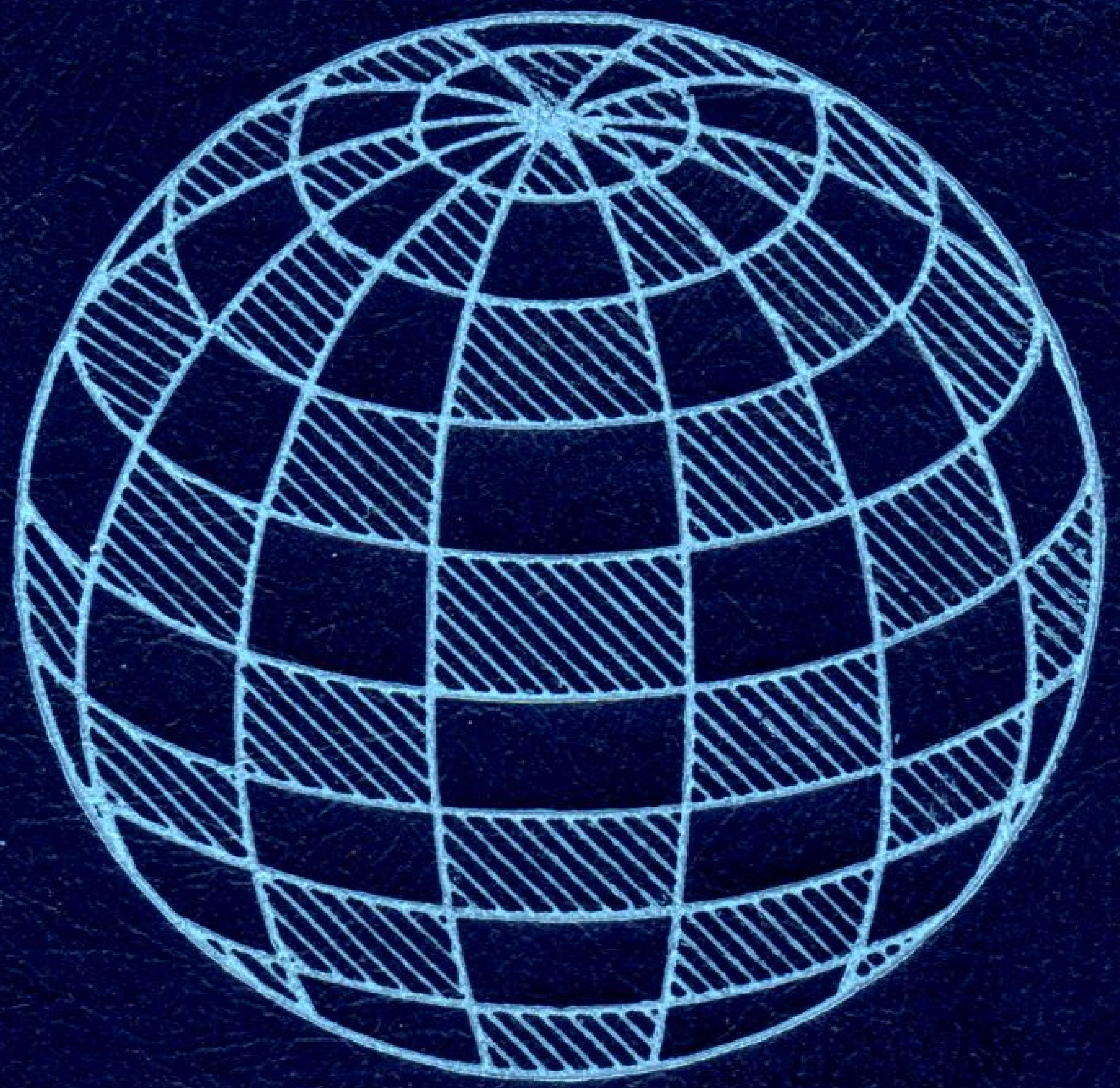
Е.П. АКСЕНОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ



Е. П. АКСЕНОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.62
А42
УДК 521.1

Аксенов Е. П. **Специальные функции в небесной механике.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986, 320 с.

Излагается теория специальных функций, наиболее часто используемых в небесной механике. Наряду со сферическими, эллиптическими и бесселевыми функциями, многочленами Гегенбауэра и гипергеометрической функцией рассматриваются коэффициенты Лапласа, многочлены Тиссерана, коэффициенты Ганзена, многочлены Ньюкома, функции наклона и эксцентриситета в теории ИСЗ.

Приводятся важнейшие задачи небесной механики, которые решаются с помощью этих специальных функций.

Для небесных механиков — специалистов, аспирантов и студентов, а также для научных сотрудников и инженеров, работающих в области геодезии, геофизики, гравиметрии и механики.

Табл. 6. Ил. 14. Библиогр. 96 назв.

Рецензент
доктор физико-математических наук *В. Г. Дёмин*

$А\frac{1705030000-112}{053(02)-86}130\text{-}86$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение целого ряда задач небесной механики немыслимо без применения специальных функций. Неслучайно поэтому, что многие специальные функции, уже давно широко используемые в механике, физике и других науках, своим происхождением имели те или иные задачи небесной механики. Так, сферические функции были введены Лежандром и Лапласом, когда они рассматривали задачу о фигурах Земли и планет. Функции Бесселя появились, в частности, в связи с проблемой разложения координат эллиптического движения в тригонометрические ряды.

Наряду с этими хорошо известными функциями в небесной механике были введены и другие специальные функции. К ним относятся коэффициенты Лапласа, многочлены Тиссерана, коэффициенты Ганзена, многочлены Ньюкома. В последние годы в связи с разработкой теории движения искусственных спутников Земли были введены функции наклона и функции эксцентриситета. Применение этих функций в наиболее сложных и громоздких задачах небесной механики позволяет представить окончательные результаты в простой и изящной форме.

Книга имеет прикладной характер. Поэтому в ней, с одной стороны, излагаются основные свойства специальных функций, наиболее часто используемых в небесной механике, с другой — рассматриваются важнейшие небесно-механические задачи, которые решаются с помощью этих функций. Она предназначена главным образом для тех, кто интересуется больше приложениями теории специальных функций, а не самой теорией. В ней даются наиболее необходимые сведения из теории, с тем чтобы помочь читателю сознательно пользоваться справочной литературой и самостоятельно применять теорию к решению прикладных задач. С этой же целью, излагая свойства той или иной специальной функции, автор стремился привести все основные результаты, которые необходимы для практических вычислений.

Книга состоит из восьми глав. Каждая глава заканчивается параграфом, в котором приводятся сведения из истории создания теории рассматриваемой специальной функции, указывается дополнительная литература, даются ссылки на работы, содержащие конкретные алгоритмы вычисления специальных функций на ЭВМ.

Первая глава посвящена сферическим функциям. Важным моментом здесь является изложение проблемы преобразования сферических функций при повороте системы координат. Полученные результаты используются затем в четвертой главе, где излагается теория функций наклона. Из прикладных задач в этой главе рассматриваются проблема разложения потенциала притяжения Земли в ряд Лапласа, спутниковая задача трех тел.

Во второй главе подробно излагается теория коэффициентов Лапласа. Дается вывод разложения возмущающей функции в теории движения планет для случая нулевых эксцентриситетов и малого взаимного наклона планетных орбит.

В третьей главе после краткого изложения основных свойств многочленов Гегенбауэра подробно изучаются многочлены Тиссерана. Здесь рассматривается спутниковая задача трех тел и дается разложение возмущающей функции в теории движения малых планет для случая больших наклонов их орбит.

Четвертая глава посвящена функциям наклона в теории движения ИСЗ. Они рассматриваются как частный случай обобщенных сферических функций. Любопытной является связь функций наклона с многочленами Тиссерана. В этой главе дается разложение возмущающей функции в теории ИСЗ для случая нулевого эксцентриситета спутника.

Если первая и вторая главы связаны с теми задачами, в которых надо выполнить разложения по степеням отношений взаимных расстояний, а третья и четвертая главы — с задачами, где требуется выразить возмущающую функцию явно через наклон орбиты, то главы пятая и шестая имеют отношение к тем задачам, в которых надо произвести разложения по степеням эксцентриситетов. Поэтому пятая глава посвящена функциям Бесселя. Здесь даются разложения различных функций эллиптического движения в ряды Фурье по кратным средней аномалии.

В шестой главе излагается теория коэффициентов Ганзена и многочленов Ньюкома. В этой главе выводятся окончательные разложения возмущающих функций в теории движения планет и ИСЗ.

Седьмая глава содержит изложение элементов теории эллиптических функций, с помощью которых интегрируются многие частные задачи небесной механики.

Последняя, восьмая глава посвящена гипергеометрической функции. Особое внимание уделено установлению связи между ранее изученными специальными функциями и этой замечательной функцией Гаусса.

Написанию книги способствовали лекции для студентов и аспирантов, которые автор читал на протяжении нескольких лет в Московском университете. Автор выражает глубокую благодарность научным сотрудникам Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга Московского университета И. А. Герасимову и И. П. Прохоровой за существенную помощь в работе над этой книгой, а также профессору В. Г. Демину, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний.

Автор

Глава I

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ I.1. Определение многочленов Лежандра. Производящая функция

Рассмотрим следующую функцию $F(x)$ действительного переменного x:

$$F(x) = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (I.1.1)$$

Будем предполагать, что $-1 \leqslant x \leqslant +1$, а α — вещественная величина, заключенная в пределах от 0 до 1.

Разложим функцию $F(x)$ в ряд по возрастающим степеням α. Для этого представим ее в виде

$$F(x) = \left[1 - 2\alpha\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда по формуле бинома Ньютона находим

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2j-1)}{1\cdot 2\ldots j}\,\alpha^j\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^j. \qquad (I.1.2)$$

Но

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^j = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\frac{j(j-1)\ldots(j-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\,x^{j-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k. \qquad (I.1.3)$$

Поэтому, подставляя (I.1.3) в (I.1.2), получим

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\frac{1\cdot 3\ldots(2j-1)}{2^k k!\,(j-k)!}\,\alpha^{j+k}x^{j-k}. \qquad (I.1.4)$$

Полагая здесь $j+k=n$, будем иметь

$$F(x)=\sum_n\sum_k(-1)^k\frac{1\cdot 3\ldots(2n-2k-1)}{2^k k!\,(n-2k)!}\alpha^n x^{n-2k}. \quad (\mathrm{I}.1.5)$$

Легко видеть, что в этой сумме значок n пробегает все целые значения от 0 до ∞, а значок k принимает целые значения от 0 до h, где h равно $\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$ смотря по тому, четное или нечетное n. Поэтому разложение (I.1.5) можно записать в следующем виде:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x),$$

где

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{h}(-1)^k\frac{1\cdot 3\ldots(2n-2k-1)}{2^k k!\,(n-2k)!}x^{n-2k}, \quad (\mathrm{I}.1.6)$$

или

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{h}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}x^{n-2k}, \quad (\mathrm{I}.1.7)$$

или

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\right]. \quad (\mathrm{I}.1.8)$$

Отсюда для первых $P_n(x)$ имеем

$$P_0(x)=1,$$
$$P_1(x)=x,$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}(-1+3x^2),$$
$$P_3(x)=\frac{1}{2}(-3x+5x^3),$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}(3-30x^2+35x^4),$$
$$P_5(x)=\frac{1}{8}(15x-70x^3+63x^5),$$
$$P_6(x)=\frac{1}{16}(-5+105x^2-315x^4+231x^6).$$

Таким образом, $P_n(x)$ есть многочлен относительно x степени n. Он называется многочленом Лежандра.

Итак, мы определили многочлен Лежандра как коэффициент при α^n в разложении функции (I.1.1) в ряд по степеням α. Другими словами,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x). \tag{I.1.9}$$

Функция, стоящая в левой части этого равенства, называется производящей функцией многочленов Лежандра.

В дальнейшем (см. § I.8) мы покажем, что при $-1\leqslant x\leqslant +1$ и любом $n\geqslant 0$ многочлен $P_n(x)$ по абсолютной величине не превосходит единицы. Поэтому разложение (I.1.9) абсолютно сходится для всех $|\alpha|<1$. Однако абсолютная сходимость разложения функции $F(x)$ в ряд по степеням α может быть доказана также следующим образом. Так как $|x|\leqslant 1$, то, полагая в (I.1.1)

$$x=\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right),$$

где $i=\sqrt{-1}$, имеем

$$F(x)=\left(1-\alpha e^{i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\alpha e^{-i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда видно, что каждый сомножитель, а следовательно и произведение, можно разложить в ряд по степеням α, который абсолютно сходится при $|\alpha|<1$.

Формула (I.1.7) показывает, что

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x), \tag{I.1.10}$$

т. е. многочлен Лежандра является четной или нечетной функцией x смотря по тому, четна или нечетна его степень.

§ I.2. Формула Родрига

Покажем, что многочлен Лежандра может быть определен формулой

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \tag{I.2.1}$$

которая называется формулой Родрига.

Прежде всего, имеем

$$(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2n-2k},$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \sum_{k=0}^{h}(-1)^k C_n^k(2n-2k)(2n-2k-1)\ldots$$

$$\ldots[2n-2k-(n-1)]\,x^{n-2k},$$

где $h=\frac{n}{2}$ или $h=\frac{n-1}{2}$ смотря по тому, какое из этих чисел целое.

Формула (I.2.1) теперь дает

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\,x^{n-2k},$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ есть целая часть числа $\frac{n}{2}$.

Сравнение этой формулы с формулой (I.1.7) и доказывает наше утверждение.

§ I.3. Формула Шлефли

Из теории функций комплексного переменного известно, что если функция $f(z)$ аналитична, то ее n-я производная в точке x может быть представлена формулой

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}, \tag{I.3.1}$$

где c — любой контур, содержащий внутри точку x.

Пусть теперь

$$f(z) = \frac{1}{2^n n!}(z^2-1)^n.$$

Тогда

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)$$

и формула (I.3.1) дает

$$P(x) = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz. \tag{I.3.2}$$

Формула (I.3.2) называется интегральной формулой Шлефли для многочленов Лежандра. Имея вспомогательный характер, она позволяет легко изучить важнейшие свойства этих многочленов.

§ I.4. Формула Лапласа

Возьмем в формуле (I.3.2) за контур c окружность радиусом $|\sqrt{x^2-1}|$ с центром в точке x. Уравнение этой окружности можно записать в виде

$$z = x + \sqrt{x^2-1}\, e^{i\varphi}, \tag{I.4.1}$$

где $i = \sqrt{-1}$, а φ изменяется в пределах от $-\pi$ до π. Дифференцируя (I.4.1), получаем

$$dz = i\sqrt{x^2-1}\, e^{i\varphi} d\varphi,$$

или

$$dz = i(z-x)\, d\varphi. \tag{I.4.2}$$

Далее, легко находим

$$\frac{z^2-1}{z-x} = 2\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right). \tag{I.4.3}$$

Подставляя теперь (I.4.2) и (I.4.3) в формулу Шлефли, будем иметь

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi,$$

или, поскольку подынтегральная функция четная,

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi. \tag{I.4.4}$$

Эта формула называется интегральной формулой Лапласа.

§ I.5. Рекуррентные соотношения между многочленами Лежандра

Продифференцируем формулу (I.1.9) по α. Это даст

$$(x-\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1}P_n(x),$$

или

$$(x-\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-1/2}=(1-2\alpha x+\alpha^2)\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha^{n-1}P_n(x),$$

или, используя (I.1.9),

$$(x-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x)=(1-2\alpha x+\alpha^2)\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha^{n-1}P_n(x).$$

Приравнивая коэффициенты при α^n в левой и правой частях этого равенства, получим

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x)=-2nxP_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)+\\+(n+1)P_{n+1}(x),$$

или окончательно

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0. \quad (I.5.1)$$

Продифференцируем теперь формулу (I.1.9) по x. Тогда найдем

$$\alpha(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P'_n(x),$$

или

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x)=(1-2\alpha x+\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P'_n(x).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при α^{n+1}, будем иметь

$$P_n(x)=P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x). \quad (I.5.2)$$

Если, далее, продифференцировать по x равенство (I.5.1), то получим

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(2n+1)xP'_n(x)+nP'_{n+1}(x)-\\-(2n+1)P_n(x)=0. \quad (I.5.3)$$

Исключая из (I.5.2) и (I.5.3) производную $P'_n(x)$, найдем следующее соотношение:

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x). \quad (I.5.4)$$

Формулы (I.5.1) и (I.5.4) позволяют легко вычислять любое число многочленов Лежандра и их производных по известным значениям $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P'_1(x)$ и $P'_2(x)$.

Получим еще одну формулу, которая нам потребуется в дальнейшем. Для этого в соотношении (I.5.4) придадим индексу n значения 1, 2, 3, ..., n и сложим почленно полученные равенства. Тогда будем иметь

$$1 + 3P_1(x) + 5P_2(x) + \ldots + (2n+1)P_n(x) = \\ = P'_{n+1}(x) + P'_n(x). \quad \text{(I.5.5)}$$

Это и есть та формула, которую нам нужно было вывести.

§ I.6. Дифференциальное уравнение Лежандра

Докажем, что многочлен Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad \text{(I.6.1)}$$

Для доказательства этого результата воспользуемся формулой Шлефли

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz, \quad \text{(I.6.2)}$$

где интегрирование производится по любому контуру c, содержащему внутри точку x.

Для производных $P'_n(x)$ и $P''_n(x)$ из формулы (I.6.2) легко находим такие выражения:

$$P'_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c (n+1)\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+2}}\,dz, \quad \text{(I.6.3)}$$

$$P''_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c (n+1)(n+2)\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+3}}\,dz. \quad \text{(I.6.4)}$$

Подставляя равенства (I.6.2)—(I.6.4) в левую часть уравнения (I.6.1), получим

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = \\ = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi i}(n+1)\int\limits_c \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+3}}[(n+2)(1-x^2) - \\ - 2x(z-x) + n(z-x)^2]\,dz =$$

$$= \frac{n+1}{2^n 2\pi i} \int\limits_c \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+3}} [-(n+2)(z^2-1) +$$

$$+2(n+1)z(z-x)]\,dz = \frac{n+1}{2^n 2\pi i} \int\limits_c \frac{d}{dz} \left[\frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-x)^{n+2}}\right] dz. \quad (I.6.5)$$

Но поскольку функция

$$\frac{(z^2-1)^{n+1}}{(z-x)^{n+2}}$$

принимает свое первоначальное значение при обходе контура c, то полученный в (I.6.5) интеграл равен нулю. Поэтому многочлен Лежандра действительно удовлетворяет уравнению (I.6.1).

Заметим, что этому уравнению можно придать и такой вид:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (I.6.6)$$

Дифференциальное уравнение (I.6.1) или (I.6.6) называется уравнением Лежандра.

§ I.7. Ортогональность многочленов Лежандра

Докажем, что в интервале $(-1, +1)$ многочлены Лежандра образуют ортогональную систему функций.

На основании (I.1.9) имеем следующие разложения:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x), \quad (I.7.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m P_m(x), \quad (I.7.2)$$

которые абсолютно сходятся для всех x из отрезка $[-1, +1]$, если $|\alpha| < 1$ и $|\beta| < 1$.

Перемножая ряды (I.7.1) и (I.7.2), мы получим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\,\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^n \beta^m P_n(x) P_m(x), \quad (I.7.3)$$

который также абсолютно сходится при $|\alpha| < 1$ и $|\beta| < 1$ для всех x из отрезка $[-1, +1]$.

Проинтегрируем равенство (1.7.3) по x в пределах от -1 до $+1$. Тогда, вводя обозначение

$$T = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\,\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}, \qquad (\text{I}.7.4)$$

получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^n \beta^m \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx = T. \qquad (\text{I}.7.5)$$

Вычисляя интеграл (I.7.4), будем иметь

$$T = -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln\left\{\sqrt{\beta(1-2\alpha x+\alpha^2)} + \sqrt{\alpha(1-2\beta x+\beta^2)}\right\}\Big|_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{(1+\alpha)\sqrt{\beta}+(1+\beta)\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)\sqrt{\beta}+(1-\beta)\sqrt{\alpha}},$$

или

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}. \qquad (\text{I}.7.6)$$

Разложим теперь T в ряд по степеням $\alpha\beta$. Для этого воспользуемся следующим известным разложением:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Имеем

$$\ln\left(1+\sqrt{\alpha\beta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha\beta)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1},$$

$$\ln\left(1-\sqrt{\alpha\beta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^{n+1} \frac{(\alpha\beta)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}.$$

С помощью этих разложений из формулы (I.7.6) легко находим

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} (\alpha\beta)^k. \qquad (\text{I}.7.7)$$

Подставляя (I.7.7) в (I.7.5), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^n \beta^m \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} (\alpha\beta)^k,$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n) \tag{I.7.8}$$

и

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{I.7.9}$$

Равенства (I.7.8), (I.7.9) и доказывают ортогональность многочленов Лежандра.

§ I.8. Поведение многочлена Лежандра на отрезке [−1, +1]

Рассмотрим поведение многочлена $P_n(x)$ на отрезке $[-1, +1]$. Найдем сначала значения $P_n(x)$ на границах этой области, а также при $x = 0$. Для этого напишем здесь формулу (I.1.9)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x). \tag{I.8.1}$$

Полагая в ней $x = 1$, получим

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(1).$$

Отсюда выводим, что

$$P_n(1) = 1. \tag{I.8.2}$$

Положим, далее, в (I.8.1) $x = -1$. Тогда

$$\frac{1}{1+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(-1).$$

Поэтому

$$P_n(-1) = (-1)^n. \tag{I.8.3}$$

Полагая, наконец, $x = 0$, будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(0),$$

но, как известно,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)} \alpha^{2n}.$$

Следовательно,

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}. \quad \text{(I.8.4)}$$

Установим теперь верхнюю границу для $P_n(x)$, если x находится в интервале $(-1, +1)$. Для этого воспользуемся формулой Лапласа

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n \, d\varphi. \quad \text{(I.8.5)}$$

Прежде всего, имеем

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |x + i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi|^n \, d\varphi.$$

При $|x| < 1$ это равенство можно записать в виде

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [1-(1-x^2)\sin^2\varphi]^{n/2} d\varphi. \quad \text{(I.8.6)}$$

Отсюда следует, что в области $(-1, +1)$

$$|P_n(x)| < 1.$$

Таким образом, показано, что на отрезке $[-1, +1]$ при любом n многочлен Лежандра не превосходит единицы.

Докажем теперь, что в интервале $(-1, +1)$ многочлен $P_n(x)$ имеет n действительных и различных корней. Для этого напишем формулу Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

и воспользуемся теоремой Ролля. Применяя эту теорему к функции $(x^2-1)^n$, мы видим, что ее производная $\frac{d}{dx}(x^2-1)^n$ имеет в интервале $(-1, +1)$ один простой корень. Применение теоремы Ролля к этой производной показывает, что вторая производная $\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n$ имеет в указанном интервале два простых корня. Продолжая эти рассуждения далее, придем к выводу, что производная $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ будет иметь n действительных и различных корней. Это и доказывает наше утверждение.

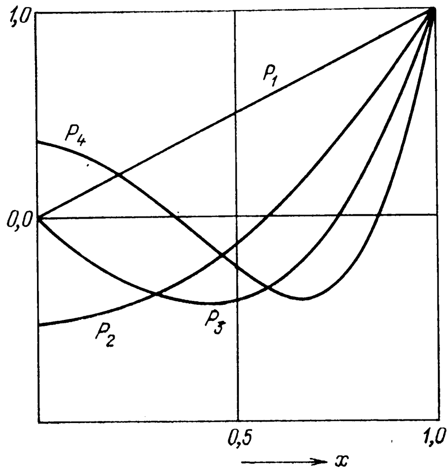


Рис. 1. Поведение многочленов $P_n(x)$ для $n = 1, 2, 3, 4$

Поведение многочленов $P_n(x)$ для $n = 1, 2, 3, 4$ показано на рис. 1

§ I.9. Многочлены Лежандра при больших значениях n

В предыдущем параграфе было показано, что в интервале $(-1, +1)$

$$|P_n(x)| < 1.$$

В этом параграфе мы найдем более точную оценку, которая показывает, что для $-1 < x < +1$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0. \tag{I.9.1}$$

Согласно (I.8.6), имеем

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [1-(1-x^2)\sin^2\varphi]^{n/2}\,d\varphi,$$

или

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [1-(1-x^2)\sin^2\varphi]^{n/2}\, d\varphi. \qquad (I.9.2)$$

Но поскольку в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} \geqslant \frac{2}{\pi},$$

то

$$1-(1-x^2)\sin^2\varphi \leqslant 1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \varphi^2 (1-x^2).$$

Поэтому если ввести обозначение

$$z = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},$$

то из (I.9.2) находим

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1-z^2\varphi^2)^{n/2}\, d\varphi.$$

Поскольку, далее,

$$1-z^2\varphi^2 \leqslant e^{-z^2\varphi^2},$$

то

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{\frac{-nz^2\varphi^2}{2}}\, d\varphi.$$

Полагая теперь

$$t = z\varphi\sqrt{\frac{n}{2}},$$

будем иметь

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{n(1-x^2)}} \int_0^T e^{-t^2} dt,$$

где

$$T = \frac{z\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Но так как

$$\int_0^T e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(T) < \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

где $\Phi(T)$ — интеграл вероятности, то окончательно находим следующую оценку:

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{\pi}{2n(1-x^2)}}, \tag{I.9.3}$$

из которой следует равенство (I.9.1).

