|
|                         |          | $H^+$                               | $HE_i^+$                                 |
| $t \rightarrow -\infty$ | $H^-$    | $\mathcal{M} > 0$                   | Частичный захват,<br>$\mathcal{M} > 0$   |
| $t \rightarrow -\infty$ | $HE_j^-$ | Полный распад,<br>$\mathcal{M} > 0$ | $i = j$ ,<br>$\mathcal{M} > 0$           |
| $t \rightarrow -\infty$ | $HE_j^-$ | Полный распад,<br>$\mathcal{M} > 0$ | $i \neq j$ , обмен,<br>$\mathcal{M} > 0$ |

Таблица 2. Сочетание типов финальных движений для тройных систем при  $E < 0$

| $E < 0$                 |          | $t \rightarrow +\infty$                              |                                     |                                         |
|-------------------------|----------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------|
|                         |          | $HE_i^+$                                             | $B^+$                               | $OS^+$                                  |
| $t \rightarrow -\infty$ | $HE_j^-$ | $i = j$ ,<br>$\mathcal{M} > 0$                       | Полный захват,<br>$\mathcal{M} > 0$ | $\mathcal{M} > 0$                       |
| $t \rightarrow -\infty$ | $HE_j^-$ | $i \neq j$ , обмен,<br>$\mathcal{M} > 0$             | $\neq \emptyset$                    | $\neq \emptyset$                        |
| $t \rightarrow -\infty$ | $B^-$    | Частич. распад,<br>$\mathcal{M} = 0, \neq \emptyset$ | $\mathcal{M} > 0$                   | $\mathcal{M} = 0$ ,<br>$\neq \emptyset$ |
| $t \rightarrow -\infty$ | $OS^-$   | $\mathcal{M} = 0, \neq \emptyset$                    | $\mathcal{M} = 0, \neq \emptyset$   | $\mathcal{M} = ?$ , $\neq \emptyset$    |

В области  $E < 0$  ситуация существенно сложнее, чем при  $E > 0$ . В частности, не ясно, являются ли множества  $PE_i^\pm$  аналитическими, оставаясь подмногообразиями коразмерности единица [9]. Множества  $HE_i^\pm$  открыты и связны, однако каждое из них сильно «разветвлено» в пространстве  $\mathbf{M}^{12}$ , причем отдельные ветви могут переплетаться друг с другом весьма сложным способом. Биркгоф представлял области  $HE_j^-$  в виде трех потоков, притекающих из бесконечности. Алексеев [9] продолжает аналогию Биркгофа и представляет, что каждый из потоков разбивается на множество «ручейков», пронизывающих фазовое пространство и собирающихся в три вытекающие потока  $HE_j^+$ . Алексеев [9]



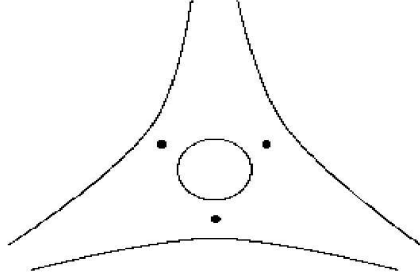


Рис. 11. Качественное представление структуры фазового пространства в задаче трех тел (рисунок из работы Мёкля [124]).

обсуждает вопросы существования в области  $E < 0$  движений типа «обмен» ( $HE_i^- \cap HE_j^+$ ,  $i \neq j$ ) и движений типа «полный захват» ( $HE_i^- \cap B^+$ )  $\cup$  ( $HE^- \cap OS^+$ ). На оба эти вопроса Алексеев [9,10] отвечает утвердительно. Особенно интересной оказалась возможность полного захвата, когда к двойной системе за счет гравитационного взаимодействия присоединяется третье тело, прилетевшее из бесконечности (результаты численных экспериментов по этой проблеме будут обсуждаться ниже).

Структура подмножества  $B^- \cap B^+$  довольно сложная. Она может быть связана с так называемыми условно-периодическими движениями, изучаемыми в КАМ-теории (см., например, [34]). В частности, Арнольдом [31] было показано, что множество  $B^- \cap B^+$  при достаточно малых массах двух из трех тел содержит подмножество положительной меры, состоящее из 5-мерных торов, заполненных траекториями с условно-периодическими движениями. Условно-периодические движения составляют регулярную часть множества  $B^- \cap B^+$ . Однако наряду с ними могут существовать «квазислучайные» движения на множестве  $(B^- \cup OS^-) \cap (B^+ \cup OS^+)$ . Рассмотрение «квазислучайных» движений для задачи Ситникова [173] проведено Алексеевым [9]. Свойства множества осциллирующих движений ( $OS$ ) до сих пор полностью не изучены.

Дальнейший анализ качественных свойств финальных типов движений в задаче трех тел проведен в работе Мёкля [124]. Основным выводом этой работы состоит в том, что наиболее важными «вехами» в задаче трех тел являются движения в окрестности

тройного соударения, на бесконечности и вблизи периодических орбит (в частности, лагранжевых решений). Схематически структура фазового пространства задачи трех тел изображена на рис. 11, заимствованном из статьи Мёкля [124]. Центр круга соответствует тройному соударению тел, точки — лагранжевым движениям, разомкнутые полости — уходам тел на бесконечность. Все множество орбит при заданных значениях интегралов энергии и углового момента располагается в области, ограниченной центральной окружностью и кривыми, уходящими на бесконечность.

## Глава II

# Тройные системы с положительной полной энергией

### § 1. Тройные сближения одиночных звезд и образование двойных систем

Рассмотрим сближение трех одиночных тел по гиперболическим орбитам (при  $t \rightarrow -\infty$  тип движения  $H^-$ ). Тогда полная энергия тройной системы положительна ( $E > 0$ ). При этом возможны два типа финальных движений при  $t \rightarrow +\infty$ :

- 1) гиперболические движения ( $H^+$ ),
- 2) гиперболо-эллиптические движения ( $HE^+$ ).

Шази [217, 218] считал, что возможны только переходы  $H^- \cap H^+$  и  $HE_i^- \cap HE_i^+$ . Однако численные эксперименты Беккера [43] и Шмидта [222] показали, что возможны также переходы  $H^- \cap HE_i^+$ , то есть частичный захват и формирование двойной системы с отрицательной энергией. Ненулевая вероятность захвата была доказана Саакяном [162]. Одновременно Саакян показал, что в галактическом поле вероятность такого события крайне мала. С другой стороны, в звездных скоплениях с высокой плотностью звезд этот механизм формирования двойных может быть более эффективен. Поэтому представляет интерес оценить вероятность захвата в результате сближения трех одиночных звезд в зависимости от параметров сближения для различных звездных полей.

Для оценок вероятности образования двойных при тройных сближениях одиночных звезд Агекян и Аносова [4] ввели понятие

сферы сближения трех звезд. Радиус сферы сближения определяется параметрами звездного поля

$$r = k \frac{G \bar{m}}{V^2}, \quad (133)$$

где  $\bar{m}$  — средняя масса звезды поля,  $\bar{V}^2$  — среднее значение квадрата остаточной скорости звезды поля,  $k$  — безразмерный вириальный коэффициент, равный отношению средней кинетической энергии пекулярных движений звезд поля к модулю характерной потенциальной энергии при сближении трех звезд поля. Величина параметра  $k$  характеризует степень тесноты сближения трех одиночных звезд.

Начало тройного сближения мы можем определить как момент времени, когда все три тела оказываются внутри шара радиуса  $r$ . Агемян и Аносова [4] предложили следующий способ выбора начальных условий для численного моделирования сближений трех одиночных тел. Начало отсчета выбирается в центре сферы тройного сближения радиуса  $r$ . Начальные положения и скорости тел задаются с таким расчетом, что, если тела движутся равномерно и прямолинейно по своим прицельным прямым относительно выбранного начала координат, то в какой-то момент времени все три тела одновременно окажутся внутри сферы сближения. Начальные прямоугольные координаты  $i$ -го тела ( $i = 1, 2, 3$ ) определяются из формул прицельного движения:

$$\begin{aligned} x_i &= \rho_i \cos \phi_i \cos \theta_i + (\cos \alpha_i \sin \phi_i - \sin \alpha_i \cos \phi_i \sin \theta_i) \times \\ &\quad \times V_i(t - t_i), \\ y_i &= \rho_i \sin \phi_i \cos \theta_i - (\cos \alpha_i \cos \phi_i + \sin \alpha_i \sin \phi_i \sin \theta_i) \times \\ &\quad \times V_i(t - t_i), \\ z_i &= \rho_i \sin \theta_i + \sin \alpha_i \cos \theta_i V_i(t - t_i), \end{aligned} \quad (134)$$

где  $\rho_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\phi_i$  — сферические координаты (радиус, широта и долгота) прицельной точки, ближайшей к центру сферы сближения на прицельной прямой;  $\alpha_i$  — угол между вектором скорости  $\mathbf{V}_i$  прицельного движения и вектором нормали к плоскости, проходящей через вектор  $\rho_i$  и ось  $Z$ ;  $t_i$  — момент прохождения  $i$ -го тела через прицельную точку при прицельном движении.

Агемян и Аносова [4], а также Арсет и Хегги [37] рассматривали следующий способ задания параметров тройного сближения с

учетом изотропности всех направлений и равновероятного распределения прицельных расстояний в круге.

1. Углы  $\phi_i$  и  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) распределены равномерно случайно в интервале  $[0, 2\pi]$ .

2. Углы  $\theta_i$  выбирались из промежутка  $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$  с плотностью вероятности

$$f_\theta(\theta_i) = \frac{1}{2} \cos \theta_i. \quad (135)$$

3. Прицельные расстояния  $\rho_i$  распределены в промежутке  $[0, r]$  с плотностью вероятности

$$f_\rho(\rho_i) = \frac{2\rho_i}{r^2}. \quad (136)$$

4. Модули скоростей тел  $V_i \in [0, 4\sqrt{V^2}]$  с плотностью вероятности, соответствующей усеченному максвелловскому распределению

$$f_V(V_i) = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} \frac{V_i^2}{(V^2)^{3/2}} e^{-1.5V_i^2/V^2}. \quad (137)$$

5. Для тела, обладающего наименьшей прицельной скоростью, принималась величина

$$t_i = \frac{15r}{V_i}, \quad (138)$$

для оставшихся тел ( $j \neq i$ ) — величины  $t_j \in [t_i - \frac{r}{V_j}, t_i + \frac{r}{V_j}]$  с равномерным случайным законом распределения.

В работе Агеяна и Аносовой [4] рассматривались два значения величины  $k$ , характеризующей радиус сферы сближения:  $k = \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{3}}$ . В работе Арсета и Хегги [37] рассмотрен более обширный ряд значений  $k$  (см. табл. 3).

Эволюция тройных систем прослеживалась до тех пор, пока одно из взаимных расстояний не становилось больше, чем максимальное начальное расстояние между телами. В этот момент времени проверялся знак полной энергии  $E_b$  двойной системы, образованной компонентами с минимальным взаимным расстоянием. При  $E_b < 0$

Таблица 3. Вероятности  $P$  образования двойных при тройных сближениях и средние эксцентриситеты орбит двойных

| $k$           | $N$            | $P$                 | $\bar{e}$ | Авторы |
|---------------|----------------|---------------------|-----------|--------|
| 1             | 300            | 0.77                | 0.77      | АХ     |
| $2/\sqrt{3}$  | 5000           | 0.103               | 0.73      | АА     |
| 2             | 400            | 0.54                | 0.79      | АХ     |
| $10/\sqrt{3}$ | 1000           | 0.22                | —         | АХ     |
| $10/\sqrt{3}$ | 5000           | 0.023               | 0.77      | АА     |
| 8             | 1000           | 0.14                | 0.80      | АХ     |
| 32            | $10^4$         | 0.015               | 0.85      | АХ     |
| 128           | $10^5$         | $7.7 \cdot 10^{-4}$ | 0.84      | АХ     |
| 512           | $10^6$         | $4.9 \cdot 10^{-5}$ | 0.88      | АХ     |
| 2048          | $5 \cdot 10^6$ | $3.0 \cdot 10^{-6}$ | 0.89      | АХ     |

считалось, что сформировалась двойная система. В табл. 3 приведены вероятности формирования двойных  $P$  — отношения числа образовавшихся пар к общему числу  $n$  рассмотренных вариантов. Также в таблице приведены средние значения  $\bar{e}$  эксцентриситетов образовавшихся двойных. В последнем столбце указаны авторы результатов: АА — Агемян и Аносова [4], АХ — Арсет и Хегги [37]. Из таблицы видно, что возможно образование двойных при тройных сближениях звезд. Вероятность формирования двойной убывает с уменьшением степени тесноты сближения, т.е. с увеличением параметра  $k$ . Арсет и Хегги [37] теоретически показали, что для широких сближений

$$P(r) \propto r^{-2}. \quad (139)$$

Формирующиеся двойные имеют, как правило, сильно вытянутые орбиты — средние эксцентриситеты  $\bar{e} \approx 0.8$ .

Однако имеются существенные количественные различия между результатами Агемяна и Аносовой [4], с одной стороны, и Арсета и Хегги [37] — с другой (см. табл. 3). Причина расхождений оценок вероятностей  $P$  осталась невыясненной. Возможно, она связана с выбором значений  $r$  и  $\bar{V}^2$  [см. формулу (133)]. Из текста работы Арсета и Хегги [37] не ясно, какими там брались  $r$  и  $\bar{V}^2$ .

Дальнейшие численно-экспериментальные исследования тройных сближений одиночных звезд (в том числе, для различных отношений масс сближающихся звезд) были проведены Аносовой

и Кирсановым [26]. Были рассмотрены значения  $r$  и  $\overline{V^2}$  в интервале  $[1, 90/\sqrt{3}]$  при  $G = 1$  и средней массе тел  $\overline{m} = 1$ . Всего было исследовано около 70 000 тройных сближений. Оказалось, что вероятность образования двойной зависит, главным образом, от произведения  $r\overline{V^2}$ . Была найдена эмпирическая зависимость между  $P$  и этим произведением:

$$P = (0.90 \pm 0.15) - (0.27 \pm 0.12) \log_3(r\overline{V^2}). \quad (140)$$

При одних и тех же значениях произведения  $r\overline{V^2}$  вероятности  $P$  для сближений тел разных масс несколько меньше, чем для тел одинаковых масс, а формирующиеся пары в среднем шире. Эксцентриситеты образующихся двойных в среднем составляют  $\bar{e} \approx 0.8 \pm 0.2$  в согласии с результатами Арсета и Хегги [37]. Максимум распределения эксцентриситетов приходится на интервал  $(0.9, 1)$ .

Отметим, что процесс формирования двойных в результате сближений трех одиночных звезд, вероятно, не играет существенной роли в галактическом поле (см., например, Саакян [162]). Однако этот процесс может быть существенным для динамической эволюции центральных областей звездных скоплений и плотных малых групп звезд, где вероятность тройных сближений, приводящих к образованию двойных звезд, значительно выше. С другой стороны, образующиеся двойные, как правило широкие, не сильно влияют на ход эволюции самих скоплений (см. Арсет и Хегги [37]); в результате эволюции любое скопление распадается. Таким образом, в результате сближений трех одиночных звезд могут формироваться двойные системы. Это является одним из механизмов формирования двойных в звездном поле и звездных скоплениях.

## § 2. Эволюция двойных систем в звездном поле

Можно представить несколько способов формирования двойных систем:

- 1) совместное образование компонентов двойной системы;
- 2) распад малых групп звезд или звездных скоплений;
- 3) сближения трех и более одиночных звезд.

После формирования двойные звезды могут испытывать сближения с одиночными звездами поля, а также с другими двойными и кратными системами. Если речь идет о реальных звездах, то следует учитывать дополнительные эффекты:

- звездная эволюция компонентов (в частности вспышки звезд);
- внешние поля (например, регулярное поле Галактики, сближения с массивными объектами и т.п.);
- приливные взаимодействия компонентов при тесных сближениях и т.д.

Рассмотрим сближение двойной системы с одиночной звездой поля по относительной гиперболической орбите. Возможны различные исходы этого события:

- 1) пролет звезды поля с сохранением двойной системы (fly-by);
- 2) разрушение двойной системы с образованием трех одиночных звезд (ionization);
- 3) замена одного из компонентов двойной системы на звезду поля (exchange или re-charging);
- 4) временный захват звезды поля и образование тройной системы (capture).

Следует отметить, что постоянный захват звезды поля имеет нулевую вероятность, если нет диссипации энергии.

Статистически эволюция двойной в звездном поле зависит от отношения модуля ее полной энергии  $E_b$  к средней кинетической энергии  $T$  звезд поля (см., например, Гуревич и Левин [73]):

- если  $|E_b|/T < 1$  (широкая двойная), то, как правило, за счет сближений со звездами поля двойная становится шире и в конце концов разрушается;
- при  $|E_b|/T > 1$  (тесная двойная) двойная в среднем становится теснее и ее эволюция завершается слиянием компонентов.

Обширное приближенное аналитическое исследование эволюции двойных за счет сближений с одиночными звездами было выполнено в работах Хегги [199], а также Хегги и Хута [200]. В этих



работах получены оценки вероятностей различных исходов сближений в зависимости от масс тел, прицельного расстояния, скорости прохождения одиночного тела и элементов орбиты двойной.

Численное моделирование сближений двойных систем с одиночными звездами было начато в 60-е годы XX века (см. работы Ябуситы [232], Агекияна и Аносовой [3], Агекияна и Примака [7]). В дальнейшем было опубликовано большое количество работ на эту тему (см., например, ссылки в обзорах Аносовой и Орлова [22], Аносовой [15], Валтонена [49], Валтонена и Микколы [53], а также в монографиях Арсета [35], Валтонена и Карттунена [52]).

Начальные условия для численного моделирования сближений задаются в 18-мерном фазовом пространстве положений и скоростей трех тел, а также в трехмерном пространстве их масс. Согласно Хуту и Бакаллу [209] с помощью интегралов движения и подходящей параметризации задачу выбора начальных условий можно свести к заданию 9 независимых переменных. Хут и Бакалл [209] предлагают использовать в качестве этих переменных параметры, представленные в табл. 4 и на рис. 12.

Систему отсчета удобно связать с центром масс двойной системы. Систему единиц можно выбрать следующим образом:

- постоянная тяготения  $G = 1$ ,
- сумма масс компонентов двойной системы  $m_1 + m_2 = 1$  ( $m_2 \leq m_1$ ),
- большая полуось орбиты двойной  $a = 1$ .

Пространство начальных условий имеет высокую размерность ( $n = 9$ ), поэтому детальное сканирование области начальных условий невозможно из-за непомерных затрат вычислительных ресурсов. Поэтому выбираются некоторые наиболее существенные параметры (например, массы звезд  $m_2$  и  $m_3$ , эксцентриситет орбиты  $e$ ). Другие параметры изменяются в определенных интервалах с использованием метода Монте-Карло. Например, относительная скорость подлета одиночного тела  $v \in [v_{\min}, v_{\max}]$  с плотностью вероятности  $f_1(v) = \text{const}$ , а прицельное расстояние  $\rho \in [0, \rho_{\max}]$  с  $f_2(\rho) \sim \rho$  (равномерно случайно в круге).

Таблица 4. Параметризация начальных условий для сближения двойной системы и одиночной звезды

| Параметр | Интервал      | Описание                                                                              |
|----------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $m_2$    | $[0, 0.5]$    | Масса более легкого компонента двойной                                                |
| $m_3$    | $[0, \infty)$ | Масса одиночной звезды                                                                |
| $e$      | $[0, 1)$      | Эксцентриситет орбиты двойной                                                         |
| $v$      | $[0, \infty)$ | Скорость одиночной звезды относительно центра масс двойной                            |
| $p$      | $[0, \infty)$ | Прицельное расстояние                                                                 |
| $\phi$   | $[0, 2\pi)$   | Азимут прицельной точки                                                               |
| $\theta$ | $[0, \pi/2]$  | Полярный угол прицельной точки                                                        |
| $\psi$   | $[0, 2\pi)$   | Угол ориентации прицельного движения                                                  |
| $f$      | $[0, 2\pi)$   | Истинная аномалия двойной в момент прохождения одиночной звезды через перигейт орбиты |

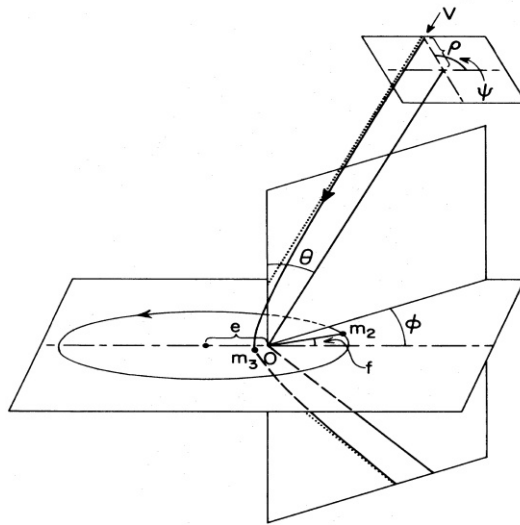


Рис. 12. Иллюстрация к выбору начальных условий для сближения двойной системы со звездой поля.

Угловые параметры, как правило, выбираются случайным образом в интервалах возможных значений:

- углы  $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$  с постоянной плотностью вероятности  $f_3(\phi) = f_4(\psi) = \frac{1}{2\pi}$ ;
- угол  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  с плотностью вероятности  $f_5(\theta) = \sin \theta$ ;
- истинная аномалия при условии, что плотность вероятности эксцентрической аномалии  $f_6(E) \sim 1 - e \cos E$ , т.е. средняя аномалия распределена равномерно случайно.

Результат сближения одиночной звезды с двойной должен зависеть от скорости подлета  $v$ . В частности, максимальное прицельное расстояние  $\rho_{\max}$  должно быть больше для меньших скоростей  $v$  из-за эффекта гравитационной фокусировки:  $\rho_{\max} \sim v^{-1}$ . Чтобы учесть этот эффект, Хут и Бакалл [209] предлагают задавать  $\rho_{\max}(v)$  в следующем виде

$$\rho_{\max}(v) = \left( \frac{C}{v} + D \right) a, \quad (141)$$

где постоянные  $C$  и  $D$  выбираются подходящим образом в зависимости от того процесса, который мы изучаем. Например, для процесса разрушения (ионизации) двойной эти авторы предлагают использовать значения  $C = 4$  и  $D = 0.6(1 + e)$ . Эти константы определяются из тестовых вычислений так, чтобы обеспечить охват всех начальных условий, приводящих к ионизации.

Скорость подлета  $v$  удобно задавать в единицах критической (параболической) скорости

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{Gm_1m_2(m_1 + m_2 + m_3)}{m_3(m_2 + m_1)a}}, \quad (142)$$

Для того, чтобы автоматизировать процесс вычислений, необходимо разработать критерий остановки вычислений для данного варианта начальных условий. Хут и Бакалл используют для этой цели среднеквадратическое расстояние между компонентами как функцию времени

$$S(t) = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i < j} r_{ij}^2(t)}, \quad (143)$$

где  $r_{ij}(t)$  — расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м телом. Проверка на прекращение счета для данного варианта начинала производиться после достижения первого минимума функции  $S(t)$ . Вычисления прекращались в одном из четырех случаев.

1. Все три попарные энергии становятся положительными — происходит разрушение двойной (ионизация).
2. Формируется изолированная двойная система, а третье тело уходит от нее по гиперболической орбите — происходит пролет или обмен компонентами в двойной.
3. Функция  $S(t)$  имеет более одного минимума — резонансное рассеяние.
4. Относительная погрешность интеграла энергии (по отношению к первоначальной энергии двойной  $E_b$ ) превышает 1%.

Для представления статистических результатов сближений Хут и Бакалл [209] предлагают использовать аппарат поперечных сечений (cross sections), часто используемый в статистической физике и физике элементарных частиц. Пусть нас интересует вероятность того или иного исхода  $X$  (например, ионизации или обмена). Из тестовых вычислений мы получаем верхнюю оценку  $\rho_{\max}(v, e)$  прицельного расстояния, при котором такой исход возможен. Затем определяется поперечное сечение для данного исхода  $X$  как

$$\sigma_X(v, e) = \pi \rho_{\max}^2(v, e) \frac{n_X(v, e)}{n_{\text{tot}}(v, e)}, \quad (144)$$

где  $n_X(v, e)$  — число экспериментов, приведших к исходу  $X$ ,  $n_{\text{tot}}(v, e)$  — полное число экспериментов, равное

$$n_{\text{tot}} = n_X + n_{\text{oth}} + n_{\text{und}}, \quad (145)$$

где  $n_{\text{oth}}$  — число вариантов исходов, отличных от  $X$ ,  $n_{\text{und}}$  — число вариантов, исход которых остался не ясным (например, время эволюции превышает некоторое предельное значение). Обычно проводилась нормировка поперечных сечений на площадь круга с радиусом, равным большой полуоси  $a$  начальной двойной. Примеры поперечных сечений для трех разных исходов (ионизация, обмен, резонансное рассеяние) представлены на рис. 13.

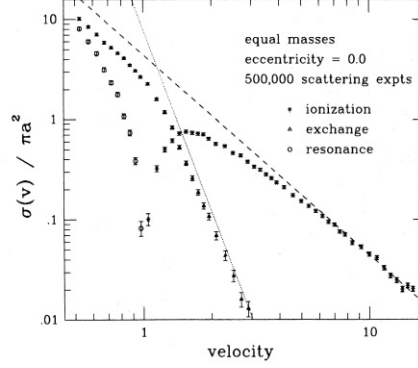


Рис. 13. Примеры поперечных сечений в зависимости от скорости сближения  $v$  (рисунок из [209]).

В этих примерах массы тел равны, начальный эксцентриситет двойной  $e = 0$ . Ионизация возможна только при  $v > v_{\text{crit}}$ . Сечение ионизации  $\sigma_{\text{ion}}(v)$  достигает максимальной величины для  $v \approx 2v_{\text{crit}}$ ; при дальнейшем увеличении  $v$  функция  $\sigma_{\text{ion}}(v)$  монотонно убывает, стремясь к нулю при  $v \rightarrow \infty$ . Хотя даже при больших  $v$  (скажем, при  $v > 10v_{\text{crit}}$ ) вероятность разрушения двойной отлична от нуля. Сечение  $\sigma_{\text{ex}}(v)$  для обменов является монотонно убывающей функцией скорости, причем при  $v > 3v_{\text{crit}}$  обменов не зафиксировано. Для резонансного рассеяния сечение  $\sigma_{\text{res}}(v)$  также монотонно убывает с ростом  $v$  от нуля до  $v_{\text{crit}}$ . Когда  $v > v_{\text{crit}}$ , случаев резонансного рассеяния не отмечено.

Хегги и Хут [200] предложили ряд аналитических аппроксимаций для функций  $\sigma_X(v)$  при больших скоростях подлета  $v \gg v_{\text{crit}}$ . Эти аппроксимации для сечений ионизации и обмена изображены на рис. 13 тонкими линиями (штриховой и состоящей из точек). Для тел равных масс эти аппроксимации не зависят от начального эксцентриситета  $e$  и имеют следующий вид [209]:

$$\frac{\sigma_{\text{ion}}(v)}{\pi a^2} = \frac{40}{9v^2}, \quad \frac{\sigma_{\text{ex}}(v)}{\pi a^2} = \frac{640}{81v^6}. \quad (146)$$

Для  $\sigma_{\text{res}}(v)$  не удается получить простой аналитической аппроксимации.

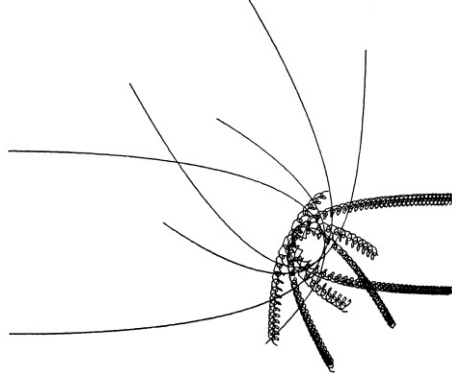


Рис. 14. Пример иерархического резонансного рассеяния (рисунок из статьи [208]).

В случае резонансного рассеяния, когда полная энергия тройной системы отрицательна ( $E < 0$ ), ионизация невозможна. Поэтому могут иметь место только обмен компонентами в начальной двойной и пролет одиночного тела. В отличие от обычного гравитационного рассеяния с одним минимумом функции  $S(t)$  (143) в ходе резонансного рассеяния, как правило, наблюдается большое число ( $\sim 10 \div 100$ ) минимумов  $S(t)$  (см., например, Хут [208]). Формирующиеся временные тройные системы, как правило, имеют большое время жизни  $T_{\text{res}}$ . Медиана  $T_{\text{res}}$  составляет примерно  $500 T_{\text{orb}}$ , где  $T_{\text{orb}}$  — начальный период двойной, причем примерно в 10% случаев  $T_{\text{res}} > 12\,000 T_{\text{orb}}$ . Движения в образующихся тройных системах могут иметь очень сложный характер с большим числом сближений и выбросов тел.

Хут [208] рассматривает два типа резонансного рассеяния:

- 1) иерархическое,
- 2) демократическое.

Примеры представлены на рис. 14 и 15.

При **иерархическом** резонансном рассеянии формирующаяся тройная система имеет сильно иерархическую структуру (рис. 14):

$$a_{\text{ex}}(1 - e_{\text{ex}}) \gg a_{\text{in}}(1 + e_{\text{in}}), \quad (147)$$

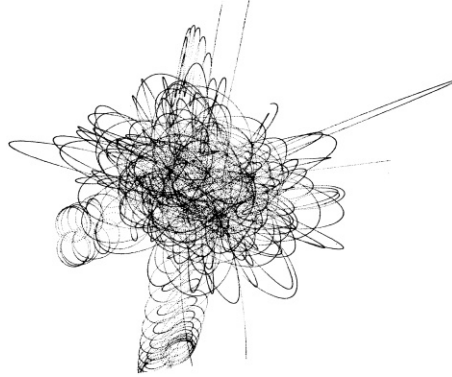


Рис. 15. Пример демократического резонансного рассеяния (рисунок из статьи [208]).

где  $a_{\text{ex}}$  и  $e_{\text{ex}}$  — большая полуось и эксцентриситет внешней двойной, образованной одиночным телом и центром масс внутренней (первоначальной) двойной;  $a_{\text{in}}$  и  $e_{\text{in}}$  — те же элементы орбиты внутренней двойной. **Демократическое** рассеяние приводит к образованию тройной системы со сложными хаотическими движениями (рис. 15). Характер резонансного рассеяния определяется, главным образом, угловым моментом внешней двойной: при большом угловом моменте происходит иерархическое рассеяние, а при малом — демократическое.

Примеры сечений для разных исходов в случае резонансного рассеяния приведены на рис. 16.

В этом случае Хут [208] выделяет три категории исходов:

1. Обмен компонентами с первоначальной тесной двойной без промежуточной фазы формирования временной тройной системы (*нерезонансный*, или «прямой», обмен).
2. Обмен компонентами в результате образования временной тройной системы (*резонансный обмен*).
3. Сохранение первоначальной двойной после захвата звезды поля и формирования временной тройной системы (*резонансный пролет*), в результате взаимодействия уходит та же самая одиночная звезда, которая испытывала сближение с двойной.

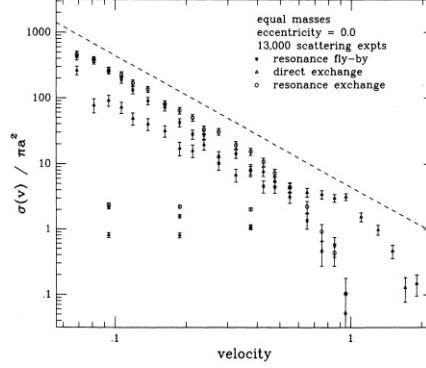


Рис. 16. Пример сечений для резонансного рассеяния (рисунок из [208]).

Из рис. 16 видно, что с увеличением скорости  $v$  одиночной звезды уменьшаются сечения обмена (как прямого, так и резонансного).

Наряду с поперечными сечениями (144) для различных исходов сближений Хут и Бакалл [209] рассматривают так называемые *дифференциальные сечения*, определяемые изменениями энергии первоначальной двойной в случаях пролета. Относительное изменение энергии двойной определяется величиной

$$\Delta = \frac{E_b(t \rightarrow +\infty) - E_b(t \rightarrow -\infty)}{E_b(t \rightarrow -\infty)}, \quad (148)$$

где  $E_b(t \rightarrow \pm\infty)$  — полные энергии связи начальной (до сближения) и финальной (после пролета) двойных.

Рассмотрим зависимости

$$\frac{d\sigma}{d\Delta}(\Delta; v, e) \quad (149)$$

для определения вероятностей изменения энергии пары с эксцентриситетом  $e$  при пролетах. Оказалось [208], что зависимости (149) сохраняют примерно один и тот же вид для круговых орбит ( $e = 0$ ), сильно вытянутых орбит ( $e = 0.99$ ) и орбит с умеренным эксцентриситетом ( $e = 0.7$ ). Вероятность относительных изменений энергии двойной в интервале  $\Delta \in (\Delta_1, \Delta_2)$  определяется интегралом

$$\int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{d\sigma}{d\Delta} d\Delta. \quad (150)$$



Величины (150) можно оценить с помощью численного интегрирования большого числа орбит для сближений одиночных звезд с двойными.

Хут [207] рассматривает зависимости

$$P(\Delta|v) \equiv \frac{v^2}{\pi a^2} \frac{d\sigma}{d\Delta}(|\Delta|) \quad (151)$$

для случаев увеличения ( $\Delta > 0$ ) и уменьшения ( $\Delta < 0$ ) тесноты двойной. Зависимости (151) называют *дифференциальными поперечными сечениями* (differential cross sections). Множитель  $v^2$  в (151) появляется из-за эффекта гравитационной фокусировки, так как из интеграла площадей  $\rho v = \text{const}$  следует

$$\rho \sim v^{-1}. \quad (152)$$

Величина  $v$  в (151) выражена в единицах критической скорости  $v_{\text{crit}}$  (142) для того, чтобы величина  $P(\Delta|v)$  была безразмерной. На рис. 17 показаны примеры зависимостей (151) в случае равных масс при  $e = 0$  для интервалов скоростей подлета  $v$ , выраженных в единицах критической скорости  $v_{\text{crit}}$  (142). Заметим, что при равных массах  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  величина

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{3Gm}{2a}}. \quad (153)$$

Из рисунка видно, что дифференциальное сечение убывает с ростом  $\Delta$  независимо от знака  $\Delta$ . При значениях  $\Delta > 0.1$  зависимости (151) можно аппроксимировать следующими законами [199]:

$$\frac{v^2}{\pi a^2} \frac{d\sigma}{d\Delta} \sim (1 + |\Delta|)^{-4.5}. \quad (154)$$

Эти кривые для двух значений коэффициента пропорциональности приведены на рис. 17 пунктирными линиями и линиями, состоящими из точек. Аппроксимация (154) основана на результатах численных экспериментов.

При малых значениях  $\Delta < 0.1$  результаты численного моделирования и аналитические аппроксимации вида (154) не согласуются. Ряд новых аналитических аппроксимаций дифференциальных сечений получен в работе Хегги и Хута [200].

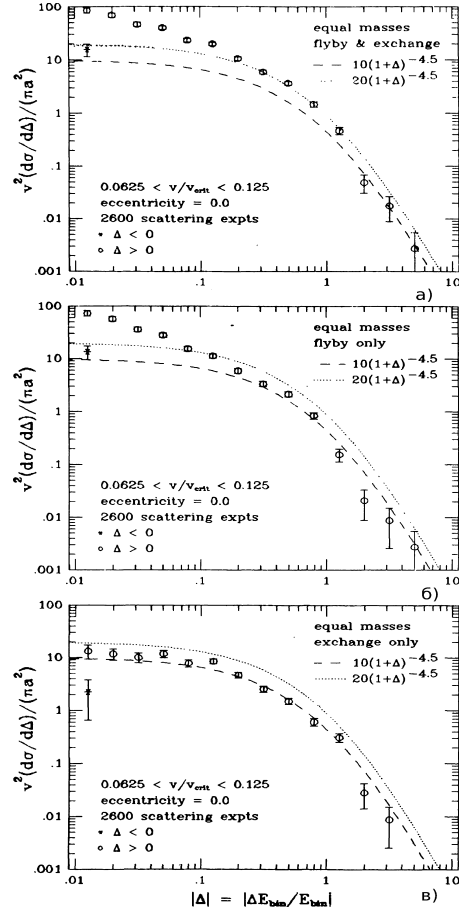


Рис. 17. Примеры дифференциальных поперечных сечений (рисунок из работы Хута [207]).

На результат отдельного сближения одиночной звезды с двойной влияет начальная фаза двойной, определяемая, например, истинной аномалией  $f$ . Хут [206] подробно исследовал эту зависимость. Он рассмотрел сближения с прицельным расстоянием  $\rho$  и скоростью  $v$ , зафиксировав начальное расстояние  $R = 40r$  от одиночного тела до прицельной точки (см. рис. 18) при  $r = a/2$ . Мас-

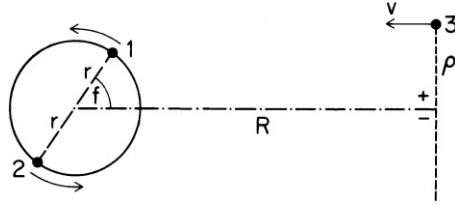


Рис. 18. Задание начальных условий сближения в работе Хута [207].

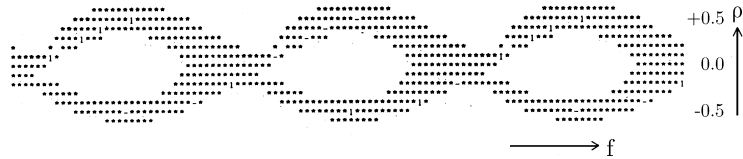


Рис. 19. Зависимость исхода сближения от  $f$  и  $\rho$  при  $v = 8v_{\text{crit}}$  (рисунок из работы Хута [206]). Пробелы соответствуют пролетам, звездочки — ионизации, единицы — обменам звезды поля со звездой 1, штрихи — обменам со звездой 2 (см. рис. 18).

сы тел одинаковы, и начальный эксцентриситет двойной  $e = 0$ . На рисунке знак «+» соответствует области прямых движений, а знак «-» — обратным движениям.

При нескольких фиксированных значениях скорости  $v$  были построены зависимости результата исхода сближения от прицельного расстояния  $\rho$  и истинной аномалии  $f$  в момент начала сближения. На рис. 19–22 показаны четыре примера таких зависимостей. Величина  $f$  меняется слева направо от  $0^\circ$  до  $540^\circ$  с шагом  $5^\circ$ . Заметим, что из-за симметрии задачи вычисления проводились только в интервале  $0^\circ \leq f \leq 180^\circ$ . Ионизация возможна только при положительной полной энергии для  $v > v_{\text{crit}}$ , тогда как пролеты и обмены возможны при любой энергии. Резонансное рассеяние наблюдается только для отрицательной энергии ( $v < v_{\text{crit}}$ ). Все рассмотренные варианты резонансного рассеяния (образования временной тройной системы) завершились уходом либо звезды поля, либо одного из компонентов первоначальной двойной.