Эта оценка показывает, что в интервале $(-1, +1)$ при возрастании n многочлен $P_n(x)$ убывает как $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

§ I.10. Ряд Лежандра

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-1, +1]$. Предположим, что в каждой точке этого отрезка $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ однозначны, конечны и непрерывны. Тогда результаты, полученные в § I.7, позволяют доказать, что эта функция может быть разложена в ряд вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \tag{I.10.1}$$

где коэффициенты a_n определяются формулами

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx. \tag{I.10.2}$$

Ряд (I.10.1) называется рядом Лежандра.

Докажем, прежде всего, что если такое разложение возможно, то коэффициенты a_n действительно даются формулами (I.10.2). Для этого умножим обе части равенства (I.10.1) на $P_m(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от -1 до $+1$. Тогда получим

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx.$$

Но, как было показано в § I.7,

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{2a_n}{2n+1} = \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) \, dx,$$

что и доказывает наше утверждение.

При сделанных в начале этого параграфа предположениях относительно функции $f(x)$ можно показать, что ряд (I.10.1) равномерно сходится во всех точках отрезка $[-1, +1]$. Здесь мы не будем приводить доказательства этого результата, поскольку в будущем (см. § I.24) предполагаем рассмотреть более общую задачу.

Нужно заметить еще, что этот результат можно обобщить на кусочно непрерывные функции. Оказывается, что в этом случае ряд (I.10.1) сходится в точках непрерывности к функции $f(x)$, а в точках разрыва к $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

§ I.11. Определение присоединенных функций Лежандра

Будем предполагать, что x — действительное число, заключенное в промежутке $[-1, +1]$, а n и m — целые неотрицательные числа, причем $n \geqslant m$. Тогда присоединенную функцию Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ порядка n и индекса m можно определить формулой

$$P_n^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \tag{I.11.1}$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра.

Если воспользоваться формулой (I.2.1), то $P_n^{(m)}(x)$ можно представить в таком виде:

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}. \tag{I.11.2}$$

Выведем развернутое выражение для $P_n^{(m)}(x)$. Согласно § I.1, имеем

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! \, (n-k)! \, (n-2k)!} x^{n-2k},$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ есть целая часть числа $\frac{n}{2}$.

Дифференцируя это равенство m раз по x и подставляя полученное выражение в (I.11.1), мы после простых преобразований найдем

$$P_n^{(m)}(x) =$$
$$= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-m}{2}\right)} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-m-2k)!\,(n-k)!} x^{n-m-2k}, \tag{I.11.3}$$

где $E\left(\frac{n-m}{2}\right)$ есть целая часть числа $\frac{n-m}{2}$. Этой формуле можно придать и такой вид:

$$P_n^{(m)}(x) =$$
$$= \frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}(1-x^2)^{m/2}\left\{x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} x^{n-m-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4\,(2n-1)(2n-3)} x^{n-m-4} - \ldots\right\}. \tag{I.11.4}$$

В частности, при $m = n$ будем иметь

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}(1-x^2)^{n/2}. \tag{I.11.5}$$

Явные выражения для нескольких первых $P_n^{(m)}(x)$ таковы:

$$P_1^{(1)}(x) = (1-x^2)^{1/2},$$
$$P_2^{(1)}(x) = 3x(1-x^2)^{1/2},$$
$$P_2^{(2)}(x) = 3(1-x^2),$$
$$P_3^{(1)}(x) = \frac{3}{2}(-1+5x^2)(1-x^2)^{1/2},$$
$$P_3^{(2)}(x) = 15x(1-x^2),$$
$$P_3^{(3)}(x) = 15(1-x^2)^{3/2}.$$

Из формулы (I.11.1) следует, что при $m = 0$ присоединенные функции Лежандра превращаются в многочлены Лежандра.

§ I.12. Дифференциальное уравнение для присоединенных функций Лежандра

Напишем уравнение Лежандра

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}+n(n+1)P_n(x)=0$$

и продифференцируем его m раз по x. Тогда будем иметь

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]-2(m+1)x\frac{d}{dx}\left[\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]+$$
$$+[n(n+1)-m(m+1)]\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}=0. \quad \text{(I.12.1)}$$

Но, согласно (I.11.1),

$$\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}=(1-x^2)^{-m/2}P_n^{(m)}(x). \quad \text{(I.12.2)}$$

Поэтому, подставляя (I.12.2) в (I.12.1), получим следующее дифференциальное уравнение для $P_n^{(m)}(x)$:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n^{(m)}(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n^{(m)}(x)}{dx}+$$
$$+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}P_n^{(m)}(x)=0. \quad \text{(I.12.3)}$$

При $m=0$ это уравнение переходит в уравнение Лежандра.

§ I.13. Рекуррентные соотношения между присоединенными функциями Лежандра

На основании § I.5 имеем следующие равенства:

$$(2n+1)xP_n(x)-(n+1)P_{n+1}(x)-nP_{n-1}(x)=0,$$

$$\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}=(2n+1)P_n(x).$$

Продифференцируем первое из них m раз по x. Тогда

$$(2n+1)x\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}-(n+1)\frac{d^mP_{n+1}(x)}{dx^m}-$$
$$-n\frac{d^mP_{n-1}(x)}{dx^m}+(2n+1)m\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}=0. \quad \text{(I.13.1)}$$

Дифференцирование $m-1$ раз по x второго равенства дает

$$\frac{d^m P_{n+1}(x)}{dx^m} - \frac{d^m P_{n-1}(x)}{dx^m} = (2n+1)\frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}}. \quad (\text{I}.13.2)$$

Исключая из (I.13.1) и (I.13.2) производную $\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}$, получаем

$$(2n+1)x\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} - (n-m+1)\frac{d^m P_{n+1}(x)}{dx^m} - \\ -(n+m)\frac{d^m P_{n-1}(x)}{dx^m} = 0.$$

Умножая обе части этого равенства на $(1-x^2)^{m/2}$ и учитывая (I.11.1), находим

$$(2n+1)xP_n^{(m)}(x) - (n-m+1)P_{n+1}^{(m)}(x) - \\ -(n+m)P_{n-1}^{(m)}(x) = 0.$$

Если заменить здесь n на $n+1$, то окончательно будем иметь следующее рекуррентное соотношение, связывающее три соседние присоединенные функции Лежандра одного и того же индекса m:

$$(n-m+2)P_{n+2}^{(m)}(x) - (2n+3)xP_{n+1}^{(m)}(x) + \\ +(n+m+1)P_n^{(m)}(x) = 0. \quad (\text{I}.13.3)$$

Чтобы вывести формулу, связывающую соседние функции одного и того же порядка n, воспользуемся уравнением (I.12.1), которое запишем в виде

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}P_n(x)}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}} + \\ +(n-m)(n+m+1)\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = 0.$$

Умножая обе части этого равенства на $(1-x^2)^{m/2}$ и используя (I.11.1), немедленно получаем следующую формулу:

$$P_n^{(m+2)}(x) - 2(m+1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P_n^{(m+1)}(x) + \\ +(n-m)(n+m+1)P_n^{(m)}(x) = 0. \quad (\text{I}.13.4)$$

Это и есть та формула, которую нам нужно было вывести.

Соотношения (I.13.3) и (I.13.4) позволяют вычислять любое число присоединенных функций Лежандра, если известны значения нескольких первых из них.

Заметим, однако, что для вычисления $P_n^{(m)}(x)$ можно пользоваться одной рекуррентной формулой (I.13.3), принимая за исходные данные

$$P_{m-1}^{(m)} = 0, \quad P_m^{(m)} = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)(1-x^2)^{m/2}. \qquad \text{(I.13.5)}$$

Вторая из формул (I.13.5) легко получается из формулы (I.11.4).

§ I.14. Интегральное представление присоединенных функций Лежандра

В § I.3 мы вывели интегральную формулу Лапласа для многочленов Лежандра. В этом параграфе мы найдем аналогичную формулу для присоединенных функций Лежандра. Для этого рассмотрим функцию $Q(x, \varphi)$:

$$Q(x,\varphi) = (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n, \qquad \text{(I.14.1)}$$

где $-1 \leqslant x \leqslant +1$, а n — целое положительное число. Переходя здесь от $\cos\varphi$ к экспонентам, преобразуем эту функцию к виду

$$Q(x,\varphi) = \frac{\exp(-in\varphi)}{2^n(x^2-1)^{n/2}}\left[(x+\sqrt{x^2-1}\exp i\varphi)^2 - 1\right]^n.$$

Разложим правую часть в ряд по степеням $\sqrt{x^2-1}\exp i\varphi$. Тогда найдем

$$Q(x,\varphi) = \frac{\exp(-in\varphi)}{2^n(x^2-1)^{n/2}}\sum_{s=0}^{2n}\frac{1}{s!}\exp is\varphi\,(x^2-1)^{s/2}\,\frac{d^s(x^2-1)^n}{dx^s}.$$

Разбивая эту сумму на две ($0 \leqslant s \leqslant n$ и $n+1 \leqslant s \leqslant 2n$) и полагая в первой из них $s = n - m$, а во второй $s = n + m$, будем иметь

$$Q(x,\varphi) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} +$$
$$+ \frac{1}{2^n}\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{\exp(-im\varphi)}{(n-m)!}(x^2-1)^{-m/2}\,\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\exp im\varphi}{(n+m)!}(x^2-1)^{m/2}\,\frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}\right\}. \qquad \text{(I.14.2)}$$

Подставляя сюда равенства

$$\exp im\varphi = \cos m\varphi + i \sin m\varphi,$$
$$\exp(-im\varphi) = \cos m\varphi - i \sin m\varphi$$

и имея в виду, что $Q(x, \varphi)$ не должна содержать члены с $\sin m\varphi$, получаем такое тождество:

$$\frac{(x^2-1)^{-m/2}}{(n-m)!} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}} = \frac{(x^2-1)^{m/2}}{(n+m)!} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}. \tag{I.14.3}$$

С учетом этого тождества равенство (I.14.2) принимает вид

$$Q(x, \varphi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} + \\ + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos m\varphi}{(n+m)!} (x^2-1)^{m/2} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}. \tag{I.14.4}$$

Но, согласно (I.1.1) и (I.11.2),

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = P_n(x),$$

$$(x^2-1)^{m/2} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}} = (-1)^{m/2} 2^n n!\, P_n^{(m)}(x).$$

Поэтому (I.14.4) и (I.14.1) дают такую формулу:

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n = P_n(x) + \\ + 2i^m \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{(n+m)!} P_n^{(m)}(x) \cos m\varphi. \tag{I.14.5}$$

Умножая (I.14.5) на $\cos m\varphi$ и интегрируя по φ в пределах от 0 до 2π, получаем следующее интегральное представление для $P_n^{(m)}(x)$:

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{(-i)^m}{2\pi} \frac{(n+m)!}{n!} \int_0^{2\pi} \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n \cos m\varphi\, d\varphi. \tag{I.14.6}$$

При $m = 0$ полученная формула дает формулу Лапласа для многочленов Лежандра.

§ I.15. Ортогональность присоединенных функций Лежандра

В § I.7 мы показали, что многочлены Лежандра образуют ортогональную систему функций. Докажем, что присоединенные функции Лежандра также обладают аналогичным свойством.

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(m)=\int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(x)\,P_k^{(m)}(x)\,dx, \tag{I.15.1}$$

или, согласно (I.11.1),

$$\Phi(m)=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\,\frac{d^mP_k(x)}{dx^m}\,dx. \tag{I.15.2}$$

Применим к этому интегралу операцию интегрирования по частям. Тогда получим

$$\Phi(m)=-\int_{-1}^{+1}\frac{d^{m-1}P_k(x)}{dx^{m-1}}\,\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]dx. \tag{I.15.3}$$

Напишем, далее, уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right]+n(n+1)P_n(x)=0$$

и продифференцируем его $m-1$ раз по x. Это даст

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}}-2mx\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}+$$
$$+(n-m+1)(n+m)\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}=0.$$

Если полученное равенство умножить на $(1-x^2)^{m-1}$, то его можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\right]=$$
$$=-(n-m+1)(n+m)(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n(x)}{dx^{m-1}}. \tag{I.15.4}$$

Подставляя (I.15.4) в (I.15.3), теперь будем иметь $\Phi(m) =$

$$= (n - m + 1)(n+m) \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_k(x)}{dx^{m-1}} \frac{d^{m-1} P_n(x)}{dx^{m-1}} dx,$$

или, принимая во внимание (I.15.2),

$$\Phi(m) = (n - m + 1)(n + m)\Phi(m - 1). \quad \text{(I.15.5)}$$

Заменяя здесь m на $m - 1$, $m - 2$, ..., 1, получим

$$\begin{aligned} \Phi(m-1) &= (n - m + 2)(n + m - 1)\Phi(m - 2), \\ \Phi(m-2) &= (n - m + 3)(n + m - 2)\Phi(m - 3), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \Phi(1) &= n(n+1)\Phi(0). \end{aligned} \quad \text{(I.15.6)}$$

Перемножим равенства (I.15.5) и (I.15.6). Тогда найдем

$$\Phi(m) = [(n + m)(n + m - 1)\dots(n + 1)]\times \\ \times[(n - m + 1)(n - m + 2)\dots n]\Phi(0).$$

Это равенство, как легко видеть, можно записать и так:

$$\Phi(m) = \frac{(n + m)!}{(n - m)!}\Phi(0). \quad \text{(I.15.7)}$$

Здесь, в согласии с (I.15.1),

$$\Phi(0) = \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_k(x) dx.$$

Но, как было показано в § I.7,

$$\Phi(0) = \begin{cases} 0 & (k \neq n), \\ \dfrac{2}{2n+1} & (k = n). \end{cases}$$

Поэтому

$$\Phi(m) = \begin{cases} 0 & (k \neq n), \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n + m)!}{(n - m)!} & (k = n). \end{cases}$$

Итак, мы показали, что

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x) dx = 0, \quad \text{(I.15.8)}$$

если $k \neq n$, и

$$\int_{-1}^{+1} \left[P_n^{(m)}(x)\right]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{I.15.9}$$

Полученные равенства и дают свойство ортогональности присоединенных функций Лежандра.

§ I.16. Определение функции $P_n^{(-m)}(x)$

В § I.11 функция $P_n^{(m)}(x)$ была определена для $m \geqslant 0$ формулой

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}. \tag{I.16.1}$$

Аналогичным образом определим функцию $P_n^{(-m)}(x)$ для целого и неотрицательного m такой формулой:

$$P_n^{(-m)}(x) = \frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}. \tag{I.16.2}$$

В § I.12 было показано, что функция $P_n^{(m)}(x)$ удовлетворяет уравнению (I.12.3). Это уравнение не изменяется при замене m на $-m$. Поэтому функция $P_n^{(-m)}(x)$, определенная формулой (I.16.2), будет также удовлетворять этому уравнению.

Установим теперь связь между функциями $P_n^{(-m)}(x)$ и $P_n^{(m)}(x)$. Для этого воспользуемся тождеством (I.14.3). Переписывая его в виде

$$\frac{(1-x^2)^{-m/2}}{(n-m)!} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}} = (-1)^m \frac{(1-x^2)^{m/2}}{(n+m)!} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}$$

и используя определения (I.16.1) и (I.16.2), находим следующую формулу:

$$P_n^{(-m)}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^{(m)}(x).$$

Она имеет место при $n \geqslant m \geqslant 0$.

§ I.17. Элементарные сферические функции. Общее выражение для сферической функции

Изученные в предыдущих параграфах многочлены Лежандра и присоединенные функции Лежандра являются составными элементами сферических функций. Функции двух аргументов θ и λ

$$P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\lambda \quad \text{и} \quad P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\lambda, \qquad (I.17.1)$$

где $m=0, 1, \ldots, n$, называются элементарными сферическими функциями, а сферическая функция порядка n определяется формулой

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\theta)\left[A_{n,m}\cos m\lambda + B_{n,m}\sin m\lambda\right], \qquad (I.17.2)$$

где $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ — произвольные постоянные.

Аргументы θ и λ можно рассматривать как координаты некоторой точки M на сфере единичного радиуса. При этом под λ будем понимать долготу, а под θ — дополнение до широты. Поэтому $Y_n(\theta, \lambda)$ — это функция, задаваемая на сфере. Отсюда и происходит название этой функции.

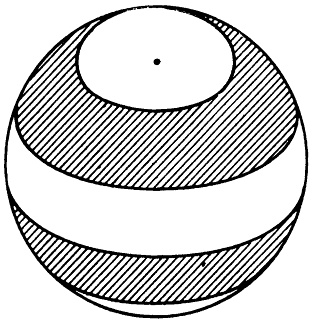


Рис. 2. Положительные и отрицательные значения зональной гармоники для $n=4$

Рассмотрим подробнее структуру сферической функции $Y_n(\theta, \lambda)$ и поведение ее различных членов при перемещении точки $M(\theta, \lambda)$ по сфере единичного радиуса. Все члены в формуле (I.17.2) можно разделить на три типа.

Пусть $m=0$. Тогда будем иметь члены вида

$$A_{n,0}P_n(\cos\theta).$$

Поскольку многочлен Лежандра порядка n в области $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ имеет n действительных, различных и по абсолютной величине меньших единицы корней (см. § I.8), то на сфере $P_n(\cos\theta)$ будет менять знак на n параллелях. Таким образом, сфера разделится на $n+1$ широтных зон, в которых этот член будет попеременно принимать положительные и отрицательные значения. Такой член называется зональной гармоникой порядка n. Распределение положительных и отрицательных значений рассматриваемой гармоники для $n=4$ приводится на рис. 2.

Пусть $0<m<n$. Тогда будем иметь члены вида

$$A_{n,m}P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\lambda \quad \text{и} \quad B_{n,m}P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\lambda.$$

Эти члены обращаются в нуль на $n-m$ параллелях, определяемых уравнением

$$\frac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m} = 0,$$

и на $2m$ меридианах:

$$\cos m\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin m\lambda = 0.$$

Следовательно, в этом случае сфера делится на $n+m+1$ сферических трапеций, в каждой из которых эти члены сохраняют знаки. Такие члены называются тессеральными гармониками. Распределение положительных и отрицательных значений тессеральной гармоники для $n=10$ и $m=6$ показано на рис. 3.

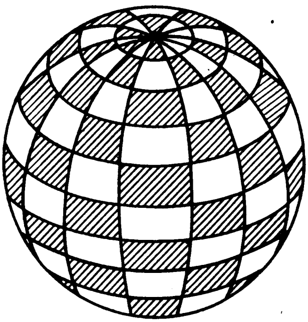


Рис. 3. Положительные и отрицательные значения тессеральной гармоники для $n=10$ и $m=6$

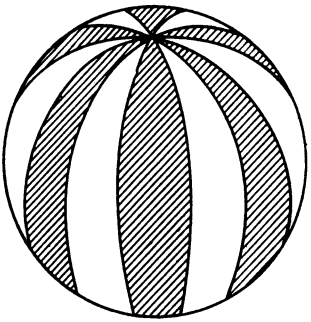


Рис. 4. Положительные и отрицательные значения секториальной гармоники для $n = m = 6$

Пусть, наконец, $m=n$, тогда получаем такие члены:

$$A_{n,n}P_n^{(n)}(\cos\theta)\cos n\lambda \quad \text{и} \quad B_{n,n}P_n^{(n)}(\cos\theta)\sin n\lambda.$$

Поскольку

$$\frac{d^n P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^n} = \text{const},$$

эти члены обращаются в нуль только на меридианах, для которых

$$\cos n\lambda = 0 \quad \text{или} \quad \sin n\lambda = 0.$$

В этом случае сфера делится на $2n$ знакопостоянных сектора, вследствие чего такие члены называются секториальными гармониками. Соответствующее распределение положительных и отрицательных областей для $n=m=6$ показано на рис. 4.

§ I.18. Дифференциальное уравнение для сферической функции $Y_n(\theta, \lambda)$

Докажем, что сферическая функция $Y_n(\theta, \lambda)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$n(n+1)Y + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2} = 0. \tag{I.18.1}$$

Для этого перейдем в уравнении (I.18.1) от независимой θ к новой переменной x по формуле

$$x = \cos\theta.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}$$

и уравнение (I.18.1) примет вид

$$n(n+1)Y + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right] + \frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2} = 0. \tag{I.18.2}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$Y = \sum_{m=0}^{n}\Phi_m(x)\Psi_m(\lambda), \tag{I.18.3}$$

где $\Phi_m(x)$ — функция только x, а $\Psi_m(\lambda)$ — функция только λ.

Подставляя (I.18.3) в (I.18.2), получим

$$\sum_{m=0}^{n}\left\{n(n+1)\Phi_m\Psi_m + \Psi_m\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Phi_m}{dx}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\Phi_m}{1-x^2}\frac{d^2\Psi_m}{d\lambda^2}\right\} = 0.$$

Это уравнение удовлетворится, если при любом $m = 0, 1, \ldots, n$ функции Φ_m и Ψ_m будут удовлетворять уравнению

$$(1-x^2)\left\{n(n+1) + \frac{1}{\Phi_m}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Phi_m}{dx}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\Psi_m}\frac{d^2\Psi_m}{d\lambda^2} = 0. \tag{I.18.4}$$

Поскольку переменные x и λ независимы друг от друга, то должно быть

$$\frac{1}{\Psi_m}\frac{d^2\Psi_m}{d\lambda^2} = \text{const}.$$

Обозначая эту постоянную через $-m^2$, будем иметь

$$\frac{d^2\Psi_m}{d\lambda^2} + m^2\Psi_m = 0 \qquad (I.18.5)$$

и

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Phi_m}{dx}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Phi_m = 0. \qquad (I.18.6)$$

Общее решение уравнения (I.18.5) при $m \neq 0$, как известно, имеет вид

$$\Psi_m = A_{n,m}\cos m\lambda + B_{n,m}\sin m\lambda, \qquad (I.18.7)$$

где $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ — произвольные постоянные. Если $m = 0$, то это уравнение имеет частное решение

$$\Psi_0 = A_{n,0}, \qquad (I.18.8)$$

где $A_{n,0}$ — произвольная постоянная.

Сопоставляя уравнение (I.18.6) с уравнением (I.12.3), мы видим, что одним из его решений является присоединенная функция Лежандра, т. е.

$$\Phi_m = P_n^{(m)}(x). \qquad (I.18.9)$$

Подставляя теперь (I.18.7) — (I.18.9) в (I.18.3) и имея в виду (I.18.2), находим, что

$$Y = \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\theta)\left[A_{n,m}\cos m\lambda + B_{n,m}\sin m\lambda\right],$$

т. е. Y есть сферическая функция $Y_n(\theta, \lambda)$. Это и доказывает сформулированное выше утверждение.

§ I.19. Гармонические, шаровые и сферические функции

В этом параграфе мы рассмотрим взаимосвязь сферических функций с гармоническими и шаровыми функциями. Первоисточником всех этих функций является уравнение Лапласа, которое в декартовых прямоугольных координатах ξ, η, ζ имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0. \tag{I.19.1}$$

Функция $U(\xi, \eta, \zeta)$ называется гармонической в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$, если в этой точке она непрерывна, имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа. Функция $U(\xi, \eta, \zeta)$ называется гармонической в некоторой конечной области D, если она является гармонической в каждой ее точке. Если область D бесконечна, то для того, чтобы функция $U(\xi, \eta, \zeta)$ была гармонической, она должна быть еще регулярной на бесконечности, т. е. при

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \to \infty$$

выражения

$$|\rho U|, \quad \left|\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \xi}\right|, \quad \left|\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \eta}\right|, \quad \left|\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right|$$

должны иметь конечную верхнюю границу.

Мы не будем здесь излагать теорию гармонических функций. Отметим лишь, что при решении многих задач теории потенциала гармонические функции приходится разлагать в ряды. Одним из таких разложений является ряд по гармоническим многочленам.

Гармоническим многочленом называется однородный многочлен $U_n(\xi, \eta, \zeta)$ степени n, удовлетворяющий уравнению Лапласа. Очевидно, не всякий однородный многочлен является гармоническим. Так, например, многочлен второй степени

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

не удовлетворяет уравнению Лапласа и, следовательно, не является гармоническим.

Покажем, что самый общий гармонический многочлен степени n

$$U_n(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{(p+q+r=n)} a_{pqr} \xi^p \eta^q \zeta^r \tag{I.19.2}$$

должен содержать $2n+1$ произвольных коэффициентов. Действительно, поскольку любой многочлен можно представить в виде многочлена Тейлора, то его коэффициенты определяются формулой

$$a_{pqr} = \frac{1}{p!\, q!\, r!} \left(\frac{\partial^n U_n}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^r} \right)_0. \tag{I.19.3}$$

Но, переписывая уравнение Лапласа в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

мы видим, что в выражениях (I.19.3) можно исключить дифференцирование по ζ выше первого порядка. В самом деле, имеем

$$\frac{\partial^n U_n}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^r} = \frac{\partial^{n-2}}{\partial \xi^p \partial \eta^q \partial \zeta^{r-2}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right) =$$

$$= -\frac{\partial^n U}{\partial \xi^{p+2} \partial \eta^q \partial \zeta^{r-2}} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^p \partial \eta^{q+2} \partial \zeta^{r-2}}.$$

Продолжая этот процесс далее, мы либо вовсе исключим дифференцирование по ζ (если r четное), либо сведем число дифференцирований по ζ к единице (если r нечетное). Таким образом, среди коэффициентов a_{pqr} произвольными останутся лишь те коэффициенты, для вычисления которых или не нужно дифференцировать по ζ, или нужно произвести это дифференцирование только один раз. Другими словами, произвольными останутся коэффициенты вида

$$a_{p'q'0} \quad \text{и} \quad a_{p''q''1}.$$

Так как суммирование в формуле (I.19.2) производится по всем p, q, r, для которых $p+q+r=n$, то

$$p'+q'=n \quad \text{и} \quad p''+q''=n-1.$$

Поэтому число коэффициентов $a_{p'q'0}$ должно быть $n+1$, а число коэффициентов $a_{p''q''1}$ равно n. Общее же число тех и других коэффициентов будет равно $2n+1$, что мы и хотели доказать.