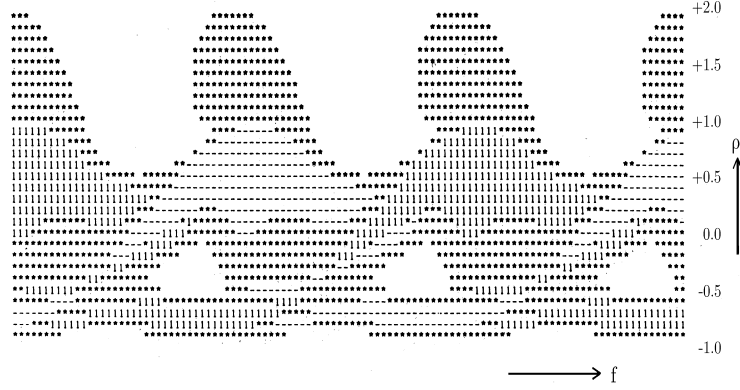


Рис. 20. Зависимость результата сближения от  $f$  и  $\rho$  при  $v = 2v_{\text{crit}}$  (рисунок из работы Хута [206]). Обозначения те же, что и на рис. 19.

Хут [206] обсуждает топологические особенности областей ухода на плоскости  $(f, \rho)$  и приходит к следующим главным выводам.

1. При  $v \gg v_{\text{crit}}$  выделяются две полосы ионизации, приблизительно симметричные относительно прямой  $\rho = 0$  (см. рис. 19). Полосы концентрируются вдоль линий

$$\rho(f) = \pm r \cos(f + f_0), \quad (155)$$

где  $f_0$  — постоянный сдвиг по фазе, величина которого, в принципе, может быть любой. При  $v \rightarrow +\infty$  полосы становятся более узкими и симметричными. Характерная ширина полос в вертикальном направлении приблизительно равна  $\frac{2\sqrt{5}}{3}av^{-1} + O(v^{-2})$ . Асимметрия полос определяется членом второго порядка малости относительно  $v^{-1}$ .

2. При  $v \rightarrow \infty$  внутри полос ионизации наблюдаются узкие полосы, соответствующие обменов звезды поля на один из компонентов двойной, причем ширина полос обмена примерно равна  $\frac{8\sqrt{5}}{9}av^{-3} + O(v^{-4})$ . Эти полосы никогда не пересекаются, вместо этого одна из полос иногда испытывает бифуркацию так, что в малой области изменения  $f$  имеются три полосы:

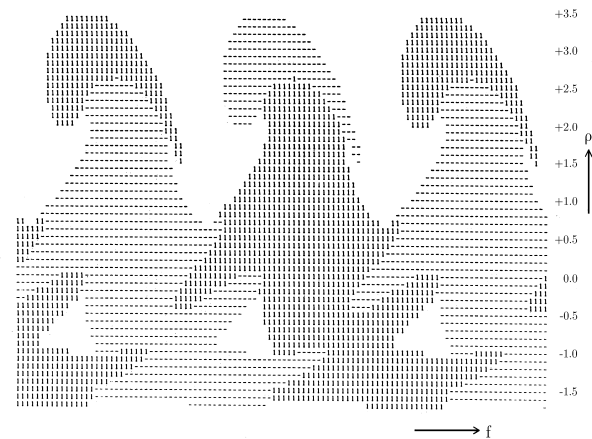


Рис. 21. Зависимость результата сближения от  $f$  и  $\rho$  при  $v = v_{\text{crit}}$  (рисунок из работы Хута [206]). Обозначения те же, что и на рис. 19.

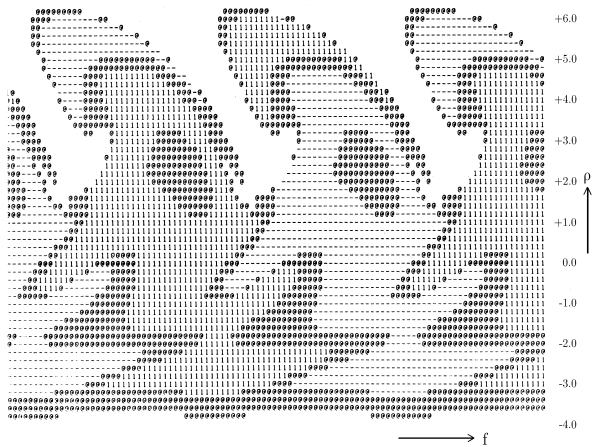


Рис. 22. Зависимость результата сближения от  $f$  и  $\rho$  при  $v = 0.5 v_{\text{crit}}$  (рисунок из работы Хута [206]). Обозначения те же, что и на рис. 19. Значки «@» обозначают резонансное рассеяние.

центральная полоса соответствует обмену с одним из компонентов двойной, а две боковые полосы — обмену с другим компонентом.

3. Для систем с положительной энергией все «острова» пролетов и обменов на плоскости  $(f, \rho)$  отделены друг от друга «реками» ионизации.
4. При отрицательной полной энергии ( $v < v_{\text{crit}}$ ) все «острова», соответствующие «прямым» обмену или пролету (без образования временной тройной системы), отделяются друг от друга «реками» резонансного рассеяния.
5. При  $v < v_{\text{crit}}$  конечный отрезок на плоскости  $(f, \rho)$  может пересекать бесконечное число областей, соответствующих различным исходам. Такая ситуация типична вблизи границ областей резонансного рассеяния. Для положительной энергии, как правило, число таких областей конечно, за исключением окрестностей тройных соударений.

### § 3. Сопоставление гравитационной и квантово-механической задач трех тел

Задача о рассеянии частиц встречается также в атомной физике. Поэтому ряд квантово-механических терминов (например, ионизация, частичный захват, резонансное рассеяние) нашли применение и в задачах о гравитационном рассеянии (см., например, статью Хута и Бакалла [209]).

Однако имеет место ряд принципиальных различий между гравитационным и квантово-механическим рассеянием. В частности, квантово-механические системы обладают большим числом пространственных симметрий на низких энергетических уровнях. Это свойство позволяет значительно сократить число рассматриваемых независимых переменных по сравнению с гравитационным рассеянием. Для случая гравитационного рассеяния, как было отмечено в предыдущем параграфе, число независимых переменных равно 9, и это число нельзя уменьшить изменением масштаба или специальным выбором системы координат. Результат акта рассеяния сильно зависит от начальных условий, в частности, от фазы орбиты двойной и углов ориентации орбит.

Кроме того, в квантово-механических системах нестационарные состояния быстро «высвечиваются». Наконец, в квантовой механике существует суперпозиция состояний. Отметим, что и тесные двойные звезды могут «высвечиваться» за счет гравитационного излучения.

С другой стороны, существует ряд общих свойств процессов рассеяния, встречающихся в атомной физике и звездной динамике [209]. В частности, такие процессы как ионизация, резонансное рассеяние и перезарядка имеют аналоги в гравитационном рассеянии, изучаемом в звездной динамике. Кроме того, согласно принципу соответствия Бора, для высоких энергетических уровней квантово-механический подход к изучению атомных процессов должен асимптотически переходить в классический механический подход.

Этот переход возобновил интерес к работам, в которых для изучения атомных систем используется классический подход (classical atomic scattering). Несколько ссылок на такие работы можно найти в статье Хута и Бакалла [209].

Заметим, что между электростатикой и гравитацией существует принципиальное различие, связанное с различием знака взаимодействия. Если задача двух тел описывается в нерелятивистском случае однотипными формулами (планетарная модель атома Резерфорда–Бора), то для задачи трех тел никакая перенормировка масс и зарядов не сведет электростатику к гравитации, поскольку в электростатике наряду с притяжением разноименных зарядов имеет место отталкивание одноименных зарядов.

Помимо квантово-механических эффектов, существует значительное различие между классической электродинамикой и ньютоновской теорией гравитации. Нейтральные атомы вне их непосредственной окрестности влияют на заряженные частицы только посредством приливных сил, тогда как в гравитационной физике из-за отсутствия «нейтрализации зарядов» двойные системы оказывают влияние на другие тела на больших расстояниях от их центра масс. В электродинамике заряд и масса не связаны между собой, в то время как в теории гравитации инертная и гравитационная массы имеют одно и то же значение. В звездной динамике отношение масс тел может быть произвольным, а в атомной физике оно фиксировано (например, отношение масс протона и электрона является мировой константой).

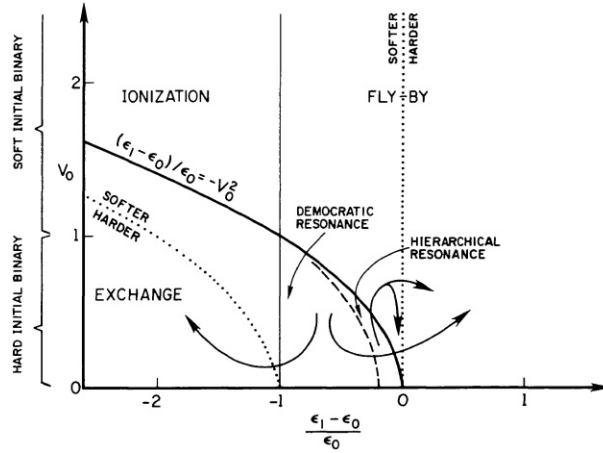


Рис. 23. Схема классификации сценариев гравитационного рассеяния (рисунок из [200]).

Основываясь на аналогии с атомным рассеянием, описанные выше свойства гравитационного рассеяния можно представить на качественном уровне следующим образом [200]. Обозначим через  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$  первоначальную и финальную энергии двойной системы. Условие сохранения двойной

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} > -v_0^2, \quad (156)$$

где  $v_0$  — безразмерная начальная скорость одиночного тела, выраженная в единицах  $v_{\text{crit}}$  (142). На рис. 23 схематически представлена классификация событий, которые могут иметь место в результате гравитационного рассеяния, согласно Хегги и Хуту [200]. Стрелки на рисунке показывают возможные переходы между различными типами движений в прошлом и будущем.

Заметим, что величина  $v_0^2 + \Delta$  является мерой энергии связи двойной системы, образованной в результате акта гравитационного рассеяния. Если  $v_0^2 + \Delta < -1$ , то новая двойная теснее, чем первоначальная. В противном случае новая двойная шире, чем начальная.

Различные классы рассеяния (прямое, демократическое, иерархическое), а также образование и разрушение двойной при разных знаках полной энергии тройной системы ( $E < 0$ ,  $E = 0$ ,



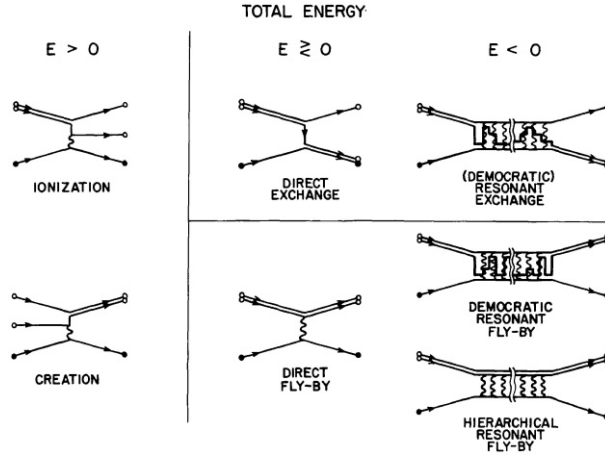


Рис. 24. Символические диаграммы для различных классов гравитационного рассеяния (рисунок из [200]).

$E > 0$ ) можно представить схематически с помощью диаграммы на рис. 24 [200]. Светлые кружки на рисунке обозначают компоненты двойной (первоначальной или сформированной), темные кружки соответствуют одиночным звездам. Если две звезды образуют связанную двойную, то их схематические изображения траекторий сближены. Волнистыми линиями условно показаны сильные гравитационные возмущения. Подобные диаграммы строятся и в атомной физике и статистической механике.

Кроме того, в работе Хегги и Хута [200] представлена классификация гравитационного рассеяния в соответствии с различными приближенными методами исследования сближений (см. рис. 25), некоторые из которых используются и в физике частиц.

Заметим, что ограничение  $\Delta > -v^2$  вытекает из того, что уменьшение энергии двойной не может превосходить начальную кинетическую энергию движения одиночной звезды относительно двойной. Ионизация имеет место слева от линии  $\Delta = -1$  при  $v > 1$ . Окрестности тройного соударения соответствуют точки  $\Delta \gg v^2$  и  $\Delta \gg 1$  (эти точки лежат за пределами диаграммы). Адиабатическое приближение возможно при далеких сближениях с прицельными расстояниями  $\rho \gg a$ . Импульсное приближение можно при-

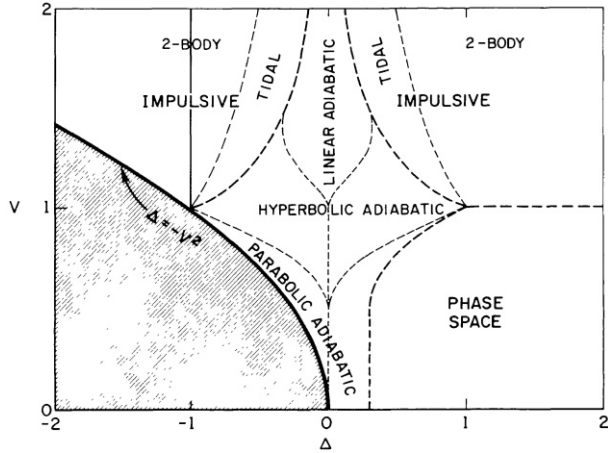


Рис. 25. Классификация актов гравитационного рассеяния по методам аппроксимации (рисунок из [200]).

менять при пролетах с большой скоростью, когда основные изменения параметров тройной системы происходят вблизи перигея относительной орбиты одиночной звезды.

Хегги и Хут [200] отмечают, что быстрые прохождения приводят к небольшим изменениям  $\Delta \ll 1$  энергии связи двойной, кроме случаев, когда одиночная звезда испытывает очень тесное сближение с одним из компонентов первоначальной двойной. Медленные сближения, как правило, приводят к значительным изменениям величины  $\Delta$  при условии, что минимальное расстояние удаленного тела от центра масс двойной сравнимо с большой полуосью орбиты двойной. В противном случае, эффект рассеяния экспоненциально убывает с ростом этого расстояния. Таким образом, проводя определенные аналогии с атомной физикой, Хегги и Хут [200] получили ряд аналитических аппроксимаций для случаев очень широких, очень тесных, очень быстрых и очень медленных сближений. В промежуточных зонах аппроксимации получить затруднительно, однако для них можно использовать результаты численного моделирования методом Монте-Карло. По результатам численных экспериментов получены простые аналитические аппроксимации для

вероятностей различных изменений энергии связи двойной в зависимости от скорости сближения.

Хегги и Хут [200] обсуждают различные приложения своих результатов.

1. Оценка средних и среднеквадратических изменений за единицу времени энергии связи широких двойных в звездном поле.
2. Определение дифференциальных поперечных сечений для тесных двойных в различных звездных полях (окрестность Солнца, ядра шаровых скоплений и т.д.).
3. Оценка средней скорости изменения энергии тесных пар в звездном поле, состоящем из смеси одиночных звезд и тесных двойных систем. В частности, рассмотрен случай максвелловского распределения скоростей звезд поля.

Таким образом, наряду с существенными различиями между квантово-механическим и гравитационным рассеяниями частиц имеется целый ряд глубоких аналогий как в методах исследования, так и в результатах.

## Глава III

# Динамическая эволюция тройных систем с отрицательной полной энергией

### § 1. Два подхода к изучению динамики тройных систем

Можно представить себе два сценария формирования гравитационно связанных тройных звезд с отрицательной полной энергией:

- 1) временный захват звезды поля, сближающейся с тесной двойной системой;
- 2) совместное образование компонентов в результате фрагментации газового облака или в результате распада системы бóльшей кратности.

При изучении динамики тройных систем методом статистических испытаний (методом Монте-Карло) выбор начальных условий для численных экспериментов зависит от рассматриваемого сценария.

Первый вариант рассматривался в предыдущей главе как для случаев  $E > 0$ , так и для  $E < 0$ . Случаи с  $E < 0$  также подробно изучались в цикле работ Валтонена и его коллег (например, Саслау и др. [164], Валтонен [49], Валтонен и Миккола [53], Валтонен и Карттунен [52]; см. также ссылки в этих публикациях). В этих случаях начальные координаты и скорости тел задаются через орбитальные элементы двойной системы и сближающейся с ней одиночной звезды.

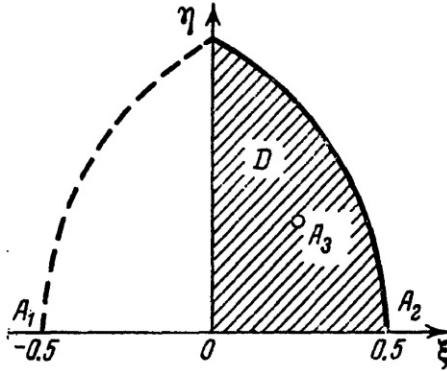


Рис. 26. Область  $D$  всех возможных конфигураций тройных систем.

Во втором случае не предполагается начальная иерархическая структура тройной системы в отличие от первого сценария. Следовательно, возможны любые начальные конфигурации трех тел в пространстве положений, а в фазовом пространстве ограничения на начальные скорости определяются только знаком полной энергии  $E < 0$ . Граница области задания начальных условий определяется поверхностью нулевой энергии  $E = 0$ . Второй способ задания начальных условий применялся в работах Агекияна и его учеников (например, Агекиян и Аносова [2], Агекиян и др. [8], Аносова и Орлов [22], Аносова [15]; см. также ссылки в этих статьях). Для выбора начальных положений тел рассматривалась так называемая область  $D$  всех возможных конфигураций (Агекиян и Аносова [2]), или гомологическая область (Чернин и др. [212]). Эта область изображена на рис. 26.

Область  $D$  ограничена осями координат и дугой окружности единичного радиуса с центром в точке  $A_1(-0.5, 0)$ . Максимальная сторона  $A_1A_2$  в конфигурационном треугольнике равна 1. Перемещая точку  $A_3(\xi, \eta)$  внутри области  $D$ , мы получаем все возможные конфигурации тройной системы. В работе Агекияна и Аносовой [2] показано, что для любого треугольника найдется подобный ему треугольник с координатами вершин  $A_1(-0.5, 0)$ ,  $A_2(+0.5, 0)$ ,  $A_3(\xi, \eta)$  в пределах области  $D$ . Положения точки  $A_3(\xi, \eta)$  на границах области  $D$  соответствуют двум предельным случаям задачи трех тел:

- 1) *равнобедренной задаче* (дуга окружности и отрезок  $[0, \sqrt{3}/2]$  на оси ординат);
- 2) *прямолинейной задаче* (отрезок  $[0, 0.5]$  на оси абсцисс).

При задании различных масс тел эволюция тройной системы зависит от того, тела каких масс находятся в различных вершинах конфигурационного треугольника (всего возможно 6 различных перестановок масс при одной и той же конфигурации и одних и тех же начальных скоростях тел).

Возможны и другие способы задания начальных конфигураций тройных систем. Например, в работе Аносовой и др. [28] наряду с выбором начальных конфигураций равномерно случайно в области  $D$  был рассмотрен другой вариант выбора начальных положений тел — координаты всех трех тел выбирались равномерно случайно в пределах круга радиусом  $R = 1$ . Между начальными конфигурациями, выбираемыми по этим двум методам, нет взаимно однозначного соответствия. Одной конфигурации из области  $D$  соответствует бесконечное множество конфигураций в пределах круга.

Аносова и др. [28] провели сравнение статистических результатов параметров распада неустойчивых тройных систем с компонентами равных масс и нулевыми начальными скоростями при выборе начальных конфигураций ( $N_c = 2500$ ) в области  $D$  и в круге  $R$ . Оказалось, что результаты двух методов согласуются в пределах статистических ошибок (см. табл. 5). В таблице приведены средние значения времени распада  $T$ , большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$  финальных двойных. Величины  $\bar{T}$  выражены в единицах среднего времени пересечения [22]:

$$\tau = \frac{G \sqrt{\sum_{i=1}^3 m_i \sum_{i \neq j} m_i m_j}}{(2|E|)^{3/2}}, \quad (157)$$

а величины  $\bar{a}$  — в единицах среднего размера

$$d = \frac{G \sum_{i \neq j} m_i m_j}{2|E|}. \quad (158)$$

Контроль точности вычислений выполнялся путем «обратного пересчета» и сравнения его результатов с начальными условиями.

Таблица 5. Сравнение статистических результатов для областей  $D$  и  $R$

| Параметры                | Область $D$       | Круг $R$          |
|--------------------------|-------------------|-------------------|
| Предсказуемые варианты   |                   |                   |
| $N_c$                    | 1506              | 1453              |
| $\overline{T}$           | $22.0 \pm 0.6$    | $26.4 \pm 0.5$    |
| $\overline{a}$           | $0.279 \pm 0.002$ | $0.280 \pm 0.002$ |
| $\overline{e}$           | $0.727 \pm 0.007$ | $0.715 \pm 0.007$ |
| Непредсказуемые варианты |                   |                   |
| $N_c$                    | 994               | 1047              |
| $\overline{T}$           | $148 \pm 5$       | $153 \pm 3$       |
| $\overline{a}$           | $0.281 \pm 0.003$ | $0.272 \pm 0.003$ |
| $\overline{e}$           | $0.719 \pm 0.009$ | $0.718 \pm 0.007$ |

Если отклонения координат и скоростей всех трех тел после пересчета от начальных значений не превышали  $10^{-3}$ , то вариант считался *предсказуемым*. В противном случае его относили к *непредсказуемым*.

Из табл. 5 видно, что для рассмотренных выборок начальных условий средние величины  $\overline{T}$ ,  $\overline{a}$  и  $\overline{e}$  согласуются как для предсказуемых, так и для непредсказуемых вариантов. Это согласие свидетельствует о том, что статистические результаты численного моделирования динамики распадающихся тройных систем с нулевым моментом вращения слабо зависят от способа выбора начальных конфигураций.

При изучении динамики **вращающихся тройных систем** методом Монте-Карло также можно использовать различные подходы к заданию начальных условий (например, Аносова и др. [25], Аносова и Орлов [23], Миккола и Валтонен [127], Валтонен и др. [54, 55]; см. также ссылки в этих статьях). Обычно фиксируются некоторые основные параметры, например, начальный вириальный коэффициент  $k$  или произведение  $w = L^2|E|$ , где  $L$  — момент вращения тройной системы.

Начальные конфигурации вращающихся тройных систем можно выбирать различными способами, например, равномерно случайно в области  $D$  (рис. 26) или задавая начальную иерархию системы (сближение одиночной звезды с двойной по гиперболической, параболической или эллиптической орбите).

Таблица 6. Сравнение статистических результатов для вариантов  $H$  и  $D$  (см. текст)

| $w$         | 0.1       | 1         | 2          | 4          | 6         |
|-------------|-----------|-----------|------------|------------|-----------|
| $n_H$       | 9814      | 9543      | 8700       | 4591       | 883       |
| $n_D$       | 9839      | 9705      | 9447       | 7269       | 4692      |
| $\bar{T}_H$ | 49.4(1.0) | 80.0(1.4) | 120.5(2.0) | 190.9(3.8) | 274(10)   |
| $\bar{T}_D$ | 44.0(0.9) | 82.7(1.3) | 112.5(1.7) | 160.2(2.6) | 61.9(2.6) |
| $\bar{a}_H$ | 0.1164(4) | 0.1349(3) | 0.1429(2)  | 0.1556(2)  | 0.1636(1) |
| $\bar{a}_D$ | 0.0976(5) | 0.1270(3) | 0.1349(3)  | 0.1404(4)  | 0.1201(6) |
| $\bar{e}_H$ | 0.710(2)  | 0.689(2)  | 0.705(2)   | 0.722(3)   | 0.634(6)  |
| $\bar{e}_D$ | 0.695(2)  | 0.695(2)  | 0.699(2)   | 0.712(2)   | 0.707(3)  |

В работах Валтонена и др. [54, 55] рассмотрены оба эти способа генерации начальных условий при фиксированных значениях параметра  $w = 0.005, 0.1, 1, 2, 4, 6$  для тройных систем с компонентами равных масс  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ ;  $G = 1, E = -1$ . Заметим, что, согласно критерию Голубева (см., например, книгу Голубева и Гребеникова [65]), в случае равных масс при  $w > 25/4$  тройные системы устойчивы по Хиллу. Они имеют иерархическую структуру и невозможен обмен удаленного тела с одним из компонентов внутренней пары. Для каждого  $w$  и для каждого способа выбора начальных условий было рассмотрено по 10000 тройных систем.

В табл. 6 представлены результаты сравнения средних значений параметров ухода ( $n$  — число систем, распавшихся за время  $T < 1000\tau$ ;  $T$  — время жизни;  $a$  и  $e$  — элементы орбиты финальной двойной) для двух способов выбора начальных условий:  $H$  — иерархическая начальная конфигурация (в начале эволюции имеется тесная двойная система, с которой сближается одиночное тело);  $D$  — начальная конфигурация, когда положение тела  $A_3$  выбирается равномерно случайно в области  $D$  (рис. 26).

В таблице в круглых скобках указаны ошибки средних в единицах последнего знака. Можно заметить качественное согласие изменений (увеличение или убывание) средних характеристик распада с изменением величины  $w$  (т.е. момента вращения). Исключение составляют результаты для очень быстро вращающихся систем ( $w = 6$ ). Это различие связано с присутствием большого числа



быстро распадающихся систем при задании начальных конфигураций в области  $D$ , когда уход одного из тел происходит практически мгновенно без взаимодействия с остающимися телами. При задании иерархической начальной структуры такие системы не реализуются и тенденция к росту  $\bar{T}$  с увеличением  $w$  сохраняется. Заметим, что средний эксцентриситет  $\bar{e}$  финальной двойной от величины  $w$  практически не зависит и равен  $\approx 0.7$ .

Наряду со случайным выбором начальных условий в определенной области изменения параметров тройной системы можно применять процедуру сканирования этой области с определенными шагами по параметрам. В частности, во многих работах проводилось сканирование области  $D$  или ее отдельных частей (например, Агекян и Аносова [5], Аносова и Завалов [18], Умехара и Таникава [191]). Заметим, что Умехара и Таникава провели сканирование более широкой области, охватывающей область  $D$ , и обнаружили, что происходит «отражение» картины эволюции относительно границ области  $D$ . Сканирование по начальным условиям (в частности, по координатам тел) позволяет выяснить зависимость результатов эволюции тройных систем от начальных условий, в том числе выявить области устойчивых движений, регулярные структуры и зоны стохастичности.

## § 2. Классификация типов движений и состояний

Результаты численного моделирования динамики тройных систем позволили в целом подтвердить классификацию типов финальных движений, изложенную нами ранее (см. § 7 главы I). С другой стороны, численные эксперименты внесли некоторые коррективы в эту классификацию (см., например, книги Маршала [121], Валтонена и Карттунена [52]).

Характер финальных движений и смена типов движений при  $t \rightarrow \pm\infty$  зависят от знака полной энергии  $E$  тройной системы. Для тройных систем с  $E > 0$  можно предложить следующую классификацию типов финальных движений.

1. *Пролеты* трех одиночных звезд по относительным гиперболическим орбитам.

2. Формирование связанной двойной при сближении трех одиночных звезд (*частичный захват*).
3. Прохождение одиночной звезды мимо двойной системы с сохранением первоначальной двойной (*рассеяние*).
4. Разрушение двойной в результате ее сближения с одиночной звездой и разлет всех трех звезд по относительным гиперболическим орбитам (*ионизация*).
5. Замена одного из компонентов двойной системы на сближающуюся с ней одиночную звезду (*обмен или перезарядка*).
6. *Тройные соударения* при нулевом угловом моменте ( $L = 0$ ).

Отметим, что классы 2 и 4 сменяют друг друга при изменении знака времени.

Для тройных систем с  $E < 0$  мы можем рассматривать следующие классы финальных движений.

1. Прохождение одиночной звезды мимо тесной двойной (*рассеяние*).
2. Замена одного из компонентов двойной на одиночную звезду (*обмен или перезарядка*).
3. *Временный захват* одиночной звезды при сближении ее с тесной двойной системой и образование временной неустойчивой тройной системы (*резонансное рассеяние*).
4. *Устойчивое обращение тел*:
  - устойчивые по Хиллу и Лагранжу иерархические системы;
  - периодические орбиты;
  - устойчивые по Лагранжу движения в окрестности устойчивых периодических орбит.
5. *Осциллирующие движения* (как в задаче Ситникова [173]).
6. *Тройные соударения* при  $L = 0$ .

Пока остается открытым вопрос о возможности образования устойчивой или осциллирующей тройной системы в результате сближения одиночной звезды с тесной двойной системой.

Аносова [16] предложила блок-схему для классификации типов движений в задаче трех тел (рис. 27). На этой схеме показаны описанные выше типы финальных движений в системах с  $E > 0$ ,  $E = 0$  и  $E < 0$ , а также классы состояний в неустойчивых системах с  $E < 0$ . Также показана взаимосвязь общей проблемы трех тел с ограниченной задачей трех тел и задачей большего числа тел ( $N > 3$ ). Предложенная Аносовой [16, 17] схема отражает основные особенности динамики тройных систем и может служить ориентиром в общей задаче трех тел. С другой стороны, эта схема не является завершенной – возможно ее развитие и дополнение. Некоторые новые аспекты, развивающие эту схему, будут обсуждены ниже.

Критерии для определения класса состояния в определенный момент времени в тройных системах с  $E < 0$  были разработаны в работах Агеяна и Мартыновой [6], Мартыновой и Орлова [119]. Агеян и Мартынова [6] предложили критерии для разделения этих состояний в случае  $L = 0$  (плоская задача), а Мартынова и Орлов [119] обобщили эти критерии на случай  $L \neq 0$  (в том числе на пространственную задачу трех тел).

**Критерий тройного сближения** (*состояние 0*) определяется на основе теоремы о вириале. Вводится понятие сферы тройного сближения. Радиус этой сферы  $R_0$  определяется из того условия, что при любых положениях тел внутри круга (в пространственном случае — шара) радиуса  $R_0$  выполняется условие

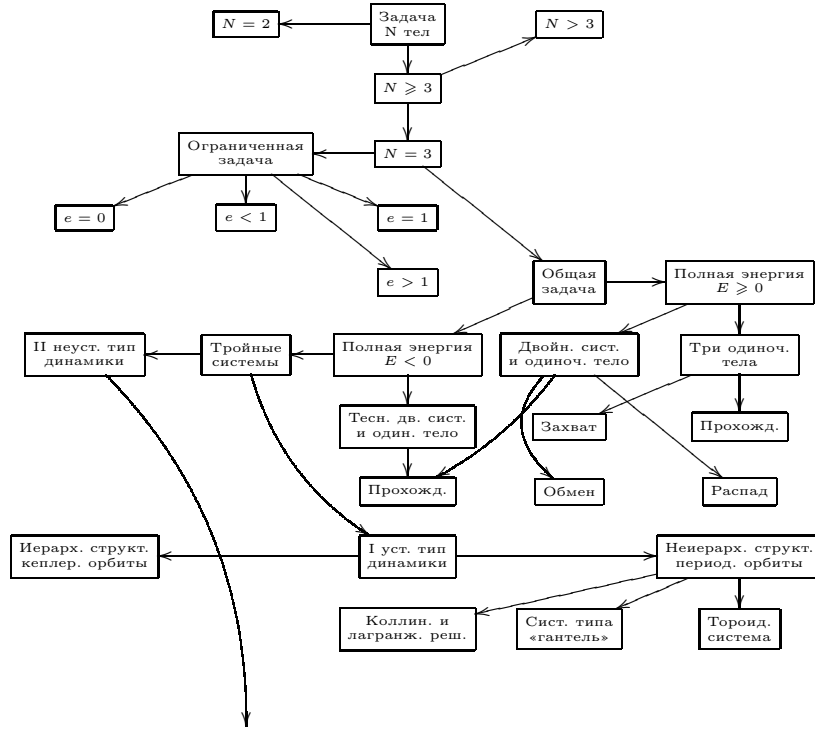
$$U > -2E, \quad (159)$$

где  $U$  — потенциал тройной системы, то есть тела сближены теснее, чем в равновесном состоянии, когда  $U = -2E$ . Агеян и Мартынова [6] получили формулу для вычисления  $R_0$ :

$$R_0 = \frac{G}{-2E} A, \quad (160)$$

где  $A$  — коэффициент, зависящий от масс компонентов тройной системы. Способ вычисления величины  $A$  и таблица значений  $A$  при разных отношениях масс тел приведены в работе Агеяна и Мартыновой [6]. В случае одинаковых масс тел  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$

Классификация типов движений в общей задаче трех тел (блок-схема)



Классификация состояний тройных систем II неустойчивого типа динамики

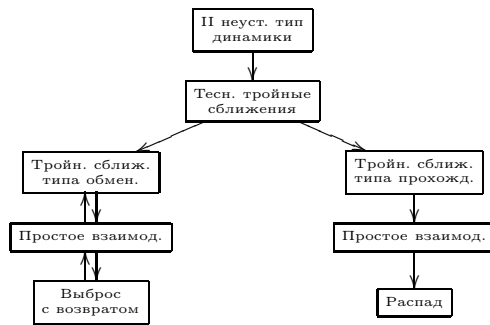


Рис. 27. Блок-схема классификации типов движений и состояний тройных систем согласно Аносовой [16].

значение  $A = \sqrt{3}$ . В работе Мартыновой и Орлова [119] было установлено, что формула (160) справедлива и в пространственном случае задачи трех тел, поскольку через три точки всегда можно провести плоскость и применить к ней те же рассуждения, что и в работе Агеяна и Мартыновой [6] для плоского случая.

Для получения **критерия выброса** Агеян и Мартынова [6] использовали следующие рассуждения. Они определили максимальное значение наименьшего взаимного расстояния между телами. Если угловой момент  $L = 0$ , то при фиксированных величинах  $E$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  это значение равно

$$\sigma = \frac{G}{-E} (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3) \quad (161)$$

и достигается, когда компоненты системы неподвижны и находятся в вершинах равностороннего треугольника. В этом случае расстояния компонентов от центра масс тройной системы равны

$$R_i = \frac{G}{-E} B_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (162)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= C \sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}, \\ B_2 &= C \sqrt{m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2}, \\ B_3 &= C \sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}; \end{aligned} \quad (163)$$

$$C = \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (164)$$

В работе Агеяна и Мартыновой [6] приведены таблицы значений  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  при  $m_1 = 1 \geq m_2 \geq m_3$ .

Если в некоторый момент времени для всех трех тел выполнены условия

$$r_i < R_0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (165)$$

то тройная система находится в состоянии тройного сближения. Если в какой-то момент времени выполнено хотя бы одно из условий

$$r_i > R_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (166)$$

то система находится в *состоянии II* или *III* (выброс с возвратом или уход).

Если не выполнены условия (165) и (166), то тройная система находится в *состоянии I* (простое взаимодействие). Условие для состояния I можно записать также в виде двойного неравенства

$$R_0 < r_i < R_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (167)$$

где правое неравенство должно быть справедливо для всех трех тел одновременно, а левое неравенство — хотя бы для одного из тел.

Критерий выброса, полученный в работе Агекияна и Мартыновой [6] для  $L = 0$ , был обобщен в работе Мартыновой и Орлова [119] на случай  $L \neq 0$  как в плоском, так и в пространственном вариантах задачи трех тел.

В случае  $L \neq 0$  наибольшее значение минимального расстояния между телами достигается, когда тела находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $\lambda$ , причем радиальные составляющие скоростей тел равны нулю, и движения чисто трансверсальные в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{L}$ . Величина  $\lambda$  является параметром рассматриваемой конфигурации и определяется из интегралов площадей  $L$  и энергии  $E$  по следующей формуле [119]:

$$\lambda = \frac{G}{-2E} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2ME}{G^2\mu^3}} \right), \quad (168)$$

где  $M = m_1 + m_2 + m_3$ ,  $\mu = m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3$ . Тогда радиусы выброса для компонентов тройной системы равны

$$R_i = B_i\lambda, \quad i = 1, 2, 3, \quad (169)$$

где величины  $B_i$  определяются по формулам (163) так же, как и в случае  $L = 0$  (при этом  $\lambda = \sigma$ ). В случае  $L \neq 0$  состояния 0, I, II + III также определяются неравенствами (165)–(167).

Для того, чтобы охарактеризовать степень тесноты тройного сближения и дальность выброса, можно ввести коэффициенты тройного сближения  $a$  и выброса  $b$ . Определим величину  $a$  как отношение

$$a = \frac{R_0}{r_0} \in [1, \infty), \quad (170)$$

где  $r_0$  — минимальное значение наибольшего расстояния тел от центра масс тройной системы, достигаемое в течение тройного сближения

$$r_0 = \min_t \{\max[r_i(t)]\}. \quad (171)$$

Величину  $b$  можно определить как

$$b = \max_t \left[ \frac{r_i(t)}{R_i} \right] \in [1, \infty) \quad (172)$$

для тела, испытывающего выброс. Большим значениям  $a$  соответствуют более тесные тройные сближения, а большим значениям  $b$  — более далекие выбросы тел.

Для разделения состояний выброса без ухода (II) и ухода (III) можно использовать имеющиеся в литературе **критерии ухода и выброса с возвратом** (см., например, работы Биркхофа [45], Тевзадзе [185], Стендиша [179], Ёсиды [87, 88], Гриффита и Норта [68], Маршала [122], Маршала и др. [123], Орлова [136] и книгу Маршала [121]). Достаточный критерий ухода  $i$ -го тела из тройной системы при  $t \rightarrow \infty$  в общем виде можно сформулировать в виде трех условий. Если в некоторый момент времени  $t_0$  в тройной системе одновременно выполнены следующие неравенства

$$\begin{aligned} \rho(t_0) &\equiv \rho_0 > \alpha, \\ \dot{\rho}(t_0) &\equiv \dot{\rho}_0 > 0, \\ \dot{\rho}_0^2 &\geq \beta, \end{aligned} \quad (173)$$

то при  $t \rightarrow \infty$  имеет место уход  $\rho(t) \rightarrow \infty$ . В формулах (173)  $\rho(t)$  — расстояние удаленного компонента от центра масс близких тел;  $\dot{\rho}(t)$  — радиальная составляющая скорости этого компонента относительно центра масс двух других тел;  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые величины, зависящие от масс тел и полной энергии тройной системы; величина  $\beta$  также зависит от значения  $\rho_0$ . Выражения для  $\alpha$  и  $\beta$  в различных критериях ухода приведены в табл. 7; здесь величина  $D$  обозначает верхнюю границу минимального взаимного расстояния между телами

$$D = \frac{G\mu}{|E|}, \quad (174)$$

$M_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}$ ,  $M_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ ,  $m_1 \leq m_2$  — массы близких тел.