Перейдем теперь к полярным координатам ρ, θ, λ по формулам

$$\xi = \rho \sin\theta \cos\lambda, \quad \eta = \rho \sin\theta \sin\lambda, \quad \zeta = \rho \cos\theta. \qquad (I.19.4)$$

Это дает

$$U_n = \rho^n Y_n(\theta, \lambda), \qquad (I.19.5)$$

где

$$Y_n(\theta, \lambda) = \Sigma a_{pqr} \sin^{p+q}\theta \cos^r\theta \cos^p\lambda \sin^q\lambda. \qquad (I.19.6)$$

Гармонический многочлен, выраженный в полярных координатах, т. е. выражение (I.19.5), называется шаровой функцией или объемной сферической функцией. Определяемая формулой (I.19.6) функция $Y_n(\theta, \lambda)$ сферических координат θ и λ называется поверхностной сферической функцией или просто сферической функцией n-го порядка.

Формула (I.19.6) показывает, что функция $Y_n(\theta, \lambda)$ является многочленом относительно синусов и косинусов углов θ и λ, каждый член которого есть произведение функции только угла θ на функцию только угла λ.

Множители, содержащие θ, можно представить в виде

$$\sin^{p+q}\theta\cos^r\theta = (1-\cos^2\theta)^{\frac{p+q}{2}}\cos^r\theta,$$

а множитель, содержащий только λ,— в виде тригонометрического многочлена относительно косинусов и синусов, кратных λ.

Переход в уравнении (I.19.1) от независимых переменных ξ, η, ζ к переменным ρ, θ, λ дает

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U_n}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\lambda^2}=0. \tag{I.19.7}$$

Подставляя сюда (I.19.5), выводим следующее уравнение для Y_n:

$$n(n+1)Y_n+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2}=0, \tag{I.19.8}$$

которое совпадает с уравнением (I.18.1), полученным нами ранее.

Итак, оба определения сферической функции (определение, данное в этом параграфе, и определение, данное в § I.17) приводят к одному и тому же дифференциальному уравнению для $Y_n(\theta, \lambda)$. Далее, в соответствии с первым определением сферическая функция имеет вид (I.19.6), а в соответствии со вторым — вид (I.17.2). Каждое из этих выражений содержит $2n+1$ произвольных постоянных и, очевидно, может быть преобразовано друг в друга. Поэтому оба определения приводят к одной и той же функции $Y_n(\theta, \lambda)$.

В заключение этого параграфа покажем, что при любом повороте системы координат сферическая функция $Y_n(\theta, \lambda)$ переходит в сферическую функцию $Y_n(\theta', \lambda')$ от новых координат θ', λ'. Действительно, перейдем от системы координат $O\xi\eta\zeta$ к новой системе $O\xi'\eta'\zeta'$ по формулам

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha_1\xi' + \alpha_2\eta' + \alpha_3\zeta', \\
\eta &= \beta_1\xi' + \beta_2\eta' + \beta_3\zeta', \\
\zeta &= \gamma_1\xi' + \gamma_2\eta' + \gamma_3\zeta'.
\end{aligned} \tag{I.19.9}$$

Здесь α_1, β_1, γ_1 — направляющие косинусы оси $O\xi'$ относительно осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; α_2, β_2, γ_2 — направляющие косинусы оси $O\eta'$ относительно $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; α_3, β_3, γ_3 — соответствующие направляющие косинусы оси $O\zeta'$, так что

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, \\
\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, \\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{I.19.10}$$

В соответствии с формулами (I.19.9) имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2} &= \alpha_1^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \beta_1^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \gamma_1^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial\eta'^2} &= \alpha_2^2\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2} + \beta_2^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \gamma_2^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial\zeta'^2} &= \alpha_3^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \beta_3^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \gamma_3^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (I.19.10), находим

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta'^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta'^2} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}.$$

Таким образом, при любом повороте системы координат уравнение Лапласа остается неизменным. Если $U_n(\xi, \eta, \zeta)$ — однородный многочлен степени n, то он будет однородным многочленом той же степени относительно новых координат ξ', η', ζ'. Другими словами, гармонический многочлен $U_n(\xi, \eta, \zeta)$ при любом повороте системы координат переходит в гармонический многочлен относительно новых координат, а шаровая функция перейдет в шаровую функцию. Следовательно, сферическая функция $Y_n(\theta, \lambda)$ после любого поворота координатной системы перейдет в сферическую функцию от новых координат θ', λ'. Конечно, коэффициенты $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$, входящие в эти функции, будут, вообще говоря, разными.

§ I.20. Ортогональность сферических функций

В § I.7 и I.15 было показано, что как многочлены Лежандра, так и присоединенные функции Лежандра обладают свойством ортогональности. Эти результаты позволяют легко доказать, что и элементарные сферические функции также образуют ортогональную последовательность функций.

Пусть дана система функций

$$X_n^{(m)} = P_n^{(m)}(x)\cos m\lambda, \quad X_k^{(q)} = P_k^{(q)}(x)\cos q\lambda,$$
$$Y_n^{(m)} = P_n^{(m)}(x)\sin m\lambda, \quad Y_k^{(q)} = P_k^{(q)}(x)\sin q\lambda,$$

где $x = \cos\theta$, а $n \geqslant m$ и $k \geqslant q$ — целые неотрицательные числа. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\iint\limits_{(S)} X_n^{(m)} X_k^{(q)} d\sigma = \iint\limits_{(S)} Y_n^{(m)} Y_k^{(q)} d\sigma = 0, \tag{I.20.1}$$

если $k \neq n$ или $q \neq m$, и

$$\iint\limits_{(S)} X_n^{(m)} Y_k^{(q)} d\sigma = 0 \tag{I.20.2}$$

при любых $n \geqslant m$ и $k \geqslant q$.

Здесь интегрирование производится по поверхности сферы S единичного радиуса.

Докажем первое из равенств (I.20.1). Пусть

$$\Phi_{n,k}^{(m,q)} = \iint\limits_{(S)} X_n^{(m)} X_k^{(q)} d\sigma.$$

Поскольку для сферы элемент поверхности $d\sigma$ определяется формулой

$$d\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\lambda,$$

то

$$\Phi_{n,k}^{(m,q)} = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} X_n^{(m)} X_k^{(q)} \sin\theta\, d\theta\, d\lambda.$$

Заменяя здесь $d\theta$ через dx согласно равенству

$$dx = -\sin\theta\, d\theta,$$

будем иметь

$$\Phi_{n,k}^{(m,q)} = \int\limits_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(x)\, P_k^{(q)}(x)\, dx \int\limits_0^{2\pi} \cos m\lambda \cos q\lambda\, d\lambda.$$

Если $m \neq q$, то интеграл, взятый по долготе λ, будет равен нулю, а следовательно, и равен нулю двойной интеграл. Если $m = q$, но $n \neq k$, то, согласно (I.15.8), будет равен нулю интеграл, взятый по x, и мы окончательно получаем, что

$$\Phi_{n,k}^{(m,q)} = 0$$

во всех случаях, кроме случая, когда $n = k$ и $m = q$.

Аналогичным образом можно установить справедливость второго из равенств (I.20.1) и равенства (I.20.2).

Нам остается лишь найти интеграл от квадрата элементарной сферической функции. Рассмотрим интеграл

$$\Phi_{n,n}^{(m,m)} = \iint\limits_{(S)} [X_n^m]^2 \, d\sigma,$$

или

$$\Phi_{n,n}^{(m,m)} = \int\limits_{-1}^{+1} [P_n^{(m)}(x)]^2 \, dx \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 m\lambda d\lambda.$$

При $m = 0$ из результатов § I.7 имеем

$$\Phi_{n,n}^{(0,0)} = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Если $m \neq 0$, то, согласно (I.15.9), получаем

$$\Phi_{n,n}^{(m,m)} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left[P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\lambda\right]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\lambda = \frac{2\pi\delta_m}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \text{(I.20.3)}$$

где $\delta_0 = 2$, $\delta_m = 1$ $(m > 1)$.

Аналогично можно доказать, что

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left[P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\lambda\right]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\lambda = \frac{2\pi\delta_m}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad \text{(I.20.4)}$$

Равенства (I.20.3) и (I.20.4) для $m > 0$ можно записать в виде

$$\iint\limits_{(S)} \left[P_n^{(m)}(\cos\theta) \begin{matrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{matrix}\right]^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \text{(I.20.5)}$$

где интеграл берется по поверхности сферы единичного радиуса.

§ I.21. Нормированные и полностью нормированные присоединенные функции Лежандра

В различных приложениях наряду с присоединенными функциями часто используются так называемые нормированные и полностью нормированные присоединенные функции Лежандра. Они вводятся следующим образом. Пусть $P_n^{(m)}(x)$ дается формулой (I.11.1). Тогда нормированная присоединенная функция Лежандра $p_n'^{(m)}(x)$ определится равенством

$$p_n'^{(m)}(x) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^{(m)}(x), \qquad \text{(I.21.1)}$$

а для полностью нормированной присоединенной функции Лежандра $p_n^{(m)}(x)$ имеем

$$p_n^{(m)}(x) = \sqrt{(2n+1)}\sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^{(m)}(x), \quad \text{(I.21.2)}$$

или

$$p_n^{(m)}(x) = \sqrt{2n+1}\, p_n'^{(m)}(x). \qquad \text{(I.21.3)}$$

Таким образом,

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

$$p_n'^{(m)}(x) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

$$p_n^{(m)}(x) = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

где $P_n^{(m)}(x)$ — многочлен Лежандра.

Используемое здесь нормирование имеет следующий смысл. Если для $P_n^{(k)}$, согласно (I.20.5),

$$\iint\limits_{(S)} \left[P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\lambda\right]^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

то в случае $p_n'^{(m)}$ и $p_n^{(m)}$

$$\iint\limits_{(S)} \left[p_n'^{(m)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\lambda\right]^2 d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1},$$

$$\iint\limits_{(S)} \left[p_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\lambda\right]^2 d\sigma = 4\pi,$$

где S — поверхность сферы единичного радиуса.

§ I.22. Теорема сложения для многочленов Лежандра

В этом параграфе мы докажем одну теорему, которая имеет большое значение в теории сферических функций и в разнообразных ее приложениях. Эта теорема называется теоремой сложения для многочленов Лежандра и заключается в следующем. Пусть

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega. \qquad (I.22.1)$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^{(m)}(\cos\theta)\,P_n^{(m)}(\cos\theta')\cos m\omega. \qquad (I.22.2)$$

Для доказательства этой теоремы рассмотрим, прежде всего, рис. 5, на котором изображена сфера единичного радиуса с полюсом в точке C. На этой сфере заданы две точки $M(\theta, \lambda)$ и $M'(\theta', \lambda')$. Пусть γ есть угол между радиусами-векторами этих точек. Тогда из сферического треугольника $M'CM$ имеем

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda').$$

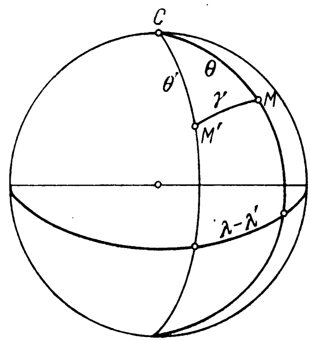


Рис. 5. Сфера единичного радиуса

Перейдем путем поворота к новой координатной системе с полюсом в точке M'. Тогда $P_n(\cos\gamma)$ есть сферическая функция точки M, соответствующая новой системе координат. Но, согласно § I.19, эта функция будет также сферической в старой системе координат, т. е. будет сферической функцией координат θ и λ. Поэтому ее можно представить в виде (I.17.2). Поскольку, далее, в выражение для $P_n(\cos\gamma)$ координата λ входит посредством $\lambda - \lambda' = \omega$ и эта функция не содержит членов с $\sin m\omega$, то на основании (I.17.2) ее можно записать так:

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} A_{n,m}P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\omega, \qquad (I.22.3)$$

где коэффициенты $A_{n,m}$ — функции угла θ'.

Так как формула (I.22.1) симметрична относительно θ и θ', то этим свойством должна обладать и формула (I.22.3). Поэтому

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{n} h_m P_n^{(m)}(\cos\theta) P_n^{(m)}(\cos\theta') \cos m\omega, \tag{I.22.4}$$

где h_m — числовые коэффициенты.

Таким образом, мы докажем теорему сложения, если покажем, что

$$h_m = \frac{2}{\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{I.22.5}$$

где $\delta_0 = 2$ и $\delta_m = 1$, если $m = 1, 2, \ldots, n$.

Чтобы найти эти коэффициенты, рассмотрим случай, когда $\theta' = \theta$. Тогда если в формуле (I.22.1) положить

$$\cos\theta = x, \quad \cos\theta' = x,$$

то

$$\cos\gamma = x^2 + (1 - x^2)\cos\omega,$$

а равенство (I.22.4) примет вид

$$P_n[x^2 + (1 - x^2)\cos\omega] = \sum_{m=0}^{n} h_m \left[P_n^{(m)}(x)\right]^2 \cos m\omega.$$

Интегрируя это равенство по x в пределах от -1 до $+1$ и используя формулы (I.7.9) и (I.15.9), получим

$$\int_{-1}^{+1} P_n[x^2 + (1 - x^2)\cos\omega]\, dx =$$

$$= \frac{2}{2n+1}\left[h_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} h_m \cos m\omega\right]. \tag{I.22.6}$$

Воспользуемся теперь производящей функцией многочленов Лежандра. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha[x^2 + (1 - x^2)\cos\omega] + \alpha^2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n[x^2 + (1 - x^2)\cos\omega].$$

Проинтегрируем это равенство по x в пределах от -1 до $+1$. Это даст

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \int_{-1}^{+1} P_n [x^2 + (1 - x^2) \cos \omega] \, dx, \tag{I.22.7}$$

где

$$T = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2\alpha [x^2 + (1 - x^2) \cos \omega] + \alpha^2}}.$$

Вычислим этот интеграл. Имеем

$$1 - 2\alpha [x^2 + (1 - x^2) \cos \omega] + \alpha^2 = (1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2)(1 - b^2 x^2),$$

где

$$b = \sqrt{\frac{2\alpha (1 - \cos \omega)}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}}.$$

Поэтому

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b \sqrt{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}} \arcsin bx \Big|_{-1}^{+1},$$

или

$$T = \frac{2}{\sqrt{2\alpha (1 - \cos \omega)}} \arcsin \sqrt{\frac{2\alpha (1 - \cos \omega)}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}}.$$

Подставляя это выражение для T в (I.22.7), получаем

$$\sqrt{\frac{2}{1 - \cos \omega}} \arcsin \sqrt{\frac{2\alpha (1 - \cos \omega)}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} P_n [x^2 + (1 - x^2) \cos \omega] \, dx.$$

Если продифференцировать это равенство по α, то найдем

$$\frac{1 + \alpha}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^{+1} \alpha^n P_n [x^2 + (1 - x^2) \cos \omega] \, dx. \tag{I.22.8}$$

Разложим левую часть этой формулы в ряд по степеням α. С помощью формулы Эйлера

$$2\cos\omega = e^{i\omega} + e^{-i\omega}$$

сначала устанавливаем следующее равенство:

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} = -1 + \frac{1}{1-\alpha e^{i\omega}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}},$$

а затем находим

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{in\omega} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-in\omega},$$

или

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos n\omega = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}2\alpha^n\cos n\omega.$$

Для левой части (I.22.8) теперь имеем

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} = (1+\alpha+\alpha^2+\ldots)(1+2\alpha\cos\omega+2\alpha^2\cos 2\omega+\ldots),$$

или

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(1+2\cos\omega+2\cos 2\omega+\ldots+2\cos n\omega). \quad \text{(I.22.9)}$$

Сравнивая (I.22.9) с (I.22.8), получаем

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega]\,dx = 1+2\cos\omega+2\cos 2\omega+\ldots+2\cos n\omega,$$

или

$$\int_{-1}^{+1}P_n[x^2+(1-x^2)\cos\omega]\,dx = \frac{2}{2n+1}\left[1+2\sum_{m=1}^{n}\cos m\omega\right]. \quad \text{(I.22.10)}$$

Если, наконец, в правых частях формул (I.22.10) и (I.22.6) приравнять члены с $\cos m\omega$, то приходим к таким равенствам:

$$h_0 = 1, \quad h_m = 2\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. равенства (I.22.5). Это и доказывает сформулированную выше теорему, которую можно также записать в виде

$$P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{2(n-m)!}{\delta_m (n+m)!} P_n^{(m)}(\cos\theta) P_n^{(m)}(\cos\theta')\cos m\omega, \qquad (I.22.11)$$

где, как и раньше, $\delta_0 = 2$, $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = 1$.

§ I.23. Выражение функции $P_n(\cos\omega)$ в виде тригонометрического многочлена по косинусам кратных ω

Формула (I.22.1) позволяет получить еще одно выражение для многочлена Лежандра $P_n(\cos\omega)$, которое оказывается весьма полезным при решении некоторых прикладных задач.

Положим в (I.22.1)

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ и } \theta' = \frac{\pi}{2}.$$

Это даст

$$P_n(\cos\omega) =$$

$$= [P_n(0)]^2 + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[P_n^{(m)}(0)\right]^2 \cos m\omega. \qquad (I.23.1)$$

Полученную формулу можно записать в виде

$$P_n(\cos\omega) = \sum_{m=0}^{n} C_n^{(m)} \cos m\omega, \qquad (I.23.2)$$

где коэффициенты $C_n^{(m)}$ определяются из равенств

$$C_n^{(0)} = [P_n(0)]^2, \quad C_n^{(m)} = 2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left[P_n^{(m)}(0)\right]^2. \qquad (I.23.3)$$

В § I.8 мы нашли, что

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}.$$

Найдем выражение для $P_n^{(m)}(0)$. Согласно (I.11.3), имеем

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k-m)!} \times$$
$$\times\, x^{n-2k-m},$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ есть целая часть числа $\frac{n}{2}$. Полагая здесь $x=0$, мы видим, что

$$P_n^{(m)}(0) = 0,$$

если $n-m$ — нечетное число, и

$$P_n^{(m)}(0) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{(n+m)!}{2^n \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}, \qquad (I.23.4)$$

если $n-m$ четное. Поэтому если положить $n-m=2k$, то будем иметь

$$P_n^{(n-2k)}(0) = (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n\,k!\,(n-k)!}. \qquad (I.23.5)$$

Формулы (I.23.5) и вторая формула (I.23.3) теперь дают следующее равенство:

$$C_n^{(n-2k)} = 2\,\frac{(2k)!}{2^{2n}\,(k!)^2}\,\frac{(2n-2k)!}{[(n-k)!]^2},$$

которое легко привести к виду

$$C_n^{(n-2k)} = 2\,\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}. \qquad (I.23.6)$$

Здесь

$$(2m-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1),$$
$$(2m)!! = 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m).$$

Формулы (I.23.6) и первую из формул (I.23.3) можно объединить в одну, а именно

$$C_n^{(n-2k)} = \frac{2}{\delta_{n-2k}}\,\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}, \qquad (I.23.7)$$

где $\delta_0 = 2,\ \delta_1 = \delta_2 = \ldots = 1$.

Заменяя в (I.23.2) m на $n-2k$, окончательно находим

$$P_n(\cos\omega) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{(n-2k)} \cos(n-2k)\,\omega, \qquad (I.23.8)$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ есть целая часть числа $\frac{n}{2}$.

Из формул (I.23.7) и (I.23.8) легко получаем выражения для первых $P_n(\cos\omega)$:

$$P_1(\cos\omega) = \cos\omega,$$

$$P_2(\cos\omega) = \frac{1}{4}(3\cos 2\omega + 1),$$

$$P_3(\cos\omega) = \frac{1}{8}(5\cos 3\omega + 3\cos\omega),$$

$$P_4(\cos\omega) = \frac{1}{64}(35\cos 4\omega + 20\cos 2\omega + 9),$$

$$P_5(\cos\omega) = \frac{1}{128}(63\cos 5\omega + 35\cos 3\omega + 30\cos\omega),$$

$$P_6(\cos\omega) = \frac{1}{512}(231\cos 6\omega + 126\cos 4\omega + 105\cos 2\omega + 50).$$

Эти формулы, а также формула (I.23.8), показывают, что выражение для $P_n(\cos\omega)$ содержит либо четную, либо нечетную кратность ω смотря по тому четно или нечетно n.

§ I.24. Ряд Лапласа

Пусть дана функция двух переменных $f(\theta, \lambda)$, заданная на поверхности сферы S. Предположим, что в каждой точке $M(\theta, \lambda)$ поверхности этой сферы функция $f(\theta, \lambda)$ однозначна, конечна и непрерывна. Докажем, что ее можно разложить в равномерно сходящийся ряд вида

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda), \qquad (I.24.1)$$

где $Y_n(\theta, \lambda)$ — сферическая функция n-го порядка:

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\theta)\,[A_{n,m}\cos m\lambda + B_{n,m}\sin m\lambda].$$

Покажем сначала, что если такое разложение возможно, то коэффициенты $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ определяются однозначным образом. Действительно, записывая разложение

(I.24.1) в виде

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{k} P_k^{(q)}(\cos\theta)\,[A_{k,q}\cos k\lambda + B_{k,q}\sin k\lambda], \tag{I.24.2}$$

умножая его на

$$P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\lambda$$

и интегрируя по поверхности сферы S, с учетом равенств (I.20.2) и (I.20.1) получаем

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda)\,P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\lambda \sin\theta\, d\theta\, d\lambda =$$

$$= A_{n,m}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[P_n^{(m)}(\cos\theta)\right]^2\cos^2 m\lambda \sin\theta\, d\theta\, d\lambda.$$

Отсюда, принимая во внимание (I.20.3), находим

$$A_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_m}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda)\,P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\lambda \sin\theta\, d\theta\, d\lambda, \tag{I.24.3}$$

где $\delta_0 = 2,\ \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = 1$.

Аналогичным образом имеем

$$B_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi\delta m}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda)\,P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\lambda \sin\theta\, d\theta\, d\lambda. \tag{I.24.4}$$

Формулы (I.24.3) и (I.24.4) показывают, что если разложение (I.24.1) сходится равномерно, то оно должно быть единственным.

Подставим эти формулы в (I.24.2). Тогда разложение для $f(\theta, \lambda)$ запишется в виде

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{2n+1}{2\pi\delta m}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^{(m)}(\cos\theta)\times$$

$$\times\left[\cos m\lambda\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda')\,P_n^{(m)}(\cos\theta')\cos m\lambda' \sin\theta'\, d\theta'\, d\lambda' + \right.$$

$$\left. + \sin m\lambda\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta'\ \lambda')\,P_n^{(m)}(\cos\theta')\sin m\lambda' \sin\theta'\, d\theta' d\lambda'\right],$$

или

$$f(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda') \sum_{m=0}^{n} \frac{2}{\delta_m} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times$$

$$\times P_n^{(m)}(\cos\theta) P_n^{(m)}(\cos\theta') \cos m(\lambda-\lambda') \sin\theta'\, d\theta' d\lambda'.$$

Если воспользоваться теоремой сложения для многочленов Лежандра (I.22.11), то последняя формула примет вид

$$f(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda') P_n(\cos\gamma) \sin\theta'\, d\theta'\, d\lambda', \tag{I.24.5}$$

где

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda'). \tag{I.24.6}$$

Переходя теперь к исследованию сходимости ряда (I.24.5), рассмотрим сумму $k+1$ его первых членов, которую запишем так:

$$S_k(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{k} \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{(S)} f(M') P_n(\cos\gamma)\, d\sigma', \tag{I.24.7}$$

где через $f(M')$ обозначено значение функции $f(\theta', \lambda')$ в точке M' с координатами θ', λ', а через

$$d\sigma'=\sin\theta' d\theta' d\lambda'$$

обозначен элемент поверхности сферы S, радиус которой равен единице.