Таблица 7. Значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в критериях ухода

| Ссылки    | $\alpha$                            | $\beta$                                                                                                                                     |
|-----------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| [45]      | $\frac{2GM^2}{3 E }$                | $\frac{8GM}{\rho_0}$                                                                                                                        |
| [185]     | $\frac{2GM^2}{3 E }$                | $2GM \left( \frac{M_1}{\rho_0 - M_2 D} + \frac{M_2}{\rho_0 - M_1 D} \right)$                                                                |
| [179]     | $D$                                 | $2GM \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{M_1 M_2 D^2}{\rho_0^2 (\rho_0 - D)} \right)$                                                           |
| [87, 122] | $\frac{Gm_1 m_2^2}{(m_1 + m_2) E }$ | $2GM \left( \frac{M_1}{\rho_0 - M_2 D} + \frac{M_2}{\rho_0 + M_1 D} \right)$                                                                |
| [68]      | $D$                                 | $2GM \left[ \frac{1}{\rho_0} + \frac{M_1 M_2 D^2}{\rho_0^2} \left( \frac{M_1}{\rho_0 - M_1 D} + \frac{M_2}{\rho_0 - M_2 D} \right) \right]$ |
| [88]      | $\frac{Gm_1 m_2^2}{(m_1 + m_2) E }$ | $\frac{2GM}{\rho_0}$                                                                                                                        |

В работе [136] было проведено сравнение пяти различных критериев ухода и показано, что оптимальным критерием, обеспечивающим минимальное количество невыявленных уходов, является критерий Ёсиды–Маршала [87,122]. Кроме того, было показано, что все рассматриваемые критерии, кроме критерия Биркхофа [45], при  $\rho \rightarrow \infty$  асимптотически приближаются к критерию гиперболичности орбиты внешней двойной, образованной удаляющимся компонентом и центром масс остающейся пары тел:

$$\beta = \frac{2GM}{\rho_0}, \quad (175)$$

где  $M$  — сумма масс всех трех тел.

В работе Маршала и др. [123] было установлено, что критерий гиперболичности внешней двойной можно использовать в качестве критерия ухода удаленного тела при достаточной его изолированности от двух других тел:

$$\rho_0 > \alpha = \frac{Gm_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)|E|}. \quad (176)$$

При больших значениях  $\rho_0 > 2D$  все критерии, кроме критерия Биркхофа, дают близкие результаты, и мы можем использовать любой из этих критериев.

Заметим, что все рассматриваемые критерии ухода являются достаточными условиями, однако они не являются необходимыми



условиями распада тройной системы. Возможно наличие некоторого множества тройных систем, в которых происходит уход одного из тел, однако критерии его не выявляют. С другой стороны, возможны очень далекие выбросы с возвратом, которые мы не можем проследить до конца эволюции из-за ограниченности вычислительных ресурсов. Эти случаи мы можем рассматривать как «условные распады».

В реальных тройных звездах или триплетах галактик необходимо учитывать влияние внешних полей на компоненты, испытывающие далекие выбросы. В качестве внешних полей могут выступать регулярное поле Галактики и иррегулярные поля, обусловленные влиянием близких массивных объектов (газовых облаков, массивных черных дыр, соседних звезд и др.). Воздействие внешних сил может оторвать выброшенный компонент от двойной и перевести состояние II (далекий выброс с возвратом) в состояние III (уход). Таким образом, введение понятия «условный распад» оправдано и с точки зрения применения результатов численного моделирования к реальным тройным системам.

### **§ 3. Динамика неустойчивых тройных систем**

Неустойчивые тройные системы с отрицательной полной энергией  $E < 0$  могут формироваться различными путями:

- 1) совместное образование компонентов тройной системы в результате фрагментации единого протозвездного объекта (например, газового облака);
- 2) захват одиночной звезды поля при ее сближении с тесной двойной системой;
- 3) нарушение устойчивости тройной системы в результате ее сближения с объектом поля (например, с газовым облаком);
- 4) разрушение системы большей кратности.

Второй сценарий обсуждался в § 2 главы II. Здесь мы рассмотрим более подробно первый сценарий. Отметим, что третий сценарий пока в литературе еще не рассматривался. Это может составить предмет будущих исследований.

Обзор результатов численного моделирования процесса распада неустойчивых тройных систем можно найти в статьях Аносовой [15], Аносовой и Орлова [22], Валтонена [49], а также в монографии Валтонена и Карттунена [52].

Для того, чтобы получить представительную выборку начальных условий, необходимо рассмотреть все возможные конфигурации тройных систем. Множество таких конфигураций представляет собой компактную область  $D$  (рис. 26), впервые введенную Агеяном и Аносовой [2]. Множество начальных конфигураций можно получить сканированием этой области с определенным шагом или случайным выбором координат третьего тела из этой области с определенной плотностью вероятности (как правило, равномерно случайно).

Начальные условия для динамической эволюции тройных систем содержат также скорости тел и их отношения масс. Были рассмотрены различные способы задания начальных скоростей тел:

- 1) нулевые начальные скорости (free-fall three-body problem);
- 2) системы, вращающиеся в пределах одной плоскости (two-dimensional three-body problem);
- 3) вращающиеся системы в трехмерном пространстве (three-dimensional three-body problem).

При задании начальных скоростей тел можно фиксировать значения определенных глобальных параметров тройной системы (например, полную энергию, угловой момент, вириальный коэффициент и др.).

Массы тел могут быть равными (equal masses) или различными (unequal masses). В последнем случае можно ввести два параметра — отношения минимальной и промежуточной масс к максимальной, которую можно принять равной единице. В случае различных масс необходимо для каждой конфигурации в области  $D$  рассмотреть шесть различных перестановок масс, либо выбирать перестановку масс случайным образом.

Таким образом, мы исследуем эволюцию тройных систем, начальные условия для которых находятся на некоторых многообразиях всего множества начальных условий для систем с  $E < 0$ . Заметим, что рассмотрение таких «сечений» фазового пространства

может привести к нарушению репрезентативности выборки начальных условий. Однако полный охват начальных условий пока невозможен из-за ограниченности вычислительных ресурсов, а также из-за наличия бесконечного множества резонансных зон и «островов».

Сформулируем основные качественные результаты численного моделирования динамики неустойчивых тройных систем (см., например, работу Аносовой и Орлова [22]).

1. Динамическая эволюция неустойчивых систем завершается распадом — уходом одного из тел по гиперболической орбите и образованием тесной финальной двойной системы.
2. Как правило, причиной распада является предшествующее ему тройное сближение, согласно критерию Агекияна и Мартыновой [6].
3. Чем теснее тройное сближение, тем вероятнее, что оно приведет к распаду тройной системы.
4. Увеличение различия масс компонентов (в случае сравнимых масс тел) в среднем ускоряет процесс распада, т.е. сокращает среднее время жизни неустойчивых тройных систем. Заметим, что в системах с одной доминирующей массой, например, в планетных системах, среднее время жизни возрастает.
5. Увеличение момента вращения тройной системы в среднем замедляет эволюцию, т.е. приводит к увеличению среднего времени распада.
6. Финальные двойные, образующиеся после ухода одного из тел, как правило, имеют сильно вытянутые орбиты.
7. В некотором приближении процесс распада тройных систем можно рассматривать как случайный марковский процесс, поскольку результат каждого последующего тройного сближения или выброса может зависеть только от результата предыдущего сближения или выброса. Можно предположить, что этот процесс является чисто разрывным. Этот случайный процесс сходен с процессом радиоактивного распада.

Перейдем к обзору количественных характеристик процесса распада. Одной из важнейших характеристик процесса распада

тройных систем является время жизни  $T$ . Будем определять время  $T$  как интервал времени, прошедшего с начала эволюции до момента тройного сближения, приведшего к распаду. Момент тройного сближения можно определять по-разному:

- 1) момент минимума периметра конфигурационного треугольника, достигающийся в пределах сферы тройного сближения (Аносова и Орлов [22]);
- 2) момент минимума момента инерции (Умехара и Таникава [191]);
- 3) момент минимума максимального расстояния от центра инерции тройной системы (Агемян и Мартынова [6]);
- 4) момент последнего пересечения сферы тройного сближения удаленным компонентом.

Заметим, что все эти моменты времени близки друг к другу, поэтому в качестве момента распада тройной системы можно брать любой из этих моментов времени.

Иногда за момент распада тройной системы принимают момент выполнения критерия ухода или условного ухода. Этот момент может отстоять от начала эволюции на существенно более продолжительный интервал времени (особенно в случае далекого выброса), что приводит к некоторому завышению времени жизни. Принятое значение радиуса  $R_*$  условного распада сильно влияет на среднее время жизни и количество вариантов начальных условий, эволюция которых завершилась распадом к некоторому фиксированному моменту времени.

Заметим, что для изолированных тройных систем (радиус условного распада бесконечно велик) среднее время жизни бесконечно велико (Агемян и др. [8]). В работе [8] рассматривается плотность вероятности  $f(\varepsilon)$  полной энергии уходящего компонента. Если  $\varepsilon \geq 0$ , то имеет место истинный уход. При  $\varepsilon < 0$  — выброс с возвратом. Функция  $f(\varepsilon)$  обладает следующими свойствами (Агемян и др. [8]):

$$f(0) = b > 0, \quad (177)$$

$$\frac{df}{d\varepsilon}(0) < 0. \quad (178)$$

Для далеких выбросов приближенно выполняется соотношение из задачи двух тел

$$P = ca^{3/2} = \tilde{c}|\varepsilon|^{-3/2}, \quad (179)$$

где  $P$  — период обращения внешней двойной,  $a$  — большая полуось ее орбиты,  $c$  и  $\tilde{c}$  — постоянные величины. Из соотношений (177)–(179) следует, что для фиксированного  $k > 0$  справедливо соотношение

$$\bar{P}_k = \frac{1}{k} \int_{-k}^0 \tilde{c}|\varepsilon|^{-3/2} f(\varepsilon) d\varepsilon > \frac{1}{k} \int_{-k}^0 \tilde{c}b|\varepsilon|^{-3/2} d\varepsilon = \infty, \quad (180)$$

где  $\bar{P}_k$  — средняя продолжительность выброса без ухода с энергией  $\varepsilon > -k$ .

Следовательно, математическое ожидание времени истинного ухода для неустойчивых изолированных тройных систем бесконечно велико (но существует медианная оценка). Таким образом, мы можем говорить о среднем времени распада только при определенном  $R_*$ . В ходе эволюции неустойчивой тройной системы могут происходить еще более далекие выбросы, чем те, которые происходили раньше. Это приводит к тому, что со временем происходит своеобразное «омоложение» тройной системы (см. ниже).

Сравним процесс распада тройных систем с явлением радиоактивного распада, где вероятность распада не зависит от времени (нестареющие системы) и интегральный закон распределения времени жизни системы является экспоненциальной функцией времени

$$F_1(T) = 1 - e^{-\lambda_1 T}, \quad (181)$$

где  $\lambda_1 = \frac{\ln 2}{T_{\text{med}}}$ , а  $T_{\text{med}}$  — время полураспада, за которое распадается половина систем (в случае радиоактивного распада половина атомов), т.е.  $T_{\text{med}}$  — медиана распределения времени жизни неустойчивых тройных систем. Для «выживших» тройных систем вероятность распада в течение определенного интервала времени  $[T, T + dT]$  уменьшается с ростом  $T$ , т.е. имеет место процесс «омолаживания» систем, обусловленный далекими выбросами с возвратом. Это подтверждается выполнением неравенства

$$[1 - F(T)]^n < 1 - F(nT) \quad (182)$$

для любых  $n$ . Заметим, что для нестареющих систем (в частности, явления радиоактивного распада) вместо неравенства (182) должно иметь место равенство.

Таблица 8. Интегральный закон распределения времени жизни  $T$  тройных систем и его аппроксимации

| $T, \tau$ | $F(T)$ | $F_1(T) = 1 - e^{-\lambda_1 T}$ | $F_2(T) = 1 - e^{-\lambda_2 T - \mu_2 \ln T}$ |
|-----------|--------|---------------------------------|-----------------------------------------------|
| 20        | 0.194  | 0.148                           | 0.203                                         |
| 40        | 0.324  | 0.274                           | 0.321                                         |
| 60        | 0.425  | 0.382                           | 0.417                                         |
| 80        | 0.508  | 0.473                           | 0.498                                         |
| 100       | 0.591  | 0.551                           | 0.567                                         |
| 200       | 0.794  | 0.799                           | 0.791                                         |
| 300       | 0.895  | 0.910                           | 0.898                                         |
| 400       | 0.943  | 0.959                           | 0.950                                         |
| 500       | 0.975  | 0.982                           | 0.976                                         |

Результаты численного моделирования и их аппроксимации законами (181) и

$$F_2(T) = 1 - e^{-\lambda_2 T - \mu_2 \ln T} \quad (183)$$

представлены в табл. 8 для тройных систем с телами равных масс и нулевыми начальными скоростями. Коэффициенты  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\mu_2$  в (181) и (183) оценены методом наименьших квадратов:  $\lambda_1 = 0.00801 \pm 0.00091$ ,  $\lambda_2 = 0.00707 \pm 0.00007$ ,  $\mu_2 = 0.0283 \pm 0.0016$ . Из таблицы видно, что аппроксимация вида (183) лучше соответствует результатам численного моделирования, чем аппроксимация (181), что также подтверждает «омоложение» тройных систем.

Таким образом, среднее время распада (время жизни) для изолированных неустойчивых тройных систем бесконечно велико, однако время полураспада для таких систем конечно. Из табл. 8 видно, что для тройных систем с компонентами равных масс и нулевыми начальными скоростями (free-fall equal-mass problem) время полураспада  $T_{\text{med}} \approx 80\tau$ .

Время полураспада зависит от выбора начальных условий. В частности, Аносова и Орлов [23] получили зависимость  $T_{\text{med}}$  от  $R_*$  и  $k_0$ . Эта зависимость представлена в табл. 9. Здесь величина  $R_*$  определяется как критическое расстояние удаляющегося тела от центра масс остающейся пары. Из таблицы видно возрастание  $T_{\text{med}}$  с увеличением момента вращения тройной системы, который

Таблица 9. Зависимость времени полураспада  $T_{\text{med}}$  (в единицах среднего времени пересечения  $\tau$ ) от радиуса условного распада  $R_*$  и начального вириального коэффициента  $k_0$

| $R_*, d$ | $k_0$ |     |     |     |
|----------|-------|-----|-----|-----|
|          | 0     | 0.1 | 0.3 | 0.5 |
| 4        | 17    | 23  | 27  | 24  |
| 6        | 32    | 35  | 44  | 43  |
| 8        | 43    | 44  | 56  | 54  |
| 10       | 52    | 50  | 63  | 67  |
| 20       | 57    | 70  | 80  | 90  |
| $\infty$ | 80    | 93  | 116 | 144 |

Таблица 10. Зависимость времени полураспада  $T_{\text{med}}$  от  $\sigma$  и  $k_0$

| $\sigma$ | $k_0$ |     |     |     |
|----------|-------|-----|-----|-----|
|          | 0     | 0.1 | 0.3 | 0.5 |
| 0        | 50    | 70  | 85  | 90  |
| 0.5      | 30    | 45  | 70  | 75  |
| 0.8      | 15    | 27  | 40  | 35  |
| 0.9      | 13    | 30  | 45  | 26  |
| 0.99     | 9     | —   | 50  | —   |

коррелирует с величиной  $k_0$ . Различия  $T_{\text{med}}$  для  $k_0 = 0$  и  $k_0 = 0.5$  (вириальное равновесие) составляют от 1.3 до 1.8 раз. Различия увеличиваются с ростом принятого значения радиуса  $R_*$  условного распада.

Зависимость  $T_{\text{med}}$  от отношения масс тел исследовалась в работе Аносовой и Орлова [24]. Результаты представлены в табл. 10 при фиксированном радиусе условного распада  $R_* = 20d$ . Здесь  $\sigma = 1 - m_{\text{min}}/m_{\text{max}}$ , где  $m_{\text{min}}$  и  $m_{\text{max}}$  — минимальная и максимальная массы тел. Из табл. 10 видно, что время полураспада в среднем возрастает с увеличением  $k_0$  (т.е. момента вращения тройной системы) и убывает с ростом  $\sigma$ , характеризующим различие масс тел.

Валтонен [49] предложил эмпирическую зависимость времени полураспада от отношения масс тел, полной энергии  $E$  и углового

момента  $L$  тройной системы для изначально иерархических систем (резонансное рассеяние)

$$T_{\text{med}} = 4 \left( 1 + 4.5 \frac{m_{\text{min}}}{m_{\text{max}}} \right) (1 + 24|E|L^2), \quad (184)$$

справедливой в следующей системе единиц: постоянная тяготения  $G = 1$ , сумма масс тел  $M = 1$ , начальная большая полуось внутренней пары  $a_{\text{in}} = 1$ .

Валтонен и Арсет [51] рассмотрели процесс эволюции неустойчивой тройной системы как процесс, аналогичный радиоактивному распаду, и предложили аппроксимировать дифференциальный закон распределения времени распада следующей формулой

$$f(T) = \frac{0.69}{T_{\text{med}}} e^{-0.69T/T_{\text{med}}}. \quad (185)$$

Время полураспада  $T_{\text{med}}$  определяется из условия  $P_{\text{ej}}^N = \frac{1}{2}$ , где  $P_{\text{ej}}$  — вероятность выброса за определенный уровень, а  $P_{\text{ej}}^N$  — вероятность того, что до распада тройной системы в ней произойдет ровно  $N$  выбросов (Валтонен и др. [55]). Также определим некоторое характерное отношение продолжительности выброса  $T_{\text{orb}}$  к среднему времени пересечения  $\tau$ :

$$\frac{T_{\text{orb}}}{\tau} = 2\pi 10^{3/2} \left( \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{M} \right)^3. \quad (186)$$

Для случая тел равных масс

$$T_{\text{orb}} \approx 26\tau, \quad (187)$$

что согласуется с результатами численных экспериментов. Тогда время полураспада

$$T_{\text{med}} \approx \frac{7.8\tau}{\ln(P_{\text{ej}}^{-1})}. \quad (188)$$

В случае равных масс  $m_1 = m_2 = m_3 = m_0$  Валтонен и др. [55] получают зависимость  $T_{\text{med}}(w)$ , где

$$w = -\frac{EL^2}{G^2 m_0^5}. \quad (189)$$



Таблица 11. Зависимость времени полураспада от параметра  $w$

| $w$                   | 0.005 | 0.1 | 1  | 2  | 4   | 6    |
|-----------------------|-------|-----|----|----|-----|------|
| $T_{\text{med}}/\tau$ | 18    | 26  | 31 | 49 | 211 | 1333 |
| $H$                   | 8     | 16  | 27 | 37 | 60  | 160  |
| $D$                   | 6     | 15  | 36 | 52 | 56  | 5    |

Эту зависимость можно представить в виде табл. 11. В последних двух строках приведены времена полураспада, найденные из численного моделирования при задании начальных условий в системах с иерархией ( $H$ ) и без нее (равномерно случайно в области  $D$ ). Для тройных систем с умеренными значениями  $w = 1, 2$  результаты аппроксимации (188) в целом согласуются с данными численного моделирования, а при больших и малых  $w$  наблюдаются сильные расхождения. Расхождения при  $w \geq 4$ , по-видимому, связаны с тем, что не все рассмотренные системы распались за ограниченное время, равное  $1000\tau$ , а также с тем, что начальные условия для ряда систем соответствуют условию распада. Причина расхождений при малых  $w \leq 0.1$  пока не ясна. В этих случаях доля быстро распадающихся систем велика по сравнению с ожидаемой для выбранной аппроксимации (Валтонен и др. [55]).

Время жизни тройной системы зависит от выбранных начальных условий (координат и скоростей тел) и от масс тел. В частности, для тройных систем с нулевыми начальными скоростями величина  $T$  зависит от начальной конфигурации системы в области  $D$  (рис. 26). Анализ зависимости  $T(\xi, \eta)$  проводился в работах Агеяна и Аносовой [5], Аносовой и Орлова [22], Таникавы и Умехары [191].

Как один из примеров зависимости  $T(\xi, \eta)$ , мы приводим результаты для плоских вращающихся тройных систем (рис. 28). Способ выбора начальных условий для этих систем описан в работе Аносовой [14]. Линии на рисунке являются изолиниями удельного углового момента  $L'$  (на единицу массы). Заштрихованная область  $D^*$  в правом нижнем углу рисунка соответствует иерархическим устойчивым тройным системам. Разные значки соответствуют тройным системам с различным временем жизни. В области  $D$  (внутри и вблизи границы) наблюдаются непрерывные «острова» начальных условий, соответствующих быстрым уходам. Размеры

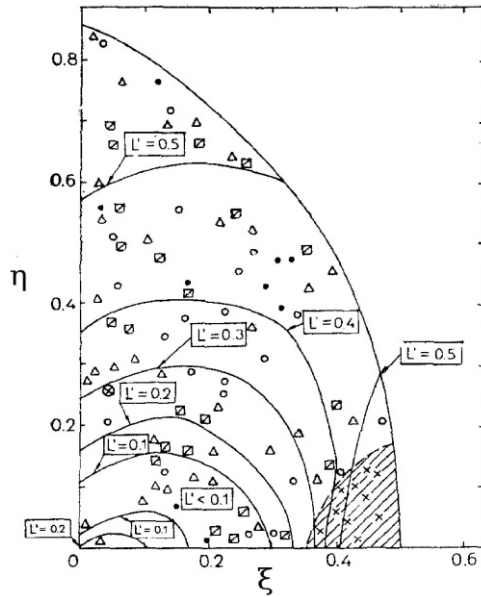


Рис. 28. Зависимость  $T(\xi, \eta)$  для плоских вращающихся тройных систем при  $k_0 = 0.3$  (рисунок из работы Аносовой и др. [25]).

этих «островов» увеличиваются с ростом различия масс (см., например, обзор Аносовой и Орлова [22]).

В зонах быстрых уходов уход происходит после небольшого числа тройных сближений тел (Умехара и Таникава [191]). Это подтверждает рис. 29, заимствованный из этой работы для случая равных масс тел и нулевых начальных скоростей (free-fall equal-mass problem). Зоны уходов после 1-го тройного сближения образуют систему вытянутых областей, концентрирующихся вдоль дуг, охватывающих точку  $(\xi, \eta) = (0.5, 0)$ . Эти дуги исходят с оси абсцисс и расширяются к границе области  $D$  — окружности. Сами эти дуги имеют сложную внутреннюю структуру: они состоят из трех зон, соответствующих уходам каждого из тел. Эти зоны разделены множествами начальных условий для систем с длительным временем жизни. Внутри дуг проходят линии тройных соударений (см. рис. 29). Непрерывные области, соответствующие уходам после 2-го и 3-го

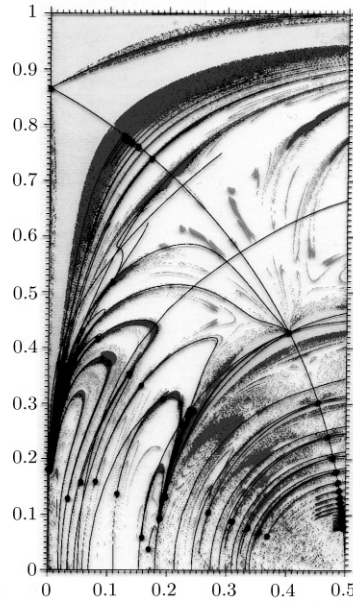


Рис. 29. Области быстрых уходов после 1-го, 2-го и 3-го тройных сближений тел в тройных системах с компонентами равных масс и  $k_0 = 0$  (рисунок из [191]).

тройного сближения имеют более сложную форму. Вблизи границ областей уходов после определенного числа тройных сближений находятся зоны условных распадов, а сами границы соответствуют уходам по параболическим орбитам (параболо-эллиптические движения по классификации Шази).

Для тройных систем с компонентами различных масс можно оценить вероятности ухода тел различных масс. Миккола и Валтонен [127] предложили следующую эмпирическую формулу для оценки вероятности ухода тела с массой  $m_k$ :

$$P_k = \frac{m_k^{-n}}{\sum_{i=1}^3 m_i^{-n}}. \quad (190)$$

Таблица 12. Средние значения  $\bar{a}_\infty$  (в единицах среднего размера  $d$ ) в зависимости от  $k_0$  и  $\sigma$

| $\sigma$ | $k_0$             |                   |                   |                   |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|          | 0                 | 0.1               | 0.3               | 0.5               |
| 0        | $0.255 \pm 0.003$ | $0.267 \pm 0.003$ | $0.285 \pm 0.003$ | $0.289 \pm 0.003$ |
| 0.5      | $0.292 \pm 0.005$ | $0.332 \pm 0.005$ | $0.355 \pm 0.004$ | $0.360 \pm 0.004$ |
| 0.8      | $0.421 \pm 0.007$ | $0.494 \pm 0.006$ | $0.532 \pm 0.005$ | $0.529 \pm 0.005$ |
| 0.9      | $0.490 \pm 0.008$ | $0.575 \pm 0.007$ | $0.605 \pm 0.006$ | $0.607 \pm 0.003$ |
| 0.99     | $0.788 \pm 0.007$ | —                 | $0.866 \pm 0.003$ | —                 |

Здесь индекс  $n$  определяется из численных экспериментов. Величина  $n$  зависит от полной энергии, углового момента и отношения масс тел и заключена в интервале (1.5, 3).

В результате распада тройной системы с  $E < 0$  образуется финальная двойная. Основные характеристики этой двойной — большая полуось  $a_\infty$  (или энергия  $E_\infty$ ) и эксцентриситет  $e_\infty$ . При  $t \rightarrow \infty$  имеет место асимптотика (см., например, [209])

$$a_0 V_\infty^2 \rightarrow \frac{Gm_1 m_2 M}{m_3(m_1 + m_2)}, \quad (191)$$

где  $v_\infty$  и  $m_3$  — модуль скорости и масса уходящего тела,  $m_1$  и  $m_2$  — массы компонентов финальной двойной.

Представляют интерес распределения  $a_\infty$  и  $e_\infty$ . Средние значения  $\bar{a}_\infty$  и  $\bar{e}_\infty$  в зависимости от  $k_0 = \frac{T_0}{|U_0|}$  и  $\sigma = 1 - m_{\min}/m_{\max}$  приведены в табл. 12 и 13 (данные Аносовой и Орлова [24]). Из табл. 12 видно, что средние значения  $\bar{a}_\infty$  увеличиваются с ростом  $k_0$  и  $\sigma$ . Причем возрастание  $\bar{a}_\infty$  с увеличением начального вириального коэффициента  $k_0$  при фиксированном значении  $\sigma$  не столь заметно по сравнению с ростом  $\bar{a}_\infty$  при увеличении различия масс для фиксированного  $k_0$ . При одинаковых массах  $\bar{a}_\infty$  составляет примерно четверть от среднего размера  $d$  тройной системы, а при сильном различии масс ( $\frac{m_{\min}}{m_{\max}} = 0.01$ ) значения  $\bar{a}_\infty$  больше, чем  $3/4d$ , то есть характерный размер финальной двойной в единицах  $d$  увеличивается примерно втрое. Таким образом, начальная дисперсия скоростей слабо влияет на тесноту финальной двойной, а различие масс существенно влияет на размер финальной двойной.

Таблица 13. Средние значения  $\bar{e}_\infty$  в зависимости от  $k_0$  и  $\sigma$

| $\sigma$ | $k_0$             |                   |                   |                   |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|          | 0                 | 0.1               | 0.3               | 0.5               |
| 0        | $0.705 \pm 0.008$ | $0.708 \pm 0.010$ | $0.709 \pm 0.010$ | $0.723 \pm 0.009$ |
| 0.5      | $0.829 \pm 0.009$ | $0.690 \pm 0.010$ | $0.692 \pm 0.010$ | $0.660 \pm 0.010$ |
| 0.8      | $0.877 \pm 0.006$ | $0.749 \pm 0.009$ | $0.658 \pm 0.011$ | $0.662 \pm 0.010$ |
| 0.9      | $0.905 \pm 0.006$ | $0.772 \pm 0.009$ | $0.665 \pm 0.011$ | $0.654 \pm 0.012$ |
| 0.99     | $0.988 \pm 0.002$ | —                 | $0.645 \pm 0.010$ | —                 |

Финальные двойные получаются, как правило, сильно вытянутыми ( $\bar{e}_\infty > 0.6$ ). При малых значениях  $k_0 = 0, 0.1$  эксцентриситет  $\bar{e}_\infty$  увеличивается с ростом различия масс, а при  $k_0 = 0.3, 0.5$  имеет место уменьшение среднего эксцентриситета с ростом  $\sigma$ . Наиболее заметное возрастание  $\bar{e}_\infty$  наблюдается при нулевых начальных скоростях тел ( $k_0 = 0$ ). При умеренной дисперсии начальных скоростей ( $k_0 = 0.3, 0.5$ ) образуются менее вытянутые финальные двойные. Распределение эксцентриситетов в этих случаях согласуется с законом

$$f_1(e_\infty) = 2e_\infty, \quad (192)$$

предложенным Джинсом [77] и Амбарцумяном [11] для двойных в звездном поле в случае изотропного распределения фазовой плотности. Точно такая же формула была получена Монаханом [129, 130] для финальных двойных в рамках статистической теории распада тройных систем. Заметим, что согласно этой теории в случае движений тел в одной плоскости распределение эксцентриситетов финальных двойных имеет вид

$$f_2(e_\infty) = \frac{e_\infty}{\sqrt{1 - e_\infty^2}}, \quad (193)$$

т.е. в плоском случае двойные формируются в среднем более вытянутые, чем в пространственном. Этот результат подтверждается данными табл. 13 — средние значения  $e_\infty$  в плоском случае ( $k_0 = 0$ ) больше.

Валтонен и др. [55] обобщили теорию Монахана и получили распределение эксцентриситетов финальных двойных в зависимости

от модуля углового момента  $L$  тройной системы, выраженного в единицах

$$L_{\max} = \frac{5G}{2|E|^{0.5}} \left( \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}{3} \right)^{1.25}, \quad (194)$$

для пространственного случая. Это распределение имеет вид

$$f_3(e_\infty) = 2(\gamma + 1)e_\infty(1 - e_\infty^2)^\gamma, \quad (195)$$

где  $\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{L_{\max}} - \frac{1}{2} \right)$ . Распределение (195) совпадает с законом (192) при  $\gamma = 0$ , т.е. при  $L = \frac{1}{2}L_{\max}$ . Результаты численных экспериментов согласуются с распределением (195) (работа Валтонена и др. [55]).

Наряду с орбитальными элементами финальной двойной состояние распада характеризуется параметрами уходящего тела: скоростью и энергией ухода, ориентацией орбиты уходящего тела по отношению к орбитальной плоскости финальной двойной.

В работах Агеяна и Аносовой [2, 3], Аносовой и Орлова [21, 22] определялось относительное превышение  $DE$  кинетической энергии, уносимой уходящим телом, над энергией, требуемой критерием ухода Тевзадзе [185]:

$$DE = \frac{1}{2} m_3 \frac{v_3^2 - v_{\text{crit}}^2}{|E|}, \quad (196)$$

где  $m_3$  — масса уходящего тела,  $v_3$  — модуль его скорости в момент выполнения критерия ухода,  $v_{\text{crit}}$  — критическое значение скорости ухода по этому критерию для того же удаления уходящего тела от центра масс финальной двойной. Численные эксперименты показали, что в среднем значение  $DE$  почти не зависит от различия масс компонентов. Однако оно существенно зависит от момента вращения тройной системы — для вращающихся систем средняя величина  $DE$  примерно вдвое меньше при  $k_0 = 0.3 \div 0.5$ , чем для тройных систем с нулевыми начальными скоростями (Аносова и Орлов [22]).

Значение уносимой энергии  $DE$  сильно коррелирует с периметром  $p$  тройного сближения, приведшего к уходу: чем теснее тройное сближение, тем в среднем больше энергии уносит уходящее тело. Величина коэффициента корреляции между этими двумя параметрами распада равна  $r = -0.45 \pm 0.01$  [22]. Очевидно, имеет место

сильная корреляция между  $DE$  и большой полуосью  $a_\infty$  финальной двойной: чем больше уносится энергии, тем теснее финальная двойная (коэффициент корреляции  $r = -0.72 \pm 0.01$  [22]).

В работах Валтонена и др. [54, 55] в качестве энергетической характеристики ухода рассматривалась асимптотическая скорость  $v_\infty$ , достигаемая при  $t \rightarrow +\infty$  [см. формулу (191)]. В среднем скорость ухода убывает с ростом момента вращения (Валтонен и др. [54]). В работе [55] была получена аналитическая аппроксимация плотности вероятности  $f(v_\infty)$  для случая равных масс:

$$f(v_\infty) = \frac{3}{2}(n-1)|E|^{n-1}v_\infty \left( |E| + \frac{3}{4}v_\infty^2 \right)^{-n}, \quad (197)$$

где

$$n = 18 \left( \frac{L}{L_{\max}} \right)^2 + 3. \quad (198)$$

Медиана скорости  $v_\infty$  равна

$$(v_\infty)_{\text{med}} = 2\sqrt{\frac{1}{3} \left( 2^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right) |E|}. \quad (199)$$

Сравнение медиан  $(v_\infty)_{\text{med}}$ , полученных по формуле (199) и из численных экспериментов, представлено в табл. 14. Структура табл. 14 аналогична структуре табл. 11. Из таблицы видно качественное согласие результатов аппроксимации (197) и результатов численных экспериментов. Некоторое увеличение медианы скорости  $(v_\infty)_{\text{med}}$  для  $w = 6$  и области  $D$ , по-видимому, определяется быстрыми уходами тел при высоких значениях углового момента в неиерархических тройных системах. Заметим, что с увеличением медианы времени распада медианная скорость ухода убывает (см. табл. 11 и 14).

Представляет интерес также исследовать распределение ориентаций орбит уходящего тела и финальной двойной. Относительную ориентацию этих орбит можно охарактеризовать с помощью двух углов:

- 1) угла  $\theta$  между вектором углового момента тройной системы  $\mathbf{L}$  и вектором  $\mathbf{v}_\infty$  скорости уходящего тела;
- 2) угла  $\lambda$  между векторами угловых моментов внутренней и внешней двойных.

Таблица 14. Величины медиан скорости ухода  $(v_\infty)_{\text{med}}$ , найденные по аппроксимации (199) и из численных экспериментов

| $w$                               | 0.005 | 0.1  | 1    | 2    | 4    | 6    |
|-----------------------------------|-------|------|------|------|------|------|
| $(v_\infty)_{\text{med}}, d/\tau$ | 1.35  | 1.26 | 0.83 | 0.65 | 0.49 | 0.41 |
| $H$                               | 1.23  | 1.23 | 0.90 | 0.73 | 0.45 | 0.23 |
| $D$                               | 1.33  | 0.87 | 0.55 | 0.47 | 0.35 | 0.61 |

Как показано в работе Аносовой и Орлова [23], распределение угла  $\theta \in [0, 180^\circ]$  симметрично относительно своей моды  $\theta = 90^\circ$  (направление ухода ортогонально вектору  $\mathbf{L}$ ). С увеличением момента вращения тройной системы дисперсия распределения  $f(\theta)$  уменьшается, т.е. максимум при  $\theta = 90^\circ$  становится более ярко выраженным. Поскольку распределение  $f(\theta)$  симметрично относительно  $\theta = 90^\circ$ , Валтонен и др. [55] рассматривали только значения  $\theta < 90^\circ$ , отобразив углы  $\theta$  второй четверти в первую симметрично относительно линии  $\theta = 90^\circ$ .

Валтонен и др. [55] получили приближенную формулу для плотности вероятности величины  $\zeta = \cos \theta$  (при  $0 \leq \zeta \leq 1$ ):

$$f(\zeta) = \frac{(1 + k_0)^2}{2 + k_0} \frac{2}{(1 + k_0 \zeta)^3}, \quad (200)$$

где величина

$$k_0 = 9 \left( \frac{L}{L_{\text{max}}} \right)^{\frac{5}{4}}. \quad (201)$$

Медиана распределения (200) равна

$$\zeta_{\text{med}} = \frac{1}{k_0} \left[ \frac{\sqrt{2}(k_0 + 1)}{\sqrt{(k_0 + 1)^2 + 1}} - 1 \right]. \quad (202)$$

Сравнение медиан  $\theta_{\text{med}}$ , полученных из распределения (200) и по результатам численного моделирования, представлено в табл. 15, структура которой аналогична структуре табл. 11 и 14. Из таблицы видно хорошее согласие результатов, полученных по формуле (202) и по данным численных экспериментов.

Для угла  $\lambda$  теоретического распределения получить пока не удалось. Результаты (медианные значения  $\lambda_{\text{med}}$ ) для численных экспериментов приведены в табл. 16. Мы можем видеть из таблицы, что



Таблица 15. Величины медиан угла ухода  $\theta_{\text{med}}$  (в градусах) согласно аппроксимации (200) и по данным численных экспериментов

| $w$                   | 0.005 | 0.1  | 1    | 2    | 4    | 6    |
|-----------------------|-------|------|------|------|------|------|
| $\theta_{\text{med}}$ | 62.1  | 71.5 | 82.6 | 84.9 | 86.6 | 87.4 |
| $H$                   | 66.8  | 71.7 | 82.8 | 84.6 | 86.3 | 87.3 |
| $D$                   | 68.3  | 73.2 | 83.2 | 85.1 | 86.9 | 87.7 |

Таблица 16. Величины медиан угла  $\lambda_{\text{med}}$  (в градусах), полученные по результатам численного моделирования

| $w$ | 0.005 | 0.1   | 1    | 2    | 4    | 6    |
|-----|-------|-------|------|------|------|------|
| $H$ | 167.3 | 121.9 | 90.1 | 81.9 | 59.5 | 36.0 |
| $D$ | 155.4 | 116.0 | 83.0 | 71.8 | 53.9 | 73.1 |

в среднем угол между векторами угловых моментов внутренней и внешней двойных уменьшается с ростом момента вращения тройной системы — орбиты в среднем становятся более компланарны. При значениях  $w < 1$  уходы в основном происходят в направлении, противоположном вращению финальной двойной (обратные движения). При  $w > 1$  преобладают уходы по направлению вращения финальной двойной (прямые движения).

В работах Валтонена и др. [54, 55] также рассматривается перераспределение момента вращения между внутренней и внешней двойными, которое характеризуется параметром  $\beta$ , равным отношению орбитальных моментов вращения этих двойных. Согласно численным экспериментам, с ростом  $w$ , т.е. с увеличением момента вращения тройной системы, происходит уменьшение медианы величины  $\beta$ : от  $\beta_{\text{med}} \approx 1$  при  $w \approx 0$  до  $\beta_{\text{med}} \approx 0.1$  при  $w \approx 6$ .

Сравнение результатов численного моделирования и статистической теории распада тройных систем, базирующейся на гипотезе об эргодичности фазовой траектории при тройных сближениях (см. Монахан [129, 130]), в основном показывает качественное согласие, однако в некоторых случаях наблюдаются существенные расхождения. Эти различия служат стимулом для дальнейшего развития теории.

## § 4. Устойчивость тройных звезд

Численное моделирование динамики тройных систем показывает, что наряду с неустойчивыми распадающимися системами существуют системы с длительным временем жизни, превышающим сотни и тысячи средних времен пересечения (см., например, [23, 25, 52]). Анализ движений тел в этих системах показывает, что в них не происходит тройных сближений тел и далеких выбросов.

Эти системы можно разделить на два основных типа:

- 1) иерархические системы;
- 2) неиерархические системы с движениями в окрестности устойчивых периодических орбит.

Проблема устойчивости этих систем на неограниченном интервале времени остается нерешенной. Заметим, что точные периодические движения в изолированной тройной системе будут происходить неограниченное время. В иерархических тройных системах имеем два возмущенных кеплеровых движения для внутренней пары, образованной близкими телами, и внешней пары, образованной третьим удаленным компонентом и центром масс внутренней двойной.

В теории динамических систем используются различные понятия устойчивости (см., например, книгу Арнольда и др. [34]). В применении к задаче трех тел различные понятия устойчивости рассматриваются в книге Маршала [121]. Траектория называется

- «устойчивой по Лагранжу», если она остается ограниченной для всех будущих моментов времени  $t \in [t_0, +\infty)$ ;
- «устойчивой по Пуассону», если она в будущем возвращается бесконечное число раз в произвольную окрестность любого из своих прошлых состояний;
- «устойчивой по Хиллу», если не происходит обмена удаленного компонента ни с одним из компонентов близкой пары;
- «устойчивой по Ляпунову», если достаточно близкое по начальным условиям решение остается в сколь угодно малой окрестности данного решения для любых будущих моментов времени  $t \in [t_0, +\infty)$ .

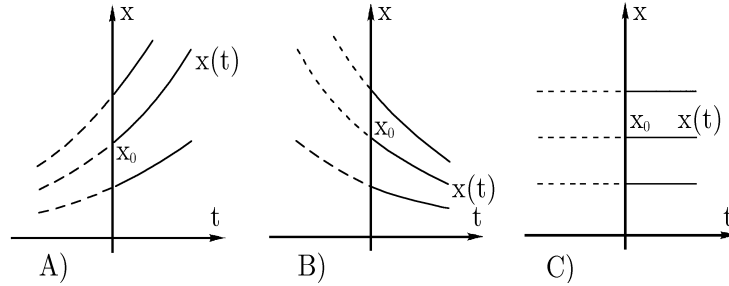


Рис. 30. Примеры устойчивых и неустойчивых по Ляпунову динамических систем (рисунок из [121]).

Аналогичные определения можно ввести при  $t \rightarrow -\infty$  а также при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Простые примеры устойчивых и неустойчивых траекторий приведены на рис. 30. Три приведенных примера соответствуют случаям перехода от устойчивости в прошлом к неустойчивости в будущем (А) и наоборот (В), а также устойчивости и в прошлом, и в будущем (С). Если множество решений непрерывно, то это определение устойчивости для будущих (или прошлых) моментов времени не зависит от начального момента времени и начальной точки.

Заметим, что пример устойчивости, приведенный на рис. 30В, не свойственен гамильтоновым системам. Для гамильтоновых систем была разработана так называемая КАМ-теория (см., например, книгу Арнольда и др. [34]), в которой рассматриваются слабо возмущенные гамильтоновы системы, движения в которых представляются обмотками торов в многомерных фазовых пространствах. Согласно КАМ-теории, в окрестности большинства периодических и «линейно устойчивых» орбит (далеких от условий резонанса) существует бесконечное множество «колмогоровских торов» — близких к периодическим решений. Объединение этих торов называется «колмогоровским множеством» [34]. Это множество имеет положительную меру в фазовом пространстве. Размерность колмогоровских торов на единицу больше, чем размерность физического пространства, в котором происходят движения трех тел: в пространственной задаче эти торы четырехмерны, в плоском случае — трехмерны, а в прямолинейном случае — двумерны.

Многие авторы исследовали устойчивость тройных систем с компонентами различных масс (см., например, книги Голубева и Гребенникова [65], Маршала [121], Валтонена и Карттунена [52], а также ссылки в них). Первые критерии устойчивости по Хиллу для общей задачи трех тел были получены Голубевым [63, 64]. Голубев исследовал аналогии областей Хилла в общей задаче трех тел и нашел условие, при котором происходит разрыв области, т.е. обмен компонентами в тройной системе становится невозможен. Это условие соответствует коллинеарному решению Эйлера.

Условие устойчивости по Хиллу можно выразить в виде неравенства

$$s = -\frac{L^2 E}{G^2 \bar{m}^5} > s_{\text{crit}}, \quad (203)$$

где  $\bar{m}$  — средняя масса компонентов в тройной системе,  $s_{\text{crit}}$  — критическое значение параметра устойчивости  $s$ . Оно определяется из решения Эйлера и зависит от отношения масс тел. В случае равных масс  $s_{\text{crit}} = \frac{25}{4} = 6.25$ . Заметим, что выполнение условия (203) не гарантирует устойчивости по Лагранжу, так как удаленный компонент может покинуть тройную систему без предшествующего обмена.

В дальнейшем был предложен еще ряд критериев устойчивости по Хиллу и по Лагранжу (см., например, работы Харрингтона [195, 196], Блэка [46], Роя и др. [158], Доннисона и Микулска [78], Игглтона и Киселевой [93], Мардлинг и Арсета [118], Токовина [189] и книгу Валтонена и Карттунена [52]). Как правило, эти критерии имеют вид неравенств, похожих на (203), но в некоторых случаях правые части этих неравенств зависят не только от масс тел, но и от некоторых орбитальных параметров внутренней и внешней двойных.

Приведем для примера несколько условий устойчивости тройных систем. Критерий Харрингтона [196], полученный на основе численных экспериментов, имеет вид

$$\frac{a_{\text{ex}}(1 - e_{\text{ex}})}{a_{\text{in}}} > A \left( 1 + B \lg \frac{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}}{3/2} \right) + K, \quad (204)$$

где  $a_{\text{ex}}$  и  $a_{\text{in}}$  — большие полуоси внешней и внутренней двойных,  $e_{\text{ex}}$  — эксцентриситет внешней двойной,  $K = 2$ . Значения параметров  $A$  и  $B$  в (204) зависят от направлений вращения внутренней и

внешней двойных: в случае прямых движений (угол взаимного наклона векторов угловых моментов орбит  $i = 0^\circ$ ) значения  $A = 3.50$  и  $B = 0.70$ , для обратных движений ( $i = 180^\circ$ ) величины  $A = 2.75$  и  $B = 0.64$ . Харригтон [196] считает, что критерий (204) можно использовать и в пространственной задаче ( $i \neq 0^\circ, 180^\circ$ ), кроме небольшой зоны неустойчивости в окрестности  $i = 90^\circ$ , когда плоскости орбит близки к ортогональности.

Критерий Игглтона и Киселевой [93] был получен по аналогии с условиями для поверхностей Роша в тесных двойных звездах. Он имеет вид

$$\frac{P_{\text{ex}}}{P_{\text{in}}} > \left( \frac{q_{\text{ex}}}{1 + q_{\text{ex}}} \right)^{1/2} \left( \frac{1 + e_{\text{in}}}{1 - e_{\text{ex}}} \right)^{3/2} Y_{\text{crit}}^{3/2}, \quad (205)$$

где

$$Y_{\text{crit}} = 1 + \frac{3.7}{q_{\text{ex}}^{1/3}} - \frac{2.2}{1 + q_{\text{ex}}^{1/3}} + \frac{1.4(q_{\text{ex}}^{1/3} - 1)}{q_{\text{in}}^{1/3}(q_{\text{ex}}^{1/3} + 1)}, \quad (206)$$

Здесь  $P_{\text{ex}}$  и  $P_{\text{in}}$  — периоды обращения внешней и внутренней двойных,  $q_{\text{in}} = \frac{m_1}{m_2} \leq 1$ ,  $q_{\text{ex}} = \frac{m_1 + m_2}{m_3}$ ,  $Y_{\text{crit}}$  — критическое отношение перицентрического расстояния внешней двойной к апоцентрическому расстоянию внутренней двойной. Заметим, что в оригинальной работе Игглтона и Киселевой [93] имеется опечатка в знаке перед третьим членом в формуле (206).

Критерий Мардлинг и Арсета [118] основан на результатах численного моделирования при вариации параметров орбит и отношений масс тел в широких диапазонах. Этот критерий имеет вид

$$\frac{a_{\text{ex}}(1 - e_{\text{ex}})}{a_{\text{in}}(1 + e_{\text{in}})} > \frac{2.6(1 + e_{\text{ex}})^{0.4} \left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}\right)^{0.4}}{(1 - e_{\text{ex}})^{0.0728} (1 + e_{\text{in}})^{1.2}} \left(1 - 0.3 \frac{i}{\pi}\right), \quad (207)$$

где взаимный наклон  $i \in [0, \pi]$  выражен в радианах. Критерий пригоден для широкого диапазона изменения параметров за исключением небольшой области вблизи ортогональности плоскостей орбит внутренней и внешней двойных.

Простой эмпирический критерий устойчивости был предложен Токовининым [189]. Он использовал аппроксимации данных наблюдений для иерархических тройных звезд с известными элементами орбит внутренней и внешней двойных. Критерий Токовинина имеет вид

$$\frac{P_{\text{ex}}(1 - e_{\text{ex}})^3}{P_{\text{in}}} > 5. \quad (208)$$

Валтонен [50] предложил полуаналитический критерий устойчивости, который выводится с использованием теории возмущений в задаче трех тел. Критерий имеет следующий вид

$$\frac{a_{\text{ex}}(1 - e_{\text{ex}})}{a_{\text{in}}} > 3.6 \left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}\right)^{1/12} (1 - e_{\text{ex}})^{-1/11} \times \\ \times (1 + 0.5e_{\text{in}}^2) [0.07 + (1 + \cos i)^{1.15}]^{1/6}. \quad (209)$$

Числовые коэффициенты в (209) подбираются по результатам численного моделирования.

В классе полуаналитических критериев устойчивости отметим критерии, предложенные в работе [56] и книге [35]. Они имеют вид

$$\frac{a_{\text{ex}}(1 - e_{\text{ex}})}{a_{\text{in}}} > 3 \left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}\right)^{1/3} (1 - e_{\text{ex}})^{-1/6} \times \\ \times \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2} \cos i - \cos^2 i\right)^{1/3} \quad (210)$$

и

$$\frac{a_{\text{ex}}(1 - e_{\text{ex}})}{a_{\text{in}}} > 2.8 \left[ \left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}\right) \frac{1 + e_{\text{ex}}}{(1 - e_{\text{ex}})^{1/2}} \right]^{2/5}. \quad (211)$$

По результатам численного моделирования, проведенного авторами для большого количества вариантов начальных условий, эти критерии наиболее точно описывают область устойчивости.

Следует отметить, что эмпирические критерии устойчивости получаются для ограниченного набора начальных условий при численном интегрировании уравнений движения на ограниченном интервале времени. Поэтому остается открытым вопрос о степени универсальности этих критериев и возможности их использования для тройных систем с произвольными начальными условиями и отношениями масс компонентов.

В этой связи более перспективным представляется использование аналитических и полуаналитических критериев. Применение разных критериев устойчивости для одной и той же тройной системы может давать различные результаты в том случае, когда система находится вблизи границы устойчивости (значения

параметров устойчивости близки к критическим). В таких случаях следует использовать численное моделирование на больших интервалах времени [ $\sim(10^3 \div 10^4)P_{\text{ex}}$  для иерархических систем или  $\sim(10^3 \div 10^4)\tau$  для неиерархических систем].

Заметим, что строгие аналитические критерии устойчивости (типа критерия Голубева) пока получены только для устойчивости по Хиллу (по отношению к обмену компонентами). Для устойчивости по Лагранжу (по отношению к уходу без обмена) подобных аналитических критериев не известно. По-видимому, уход удаленного компонента из тройной системы возможен всегда, однако для его реализации необходима постоянная «подкачка» энергии этого компонента в результате его сближений с внутренней двойной в благоприятной фазе. В этой связи существенную роль могут играть движения, близкие к резонансным (в частности, эволюция может происходить как последовательность сменяющих друг друга резонансов).

Представляет интерес изучить переход от устойчивых движений к неустойчивым и обратно при небольших вариациях начальных условий. Подобные исследования были выполнены в работах Киселевой и др. [97, 98] для иерархических тройных систем с плоскими прямыми движениями и начальными круговыми орбитами внутренней и внешней двойных ( $e_{\text{in}} = e_{\text{ex}} = 0$ ). Аналогичное исследование для тройных систем с обратными движениями ( $i = \pi$ ) выполнено Аносовой [29]. Варьировались отношения масс тел, которые задавались с помощью двух параметров

$$\alpha = \lg \frac{m_1}{m_2} \in [0, 2], \quad \beta = \lg \frac{m_1 + m_2}{m_3} \in [-2, 2], \quad (212)$$

причем  $m_1 \geq m_2$ .

Были выделены четыре основных типа потери устойчивости.

1. Уход удаленного тела без предшествующего обмена после ряда широких сближений этого тела с внутренней двойной.
2. Обмен компонентами с формированием новой иерархической долгоживущей системы и последующим уходом нового удаленного тела.
3. Уход одного из тел после большого числа обменов компонентов близкой пары.

#### 4. Уход одного из компонентов после одного или нескольких обменов.

Первый сценарий обычно реализуется, когда удаленный компонент имеет наименьшую массу. Второй тип неустойчивости характерен для тройных систем с удаленным вначале наиболее массивным компонентом. Третий сценарий типичен для систем с компонентами сравнимых масс. В четвертом случае один из компонентов внутренней двойной имеет массу, существенно меньшую, чем массы двух других тел.

Примеры устойчивой и неустойчивой тройных систем с компонентами разных масс ( $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 1.8$ ) представлены на рис. 31. Верхние рисунки (a) и (b) приведены в неподвижной системе координат, связанной с центром масс тройной системы. Рисунки (c)–(f) построены во вращающихся системах координат, связанных с парами  $m_1m_2$  и  $m_1m_3$ . Причем зафиксировано расстояние между телами пары, а вращение системы отсчета происходит с переменной угловой скоростью.

Были обнаружены случаи, когда тройная система является неустойчивой по Хиллу (происходит обмен телами), но устойчива по Лагранжу, по крайней мере, в течение  $10^4 P_{\text{ex}}$ . На рис. 32 показаны два примера таких систем для разных интервалов времени в ходе эволюции.

Кроме того, было обнаружено явление «разрушающего резонанса», когда в пределах зоны устойчивости движений обнаруживались небольшие области, где с течением времени устойчивость тройной системы нарушалась — эволюция завершалась уходом одного из тел за ограниченный интервал времени. Пример «разрушающего резонанса» показан на рис. 33. На левой верхней панели рисунка приведен случай распада тройной системы без предшествующего обмена в результате серии сближений удаленного тела с внутренней двойной системой. В результате происходит «раскачка» орбиты внешней двойной, приводящая к уходу удаленного компонента. При уменьшении начального отношения  $X_0$  периодов внешней и внутренней двойных (рис. 33b) наблюдаются обмены компонентами — нарушается устойчивость по Хиллу и, в конце концов, один из компонентов уходит из тройной системы по гиперболической орбите (нарушается устойчивость по Лагранжу). При дальнейшем уменьшении величины  $X_0$  (рис. 33c) тройная система становится



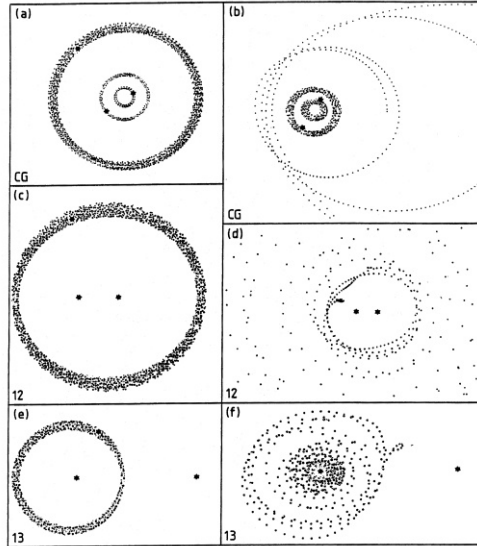


Рис. 31. Примеры устойчивой (а) и неустойчивой (b) тройных систем в неподвижной барицентрической системе координат; во вращающейся системе координат, связанной с телами  $m_1$  (c) и  $m_2$  (d); во вращающейся системе координат, связанной с телами  $m_1$  (e) и  $m_3$  (f).

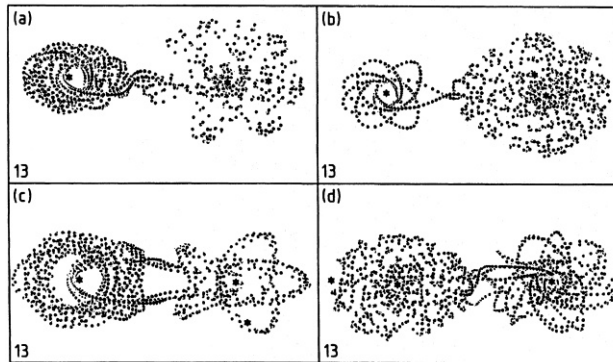


Рис. 32. Примеры систем, неустойчивых по Хиллу, но устойчивых по Лагранжу, при  $\alpha = 1.2$ ,  $\beta = -0.4$  (верхние рисунки) и  $\alpha = 2.0$ ,  $\beta = 0$  (нижние рисунки).

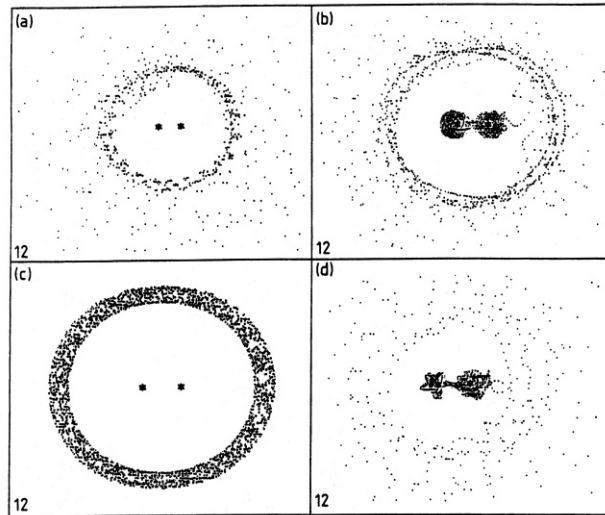


Рис. 33. Эффект «разрушающего резонанса» при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.6$ . Рисунки соответствуют начальным отношениям периодов внешней и внутренней двойных:  $X_0 = 4.2$  (а),  $X_0 = 4.1$  (b),  $X_0 = 4.0$  (c),  $X_0 = 3.5$  (d).

устойчивой по Хиллу и по Лагранжу: в течение, по крайней мере,  $10^4 P_{ex}$  не происходит обменов компонентами и далеких выбросов удаленного тела. По-видимому, существует область устойчивости тройных систем, возможно, связанная с резонансным начальным отношением периодов  $X_0 = 4$ . При дальнейшем уменьшении отношения  $X_0$  (рис. 33d) тройная система снова становится неустойчивой — происходит быстрый обмен компонентами и уход одного из тел. Возможно, правильнее было бы использовать термин «стабилизирующий резонанс» (в данном случае в окрестности начального отношения периодов  $X_0 = 4$ ) вместо термина «разрушающий резонанс», использованного Киселевой и др. [98].

Могут существовать более сложные устойчивые ограниченные движения, возможно, связанные с устойчивыми периодическими орбитами (см. § 5). Один из примеров таких движений приводится на рис. 34. На верхних рисунках (а и б) показаны устойчивые ( $X_0 = 3.52$ ) и неустойчивые ( $X_0 = 3.48$ ) движения; на промежуточных рисунках (с и d) показан пример близкой к периодической

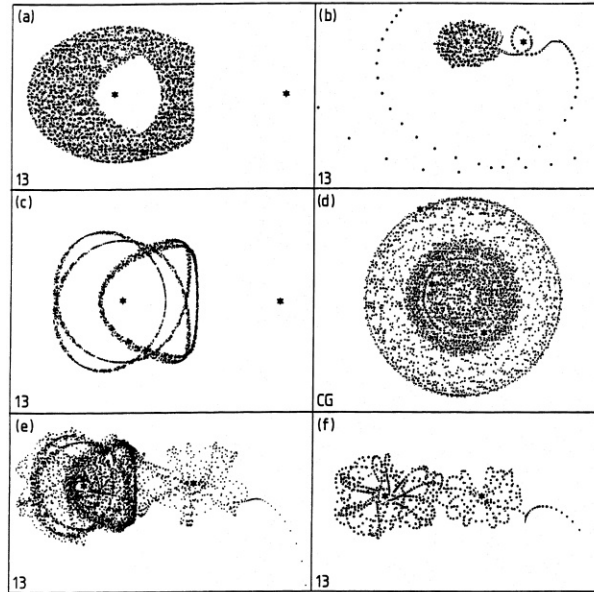


Рис. 34. Примеры устойчивых и неустойчивых движений в окрестности периодической орбиты при  $\alpha = 1.8$ ,  $\beta = 0.4$ .

орбиты ( $X_0 = 3.42$ ); на нижних рисунках приведены две неустойчивые орбиты при  $X_0 = 3.40$  (e) и  $X_0 = 3.37$  (f). На рис. 34c движения приводятся во вращающейся и пульсирующей системе координат, связанной с телами  $m_1$  и  $m_3$ ; на рис. 34d те же движения приведены в неподвижной системе координат, связанной с центром масс тройной системы. Отметим, что четкий и близкий к периодическому рисунок траекторий виден только на рис. 34c. Следы этой периодичности можно заметить на рис. 34a и 34e, хотя в первом случае (рис. 34a) витки траектории приблизительно однородно заполняют некоторую кольцеобразную область, а во втором случае (рис. 34e) через некоторое количество витков происходит уход тела малой массы из тройной системы после серии обменов компонентами.

## § 5. Периодические орбиты

Первые периодические решения в общей задаче трех тел были найдены еще в работах Эйлера и Лагранжа (см. выше). Эти решения были получены аналитически. В дальнейшем было опубликовано большое число работ, в которых находились и исследовались другие периодические решения в задаче трех тел, как в общей, так и в ограниченной (см., например, монографии Себехея [165], Маршала [121], Валтонена и Карттунена [52], а также ссылки в них).

Интерес к периодическим решениям вызван тем, что они представляют собой базис всего множества решений, т.е. они более или менее аппроксимируют решения многих других типов. Если нам известно периодическое решение на протяжении одного периода, то мы знаем его на всей временной оси, что упрощает качественный анализ решений.

Можно рассматривать как *абсолютные* периодические орбиты, когда через период тела имеют те же самые положения и скорости в неподвижной системе координат, так и *относительные* периодические орбиты, когда через период тела имеют те же самые относительные положения и скорости в подходящей вращающейся системе координат, но абсолютные положения и скорости могут отличаться на некоторый поворот (фазу) относительно вектора полного углового момента или имеют разный знак (зеркальное отражение).

Существенным свойством периодических траекторий является их устойчивость или неустойчивость. Обычно аналитически изучается устойчивость периодических решений в первом приближении. Полный анализ устойчивости выполняется крайне редко из-за его чрезвычайной сложности, поэтому во многих случаях авторы проводят численный или численно-аналитический анализ устойчивости. Долгое время производился поиск только симметричных периодических решений задачи трех тел, поскольку наличие симметрии существенно упрощает поиск соответствующих начальных условий.

В последние десятилетия широкую популярность нашли и асимметричные решения, в том числе в тройных системах с телами различных масс.

Два предельных случая периодических орбит были рассмотрены в работах Шубарта [229] и Брука [47] для прямолинейной (одномерной) и равнобедренной (двумерной) задач трех тел. Множество периодических орбит было найдено для ограниченной (круговой и

эллиптической) задачи трех тел на плоскости и в трехмерном пространстве. Периоды этих орбит кратны периоду обращения двойной, образованной телами ненулевых масс [121].

Большое число и разнообразие выявленных периодических орбит свидетельствует в пользу известной гипотезы Пуанкаре о том, что подмножество периодических орбит всюду плотно на множестве ограниченных решений задачи трех тел. Согласно Маршалю [121] эту гипотезу можно обобщить следующим образом: «для любых трех заданных масс периодические орбиты являются всюду плотными в подмножестве ограниченных и осциллирующих орбит, и это же верно для подмножества всех орбит без гиперболического ухода при положительном или при отрицательном ходе времени».

Для доказательства существования периодических решений используются различные методы теории дифференциальных уравнений, например, теорема о неподвижной точке, разложение в степенные ряды или ряды Фурье и др.

Долгое время наиболее популярным методом поиска семейств периодических орбит являлся метод аналитического продолжения. Идея этого метода состоит в том, чтобы отталкиваясь от некоторой известной периодической орбиты и слегка изменяя начальные условия и/или массы тел, находить новое семейство периодических решений. Подробное изложение этого метода можно найти в книге Маршала [121].

В последнее время бурно развиваются топологические методы поиска периодических решений в общей задаче трех тел (см., например, работы Мура [132], Шансине и Монгмери [219], Симо [170], Вандербея [59]). Поиск периодических орбит проводится с помощью минимизации функционала действия

$$A = \int_0^P (T + U) dt, \quad (213)$$

где  $T$  и  $-U$  обозначают кинетическую и потенциальную энергии тройной системы,  $P$  — период. На практике решение обычно представляется в виде отрезка ряда Фурье и решается задача оптимизации — определяются начальные условия (координаты и скорости тел), соответствующие минимуму функционала (213).

Мур [132] предложил топологическую классификацию простых

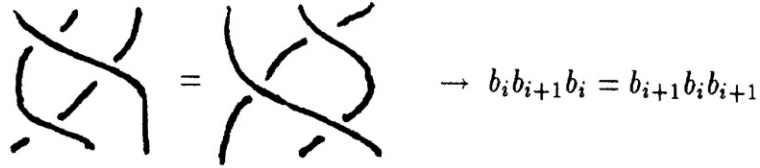


Рис. 35. Примеры сплетения «прядей» в задаче трех тел (рисунок из работы [132]).

периодических решений в плоской задаче трех тел с различными потенциалами взаимодействия тел вида




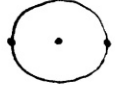












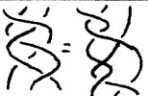

$$V_{ij} \sim r_{ij}^\alpha. \quad (214)$$

При этом тела не испытывают двойных и тройных соударений. Устойчивость простейшей круговой орбиты при  $\alpha \geq -2$  была известна давно. Наряду с этой орбитой Мур рассматривает орбиты с более сложной топологией. Для наглядного их представления он использует диаграммы, изображающие «косы» из  $n$  «прядей» (braids of  $n$  strands), которые вычерчиваются в трехмерном пространстве-времени при движении  $n$  тел на плоскости. Диаграммы показывают на протяжении одного периода  $T$  для каждого из тел изменение одной из пространственных координат (ось абсцисс) со временем (ось ординат), а также какая из «прядей» при их пересечении проходит выше с учетом второй координаты (см. табл. 17).

Для символического представления разных видов «кос» (топологических классов орбит) Мур [132] применяет специальные обозначения. Так, коэффициенты  $b_i$  при  $n = 2, 3$  соответствуют прохождению  $i$ -ой «пряди» над  $(i + 1)$ -ой «прядью». Один из примеров сплетения «прядей» в случае трех тел приведен на рис. 35.

Одним из частных случаев периодических решений задачи трех тел являются так называемые «хореографии», когда все три тела движутся друг за другом вдоль одной и той же замкнутой кривой. Простейшим примером хореографии является лагранжево решение в случае равных масс всех трех тел (пятый сверху пример в табл. 17). Это периодическое решение существует при любых значениях  $\alpha$ . Другой пример хореографии представляет собой орбита «восьмерка» (шестой сверху пример в табл. 17). Это решение

Таблица 17. Виды сплетений «прядей» в «косы» (таблица из работы Мура [132])

| braid                                                                               | $b_i$                                                             | orbit                                                                               | existence                |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
|    | $b_1^2$                                                           |    | exists for all $\alpha$  |
|    | —                                                                 |    | exists for all $\alpha$  |
|    | $b_1^2 b_2^2$                                                     |    | $\alpha < -1.1 \pm 0.05$ |
|    | $b_1^2 b_2^{-2}$                                                  |    | $\alpha < -1.4 \pm 0.05$ |
|  | $(b_1 b_2)^3$                                                     |  | exists for all $\alpha$  |
|  | $(b_1 b_2^{-1})^3$                                                |  | $\alpha < 2$             |
|  | $(b_1^2 b_2)^2$                                                   |  | $\alpha < -1.0 \pm 0.05$ |
|  | $(b_1^2 b_2^{-1})^2$                                              |  | $\alpha < -1.7 \pm 0.05$ |
|  | $b_1 b_2 b_1^{-1} b_2 b_1 b_2^{-1}$<br>$= b_1^2 b_2 b_1^{-2} b_2$ |  | at least $\alpha \leq 2$ |

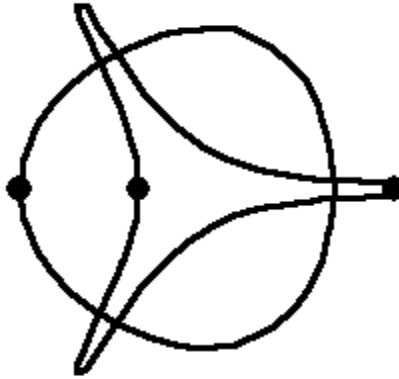


Рис. 36. Пример частичной хореографии из работы Вандербея [59].

существует при всех  $\alpha < 2$ . Оно подробно исследовано в работах Шансине и Монтгомери [219], а также Симо [170]. По-видимому, равенство масс тел является общим свойством всех «хореографий».

Наряду с хореографиями в задаче трех тел существуют так называемые «частичные хореографии», когда два тела движутся вдоль одной и той же замкнутой кривой, а третье тело движется по другой замкнутой кривой (рис. 36). Несколько периодических орбит, не являющихся хореографиями, получено Петровым [148]. Один из примеров таких орбит приведен на рис. 37 (см. также последний рис. в табл. 17). Траектории показаны в системе координат, связанной с центром масс тройной системы (рис. 37а), и в системе координат, связанной с одним из тел (рис. 37б), два других тела движутся вдоль различных, но конгруэнтных кривых. Эта периодическая орбита соответствует резонансу  $2 : 1$ , при котором периоды прохождения двумя телами своих вытянутых замкнутых кривых ровно в два раза меньше периода, с которым третье тело описывает свою почти круговую орбиту.

Еще одна резонансная орбита с отношением периодов  $5 : 2$  была найдена Петровым [148]. Эта траектория представлена на рис. 38 в двух системах отсчета — в барицентрической (а) и в связанной с одним из тел (б). Эта орбита представляет собой пример частич-



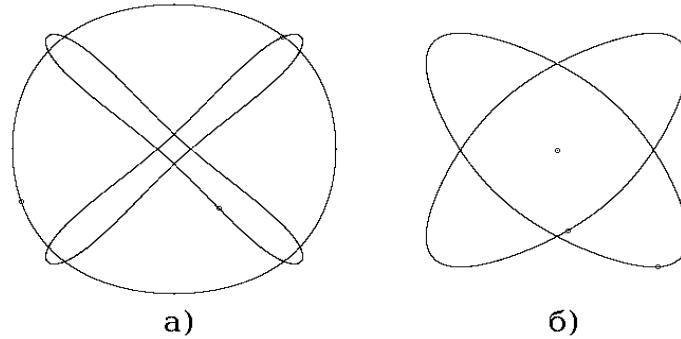


Рис. 37. Пример периодической орбиты, не являющейся хореографией (см. текст, рисунок предоставлен Петровым [148]). Резонанс 2 : 1.

ной хореографии, которая имеет место как в неподвижной барицентрической системе координат, так и во вращающейся системе координат, связанной с телом,двигающимся по кривой, близкой к окружности.

В работе Вандербея [59] представлен целый ряд периодических орбит в задаче трех тел, найденных посредством минимизации функционала действия (213), в том числе в тройных системах с компонентами различных масс. В некоторых случаях траектории движения отдельных тел могут иметь перегибы и/или самопересечения.

Множество симметричных периодических орбит в задаче трех тел (с неравными, вообще говоря, массами) построено Титовым [186, 187] путем минимизации функционала действия с помощью нелинейного оптимизатора LOQO, разработанного Вандербеем [59]. Приведены примеры орбит для различных наборов масс и угловых скоростей вращения системы координат. Найденные симметричные периодические орбиты воспроизведены также с помощью численного интегрирования уравнений движения задачи трех тел.

Представляет интерес изучение устойчивости обнаруженных периодических орбит, поскольку в окрестности устойчивых периодических орбит, согласно КАМ-теории, имеются области ненулевой меры траекторий с ограниченными движениями, все время пребывающими вблизи исходной периодической орбиты. В реальности

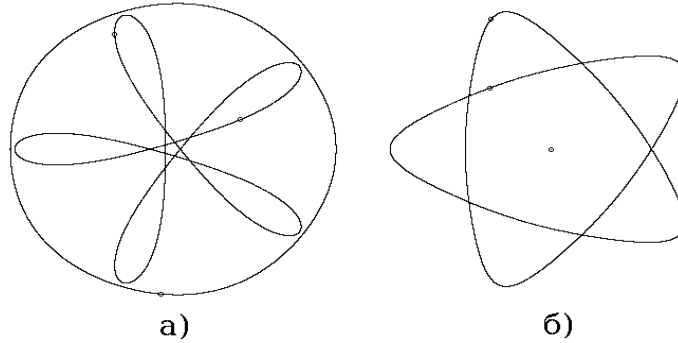


Рис. 38. Пример периодической орбиты в резонансе 5 : 2 (см. текст, рисунок предоставлен Петровым [148]).

устойчивые периодические орбиты могут порождать семейства траекторий с ограниченными движениями.

Устойчивость простых периодических решений при разных  $\alpha$  исследована в работе Мура [132] с помощью численного интегрирования уравнений движения. Оказалось, что круговые орбиты устойчивы при  $\alpha > -2$  и неустойчивы при  $\alpha \leq -2$ . Все найденные Муром периодические орбиты устойчивы в интегрируемом случае при  $\alpha = 2$ . Мур [132] также исследовал устойчивость орбиты «восьмерка» и показал, что эта орбита устойчива при  $\alpha > -1.24$ , в том числе она устойчива для ньютоновского потенциала при  $\alpha = -1$ . В узкой переходной области  $-1.26 \leq \alpha \leq -1.24$  топология орбиты сохраняется, но наблюдается нерегулярные прецессионные колебания. При  $\alpha \leq -1.27$  колебания становятся столь сильные, что топологическая структура нарушается и происходит уход одного из тел.

Последняя из орбит в табл. 17 устойчива при  $\alpha = -1$  ( $\alpha \leq 2$ ). С уменьшением  $\alpha$  начинается прецессия и при  $\alpha = -1.34$  происходит уход одного из тел. При дальнейшем уменьшении  $\alpha$  имеется «окно», где уходов не происходит, однако прецессия носит сложный «дикий» характер (wildly precessing). Возможные объяснения нарушения устойчивости периодических орбит на качественном уровне даны в работе Мура [132]. Они основаны на КАМ-теории, диффузии

Арнольда и качественном анализе экстремальных седловых точек систем дифференциальных уравнений.

Полуаналитический подход к анализу устойчивости орбиты «восьмерка» при  $\alpha = -1$  был использован в работе Симо [170]. Симо показал, что орбита устойчива, и исследовал структуру области устойчивости в окрестности этой орбиты. В работах Симо [170], а также Орлова и др. [143] было показано, что устойчивость орбиты «восьмерка» сильнее всего чувствительна к вариациям масс тел (рис. 39). На рис. 39 нанесены точки  $(m_1, m_2)$ , соответствующие устойчивым по Лагранжу траекториям с движениями,

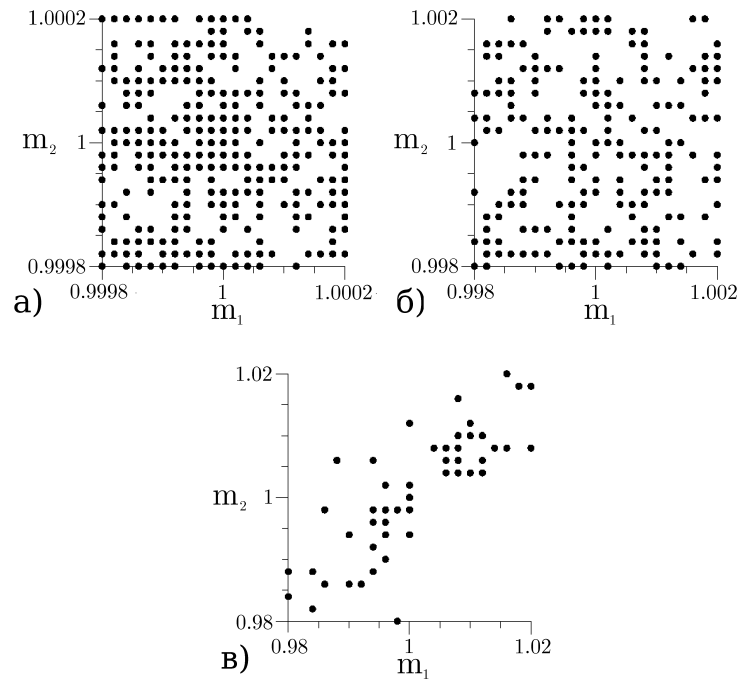


Рис. 39. Зависимость концентрации точек, соответствующих устойчивым по Лагранжу орбитам типа «восьмерка», от вариации масс тел  $m_1$  и  $m_2$  с шагами  $\delta m_1 = \delta m_2 = 2 \cdot 10^{-5}$  (а),  $2 \cdot 10^{-4}$  (б),  $2 \cdot 10^{-3}$  (в). Рисунок взят из работы Орлова и др. [143].

ограниченными, по крайней мере, в течение  $1000\tau$ . В этих тройных системах максимальное взаимное расстояние между телами на данном интервале времени не превосходило  $5d$ . Таким образом, при малых вариациях масс тел и сохранении начальных положений и скоростей тел имеется непрерывная область устойчивости в окрестности исходного периодического решения. При увеличении вариаций  $\delta m_i$  масс тел доля точек, соответствующих ограниченному движению, уменьшается. Однако множество устойчивых траекторий сохраняется. Граница области устойчивости довольно контрастная [170]. С другой стороны, было найдено некоторое количество разбросанных точек вне непрерывных областей устойчивости, для которых возможно нарушение устойчивости (в частности, уход на бесконечность одного из тел) при увеличении времени счета. Наряду с зонами устойчивости с хорошо определенной границей наблюдаются зоны устойчивости с размытой (разорванной) границей, представляющей собой множество разбросанных точек. Возможно, это множество представляет собой фрактал.