Для того чтобы упростить дальнейшие рассуждения, возьмем некоторую новую систему координат, в которой за полюс примем точку M. Поскольку, согласно (I.24.6), γ есть угловое расстояние между точками M и M', то положение точки M' в новой системе координат будет определяться углом γ и некоторым углом ψ, который можно рассматривать как новую долготу точки M' (см. рис. 5). Элемент поверхности тогда будет равен

$$d\sigma'=\sin\gamma\, d\gamma\, d\psi,$$

а формула (I.24.7) запишется в виде

$$S_k(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{k} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} P_n(\cos\gamma) \sin\gamma\, d\gamma \int_0^{2\pi} f(M')\, d\psi.$$

Если ввести функцию

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(M')\,d\psi, \tag{I.24.8}$$

которая представляет собой осредненное значение функции $f(M')$ по новой долготе ψ, то

$$S_k(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{k} \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} \Phi(\gamma)\,P_n(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma.$$

Переходя в этом интеграле от переменной γ к новой переменной $x=\cos\gamma$, получим

$$S_k(\theta, \lambda) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \Psi(x)\sum_{n=0}^{k}(2n+1)\,P_n(x)\,dx, \tag{I.24.9}$$

где

$$\Psi(x) = \Phi(\gamma). \tag{I.24.10}$$

Применяя в (I.24.9) формулу (I.5.5), будем иметь

$$S_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P'_{k+1}(x) + P'_k(x)\right]\Psi(x)\,dx. \tag{I.24.11}$$

Заметим, что так как функция $f(M')$ непрерывна на поверхности сферы, то функция $\Psi(x)$ должна иметь непрерывную на отрезке $[-1, +1]$ производную по x. Поэтому можно воспользоваться в (I.24.11) операцией интегрирования по частям. Это даст

$$S_k = \frac{1}{2}\left[P_{k+1}(x) + P_k(x)\right]\Psi(x)\Big|_{-1}^{+1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P_{k+1}(x) + P_k(x)\right]\Psi'(x)\,dx.$$

Но, как было показано в § 1.8,

$$P_{k+1}(1) = P_k(1) = 1,$$
$$P_k(-1) = (-1)^k, \quad P_{k+1}(-1) = -(-1)^k.$$

Следовательно,

$$S_k(\theta, \lambda) = \Psi(1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P_{k+1}(x) + P_k(x)\right]\Psi'(x)\,dx. \tag{I.24.12}$$

Выясним значение первого слагаемого правой части формулы (I.24.12). Согласно (I.24.10) и (I.24.8), имеем

$$\Psi(1) = \Phi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(M)\,d\psi,$$

так как при $\gamma = 0$ точка M' занимает положение точки M. Поэтому

$$\Psi(1) = f(\theta, \lambda)$$

и мы получаем

$$S_k(\theta, \lambda) = f(\theta, \lambda) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} [P_{k+1}(x) + P_k(x)]\,\Psi'(x)\,dx. \tag{I.24.13}$$

Докажем теперь, что стоящий в правой части (I.24.13) интеграл стремится к нулю, когда k неограниченно возрастает. Обозначая через A верхнюю границу функции $\Psi'(x)$ и разбивая область интегрирования на три части, имеем

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [P_{k+1}(x) + P_k(x)]\,\Psi'(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{2}\int_{-1}^{+1} |P_{k+1}(x) + P_k(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{2}\left\{\int_{-1}^{-1+\delta} Q(x)\,dx + \int_{-1+\delta}^{1-\delta} Q(x)\,dx + \int_{1-\delta}^{1} Q(x)\,dx\right\}, \tag{I.24.14}$$

где

$$Q(x) = |P_{k+1}(x)| + |P_k(x)|,$$

а δ — некоторая положительная величина.

Так как для всех x из области $[-1, +1]$

$$|P_k(x)| \leqslant 1, \quad |P_{k+1}(x)| \leqslant 1,$$

то сумма первого и третьего интегралов в (I.24.14) не превосходит величины $2A\delta$. Что касается второго интеграла, то его величина не больше чем

$$A(1-\delta)\{\max|P_{k+1}(x)| + \max|P_k(x)|\}. \tag{I.24.15}$$

Но в силу оценки, полученной в § I.9, в области $-1+ +\delta \leqslant x \leqslant 1-\delta$

$$\max |P_k(x)| \quad \text{и} \quad \max |P_{k+1}(x)|$$

будут меньше любого положительного числа, если только k достаточно велико. Поэтому, задавая произвольное положительное ε, можно найти такое N, что при $k > N$ величина (I.24.15) будет меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Выбирая, далее, δ так, чтобы $\delta < \frac{\varepsilon}{3A}$, приходим к выводу, что величина всего интеграла (I.24.14) будет меньше ε. Следовательно, равенство (I.24.13) показывает, что

$$\lim_{k\to\infty} S_k(\theta, \lambda) = f(\theta, \lambda).$$

Этим и доказывается равномерная сходимость ряда (I.24.1), который называется рядом Лапласа.

Заметим, что полученный результат можно обобщить и на кусочно непрерывные функции. В этом случае ряд Лапласа обладает свойствами, аналогичными ряду Фурье или ряду Лежандра.

§ I.25. Проблема Дирихле для сферы

Рассмотрим сначала внешнюю проблему Дирихле. Она заключается в следующем. Пусть на сфере S радиуса R задана непрерывная функция $f(\theta, \lambda)$. Требуется найти функцию $U(\rho, \theta, \lambda)$, гармоническую вне сферы и удовлетворяющую условию

$$\lim_{\rho\to R+0} U(\rho, \theta, \lambda) = f(\theta, \lambda). \tag{I.25.1}$$

Используя результаты, полученные в § I.24, можно разложить функцию $f(\theta, \lambda)$ в ряд

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda), \tag{I.25.2}$$

который равномерно сходится на всей поверхности сферы S.

Покажем, что функция

$$U_l(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} Y_n(\theta, \lambda) \tag{I.25.3}$$

удовлетворяет всем условиям проблемы Дирихле. Действительно, эта функция существует всюду вне сферы S, ибо ряд (I.25.3) сходится равномерно при $\rho > R$, так как сходится равномерно ряд (I.25.2). Далее, она имеет непрерывные частные производные и, как легко проверить, регулярна на бесконечности. Наконец, она удовлетворяет уравнению Лапласа (I.19.7) и при $\rho \to R+0$ стремится к функции $f(\theta, \lambda)$.

Перейдем теперь к внутренней проблеме Дирихле. Пусть на сфере S задана непрерывная функция $f(\theta, \lambda)$. Требуется найти функцию $U(\rho, \theta, \lambda)$, гармоническую внутри сферы S и удовлетворяющую условию

$$\lim_{\rho \to R-0} U(\rho, \theta, \lambda) = f(\theta, \lambda). \qquad (I.25.4)$$

Представим $f(\theta, \lambda)$ в виде ряда (I.25.2) и рассмотрим следующую функцию:

$$U_i(\rho, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n Y_n(\theta, \lambda). \qquad (I.25.5)$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет всем условиям задачи. В самом деле, поскольку при $\rho < R$ ряд (I.25.5) равномерно сходится, то функция $U_i(\rho, \theta, \lambda)$ существует и имеет непрерывные частные производные. Так как, далее, каждый член ряда (I.25.5) есть гармонический однородный многочлен, то эта функция является гармонической. При $\rho \to R-0$ она стремится к $f(\theta, \lambda)$.

Проблема Дирихле имеет непосредственное отношение к теории потенциала. Так, например, если известен потенциал некоторого неоднородного шара на его поверхности, то, разложив его в ряд по сферическим функциям, можно, воспользовавшись формулой (I.25.3), найти потенциал этого шара во внешнем пространстве.

§ I.26. Функции Лежандра и присоединенные функции Лежандра второго рода

Рассмотрим уравнение Лежандра:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0. \qquad (I.26.1)$$

В § I.6 мы видели, что при целом положительном n одним из частных решений этого уравнения является многочлен Лежандра $P_n(x)$. Найдем второе частное решение уравнения (I.26.1). С этой целью положим

$$y = P_n(x)\,w.$$

Тогда для определения w получим следующее уравнение:

$$(1-x^2)\left\{P_n(x)\frac{d^2w}{dx^2}+2\frac{dP_n(x)}{dx}\frac{dw}{dx}\right\}-2xP_n(x)\frac{dw}{dx}=0,$$

которое может быть записано в виде

$$\frac{w''}{w'}+2\frac{P_n'(x)}{P_n(x)}-\frac{2x}{1-x^2}=0,$$

или

$$d(\ln w')+2d[\ln P_n(x)]+d[\ln(1-x^2)]=0,$$

где штрих означает дифференцирование по x.

Из этого уравнения находим

$$\frac{dw}{dx}=\frac{A}{(1-x^2)[P_n(x)]^2},$$

где A — постоянная интегрирования. Поэтому

$$w=\int\frac{A\,dx}{(1-x^2)\,[P_n(x)]^2}+B,$$

где B — также постоянная интегрирования.

Так как нам нужно найти частное решение, то мы можем положить $A=1$ и $B=0$. В результате общее решение уравнения (I.26.1) будет иметь вид

$$y = C_1P_n(x)+C_2Q_n(x). \qquad (I.26.2)$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а

$$Q_n(x)=P_n(x)\int\frac{dx}{(1-x^2)\,[P_n(x)]^2}. \qquad (I.26.3)$$

Определяемая формулой (I.26.3) функция $Q_n(x)$ называется функцией Лежандра второго рода.

Если считать, что x находится в области $(-1, +1)$, то явные выражения для первых $Q_n(x)$ будут таковы:

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$Q_1(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-1,$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{3}{2}x,$$

$$Q_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3 - 3x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3},$$

$$Q_4(x) = \frac{1}{16}(35x^4 - 30x^2 + 3)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{35}{8}x^3 + \frac{55}{24}x.$$

Таким образом, функции $Q_n(x)$ являются трансцендентными функциями x.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0. \quad (I.26.4)$$

В § I.12 было показано, что одним из решений уравнения (I.26.4) является присоединенная функция Лежандра $P_n^{(m)}(x)$. Второе частное решение этого уравнения можно найти тем же методом, что и в случае уравнения (I.26.1). Оно, как нетрудно проверить, определяется равенством

$$Q_n^{(m)}(x) = P_n^{(m)}(x)\int\frac{dx}{(1-x^2)\left[P_n^{(m)}(x)\right]^2}, \quad (I.26.5)$$

так что общее решение уравнения (I.26.4) запишется в виде

$$y = C_1P_n^{(m)}(x) + C_2Q_n^{(m)}(x), \quad (I.26.6)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Определяемая равенством (I.26.5) функция $Q_n^{(m)}(x)$ называется присоединенной функцией Лежандра второго рода. В случае, когда $-1 < x < +1$, для $Q_n^{(m)}(x)$ можно получить следующую формулу:

$$Q_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mQ_n(x)}{dx^m}, \quad (I.26.7)$$

которая аналогична формуле (I.11.1) для $P_n^{(m)}(x)$.

Для функций $Q_n(x)$ и $Q_n^{(m)}(x)$ развита подробная теория, подобная той, которая имеется для функций $P_n(x)$ и $P_n^{(m)}(x)$. Для них получены развернутые выражения, выведены рекуррентные соотношения, найдены интегральные представления и т. д. [4].

§ I.27. Одна теорема о дифференцировании

Пусть требуется вычислить выражение

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)F[\varphi(x, y, z)],$$

где f_n — однородный многочлен n-й степени от операторов $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, а F и φ — произвольные дифференцируемые функции. Очевидно, это выражение можно записать таким образом:

$$\lambda_0 \frac{d^n F}{d\varphi^n} + \lambda_1 \frac{d^{n-1} F}{d\varphi^{n-1}} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{dF}{d\varphi},$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ — функции трех переменных, зависящие только от вида функций φ и f_n, но не от F. Поэтому, для того чтобы определить величины λ_k, можно выбрать функцию $F(\varphi)$ так, как наиболее удобно. Примем, что

$$F = [\varphi(x, y, z)]^n.$$

Тогда

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)[\varphi(x, y, z)]^n =$$

$$= n!\left\{\lambda_0 + \lambda_1\varphi + \ldots + \frac{1}{k!}\lambda_k\varphi^k + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\lambda_{n-1}\varphi^{n-1}\right\}.$$

Но можно также написать

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)[\varphi(x, y, z)]^n =$$

$$= f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \frac{\partial}{\partial h_3}\right)[\varphi(x + h_1, y + h_2, z + h_3)]^n,$$

где после дифференцирования надо положить $h_1 = h_2 = h_3 = 0$.

Воспользуемся теперь равенством

$$a^n = [b + (a - b)]^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} b^k (a - b)^{n-k}.$$

Тогда

$$[\varphi(x + h_1, y + h_2, z + h_3)]^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}[\varphi(x, y, z)]^k \times$$

$$\times [\varphi(x + h_1, y + h_2, z + h_3) - \varphi(x, y, z)]^{n-k}.$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор $f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \frac{\partial}{\partial h_3}\right)$. Получим

$$n!\left\{\lambda_0 + \lambda_1\varphi + \ldots + \frac{1}{k!}\lambda_k\varphi^k + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\lambda_{n-1}\varphi^{n-1}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\,\varphi^k}{k!\,(n-k)!} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \frac{\partial}{\partial h_3}\right) P^{n-k},$$

где

$$P=\varphi(x+h_1,\ y+h_2,\ z+h_3)-\varphi(x,\ y,\ z), \qquad (\text{I}.27.1)$$

а величины h_1, h_2, h_3 после дифференцирования надо положить равными нулю.

Сравнивая в полученном равенстве коэффициенты при φ^k, найдем

$$\lambda_k=\frac{1}{(n-k)!}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\ \frac{\partial}{\partial h_2},\ \frac{\partial}{\partial h_3}\right)P^{n-k}.$$

Таким образом, выведена следующая формула:

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)F[\varphi(x,\ y,\ z)]=$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{d^nF}{d\varphi^n}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\ \frac{\partial}{\partial h_2},\ \frac{\partial}{\partial h_3}\right)P^n+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}F}{d\varphi^{n-1}}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\ \frac{\partial}{\partial h_2},\ \frac{\partial}{\partial h_3}\right)P^{n-1}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{(n-k)!}\frac{d^{n-k}F}{d\varphi^{n-k}}f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\ \frac{\partial}{\partial h_2},\ \frac{\partial}{\partial h_3}\right)P^{n-k}+\ldots \qquad (\text{I}.27.2)$$

где P определяется равенством (I.27.1) и после дифференцирования надо положить $h_1=h_2=h_3=0$.

Применим полученную формулу к случаю, когда

$$\varphi(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2.$$

В этом случае

$$P=\left(h_1^2+h_2^2+h_3^2\right)+2\left(h_1x+h_2y+h_3z\right)$$

и мы имеем

$$P^{n-k}=\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(n-k)!}{j!\,(n-k-j)!}\left(h_1^2+h_2^2+h_3^2\right)^j\times$$

$$\times 2^{n-k-j}\left(h_1x+h_2y+h_3z\right)^{n-k-j}.$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1},\ \frac{\partial}{\partial h_2},\ \frac{\partial}{\partial h_3}\right)$ и полагая затем $h_1=h_2=h_3=0$, мы видим, что единственный неравный нулю член в этой сумме будет соответствовать $j=k$. Следовательно, коэффициент при $\dfrac{d^{n-k}F}{d\varphi^{n-k}}$ в формуле (I.27.2) будет равен

$$\frac{2^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!} f_n\left(\frac{\partial}{\partial h_1}, \frac{\partial}{\partial h_2}, \frac{\partial}{\partial h_3}\right)(h_1^2+h_2^2+h_3^2)^k \times$$
$$\times (h_1x+h_2y+h_3z)^{n-2k}.$$

Воспользуемся теперь одним легко устанавливаемым свойством однородных многочленов. Оно заключается в следующем. Пусть $\Psi_n(x, y, z)$ и $\Theta_n(\xi, \eta, \zeta)$ суть однородные многочлены одной и той же степени n. Тогда

$$\Psi_n(x, y, z)\Theta_n(\xi, \eta, \zeta) = \Theta_n(x, y, z)\Psi_n(\xi, \eta, \zeta). \quad \text{(I.27.3)}$$

Применение этого свойства к коэффициенту при $\dfrac{d^{n-k}F}{d\varphi^{n-k}}$ дает для него такое выражение:

$$\frac{2^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}\left(x\frac{\partial}{\partial h_1}+y\frac{\partial}{\partial h_2}+z\frac{\partial}{\partial h_3}\right)^{n-2k}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial h_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial h_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial h_3^2}\right)^k f_n(h_1, h_2, h_3).$$

Введем, далее, обозначение

$$\varkappa_{n-2k}(h_1, h_2, h_3) = \left(\frac{\partial^2}{\partial h_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial h_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial h_3^2}\right)^k f_n(h_1, h_2, h_3).$$

Тогда полученное выражение запишется в виде

$$\frac{2^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}\left(x\frac{\partial}{\partial h_1}+y\frac{\partial}{\partial h_2}+z\frac{\partial}{\partial h_3}\right)^{n-2k}\varkappa_{n-2k}(h_1, h_2, h_3).$$

Но поскольку $\varkappa_{n-2k}(h_1, h_2, h_3)$ есть однородный многочлен степени $n-2k$, то на основании (I.27.3) искомый коэффициент будет равен

$$\frac{2^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}\varkappa_{n-2k}\left(x\frac{\partial}{\partial h_1}, y\frac{\partial}{\partial h_2}, z\frac{\partial}{\partial h_3}\right)(h_1^2+h_2^2+h_3^2)^{n-2k}.$$

Выполняя здесь соответствующее дифференцирование и полагая затем $h_1=h_2=h_3=0$, получим такое выражение:

$$\frac{2^{n-2k}}{k!}\varkappa_{n-2k}(x, y, z).$$

Следовательно, коэффициент при $\frac{d^{n-k}F}{d\varphi^{n-k}}$ в (I.27.2) равен

$$\frac{2^{n-2k}}{k!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^k f_n(x, y, z).$$

Таким образом, получена следующая формула:

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)F(r^2) =$$

$$= \left\{2^n\frac{d^nF}{d(r^2)^n}+\frac{2^{n-2}}{1!}\frac{d^{n-1}F}{d(r^2)^{n-1}}\Delta+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{2^{n-2k}}{k!}\frac{d^{n-k}F}{d(r^2)^{n-k}}\Delta^k+\ldots\right\}f_n(x, y, z), \qquad (I.27.4)$$

где

$$r^2 = x^2+y^2+z^2,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Эта формула и выражает собой ту теорему, которую нам надо было доказать. Напомним, что здесь $f_n(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n, а F — произвольная функция r^2.

§ I.28. Дифференциальная формула для сферических функций

В этом параграфе мы, используя результаты § I.27, выведем одну дифференциальную формулу для сферических функций, которая имеет важные приложения. Для этого возьмем формулу (I.27.4) и положим в ней

$$F(r^2) = \frac{1}{r}.$$

Тогда, поскольку

$$\frac{d^kF}{d(r^2)^k} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k}r^{-2k-1},$$

или

$$\frac{d^kF}{d(r^2)^k} = (-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{1}{r^{2k+1}},$$

будем иметь

$$f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}} \times$$

$$\times\left\{1 - \frac{r^2\Delta}{2(2n-1)} + \frac{r^4\Delta^2}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} - \ldots\right\} f_n(x, y, z). \tag{I.28.1}$$

Принимая теперь в (I.28.1)

$$f_n(x, y, z) = (x+iy)^m z^{n-m}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где $n \geqslant m$ — целые неотрицательные числа, получим

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{2n+1}} \times$$

$$\times\left\{1 - \frac{r^2\Delta}{2(2n-1)} + \frac{r^4\Delta^2}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} - \ldots\right\}(x+iy)^m z^{n-m}.$$

Но так как

$$\Delta(x+iy)^m = 0,$$

то полученное равенство можно записать в виде

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{(x+iy)^m}{r^{2n+1}} \times$$

$$\times\left\{1 - \frac{r^2}{2(2n-1)}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{r^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\frac{d^4}{dz^4} - \ldots\right\} z^{n-m} =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{(x+iy)^m}{r^{2n+1}} \times$$

$$\times\left\{z^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} z^{n-m-2} r^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} z^{n-m-4} r^4 - \ldots\right\}.$$

Переходя здесь к полярным координатам

$$x = r\sin\theta\cos\lambda,$$

$$y = r\sin\theta\sin\lambda,$$

$$z = r\cos\theta,$$

находим

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{r^{n+1}} \times$$

$$\times (\sin\theta)^m(\cos m\lambda + i\sin m\lambda) \times$$

$$\times\left\{(\cos\theta)^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}(\cos\theta)^{n-m-2} + \ldots\right\}.$$

Но если вспомнить, что (см. § I.11)

$$\frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}(\sin\theta)^m\left\{(\cos\theta)^{n-m}-\right.$$
$$\left.-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}(\cos\theta)^{n-m-2}+\ldots\right\}=P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

то получим

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\frac{1}{r}=$$
$$=\frac{(-1)^n(n-m)!}{r^{n+1}}P_n^{(m)}(\cos\theta)\,[\cos m\lambda+i\sin m\lambda].$$

Таким образом, мы нашли следующую формулу:

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\frac{1}{r}=\frac{(-1)^m(n-m)!}{r^{n+1}}P_n^{(m)}(\cos\theta)\exp im\lambda. \tag{I.28.2}$$

Введем теперь комплексные величины ξ и η, согласно равенствам

$$\xi=x+iy,\quad \eta=x-iy.$$

Тогда

$$2\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y},\quad 2\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y},$$

и формула (I.28.2) запишется в виде

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\frac{\partial^m}{\partial\eta^m}\frac{1}{r}=\frac{(-1)^n(n-m)!}{2^m r^{n+1}}P_n^{(m)}(\cos\theta)\exp im\lambda.$$

А если здесь заменить i на $-i$, то будем иметь

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}\frac{1}{r}=\frac{(-1)^n(n-m)!}{2^m r^{n+1}}P_n^{(m)}(\cos\theta)\exp(-im\lambda).$$

Комбинируя эти два равенства, получим следующие формулы для элементарных сферических функций:

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m+\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]\frac{1}{r}=\frac{(-1)^n(n-m)!}{2^{m-1}r^{n+1}}P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\lambda,$$
$$i\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m-\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m\right]\frac{1}{r}=\frac{(-1)^n(n-m)!}{2^{m-1}r^{n+1}}P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\lambda.$$

При $m = n$ имеем

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^n\right]\frac{1}{r} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}r^{n+1}} P_n^{(n)}(\cos\theta)\cos n\lambda,$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^n - \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^n\right]\frac{1}{r} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}r^{n+1}} P_n^{(n)}(\cos\theta)\sin n\lambda,$$

а при $m = 0$ находим

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r} = \frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

или

$$P_n(\cos\theta) = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r}.$$

Полученные здесь дифференциальные формулы будут использованы нами в следующем параграфе для вывода важных соотношений, дающих преобразование сферических функций при повороте системы координат.

§ I.29. Преобразование сферических функций при повороте системы координат

В этом параграфе мы рассмотрим преобразование сферической функции при переходе от одной системы координат к другой, полученной из первой путем некоторого вращения. Пусть $Oxyz$ — исходная прямоугольная система координат, а $Ox'y'z'$ — новая система координат, положение которой относительно первой определяется углами Эйлера Ω, I, ω. Рассмотрим рис. 6. Вообразим сферу радиусом r с центром в точке O. Пусть эта сфера пересекает оси Ox, Oy, Oz соответственно в точках X, Y, Z, а оси Ox', Oy', Oz' — в точках П, D, C. Тогда

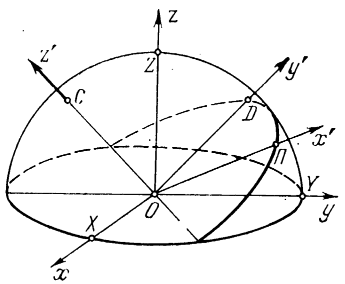


Рис. 6. Системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$

$$\smile{XN} = \Omega, \quad \smile{N\Pi} = \omega, \quad \angle \Pi N Y = I.$$

Пусть, далее, α_1, β_1, γ_1 — направляющие косинусы оси Ox' относительно осей Ox, Oy, Oz; α_2, β_2, γ_2 — направляющие косинусы оси Oy' относительно тех же осей; α_3, β_3, γ_3 — соответствующие направляющие косинусы оси Oz'. Для этих величин имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos I, \\ \beta_1 &= \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos I, \\ \gamma_1 &= \sin\omega\sin I; \end{aligned} \tag{I.29.1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos I, \\ \beta_2 &= -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos I, \\ \gamma_2 &= \cos\omega\sin I; \end{aligned} \tag{I.29.2}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \sin\Omega\sin I, \\ \beta_3 &= -\cos\Omega\sin I, \\ \gamma_3 &= \cos I. \end{aligned} \tag{I.29.3}$$

Первая тройка направляющих косинусов легко выводится из сферических треугольников $XN\Pi$, $YN\Pi$ и $ZN\Pi$, которые получаются, если соединить точку Π дугами большого круга с точками X, Y, Z соответственно. Вторая тройка направляющих косинусов находится из первой простой заменой ω на $\omega + \frac{\pi}{2}$, ибо ось Oy' получается из Ox' путем поворота на 90°. Направляющие косинусы α_3, β_3, γ_3 выводятся из сферических треугольников CXN, CYN и CZN, которые получаются, если соединить точку C дугами большого круга с точками X, Y, Z и N.

Направляющие косинусы α_1, β_1 и α_2, β_2 можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos(\omega - \Omega)\sin^2\frac{I}{2} + \cos(\omega + \Omega)\cos^2\frac{I}{2}, \\ \beta_1 &= -\sin(\omega - \Omega)\sin^2\frac{I}{2} + \sin(\omega + \Omega)\cos^2\frac{I}{2}, \\ \alpha_2 &= -\sin(\omega - \Omega)\sin^2\frac{I}{2} - \sin(\omega + \Omega)\cos^2\frac{I}{2}, \\ \beta_2 &= -\cos(\omega - \Omega)\sin^2\frac{I}{2} + \cos(\omega + \Omega)\cos^2\frac{I}{2}. \end{aligned} \tag{I.29.4}$$

Формулы преобразования координат запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z'},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \beta_1 \frac{\partial}{\partial x'} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y'} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial z'}, \qquad (I.29.5)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x'_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y'} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z'}.$$

Пусть теперь φ и ψ означают сферические координаты точки M на сфере радиусом r в системе координат $Oxyz$, а φ' и ψ' — сферические координаты этой точки в системе координат $Ox'y'z'$. Тогда, согласно (I.28.2), имеем

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = \frac{(-1)^n (n-m)!}{r^{n+1}} P_n^{(m)}(\sin\varphi)\exp im\psi, \qquad (I.29.6)$$

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z'^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i\frac{\partial}{\partial y'}\right)^m \frac{1}{r'} = \frac{(-1)^n (n-m)!}{r'^{n+1}} P_n^{(m)}(\sin\varphi')\exp im\psi'. \qquad (I.29.7)$$

Здесь

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}, \quad r' = r.$$

Наша цель состоит в нахождении зависимости между сферической функцией аргументов φ, ψ и сферическими функциями аргументов φ', ψ'. Мы найдем эту зависимость, если установим связь между дифференциальными операторами, стоящими в левых частях равенств (I.29.6) и (I.29.7). В этом сейчас и будет заключаться наша задача.