В работе Орлова и др. [143] была исследована структура трехмерных сечений множеств устойчивых орбит в окрестности орбиты «восьмерка». Сечения строились в пространствах начальных координат, скоростей и масс тел. Оценивались фрактальные размерности  $D_F$  этих множеств. Оказалось, что величины  $D_F \in (2, 3)$ , т.е. множества начальных условий для устойчивых орбит обладают свойствами фрактальности.

Отметим, что в тройных системах с компонентами равных масс и нулевым моментом вращения имеются, по крайней мере, три устойчивых периодических орбиты:

- орбита Шубарта [229] для предельного случая одномерной задачи трех тел;
- орбита Брука [47] для равнобедренной задачи трех тел;
- орбита «восьмерка», занимающая промежуточное положение между этими двумя орбитами.

Все эти три орбиты примечательны тем, что в некоторые моменты времени все три тела оказываются на одной прямой (т.н. *сизигии*). Заметим, что периодические решения Эйлера и Шубарта являются сизигиями в любой момент времени (однако решение Эйлера

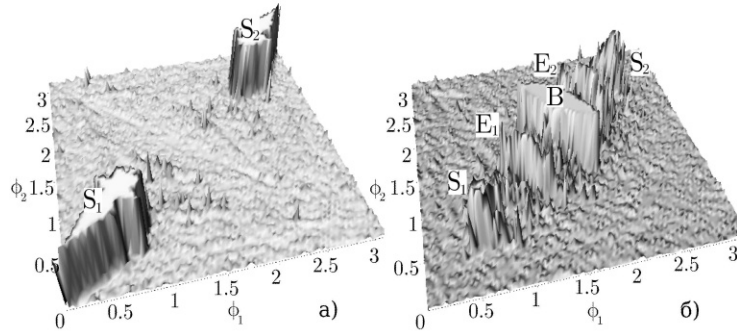


Рис. 40. Структура рельефа  $T(\phi_1, \phi_2)$  при  $k = 0.2$  (а) и  $k = 0.4$  (б).

неустойчиво). Для орбиты Брука и «восьмерки» начальные условия можно выбрать в момент пересечения сизигий.

В работе Орлова и др. [145] была исследована динамическая эволюция плоских невращающихся тройных систем с телами равных масс, у которых начальные условия задаются в моменты сизигий. Тогда одно из тел находится в центре масс тройной системы, а координаты и скорости всех трех тел вычисляются через три параметра — вириальный коэффициент  $k$  и углы  $\phi_1, \phi_2$ , определяющие ориентацию векторов скоростей крайних тел. Углы  $\phi_1, \phi_2$  задаются в интервале  $[0, \pi]$ . При этом используется свойство зеркальной симметрии относительно линии расположения трех тел. В пространстве параметров  $(k, \phi_1, \phi_2)$  выделены непрерывные области ограниченных движений, окружающие упомянутые выше три устойчивые периодические орбиты. Эти области изолированы друг от друга в пространстве  $(k, \phi_1, \phi_2)$ , однако они соединяются «мостами», соответствующими неустойчивым траекториям с длительным временем жизни. На рис. 40 приведены два сечения пространства параметров  $(k, \phi_1, \phi_2)$  при  $k = 0.2, 0.4$ .

Вдоль оси  $OZ$  отложено время нарушения устойчивости тройной системы, когда максимальное взаимное расстояние между телами  $r_{\max} > 5d$ . Верхние плато соответствуют системам, в которых это условие не выполнялось, по крайней мере, в течение  $1000\tau$ . На рис. 40а видны две непрерывные области устойчивости  $S_1$  и  $S_2$ , порожденные орбитой Шубарта (см. рис. 43а). На рис. 40б эти

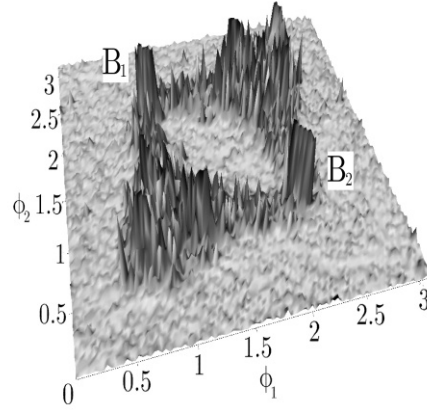


Рис. 41. Структура рельефа  $T(\phi_1, \phi_2)$  при  $k = 0.5$ .

области уже сильно разрушены, однако наблюдаются центральная область устойчивости  $B$ , порожденная орбитой Брука (см. рис. 43б), и две области  $E_1$  и  $E_2$ , порожденные орбитой «восьмерка» (см. рис. 43в), занимающие промежуточные положения между областями устойчивых орбит Шубарта и Брука. Все области устойчивости выстроены вдоль биссектрисы  $\phi_1 = \phi_2$  и симметричны относительно диагонали  $\phi_1 + \phi_2 = \pi$ , являющейся линией тройных соударений.

При дальнейшем росте начального вириального коэффициента  $k$  происходит постепенное разрушение областей устойчивости  $S$  и  $E$ , при этом формируется единая кольцеобразная структура (рис. 41). Образование этой структуры обусловлено разделением области устойчивости  $B$  орбиты Брука на две подобласти. Области устойчивости  $E_1$  и  $E_2$  орбиты «восьмерка» входят в это кольцо, а области устойчивости  $S_1$  и  $S_2$  орбиты Шубарта примыкают к кольцу вблизи областей  $E_1$  и  $E_2$ . Таким образом, области устойчивости  $E_1$  и  $E_2$  орбиты «восьмерка» разделяют области устойчивости, порожденных орбитами Шубарта и Брука.

Методы поиска периодических орбит, основанные на минимизации функционала действия (213), применялись не только в задаче трех тел, но и в задаче  $N > 3$  тел (см., например, работы Шансине и др. [220], Вандербея [59]). В частности, были получены

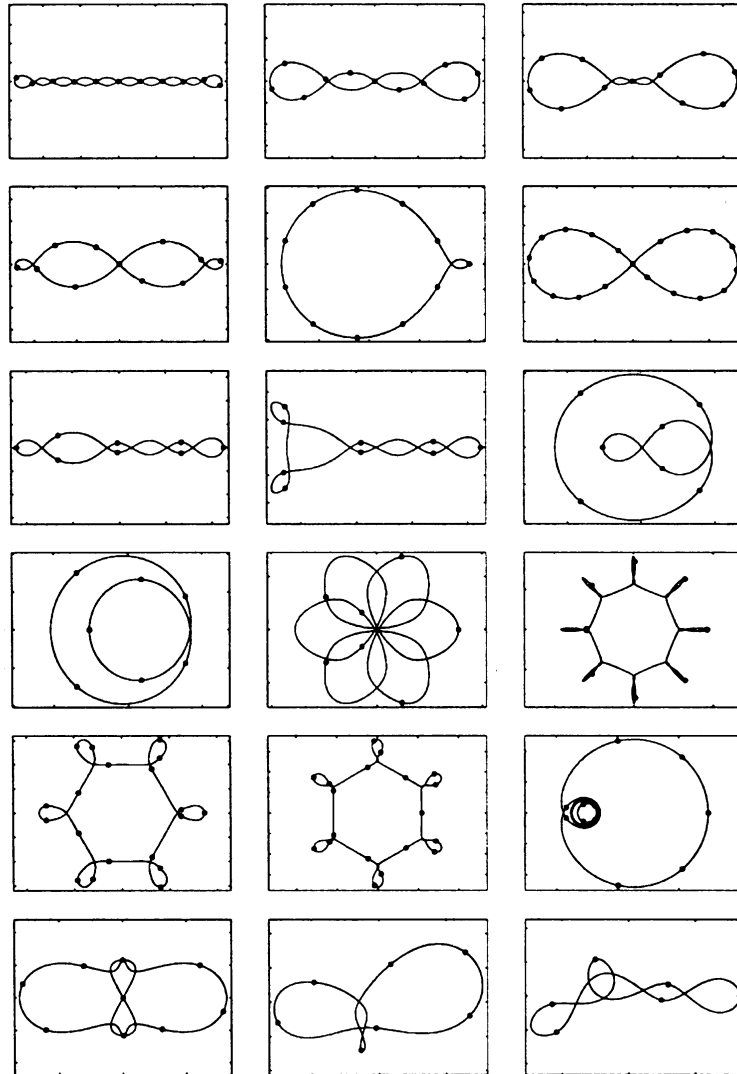


Рис. 42. Примеры периодических орбит хореографий для числа тел  $N > 3$  (рисунок из [171]).

хореографические решения для четырех, пяти и большего числа тел. Можно представить себе следующий способ построения семейства периодических орбит. Взяв за основу лагранжево решение (хореография) и перегнув эту окружность один раз, мы получим хореографию типа «восьмерка». Дальнейшие перегибы приводят к новым периодическим решениям типа цепочек, лепестков (сгиб наружу), петель (перегибание внутрь) и др. (см. рис. 42).

## § 6. Метастабильные системы

В теории динамических систем известно явление «прилипания», впервые обнаруженное в работах Чирикова [214,215] для некоторых физических систем. Это явление состоит в том, что фазовая траектория системы длительное время проводит в некоторой ограниченной области вблизи границы хаоса. Такое поведение типа диффузии связано со сложной структурой фазового пространства в окрестности инвариантных торов (см., например, работу Морбиделли и Джорджилли [131]). Явление «прилипания» известно и в некоторых небесно-механических задачах, например, в задаче Ситникова [74], в задаче о движении астероидов вблизи резонанса [221].

Детальный анализ метастабильности в общей задаче трех тел равных масс был проведен в работе Мартыновой и др. [120]. Были рассмотрены тройные системы с телами равных масс и нулевыми начальными скоростями. Начальные конфигурации выбирались на трех контурах, вытянутых вдоль границ области  $D$  (рис. 26) с расстояниями от границ  $\Delta = 0.001, 0.01, 0.1$ . Всего было рассмотрено около 15 000 вариантов начальных условий. Примерно в 1% систем тела значительное время проводят в окрестности периодических орбит (рис. 43). При этом возможны «перескоки» от одной периодической орбиты к другой. Примеры метастабильных траекторий приведены на рис. 44.

На основе просмотра траекторий и анимации движений тел были предложены геометрическая и динамическая классификации метастабильных траекторий в общей задаче трех тел. В геометрической классификации выделяются три вида орбит [120].

1. Вытянутая структура, когда центральное тело движется между двумя крайними телами, испытывая последовательные поочередные двойные сближения с каждым из них (рис. 45).



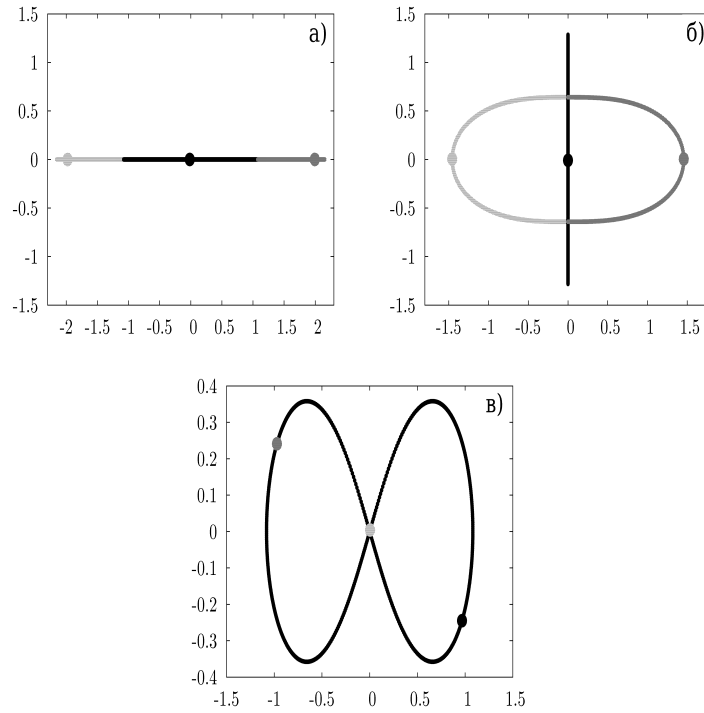


Рис. 43. Простые устойчивые периодические орбиты в задаче трех тел равных масс с нулевым угловым моментом: а) орбита Шубарта [229], б) орбита Брука [47], в) орбита «восьмерка» [132].

2. Траектория одного из трех тел заполняет круг или овал, а траектории двух других тел образуют кольцевые структуры, выступающие за овал, причем радиус овала существенно меньше, чем внешние радиусы колец (примерно одинаковые) (см. рис. 46).
3. Траектории всех трех тел заполняют круги или овалы приблизительно одинаковых размеров, накладывающиеся друг на друга (рис. 47).

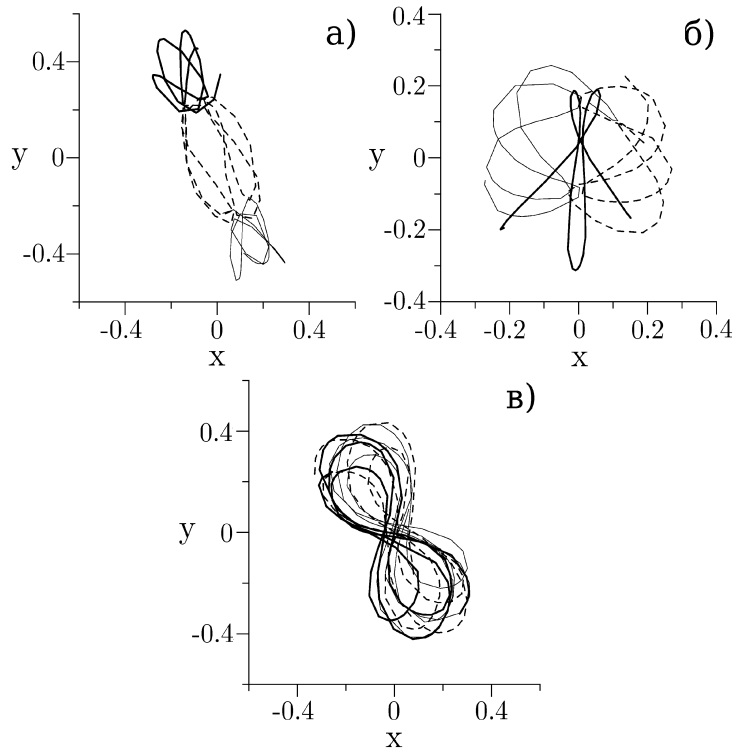


Рис. 44. Примеры метастабильных траекторий в окрестностях периодических орбит (рисунки из [120]).

Динамически можно выделить три типа движений тел.

1. Движения в окрестности периодической орбиты Шубарта (рис. 43а).
2. Движения около периодической орбиты Брука (рис. 43б).
3. Движения в окрестности периодической орбиты «восьмерка» (рис. 43в).

Распределение начальных условий для метастабильных траекторий вдоль границ  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  области  $D$  представлено на рис. 48.

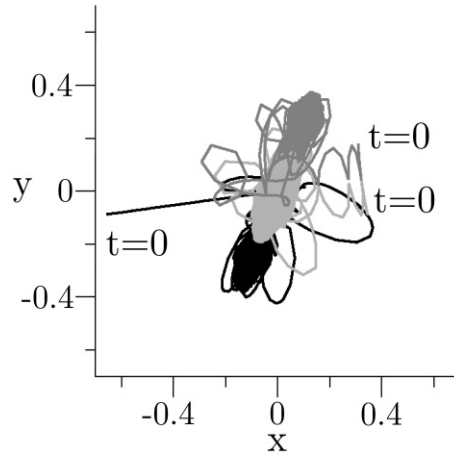


Рис. 45. Пример вытянутой метастабильной траектории типа орбиты Шубарта (начальные условия взяты на контуре, ближайшем к круговой границе области  $D$ ).

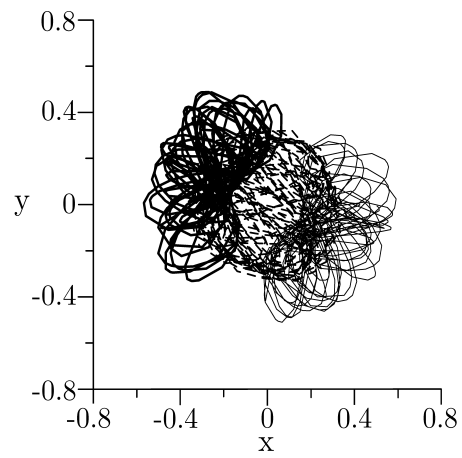


Рис. 46. Пример метастабильной орбиты типа орбиты Шубарта с округлыми «шапками» (начальные условия взяты на промежуточном контуре вдоль круговой границы области  $D$ ).

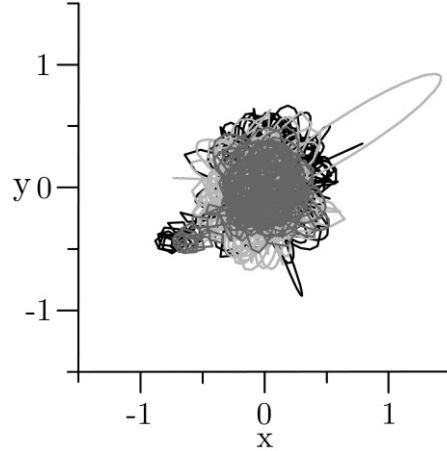


Рис. 47. Пример метастабильных траекторий с овалами приблизительно одинаковых радиусов.

Начальные координаты  $(\xi, \eta)$  для метастабильных систем концентрируются в основном вдоль границы  $D_1$ , образуя несколько сгущений точек. Начальные условия  $(\xi, \eta)$ , соответствующие траекториям типа орбиты Шубарта, концентрируются вблизи начала координат и вдоль оси абсцисс (граница  $D_2$ ). Начальные условия, соответствующие орбите Брука и орбите «восьмерка», примерно равномерно распределены вдоль границы  $D_1$  и реже встречаются вдоль границ  $D_2$  и  $D_3$ .

В работе Орлова и др. [146] проводился поиск метастабильных систем при сканировании области  $D$  начальных условий с шагом  $\Delta\xi = \Delta\eta = 0.001$  (всего рассмотрено около 300 000 систем). Результаты представлены на рис. 49. На рисунке нанесены положения  $(\xi, \eta)$  примерно для 9000 тройных систем (около 3% выборки), в ходе эволюции которых происходили переходы в метастабильный режим в течение времени, превышающего  $100\tau$ , где  $\tau$  — среднее время пересечения. Распределение начальных координат  $(\xi, \eta)$  для метастабильных систем в области  $D$  существенно неоднородно. Выделяются сгущения и разрежения точек. Сгущения, как правило, вытягиваются вдоль дугообразных областей, соответствующих быстрым распадам тройных систем.

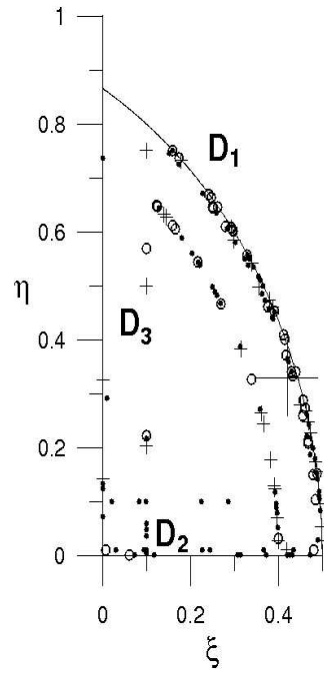


Рис. 48. Зависимость динамических типов движений в метастабильных системах от начальных условий: тип 1 — точки, тип 2 — крестики, тип 3 — светлые кружки.

Изучение метастабильных движений в дальнейшем можно проводить различными способами (см., например, работу Орлова и др. [146]):

- изучение рисунков траекторий и анимации движений тел;
- статистический анализ последовательностей состояний тройной системы;
- символическая динамика;
- вейвлет-анализ временных рядов состояний;
- вычисление энтропийных характеристик.

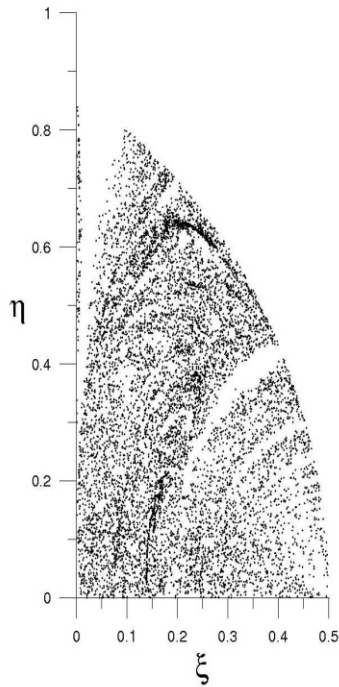


Рис. 49. Начальные координаты для метастабильных тройных систем (рисунок из работы [146]).

К настоящему времени изучение этого сложного динамического явления только начато. Но оно представляется нам весьма перспективным.

## § 7. Частные случаи задачи трех тел

До сих пор не найдено аналитического решения общей задачи трех тел в конечной форме. В то же время известны некоторые частные решения при определенных допущениях о характере движений тел (например, симметрии траекторий и периодичности движений). Как говорилось выше, давно известны равновесные решения Эйлера и Лагранжа, когда тела все время находятся на одной

вращающейся прямой или в вершинах вращающегося равностороннего треугольника. Оба эти решения замечательны тем, что взаимные расстояния между телами не меняются со временем. Эти решения, в частности, приведены в работе Мура [132] — вторая и пятая строки табл. 17. Заметим, что при несложном обобщении решений Эйлера и Лагранжа мы можем получить такие периодические движения, когда расстояния тел от центра масс тройной системы меняются, но пропорционально друг другу.

Исходя из решений Эйлера и Лагранжа, мы можем рассмотреть прямолинейную и равнобедренную задачи трех тел. В первом случае три тела всегда находятся на одной неподвижной прямой и центральное тело испытывает колебания между двумя крайними телами. Во втором случае центральное тело движется вдоль перпендикуляра к плоскости орбитального движения двух других тел, проходящего через центр масс этих тел. Прямолинейная задача одномерна, а равнобедренная задача может быть как плоской, так и пространственной. Равнобедренную общую задачу трех тел еще называют обобщенной задачей Ситникова.

Оба эти частных случая задачи трех тел можно свести к динамическим системам с двумя степенями свободы, если рассматривать относительные движения тел. Двойные соударения в обеих этих задачах носят характер абсолютно упругого отскока, что является предельным случаем очень тесных прохождений (этот факт нетривиален и имеет место только для ньютоновского потенциала взаимодействия). В прямолинейной задаче с компонентами разных масс  $m_1$  (левое тело),  $m_0$  (центральное тело) и  $m_2$  (правое тело) уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -\frac{m_0 + m_1}{r^2} + \frac{m_2}{\rho^2} - \frac{m_2}{(r + \rho)^2}, \\ \ddot{\rho} &= -\frac{m_0 + m_2}{\rho^2} + \frac{m_1}{r^2} - \frac{m_1}{(r + \rho)^2},\end{aligned}\tag{215}$$

где  $r$  и  $\rho$  — расстояния от центрального тела до левого и правого тел, постоянная тяготения  $G = 1$ .

Не умаляя общности, можно положить  $m_0 = 1$  и ввести относительные массы крайних тел  $\epsilon_1 = m_1/m_0$  и  $\epsilon_2 = m_2/m_0$ , причем  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0, +\infty)$ . Тогда уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -\frac{1+\epsilon_1}{r^2} + \frac{\epsilon_2}{\rho^2} - \frac{\epsilon_2}{(r+\rho)^2}, \\ \ddot{\rho} &= -\frac{1+\epsilon_2}{\rho^2} + \frac{\epsilon_1}{r^2} - \frac{\epsilon_1}{(r+\rho)^2}.\end{aligned}\quad (216)$$

В случае равных масс  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ . Система уравнений (216) обладает интегралом энергии

$$E = \frac{1}{2(1+\epsilon_1+\epsilon_2)} [\epsilon_1\dot{r}^2 + \epsilon_2\dot{\rho}^2 + \epsilon_1\epsilon_2(\dot{r}+\dot{\rho})^2] - \frac{\epsilon_1}{r} - \frac{\epsilon_2}{\rho} - \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{(r+\rho)}. \quad (217)$$

В равнобедренной задаче с компонентами различных масс уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -\frac{2}{r^2} - \frac{8\epsilon r}{(r^2+4R^2)^{3/2}}, \\ \ddot{R} &= -\frac{8(2+\epsilon)R}{(r^2+4R^2)^{3/2}},\end{aligned}\quad (218)$$

где  $R$  — расстояние от центрального тела до центра масс двух крайних тел,  $r$  — расстояние между крайними телами,  $\epsilon \in [0, +\infty)$  — отношение массы  $m_0$  центрального тела к массе одного из крайних тел (массы крайних тел равны  $m_1 = m_2 = 1$ ). При равных массах всех трех тел  $\epsilon = 1$ . Уравнения движения (218) имеют интеграл энергии

$$E = \frac{1}{4}\dot{r}^2 + \frac{\epsilon}{2+\epsilon}\dot{R}^2 - \frac{1}{r} - \frac{4\epsilon}{(r^2+4R^2)^{1/2}}. \quad (219)$$

Аналитических решений систем (216) и (218) пока получить не удалось. Были найдены так называемые гомографические решения этих задач, когда все три расстояния между телами меняются пропорционально. Для прямолинейной задачи равных масс при  $r = \rho$  уравнения (216) сводятся к одному уравнению [141]

$$\ddot{r} = -\frac{5}{4r^2}. \quad (220)$$

Решение этого уравнения имеет вид



$$\pm t = -\sqrt{r\left(\frac{5}{2} - r\right)} + \frac{5}{2}\sqrt{k(1-k)} + \frac{5}{4}\left[\arcsin\frac{4r-5}{5} - \arcsin(1-2k)\right], \quad (221)$$

где  $k$  — начальное значение вириального коэффициента  $k = T/|U|$  тройной системы. Заметим, что формула, аналогичная (221), справедлива также в симметричном случае, когда центральное тело находится в начале координат, массы крайних тел равны между собой ( $m_1 = m_2$ ) и расстояния  $r = \rho$ .

Для плоской равнобедренной задачи трех тел равных масс аналогичное уравнение имеет вид

$$\ddot{r} = -\frac{3}{r^2}, \quad (222)$$

причем всегда  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ , т.е. тела находятся в вершинах равностороннего треугольника. Уравнение (222) можно легко решить, однако в общем случае решение получается довольно громоздким, и мы его не приводим. В частном случае, когда вначале тела неподвижны и находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$ , решение уравнения (222) имеет вид

$$t = \frac{a}{\sqrt{6}} \left\{ \sqrt{a} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \left( 1 - \frac{2r}{a} \right) \right] + \sqrt{r \left( 1 - \frac{r}{a} \right)} \right\}. \quad (223)$$

Тройное соударение происходит при  $t = \frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{24}}$ .

Подробный анализ движений в прямолинейной задаче трех тел проведен в цикле работ Хиетаринты и Микколы (см., например, обобщающую статью Хиетаринты и Микколы [202] и ссылки в ней), а также в работах Таникавы и Микколы [182] и Таникавы и Сайто [183]. Обзор результатов дан в статье Орлова и др. [147]. В этих работах выделены три основных типа движений:

- 1) быстрый уход одного из крайних тел после небольшого числа столкновений центрального тела с каждым из крайних тел;
- 2) хаотическое рассеяние — уход одного из крайних тел после большого числа двойных соударений;
- 3) близкие к периодическим ограниченные движения.

Распределение по типам движения при фиксированном отношении масс тел (фиксированных параметрах  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ) определяется устойчивостью или неустойчивостью периодической орбиты Шубарта [229]. Если эта орбита устойчива, то в ее окрестности имеется множество орбит с ограниченными движениями. Потеря устойчивости этой орбиты приводит к увеличению меры множества траекторий с быстрыми распадами. Таким образом, периодическая орбита Шубарта в значительной степени формирует фазовый портрет множества решений.

При численных исследованиях движений в *прямолинейной задаче* трех тел возможны различные подходы при выборе начальных условий. В частности, в работах Хиетаринты и Микколы [202], Таникавы и Микколы [182], Таникавы и Сайто [183] использовался следующий подход. Выбирались значения параметров  $\theta$  и  $R$  так, что

$$R = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad (224)$$

а угловая переменная  $\theta$  определяется из соотношений

$$\sqrt{T} \sin \theta = v_1, \quad \sqrt{T} \cos \theta = v_2, \quad (225)$$

где  $T$  — кинетическая энергия, т.е.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} \right) p_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) p_2^2 - \frac{p_1 p_2}{m_0} = \\ &= v_1^2 + v_2^2, \end{aligned} \quad (226)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — импульсы, соответствующие обобщенным координатам  $q_1$  и  $q_2$ . Заметим, что в (226) выполнено приведение функции  $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$  к положительно определенной квадратичной форме. В использованных выше обозначениях  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \rho$ .

В работах Орлова и др. [141, 143] использован другой способ выбора начальных условий. Предполагалось, что при  $t = 0$  центральное тело находится посередине между крайними телами ( $r = \rho$ ). Тогда начальные положения и скорости тел определяются через два параметра.

#### 1. Вириальный коэффициент

$$k = \frac{T}{|U|} \in [0, 1). \quad (227)$$

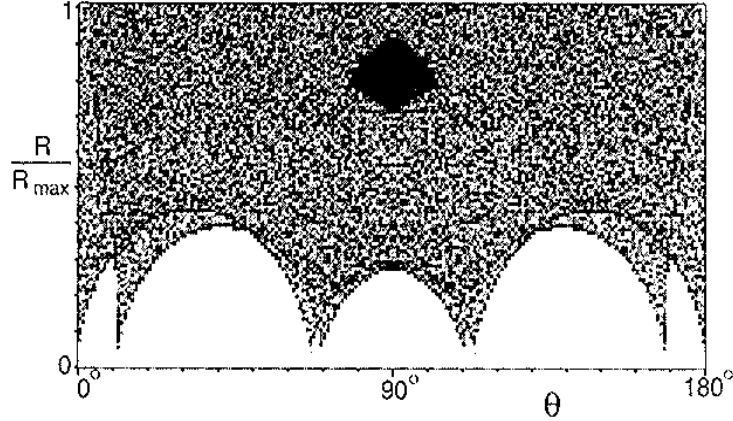


Рис. 50. Зависимость типа орбит от начальных условий  $(\theta, R)$  (рисунок из работы Хьетаринты и Микколы [202]).

2. Угол  $\phi \in [0, 2\pi]$ , характеризующий соотношение между начальными скоростями тел

$$\dot{r} = q \sin \phi, \quad \dot{\rho} = q \cos \phi, \quad (228)$$

где

$$q = \sqrt{\frac{2k(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2)}{(1 - k)[\epsilon_1 \sin^2 \phi + \epsilon_2 \cos^2 \phi + \epsilon_1 \epsilon_2 (\sin \phi + \cos \phi)^2]}}. \quad (229)$$

Заметим, что величина  $k$  определяет тесноту сближения тел и интенсивность их взаимодействия, а угол  $\phi$  определяет особенности кинематики движений (сближения или разлет в парах тел  $m_1 m_0$  и  $m_2 m_0$ ).

Результаты эволюции тройных систем в прямолинейной задаче в зависимости от начальных условий можно представить в следующем виде на рис. 50 [202]. На этом рисунке для случая равных масс приведены области быстрых уходов (не заштрихованы), области хаотического рассеяния — уход одного из крайних тел после длительной эволюции (серый цвет) и область устойчивых движений вокруг орбиты Шубарта (черный цвет). Размеры этих областей

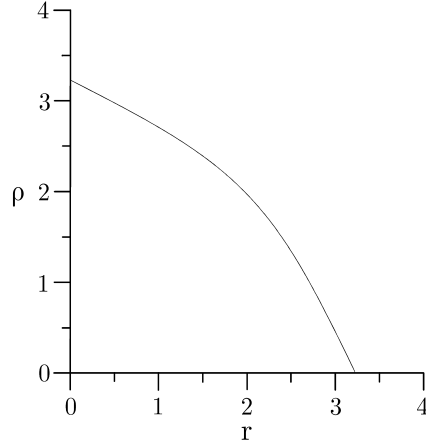


Рис. 51. Периодическая орбита Шубарта [229] при  $k = 0.206$  и  $\phi = 135^\circ$  (рисунок из [141]).

изменяются в зависимости от отношения масс тел (параметры  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ). В работе Хиетаринты и Микколы [202] показано, что на границе области устойчивости располагаются точки, соответствующие неустойчивым периодическим орбитам.

В работе Орлова и др. [141] была построена орбита Шубарта и орбиты в ее окрестности (рис. 51, 52). Близкие к периодическим устойчивые орбиты заполняют трубки, ориентированные вдоль орбиты Шубарта. Орбиты выпуклы и симметричны относительно биссектрисы  $r = \rho$ .

На рис. 53 представлена зависимость сценария эволюции от начальных условий  $(\phi, k)$ . На рисунке в области  $(\phi, k)$  прослеживаются множества точек, соответствующих разным сценариям:

- уход или далекий выброс одного из крайних тел

$$\max \left\{ r + \frac{\rho}{2}, \rho + \frac{r}{2} \right\} > 30; \quad (230)$$

- устойчивые системы;
- тройные соударения;

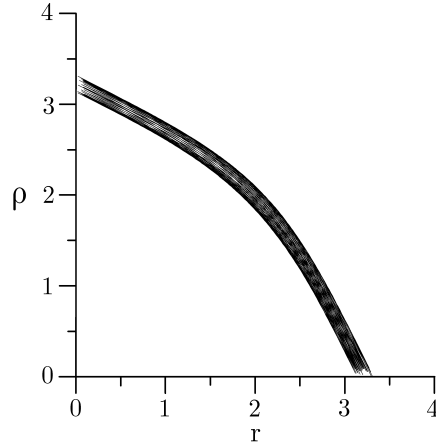


Рис. 52. Близкая к периодической устойчивая орбита при  $k = 0.18$  и  $\phi = 135^\circ$  (рисунок из [141]).

- оставшееся светлое пространство заполнено системами с короткими выбросами с возвратом или системами, пребывающими в состоянии простого взаимодействия (simple interplay).

Отметим, что начальные условия, соответствующие быстрым уходам и далеким выбросам, располагаются в основном в области больших  $k > 0.6$  и вдоль линии тройных соударений  $\phi = 225^\circ$ . Эти зоны симметричны относительно линий тройных соударений  $\phi = 45^\circ$  и  $225^\circ$ , причем в симметричных точках происходят уходы или выбросы разных крайних тел.

На рис. 54 и 55 для примера приведены зависимости длины первого выброса от величины  $\phi$  при фиксированном  $k = 0.5$  и от величины  $k$  при фиксированном  $\phi = 190^\circ$ . Здесь крестики соответствуют выбросам левого тела, а квадратики — правого тела. На рис. 54 видна симметрия относительно линий тройных соударений  $\phi = 45^\circ$  и  $225^\circ$ . Заметим, что на обоих рисунках имеются области непрерывного изменения длины выброса при вариации начальных условий и зоны нерегулярного поведения. Как правило, с ростом  $k$  длина выброса увеличивается и уменьшается доля точек с нерегулярным поведением. Наблюдается перемежаемость зон с регулярным и нерегулярным поведением.

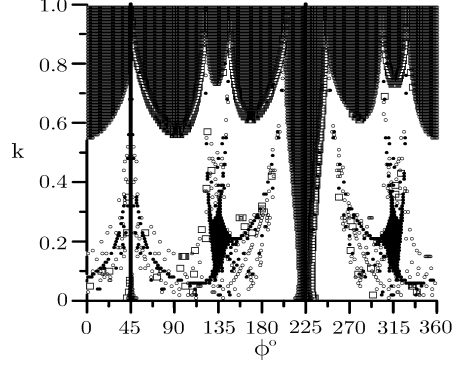


Рис. 53. Зависимость сценария ухода от начальных условий  $(\phi, k)$ : кружки — уходы, квадратики — далекие выбросы, точки — нераспавшиеся системы. Вертикальные прямые  $\phi = 45^\circ, 225^\circ$  соответствуют тройным соударениям.

При изучении характера движений в *равнобедренной задаче* трех тел для выбора начальных условий при заданном отношении масс тел  $\varepsilon$  достаточно ввести два параметра, характеризующие тесноту тройной системы и отношение скоростей тел. Орлов и др. [140, 142], Орлов и Маргынова [138] рассматривают в качестве этих параметров вириальный коэффициент

$$k = \left( \frac{\dot{r}_0^2}{4} + \frac{\varepsilon \dot{R}_0^2}{\varepsilon + 2} \right) \left( \frac{1 + 4\varepsilon}{r_0} \right)^{-1} \quad (231)$$

и отношение скоростей

$$\mu = \frac{\dot{r}_0}{\sqrt{\dot{r}_0^2 + \dot{R}_0^2}}. \quad (232)$$

В силу симметрии задачи мы можем брать только положительные значения скорости центрального тела  $\dot{R}_0 > 0$ . Параметры  $k$  и  $\mu$  изменяются в следующих пределах

$$k \in (0, 1), \quad \mu \in (-1, 1). \quad (233)$$

Границы интервалов  $k = 0, 1; \mu = \pm 1$  не рассматривались, поскольку эти значения соответствуют тройным соударениям тел.

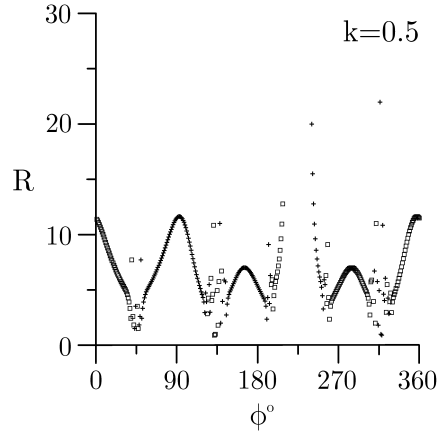


Рис. 54. Зависимость длины выброса от  $\phi$  при  $k = 0.5$  (рисунок из [141]).

В работе [140] было исследовано влияние прохождения центрального тела через центр масс тройной системы на последующий выброс с возвратом (поворот) или уход этого тела.

Область начальных условий, определяемых параметрами  $k$ ,  $\mu$ , разделяется на две непрерывные зоны:

- 1) зона уходов ( $E_{\text{ex}} > 0$ ),
- 2) зона выбросов ( $E_{\text{ex}} < 0$ ).

Здесь  $E_{\text{ex}}$  — энергия движения центрального тела

$$E_{\text{ex}} = \frac{1}{3}\dot{R}^2 - \frac{2}{R}. \quad (234)$$

В случае поворота оценивалась длина  $R$  выброса, а в случае ухода — энергия гиперболического движения  $E_{\text{ex}}$ . Зависимость длины выброса  $R$  от начальных условий  $(k, \mu)$  для случая равных масс ( $\varepsilon = 1$ ) представлена на рис. 56 и 57.