Прежде всего, заметим, что поскольку $\frac{1}{r}$ есть гармоническая функция, то

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} = 0.$$

Поэтому операторы

$$a = \frac{\partial}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial}{\partial z},$$

можно рассматривать в данном случае как компоненты некоторого вектора, модуль которого равен нулю:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Это равенство будет удовлетворено, если положить

$$-a + ib = x_1^2, \quad a + ib = x_2^2, \quad c = x_1 x_2,$$

где x_1 и x_2 — комплексные величины. Таким образом, имеем следующую связь между операторами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ и операторами x_1, x_2:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= -\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \\ x_2^2 &= \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \\ x_1 x_2 &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{I.29.8}$$

Используя эти равенства, находим

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \frac{1}{r} = x_1^{n-m} x_2^{n+m} \frac{1}{r} \tag{I.29.9}$$

и соответственно

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial z'^{n-m}}\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i\frac{\partial}{\partial y'}\right)^m \frac{1}{r'} = x_1'^{n-m} x_2'^{n+m} \frac{1}{r'}, \tag{I.29.10}$$

где

$$\begin{aligned} x_1'^2 &= -\frac{\partial}{\partial x'} + i\frac{\partial}{\partial y'}, \\ x_2'^2 &= \frac{\partial}{\partial x'} + i\frac{\partial}{\partial y'}, \\ x_1' x_2' &= \frac{\partial}{\partial z'}. \end{aligned}$$

Выразим теперь величины x_1 и x_2 через x_1' и x_2'.

Равенства (I.29.8), (I.29.1) — (I.29.5) дают

$$\begin{aligned} x_1^2 = {} & x_1'^2 [\cos(\omega + \Omega) - i\sin(\omega + \Omega)]\cos^2\frac{I}{2} + \\ & + x_2'^2[-\cos(\omega - \Omega) - i\sin(\omega - \Omega)]\sin^2\frac{I}{2} + \\ & + x_1' x_2' [-\sin\Omega + i\cos\Omega]\sin I, \\ x_2^2 = {} & x_1'^2 [-\cos(\omega - \Omega) + i\sin(\omega - \Omega)]\sin^2\frac{I}{2} + \\ & + x_2'^2 [\cos(\omega + \Omega) + i\sin(\omega + \Omega)]\cos^2\frac{I}{2} + \\ & + x_1' x_2' [\sin\Omega - i\cos\Omega]\sin I, \end{aligned}$$

или

$$x_1^2 = x_1^2\cos^2\frac{I}{2}\exp[-i(\omega+\Omega)] -$$

$$- x_2'\sin^2\frac{I}{2}\exp i(\omega-\Omega) - ix_1'x_2'\sin I\exp(-i\Omega),$$

$$x_2^2 = -x_1'^2\sin^2\frac{I}{2}\exp[-i(\omega-\Omega)] +$$

$$+ x_2'^2\cos^2\frac{I}{2}\exp i(\omega+\Omega) - ix_1'x_2'\sin I\exp i\Omega.$$

Полагая здесь

$$x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2',$$
$$x_2 = -\beta^* x_1' + \alpha^* x_2',$$

находим

$$\alpha = \cos\frac{I}{2}\exp\left(-i\frac{\omega+\Omega}{2}\right), \quad \beta = -i\sin\frac{I}{2}\exp\left(i\frac{\omega-\Omega}{2}\right),$$

$$\alpha^* = \cos\frac{I}{2}\exp\left(i\frac{\omega+\Omega}{2}\right), \quad \beta^* = i\sin\frac{I}{2}\exp\left(-i\frac{\omega-\Omega}{2}\right).$$

Найдем теперь выражения для x_1^{n-m}, x_2^{n+m}. Имеем

$$(\alpha x_1' + \beta x_2')^{n-m} = \sum_{r=0}^{n-m}\alpha^r\beta^{n-m-r}C_{n-m}^r x_1'^r x_2'^{n-m-r}, \quad (I.29.11)$$

$$(-\beta^* x_1' + \alpha^* x_2')^{n+m} = \sum_{j=0}^{n+m}(-\beta^*)^j\alpha^{*n+m-j}C_{n+m}^j x_1'^j x'^{n+m-j}. \quad (I.29.12)$$

Перемножая эти два бинома и полагая $j = n - r - s$, получим

$$x_1^{n-m}x_2^{n+m} = \sum_{s=-n}^{n} C_s x_1'^{n-s} x_2'^{n+s}, \quad (I.29.13)$$

где

$$C_s = \sum_r (-1)^{n-r-s} C_{n-m}^r C_{n+m}^{n-r-s} \times$$

$$\times (\alpha\alpha^*)^r(\beta\beta^*)^{n-r}\alpha^{*m+s}\beta^{-m}\beta^{*-s}, \quad (I.29.14)$$

или

$$C_s = \sum_r (-i)^{2n-2r-m-s} C_{n-m}^r C_{n+m}^{n-r-s} \times$$

$$\times\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{2r+m+s}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2n-2r-m-s}\exp i(m\Omega + s\omega). \quad (I.29.15)$$

С учетом (I.29.6), (I.29.7), (I.29.9) и (I.29.10) равенство (I.29.13) дает

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\exp im\psi =$$

$$= \sum_{s=-n}^{n} \frac{(n-s)!}{(n-m)!} C_s P_n^{(s)}(\sin\varphi')\exp is\psi', \quad (I.29.16)$$

где, согласно (I.26.8),

$$P_n^{(-s)}(\sin\varphi') = (-1)^s \frac{(n-s)!}{(n+s)!} P_n^{(s)}(\sin\varphi').$$

Поскольку

$$C_p^q = \frac{p!}{q!\,(p-q)!},$$

то, полагая

$$\widehat{C}_s = \frac{(n-s)!}{(n-m)!} C_s,$$

с помощью (I.29.15) получаем

$$\widehat{C}_s = \sum_r (-i)^{2n-2r-m-s} \frac{(n+m)!\,(n-s)!}{r!\,(n-m-r)!\,(n-r-s)!\,(m+r+s)!} \times$$

$$\times \left(\cos\frac{I}{2}\right)^{2r+m+s} \left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2n-2r-m-s} \exp i(m\Omega + s\omega), \quad (I.29.17)$$

а вместо (I.29.16) будем иметь

$$P_n^m(\sin\varphi)\exp im\psi = \sum_{s=-n}^{n} \widehat{C}_s P_n^{(s)}(\sin\varphi')\exp is\psi'. \quad (I.29.18)$$

Остается установить пределы суммирования в (I.29.17). Анализируя суммы (I.29.11)—(I.29.14), приходим к неравенствам

$$r \geqslant 0, \qquad r \geqslant -m-s,$$
$$r \leqslant n-m, \quad r \leqslant n-s.$$

Отсюда следует, что

$$\max(0,\ -m-s) \leqslant r \leqslant \min(n-m,\ n-s). \quad (I.29.19)$$

Введем теперь обозначение

$$P_{n,m}^{(s)}(I) =$$

$$= \sum_r (-i)^{2n-2r-m-s} \frac{(n+m)!\,(n-s)!}{r!\,(n-m-r)!\,(n-s-r)!\,(m+s+r)!} \times$$

$$\times \left(\cos\frac{I}{2}\right)^{m+s+2r} \left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2n-m-s-2r}; \quad (I.29.20)$$

тогда формула (I.29.18) примет вид

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\exp im\psi =$$

$$= \sum_{s=-n}^{n} P_{n,m}^{(s)}(I)\, P_n^{(s)}(\sin\varphi')\exp\left[im\Omega + is(\omega+\psi')\right]. \quad (\text{I.29.21})$$

Формулы (I.29.21) и (I.29.20) и дают искомое преобразование. Рассмотрим один частный случай. Пусть точка M находится на большом круге, получаемом пересечением сферы координатной плоскостью $Ox'y'$. Тогда $\varphi' = 0$ и формула (I.29.21) принимает вид

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\exp im(\psi-\Omega) =$$

$$= \sum_{s=-n}^{n} P_{n,m}^{(s)}(I)\, P_n^{(s)}(0)\exp is(\omega+\psi'), \quad (\text{I.29.22})$$

где, согласно (I.23.4) и (I.26.8),

$$P_n^{(s)}(0) = 0,$$

если $n - s$ есть нечетное число, и

$$P_n^{(s)}(0) = (-1)^{\frac{n-s}{2}} \frac{(n+s)!}{2^n\left(\frac{n-s}{2}\right)!\left(\frac{n+s}{2}\right)!},$$

если $n - s$ есть четное число. Заметим, что последнее равенство справедливо как при положительных, так и при отрицательных s.

§ I.30. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям

Рассмотрим задачу о притяжении материальной точки P единичной массы некоторым материальным телом M. Будем предполагать, что тело имеет произвольную форму, а его плотность $\varkappa$ является кусочно непрерывной функцией координат.

Возьмем прямоугольную, жестко связанную с телом, систему координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс тела (рис. 7). Тогда потенциал притяжения или силовая функция тела M в точке P с координатами ξ, η, ζ будет определяться формулой

$$U = f\iiint\limits_T \frac{\varkappa\, d\tau}{\Delta}, \quad (\text{I.30.1})$$

где f — постоянная притяжения,

$$\Delta = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}$$

есть расстояние точки P от текущей точки P' с координатами ξ', η', ζ', в которой находится объем $d\tau$, а интеграл берется по всему объему T, занятому притягивающим телом.

Если через r и r' обозначить радиус-векторы точек P и P', а через γ — угол между ними, то для Δ и γ будем иметь

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma},$$

$$\cos\gamma = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{rr'}.$$

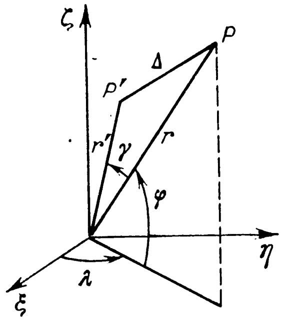


Рис. 7. Система координат $O\xi\eta\zeta$

Предполагая, что точка P лежит вне притягивающего тела, разложим Δ^{-1} в ряд по степеням отношения r'/r. Прежде всего, имеем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}},$$

а это дает возможность применить формулу (I.1.9). При помощи этой формулы находим следующее разложение для $1/\Delta$:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma), \tag{I.30.2}$$

подставляя которое в (I.30.1), получаем

$$U = f \iiint\limits_T \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)\, \varkappa\, d\tau. \tag{I.30.3}$$

Перейдем теперь к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \xi &= r\cos\varphi\cos\lambda, & \xi' &= r'\cos\varphi'\cos\lambda', \\ \eta &= r\cos\varphi\sin\lambda, & \eta' &= r'\cos\varphi'\sin\lambda', \\ \zeta &= r\sin\varphi, & \zeta' &= r'\sin\varphi'. \end{aligned} \tag{I.30.4}$$

Тогда для $\cos\gamma$ найдем такое выражение:

$$\cos\gamma = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda - \lambda').$$

Для того чтобы выразить правую часть (I.30.3) через полярные координаты, воспользуемся теоремой сложения для многочленов Лежандра (I.22.2), которая в данном случае выглядит так:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\sin\varphi)\,P_n(\sin\varphi') + $$
$$+ 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin\varphi)\,P_n^{(k)}(\sin\varphi')\cos k(\lambda-\lambda'). \qquad (I.30.5)$$

Поскольку

$$\cos k(\lambda-\lambda') = \cos k\lambda\cos k\lambda' + \sin k\lambda\sin k\lambda',$$

то равенство (I.30.5) можно записать в виде

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\sin\varphi)\,P_n(\sin\varphi') + $$
$$+ 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin\varphi)\cos k\lambda\left[P_n^{(k)}(\sin\varphi')\cos k\lambda'\right] + $$
$$+ 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin\varphi)\sin k\lambda\left[P_n^{(k)}(\sin\varphi')\sin k\lambda'\right].$$

Если подставить это равенство в формулу (I.30.3), то получим

$$U = f\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\sin\varphi) \iiint_T r'^n P_n(\sin\varphi')\,\varkappa\,d\tau + $$
$$+ f\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(k)}(\sin\varphi)\cos k\lambda \times $$
$$\times \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi')\cos k\lambda'\,\varkappa\,d\tau + $$
$$+ f\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^{(k)}(\sin\varphi)\sin k\lambda \times $$
$$\times \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi')\sin k\lambda'\,\varkappa\,d\tau. \qquad (I.30.6)$$

Введем следующие обозначения:

$$mr_0^n J_n = -\iiint_T r'^n P_n(\sin\varphi')\,\varkappa\,d\tau,$$
$$mr_0^n C_{nk} = \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi')\cos k\lambda'\,\varkappa\,d\tau, \qquad (I.30.7)$$
$$mr_0^n S_{nk} = \iiint_T \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi')\sin k\lambda'\,\varkappa\,d\tau,$$

где m — масса тела, r_0 — некоторая линейная величина. В случае Земли, например, в качестве r_0 удобно взять средний экваториальный радиус. Очевидно, величины J_n, C_{nk} и S_{nk} являются безразмерными.

С учетом этих обозначений формула (I.30.6) принимает вид

$$U = -\frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) +$$

$$+\frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)\,[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda]. \tag{I.30.8}$$

Коэффициенты J_n, C_{nk} и S_{nk} зависят от формы тела и распределения масс внутри него. Рассмотрим первые из них. Пусть в (I.30.7) $n=0$. Тогда так как

$$P_0(\sin\varphi') = 1 \text{ и } \int\int_T\int \varkappa\, d\tau = m,$$

то

$$J_0 = -1. \tag{I.30.9}$$

Полагая в формулах (I.30.7) $n=1$ и $k=1$ и учитывая, что

$$P_1(\sin\varphi') = \sin\varphi', \quad P_1^{(1)}(\sin\varphi') = \cos\varphi',$$

находим

$$mr_0J_1 = -\int\int_T\int \varkappa r'\sin\varphi'\, d\tau = -\int\int_T\int \zeta'\,dm = -m\zeta_0,$$

$$mr_0C_{11} = \int\int_T\int \varkappa r'\cos\varphi'\cos\lambda' d\tau = \int\int_T\int \xi' dm = m\xi_0,$$

$$mr_0S_{11} = \int\int_T\int \varkappa r'\cos\varphi'\sin\lambda' d\tau = \int\int_T\int \eta' dm = m\eta_0,$$

где ξ_0, η_0, ζ_0 — координаты центра масс тела. Поскольку начало системы координат $O\xi\eta\zeta$ находится в центре инерции тела, то отсюда заключаем, что

$$J_1 = 0, \quad C_{11} = 0, \quad S_{11} = 0. \tag{I.30.10}$$

Положим в формулах (I.30.7) $n=2$ и $k=0$. Тогда, принимая во внимание, что

$$P_2(\sin\varphi') = \frac{3}{2}\sin^2\varphi' - \frac{1}{2}$$

и учитывая равенства (I.30.4), получаем

$$J_2 = \frac{1}{2mr_0^2} \iiint\limits_T (\xi'^2 + \eta'^2 - 2\zeta'^2)\, \varkappa\, d\tau. \quad \text{(I.30.11)}$$

Если в формулах (I.30.7) положить $n = 2$ и $k = 1$, то, поскольку

$$P_2^{(1)}(\sin\varphi') = 3\sin\varphi'\cos\varphi',$$

легко находим

$$C_{21} = \frac{1}{mr_0^2} \iiint\limits_T \xi'\zeta'\varkappa\, d\tau,$$

$$S_{21} = \frac{1}{mr_0^2} \iiint\limits_T \eta'\zeta'\varkappa\, d\tau. \quad \text{(I.30.12)}$$

Полагая, наконец, в (I.30.7) $n = 2$ и $k = 2$ и учитывая, что

$$P_2^{(2)}(\sin\varphi') = 3\cos^2\varphi',$$

будем иметь такие выражения для C_{22} и S_{22}:

$$C_{22} = \frac{1}{4mr_0^2} \iiint\limits_T (\xi'^2 - \eta'^2)\, \varkappa\, d\tau, \quad \text{(I.30.13)}$$

$$S_{22} = \frac{1}{2mr_0^2} \iiint\limits_T \xi'\eta'\varkappa\, d\tau. \quad \text{(I.30.14)}$$

Обозначим теперь через A, B и C главные центральные моменты инерции тела M:

$$A = \iiint\limits_T (\eta'^2 + \zeta'^2)\, \varkappa\, d\tau,$$

$$B = \iiint\limits_T (\xi'^2 + \zeta'^2)\, \varkappa\, d\tau,$$

$$C = \iiint\limits_T (\xi'^2 + \eta'^2)\, \varkappa\, d\tau,$$

а через D, E, F — произведения инерции:

$$D = \iiint\limits_T \eta'\zeta'\varkappa\, d\tau, \quad E = \iiint\limits_T \zeta'\xi'\varkappa\, d\tau, \quad F = \iiint\limits_T \xi'\eta'\varkappa\, d\tau,$$

Тогда равенства (I.30.11)—(I.30.14) запишутся в виде

$$J_2 = \frac{2C - (A + B)}{2mr_0^2}, \qquad \text{(I.30.15)}$$

$$C_{21} = \frac{E}{mr_0^2}, \quad S_{21} = \frac{D}{mr_0^2}, \qquad \text{(I.30.16)}$$

$$C_{22} = \frac{B - A}{4mr_0^2}, \quad S_{22} = \frac{F}{2mr_0^2}. \qquad \text{(I.30.17)}$$

На основании (I.30.9) и (I.30.10) формула (I.30.8) принимает следующий окончательный вид:

$$U = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)\,[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda]\right\}. \qquad \text{(I.30.18)}$$

Полученное разложение для потенциала U сходится абсолютно и равномерно при

$$r > r^*, \qquad \text{(I.30.19)}$$

где r^* — расстояние наиболее удаленной точки поверхности тела от его центра масс. Действительно, поскольку $|P_n(\sin\varphi)| \leqslant 1$, ряд (I.30.2), а следовательно и (I.30.3), абсолютно и равномерно сходится, если $r > r'$, где r' — радиус-вектор точки, лежащей внутри или на поверхности тела. Но $\max r' = r^*$. Отсюда и получаем условие (I.30.19).

Сделаем еще одно замечание. Предположим, что одна из осей координат, скажем ось $O\zeta$, совпадает с главной центральной осью инерции. Тогда произведения инерции D и E будут равны нулю, а поэтому

$$C_{21} = 0 \quad \text{и} \quad S_{21} = 0.$$

Если предположить, что все три координатные оси совпадают с главными центральными осями инерции, то будет равен нулю также и коэффициент S_{22}.

§ I.31. Потенциал притяжения Земли

Пусть $O\xi\eta\zeta$ — прямоугольная, жестко связанная с Землей, правая система координат, такая, что ее начало находится в центре масс Земли, основная плоскость $\xi\eta$ совпадает с экваториальной плоскостью, ось $O\zeta$ направлена в северный полюс, а ось $O\xi$ пересекает гринвичский меридиан. Пусть, далее, r, φ и λ — радиус-вектор, широта и долгота

$$\begin{aligned} \xi &= r\cos\varphi\cos\lambda, \\ \eta &= r\cos\varphi\sin\lambda, \\ \zeta &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{I.31.1}$$

Тогда на основании предыдущего параграфа потенциал притяжения Земли во внешней точке с координатами r, φ, λ будет даваться формулой

$$U = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)\left[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda\right]\right\}, \tag{I.31.2}$$

где f — постоянная притяжения, m и r_0 — масса и средний экваториальный радиус Земли; J_n, C_{nk} и S_{nk} — безразмерные коэффициенты, зависящие от формы Земли и распределения масс внутри нее; P_n и $P_n^{(k)}$ — многочлен и присоединенная функция Лежандра, причем

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \tag{I.31.3}$$

$$P_n^{(k)}(x) = (1-x^2)^{k/2}\frac{d^k P_n(x)}{dx^k}. \tag{I.31.4}$$

Разложение (I.31.2), согласно § I.30, сходится абсолютно и равномерно при $r > r^*$, где r^* — радиус-вектор наиболее удаленной точки земной поверхности.

Так как ось $O\zeta$ совпадает с осью вращения Земли, т. е. с одной из главных центральных осей инерции, то на основании § I.30

$$C_{21} = 0 \quad \text{и} \quad S_{21} = 0.$$

Формула (I.31.2) была рекомендована комиссией № 7 Международного астрономического союза как стандартная форма записи потенциала притяжения Земли. В литературе, однако, широко распространены и другие формулы для потенциала. Отметим здесь главные из них. Прежде всего, имеем [9]

$$U=\frac{fm}{r}\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}J_{nk}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)\cos k(\lambda-\lambda_{nk})\right\},\qquad (\mathrm{I}.31.5)$$

где новые коэффициенты J_{nk} и λ_{nk} связаны со старыми C_{nk} и S_{nk} равенствами *)

$$C_{nk}=J_{nk}\cos k\lambda_{nk},\quad S_{nk}=J_{nk}\sin k\lambda_{nk},\qquad (\mathrm{I}.31.6)$$

или

$$J_{nk}=\sqrt{C_{nk}^2+S_{nk}^2},\quad \operatorname{tg}k\lambda_{nk}=\frac{S_{nk}}{C_{nk}}.\qquad (\mathrm{I}.31.7)$$

Заменим теперь в разложении (I.31.2) $P_n^{(k)}$ нормированными присоединенными функциями Лежандра $p'^{(k)}_n$, согласно равенству

$$p'^{(k)}_n(x)=\sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}\,P_n^{(k)}(x).$$

Тогда потенциал U запишется в виде

$$U=\frac{fm}{r}\left\{1-\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n p'^{(k)}_n(\sin\varphi)\left[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda\right]\right\},$$

$$(\mathrm{I}.31.8)$$

где коэффициенты A_{nk} и B_{nk} связаны с C_{nk} и S_{nk} соотношениями

$$A_{nk}=\sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}}\,C_{nk},\quad B_{nk}=\sqrt{\frac{(n+k)}{2(n-k)!}}\,S_{nk}.\qquad (\mathrm{I}.31.9)$$

---

*) В некоторых работах вместо J_n используются величины $I_n=-J_n$.

Если, наконец, в (I.31.2) заменить $P_n^{(k)}$ полностью нормированными функциями Лежандра $p_n^{(k)}$:

$$p_n^{(k)}(x) = \sqrt{2n+1}\sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}\,P_n^{(k)}(x),$$

то будем иметь еще одну формулу для U:

$$U = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n p_n^{(k)}(\sin\varphi)\left[\overline{C}_{nk}\cos k\lambda + \overline{S}_{nk}\sin k\lambda\right]\right\}, \tag{I.31.10}$$

где

$$\overline{C}_{nk} = \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}}\,\frac{C_{nk}}{\sqrt{2n+1}}, \qquad \overline{S}_{nk} = \sqrt{\frac{(n+k)!}{2(n-k)!}}\,\frac{S_{nk}}{\sqrt{2n+1}}. \tag{I.31.11}$$

Приведем теперь основные параметры, характеризующие гравитационное поле Земли. Для этого мы воспользуемся данными, соответствующими Стандартной Земле 1969 г. Под Стандартной Землей здесь понимается совокупность коэффициентов разложения геопотенциала и геоцентрических координат нескольких пунктов на земной поверхности. Для ее вывода были использованы наблюдения искусственных спутников Земли, полученные фотографическими камерами и лазерными установками. Были привлечены гравиметрические и геодезические данные, а также наблюдения космических зондов.

Для fm и r_0 имеем

$$fm = 3{,}986013\cdot 10^5\ \text{км}^3\cdot\text{с}^{-2},$$
$$r_0 = 6378{,}155\ \text{км}.$$

Коэффициенты зональных гармоник до 21-го порядка включительно равны

$$J_2 = 1082{,}628\cdot 10^{-6},\quad J_3 = -2{,}538\cdot 10^{-6},$$
$$J_4 = -1{,}593\cdot 10^{-6},\quad J_5 = -0{,}230\cdot 10^{-6},$$
$$J_6 = 0{,}502\cdot 10^{-6},\quad J_7 = -0{,}361\cdot 10^{-6},$$

$$J_8 = -0{,}118 \cdot 10^{-6}, \qquad J_9 = -0{,}100 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{10} = -0{,}354 \cdot 10^{-6}, \qquad J_{11} = 0{,}202 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{12} = -0{,}042 \cdot 10^{-6}, \qquad J_{13} = -0{,}123 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{14} = -0{,}073 \cdot 10^{-6}, \qquad J_{15} = -0{,}174 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{16} = 0{,}187 \cdot 10^{-6}, \qquad J_{17} = 0{,}085 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{18} = -0{,}231 \cdot 10^{-6}, \qquad J_{19} = -0{,}216 \cdot 10^{-6},$$
$$J_{20} = -0{,}005 \cdot 10^{-6}, \qquad J_{21} = 0{,}145 \cdot 10^{-6}.$$

Коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник (полностью нормированные) до шестого порядка включительно приводятся в табл. 1. О других системах параметров гравитационного поля Земли см. [10].

Рассмотрим структуру разложения геопотенциала. В соответствии с § I.17 те члены в формуле (I.31.2), которые пропорциональны J_n, называются зональными гармониками; члены, пропорциональные C_{nk} и S_{nk} при $n \neq k$, называются тессеральными гармониками, а при $n = k$ — секториальными гармониками. Поскольку первый член в формуле (I.31.2) представляет собой потенциал шара со сферическим распределением плотности, то все остальные слагаемые характеризуют отличие Земли от тела сферической структуры. Основным из этих слагаемых является вторая зональная гармоника, которая определяет сплюснутость Земли у полюсов, т. е. полярное сжатие. Другие гармоники характеризуют более мелкие детали. Так, тессеральные и секториальные гармоники характеризуют отличие Земли от тела, динамически симметричного относительно оси вращения, а зональные гармоники нечетного порядка определяют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

§ I.32. Спутниковый вариант задачи трех тел

Рассмотрим движение спутника P под действием притяжения центральной планеты S с массой m_0 и некоторого внешнего тела с массой m'. Будем предполагать, что масса спутника пренебрежимо мала по сравнению с массами m_0 и m'.

Возьмем прямоугольную систему координат $Sxyz$ с началом в центре масс тела S и фиксированным направлением осей. Тогда дифференциальные уравнения движения

Таблица 1

Полностью нормированные коэффициенты для геопотенциала

n k	$\overline{C}_{nk}\cdot 10^8$	$\overline{S}_{nk}\cdot 10^8$	n k	$\overline{C}_{nk}\cdot 10^8$	$\overline{S}_{nk}\cdot 10^8$
2 2	241,29	—136,41	5 3	—43,083	—8,6663
3 1	196,98	26,015	5 4	—26,693	8,3010
3 2	89,204	—63,468	5 5	12,593	—59,910
3 3	68,630	143,04	6 1	—9,8984	3,7652
4 1	—52,989	—48,765	6 2	5,4825	—35,175
4 2	33,024	70,633	6 3	2,7873	4,4626
4 3	98,943	—15,467	6 4	—0,040342	—40,388
4 4	—7,9692	33,928	6 5	—21,143	—52,264
5 1	—5,3816	—9,7905	6 6	8,8693	—7,4756
5 2	61,286	—35,087			

спутника запишутся в виде [11]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad (I.32.1)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial z},$$

где

$$\mu=fm_0,\qquad (I.32.2)$$

а возмущающая функция R определяется формулой

$$R=fm'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r\cos H}{r'^2}\right).\qquad (I.32.3)$$

Здесь f — постоянная притяжения, r и r' — величины радиус-векторов тел P и P', H — угол между этими радиус-векторами, а Δ — взаимное расстояние между телами P и P', так что

$$\Delta=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos H}.$$

Пусть система координат $Sxyz$ такова, что ее основная плоскость xy совпадает с плоскостью орбиты тела P'. Тогда

$$\cos H=\frac{1}{2}(1+\cos I)\cos(u-u'+\Omega)+$$
$$+\frac{1}{2}(1-\cos I)\cos(u+u'-\Omega),\qquad (I.32.4)$$

где I, u, Ω — наклон, аргумент широты и долгота узла спутника, а u' — аргумент широты внешнего тела.

Поскольку для большинства спутников планет и искусственных спутников Земли отношение расстояния между спутником и центральной планетой к расстоянию между планетой и внешним телом является малой величиной, то можно разложить возмущающую функцию R в ряд по степеням $\frac{r}{r'}$. Этой задачей мы и займемся сейчас.

Запишем $\frac{1}{\Delta}$ в виде

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r'}\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{r}{r'}\right)\cos H+\left(\frac{r}{r'}\right)^2}}$$

и воспользуемся формулой (I.1.9). Тогда получим

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r'}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos H).$$

Если здесь выделить члены с $n=0$ и $n=1$, то, учитывая, что

$$P_0(\cos H)=1,\quad P_1(\cos H)=\cos H,$$

будем иметь

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r'}+\frac{r}{r'^2}\cos H+\frac{1}{r'}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos H).$$

Подставляя полученное выражение в (I.32.3) и отбрасывая при этом член, не зависящий от координат тела P, находим

$$R=\frac{fm'}{r'}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos H). \qquad \text{(I.32.5)}$$

Разложение (I.32.5) сходится для всех $r<r'$. Во многих случаях, встречающихся на практике, оно сходится настолько быстро, что в нем можно ограничиться лишь несколькими первыми членами. Пусть при решении конкретной задачи мы сохранили все члены до гармоники с $n=k$ включительно. Тогда сумма отброшенных членов определится формулой

$$R_k=\frac{fm'}{r'}\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos H). \qquad \text{(I.32.6)}$$

Найдем оценку для R_k. Пусть

$$\frac{r}{r'} < q < 1.$$

Тогда поскольку $|P_n(\cos H)| \leqslant 1$, то

$$|R_k| < \frac{fm'}{r'} \sum_{n=k+1}^{\infty} q^n = \frac{fm'}{r'} \frac{q^{k+1}}{1-q}.$$

Если обозначить через

$$U = \frac{fm_0}{r}$$

потенциал центрального тела (планеты), то отношение R_k к U будет иметь следующую оценку:

$$\frac{|R_k|}{U} < \frac{m'}{m_0} \frac{q^{k+2}}{1-q}.$$

Очень часто оказывается достаточно в формуле (I.32.5) сохранить только одно слагаемое, т. е. считать, что

$$R = \frac{fm'}{r'} \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2(\cos H). \tag{I.32.7}$$

Такую предельную ограниченную задачу трех тел, в которой возмущающая функция R определяется формулой (I.32.7), мы будем называть ограниченной задачей Хилла. Эта задача имеет важные приложения в небесной механике. Она находит применение в теории движения Луны и многих естественных спутников планет, а также в теории движения искусственных спутников Земли. Точная формулировка задачи Хилла в теории Луны приводится в книге [12].

§ I.33. Замечания

Теория сферических функций в ее главных чертах была создана в конце XVIII столетия трудами П. С. Лапласа и А. М. Лежандра. Исследования Лежандра в этой области содержатся в его трех мемуарах, опубликованных в 1785, 1787 и 1794 гг. в Париже [1], [2]. Сферические функции встречаются в мемуаре [3] Лапласа, представленном Парижской Академии в 1782 г. В более разработанном виде результаты Лапласа изложены во 2-м и 5-м томах его «Трактата по небесной механике», вышедших в 1798 и 1825 гг. в Париже [4]. Исследования Лапласа и Лежандра тесно переплетались между собой и находились во взаимосвязи.

Многочлены, которые ныне носят имя Лежандра, по-видимому, впервые были им и введены. В его первом мемуаре, посвященном исследованию притяжения однородных сфероидов, они появляются как коэффициенты разложения функции

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}}$$

в ряд по степеням $\frac{r}{R}$. В последующих мемуарах формулируется и доказывается ряд важнейших свойств, которыми обладают многочлены Лежандра, в частности свойство ортогональности и теорема сложения.

Лаплас, как и Лежандр, встречается со сферическими функциями, рассматривая задачу о притяжении сфероидов и фигурах планет. Однако Лаплас развил теорию сферических функций в более общем виде, нежели Лежандр. Он ввел не только многочлены и присоединенные функции Лежандра, но и функции $Y_n(\theta, \lambda)$ двух сферических координат θ и λ, которые стали называть вслед за Гауссом сферическими функциями. Отправной точкой исследований Лапласа является его дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которому удовлетворяет потенциал притяжения объемного тела во внешнем пространстве.

Лаплас выводит дифференциальные уравнения для сферической функции $Y_n(\theta, \lambda)$, присоединенной функции $P_n^{(m)}(x)$ и для многочлена $P_n(x)$ (сам Лаплас обозначал их иначе). Он находит для всех этих функций общие выражения, открывает многие важнейшие их свойства, в том числе свойство ортогональности и теорему сложения для многочленов Лежандра. Он представил многочлен Лежандра в виде определенного интеграла, получил следующую асимптотическую формулу для $P_n(\cos\theta)$ при больших n *):

$$P_n(\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Лаплас поставил задачу о разложении функции $f(\theta, \lambda)$, заданной на сфере, в ряд по сферическим функ-

*) Без остаточного члена.

циям. Условия разложимости $f(\theta, \lambda)$ по функциям $Y_n(\theta, \lambda)$ были определены позже Дирихле, Бонне, Дини и Дарбу.

После Лапласа и Лежандра различные проблемы теории сферических функций разрабатывались Родригом, Шлефли, Дирихле, Якоби, Гейне, Нейманом и другими исследователями. Формула Родрига содержится в его мемуаре, опубликованном в 1816 г. Формула Шлефли опубликована в 1881 г. Большое внимание уделялось распространению теории функций $P_n(z)$ и $P_n^{(m)}(z)$ на область комплексного переменного z и произвольных значений величин n и m, а также изучению функций второго рода $Q_n(z)$ и $Q_n^{(m)}(z)$.

Из самых последних результатов, имеющих важное прикладное значение, отметим решение проблемы преобразования сферических функций при повороте системы координат, найденное Б. Джеффрис в 1965 г. [8].

Сферическим функциям посвящены многочисленные работы, среди которых полнотой выделяются монографии Е. Гейне [5] и Е. Гобсона [7]. Более подробные сведения исторического характера содержатся в уже упомянутой монографии Гейне и монографии [6].

Мы здесь лишь коснулись теории притяжения материальных тел. Она подробно изложена в книгах Л. Н. Сретенского [13], М. Ф. Субботина [14] и Г. Н. Дубошина [15]. Оценки коэффициентов геопотенциала при достаточно общих предположениях относительно распределения плотности Земли получены К. В. Холшевниковым [16].

В § I.31 мы привели численные значения некоторых коэффициентов разложения потенциала притяжения Земли по сферическим функциям. Более подробные сведения о параметрах гравитационного поля Земли, как уже отмечалось, содержатся в книге Л. П. Пеллинена [10]. Там же приводятся данные о гравитационных полях других планет и Луны. Результаты последних исследований поля тяготения и фигуры Луны обстоятельно изложены в монографиях М. У. Сагитова [17] и Э. Л. Акима, И. К. Бажинова, В. П. Павлова, В. Н. Почукаева [18].

Сведения об алгоритмах вычисления многочленов и присоединенных функций Лежандра на ЭВМ содержатся в справочном пособии [19].

Глава II

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛАПЛАСА

§ II.1. Определение коэффициентов Лапласа

Рассмотрим функцию двух аргументов α и φ:

$$F = (1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}}, \qquad (\text{II}.1.1)$$

где

$$0 < \alpha < 1, \quad -\infty < \varphi < \infty,$$

а n — любое целое положительное число.

Очевидно, эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Дирихле о разложении функций в ряды Фурье. Поэтому она может быть представлена рядом по косинусам углов, кратных φ, который сходится для всех значений φ:

$$F = \frac{1}{2} L_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} L_n^{(k)} \cos k\varphi, \qquad (\text{II}.1.2)$$

где

$$L_n^{(k)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos k\varphi \, d\varphi}{(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{n/2}}. \qquad (\text{II}.1.3)$$

Определенные таким образом коэффициенты $L_n^{(k)}$, которые являются функциями аргумента α, называются коэффициентами Лапласа.

Пусть

$$z = e^{i\varphi}.$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)$$

и формула (II.1.1) принимает вид

$$F = \left[1 + \alpha^2 - \alpha\left(z + z^{-1}\right)\right]^{-\frac{n}{2}}. \tag{II.1.4}$$

Так как

$$\cos k\varphi = \frac{1}{2}\left(z^k + z^{-k}\right),$$

то равенство (II.1.2) запишется так:

$$F = \frac{1}{2} L_n^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} L_n^{(k)}\left(z^k + z^{-k}\right), \tag{II.1.5}$$

или

$$\left[1 + \alpha^2 - \alpha\left(z + z^{-1}\right)\right]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_n^{(k)} z^k, \tag{II.1.6}$$

поскольку, как это следует из (II.1.3),

$$L_n^{(-k)} = L_n^{(k)}. \tag{II.1.7}$$

Функцию, стоящую в левой части равенства (II.1.6), можно назвать производящей функцией коэффициентов Лапласа.

§ II.2. Степенные ряды для коэффициентов Лапласа

Перепишем формулу (II.1.4) в виде

$$F = (1 - \alpha z)^{-\frac{n}{2}}\left(1 - \alpha z^{-1}\right)^{-\frac{n}{2}}. \tag{II.2.1}$$

Разложим каждый сомножитель в ряд по степеням z. Имеем

$$(1 - \alpha z)^{-\frac{n}{2}} = \\ = 1 + \frac{n}{2}\alpha z + \frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\alpha^2 z^2 + \frac{n(n+2)(n+4)}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3 z^3 + \ldots \tag{II.2.2}$$

и

$$\left(1 - \alpha z^{-1}\right)^{-\frac{n}{2}} = \\ = 1 + \frac{n}{2}\alpha z^{-1} + \frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\alpha^2 z^{-2} + \frac{n(n+2)(n+4)}{2\cdot 4\cdot 6}\alpha^3 z^{-3} + \ldots \tag{II.2.3}$$

Перемножая эти ряды, получаем

$$F=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_n^{(k)} z^k,$$

где

$$\frac{1}{2}L_n^{(0)}=1+\left(\frac{n}{2}\right)^2\alpha^2+\left[\frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\right]^2\alpha^4+$$
$$+\left[\frac{n(n+2)(n+4)}{2\cdot 4\cdot 6}\right]^2\alpha^6+\ldots \qquad \text{(II.2.4)}$$

и

$$\frac{1}{2}L_n^{(k)}=\frac{n(n+2)\ldots(n+2k-2)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2k)}\alpha^k\left\{1+\frac{n}{2}\frac{n+2k}{2k+2}\alpha^2+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\frac{(n+2k)(n+2k+2)}{(2k+2)(2k+4)}\alpha^4+\ldots\right\}. \qquad \text{(II.2.5)}$$

Так как ряды (II.2.2) и (II.2.3) сходятся при $\alpha<1$, то полученные здесь степенные ряды для коэффициентов Лапласа будут также сходиться для всех $\alpha<1$.

§ II.3. Интегральные формулы для коэффициентов Лапласа

Мы определили коэффициенты Лапласа формулой

$$L_n^{(k)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos k\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{n/2}},$$

из которой для $L_1^{(0)}$ и $L_1^{(1)}$ находим

$$L_1^{(0)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}}, \qquad \text{(II.3.1)}$$

$$L_1^{(1)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}}. \qquad \text{(II.3.2)}$$

Приведем интегралы (II.3.1) и (II.3.2) к нормальной форме эллиптических интегралов. Для этого воспользуемся подстановкой

$$\sin(\theta-\varphi)=\alpha\sin\theta, \qquad \text{(II.3.3)}$$

или

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-\alpha}.$$

Дифференцируя (II.3.3), получаем

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\cos(\theta-\varphi)-\alpha\cos\theta}{\cos(\varphi-\theta)},$$

или

$$d\varphi=\frac{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}-\alpha\cos\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}\,d\theta.$$

Далее, имеем

$$\cos\varphi=\cos[(\theta-\varphi)-\theta]=\cos(\theta-\varphi)\cos\theta+\sin(\theta-\varphi)\sin\theta,$$

откуда с помощью (II.3.3) находим

$$\cos\varphi=\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\cos\theta+\alpha\sin^2\theta, \qquad \text{(II.3.4)}$$

так что

$$\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}=\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}-\alpha\cos\theta.$$

Поэтому

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}}=\frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}. \qquad \text{(II.3.5)}$$

Так как из равенства (II.3.3) следует, что при изменении φ от 0 до π переменная θ также изменяется в этих пределах, то, подставляя (II.3.5) в формулу (II.3.1), получим

$$L_1^{(0)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}},$$

или окончательно

$$L_1^{(0)}=\frac{4}{\pi}K(\alpha), \qquad \text{(II.3.6)}$$

где через $K(\alpha)$ обозначен полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}.$$

Если подставить равенства (II.3.4) и (II.3.5) в формулу (II.3.2), то будем иметь

$$L_1^{(1)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\alpha\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}},$$

или

$$L_1^{(1)} = \frac{2}{\pi\alpha}\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}} - \frac{2}{\pi\alpha}\int\limits_0^\pi \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Обозначая через

$$E(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

полный эллиптический интеграл второго рода, окончательно найдем, что

$$L_1^{(1)} = \frac{4}{\pi\alpha}[K(\alpha) - E(\alpha)]. \qquad \text{(II.3.7)}$$

Подробности о функциях $K(\alpha)$ и $E(\alpha)$ см. в гл. VII.

§ II.4. Рекуррентные соотношения между коэффициентами Лапласа

Напишем формулу (II.1.6)

$$\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+z^{-1}\right)\right]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_n^{(k)} z^k$$

и продифференцируем ее по z. Тогда получим следующее равенство:

$$\frac{n}{2}\alpha\left(1-z^{-2}\right)\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+z^{-1}\right)\right]^{-\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} kL_n^{(k)} z^{k-1}, \qquad \text{(II.4.1)}$$

которое можно записать в виде

$$\frac{n}{2}\alpha\left(1-z^{-2}\right)\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+z^{-1}\right)\right]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+z^{-1}\right)\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty} kL_n^{(k)} z^{k-1},$$

или

$$\frac{n}{2}\alpha\left(1-z^{-2}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_n^{(k)} z^k = \left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+z^{-1}\right)\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty} kL_n^{(k)} z^{k-1}. \qquad \text{(II.4.2)}$$

Приравнивая в обеих частях этого равенства коэффициенты при z^{k-1}, будем иметь

$$\frac{1}{2} n\alpha \left[L_n^{(k-1)} - L_n^{(k+1)}\right] = (1+\alpha^2) k L_n^{(k)} - \\ - \alpha (k-1) L_n^{(k-1)} - \alpha (k+1) L_n^{(k+1)}.$$

Отсюда находим

$$(2k - n + 2) L_n^{(k+1)} = 2k (\alpha + \alpha^{-1}) L_n^{(k)} - (2k + n - 2) L_n^{(k-1)}. \tag{II.4.3}$$

Эта формула дает возможность последовательно вычислять значения коэффициентов $L_n^{(2)}$, $L_n^{(3)}$ и т. д., если известны значения $L_n^{(0)}$ и $L_n^{(1)}$.

Запишем теперь равенство (II.4.1) в виде

$$\frac{n}{2} \alpha (1 - z^{-2}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_{n+2}^{(k)} z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k L_n^{(k)} z^{k-1}. \tag{II.4.4}$$

Приравнивая здесь коэффициенты при z^{k-1}, получим

$$\frac{n}{2} \alpha \left[L_{n+2}^{(k-1)} - L_{n+2}^{(k+1)}\right] = k L_n^{(k)}. \tag{II.4.5}$$

Заменим в равенстве (II.4.3) n на $n+2$. Это даст

$$(2k - n) L_{n+2}^{(k+1)} = 2k (\alpha + \alpha^{-1}) L_{n+2}^{(k)} - (2k + n) L_{n+2}^{(k-1)}. \tag{II.4.6}$$

Исключая из (II.4.5) и (II.4.6) $L_{n+2}^{(k-1)}$, будем иметь

$$2n\alpha L_{n+2}^{(k+1)} - n (1+\alpha^2) L_{n+2}^{(k)} + (2k + n) L_n^{(k)} = 0, \tag{II.4.7}$$

а если исключить из этих же равенств $L_{n+2}^{(k+1)}$, то найдем

$$n (1+\alpha^2) L_{n+2}^{(k)} - 2n\alpha L_{n+2}^{(k-1)} + (2k - n) L_n^{(k)} = 0. \tag{II.4.8}$$

Заменим здесь k на $k+1$. Тогда

$$n (1+\alpha^2) L_{n+2}^{(k+1)} - 2n\alpha L_{n+2}^{(k)} + (2k - n + 2) L_n^{(k+1)} = 0. \tag{II.4.9}$$

Исключим из (II.4.7) и (II.4.9) $L_{n+2}^{(k+1)}$. Это даст

$$n (1-\alpha^2)^2 L_{n+2}^{(k)} = (n + 2k)(1+\alpha^2) L_n^{(k)} - 2\alpha (2k - n + 2) L_n^{(k+1)}.$$

Заменяя, наконец, в этом равенстве $L_n^{(k+1)}$ его выражением из (II.4.3), получим следующую формулу:

$$n(1-\alpha^2)^2 L_{n+2}^{(k)} = (n-2k)(1+\alpha^2) L_n^{(k)} + \\ + 2\alpha(2k+n-2) L_n^{(k-1)}, \quad \text{(II.4.10)}$$

которая позволяет вычислять $L_{n+2}^{(k)}$, если известны $L_n^{(k)}$ и $L_n^{(k-1)}$.

Таким образом, совокупность формул (II.4.3) и (II.4.10) дает возможность находить любое число коэффициентов Лапласа, когда известны значения коэффициентов $L_1^{(0)}$ и $L_1^{(0)}$.

§ II.5. Формула для производной $L_n^{(k)}$ по α

Возьмем равенство

$$[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_n^{(k)} z^k$$

и продифференцируем его по α. Это даст

$$-\frac{n}{2}[2\alpha-(z+z^{-1})][1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]^{-\frac{n+2}{2}} = \\ = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha} z^k,$$

или

$$-\frac{n}{2}[2\alpha-(z+z^{-1})]\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_{n+2}^{(k)} z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha} z^k.$$

Приравняем в обеих частях этого равенства коэффициенты при z^k. Тогда получим

$$\frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha} = -n\alpha L_{n+2}^{(k)} + \frac{n}{2}\left[L_{n+2}^{(k-1)} + L_{n+2}^{(k+1)}\right]. \quad \text{(II.5.1)}$$

Но из формул (II.4.7) и (II.4.8) имеем

$$2n\alpha L_{n+2}^{(k+1)} = n(1+\alpha^2) L_{n+2}^{(k)} - (2k+n) L_n^{(k)},$$
$$2n\alpha L_{n+2}^{(k-1)} = n(1+\alpha^2) L_{n+2}^{(k)} + (2k-n) L_n^{(k)}.$$

С помощью этих равенств формула (II.5.1) принимает такой вид:

$$2\alpha\frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha} = n(1-\alpha^2) L_{n+2}^{(k)} - nL_n^{(k)}. \quad \text{(II.5.2)}$$

Подставляя сюда (II.4.10), окончательно найдем следующую формулу:

$$\frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha} = \frac{n\alpha - k(\alpha + \alpha^{-1})}{1-\alpha^2} L_n^{(k)} + \frac{2k+n-2}{1-\alpha^2} L_n^{(k-1)}. \quad \text{(II.5.3)}$$

При $k=0$ и $k=1$ эта формула дает

$$\frac{dL_n^{(0)}}{d\alpha} = \frac{n\alpha}{1-\alpha^2} L_n^{(0)} + \frac{n-2}{1-\alpha^2} L_n^{(1)}, \quad \text{(II.5.4)}$$

$$\alpha \frac{dL_n^{(1)}}{d\alpha} = \frac{(n-1)\alpha^2 - 1}{1-\alpha^2} L_n^{(1)} + \frac{n\alpha}{1-\alpha^2} L_n^{(0)}. \quad \text{(II.5.5)}$$

Выведем еще несколько соотношений, которые потребуются в будущем. Из равенства (II.5.1) имеем

$$\frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha} - \frac{dL^{(k-2)}}{d\alpha} = n\alpha\left[L_{n+2}^{(k-2)} - L_{n+2}^{(k)}\right] -$$
$$- \frac{n}{2}\left[L_{n+2}^{(k-3)} - L_{n+2}^{(k-1)}\right] - \frac{n}{2}\left[L_{n+2}^{(k-1)} - L_{n+2}^{(k+1)}\right].$$

Выражая здесь коэффициенты $L_{n+2}^{(i)}$ через $L_n^{(i)}$ посредством формулы (II.4.5), получим

$$\alpha\left[\frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha} - \frac{dL_n^{(k-2)}}{d\alpha}\right] = (2-k) L_n^{(k-2)} +$$
$$+ 2(k-1)\alpha L_n^{(k-1)} - kL_n^{(k)}. \quad \text{(II.5.6)}$$

Равенства (II.5.4)—(II.5.6) позволяют последовательно найти производные

$$\frac{dL_n^{(0)}}{d\alpha}, \frac{dL_n^{(1)}}{d\alpha}, \frac{dL_n^{(2)}}{d\alpha}, \ldots,$$

если уже вычислены значения $L_n^{(0)}$, $L_n^{(1)}$, $L_n^{(2)}$ и т. д.

При $n=1$ равенства (II.5.4) и (II.5.5) принимают вид

$$(1-\alpha^2)\frac{dL^{(0)}}{d\alpha} = \alpha L_1^{(0)} - L_1^{(1)}, \quad \text{(II.5.7)}$$

$$\alpha(1-\alpha^2)\frac{dL_1^{(1)}}{d\alpha} = \alpha L_1^{(0)} - L_1^{(1)}, \quad \text{(II.5.8)}$$

так что

$$\frac{dL_1^{(0)}}{d\alpha} = \alpha \frac{dL_1^{(1)}}{d\alpha}. \quad \text{(II.5.9)}$$

Эти формулы могут служить для вычисления производных $L_1^{(0)}$ и $L_1^{(1)}$ по α.