Прослеживается четкая связь между теснотой сближения и длиной выброса — с увеличением тесноты сближения (параметр  $k$ ) выбросы в среднем становятся более далекими. Однако, теснота сближения — не единственный параметр, влияющий на длину

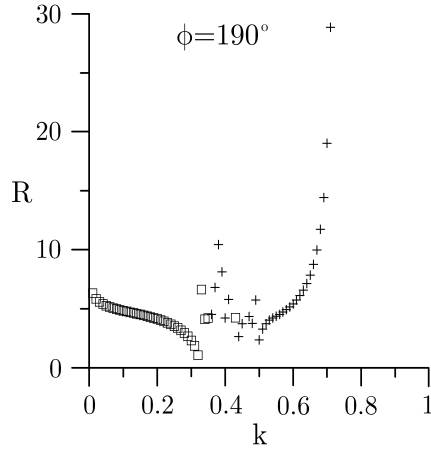


Рис. 55. Зависимость длины выброса от  $k$  при  $\phi = 190^\circ$  (рисунок из [141]).

выброса. Параметр  $\mu$  также играет существенную роль. Максимум длины выброса для фиксированного значения  $k$  достигается при  $\mu \in (0.2, 0.5)$ , когда крайние тела расходятся со сравнительно небольшой скоростью. В этом случае после пролета центрального тела через центр масс тройной системы уменьшается сила действия на него со стороны крайних тел и оно может уйти из системы. Если крайние тела сближаются, то пролетающее тело после сближения будет тормозиться и запаса его кинетической энергии может быть недостаточно для ухода. При фиксированном значении  $k$  существует оптимальное значение  $\mu \approx \frac{1}{3}$ , для которого выброс является наиболее далеким или при уходе уносится максимальная энергия. На рис. 58 представлены зависимости уносимой энергии  $E_{\text{ex}}(k, \mu)$ .

Границу зоны уходов можно аппроксимировать кривой 3-го порядка

$$k = 0.29\mu^3 + 0.43\mu^2 - 0.37\mu + 0.88. \quad (235)$$

Все уходы происходят при  $k > 0.82$ . Изолинии  $R = \text{const}$  для выбросов с возвратом охватывают заштрихованную зону уходов (см. рис. 56) и отдаляются от нее по мере уменьшения длины выброса.

Представляет интерес изучить не только результат одного прохождения центрального тела до поворота или ухода, но и результат



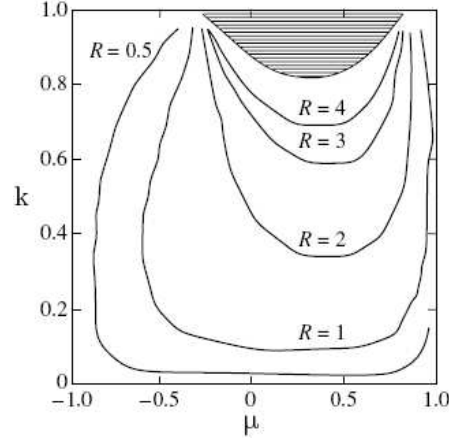


Рис. 56. Изолинии постоянной длины выброса  $R = \text{const}$  на плоскости  $(k, \mu)$ . Заштрихована область уходов после первого сближения.

всей эволюции тройной системы в зависимости от параметров  $k$ ,  $\mu$  и отношения масс  $\varepsilon$ .

В общем случае мы можем задать начальные условия  $r_0$ ,  $R_0$ ,  $\dot{r}_0$ ,  $\dot{R}_0$  через параметры  $\varepsilon$ ,  $k$ ,  $\mu$ . Не ограничивая общности, мы можем принять  $R_0 = 0$  (ситуация *syzygy crossing*). Тогда величины  $r_0$ ,  $\dot{r}_0$ ,  $\dot{R}_0$  определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 r_0 &= (1 - k)(1 + 4\varepsilon), \\
 \dot{r}_0 &= \mu \sqrt{4k / \left\{ (1 - k) \left[ \mu^2 + \frac{4\varepsilon}{2 + \varepsilon} (1 - \mu^2) \right] \right\}}, \\
 \dot{R}_0 &= \sqrt{4k / \left\{ (1 - k) \left[ \frac{\mu^2}{(1 - \mu^2)} + \frac{4\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right] \right\}}.
 \end{aligned} \tag{236}$$

Для того, чтобы объективно сравнивать результаты численного моделирования при разных начальных условиях, полезно использовать динамическую систему единиц (см., например, [22]):

$$d = \frac{\sum_{i \neq j} m_i m_j}{2|E|} = \frac{1}{2} + \varepsilon, \tag{237}$$

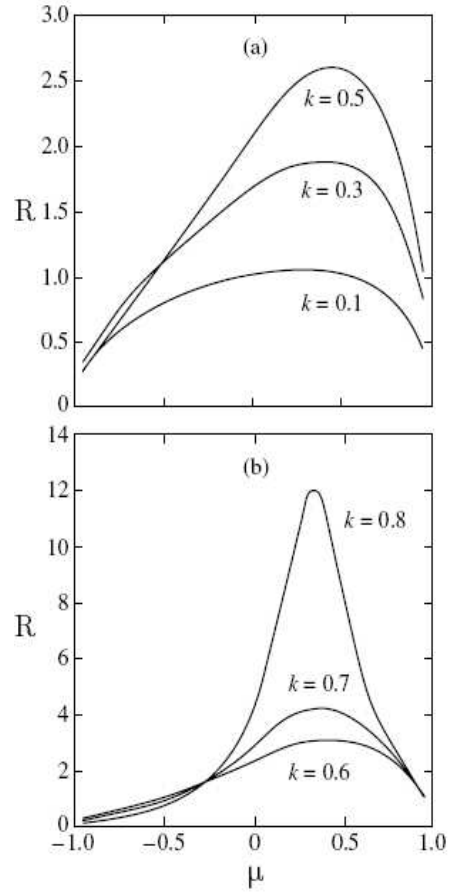


Рис. 57. Зависимость длины выброса  $R(\mu)$  при разных  $k$ : а)  $k = 0.1, 0.3, 0.5$ ; б)  $k = 0.6, 0.7, 0.8$ .

$$\tau = \frac{\sum_{i \neq j} m_i m_j \sqrt{\sum_i m_i}}{\sqrt{2|E|^3}} = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2}}, \quad (238)$$

где  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $m_0 = \varepsilon$ ,  $E = -1$ ,  $G = 1$ .

Эволюция каждой тройной системы прослеживалась либо до

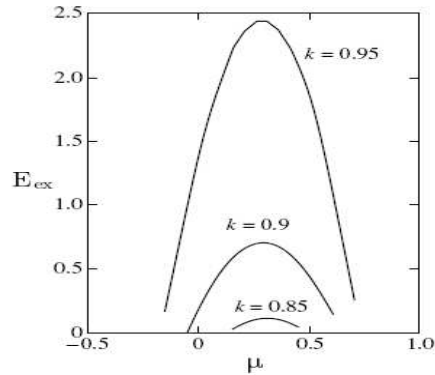


Рис. 58. Зависимость  $E_{\text{ex}}(k, \mu)$  для уходов.

ухода центрального тела, согласно критерию из работы [87], либо до достижения этим телом критического расстояния  $R_c = 100d$  (условный уход), либо до критического времени  $t_c = 1000\tau$ .

Движения тел на плоскости  $(r, R)$  могут происходить только в пределах области возможных движений, ограниченной контуром нулевых скоростей  $\dot{r} = \dot{R} = 0$ . Примеры таких контуров для трех значений  $\varepsilon = 0.5, 1, 2$  приведены на рис. 59.

Было выделено несколько видов орбит (см. рис. 60). Как правило, эволюция тройной системы завершается уходом центрального тела после нескольких его проходов через центр масс тройной системы (рис. 60а). Периодическая орбита Брука [47], показанная на рис. 60б, находится в пределах прямоугольника  $r \in [0, 3]$ ,  $R \in [-2, 2]$ . Она симметрична относительно оси  $R = 0$ . Эта орбита устойчива. Вокруг нее имеется множество орбит с ограниченными движениями, одна из таких орбит приведена на рис. 60в. Она заключена внутри прямоугольника  $r \in [0, 3]$ ,  $R \in [-3, 3]$ . Витки траектории образуют складку треугольной формы в окрестности точки  $r = 2, R = 0$ . Контур складки находится внутри области орбиты и не доходит до внешней огибающей траектории. На рис. 60г показана еще одна более сложная периодическая орбита с двумя уровнями колебаний  $r$ .

Можно провести классификацию траекторий в равнобедренной задаче по числу проходов  $n$  центрального тела через центр масс

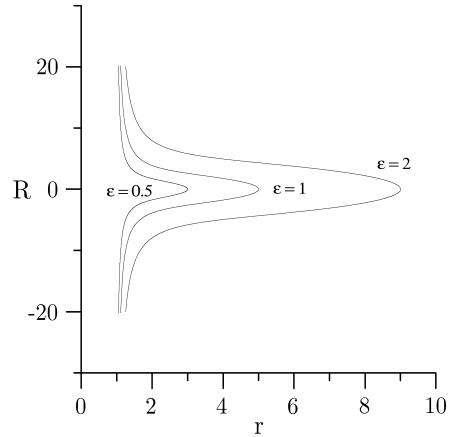


Рис. 59. Контуры нулевой скорости при  $\varepsilon = 0.5, 1, 2$ . Значение  $\varepsilon = 1$  соответствует случаю равных масс.

тройной системы (*syzygy crossing*). На рис. 61 показаны области начальных значений  $(\mu, k)$ , соответствующие траекториям с уходами после  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  проходов (*fly-by*). На рисунке видны непрерывные области начальных условий, соответствующие регулярным орбитам при небольших  $n$ . Зоны непрерывности с  $n \geq 2$  стыкуются друг с другом и располагаются по периметру области начальных условий. Эти зоны разделяются линиями тройных соударений. Кроме того, наблюдаются вытянутые линейчатые структуры, состоящие из отдельных точек. С ростом  $n$  область регулярных орбит «прижимается» к границам области начальных условий и появляются множества «разбросанных» точек, соответствующих стохастическим траекториям.

Среди траекторий с длительным временем жизни выделяется непрерывная область близких к периодическим орбит в виде полумесяца. Также имеются отдельные точки, которые соответствуют стохастическим траекториям (см. рис. 62). Среди долгоживущих траекторий могут быть траектории с далекими выбросами с возвратом.

Размеры областей регулярности и устойчивости зависят от отношения масс  $\varepsilon$ . Область устойчивых орбит в окрестности орбиты

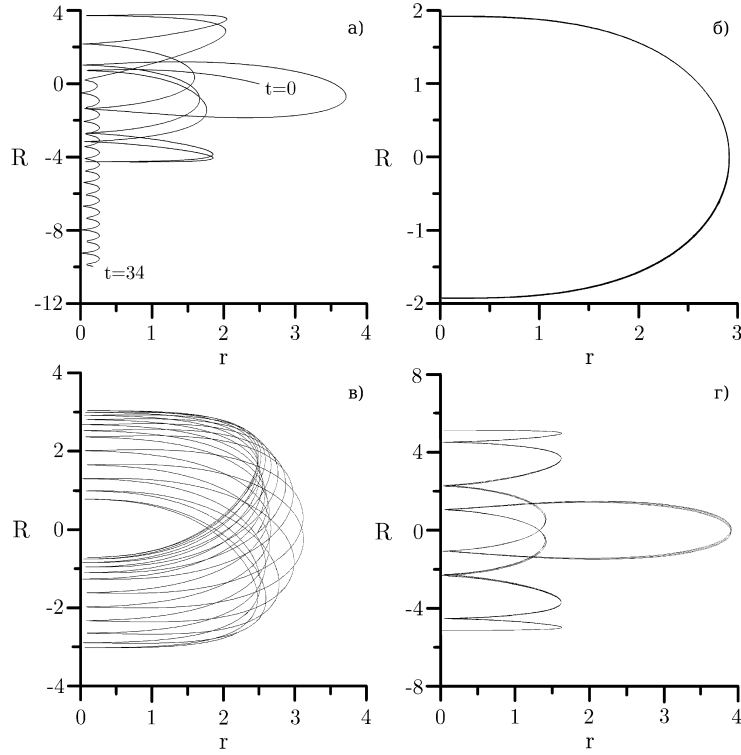


Рис. 60. Разные виды орбит в равнобедренной задаче трех тел равных масс ( $\varepsilon = 1$ ): а) орбита с уходом ( $k = 0.5, \mu = -0.7$ ); б) периодическая орбита Брука ( $k = 0.418, \mu = 0$ ); в) близкая к периодической орбита ( $k = 0.5, \mu = 0.33$ ); г) периодическая орбита второго типа ( $k = 0.22, \mu = 0.07$ ).

Брука имеет максимальную площадь при равных массах ( $\varepsilon = 1$ ). Область быстрых уходов при малых  $n$  увеличивается с уменьшением массы центрального тела. При  $n \geq 2$  наблюдается расслоение областей регулярности с образованием вытянутых «разорванных» структур. С ростом  $\varepsilon$  происходит стохастизация орбит, т.е. увеличение числа разбросанных точек и уменьшение размеров зон регулярности.

Заметим, что классификацию орбит можно проводить не только

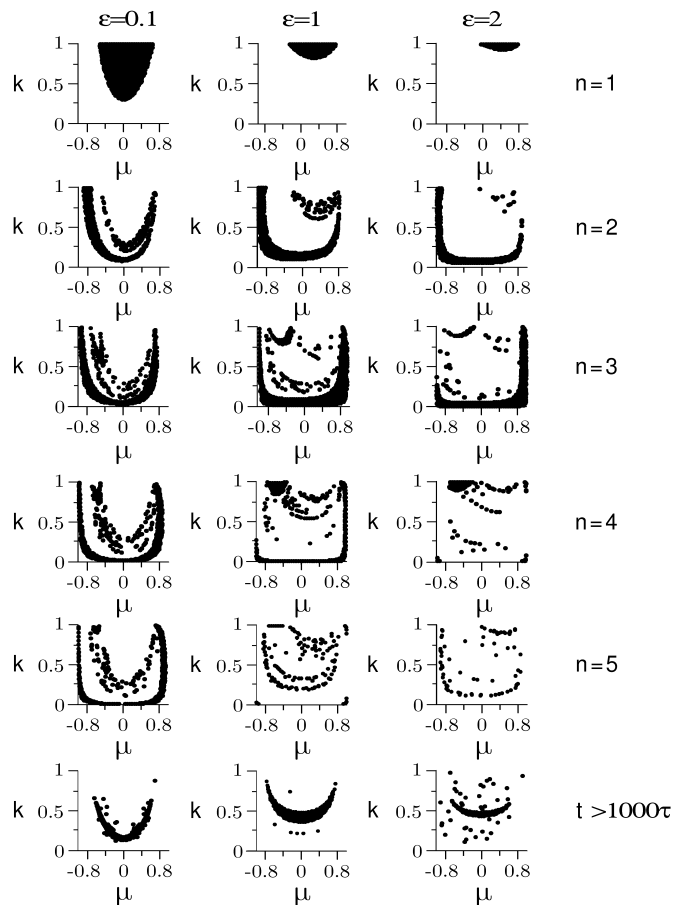


Рис. 61. Области  $(\mu, k)$ , соответствующие уходам после  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  проходов и орбитам с временем жизни  $t > 1000\tau$ .

по числу проходов  $n$ , но и по времени жизни  $t$  тройной системы [138]. За момент распада тройной системы будем принимать момент последнего прохождения центрального тела через центр масс тройной системы. Зависимость времени  $t$  от начальных условий  $(\mu, k)$  представлена на рис. 63.

Наблюдается непрерывная область начальных условий, соответ-

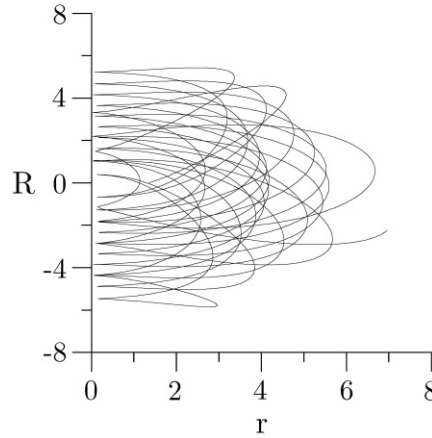


Рис. 62. Пример стохастической траектории с длительным временем жизни при  $\varepsilon = 2$ ,  $k = 0.85$ ,  $\mu = 0.85$ .

ствующая уходам при  $t = 0$  (после первого прохождения). При малых значениях  $\varepsilon$  эта область почти симметрична относительно прямой  $\mu = 0$ . С ростом  $\varepsilon$  размер этой области постепенно уменьшается, и область сдвигается вправо в сторону  $\mu > 0$ . При равных массах этот сдвиг весьма существенен. При больших значениях параметра  $\varepsilon$  области начальных условий, соответствующих быстрым уходам, уменьшаются по площади и концентрируются в основном вблизи границ области начальных условий.

Существует статистически значимая корреляция между временем жизни тройной системы и числом прохождений центрального тела через центр инерции тройной системы. Отметим, что существует «зона избегания» ниже прямой

$$t = \alpha n, \quad (239)$$

где время жизни  $t$  выражено в единицах среднего времени пересечения  $\tau$  тройной системы. Величина наклона  $\alpha$  зависит от отношения масс  $\varepsilon$  (рис. 64); с ростом  $\varepsilon$  величина  $\alpha$  убывает примерно вдвое при увеличении  $\varepsilon$  от 0.01 до 10.

Множество точек, соответствующих траекториям с временем жизни  $t > 1000\tau$ , располагается справа от прямой линии (239). Наличие «зоны избегания» при углах  $\phi < \phi^* = \arctg \alpha$  свидетельству-

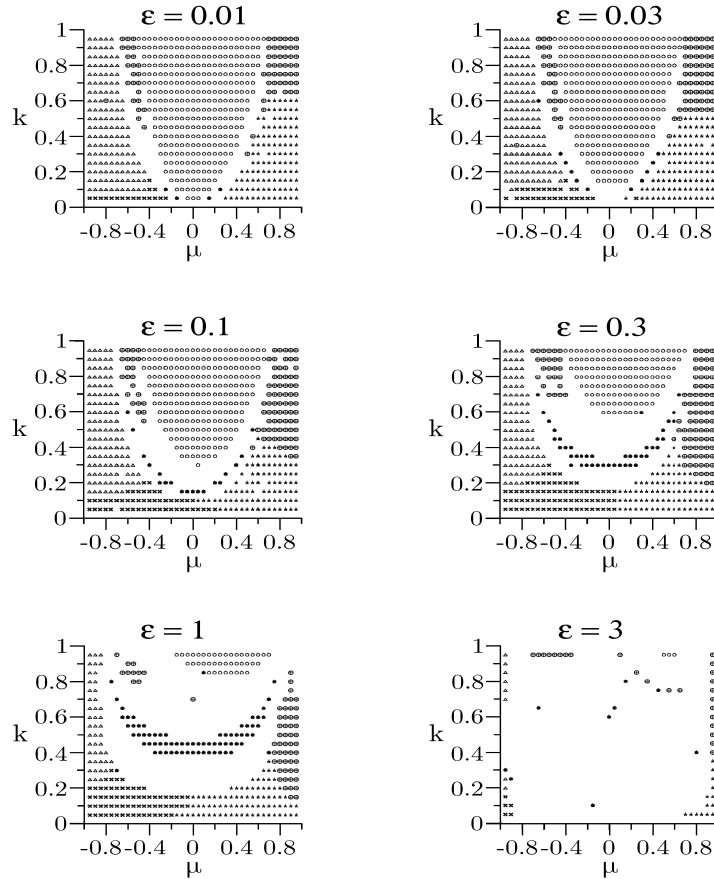


Рис. 63. Области начальных условий, соответствующих уходам в различные интервалы времени:  $t = 0$  — кружки,  $0 < t < 1\tau$  — треугольники,  $1\tau < t < 2\tau$  — крестики,  $2\tau < t < 3\tau$  — звездочки,  $3\tau < t < 4\tau$  — крестики в кружочках,  $t > 1000\tau$  — точки.

ет об отсутствии тройных систем с большим числом проходов и коротким временем жизни. С ростом  $\epsilon$  увеличивается концентрация точек к пограничной прямой (239) сверху.

Рассмотрим зависимость между временем жизни  $t$  тройной си-



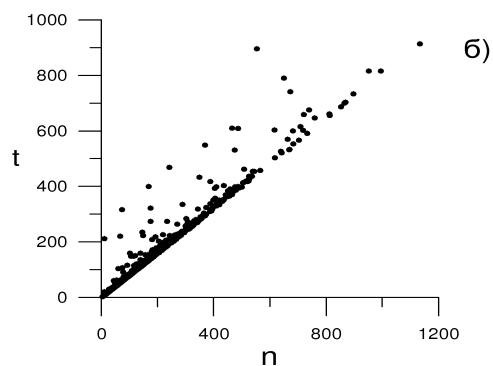
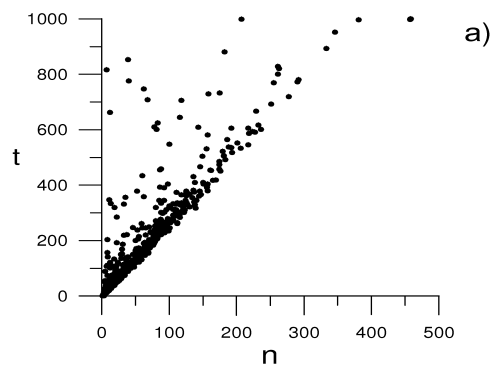


Рис. 64. Зависимости  $t(n)$  времени жизни от числа проходов при  $\varepsilon = 2$  (а) и  $\varepsilon = 30$  (б).

стемы и средним временем  $t'$  между последовательными прохождениями центрального тела через центр масс тройной системы. При больших временах жизни  $t$  имеется нижняя граница  $t'$ , зависящая от отношения масс  $\varepsilon$ . Это граничное значение уменьшается примерно втрое при увеличении  $\varepsilon$  от 0.01 до 10. Очевидно, что сверху время  $t'$  ограничено временем жизни тройной системы.

Статистическое изучение результатов численных экспериментов показало, что существуют зависимости между максимально достижимыми в ходе эволюции тройной системы расстояниями:  $r_{\max}$  —

расстояние между крайними телами и  $R_{\max}$  — расстояние между центральным телом и центром масс крайних тел. Такая зависимость для случая равных масс ( $\varepsilon = 1$ ) представлена на рис. 65.

Точки на этом рисунке заполняют область, напоминающую основание вазы. Внутри этой области видны линейные структуры с  $n = 2$ . На левой границе этого множества находятся точки с  $n = 1$  (пролеты). Прослеживается линия, проходящая из левого верхнего угла «вазы» в правый нижний угол. Эта линия может быть огибающей для определенных семейств траекторий. Заметим, что в окрестности точки перегиба ( $R_{\max} \approx 2.5$ ,  $r_{\max} \approx 3$  этой линии) находится множество систем из области начальных условий, соответствующих ограниченному движению тел на интервале времени  $t > 1000\tau$  в области, имеющей форму полумесяца на рис. 61.

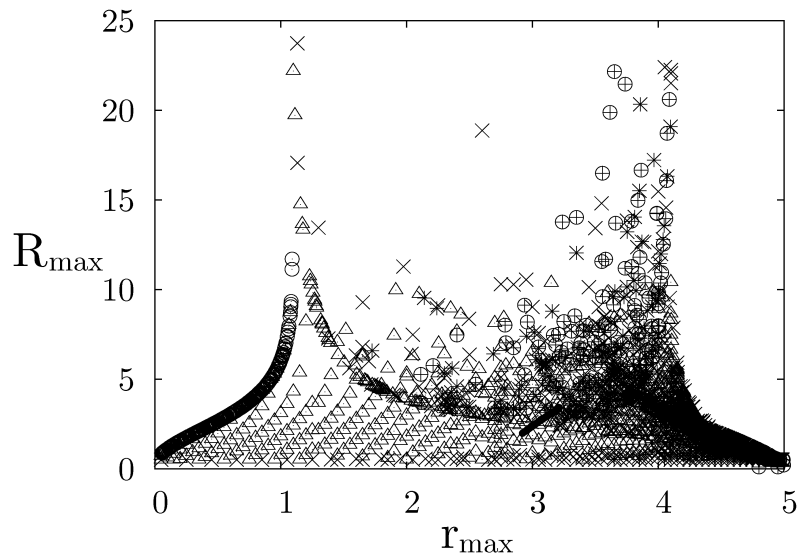


Рис. 65. Зависимость  $R_{\max}(r_{\max})$  при равных массах ( $\varepsilon = 1$ ) для  $n$  проходов:  $n = 1$  — кружки,  $n = 2$  — треугольники,  $n = 3$  — крестики,  $n = 4$  — звездочки,  $n = 5$  — крестики в кружках, точки соответствуют системам с  $t > 1000\tau$ .

На рис. 65 эти системы образуют отрезок прямой линии. Эта линия приблизительно разделяет множества траекторий с регулярными и стохастическими движениями. На этой разделяющей линии (в нижней ее части после точки перегиба) возможны уходы после разного числа прохождений. Также можно отметить второе множество точек ( $r_{\max} \approx 4$ ,  $R_{\max} \approx 5$ ), соответствующих траекториям с ограниченными движениями в окрестности периодической орбиты, изображенной на рис. 60г. Можно предположить, что множества стохастических траекторий появляются как разрывы множеств регулярных орбит, которые при малых изменениях начальных условий теряют свойство регулярности.

Таким образом, в плоской равнобедренной задаче трех тел отношение  $\varepsilon$  массы центрального тела к массе одного из крайних тел является управляющим параметром задачи. С ростом  $\varepsilon$  увеличивается доля орбит со стохастическими движениями и уменьшается доля регулярных орбит. При  $\varepsilon \geq 10$  множества регулярных орбит исчезают. На двумерных зависимостях между эволюционными параметрами с ростом  $\varepsilon$  происходит перераспределение точек из систем линий в систему двумерных многообразий — множеств точек, заполняющих некоторые полосы.

Изучение характера движений в частных случаях задачи трех тел можно проводить методами символической динамики. Такие исследования были выполнены, в частности, Алексеевым для задачи Ситникова (см. монографию [10] и ссылки в ней), для прямолинейной задачи трех тел [182, 183], а также для плоской равнобедренной задачи трех тел [92, 213]. Авторы этих работ вводят в рассмотрение последовательности символов, взаимно однозначно соответствующие состояниям системы трех тел. Вместо изучения семейств траекторий авторы исследуют множества символических последовательностей. В этих частных случаях задачи трех тел символические последовательности удобно строить как последовательности двойных соударений (в прямолинейной задаче это соударения центрального тела с крайними телами, а в плоской равнобедренной задаче — соударения крайних тел между собой).

Каждую орбиту можно представить как последовательность символов. Например, в работе Таникавы и Микколы [182] используются три символа  $\{0, 1, 2\}$ : символ  $\{0\}$  соответствует тройному соударению, символ  $\{1\}$  — двойному соударению между центральным и левым телом, а символ  $\{2\}$  — соударению между центральным и

правым телом. В результате каждой траектории мы ставим в соответствие последовательность

$$(\dots n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2 \dots),$$

где  $n_i = \{0, 1, 2\}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . В равнобедренной плоской задаче можно ввести последовательность из двух символов  $\{0, 1\}$ . Символ  $\{0\}$  соответствует тройному соударению, а символ  $\{1\}$  — соударению крайних тел.

Основные результаты изучения символических последовательностей в прямолинейной и равнобедренной задачах трех тел можно сформулировать следующим образом. Область начальных условий разделяется на зоны с различными типами символических последовательностей (см., например, рис. 2 в статье [182]):

- 1) периодические последовательности, соответствующие периодическим орбитам;
- 2) последовательности, соответствующие орбитам с уходом одного из крайних тел — правого или левого — в прямолинейной задаче или центрального тела — вверх или вниз — в равнобедренной задаче;
- 3) последовательности, соответствующие осциллирующим неограниченным движениям без ухода;
- 4) последовательности, соответствующие тройным соударениям тел.

Множества допустимых последовательностей символов являются канторовыми. Множества символических последовательностей, соответствующих траекториям с уходом, разделяются на подмножества орбит с уходом после определенного числа двойных сближений, причем эти подмножества ограничиваются линиями тройных соударений. В частности, для периодической орбиты Шубарта [229] символическая последовательность имеет вид

$$(21)^\infty \dots (21)^\infty.$$

В случае уходов левого тела и правого тела соответственно последовательности могут иметь вид

$$\dots 1.(21)^{2n}22 \dots, \quad \dots 1.(21)^{2n}11 \dots$$

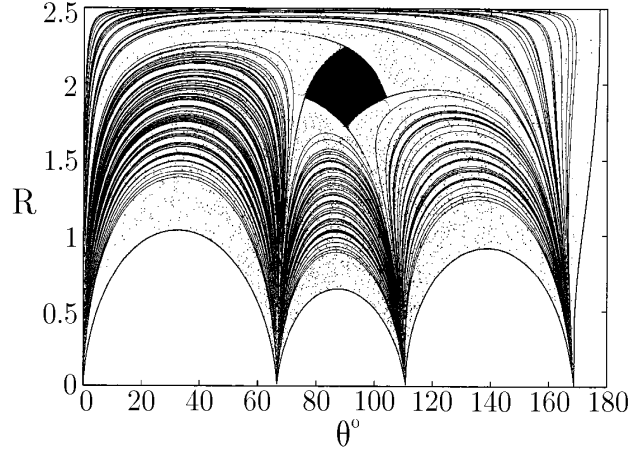


Рис. 66. Разделение области начальных условий линиями тройных соударений в прямолинейной задаче трех тел равных масс (рисунок из [182]). Область устойчивых движений зачернена.

Глобальная структура области начальных условий представлена на рис. 66 [182]. Здесь  $R \in [0, \frac{5}{2}]$  — начальное расстояние от центрального тела до каждого из крайних тел (они вначале находятся на одинаковом расстоянии от центрального тела). Начальная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{5}{2R} - 1$$

находится из интеграла энергии, причем  $R = \frac{5}{2}$  соответствует кривой нулевой скорости ( $T = 0$ ). Угол  $\theta \in [0, 2\pi]$  определяется через импульсы  $p_1$  и  $p_2$  крайних тел по следующим формулам

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(p_1 - p_2) &= 2\sqrt{T} \sin \theta, \\ p_1 + p_2 &= 2\sqrt{T} \cos \theta.\end{aligned}$$

На рис. 66 тонкие линии соответствуют траекториям с тройными соударениями, светлые области — быстрым уходам, а зачерненная область — устойчивым орбитам с ограниченными движениями в окрестности устойчивой периодической орбиты Шубарта [229].

Отметим, что в окрестности зоны устойчивых движений может иметь место перемежаемость областей с уходами левого и правого тел после различного числа двойных соударений. В принципе, не исключены осциллирующие движения.

В плоской равнобедренной задаче [92] ситуация с символическими последовательностями аналогична той, что имеет место в прямолинейной задаче. На диаграмме обобщенная координата  $Q_1$  – обобщенный импульс  $P_1$  строится сечение Пуанкаре. На этом сечении отображаются области  $A_k$ , соответствующие уходам после определенного числа  $k$  двойных соударений крайних тел. На рис. 67 схематически приведена геометрическая структура областей  $A_k$ . На правом рисунке изображены симметричные области начальных условий. Здесь  $f_\alpha$  означает отображение  $f(A_k)$  в зависимости от отношения  $\alpha$  массы центрального тела к сумме масс всех трех тел. В равнобедренной задаче также выделяются зоны уходов с временным захватом центрального тела (они нанесены черным цветом на рис. 68), захват или уход после шести и более двойных сближений (серый цвет), траектории с ограниченными движениями (белый цвет).

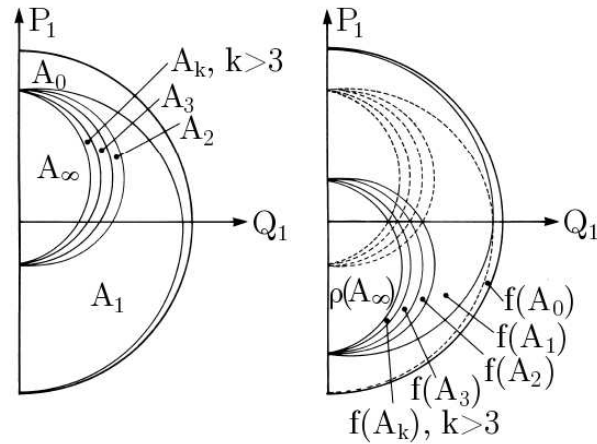


Рис. 67. Геометрическое представление областей ухода  $A_k$  после  $k$  двойных сближений крайних тел (рисунок из [92]).

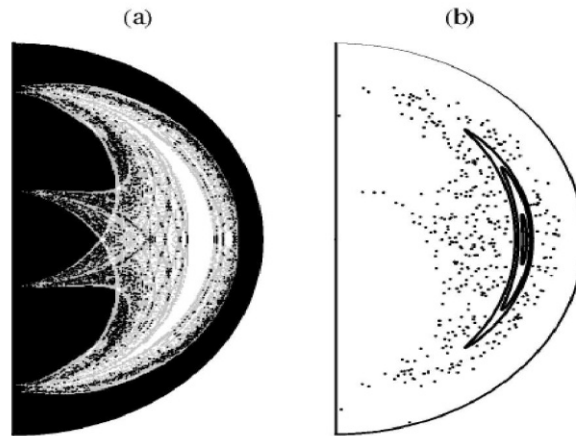


Рис. 68. Графическое представление сценариев движений в равнобедренной задаче трех тел равных масс ( $\alpha = 1/3$ ). На правом рисунке (b) приведено обычное сечение Пуанкаре.

В работе [92] также проведено исследование характера динамики в равнобедренной задаче трех тел разных масс. При малых значениях  $\alpha$  имеется устойчивая неподвижная точка на сечении Пуанкаре (см. рис. 68), вокруг которой находится область квазипериодических движений. При отношении масс  $\frac{m_0}{m_1} = \frac{m_0}{m_2} \approx 2.581$  эта неподвижная точка исчезает, и область устойчивости пропадает, а при  $\frac{m_0}{m_1} = \frac{m_0}{m_2} \approx 2.662$  происходит новая глобальная бифуркация и разрушение хаотического множества траекторий.

Рассмотренные частные случаи являются предельными для общей задачи трех тел. Они помогают представить общую картину эволюции тройных систем.

## Глава IV

# Динамика тройных звезд

### § 1. Возможные сценарии формирования тройных звезд

Статистические исследования звезд в окрестности Солнца показывают, что тройные системы и системы большей кратности составляют значительную долю (15–25%) от общего числа звездных систем (см., например, [189]). При выделении кратных звезд на больших расстояниях от Солнца существенную роль играет наблюдательная селекция. Эффект наблюдательной селекции можно проиллюстрировать в виде табл. 18 [189]. Из таблицы видно, что с ростом расстояния от Солнца доля выявленных кратных звезд существенно убывает. В ближайшей окрестности Солнца, по крайней мере, около трети звезд составляют кратные системы. В областях звездообразования кратность звезд существенно выше (см.,

Таблица 18. Число кратных звезд-карликов в каталоге Токовина MSC [188] и общее число звезд в каталоге HIPPARCOS [86] внутри сфер радиуса  $R$  вокруг Солнца

| $R$ , пк | MSC | HIPPARCOS | MSC/HIP |
|----------|-----|-----------|---------|
| 8        | 5   | 18        | 0.28    |
| 10       | 6   | 36        | 0.17    |
| 15       | 11  | 112       | 0.10    |
| 20       | 18  | 252       | 0.07    |
| 50       | 76  | 3383      | 0.02    |



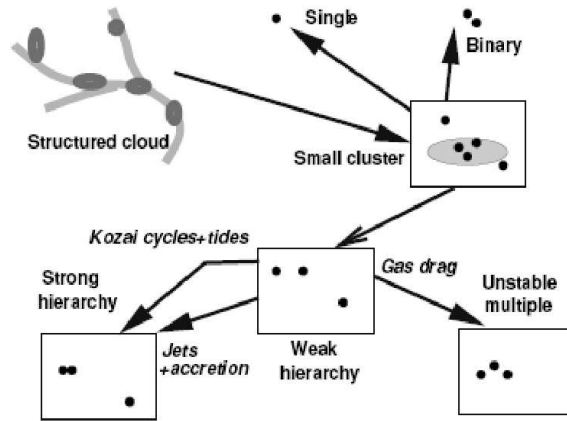


Рис. 69. Схема образования кратных звезд [189].

например, [84]). Интересно отметить, что почти все тесные двойные системы имеют удаленные спутники (см., например, [189]).

Недавно в [69] на основе статистического анализа наблюдаемой функции кратности было показано, что большинство звезд формировалось в составе двойных или тройных систем. Этот результат согласуется с гипотезой [109], согласно которой большинство звезд сформировалось в составе малых групп.

Мы можем рассмотреть два основных сценария формирования наблюдаемых тройных звезд:

- 1) совместное образование изолированной системы, состоящей из трех компонентов;
- 2) образование тройной системы в результате распада неиерархической малой группы или звездного скопления.

Схематически процесс образования кратных звезд показан в работе [189], см. рис. 69.

При формировании изолированной тройной системы в результате фрагментации протозвездного газового облака возможны несколько вариантов эволюции. Если эффективность звездообразования низкая (более 50% вещества остается в газо-пылевой фазе), то, в результате воздействия звездного ветра (фотонов и заряженных

частиц) от молодых звезд, значительная часть оставшегося газа выдувается из кратной системы и система может приобрести положительную полную энергию. Такие системы расширяются и растворяются в общем звездном поле как одиночные или двойные звезды.

В случае, когда эффективность звездообразования высока, как правило, формируются тройные системы с отрицательной полной энергией:

- 1) неиерархические системы типа Трапедии Ориона со сравнимыми взаимными расстояниями;
- 2) сильно иерархические системы типа  $\epsilon$  Лир, в которых одно из взаимных расстояний все время остается много меньше двух других;
- 3) слабо иерархические системы, которые занимают промежуточное положение между системами типа Трапедии и системами типа  $\epsilon$  Лир.

Неиерархические тройные звезды должны быть, как правило, неустойчивы, за исключением множеств малой меры, концентрирующихся в окрестности устойчивых периодических орбит (см. § 5 главы III). Устойчивых неиерархических тройных звезд по данным наблюдений пока не обнаружено. Системы типа Трапедии наблюдаются, как правило, в областях звездообразования, т.е. они имеют небольшой возраст и быстро распадаются.

Наблюдаемые в окрестности Солнца сравнительно старые тройные звезды, как правило, имеют сильно иерархическую структуру. Эти системы должны быть динамически устойчивы (см. ниже).