§ II.6. Дифференциальное уравнение для коэффициентов Лапласа

Напишем равенство

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}L_n^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}L_n^{(k)}\cos k\varphi \tag{II.6.1}$$

и продифференцируем его по α. Тогда получим

$$\frac{n(\cos\varphi-\alpha)}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{n+2}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{dL_n^{(0)}}{d\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha}\cos k\varphi.$$

Если продифференцировать это равенство по α, то найдем такое уравнение:

$$\frac{n(n+2)(\cos\varphi-\alpha)^2-n(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha)^{\frac{n+4}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2L_n^{(0)}}{d\alpha^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2L_n^{(k)}}{d\alpha^2}\cos k\varphi,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d^2L_n^{(0)}}{d\alpha^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2L_n^{(k)}}{d\alpha^2}\cos k\varphi=$$

$$=\frac{n(n+1)}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{n+2}{2}}}-\frac{n(n+2)\sin^2\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{n+4}{2}}}. \tag{II.6.2}$$

Заменим теперь в формуле (II.6.1) n на $n+2$. Тогда получим следующее равенство:

$$\frac{1}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{n+2}{2}}}=\frac{1}{2}L_{n+2}^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}L_{n+2}^{(k)}\cos k\varphi, \tag{II.6.3}$$

дифференцируя которое по φ, находим

$$\frac{(n+2)\alpha\sin\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{n+4}{2}}}=\sum_{k=1}^{\infty}kL_{n+2}^{(k)}\sin k\varphi. \tag{II.6.4}$$

Умножим обе части (II.6.4) на $\sin\varphi$ и выразим произведение $\sin k\varphi \sin\varphi$ через разность косинусов $(k-1)\varphi$ и $(k+1)\varphi$. Это даст

$$\frac{(n+2)\,\alpha \sin^2\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{n+4}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} kL_{n+2}^{(k)}\left[\cos(k-1)\varphi - \cos(k+1)\varphi\right] = \frac{1}{2} L_{n+2}^{(1)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)\,L_{n+2}^{(k+1)} - (k-1)\,L_{n+2}^{(k-1)}\right]\cos k\varphi. \quad \text{(II.6.5)}$$

Подставляя (II.6.3) и (II.6.5) в формулу (II.6.2), имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d^2L_n^{(0)}}{d\alpha^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2L_n^{(k)}}{d\alpha^2}\cos k\varphi =$$

$$= \frac{n\,(n+1)}{2} L_{n+2}^{(0)} + n\,(n+1)\sum_{k=1}^{\infty} L_{n+2}^{(k)}\cos k\varphi -$$

$$- \frac{n}{2\alpha} L_{n+2}^{(1)} - \frac{n}{2\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)\,L_{n+2}^{(k+1)} - (k-1)\,L_{n+2}^{(k-1)}\right]\cos k\varphi.$$

$$\text{(II.6.6)}$$

Приравняем в левой и правой частях этого равенства коэффициенты при $\cos k\varphi$. Тогда будем иметь

$$\frac{d^2L_n^{(k)}}{d\alpha^2} = n\,(n+1)\,L_{n+2}^{(k)} - \frac{n}{2\alpha}\left[(k+1)\,L_{n+2}^{(k+1)} - (k-1)\,L_{n+2}^{(k-1)}\right].$$

$$\text{(II.6.7)}$$

Приравнивая свободные члены, найдем

$$\frac{d^2L_n^{(0)}}{d\alpha^2} = n(n+1)\,L_{n+2}^{(0)} - \frac{n}{\alpha} L_{n+2}^{(1)}. \quad \text{(II.6.8)}$$

С другой стороны, это же самое уравнение мы получим, если положим в (II.6.7) $k=0$. Таким образом, уравнение (II.6.7) имеет силу при любых k, включая и $k=0$.

Преобразуем это уравнение. Из (II.4.5) и (II.5.1) имеем

$$L_{n+2}^{(k+1)} - L_{n+2}^{(k-1)} = -\frac{2k}{n\alpha} L_n^{(k)},$$

$$L_{n+2}^{(k+1)} + L_{n+2}^{(k-1)} = \frac{2}{n} \frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha} - 2\alpha L_{n+2}^{(k)}.$$

Подставляя эти равенства в (II.6.7), получаем

$$\frac{d^2 L_n^{(k)}}{d\alpha^2} = n^2 L_{n+2}^{(k)} + \frac{k^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha}.$$

Заменим здесь $L_{n+2}^{(k)}$ его выражением из (II.5.2). Тогда окончательно получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\alpha^2 (1-\alpha^2) \frac{d^2 L_n^{(k)}}{d\alpha^2} + [\alpha (1-\alpha^2) - 2n\alpha^3] \frac{dL_n^{(k)}}{d\alpha} - \\ - [n^2\alpha^2 + k^2 (1-\alpha^2)] L_n^{(k)} = 0. \quad \text{(II.6.9)}$$

Таким образом, мы показали, что коэффициент Лапласа удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

Полученное уравнение может служить для вычисления вторых производных от коэффициентов Лапласа, если известны значения самих коэффициентов и их первых производных. В случае $n=1$, $k=0$ и $n=1$, $k=1$ это уравнение дает

$$\alpha (1-\alpha^2) \frac{d^2 L_1^{(0)}}{d\alpha^2} = (3\alpha^2 - 1) \frac{dL_1^{(0)}}{d\alpha} + \alpha L_1^{(0)}, \quad \text{(II.6.10)}$$

$$\alpha^2 (1-\alpha^2) \frac{d^2 L_1^{(1)}}{d\alpha^2} = \alpha (3\alpha^2 - 1) \frac{dL_1^{(1)}}{d\alpha} + L_1^{(1)}. \quad \text{(II.6.11)}$$

Эти формулы понадобятся нам в дальнейшем.

§ II.7. Вычисление коэффициентов Лапласа и их производных

Основная задача, в которой находят применение коэффициенты Лапласа,— это проблема разложения возмущающей функции в теории движения планет. Как мы увидим в § VI.20, решение этой проблемы требует знания не только значений самих коэффициентов $L_n^{(k)}(\alpha)$ и их первых и вторых производных, но и значений производных высших порядков. Поэтому выведем сначала ряд формул, позволяющих находить производную $L_n^{(k)}$ по α любого порядка.

Прежде всего, продифференцируем равенство (II.5.8) m раз по α. Это нам даст такое соотношение:

$$\alpha(1-\alpha^2)\frac{d^{m+1}L_1^{(1)}}{d\alpha^{m+1}}+m(1-3\alpha^2)\frac{d^mL_1^{(1)}}{d\alpha^m}-$$

$$-3m(m-1)\alpha\frac{d^{m-1}L_1^{(1)}}{d\alpha^{m-1}}-m(m-1)(m-2)\frac{d^{m-2}L_1^{(1)}}{d\alpha^{m-2}}=$$

$$=\alpha\frac{d^mL_1^{(0)}}{d\alpha^m}+m\frac{d^{m-1}L_1^{(0)}}{d\alpha^{m-1}}-\frac{d^mL_1^{(1)}}{d\alpha^m}. \quad \text{(II.7.1)}$$

С другой стороны, дифференцирование равенства (2.5.9) дает

$$\frac{d^mL_1^{(0)}}{d\alpha^m}=\alpha\frac{d^mL_1^{(1)}}{d\alpha^m}+(m-1)\frac{d^{m-1}L_1^{(1)}}{d\alpha^{m-1}},$$

$$\frac{d^{m-1}L_1^{(0)}}{d\alpha^{m-1}}=\alpha\frac{d^{m-1}L_1^{(1)}}{d\alpha^{m-1}}+(m-2)\frac{d^{m-2}L_1^{(1)}}{d\alpha^{m-2}}. \quad \text{(II.7.2)}$$

Исключая при помощи этих формул из (II.7.1) производные от $L_1^{(0)}$, получим

$$\alpha(1-\alpha^2)\frac{d^{m+1}L_1^{(1)}}{d\alpha^{m+1}}=[(3m+1)\alpha^2-m-1]\frac{d^mL_1^{(1)}}{d\alpha^m}+$$

$$+(3m^2-m-1)\alpha\frac{d^{m-1}L_1^{(1)}}{d\alpha^{m-1}}+m^2(m-2)\frac{d^{m-2}L_1^{(1)}}{d\alpha^{m-2}}.$$

(II.7.3)

Полагая здесь $m=2, 3, \ldots$, мы, зная величины

$$L_1^{(1)},\ \frac{dL_1^{(1)}}{d\alpha},\ \frac{d^2L_1^{(1)}}{d\alpha^2},$$

можем последовательно найти значения третьей, четвертой и т. д. производных от $L_1^{(1)}$.

Значения производных от $L_1^{(0)}$ можно вычислить по формуле (II.7.2).

Продифференцируем теперь $m-1$ раз по α равенство (II.5.6). Тогда найдем

$$\alpha\left[\frac{d^m L_n^{(k)}}{d\alpha^m}-\frac{d^m L_n^{(k-2)}}{d\alpha^m}\right]=$$
$$=(1-m-k)\frac{d^{m-1}L_n^{(k)}}{d\alpha^{m-1}}+2(k-1)\alpha\frac{d^{m-1}L^{(k-1)}}{d\alpha^{m-1}}+$$
$$+(1+m-k)\frac{d^{m-1}L^{(k-2)}}{d\alpha^{m-1}}+2(k-1)(m-1)\frac{d^{m-2}L_n^{(k-1)}}{d\alpha^{m-2}}. \tag{II.7.4}$$

Эта формула вместе с ранее выведенными формулами позволяют находить производную любого порядка от $L_n^{(k)}$ по α.

Приведем, наконец, сводку формул, позволяющих вычислять коэффициенты Лапласа и их производные. Если ввести обозначения

$$D_\alpha^m=\frac{d^m}{d\alpha^m},\quad \beta=\frac{1}{1-\alpha^2},$$

то она может быть записана в виде

$$L_n^{(k)}=\frac{2k-2}{2k-n}(\alpha+\alpha^{-1})L_n^{(k-1)}-\frac{2k+n-4}{2k-n}L_n^{(k-2)},$$

$$L_{n+2}^{(k)}=\frac{\beta^2}{n}\{(n-2k)(1+\alpha^2)L_n^{(k)}+2\alpha(2k+n-2)L_n^{(k-1)}\},$$

$$D_\alpha L_n^{(k)}=\beta\{[n\alpha-k(\alpha+\alpha^{-1})]L_n^{(k)}+(2k+n-2)L_n^{(k-1)}\},$$

$$D_\alpha^2 L_n^{(k)}=\frac{\beta}{\alpha^2}\{[2n\alpha^3-\alpha(1-\alpha^2)]D_\alpha L_n^{(k)}+[n^2\alpha^2+ \\ +k^2(1-\alpha^2)]L_n^{(k)}\},$$

$$D_\alpha^{m+1}L_1^{(1)}=\frac{\beta}{\alpha}\{[(3m+1)\alpha^2-m-1]D_\alpha^m L_1^{(1)}+ \\ +(3m^2-m-1)\alpha D_\alpha^{m-1}L_1^{(1)}+m^2(m-2)D_\alpha^{m-2}L_1^{(1)}\},$$

$$D_\alpha^m L_1^{(0)}=\alpha D_\alpha^m L_1^{(1)}+(m-1)D_\alpha^{m-1}L_1^{(1)},$$

$$D_\alpha^m L_n^{(k)}=D_\alpha^m L_n^{(k-2)}+\frac{1}{\alpha}\{(1-m-k)D_\alpha^{m-1}L_n^{(k)}+ \\ +2(k-1)\alpha D_\alpha^{m-1}L_n^{(k-1)}+(1+m-k)D_\alpha^{m-1}L_n^{(k-2)}+ \\ +2(k-1)(m-1)D_\alpha^{m-2}L_n^{(k-1)}\}.$$

Исходными данными здесь являются значения $L_1^{(0)}$ и $L_1^{(1)}$, которые, как мы видели, могут быть найдены из таблиц полных эллиптических интегралов первого и второго рода, или с помощью рядов, расположенных по возрастающим степеням α.

§ II.8. Разложение возмущающей функции в случае плоских круговых орбит

Пусть планета P движется под действием притяжения Солнца S и некоторой другой планеты P'. Тогда, согласно § 1.33, возмущающая функция R задачи определится формулой

$$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right),$$

где

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H}.$$

Здесь f — постоянная притяжения, m' — масса возмущающей планеты P'; r и r' — гелиоцентрические радиус-векторы планет P и P', а H — угол между этими радиус-векторами.

Будем предполагать, что невозмущенные движения планет происходят по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости. Тогда

$$r = a, \quad r' = a', \quad H = l - l',$$

где a и a' — полуоси орбит планет, а l и l' — их средние долготы, отсчитываемые от оси Sx. Поэтому

$$\Delta = \sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(l - l')}$$

и, следовательно,

$$R = \frac{fm'}{a'}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos(l - l') + \alpha^2}} - \alpha\cos(l - l')\right\}, \tag{II.8.1}$$

где

$$\alpha = \frac{a}{a'}. \tag{II.8.2}$$

Мы предполагаем, что $a < a'$ и, тем самым, $\alpha < 1$.

Разложим функцию R в ряд по косинусам углов, кратных $l-l'$. На основании § II.1 имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos(l-l')+\alpha^2}} = \frac{1}{2}L_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} L_1^{(k)}\cos k(l-l'). \tag{II.8.3}$$

Подставляя это разложение в формулу (II.8.1), находим

$$R = \frac{fm'}{a'}\left\{\frac{1}{2}L_1^{(0)} + \left(L_1^{(1)}-\alpha\right)\cos(l-l') + \sum_{k=2}^{\infty} L_1^{(k)}\cos k(l-l')\right\}. \tag{II.8.4}$$

Здесь коэффициенты Лапласа $L_1^{(k)}$ являются функциями параметра α. Если воспользоваться явными выражениями для $L_1^{(k)}$, которые легко получаются из формул (II.2.4) и (II.2.5), то с точностью до α^7 включительно будем иметь

$$\begin{aligned}R = \frac{fm'}{a'}\Big\{&1 + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{9}{64}\alpha^4 + \frac{25}{256}\alpha^6 + \\ &+ \left(\frac{3}{16}\alpha^3 + \frac{15}{128}\alpha^5 + \frac{165}{2048}\alpha^7\right)\cos(l-l') + \\ &+ \left(\frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{5}{16}\alpha^4 + \frac{105}{512}\alpha^6\right)\cos 2(l-l') + \\ &+ \left(\frac{5}{8}\alpha^3 + \frac{35}{128}\alpha^5 + \frac{189}{1024}\alpha^7\right)\cos 3(l-l') + \\ &+ \left(\frac{35}{64}\alpha^4 + \frac{63}{256}\alpha^6\right)\cos 4(l-l') + \\ &+ \left(\frac{63}{128}\alpha^5 + \frac{231}{1024}\alpha^7\right)\cos 5(l-l') + \\ &+ \frac{231}{512}\alpha^6\cos 6(l-l') + \frac{429}{1024}\alpha^7\cos 7(l-l')\Big\},\end{aligned}$$

где α определяется формулой (II.8.2).

§ II.9. Разложение возмущающей функции в пространственном случае

Будем предполагать, что орбиты двух планет являются круговыми, но лежат в разных плоскостях, наклоненных друг к другу под некоторым углом I. Возмущающая функция R в этом случае будет иметь вид

$$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\alpha \cos H}{a'}\right), \tag{II.9.1}$$

где

$$\Delta = \sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos H}. \tag{II.9.2}$$

Здесь, как и в § II.8 f — постоянная притяжения, m' — масса возмущающей планеты, a и a' — большие полуоси соответственно возмущаемой и возмущающей планет, α определяется формулой (II.8.2), а H — угол между радиус-векторами планет.

Рассмотрим теперь рис. 8, на котором изображены проекции орбит планет на небесную сферу, а точками P

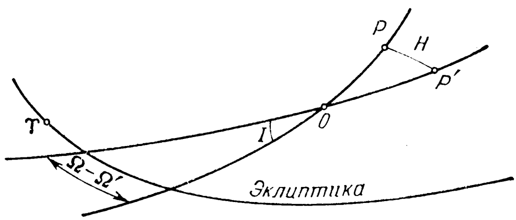


Рис. 8. Проекции орбит планет на небесную сферу

и P' отмечены проекции их положений в момент времени t. В случае круговых орбит мы имеем

$$OP = l, \quad OP' = l',$$

где l и l' — средние долготы планет, отсчитываемые от их общего узла. Из сферического треугольника OPP' находим

$$\cos H = \cos l \cos l' + \sin l \sin l' \cos I. \tag{II.9.3}$$

Формулу (II.9.3) легко преобразовать к виду

$$\cos H = \cos (l - l') - 2 \sin^2 \frac{I}{2} \sin l \sin l'. \tag{II.9.4}$$

Введем, далее, следующие обозначения:

$$H_0 = l - l', \quad \sigma = \sin\frac{I}{2}, \tag{II.9.5}$$

$$\Delta_0 = \sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa'\cos H_0}. \tag{II.9.6}$$

Тогда формулы (II.9.2) и (II.9.4) дадут

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0}\left\{1 + \frac{4\sigma^2 aa'}{\Delta_0^2}\sin l \sin l'\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{II.9.7}$$

Предполагая наклон I малой величиной, разложим $\frac{1}{\Delta}$ в ряд по возрастающим степеням σ. Формула (II.9.7) даст

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} - 2\sigma^2\frac{aa'}{\Delta_0^3}\sin l \sin l' &+ \\ + 6\sigma^4\frac{a^2a'^2}{\Delta_0^5}\sin^2 l \sin^2 l' &+ \\ + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot &\end{aligned} \tag{II.9.8}$$

Теперь уже нетрудно получить разложение $\frac{1}{\Delta}$ в ряд Фурье. Прежде всего, из (II.9.6) имеем

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{a'}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos H_0 + \alpha^2}}. \tag{II.9.9}$$

Поэтому на основании § II.1

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{2a'}\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_1^{(k)}\cos kH_0, \tag{II.9.10}$$

$$\frac{2aa'}{\Delta_0^3} = \frac{\alpha}{a'}\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_3^{(k)}\cos kH_0, \tag{II.9.11}$$

$$\frac{6aa'}{\Delta_0^5} = 3\frac{\alpha^2}{a'}\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_5^{(k)}\cos kH_0. \tag{II.9.12}$$

Далее, находим

$$\sin l \sin l' = \frac{1}{2}[\cos(l - l') - \cos(l + l')], \tag{II.9.13}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 l \sin^2 l' = \frac{1}{8}[2 - 2\cos l - 2\cos l' &+ \\ + \cos(2l - 2l') + \cos(2l + 2l')]. &\end{aligned} \tag{II.9.14}$$

Подставляя (II.9.10) — (II.9.14) в формулу (II.9.9) и учитывая (II.9.5), мы после простых преобразований получим

$$\frac{a'}{\Delta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cos(kl - kl') +$$

$$+ \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \cos[(k-1)l - (k+1)l'] +$$

$$+ \sigma^4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cos[(k-2)l - (k+2)l'] +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \text{(II.9.15)}$$

где коэффициенты A_k, B_k и C_k определяются формулами

$$A_k = \frac{1}{2} L_1^{(k)} - \frac{1}{4} \sigma^2 \alpha \left[L_3^{(k+1)} + L_3^{(k-1)}\right] +$$

$$+ \frac{3}{16} \sigma^4 \alpha^2 \left[4L_5^{(k)} + L_5^{(k+2)} + L_5^{(k-2)}\right],$$

$$B_k = \frac{1}{2} \alpha L_3^{(k)} - \frac{3}{4} \sigma^2 \alpha \left[L_5^{(k+1)} + L_5^{(k-1)}\right],$$

$$C_k = \frac{3}{8} \alpha^2 L_5^{(k)}.$$

Получим теперь выражение для второго слагаемого правой части формулы (II.9.1). Используя (II.9.4) и (II.9.5), находим:

$$\cos H = \cos(l - l') - 2\sin^2\frac{I}{2} \sin l \sin l' =$$

$$= \cos(l - l') - \sigma^2 \cos(l - l') + \sigma^2 \cos(l + l'). \quad \text{(II.9.16)}$$

Подставим равенства (II.9.15) и (II.9.16) в (II.9.1). Тогда получим следующее разложение для возмущающей функции R:

$$R = \frac{fm'}{a'} \Big\{ \sum A_k \cos(kl - kl') +$$

$$+ \sigma^2 \sum B_k \cos[(k-1)l - (k+1)l'] +$$

$$+ \sigma^4 \sum C_k \cos[(k-1)l - (k+1)l'] +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot -$$

$$- \alpha [(1 - \sigma^2)\cos(l - l') + \sigma^2 \cos(l + l')] \Big\}. \quad \text{(II.9.17)}$$

Напомним, что в найденном здесь разложении для возмущающей функции мы ограничились членами до σ^4 включительно.

§ II.10. Замечания

Коэффициенты Лапласа были введены Лапласом, когда он рассматривал проблему разложения возмущающей функции в теории движения больших планет. Основные свойства этих коэффициентов приводятся в его «Трактате по небесной механике» [1]. Подробное изложение теории коэффициентов Лапласа дается в «Трактате по небесной механике» Тиссерана [2] и в «Лекциях по небесной механике» Пуанкаре [3].

Так как коэффициенты Лапласа и их производные являются функциями одной независимой переменной α, то они могут быть удобно табулированы. Первые таблицы для этих функций составлены Леверье [4] и Ранклем [5]. Последние дают логарифмы значений

$$\frac{d^m L_n^{(k)}}{d\alpha^m}$$

для $n = 1, 3, 5$; $k = 0, 1, \ldots, 9$; $m = 0, 1, \ldots, 5$ и для $0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}750$.

Имеются таблицы Брауна и Брауэра [6], которые дают по аргументу $p = \dfrac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$ логарифмы значений $G_{n/2}^{(k)}$, определяемых формулой

$$L_n^{(k)} = \alpha^k (1-\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} G_{n/2}^{(k)}$$

для $0 \leqslant p \leqslant 2{,}50$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}845)$.

Простой алгоритм вычисления коэффициентов Лапласа и их производных для $0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}9$ составлен и реализован на ЭВМ И. А. Герасимовым [7].

Глава III

МНОГОЧЛЕНЫ ГЕГЕНБАУЭРА И МНОГОЧЛЕНЫ ТИССЕРАНА

§ III.1. Определение многочленов Гегенбауэра

Рассмотрим следующую функцию $F(x)$ действительного переменного x:

$$F(x)=(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-m}. \qquad \text{(III.1.1)}$$

Будем предполагать, что $-1 \leqslant x \leqslant +1$, α — действительное число, заключенное в пределах от 0 до 1, а m — положительное число.

Разложим функцию $F(x)$ в ряд по возрастающим степеням α. Подобно тому, как это было сделано в случае многочленов Лежандра, сначала представим ее в виде

$$F(x)=\left[1-2\alpha\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-m}.$$

Тогда по формуле бинома Ньютона находим

$$F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{m(m+1)\ldots(m+i-1)}{1\cdot 2\ldots i}(2\alpha)^i\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^i. \qquad \text{(III.1.2)}$$

Но

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^i=\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\frac{i(i-1)\ldots(i-j+1)}{1\cdot 2\ldots j}x^{i-j}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^j. \qquad \text{(III.1.3)}$$

Поэтому, подставляя (III.1.3) в (III.1.2), получим

$$F(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j 2^{i-j}\frac{m(m+1)\ldots(m+i-1)}{j!\,(i-j)!}\alpha^{i+j}x^{i-j}. \qquad \text{(III.1,4)}$$

Полагая здесь $i+j=n$, будем иметь

$$F(x)=\sum_n\sum_j(-1)^j 2^{n-2j}\frac{m(m+1)\ldots(m+n-j-1)}{j!\,(n-2j)!}\alpha^n x^{n-2j}. \tag{III.1.5}$$

Легко видеть, что в этой сумме значок n пробегает все целые значения от 0 до ∞, а значок j принимает целые значения от 0 до h, где h равно $\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$ смотря по тому, четное или нечетное n. Поэтому разложение (III.1.5) можно записать в следующем виде:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n G_n^{(m)}(x), \tag{III.1.6}$$

где

$$G_n^{(m)}(x)=\sum_{j=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^j 2^{n-2j}\frac{m(m+1)\ldots(m+n-j-1)}{j!\,(n-2j)!}x^{n-2j}, \tag{III.1.7}$$

или

$$G_n^{(m)}(x)=$$
$$=2^n\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}\left[x^n-\frac{1}{2^2}\frac{n(n-1)}{1\,(m+n-1)}x^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^4}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\,(m+n-1)(m+n-2)}x^{n-4}-\ldots\right]. \tag{III.1.8}$$

Таким образом, $G_n^{(m)}(x)$ есть многочлен относительно x степени n. Он называется многочленом Гегенбауэра.

Итак, мы определили многочлен Гегенбауэра как коэффициент при α^n в разложении функции (III.1.1) в ряд по степеням α. Другими словами,

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n G_n^{(m)}(x). \tag{III.1.9}$$

Функция, стоящая в левой части этого равенства, называется производящей функцией многочленов Гегенбауэра. Абсолютную сходимость ряда (III.1.9) при $|\alpha|<1$ можно доказать методом, использованным в § I.1.

Рассмотрим частные случаи. Сравнение формулы (III.1.9) с (I.1.9) показывает, что

$$G_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра.

При $m=1$ равенство (III.1.8) дает

$$G_n^{(1)}(x) = \\ = 2^n \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2n} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot 2n(2n-2)} x^{n-4} - \dots\right]. \tag{III.1.10}$$

Из формулы (III.1.7) следует, что

$$G_n^{(m)}(-x) = (-1)^n G_n^{(m)}(x),$$

т. е. многочлен Гегенбауэра является четной функцией, если n — четное, и нечетной, если n — нечетное число.