Среди тройных звезд со слабой и умеренной иерархией, в принципе, могут встречаться как устойчивые, так и неустойчивые системы. Заметим, что в устойчивых системах с умеренной иерархией и некомпланарными орбитами внешней и внутренней двойных подсистем должен проявляться известный *эффект Лидова–Кодзая* [101, 111]. Этот эффект состоит в том, что эксцентриситет внутренней пары в таких системах испытывает долгопериодические колебания (т.н. *циклы Кодзая*), причем временами он становится близким к единице. В эти эпохи существенную роль может играть приливное взаимодействие компонентов близкой двойной, которое приводит к частичной циркуляризации ее орбиты и увеличению тесноты внутренней двойной за счет перераспределения энергии и углового

момента орбитального движения во внутреннюю энергию и спиновые моменты компонентов. В результате часть устойчивых систем с умеренной иерархией переходит в разряд сильно иерархических систем. Этот механизм косвенно подтверждается наличием пика в распределении периодов мало массивных тесных двойных в интервале от двух до семи суток и резким уменьшением доли систем с периодом  $P_{\text{in}} > 7$  суток. Еще один аргумент в пользу механизма Лидова–Кодзая в сочетании с приливным взаимодействием — отсутствие сильно иерархических систем с отношением периодов  $P_{\text{ex}}/P_{\text{in}} > 10^4$  [189]. Однако отсутствие таких сильно иерархических систем может быть связано с трудностью их обнаружения.

## § 2. Устойчивость наблюдаемых тройных звезд

О динамическом статусе наблюдаемой тройной звезды часто судят по ее видимой конфигурации в проекции на небесную сферу. Обычно считают, что тройные звезды, имеющие неиерархическую конфигурацию, являются динамически неустойчивыми, а системы с иерархической видимой конфигурацией динамически устойчивы. Заметим, что видимая конфигурация тройной системы не совпадает с ее истинной конфигурацией в трехмерном пространстве, поэтому часть видимых иерархических систем может оказаться истинно неиерархическими и наоборот. В частности, согласно Амбарцумяну [12] около 10% тройных и четверных систем с истинной иерархической конфигурацией (отношение максимального расстояния между компонентами к минимальному расстоянию больше 3) могут проектироваться в видимые неиерархические системы. Агекян [1] получил интегральное уравнение, связывающее функции распределения видимых и истинных конфигураций тройных систем.

Должна существовать статистическая связь между функцией распределения конфигураций тройных систем и характером их динамической эволюции. В работах Аносовой [13], Аносовой и Орлова [21] было показано, что распределение видимых конфигураций тройных звезд (после исключения явно оптических систем) не противоречит гипотезе о динамической неустойчивости большинства наблюдаемых визуальных тройных звезд (см. также обзор Аносовой и Орлова [22]).

Заметим, что данные наблюдений кратных звезд подвержены эффектам наблюдательной селекции. Например, труднее обнаружить иерархическую тройную систему с слабым удаленным компонентом или с удаленным компонентом, двигающимся по сильно вытянутой орбите (такие компоненты трудно отделить от звезд фона). Также сложно обнаружить широкие кратные звезды, компоненты которых обладают общим собственным движением (СРМ-кратные). Очевидно, что наблюдательная селекция может сильно повлиять на распределения орбитальных характеристик тройных звезд и отношений масс их компонентов.

Однако имеется ряд (несколько десятков) тройных звезд, для которых выводы о динамической устойчивости или неустойчивости можно сделать более уверенно. Это иерархические тройные системы, в которых известны элементы орбит обеих пар — внутренней двойной, образованной близкими компонентами, и внешней двойной, сформированной удаленной звездой и центром масс (как правило, фотоцентром) близкой пары.

Исследования динамической устойчивости наблюдаемых тройных звезд проводилось в целом ряде работ (см., например, [78, 89, 90, 137, 139, 168, 189, 192]).

В работе Себехея и Заре [168] было рассмотрено 8 иерархических тройных звезд. Как правило, не удается однозначно определить взаимный наклон плоскостей орбит внутренней и внешней двойных. Себехей и Заре [168] рассмотрели различные значения взаимного наклона  $i$ . Они показали, что в случае плоских (компланарных орбит) и прямых движений все 8 рассмотренных систем устойчивы по критерию Голубева. Если движения не компланарны, то 5 из 8 систем могут быть неустойчивы в интервалах наклона  $i \in [i_{\text{crit}}, 180^\circ]$ , где  $i_{\text{crit}}$  — некоторое критическое значение взаимного наклона.

Более представительная выборка из 27 тройных звезд была рассмотрена Фекелом [192]. Он использовал тот же критерий устойчивости, что и в работе Себехея и Заре [168]. Фекел показал, что 23 системы устойчивы при любых значениях взаимного наклона  $i$ , а 4 системы могут быть неустойчивы при обратных движениях компонентов внутренней и внешней двойных.

Доннисон и Микулскис [78] исследовали динамическую устойчивость 38 тройных звезд с помощью их оригинального критерия, основанного на обобщении критерия Блэка [46] для случая различных эксцентриситетов внутренней и внешней пар. Оказалось, что

все рассмотренные системы устойчивы независимо от того, имеют они прямые или обратные движения.

В работе Орлова и Петровой [139] была рассмотрена выборка из 38 иерархических тройных звезд с известными массами компонентов и элементами орбит внутренней и внешней двойных подсистем. К сожалению, далеко не для всех систем удалось однозначно оценить угол  $i$  взаимного наклона орбит, поскольку он зависит от долгот восходящих узлов орбит [48]:

$$\cos i = \cos i_{\text{in}} \cos i_{\text{ex}} + \sin i_{\text{in}} \sin i_{\text{ex}} \cos(\Omega_{\text{ex}} - \Omega_{\text{in}}), \quad (240)$$

где  $i_{\text{in}}$  и  $i_{\text{ex}}$  — углы наклона орбит внутренней и внешней пар к картинной плоскости,  $\Omega_{\text{in}}$  и  $\Omega_{\text{ex}}$  — позиционные углы линий узлов этих орбит. Для большинства систем углы  $\Omega_{\text{in}}$  и/или  $\Omega_{\text{ex}}$  не определены или определены с точностью до  $180^\circ$  (не известно, какой из двух узлов является восходящим). Поэтому в работе Орлова и Петровой были использованы те из возможных значений  $i$ , которые давали наименьшую оценку запаса устойчивости согласно четырем критериям (см. [63, 64, 93, 118, 195, 196], а также § 4 главы III). Оказалось, что большинство рассмотренных систем устойчиво согласно всем четырем критериям. Однако обнаружилось 10 систем, неустойчивых по некоторым или даже по всем критериям. Возможные причины появления неустойчивых систем следующие:

- ошибки наблюдательных данных (орбитальных элементов и масс компонентов);
- произвол при выборе взаимного наклона орбит;
- неопределенность кратности данной системы;
- неприменимость некоторых из используемых критериев к отдельным системам;
- физическая или динамическая молодость систем.

Исследование устойчивости избранных наблюдаемых кратных (главным образом, тройных) звезд было продолжено в работах [89, 90, 137]. Была составлена выборка из 18 иерархических кратных звезд с известными орбитальными элементами для всех подсистем и масс всех компонентов. Среди них оказалось 16 тройных систем. Для каждой тройной системы определялись значения  $z$  параметров

устойчивости согласно шести критериям [52, 63, 64, 93, 118, 189, 195, 196]. Кроме того, находились критические значения  $s_c$  этих параметров и относительные запасы устойчивости

$$\delta_s = \frac{s - s_c}{s_c}. \quad (241)$$

Наряду с использованием критериев устойчивости для каждой системы прослеживалась динамическая эволюция в прошлое и будущее в течение  $\sim 10^6$  лет. Оказалось, что из 18 рассмотренных систем 12 являются устойчивыми. При этом для тройных систем результаты применения аналитических критериев устойчивости и результаты численного моделирования согласуются.

Возможно неустойчивые кратные системы имеют меньшую степень иерархичности по сравнению с вероятно устойчивыми системами. Неустойчивость этих слабо иерархических систем может быть связана с одним (или несколькими) из факторов, перечисленных выше. Однако, в принципе, могут существовать действительно неустойчивые системы. В работах Орлова и Жучкова [89, 137] предложено несколько возможных сценариев образования таких систем:

- временный захват звезды поля при ее сближении с тесной двойной системой;
- разрушение устойчивой иерархической тройной системы в результате ее сближения с массивным объектом поля (например, газовым облаком, звездным скоплением или массивной черной дырой);
- неустойчивая тройная система является продуктом распада системы большей кратности (малой группы звезд или звездного скопления).

В результате действия этих механизмов в окрестности Солнца радиусом 200 пк может быть несколько таких неустойчивых систем [89]. Согласно результатам численного моделирования, эволюция этих систем завершается уходом одного из тел за время  $\sim 10^2 \div 10^3$  оборотов внешней двойной, что составляет  $\sim 10^4 \div 10^6$  лет для рассмотренных тройных звезд.

Результаты изучения устойчивости наблюдаемых кратных звезд зависят от погрешностей исходных данных и ошибок счета. Жучков и Орлов [89] попытались учесть ошибки данных наблюдений

с помощью статистического моделирования методом Монте-Карло. Проводилась вариация элементов орбит подсистем и масс компонентов при предположении о нормальном распределении ошибок этих параметров. Для каждой системы было рассмотрено 1000 вариантов начальных условий, полученных в результате этих вариаций. Для каждого варианта численно прослеживалась динамическая эволюция кратной системы в прошлое и будущее на протяжении  $\sim 10^6$  лет. Оказалось, что рассмотренные кратные звезды четко разделяются на две популяции:

- вероятно устойчивые;
- вероятно неустойчивые.

В первой популяции (12 систем) доля неустойчивых вариантов мала (не превосходит 10%). Во второй популяции наблюдается прямо противоположная картина (вероятность устойчивости не превосходит 6%). Таким образом, случайные ошибки элементов орбит и масс звезд существенно не влияют на вывод об устойчивости или неустойчивости системы.

Отметим, что выборки кратных звезд с известными элементами орбит всех подсистем и массами компонентов сравнительно невелики, поэтому какие-либо статистические выводы о преобладании динамической устойчивости или неустойчивости в наблюдаемых системах сделать сложно. Повышение точности наблюдательных данных, увеличение объема выборки и обеспечение ее полноты в будущем позволят сделать более надежные заключения об устойчивости кратных звезд.

### § 3. Астрофизика и динамика

Значительная часть звезд формируется в составе малых групп (см., например, обзор Ларсона [109]). Как правило, это двойные или тройные системы [69]. Образующиеся системы и их компоненты содержат информацию о процессе звездообразования. Наблюдаемые тройные звезды также могут нести некоторую информацию о процессах их формирования и эволюции. В частности, физические свойства компонентов (массы, спектральные классы, химический состав, ротационные скорости и т.д.), а также динамика системы (устойчивость или неустойчивость, близость к резонансам и т.п.)

отражают специфику наблюдаемого состояния тройной системы с учетом ее предыстории и могут быть связаны с орбитальными характеристиками системы.

Неиерархические кратные звезды, как правило, динамически неустойчивы, поэтому они должны состоять из молодых звезд ранних спектральных классов и звезд типа Т Тельца, еще не достигших главной последовательности. Как правило, в группировках молодых звезд (звездных ассоциациях) кратные системы встречаются существенно чаще, чем в окрестности Солнца (см., например, [84]).

Первый обзор тройных систем в ассоциации Змееносца был проведен в работе Кореско [106]. Проводился поиск удаленных компонентов у 14 известных двойных звезд. Были обнаружены новые компоненты у 2 систем и заподозрены у 5 систем. Это говорит о высокой степени кратности молодых звезд. Сходный результат был получен в работе Ковей и др. (см. обзор [100]), которые исследовали окрестности 55 двойных систем в различных областях звездообразования. Они нашли 15 тройных или четверных систем. Эти системы, как правило, имеют высокую иерархичность.

Один из возможных механизмов формирования таких систем — сочетание циклов Кодзая [101] и приливного взаимодействия между звездами при тесных сближениях (см., например, [99]) в системах с большим взаимным наклоном плоскостей орбит внутренней и внешней двойных. Оказалось, что комбинация этих двух эффектов может привести к формированию сильно иерархических кратных систем, в которых внутренние двойные имеют периоды в несколько дней.

В последние годы активно проводятся поиски кратных систем среди экстремально молодых протозвездных объектов, погруженных в газовые туманности (см., например, [211] и ссылки в ней). Обнаружение таких объектов с возрастaми  $\sim 10^4$ – $10^5$  лет свидетельствует о том, что кратные системы могут формироваться за очень короткое время после появления зародышей будущих протозвезд. Как правило, такие объекты наблюдаются в инфракрасном, субмиллиметровом и радиодиапазонах. Для разрешения наиболее тесных кратных систем необходимо использовать интерферометрические наблюдения на наиболее крупных ИК телескопах (8–10 м) и радиointерферометрах типа VLA и VLBA.

Выявление наиболее молодых кратных объектов также проводилось в миллиметровом диапазоне (см. [113]). Главный вывод этой



работы состоит в том, что в широком диапазоне пространственных размеров преимущественно наблюдаются кратные протозвезды. Райпурт [154] показал, что от 80% до 90% наиболее молодых объектов входят в кратные системы, причем более 50% из них — в системы с кратностью 3 и более. Кроме того, в работах Райпурта и др. [155, 156] было показано, что частота встречаемости двойных систем среди подобных объектов сравнима с частотой двойных среди звезд типа Т Тельца.

Наряду с радионаблюдениями для изучения наиболее молодых кратных систем могут быть использованы наблюдения в ИК-диапазоне (см., например, обзоры Хайша и др. [193, 194] и Душена и др. [83]). Эти авторы составили выборку из 119 молодых объектов в 5 молекулярных облаках. Оказалось, что 19 объектов (около 16% выборки) имеют спутники в диапазоне проективных расстояний 300–1400 а.е. Функция кратности этих объектов согласуется с аналогичной функцией для звезд типа Т Тельца в тех же областях и примерно вдвое выше, чем для звезд окрестности Солнца. В нескольких случаях разность видимых величин в ИК-диапазоне велика ( $\delta k \sim 6^m$ ). Такие спутники могут в будущем стать темными карликами (brown dwarfs).

Душен и др. [84] выполнили обзор 44 протозвезд в 4 молекулярных облаках на VLT с системой адаптивной оптики. Комбинируя эти наблюдения с изображениями тех же самых объектов в предыдущих обзорах, авторы получили степень кратности этих объектов около 50% (в диапазоне проективных расстояний 36–1400 а.е.). Обнаружено 23 спутника с разностью видимых величин  $\delta k \leq 4^m$ . Доля тройных систем ( $\approx 14\%$ ) согласуется с данными для звезд типа Т Тельца. В основном тройные системы иерархические и, по видимому, устойчивые.

Использование спектральных наблюдений в видимом и ближнем ИК-диапазонах [100] позволяет обнаруживать тесные кратные системы с периодами до нескольких суток. В частности, эти авторы в выборке из 31 объекта нашли 4 объекта с лучевыми скоростями, которые существенно отличаются от скоростей окружающего газа. Эти объекты могут быть продуктами распада неустойчивых кратных систем, например, спектрально-двойными с одной системой линий (single-line spectroscopic binaries).

Таким образом, не обнаружено существенных различий функций кратности для протозвездных объектов и звезд типа Т Тельца.

Не найдено мини-скоплений источников с  $N \geq 5$  и характерными размерами  $< 2000$  а.е. Этот факт может объясняться тем, что неустойчивые малые группы разрушаются за очень короткое время ( $\sim 10^5$  лет и менее). Сравнительно небольшое число одиночных источников (не более 50%) и редкая встречаемость систем с  $N \geq 4$  говорят в пользу того, что, как правило, протозвезды образуются в составе двойных и тройных систем [69].

Анализ обзоров протозвездных объектов показывает, что их функция кратности не зависит от свойств окружения в отличие от звезд типа Т Тельца [84]. По-видимому, сценарий фрагментации ядер облаков не чувствителен к физическим условиям на больших масштабах, однако он зависит от условий на малых масштабах, которые примерно одни и те же во всех протозвездных облаках. Характерные времена разрушения неустойчивых кратных систем протозвезд в наиболее тесных скоплениях составляют  $\sim 10^5$  лет.

Из радионаблюдений с высоким разрешением на VLA удалось оценить суммарные массы 4 двойных протозвезд по их орбитальным движениям (см. ссылки в работе [84]). Средняя величина суммарной массы равна  $1.7 \pm 0.7$  солнечных масс, т.е. компоненты этих систем в будущем станут звездами типа Солнца. Заметим, что эта величина сравнима со средней оценкой массы двойных звезд типа Т Тельца.

Детальное изучение орбит компонентов в некоторых тесных кратных протозвездах способно выявить отклонения от кеплеровских траекторий. Так, например, в самой системе Т Тельца Лойнард и др. [112] из 20-летнего мониторинга системы на VLA обнаружили, что один из компонентов, возможно, испытал сближение с двойной и был выброшен. Однако более поздние исследования (см. ссылки в обзоре Душена и др. [84]) поставили под сомнение этот результат. Пока не удалось найти орбиту, согласующуюся как с радио-, так и с ИК-наблюдениями.

Недавно был обнаружен еще один объект, состоящий из 4 компактных радиоисточников, в области Ориона [66, 157]. Возможно, здесь мы наблюдаем разлет трех из четырех источников из маленькой компактной области, где они должны были находиться около 500 лет назад. Эти источники, по-видимому, связаны с массивными молодыми звездами (массы больше 8 масс Солнца). Один из возможных сценариев эволюции этой системы — разрушение кратной системы в результате тесного сближения компонентов. Хотя в

литературе имеется и другая точка зрения о происхождении этого объекта [181].

Эти два случая открывают дискуссию о наличии неустойчивых кратных протозвезд и молодых звезд, хотя этих примеров пока недостаточно, чтобы с уверенностью утверждать, что неустойчивые кратные молодые звезды действительно обнаружены.

В литературе рассматриваются несколько различных сценариев формирования и дальнейшей динамической эволюции кратных систем (см. ссылки в обзоре Душена и др. [84]).

В первом случае [82, 160, 223, 224] рассматривается гравитационное взаимодействие нескольких точечных масс, распределенных случайным образом в некоторой области задания начальных условий. В результате динамической эволюции этих малых групп формируются двойные и устойчивые иерархические кратные системы. Распределения элементов орбит и отношений масс компонентов в этих системах в целом согласуются с данными для широких двойных и кратных звезд.

Во втором случае (см., например, работы Дельгадо-Доната и др. [75, 76]) используется газодинамический подход к моделированию процесса формирования и дальнейшей эволюции образующихся систем протозвезд. Оказалось, что во втором подходе доминирующую роль играет гравитационное взаимодействие компонентов образующихся кратных систем, однако газовая составляющая (аккреционные диски и оболочки вокруг протозвезд) также может существенно повлиять на ход динамической эволюции системы. Причем взаимодействие с газом существенно не только на стадии фрагментации, но и на более поздних стадиях эволюции, когда компоненты системы остаются погруженными в газе (embedded objects).

На ранних стадиях эволюции турбулентного протозвездного облака (до  $\approx 0.5 \cdot 10^6$  лет) применяется газодинамический подход (как правило, SPH-схемы), а на более поздних стадиях, когда формируются гравитационно обособленные объекты, авторы переходят к рассмотрению гравитационной задачи  $N$  тел (см., например, [42, 70, 71, 75, 76]).

Представляет интерес провести сопоставление результатов численного моделирования таких систем и данных наблюдений молодых кратных звезд. Одной из характеристик, по которым можно проводить такое сравнение, является распределение по координатам формирующихся систем. В численных моделях [75, 76] форми-

ровалось значительное число кратных систем. По истечении времени  $\approx 0.5 \cdot 10^6$  лет от начала процесса звездообразования доля спутников для массивных звезд составила около 100%, т.е. практически у каждой звезды был по крайней мере один спутник. Частота кратных систем (отношение всех двойных систем и систем большей кратности к числу главных компонентов кратных систем и одиночных звезд) составила около 20%, т.е. на каждую двойную или кратную систему приходится примерно 4 одиночных звезды. Доля тройных систем и систем большей кратности составляет 15–25% (см. [189]). Такая же доля кратных определяется из наблюдений для звезд типа Т Тельца и протозвезд, погруженных в газовые облака (см. выше). Вычисления Гудвина и др. [71], выполненные при малых отношениях начальной энергии турбулентных движений и тепловой энергии, согласуются с данными наблюдений, что послужило базисом для гипотезы [69], состоящей в том, что в основном звезды образуются в составе двойных и тройных систем.

Дельгадо-Донат и др. [75, 76] исследовали зависимость функции кратности от возраста в течение нескольких миллионов лет эволюции. Характерные времена разрушения динамически неустойчивых кратных  $\sim 10^5$  лет. Кроме того, было показано, что звездообразование происходит вспышками с уменьшающейся интенсивностью примерно в течение такого же времени. Доля спутников со временем убывает от  $\sim 100\%$  до  $\sim 30\%$ , в основном за счет уходов. С другой стороны, частота встречаемости двойных, тройных систем, а также объектов более высокой кратности слабо зависит от времени после нескольких сотен тысяч лет, хотя эволюция кратных систем в сторону формирования устойчивых иерархических структур еще продолжается.

Формирующиеся в результате фрагментации ядер кратные системы, как правило, не изолированы. Их взаимодействие друг с другом может существенно сказаться на функции кратности.

В работах Дельгадо-Доната и др. [75, 76] рассматривалась зависимость функции кратности от массы главного компонента. В целом имеет место качественное согласие с наблюдениями, однако есть количественные расхождения при больших и малых отношениях масс компонентов. Причины этих расхождений пока не ясны, и требуется дополнительный анализ как наблюдательных данных, так и результатов численных экспериментов. Заметим, что в звезд-

ном поле в отличие от скоплений и ассоциаций сложно разделить оптические и физические кратные системы.

Двойные и кратные системы, наряду с одиночными звездами, могут уходить из неустойчивых малых групп. Скорости выброса в среднем убывают с ростом кратности выброшенной системы (см., например, работы Штерцика и Дурисена [225], Рубинова и др. [160]). Для проверки такой кинематической сегрегации выброшенных протозвезд требуется длительный мониторинг лучевых скоростей звезд в областях звездообразования. Косвенным указанием на подобную сегрегацию может служить увеличение доли темных карликов по мере удаления от плотных ядер [61] в области Тельца.

Существует и третий вариант формирования кратных звезд – «неподвижный» (quiescent) сценарий. В этом случае звезды формируются из облаков, сжимающихся в состоянии квазистатического равновесия. Более близки к этому сценарию модели Гудвина и др. [70, 71] с низкой турбулентностью. С другой стороны, как показали Штерцик и др. [227], лучше согласуются с наблюдениями результаты динамической эволюции систем  $N$  тел.

Таким образом, в последнее время изучение формирования и эволюции кратных систем в областях звездообразования происходит в двух направлениях. С одной стороны, проводятся обширные обзоры молодых звезд и протозвезд. С другой стороны, выполняется численное моделирование динамики таких систем в рамках задачи  $N$  тел и SPH-подхода. Несмотря на достижения численных моделей и наблюдений, остаются некоторые вопросы:

- видимая однородность и независимость функции кратности протозвезд от свойств окружения;
- наличие большой доли кратных систем с низкой энергией связи (такие системы редко выживают на стадии бурной релаксации);
- отсутствие систем, содержащих более 4, 5 компонентов с размерами  $\sim 10^3$  а.е.

Дальнейший прогресс в исследованиях физики и динамики кратных звезд может быть связан как с новыми высокоточными наблюдениями в разных диапазонах длин волн, так и с совершенствованием численного моделирования.

## Глава V

# Динамика триплетов галактик

### § 1. Основные факторы, влияющие на эволюцию тройных галактик

Галактики во Вселенной показывают тенденцию к объединению в группы различной кратности — от двойных галактик до сверхскоплений (см., например, книгу Горбацкого [67]). Среди групп галактик широко представлены тройные системы (см., например, обзор Киселевой и Орлова [96], статью Асевеса [39] и ссылки в этих работах). В отличие от тройных звездных систем, где применима аппроксимация звезд точечными массами (кроме случаев очень тесных сближений и формирования тесных двойных систем), для триплетов галактик на протяжении значительной части их динамической эволюции необходимо учитывать протяженность структуры (конечность размеров) компонентов.

Помимо протяженности компонентов триплетов, необходимо учитывать ряд других важных факторов (см., например, [116]):

- динамическое трение о межгалактическую среду (газ и темную материю);
- космологическое расширение;
- приливное взаимодействие при тесных сближениях (образование различных причудливых структур типа «хвостов», «мостов», «спиралей» и т.д.);
- взаимопроникновение галактик (прохождения или слияния);

- дополнительное влияние вакуума (темной энергии), как расталкивающей галактики субстанции, ускоряющей космологическое расширение;
- приливное «обдирание» внешних частей галактик;
- магнитные поля и их аналоги.

При численном моделировании динамики триплетов галактик (как и групп большей кратности) возможны два подхода (см., например, обзоры Мамона [117], Киселевой и Орлова [96] и ссылки в них):

- самосогласованный (self-consistent) подход — каждый компонент триплета представляется как система  $N$  материальных точек;
- явный физический (explicit-physics) подход — каждая галактика представляется как одиночное протяженное тело (обычно сферической формы), а перечисленные выше дополнительные эффекты (динамическое трение, слияния, приливное взаимодействие и т.д.) задаются с помощью тех или иных аналитических аппроксимаций.

Эти два подхода являются взаимно дополняющими. В первом случае мы строим более реалистичные модели, однако не можем рассмотреть много вариантов начальных условий из-за ограниченности вычислительных ресурсов. Во втором подходе можно изучить большое число вариантов начальных условий и выявить зависимость результатов динамической эволюции от начальных характеристик триплета. Контроль вычислений, выполняемых вторым способом, можно осуществить с помощью первого подхода.

Отметим, что триплеты галактик занимают промежуточное положение между двойными галактиками, для изучения динамики которых можно применять аналитический подход (см., например, книгу Караченцева [94]), и группировками большей кратности, для которых не известно аналитических решений и динамику можно изучать только с помощью численного моделирования. Для проблемы трех тел имеются только частные аналитические решения (см. выше). В общем случае динамику тройных галактик пока можно изучать только численными методами.

## § 2. Динамика, кинематика и конфигурации триплетов галактик

Динамические состояния наблюдаемых триплетов галактик могут быть описаны с помощью нескольких параметров (см., например, [39]):

- средний гармонический радиус  $R_H$  триплета, определяемый по формуле

$$R_H = \left( \frac{2}{3\pi} \sum_{i < j} \frac{1}{R_{ij}} \right)^{-1}, \quad (242)$$

где  $R_{ij}$  — взаимные расстояния между компонентами триплета в проекции на картинную плоскость;

- одномерная дисперсия  $\sigma^2$  пекулярных (остаточных) скоростей в триплете

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (v_i - \bar{v})^2, \quad (243)$$

где  $\bar{v} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 v_i$  — средняя лучевая скорость галактики в триплете,  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — индивидуальные лучевые скорости компонентов;

- среднее время  $\tau_c$  пересечения группы

$$\tau_c = \frac{2R_H}{\sqrt{3}\sigma}; \quad (244)$$

- динамические оценки масс, например, вириальная масса

$$M_{vir} = \frac{6}{G} R_H \sigma^2, \quad (245)$$

медианная масса

$$M_{med} = \frac{6.5}{G} \text{med}_{ij} [(v_i - v_j)^2 R_{ij}]. \quad (246)$$



Таблица 19. Медианные оценки динамических параметров триплетов галактик

|               | $n$ | $R_H$ , кпк | $\sigma$ , км/с | $H_0\tau_c$ | $M_{vir}, 10^{12} M_\odot$ |
|---------------|-----|-------------|-----------------|-------------|----------------------------|
| $K$ -триплеты | 45  | 66          | 120             | 0.041       | 1.7                        |
| $W$ -триплеты | 37  | 654         | 105             | 0.531       | 9.5                        |

Более подробно динамические оценки масс триплетов галактик будут обсуждаться в следующем параграфе. В формулах (242)–(246) предполагается случайная ориентация векторов положений и peculiarных скоростей компонентов группы.

В табл. 19 приведены медианные оценки динамических параметров (242)–(245) для списков компактных  $K$ -триплетов галактик [95] и широких  $W$ -триплетов галактик [115, 210]. Здесь  $n$  — число рассмотренных вероятно физических триплетов в каждом списке;  $H_0 = 75$  км/с/Мпк — постоянная Хаббла, тогда произведение  $H_0\tau_c$  — время пересечения в единицах хаббловского времени.

Из таблицы видно, что размеры компактных  $K$ -триплетов примерно на порядок величины меньше, чем у широких  $W$ -триплетов, при этом величины  $\sigma$  различаются не сильно, что приводит к сильному различию времен пересечения (примерно в 13 раз) и вириальных масс (в 5–6 раз).

Представляет интерес рассмотреть конфигурации триплетов галактик в проекции на картинную плоскость (истинные конфигурации в трехмерном пространстве нам не известны). Нанесем положения триплетов в области  $D$  (рис. 26) всех возможных конфигураций (см. рис. 70). Область  $D$  можно условно разбить на 4 подобласти:  $L$  (лагранжевы),  $H$  (иерархические),  $A$  (вытянутые),  $M$  (промежуточные), соответствующие разным типам конфигураций. Распределения конфигураций  $K$ -триплетов и  $W$ -триплетов по области  $D$  примерно одинаковы и близки к равномерно случайному распределению. Единственное исключение составляет подобласть  $L$  (конфигурации, близкие к равностороннему треугольнику) — здесь преобладают компактные  $K$ -триплеты, а широкие  $W$ -триплеты избегают эту область.

Представляет интерес провести сравнение динамических параметров наблюдаемых триплетов галактик и результатов, получен-

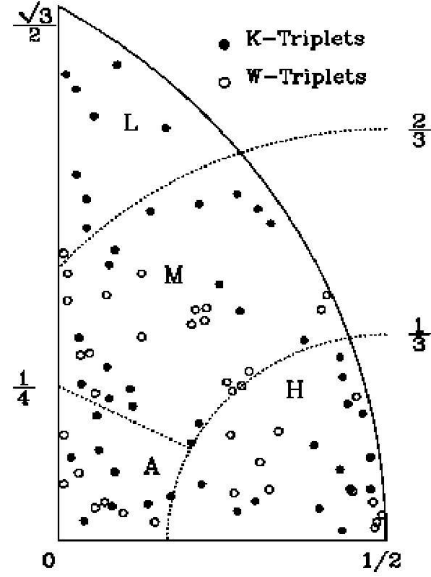


Рис. 70. Распределение  $K$ -триплетов (залитые кружки) и  $W$ -триплетов (открытые кружки) в области  $D$  (рисунок из [39]).

ных с помощью численного моделирования. В работе [39] проведено такое сравнение для  $K$ -триплетов и  $W$ -триплетов, с одной стороны, и моделей тройных галактик, построенных самосогласованным (self-consistent) методом.

При моделировании каждая галактика представлялась как система  $N = 3000$  частиц. Фазовое распределение частиц внутри галактики соответствовало закону Пламмера (см. работу Арсета и др. [38]):

$$M(r) = \frac{M(r/R_0)^3}{[1 + (r/R_0)^2]^{3/2}}, \quad (247)$$

$$f(\tilde{E}) = \frac{24\sqrt{2}R_0^2}{7\pi^3 G^5 M^4} |\tilde{E}|^{7/2}, \quad (248)$$

где  $R_0$  — параметр масштаба,  $M$  — полная масса галактики,  $\tilde{E}$  — энергия на единицу массы,  $r$  — расстояние от центра галактики. Принята система единиц

$$G = M = R_0 = 1. \quad (249)$$

Соответствующая единица времени  $\tau = \frac{R_0^3}{GM} = 1$ .

Поскольку в распределении Пламмера (247) плотность быстро убывает с удалением от центра галактики  $\rho(r) \sim r^{-5}$ , то около 99% массы галактики заключено в пределах расстояния  $r \approx 10R_0$ . Поэтому в работе Асевеса [39] рассматривалась усеченная модель Пламмера с радиусом, равным  $10R_0$ .

Рассмотрим два варианта задания начальных условий для триплетов галактик:

- «максимальное расширение» триплета (нулевые начальные скорости);
- вириальное равновесие триплета (вириальный коэффициент равен 0.5).

Все модели построены в рамках классической космологии с космологической постоянной  $\Lambda = 0$ . Кроме того, не предполагалось существование общего массивного гало группы, состоящего из темной материи. Начальные положения компонентов триплета задавались равномерно случайно внутри сферы радиусом  $R_{\max} = 500$  кпк. Один из примеров эволюции коллапсирующего триплета галактик показан на рис. 71. В ходе эволюции происходит слияние двух галактик и образование двойной системы.

Основные результаты работы Асевеса [39] можно сформулировать следующим образом.

1. В отличие от тройных систем точечных масс не происходит далеких выбросов галактик в результате тесных тройных сближений компонентов.
2. Частота слияний всех трех галактик в течение  $\sim 10 \cdot 10^9$  лет (к современной эпохе) сравнительно невелика ( $\sim 10\%$  для триплетов, находящихся в состоянии максимального расширения и  $\sim 5\%$  для «вириализованных» триплетов), т.е. имеется широкий класс начальных условий, для которых триплеты галактик устойчивы по отношению к слияниям.

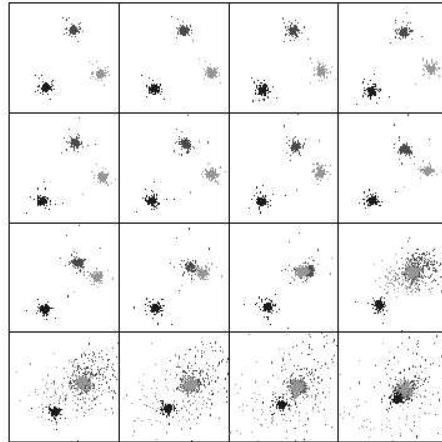


Рис. 71. Пример эволюции коллапсирующего триплета галактик (рисунок из [39]).

3. Распределение финальных конфигураций моделированных триплетов в области  $D$  не противоречит наблюдениям как широких  $W$ -триплетов, так и компактных  $K$ -триплетов, при этом учитывается, что в изначально иерархических триплетах происходит быстрое слияние двух близких галактик и эта группа перестает быть триплетом.
4. Медианные оценки динамических параметров триплетов с начальными условиями, соответствующими стадии максимального расширения, в современную эпоху не противоречат данным наблюдений для  $K$ -триплетов — около 10% таких изначально широких триплетов в современную эпоху становятся компактными, похожими на наблюдаемые  $K$ -триплеты [95].
5. Наблюдаемые  $K$ -триплеты обладают экстремальными динамическими свойствами — наименьшими характерными размерами и наибольшей дисперсией скоростей, при этом некоторые их динамические свойства согласуются с результатами для вначале вириализованных триплетов в современную эпоху.

6. Присутствие начального массивного общего темного гало не является необходимым условием для объяснения наблюдаемых характеристик триплетов галактик, как широких, так и компактных; с другой стороны, мы не можем исключить наличие таких массивных гало.

В работах, посвященных изучению динамики малых групп галактик (см., например, [116]), показано, что слияния компонентов могут приводить к образованию групп меньшей кратности, в частности триплетов галактик. Например, в широких группах, первоначально состоящих из 8 галактик, за хаббловское время, как правило, происходит от двух до четырех слияний компонентов [116]. С другой стороны, в пределах широких групп могут формироваться компактные подсистемы. В проекции на картинную плоскость эти подсистемы наблюдаются как компактные группы галактик, сходные с известными компактными группами Хиксона [203]. Отметим, что среди групп Хиксона имеются объекты различной природы — наряду с реальными компактными группами наблюдаются случайные выстраивания вдоль луча зрения нескольких галактик. В реальных компактных группах плотность галактик сравнима с плотностью галактик в богатых скоплениях, то есть компактные группы Хиксона являются одними из самых плотных группировок галактик в природе.

### **§ 3. Влияние темной материи и темной энергии на динамику тройных галактик**

Во многих группах и скоплениях галактик динамические оценки масс значительно превышают оценки суммарных масс, получаемых из соотношения масса — светимость для отдельных галактик (см., например, книгу Горбачьего [67]). Исходя из этого, предполагают наличие в группировках галактик различной кратности трудно наблюдаемой темной материи (dark matter) или скрытой массы (hidden mass). Природа этой темной материи до сих пор не известна.

Темное вещество может существенно влиять на динамику малых групп галактик, в частности тройных галактик. Для динамических оценок масс групп галактик можно использовать формулы типа

вириальной оценки (245). В общем виде вириальную оценку массы можно получить по следующей формуле [26]:

$$M_{VT} = \alpha \frac{RV^2}{G}, \quad (250)$$

где  $R$  — характерный линейный размер группы в проекции на картинную плоскость,  $V$  — характерное значение относительных лучевых скоростей компонентов,  $\alpha$  — безразмерный коэффициент, учитывающий свойства симметрии групп в фазовом пространстве. В случае изотропного распределения положений и скоростей компонентов группы множитель равен  $\alpha = 3\pi$  [201].

В работе [201] было предложено несколько модификаций формулы (250) для групп галактик.

### 1. Вириальная масса

$$M_{VT} = \frac{3\pi N \sum_{i=1}^N V_{zi}^2}{2G \sum_{i<j} \frac{1}{R_{\perp ij}}}, \quad (251)$$

где  $N$  — число компонентов в группе (в нашем случае  $N = 3$ ),  $V_{zi}$  — лучевая скорость  $i$ -го компонента ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) относительно центроида группы,  $R_{\perp ij}$  — взаимное линейное расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м ( $i \neq j$ ) компонентами группы в проекции на картинную плоскость.

### 2. Проективная масса

$$M_{PM} = \frac{f_{PM}}{GN} \sum_{i=1}^N V_{zi}^2 R_{\perp i}, \quad (252)$$

где  $R_{\perp i}$  — линейное расстояние в проекции от центроида группы,  $f_{PM}$  — безразмерный множитель, зависящий от характера орбит галактик (для чисто радиальных движений  $f_{PM} = \frac{64}{\pi}$ , для изотропных орбит  $f_{PM} = \frac{32}{\pi}$ ).

### 3. Медианная масса

$$M_{Me} = \frac{f_{Me}}{G} \text{med}_{i,j}[(V_{zi} - V_{zj})^2 R_{\perp ij}], \quad (253)$$

где множитель  $f_{Me} \approx 6.5$  был получен по результатам численного моделирования [201].

#### 4. Средняя масса

$$M_{Av} = \frac{2f_{Av}}{GN(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} (V_{zi} - V_{zj})^2 R_{\perp ij}, \quad (254)$$

где коэффициент  $f_{Av} \approx 2.8$  также определен по данным численных экспериментов.

По результатам численного моделирования динамики групп, состоящих из  $N = 5, 10$  галактик, Хейслер и др. [201] получают динамические оценки масс групп (251)–(254) и показывают, что все 4 параметра примерно равноценны. Не наблюдается сильных систематических отклонений медианных оценок всех четырех масс от истинного значения. Примерно в 75% случаев все оценки масс для  $N = 5$  отличаются от истинного значения не более, чем в  $\sqrt[4]{10}$  раз.

Применение этих оценок («эстиматоров») к наблюдаемым группам галактик из каталога Хухры и Геллер [210] показало, что в пределах  $\sim 700$  кпк от центров групп имеется значительное количество темной материи. В частности, для триплетов галактик медиана отношения масса–светимость  $M/L$  составляет  $\approx 10^{2.8} M_{\odot}/L_{\odot}$  солнечных единиц. Однако следует заметить, что столь высокое отношение  $M/L$  может быть обусловлено присутствием галактик фона, случайным образом проецирующихся на группы.

Численные эксперименты с триплетами галактик, проведенные Аносовой и др. [26], показали, что индивидуальные оценки масс тройных галактик ненадежны — погрешности могут достигать трех порядков величины. Ненадежность индивидуальных оценок масс связана с нестационарностью тройных галактик, с эффектами проекции (неопределенность движений поперек луча зрения и положений компонентов вдоль луча зрения), ошибками определения лучевых скоростей компонентов и расстояния до группы.

Более надежным представляется динамическая оценка масс по ансамблям триплетов галактик (см. работу Аносовой и др. [27]). Была рассмотрена выборка из 46 вероятно физических триплетов галактик из списка Караченцева и др. [95]. Строились модельные ансамбли триплетов при различных отношениях масс компонентов, разных значениях полной скрытой массы  $M_b$  и радиуса  $R_b$  сферы, в пределах которой распределялась темная материя по изотермическому закону плотности

$$\rho(r) \sim r^{-2}, \quad (255)$$

где  $r$  — расстояние от центра масс триплета. Выбирались те моделированные ансамбли, которые лучше других согласуются с наблюдаемой выборкой триплетов. Оказалось, что для таких ансамблей средняя скрытая масса в пределах триплета составляет  $(4.6 \pm 1.1)M_T$ , где  $M_T$  — суммарная масса компонентов триплета. Полученная оптимальная оценка отношения  $M_b/R_b \approx 10$  соответствует некоторой характерной плотности темной материи в объеме триплета

$$\rho(r) = \frac{3}{4\pi} \frac{M_b}{R_b} \frac{1}{r^2} \approx \frac{15}{2\pi} r^{-2}, \quad (256)$$

где масса  $M_b$  выражена в единицах  $m$  — средней массы одного компонента в триплете, радиус триплета  $R_b$  выражен в единицах  $d$  — среднего размера системы.

Сравнение различных «эстиматоров» масс проведено в работе Асевеса [39], где показано, что лучше других эстиматоров использовать медианную массу (253). Кроме того, оказалось, что вириальная масса систематически занижена примерно на 35%.

В последние годы стали популярны  $\Lambda$ CDM космологические модели с космологическим членом  $\Lambda \neq 0$  и холодной темной материей (cold dark matter). В этих моделях фигурирует некоторая дополнительная субстанция (вакуум или квинтэссенция), обладающая отрицательным давлением и «расталкивающая» галактики в группах и скоплениях. Наличие этой субстанции может существенно повлиять на динамику широких групп.

Эффект вакуума на динамику широких групп галактик (в частности, Местной Группы) исследовался в работе Минца и Орлова [128]. Уравнения движения компонентов группы с учетом вакуума имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{Gm_j \mathbf{r}_{ij}}{(r_{ij}^2 + \varepsilon_i^2 + \varepsilon_j^2)^{3/2}} + \alpha^2 \mathbf{r}_i, \quad (257)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -го компонента;  $\mathbf{r}_{ij}$  — вектор



взаимного расстояния между галактиками  $i$  и  $j$ ;  $m_j$  — масса  $j$ -го компонента; параметр  $\alpha$  дается формулой

$$\alpha = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_V}{3}}, \quad (258)$$

$\rho_V$  — плотность вакуума.

Согласно данным космического эксперимента WMAP, величина  $\rho_V = 6.25 \cdot 10^{-30}$  г/см<sup>3</sup>, тогда  $\alpha = 1.9 \cdot 10^{-18} c^{-1} = 57.5$  км/с/Мпк.

Оказалось, что модели без вакуума редко согласуются с данными наблюдений как широких, так и компактных групп галактик. В то время как модели с учетом вакуума дают хорошее согласие с наблюдениями групп галактик в широком диапазоне параметров.

## Заключение

Таким образом, гравитационная задача трех тел находит широкое применение в различных областях астрономии, таких как небесная механика, звездная динамика и динамика систем галактик. Несмотря на большое количество книг и статей, посвященных данной проблеме, число нерешенных вопросов неуклонно растет. Но это и естественно для любого активно развивающегося направления — прогресс в исследованиях постоянно порождает новые задачи. Наше учебное пособие нацелено на рассмотрение некоторых аспектов задачи трех тел, не нашедших должного раскрытия в других книгах и обзорах, посвященных данной тематике. В частности, в книге нашли отражение некоторые результаты, полученные в последние годы с привлечением как аналитических подходов, так и численного моделирования.

В дальнейшем представляет интерес исследовать целый ряд нерешенных проблем:

- теория резонансных движений в общей задаче трех тел;
- символическая динамика тройных систем (в частности, статистика переходов между состояниями в ходе эволюции неустойчивых тройных систем);
- поиск аналитических решений в некоторых предельных случаях задачи трех тел (в частности, в прямолинейной и равнобедренной задачах);
- обобщение метода поиска периодических орбит посредством минимизации функционала действия на трехмерный случай;
- поиск оптимального критерия устойчивости тройных систем,

применимого для широкого класса начальных условий и отношений масс тел;

- исследование топологических связей между областями ограниченных движений в окрестностях устойчивых периодических орбит;
- каталогизация типов периодических и близких к ним орбит в разных измерениях;
- статистическое исследование нахождения тройной системы в ходе эволюции в состояниях 0, I, II (тройное сближение, простое взаимодействие, выброс).

## Задачи для самоконтроля

1. Вывести интегралы центра масс, площадей и энергии из уравнений движения в прямоугольной барицентрической системе координат.
2. Записать уравнения движения и интегралы движения в цилиндрических и сферических координатах.
3. Найти зависимость от времени в декартовых и полярных координат для решений Эйлера и Лагранжа.
4. Получить уравнения движения в относительных координатах  $(r, \rho)$  и  $(r, R)$  для прямолинейной и равнобедренной задач трех тел.
5. Вывести выражения для интеграла энергии через  $(r, \rho)$  и  $(r, R)$  в прямолинейной и равнобедренной задачах трех тел.
6. Получить гомографические решения для прямолинейной и равнобедренной задач трех тел.
7. Получить уравнения движения в барицентрических прямоугольных координатах для ограниченной задачи трех тел ( $m_3 = 0$ ).
8. Показать, что область  $D$  является областью всех возможных конфигураций тройных систем.
9. Получить формулы для координат и скоростей трех тел через элементы орбит внешней и внутренней двойных подсистем.

10. Вывести формулу для радиуса тройного сближения из условия, что в любой точке внутри сферы сближения модуль потенциальной энергии системы больше, чем модуль ее удвоенной полной энергии.
11. Вывести формулу для радиуса выброса из условия, что тела находятся в вершинах равностороннего треугольника в момент сближения и обладают чисто трансверсальным движением.
12. Показать, что среднее время жизни изолированных неустойчивых тройных систем бесконечно велико.
13. Оценить среднее время пересечения и средний размер системы для тройной звезды с массами компонентов, равными массе Солнца, взаимными расстояниями, равными 1 а.е., и нулевыми начальными скоростями.
14. Определить, является ли устойчивой по критериям Голубева, Харрингтона, Игглтона-Киселевой, Мардлинг-Арседа, Валтонена-Карттунена и Токовина следущая тройная система: массы компонентов равны массе Солнца; орбиты внутренней и внешней двойных круговые с большими полуосями, равными 1 а.е. и 5 а.е. Движения прямые и плоские.
15. Определить периоды для решений Эйлера и Лагранжа, когда массы компонентов равны массе Солнца, а минимальное взаимное расстояние равно 1 а.е.
16. Определить периоды решений Эйлера и Лагранжа для потенциала взаимодействия между телами  $\phi = r^{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), где  $r$  — взаимное расстояние.
17. Оценить наибольшее значение большой полуоси двойной системы, устойчивой в поле Галактики. Массы звезд равны массе Солнца. Галактику считаем точечной массой  $M = 10^{11} M_{\odot}$ . Расстояние от двойной системы до центра масс Галактики равно 8 кпк.
18. Проверить выполнение критерия устойчивости Валтонена-Карттунена для тройных звезд ADS 10157,  $\lambda$  Тау, CN Cyg.

19. Как изменится устойчивость тройной системы, в которой удаленный компонент мгновенно теряет половину своей массы в результате вспышки. Будем считать начальные орбиты круговыми, движения прямые и плоские. Начальные массы звезд равны  $10M_{\odot}$ ; большая полуось внутренней пары равна 10 а.е.; большая полуось внешней пары равна 50 а.е. Потеря массы происходит изотропно.
20. Рассмотрим иерархическую тройную систему, состоящую из двух звезд главной последовательности с массами, равными  $2M_{\odot}$ , и звезды Вольфа–Райе с массой, равной  $10M_{\odot}$ . Начальные орбиты круговые, движения плоские и обратные. Большая полуось внутренней пары равна 10 а.е.; большая полуось внешней пары равна 50 а.е. Звезда Вольфа–Райе является компонентом внутренней пары. Какую долю массы она должна потерять, чтобы тройная система стала неустойчивой по критерию Токовинина?
21. Рассмотрим иерархическую тройную систему, состоящую из двух звезд главной последовательности с массами, равными  $2M_{\odot}$ , и звезды Вольфа–Райе с массой, равной  $10M_{\odot}$ . Начальные орбиты круговые, движения плоские и обратные. Большая полуось внутренней пары равна 10 а.е.; большая полуось внешней пары равна 50 а.е. Звезда Вольфа–Райе является удаленным компонентом. Какую долю массы она должна потерять, чтобы тройная система стала неустойчивой по критерию Токовинина?
22. Рассмотрим иерархическую тройную систему с полуразделенной внутренней парой. Массу теряет звезда меньшей массы. Начальные значения масс  $M_1 = 5M_{\odot}$ ,  $M_2 = 2M_{\odot}$ ,  $M_3 = 1M_{\odot}$  (удаленное тело). Начальные орбиты обеих пар круговые, движения плоские и прямые. Начальный период внутренней двойной равен 5 дней, начальный период внешней пары равен 30 дней. Как изменится устойчивость тройной системы после того, как компонент-донор потеряет половину своей массы? Потерю массы считать мгновенной.
23. В предположении, что галактики являются сферами Пламмера, из уравнений движения (257) при  $\alpha = 0$  получить вы-

ражения для интегралов центра масс, площадей и энергии системы, состоящей из трех галактик.

24. Записать уравнения движения трех галактик, находящихся в поле сферически симметричной распределенной темной материи. Центр распределения скрытой массы совпадает с центром масс триплета. Плотность темной материи убывает от центра по закону  $\rho(r) = c/r^2$ .
25. Двойная галактика с массами компонентов, равными  $10^{11}M_{\odot}$ , движется по круговой орбите радиусом  $R = 100$  кпк в поле скрытой массы с профилем плотности Пламмера  $\rho(r) = \frac{c}{r^2}$  в пределах 100 кпк со смягчающей добавкой  $\varepsilon = 5$  кпк (257). Определить максимально возможную для устойчивости большую полуось относительной орбиты галактик в паре. Галактики считаем точечными массами.

## Литература

1. Агемян Т.А. // Астрон. журн. 1954. Т. 31. С. 544.
2. Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Астрон. журн. 1967. Т. 44. С. 1261.
3. Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Астрофизика. 1968. Т. 4. С. 31.
4. Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Астрон. журн. 1971. Т. 48. С. 524.
5. Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Труды АО ЛГУ. 1977. Т. 33. С. 52.
6. Агемян Т.А., Мартынова А.И. // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1973. № 1. С. 122.
7. Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Астрофизика. 1968. Т. 4. С. 2.
8. Агемян Т.А., Аносова Ж.П., Орлов В.В. // Астрофизика. 1983. Т. 19. С. 111.
9. Алексеев В.М. // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. С. 161.
10. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
11. Амбарцумян В.А. // Астрон. журн. 1937. Т. 14. С. 207.
12. Амбарцумян В.А. // Докл. АН Арм. ССР. 1951. Т. 13. С. 97.
13. Аносова Ж.П. // Труды АО ЛГУ. 1968. Т. 25. С. 100.



14. Аносова Ж.П. // Труды АО ЛГУ. 1969. Т. 26. С. 88.
15. Аносова Ж.П. // Итоги науки и техники. Сер. астроном. 1985. Т. 26. С. 57.
16. Аносова Ж.П. // Астрон. цирк. 1986. № 1442. С. 1.
17. *Аносова* (Anosova J.P.) // The Few-Body Problem / Ed. Valtonen M.J. Acad. Publ. Dordrecht: Kluwer, 1988. P. 27.
18. Аносова Ж.П., Завалов Н.Н. // Астрон. журн. 1989. Т. 66. С. 152.
19. *Аносова и Кирсанов* (Anosova J.P., Kirsanov N.O.) // Comments Astrophys. 1991. V. 15. P. 283.
20. Аносова Ж.П., Орлов В.В. // Звездные скопления и проблемы звездной эволюции. Свердловск, 1983. С. 121.
21. Аносова Ж.П., Орлов В.В. // Труды АО ЛГУ. 1983. Т. 38. С. 142.
22. Аносова Ж.П., Орлов В.В. // Труды АО ЛГУ. 1985. Т. 40. С. 66.
23. Аносова Ж.П., Орлов В.В. // Астрон. журн. 1986. Т. 63. С. 643.
24. *Аносова и Орлов* (Anosova J.P., Orlov V.V.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1994. V. 59. P. 327.
25. Аносова Ж.П., Бертов Д.И., Орлов В.В. // Астрофизика. 1984. Т. 20. С. 327.
26. Аносова Ж.П., Киселева Л.Г., Орлов В.В., Чернин А.Д. // Астрон. журн. 1991. Т. 68. С. 449.
27. Аносова Ж.П., Киселева Л.Г., Орлов В.В., Чернин А.Д. // Астрон. журн. 1992. Т. 69. С. 461.
28. *Аносова и др.* (Anosova J.P., Orlov V.V., Aarseth S.J.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1994. V. 60. P. 365.
29. *Аносова* (Anosova J.P.) // ApSS, 1996. V. 238. P. 223.

30. Антонов В.А. Соотношение упорядоченности и беспорядка в движении тела в гравитирующей системе. Дис. ... доктора физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1983.
31. Арнольд В.И. // Успехи математических наук. 1963. Т. 18. № 6. С. 81.
32. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
33. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. // Математические аспекты классической и небесной механики. 1985. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления: Динамические системы-3. М.: ВИНТИ, С. 5.
34. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002.
35. *Aarseth* (Aarseth S.J.) Gravitational  $N$ -body simulations. Tools and algorithms. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
36. *Aarseth* и *Zare* (Aarseth S.J., Zare K.) // *Celest. Mech.* 1974. V. 10. P. 185.
37. *Aarseth* и *Heggie* (Aarseth S.J., Heggie D.C.) // *Astron. and Astrophys.* 1976. V. 53. P. 259.
38. *Aarseth* и др. (Aarseth S.J., Hénon M., Wielen R.) // *Astron. and Astrophys.* 1974. V. 37. P. 183.
39. *Aceves* (Aceves H.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 2001. V. 326. P. 1412.
40. Бабаджанянц Л.К. // Труды ИТА. 1978. Т. 17. С. 3
41. *Бабaджaнaнц* (Babadzanjanz L.K.) // *Celest. Mech.* 1979. V. 20. P. 43.
42. *Bate* и др. (Bate M.R., Bonnel I.A., Bromm V.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 2003. V. 339. P. 577.
43. *Bekker* (Bekker L.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1920. V. 809. P. 590.

44. *Бинни и Меррифилд* (Binney J., Merrifield M.) Galactic Astronomy. Princeton Univ. Press, 1998.
45. *Биркгоф* (Birkhoff G.D.) Dynamical systems. New York, 1927. (См. также перевод: Биркгоф Дж. Динамические системы. Ижевск: УРСС, 2002.)
46. *Блэк* (Black D.C.) // Astron. J. 1982. V. 87. P. 1333.
47. *Брук* (Broucke R.) // Astron. and Astrophys. 1979. V. 73. P. 303.
48. Бэттен А. Двойные и кратные звезды. М.: Мир, 1976.
49. *Валтонен* (Valtonen M.) // Vistas in Astron. 1988. V. 32. P. 23.
50. *Валтонен* (Valtonen M.) Private comm. 2005.
51. *Валтонен и Арсет* (Valtonen M., Aarseth S.J.) // Revista Mex. Astron. Astrofis. 1977. V. 3. P. 163.
52. *Валтонен и Карттунен* (Valtonen M.J., Karttunen H.) Three-body problem in astrophysics. Cambridge Univ. Press, 2006.
53. *Валтонен и Миккола* (Valtonen M., Mikkola S.) // Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 1991. V. 29. P. 9.
54. Валтонен М., Мюллари А.А., Орлов В.В., Рубинов А.В. // Письма в Астрон. журн. 2003. Т. 29. С. 50.
55. *Валтонен и др.* (Valtonen M., Mylläri A., Orlov V., Rubinov A.) // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2005. V. 364. P. 91.
56. *Валтонен и др.* (Valtonen M., Mylläri A., Orlov V., Rubinov A.) // Proc. of IAU Symp. 246 / Eds Vesperini E., Giersz M., Sills A. Cambridge University Press, 2008. P. 119.
57. *Вальдфогель* (Waldvogel J.) // Celest. Mech. 1972. V. 6. P. 221.
58. *Ван Цю-Дун* (Wang Qiu-Dong) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1991. V. 50. P. 73.
59. *Вандербей* (Vanderbei R.J.) // Annals of the New York Academy of Sciences. 2004. V. 1017. P. 422.

60. *Ворралл* (Worrall G.) // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1967. V. 135. P. 83.
61. *Гец и др.* (Ghez A.M., Neugebauer G., Matthews K.) // Astron. J. 1993. V. 106. P. 2005.
62. Герасимов И.А. Задача двух неподвижных центров Эйлера. М.: МГУ, 2007.
63. Голубев В.Г. // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174. С. 767.
64. Голубев В.Г. // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. С. 308.
65. Голубев В.Г., Гребенников Е.А. Проблема трех тел в небесной механике. М.: МГУ, 1985.
66. *Гомес и др.* (Gómez L., Rodriguez L.F., Loinard L., Lizano S., Allen C., Poveda A., Menten B.M.) // Astrophys. J. 2008. V. 685. P. 333.
67. Горбачкий В.Г. Введение в физику галактик и скоплений галактик. М.: Наука, 1986.
68. *Гриффит и Норт* (Griffith J.S., North R.D.) // Celest. Mech. 1974. V. 8. P. 473.
69. *Гудвин и Кроупа* (Goodwin S.P., Kroupa P.) // Astron. and Astrophys. 2005. V. 439. P. 565.
70. *Гудвин и др.* (Goodwin S.P., Whitworth A.P., Ward-Thompson D.) // Astron. and Astrophys. 2004a. V. 414. P. 663.
71. *Гудвин и др.* (Goodwin S.P., Whitworth A.P., Ward-Thompson D.) // Astron. and Astrophys. 2004b. V. 423. P. 169.
72. *Гуин и др.* (Guien S., Dongados C., Monin J.-L., Magnier E., Martin E.L.) // Astron. and Astrophys. 2006. V. 446. P. 485.
73. Гуревич Л.Э., Левин Б.Ю. // Астрон. журн. 1950. Т. 27. С. 273.
74. *Дворак и др.* (Dvorak R., Contopoulos G., Efthymiopoulos Ch., Voglis N.) // Planetary and Space Sci. 1998. V. 46. P. 1567.
75. *Дельгадо-Донат и др.* (Delgado-Donate E.J., Clarke C.J., Bate M.R.) // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2004a. V. 347. P. 759.

76. *Дельгадо-Донат и др.* (Delgado-Donate E.J., Clarke C.J., Bate M.R., Hodgkin S.T.) // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 20046. V. 351. P. 617.
77. *Джиснс* (Jeans J.H.) // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1919. V. 79. P. 408.
78. *Доннисон и Микулскис* (Donnison J.R., Mikulskis D.F.) // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1995. V. 272. P. 1.
79. *Драгт и Финн* (Dragt A.J., Finn J.M.) // J. Geophys. Res., 1976. V. 81. P. 2327.
80. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.
81. Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. // Интегрируемые системы. I. 1985. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления: Динамические системы-4. М.: ВИНТИ, С. 179.
82. *Дурисен и др.* (Durisen R.H., Sterzik M.F., Pickett B.K.) // Astron. and Astrophys. 2001. V. 371. P. 952.
83. *Душен и др.* (Duchêne G., Bouvier J., Bontemps S., André P. Motte F.) // Astron. and Astrophys. 2004. V. 427. P. 651.
84. *Душен и др.* (Duchêne G., Delgado-Donate E., Haisch Ir.K.E., Loinard L., Rodriguez L.F.) // Protostars and Planets. V. 2006.
85. Елькин А.В., Соколов Л.Л., Титов В.Б., Шмыров А.С. // Труды АО СПбГУ, 2003. Т. XLV. С. 73.
86. ЕКА (ESA). The Hipparcos and Tycho Catalogues. ESA SP-1200, 1997.
87. *Ёсида* (Yoshida J.) // Publ. Astron. Soc. Japan, 1972. V. 24. P. 391.
88. *Ёсида* (Yoshida J.) // Publ. Astron. Soc. Japan, 1974. V. 26. P. 367.
89. Жучков Р.Я., Орлов В.В. // Астрон. журн. 2005. Т. 82. С. 231.

90. Жучков Р.Я., Орлов В.В., Рубинов А.В. // Астрон. журн. 2006. Т. 83. С. 70.
91. *Заре* (Zare K.) // *Celest. Mech.* 1974. V. 10. P. 207.
92. *Заре и Чесли* (Zare K., Chesley S.) // *Chaos*. 1998. V. 8. P. 475.
93. *Игглтон и Киселева* (Eggleton P.P., Kiseleva L.G.) // *Astrophys. J.* 1995. V. 455. P. 640.
94. Караченцев И.Д. Двойные галактики. М.: Наука, 1987.
95. Караченцев И.Д., Караченцева В.Е., Лебедев В.С. // *Известия САО*. 1989. Т. 27. С. 67.
96. *Киселева и Орлов* (Kiseleva L.G., Orlov V.V.) // *Vistas in Astron.* 1993. V. 36. P. 1.
97. *Киселева и др.* (Kiseleva L.G., Eggleton P.P., Anosova J.P.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1994a. V. 267. P. 161.
98. *Киселева и др.* (Kiseleva L.G., Eggleton P.P., Orlov V.V.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1994b. V. 270. P. 936.
99. *Киселева и др.* (Kiseleva L.G., Eggleton P.P., Mikkola S.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1998. V. 300. P. 292.
100. *Ковей и др.* (Covey K.R., Greene T.P., Doppmann G.W., Lada C.J.) // *Astron. J.* 2006. V. 131. P. 512.
101. *Кодзай* (Kozai Y.) // *Astron. J.* 1962. V. 67. P. 591.
102. Козлов В.В. // *Успехи математических наук*. 1983. Т. 38. № 1. С. 3.
103. Козлов В.В. // *Прикладная математика и механика*, 1988. Т. 52. С. 531.
104. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского госуниверситета, 1995.
105. Колмогоров А.Н. // *Доклады АН СССР*. 1954. Т. 98. С. 527.
106. *Кореско* (Koresko C.D.) // *Astrophys. J.* 2002. V. 124. P. 1082.

107. Кузьминых В.А. // Приклад. мат. и мех. 1997. Т. 61. С. 75.
108. *Кустаанхеймо и Штифель* (Kustaanheimo P., Stiefel E.J.) // *Reine Angew. Math.* 1965. V. 218. P. 204.
109. *Ларсон* (Larson R.B.) // *The Formation of Binary Stars. Proc. of IAU Symp. 200 / Eds Zinnecker H., Mathieu R.D.* San Francisco: ASP, 2001. P. 93.
110. *Левы-Чивита* (Levi-Civita T.) // *Ann. Math.* 1903. V. 9. P. 1.
111. Лидов М.Л. // *Проблемы движения искусств. неб. тел. М.: Изд-во АН СССР, 1961. № 8. С. 5.*
112. *Лойнард и др.* (Loinard L., Rodriguez L.F., Rodriguez M.I.) // *Astrophys. J.* 2003. V. 587. P. L47.
113. *Луни и др.* (Looney L.W., Mundy L.G., Welch W.J.) // *Astrophys. J.* 2000. V. 529. P. 477.
114. *Мазер и МакГихи* (Mather J.N., McGehee R.) // *Lect. Notes Phys.* 1975. V. 38. P. 573.
115. *Майя и др.* (Maia M.A.G., da Costa L.N., Latham D.W.) // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 1989. V. 69. P. 809.
116. *Мамон* (Mamon G.A.) // *Astrophys. J.* 1987. V. 321. P. 622.
117. *Мамон* (Mamon G.A.) // *NASA Conf. Publ.* 1990. V. 3098. P. 609.
118. *Мардлинг и Арсет* (Mardling R., Aarseth S.J.) // *The Dynamics of Small Bodies in the Solar System, a Major Key to Solar System Studies / Eds Steves B.A., Roy A.E.* Dordrecht: Kluwer, 1999. P. 385.
119. Мартынова А.И., Орлов В.В. // *Вестник СПбГУ. Сер. 1.* 2000. № 2. С. 130.
120. Мартынова и др. (Martynova A.I., Orlov V.V., Rubinov A.V.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 2003. V. 344. P. 1091.
121. Маршал К. *Задача трех тел.* М.: Ижевск. ин-т комп. исслед, 2004.

122. *Маршалль* (Marchal C.) // *Celest. Mech.* 1974. V. 9. P. 381.
123. *Маршалль и др.* (Marchal C., Yoshida J., Sun Yi-Sui) // *Acta Astronaut.* 1984. V. 11. P. 415.
124. *Мёккль* (Moeckel R.) // *Contemporary Math.* 1988. V. 81. P. 1.
125. *Миккола и Арсет* (Mikkola S., Aarseth S.J.) // *Celest. Mech.* 1990. V. 47. P. 375.
126. *Миккола и Арсет* (Mikkola S., Aarseth S.J.) // *Celest. Mech. Дун. Astron.* 1993. V. 57. P. 439.
127. *Миккола и Валтонен* (Mikkola S., Valtonen M.J.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1986. V. 223. P. 269.
128. *Минц и Орлов* (Minz A., Orlov V.V.) // *ASP Conf. Ser.* 2004. V. 316. P. 291.
129. *Монахан* (Monaghan J.J.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1976a. V. 176. P. 63.
130. *Монахан* (Monaghan J.J.) // *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* 1976b. V. 177. P. 583.
131. *Морбиделли и Джорджилли* (Morbidelli A., Giorgilli A.) // *J. Stat. Phys.* 1995. V. 78. P. 1607.
132. *Мур* (Moore C.) // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 70. P. 3679.
133. Мячин В.Ф. // *Бюлл. ИТА.* 1975. Т. 13. С. 636.
134. Нежинский Е.М. // *Астрон. журн.* 1974. Т. 51. С. 956.
135. Нежинский Е.М. // *Письма в Астрон. журн.* 1980. Т. 6. С. 381.
136. Орлов В.В. // *Вестник ЛГУ. Сер. 1.* 1986. № 2. С. 82.
137. Орлов В.В., Жучков Р.Я. // *Астрон. журн.* 2005. Т. 82. С. 231.
138. Орлов В.В., Мартынова А.И. // *Астрон. журн.* 2003. Т. 80. С. 1046.
139. Орлов В.В., Петрова А.В. // *Письма в Астрон. журн.* 2000. Т. 26. С. 301.



140. Орлов В.В., Петрова А.В., Мартынова А.И. // Письма в Астрон. журн. 2001. Т. 27. С. 795.
141. Орлов В.В., Петрова А.В., Мартынова А.И. // Астрон. журн. 2002. Т. 79. С. 1034.
142. *Орлов и др.* (Orlov V.V., Petrova A.V., Martynova A.I.) // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 2002. V. 333. P. 495.
143. Орлов В.В., Петрова А.В., Мартынова А.И. // Астрон. журн. 2003. Т. 80. С. 280.
144. Орлов В.В., Рубинов А.В., Чернин А.Д. // Письма в Астрон. журн. 2003. Т. 29. С. 148.
145. Орлов В.В., Петрова А.В., Рубинов А.В., Мартынова А.И. // Письма в Астрон. журн. 2004. Т. 30. С. 393.
146. *Орлов и др.* (Orlov V.V., Petrova A.V., Rubinov A.V., Martynova A.I.) // ASP Conf. Ser. 2004. V. 316. P. 70.
147. *Орлов и др.* (Orlov V.V., Petrova A.V., Tanikawa K., Saito M.M., Martynova A.I.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. V. 100. P. 93.
148. Петров Н.А. Частное сообщение. 2004.
149. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
150. Полешиков С.М., Холопов А.А. Теория  $L$ -матриц и регуляризация уравнений движения в небесной механике. Сыктывкар: Сыктывкарский лесной институт, 1999.
151. *Пуанкаре* (Poincaré H.) // Acta Math. 1907. V. 31. P. 1.
152. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды (в трех томах). М.: Наука, 1971 (Т. I.), 1972 (Т. II).
153. *Пукакко и Росквист* (Pucacco G., Rosquist K.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2003. V. 1–2. P. 1.
154. *Ре́йпурт* (Reipurth B.) // Astron. J. 2000. V. 120. P. 3177.
155. *Ре́йпурт и др.* (Reipurth B., Rodriguez L.F., Anglada G., Bally J.) // Astron. J. 2002. V. 124. P. 1045.

156. *Reipurth u др.* (Reipurth B., Rodriguez L.F., Anglada G., Bally J.) // *Astron. J.* 2004. V. 127. P. 1736.
157. *Rodriguez u др.* (Rodriguez L.F., Poveda A., Lizano S., Allen C.) // *Astrophys. J.* 2005. V. 627. P. L65.
158. *Roy u др.* (Roy A.E., Walker I.W., Carusi A., Valsechi G.B.) // *Astron. and Astrophys.* 1984. V. 141. P. 25.
159. Рубинов А.В. // *Астрон. журн.* 2004. Т. 81. С. 50.
160. Рубинов А.В., Петрова А.В., Орлов В.В. // *Астрон. журн.* 2002. Т. 79. С. 1044.
161. *Рубинов u др.* (Rubinov A.V., Petrova A.V., Orlov V.V.) // *Publ. Astron Obs. Belgrade.* 2003. V. 75. P. 17.
162. Саакян Р.А. О вероятности захвата в задаче трех тел. Изд-во АН Арм. ССР, 1961.
163. *Saari* (Saari D.G.) // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1971. V. 156, P. 219.
164. *Saslaw u др.* (Saslaw W.C., Valtonen M.J., Aarseth S.J.) // *Astrophys. J.* 1974. V. 190. P. 253.
165. *Себехей* (Szebehely V.) *Theory of orbits.* New York: Academic Press, 1967. (См. также перевод: Себехей В. Теория орбит. М.: Наука, 1982.)
166. *Себехей* (Szebehely V.) // *Celest. Mech.* 1971. V. 4. P. 116.
167. *Себехей* (Szebehely V.) // *Celest. Mech.* 1973. V. 8. P. 163.
168. *Себехей u Заре* (Szebehely V., Zare K.) // *Astron. and Astrophys.* 1977. V. 58. P. 145.
169. *Себехей u Петерс* (Szebehely V., Peters C.F.) // *Astron. J.* 1967. V. 72. P. 1187.
170. Симо К. Современные проблемы хаоса и нелинейности. М.–Ижевск. 2002. С. 233.
171. Симо К. Современные проблемы хаоса и нелинейности. М.–Ижевск. 2002. С. 252.

172. *Симо и Мартинес* (Simo C., Martinez R.) // *Celest. Mech.* 1988. V. 41. P. 179.
173. Ситников К.А. // Доклады АН СССР. 1960. Т. 133. С. 303.
174. Соколов Л.Л. Траектории гравитационного рассеяния и их астрономические приложения. Дис. ... доктора физ.-мат. наук. СПб: СПбГУ, 2007.
175. Соколов Л.Л., Башаков А.А., Питьев Н.П. // *Астрон. вестн.* 2008. Т. 42. № 1. С. 20.
176. Соколов Л.Л., Холшевников К.В. // *Труды ИПА РАН.* 2004. Вып. 11. С. 151.
177. Соловая Н.А. // *Труды ГАИШ.* 1972. Т. 43. С. 38.
178. *Соловая* (Solovaya N.A.) // *Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso.* 2003. V. 33. P. 179.
179. *Стендиш* (Standish E.M.) // *Celest. Mech.* 1971. V. 4. P. 44.
180. *Сундман* (Sundman K.F.) // *Acta Math.* 1912. V. 36. P. 105.
181. *Тан* (Tan J.C.) // *Astrophys. J.* 2004. V. 607. P. L47.
182. *Таникава и Миккола* (Tanikawa K., Mikkola S.) // *Chaos.* 2000. V. 10. P. 649.
183. *Таникава и Сайто* (Tanikawa K., Saito M.) // *ASP Conf. Ser.* 2004. V. 316. P. 63.
184. *Таникава и Умехара* (Tanikawa K., Umehara H.) // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1998. V. 70. P. 167.
185. Тевзадзе Г.А. // *Изв. АН Арм. ССР.* 1962. Т. 15. С. 67.
186. *Титов* (Titov V.) // *Ann. Univer. Turkuensis. Ser. 1A.* 2006. V. 358. P. 9.
187. Титов В.Б. // Четвертые Поляховские чтения. Избранные труды. СПб.: ВВМ, 2006. С. 278.
188. *Токовинин* (Tokovinin A.A.) // *Astron. and Astrophys. Suppl.* 1997. V. 124. P. 75.

189. *Токковинин* (Tokovinin A.A.) // Rev. Mex. Astron. Astrofis. Ser. Conf. 2004. V. 21. P. 7.
190. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, Гл. ред. технико-теоретической литературы, 1937.
191. *Умехара и Таникава* (Umehara H., Tanikawa K.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1999. V. 74. P. 69.
192. *Фекел* (Fekel F.C.Jr.) // Astrophys. J. 1981. V. 246. P. 879.
193. *Хайш и др.* (Haisch Ir.K.E., Barsony M., Greene T.P., Ressler M.E.) // Astron. J. 2002. V. 124. P. 2014.
194. *Хайш и др.* (Haisch Ir.K.E., Greene T.P., Barsony M., Stahler S.W.) // Astron. J. 2004. V. 127. P. 1747.
195. *Харрингтон* (Harrington R.S.) // Celest. Mech. 1972. V. 6. P. 322.
196. *Харрингтон* (Harrington R.S.) // Astron. J. 1977. V. 82. P. 753.
197. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
198. *Хегги* (Heggie D.C.) // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 217.
199. *Хегги* (Heggie D.C.) // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1975. V. 173. P. 729.
200. *Хегги и Хут* (Heggie D.C., Hut P.) // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1993. V. 85. P. 247.
201. *Хейслер и др.* (Heisler J., Tremaine S., Bahcall J.N.) // Astrophys. J. 1985. V. 298. P. 8.
202. *Хиетаринта и Миккола* (Hietarinta J., Mikkola S.) // Chaos. 1993. V. 3. P. 183.
203. *Хиксон* (Hickson P.) // Astrophys. J. 1982. V. 255. P. 382.
204. Холшевников К.В. Асимптотические методы небесной механики. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1985.

205. Холшевников К.В. // Аналитическая небесная механика / Ред. Холшевников К.В. Казань: Изд-во Казанского университета, 1990. С. 5.
206. Хут (Hut P.) // Astron. J. 1983. V. 88. P. 1549.
207. Хут (Hut P.) // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1984. V. 55. P. 301.
208. Хут (Hut P.) // Astrophys. J. 1993. V. 403. P. 256.
209. Хут и Бакалл (Hut P., Bahcall J.N.) // Astrophys. J. 1983. V. 268. P. 319.
210. Хухра и Геллер (Huchra J., Geller M.) // Astrophys. J. 1982. V. 257. P. 423.
211. Чандлер и др. (Chandler C.J., Brogan C.L., Shirley Y.L., Loignard L.) // Astrophys. J. 2005. V. 632. P. 371.
212. Чернин и др. (Chernin A., Ivanov A., Mikkola S.) // Astron. and Astrophys. 1994. V. 281. P. 685.
213. Чесли (Chesley S.R.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1999. V. 73. P. 291.
214. Чириков (Chirikov B.V.) // Phys. Rep. 1979. V. 52. P. 263.
215. Чириков (Chirikov B.V.) // Chaos. Solitons and Fractals. 1991. V. 1. P. 79.
216. Шази (Chazy J.) // Ann. l'École Norm. 1922. Sur. 3. Ser. P. 29.
217. Шази (Chazy J.J.) // Math. Pures et Appl. 1929. V. 8. P. 353.
218. Шази (Chazy J.) // Bull. Astron. 1932. V. 8. P. 403.
219. Шансине и Монтгомери (Chenciner A., Montgomery R.) // Ann. Math. 2000. V. 152. P. 881.
220. Шенсине А., Монтгомери Р., Симо К., Джервер Дж. Современные проблемы хаоса и нелинейности. М.-Ижевск, 2002. С. 206.
221. Шевченко и Шоль (Shevchenko I.I., Scholl H.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1997. V. 68. P. 163.

222. Шмидт О.Ю. // Доклады АН СССР. 1947. Т. 582. С. 213.
223. *Штерцик и Дурисен* (Sterzik M.F., Durisen R.H.) // Astron. and Astrophys. 1995. V. 304. P. L9.
224. *Штерцик и Дурисен* (Sterzik M.F., Durisen R.H.) // Astron. and Astrophys. 1998. V. 339. P. 95.
225. *Штерцик и Дурисен* (Sterzik M.F., Durisen R.H.) // Astron. and Astrophys. 2003. V. 400. P. 1031.
226. *Штерцик и Токовинин* (Sterzik M.F., Tokovinin A.A.) // Astron. and Astrophys. 2002. V. 384. P. 1030.
227. *Штерцик и др.* (Sterzik M.F., Durisen R.H., Zinnecker H.) // Astron. and Astrophys. 2003. V. 411. P. 91.
228. *Штифель и Вальдфогель* (Stiefel E., Waldvogel J.) // Compt. Rend. 1965. V. 260. P. 805.
229. *Шубарт* (von Schubart J.) // Astron. Nachr. 1956. V. 283. P. 17.
230. *Эйлер* (Euler L.) // Novi Comm. Acad. Sci. Petropolit. 1765. V. 11. P. 144.
231. *Энон* (Hénon M.) // Celest. Mech. 1977. V. 15. P. 243.
232. *Ябусита* (Yabushita S.) // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1966. V. 133. P. 133.

Учебное издание

*Алия Ибрагимовна Мартынова, Виктор Владимирович Орлов,  
Алексей Вадимович Рубинов, Леонид Леонидович Соколов,  
Игорь Иванович Никифоров*

**ДИНАМИКА ТРОЙНЫХ СИСТЕМ**