§ III.2. Рекуррентные соотношения

Возьмем формулу

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n G_n^{(m)}(x) \tag{III.2.1}$$

и продифференцируем ее по α. Это даст

$$2m(x - \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} G_n^{(m)}(x), \tag{III.2.2}$$

или

$$2m(x-\alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-m} = (1 - 2\alpha x + \alpha^2) \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} G_n^{(m)}(x),$$

или

$$2m(x-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n G_n^{(m)}(x) = (1 - 2\alpha x + \alpha^2) \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} G_n^{(m)}(x).$$

Приравнивая в левой и правой частях этого равенства члены при α^{n-1}, имеем

$$2mxG_{n-1}^{(m)}(x) - 2mG_{n-2}^{(m)}(x) = \\ = nG_n^{(m)}(x) - 2x(n-1)G_{n-1}^{(m)}(x) + (n-2)G_{n-2}^{(m)}(x).$$

Отсюда находим

$$nG_n^{(m)}(x) - 2(n+m-1)\,xG_{n-1}^{(m)}(x) + \\ + (n+2m-2)\,G_{n-2}^{(m)}(x) = 0. \qquad (III.2.3)$$

Это равенство позволяет последовательно определять многочлены $G_2^{(m)}(x)$, $G_3^{(m)}(x)$ и т. д., если известны значения многочленов $G_0^{(m)}(x)$ и $G_1^{(m)}(x)$.

Выведем соотношения, которые связывают многочлены Гегенбауэра с различными значками m. Из формулы (III.2.2) следует такое равенство:

$$2m(x-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n G_n^{(m+1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1}G_n^{(m)}(x).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при α^{n-1}, получаем

$$nG_n^{(m)}(x) = 2m\left[xG_{n-1}^{(m+1)}(x) - G_{n-2}^{(m+1)}(x)\right]. \qquad (III.2.4)$$

Заменим в формуле (III.2.3) m на $m+1$. Тогда

$$nG_n^{(m+1)}(x) - 2(n+m)\,xG_{n-1}^{(m+1)}(x) + (n+2m)\,G_{n-2}^{(m+1)}(x) = 0. \qquad (III.2.5)$$

Если из равенств (III.2.4) и (III.2.5) исключить $G_{n-2}^{(m+1)}(x)$, то будем иметь

$$\frac{n+2m}{2m}G_n^{(m)}(x) = G_n^{(m+1)}(x) - xG_{n-1}^{(m+1)}(x). \qquad (III.2.6)$$

Заменим здесь n на $n-1$. Это даст

$$(n+2m-1)\,G_{n-1}^{(m)}(x) = 2m\left[G_{n-1}^{(m+1)}(x) - xG_{n-2}^{(m+1)}(x)\right].$$

Исключая из этого равенства и равенства (III.2.4) $G_{n-2}^{(m+1)}(x)$, получим

$$2m(1-x^2)\,G_{n-1}^{(m+1)}(x) = (n+2m-1)\,G_{n-1}^{(m)}(x) - nxG_n^{(m)}(x), \qquad (III.2.7)$$

или, если заменить n на $n+1$,

$$2mG_n^{(m+1)}(x) = \frac{1}{1-x^2}\left[(n+2m)\,G_n^{(m)}(x) - (n+1)\,xG_{n+1}^{(m)}(x)\right]. \qquad (III.2.8)$$

Формулы (III.2.6) и (III.2.8) связывают, таким образом, многочлены Гегенбауэра с соседними верхними значками.

Получим теперь формулы для производной многочлена Гегенбауэра по x. С этой целью продифференцируем равенство (III.2.1) по x. Тогда

$$2m\alpha\left(1-2\alpha x+\alpha^2\right)^{-m-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\frac{dG_n^{(m)}(x)}{dx},$$

или

$$2m\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n G_n^{(m+1)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\frac{dG_n^{(m)}(x)}{dx}.$$

Если в правой и левой частях этого равенства приравнять друг другу коэффициенты при α^n, то

$$\frac{dG_n^{(m)}(x)}{dx}=2mG_{n-1}^{(m+1)}(x). \qquad \text{(III.2.9)}$$

Подставляя сюда (III.2.7), получим

$$\frac{dG_n^{(m)}(x)}{dx}=\frac{1}{1-x^2}\left[(n+2m-1)\,G_{n-1}^{(m)}(x)-nxG_n^{(m)}(x)\right]. \qquad \text{(III.2.10)}$$

Формулы (III.2.9) и (III.2.10) выражают производные многочленов $G_n^{(m)}(x)$ по x через многочлены Гегенбауэра.

§ III.3. Дифференциальное уравнение Гегенбауэра

Покажем, что многочлен $G_n^{(m)}(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2G_n^{(m)}}{dx^2}-(2m+1)\,x\frac{dG_n^{(m)}}{dx}+n\,(n+2m)\,G_n^{(m)}=0. \qquad \text{(III.3.1)}$$

Для этого возьмем функцию

$$F=\left(1-2\alpha x+\alpha^2\right)^{-m}$$

и вычислим ее частные производные по x и α первого и второго порядков. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2m\alpha(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-m-1},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=4m(m+1)\alpha^2(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-m-2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}=2m(x-\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-m-1},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}=-2m(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-m-1}+$$
$$+4m(m+1)(x-\alpha)^2(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-m-2}.$$

Умножая эти равенства соответственно на

$$-(2m+1)x,\quad 1-x^2,\quad (2m+1)\alpha,\quad \alpha^2$$

и складывая, после простых вычислений получаем такое уравнение в частных производных:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-(2m+1)x\frac{\partial F}{\partial x}+(2m+1)\alpha\frac{\partial F}{\partial \alpha}+\alpha^2\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}=0. \tag{III.3.2}$$

Но, согласно (III.1.9),

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n G_n^{(m)}(x).$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\frac{dG_n^{(m)}(x)}{dx},\qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^{n-1}G_n^{(m)}(x),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\frac{d^2G^{(m)}(x)}{dx^2},\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-\alpha)\alpha^{n-2}G_n^{(m)}(x).$$

Подставляя эти равенства в (III.3.2), немедленно получаем уравнение (III.3.1), которое называется уравнением Гегенбауэра. При $m=\frac{1}{2}$ уравнение Гегенбауэра переходит в уравнение Лежандра.

§ III.4. Связь многочленов Гегенбауэра с многочленами и присоединенными функциями Лежандра

Согласно (I.1.9), имеем

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра порядка n.

Продифференцируем это равенство m раз по x. Это даст

$$(2m-1)!!\alpha^m(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\frac{d^mP_n(x)}{dx^m},$$

или

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-m-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n-m}}{(2m-1)!!}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}. \quad \text{(III.4.1)}$$

Здесь, как и раньше,

$$(2m-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1).$$

С другой стороны,

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-m-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n G_n^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}(x). \quad \text{(III.4.2)}$$

Приравнивая правые части равенств (III.4.1) и (III.4.2) друг другу, находим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n G_n^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n-m}}{(2m-1)!!}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}.$$

Отсюда

$$G_{n-m}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}(x)=\frac{1}{(2m-1)!!}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}, \quad \text{(III.4.3)}$$

или

$$G_n^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}(x)=\frac{1}{(2m-1)!!}\frac{d^mP_{n+m}(x)}{dx^m}. \quad \text{(III.4.4)}$$

Таким образом, если m — целое положительное число, то многочлен Гегенбауэра $G_n^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}(x)$ связан с многочленом Лежандра $P_{n+m}(x)$ формулой (III.4.4).

Поскольку, далее,

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

то легко устанавливается следующая зависимость между многочленами Гегенбауэра и присоединенными функциями Лежандра:

$$G_n^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}}{(2m-1)!!} P_{n+m}^{(m)}(x). \qquad \text{(III.4.5)}$$

Эта формула, как и (III.4.4), имеет место, если m есть целое положительное число.

§ III.5. Многочлены $G_n^{(1)}(x)$

Рассмотрим подробнее многочлены Гегенбауэра при $m=1$. Эти многочлены определяются формулой

$$\frac{1}{1-2\alpha x+\alpha^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n G_n^{(1)}(x). \qquad \text{(III.5.1)}$$

Согласно (III.1.8), развернутое выражение для $G_n^{(1)}(x)$ имеет вид

$$G_n^{(1)}(x) =$$
$$= 2^n \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2\cdot 2n} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot 2n(2n-2)} x^{n-4} - \ldots\right]. \qquad \text{(III.5.2)}$$

Из этой формулы для $n=0, 1, 2, 3, 4$ находим

$$G_0^{(1)}(x) = 1,$$
$$G_1^{(1)}(x) = 2x,$$
$$G_2^{(1)}(x) = 4x^2 - 1,$$
$$G_3^{(1)}(x) = 8x^3 - 4x,$$
$$G_4^{(1)}(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1.$$

Пусть теперь

$$x = \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right).$$

Тогда
$$1-2\alpha x+\alpha^2=(1-\alpha e^{i\varphi})(1-\alpha e^{-i\varphi})$$
и, далее,
$$\frac{1}{1-2\alpha x+\alpha^2}=\frac{1}{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}\left[\frac{e^{i\varphi}}{1-\alpha e^{i\varphi}}-\frac{e^{-i\varphi}}{1-\alpha e^{-i\varphi}}\right].$$
Но
$$\frac{1}{1-\alpha e^{i\varphi}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{in\varphi},$$
$$\frac{1}{1-\alpha e^{-i\varphi}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-in\varphi},$$
$$e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}=2i\sin\varphi.$$
Поэтому
$$\frac{1}{1-2\alpha x+\alpha^2}=\frac{1}{2i\sin\varphi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{i(n+1)\varphi}-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-i(n+1)\varphi}\right\},$$
или
$$\frac{1}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}=\frac{1}{\sin\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sin(n+1)\varphi.$$

Сопоставляя эту формулу с (III.5.1), имеем
$$G_n^{(1)}(\cos\varphi)=\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}. \tag{III.5.3}$$
Поскольку
$$2\cos n\varphi=\frac{\sin(n+1)\varphi-\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi},$$
находим формулу
$$2\cos n\varphi=G_n^{(1)}(\cos\varphi)-G_{n-2}^{(1)}(\cos\varphi), \tag{III.5.4}$$
которая нам потребуется в будущем.

§ III.6. Определение многочленов Тиссерана

Пусть
$$x=\mu\cos\xi+\nu\cos\eta, \tag{III.6.1}$$
где
$$|\mu|\leqslant 1,\quad |\nu|\leqslant 1,\quad \mu+\nu=1,$$
а ξ и η — вещественные переменные.

Рассмотрим, далее, выражение

$$G_n^{(m)}(x) = G_n^{(m)}(\mu \cos \xi + \nu \cos \eta) \qquad (\text{III}.6.2)$$

и разложим его по степеням μ и ν.

Прежде всего, имеем

$$x^k = (\mu \cos \xi + \nu \cos \eta)^k = \sum_{p',q'} C_{p',q'} \mu^{p'} \nu^{q'} \cos^{p'} \xi \cos^{q'} \eta, \qquad (\text{III}.6.3)$$

причем $p' + q' = k$. Выразим, далее, $\cos^{p'} \xi$ через

$$\cos p'\xi, \quad \cos(p'-2)\xi, \quad \cos(p'-4)\xi, \ \ldots$$

и соответственно $\cos q'\eta$. Тогда (III.6.3) преобразуется к виду

$$x^k = \sum_{p,q} D_{p,q} \cos p\xi \cos q\eta, \qquad (\text{III}.6.4)$$

где коэффициент $D_{p,q}$ есть однородный относительно μ и ν многочлен k-й степени. Так как здесь

$$p = p', \quad p'-2, \quad p'-4, \ \ldots; \quad q = q', \quad q'-2, \quad q'-4, \ \ldots,$$

то этот многочлен имеет вид

$$D_{p,q} = \mu^p \nu^q \Phi(\mu^2, \nu^2),$$

где $\Phi(\mu^2, \nu^2)$ — однородный относительно μ^2 и ν^2 многочлен степени $\dfrac{k-p-q}{2}$.

Подставляя (III.6.4) в (III.6.2), обнаружим, что многочлен Гегенбауэра $G_n(x)$, где x дается формулой (III.6.1), можно представить в виде

$$G_n^{(m)}(x) = T_{0,0}^{(n,m)} + 2\sum_p T_{p,0}^{(n,m)} \cos p\xi + 2\sum_q T_{0,q}^{(n,m)} \cos q\eta + \\ + 4\sum_{p,q} T_{p,q}^{(n,m)} \cos p\xi \cos q\eta. \qquad (\text{III}.6.5)$$

Поскольку $G_n^{(m)}(x)$ есть многочлен n-й степени относительно x, определяемый формулой (III.1.8), то здесь

$$p + q = n, \quad n-2, \quad n-4, \ \ldots$$

Поэтому $T_{p,q}^{(n,m)}$ будет многочленом n-й степени относительно μ и ν, и его можно представить в виде

$$T_{p,q}^{(n,m)} = \mu^p \nu^q \psi(\mu^2, \nu^2),$$

где $\psi(\mu^2, \nu^2)$ — многочлен степени $\frac{n-p-q}{2}$ относительно μ^2 и ν^2. Но так как $\mu = 1 - \nu$, то $T_{p,q}^{(n,m)}$ можно представить в виде произведения $\mu^p \nu^q$ на многочлен относительно ν степени $n - p - q$.

Если перейти к экспонентам, то формула (III.6.5) примет вид

$$G_n^{(m)}(x) = \sum_{p,q} T_{p,q}^{(n,m)} \exp[i(p\xi + q\eta)], \qquad \text{(III.6.6)}$$

где значки p и q — целые положительные и отрицательные числа, причем такие, что

$$|p| + |q| = n, \quad n-2, \quad n-4, \ \dots$$

Многочлен $T_{p,q}^{(n,m)}$, определяемый формулой (III.6.6), в которой x дается равенством (III.6.1), будем называть многочленом Тиссерана.

Формула (III.6.6) показывает, что

$$T_{p,q}^{(n,m)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_n^{(m)}(\mu \cos \xi + \nu \cos \eta) \times$$
$$\times \exp[-i(p\xi + q\eta)]\, d\xi\, d\eta. \qquad \text{(III.6.7)}$$

Заметим, что поскольку при замене ξ на $-\xi$, или η на $-\eta$ равенство (III.6.5) не изменяется, то

$$T_{-p,q}^{(n,m)} = T_{p,q}^{(n,m)}, \quad T_{p,-q}^{(n,m)} = T_{p,q}^{(n,m)}$$

и, следовательно, можно ограничиться рассмотрением $T_{p,q}^{(n,m)}$ только с неотрицательными p и q.

В последующих параграфах мы подробно изучим многочлены $T_{p,q}^{(n,m)}(\mu, \nu)$ для случая $m = \frac{1}{2}$ и случая $m = 1$, поскольку именно они имеют важные приложения в небесной механике.

§ III.7. Многочлены Тиссерана в случае $m = \frac{1}{2}$

В случае $m = \frac{1}{2}$, согласно § III.1, имеем

$$G_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра. Поэтому в соответствии с (III.6.6) многочлен Тиссерана $T_{p,q}^{(n,1/2)}(\mu, \nu)$ определится формулой

$$P_n(\mu\cos\xi + \nu\cos\eta) = \sum_{p,q} T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)}(\mu, \nu) \exp i(p\xi + q\eta). \tag{III.7.1}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\mu = \cos^2\frac{I}{2}, \quad \nu = \sin^2\frac{I}{2}$$

и, следовательно,

$$x = \cos^2\frac{I}{2}\cos\xi + \sin^2\frac{I}{2}\cos\eta.$$

Сначала выведем дифференциальное уравнение для $T_{p,q}^{(n,1/2)}$, рассматриваемого как функция переменной I. Прежде всего, находим

$$\frac{\partial P_n}{\partial I} = \frac{1}{2}\sin I(\cos\eta - \cos\xi)\frac{dP_n}{dx},$$

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial I^2} = \frac{1}{2}\cos I(\cos\eta - \cos\xi)\frac{dP_n}{dx} + \frac{1}{4}\sin^2 I(\cos\eta - \cos\xi)^2\frac{d^2P_n}{dx^2},$$

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial \xi n} = -\mathrm{ccs}^2\frac{I}{2}\cos\xi\frac{dP_n}{dx} + \cos^4\frac{I}{2}\sin^2\xi\frac{d^2P_n}{dx^2},$$

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial \eta^2} = -\sin^2\frac{I}{2}\cos\eta\frac{dP_n}{dx} + \sin^4\frac{I}{2}\sin^2\eta\frac{d^2P_n}{dx^2}.$$

С помощью этих формул и уравнения Лежандра

$$(1 - x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0$$

легко устанавливаем справедливость следующего равенства:

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial I^2} + \operatorname{ctg} I\frac{\partial P_n}{\partial I} + \frac{1}{\cos^2\frac{I}{2}}\frac{\partial^2 P_n}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\sin^2\frac{I}{2}}\frac{\partial^2 P_n}{\partial\eta^2} + n(n+1)P_n = 0, \tag{III.7.2}$$

которое позволяет вывести искомое дифференциальное уравнение.

Действительно, дифференцируя (III.7.1) и подставляя соответствующие производные в (III.7.2), а затем приравнивая нулю коэффициенты при $\exp i(p\xi + q\eta)$, немедленно получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)}}{dI^2} + \operatorname{ctg} I \frac{dT_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)}}{dI} + \left[n(n+1) - \frac{p^2}{\mu} - \frac{q^2}{\nu}\right] T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} = 0. \tag{III.7.3}$$

Таким образом, многочлен Тиссерана $T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)}\left(\cos^2\frac{I}{2}, \sin^2\frac{I}{2}\right)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Преобразуем это уравнение. Для этого положим

$$T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} = \mu^p \nu^q R_{p,q}^{(n)} \tag{III.7.4}$$

и примем $\nu = \sin^2\frac{I}{2}$ в качестве независимой переменной. Тогда (III.7.3) преобразуется к виду

$$(\nu^2 - \nu)\frac{d^2 R_{p,q}^{(n)}}{d\nu^2} + [2(p+q+1)\nu - 2q - 1]\frac{dR_{p,q}^{(n)}}{d\nu} + \\ + (p+q-n)(n+p+q+1) R_{p,q}^{(n)} = 0. \tag{III.7.5}$$

Если теперь ввести обозначения

$$\alpha = p + q - n, \quad \beta = n + p + q + 1, \quad \gamma = 2q + 1, \tag{III.7.6}$$

то (III.7.5) запишется так:

$$(\nu^2 - \nu)\frac{d^2 R_{p,q}^{(n)}}{d\nu^2} + [(\alpha + \beta + 1)\nu - \gamma]\frac{dR_{p,q}^{(n)}}{d\nu} + \alpha\beta R_{p,q}^{(n)} = 0. \tag{III.7.7}$$

Полученное уравнение дает возможность довольно просто найти общее выражение для $R_{p,q}^{(n)}(\nu)$, а следовательно, и для $T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)}(I)$. Действительно, если мы будем искать решение уравнения (III.7.7) в виде ряда по возрастающим степеням ν, то найдем (см. § VIII.1 и VIII.2), что

$$R_{p,q}^{(n)} = R_0 F(\alpha, \beta, \gamma, \nu), \qquad (\text{III}.7.8)$$

где

$$F = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1!\,\gamma}\nu + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}\nu^2 + \ldots, \qquad (\text{III}.7.9)$$

а R_0 — постоянная.

Поскольку в данном случае $\alpha = p+q-n$ есть целое отрицательное число, то ряд (III.7.9) обрывается на члене с ν^{n-p-q} и, следовательно, $R_{p,q}^{(n)}$ является многочленом относительно ν степени $n-p-q$. Для $T_{p,q}^{(n,1/2)}$ имеем

$$T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} = R_0 \mu^p \nu^q F(\alpha, \beta, \gamma, \nu), \qquad (\text{III}.7.10)$$

где α, β, γ даются формулами (III.7.6). Остается найти постоянную R_0.

Для нахождения R_0 поступим следующим образом. Сначала вычислим коэффициент при ν^n в (III.7.10), а затем коэффициент при ν^n в левой части (III.7.1). Сопоставляя эти коэффициенты в соответствии с равенством (III.7.1), мы и найдем R_0. Проделаем все необходимые вычисления. Найдем сначала старший член в (III.7.9). Он равен

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha-\alpha-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta-\alpha-1)}{1\cdot 2\ldots(-\alpha)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma-\alpha-1)}\nu^{-\alpha},$$

или

$$(-1)^{n-p-q}\frac{(p+q+n+1)(p+q+n+2)\ldots(2n)}{(2q+1)(2q+2)\ldots(n-p+q)}\nu^{n-p},$$

или, поскольку $n-p-q$ — целое четное число,

$$\frac{(2n)!\,(2q)!}{(n+p+q)!\,(n-p+q)!}\nu^{n-p-q}.$$

Так как старший член в $\mu^p\nu^q = (1-\nu)^p\nu^q$ равен $(-1)^p\nu^{p+q}$, то старший член в (III.7.10) будет

$$(-1)^p R_0 \frac{(2n)!\,(2q)!\,\nu^n}{(n+p+q)!\,(n-p+q)!}.$$

Подставляя этот результат в (III.7.1), мы видим, что коэффициент при ν^n в $P_n(x)$ имеет вид

$$\sum_{p,q}(-1)^p R_0 \frac{(2n)!\,(2q)!}{(n+p+q)!\,(n-p+q)!}\exp i(p\xi + q\eta).$$

Но, согласно (I.1.8),

$$P_n(x) = 2^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \ldots\right]$$

и

$$x = \mu\cos\xi + \nu\cos\eta = \cos\xi + \nu(\cos\eta - \cos\xi).$$

Поэтому коэффициент при ν^n в $P_n(x)$ равен, с другой стороны,

$$2^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(\cos\eta - \cos\xi)^n.$$

Следовательно,

$$2^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(\cos\eta - \cos\xi)^n =$$

$$= \sum_{p,q}(-1)^p R_0 \frac{(2n)!\,(2q)!}{(n+p+q)!\,(n-p+q)!}\exp i(p\xi + q\eta). \quad \text{(III.7.11)}$$

Положим теперь

$$2^n(\cos\eta - \cos\xi)^n = \sum_{p,q} H_{p,q}^{(n)} \exp i(p\xi + q\eta). \quad \text{(III.7.12)}$$

Тогда, имея в виду (III.7.11), получим

$$R_0 = \frac{(n+p+q)!\,(n-p+q)!}{(2n)!\,(2q)!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^p H_{p,q}^{(n)},$$

или

$$R_0 = (-1)^p H_{p,q}^{(n)} \frac{(n+p+q)!\,(n-p+q)!}{2^{2n}(2q)!\,(n!)^2}. \quad \text{(III.7.13)}$$

Надо, следовательно, найти $H_{p,q}^{(n)}$. Имеем

$$2^n(\cos\eta - \cos\xi)^n = \left(2\sin\frac{\xi+\eta}{2}\right)^n\left(2\sin\frac{\xi-\eta}{2}\right)^n =$$

$$= (-1)^n\left\{\exp\left[\frac{i(\xi+\eta)}{2}\right] - \exp\left[-\frac{i(\xi+n)}{2}\right]\right\}^n \times$$

$$\times\left\{\exp\left[\frac{i(\xi-\eta)}{2}\right] - \exp\left[-\frac{i(\xi-\eta)}{2}\right]\right\}^n =$$

$$= (-1)^n\sum_{\rho}(-1)^{\rho}\frac{n!}{\rho!\,(n-\rho)!}\exp\left[i(n-2\rho)\frac{\xi+\eta}{2}\right]\times$$

$$\times\sum_{\rho'}(-1)^{\rho'}\frac{n!}{\rho!\,(n-\rho')!}\exp\left[i(n-2\rho')\frac{\xi-\eta}{2}\right] =$$

$$= \sum_{\rho,\rho'}\frac{(-1)^{n+\rho+\rho'}(n!)^2}{\rho!\,\rho'!\,(n-\rho)!\,(n-\rho')!}\times$$

$$\times\exp[i(n-\rho-\rho')\xi]\exp[i(\rho'-\rho)\eta].$$

Положим

$$n-\rho-\rho'=p, \quad \rho'-\rho=q,$$

или

$$\rho=\frac{n-p-q}{2}, \quad \rho'=\frac{n-p+q}{2}.$$

Тогда получим

$$2^n(\cos\eta-\cos\xi)^n=$$
$$=\frac{(-1)^p(n!)^2}{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}\times$$
$$\times\exp i(p\xi+q\eta).$$

Сопоставляя это равенство с (III.7.12), мы видим, что

$$H_{p,q}^{(n)}=\frac{(-1)^p(n!)^2}{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!} \tag{III.7.14}$$

и, следовательно,

$$R_0=\frac{(n+p+q)!\,(n-p+q)!}{2^{2n}(2q)!\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}. \tag{III.7.15}$$

Равенства (III.7.10), (III.7.6) и (III.7.15) окончательно дают следующую формулу для $T_{p,q}^{(n,1/2)}$:

$$T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)}=$$
$$=\frac{(n+p+q)!\,(n-p+q)!}{2^{2n}(2q)!\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}\times$$
$$\times\left(\cos^2\frac{I}{2}\right)^p\left(\sin^2\frac{I}{2}\right)^q F\left(p+q-n,\, n+p+q+1, 2q+1, \sin^2\frac{I}{2}\right), \tag{III.7.16}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, \nu)$ определяется равенством (III.7.9).

Выпишем явные выражения многочленов $T_{p,q}^{(n,1/2)}$ для нескольких первых значков n, p и q. Имеем

$$T_{1,0}^{\left(1,\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\mu, \qquad T_{1,0}^{\left(3,\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{16}\mu(5\mu^2+10\nu^2-4),$$

$$T_{0,1}^{\left(1,\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\nu, \qquad T_{0,1}^{\left(3,\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{16}\nu(5\nu^2+10\mu^2-4),$$

$$T_{0,0}^{\left(2,\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}(3\mu^2+3\nu^2-1), \qquad T_{3,0}^{\left(3,\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{16}\mu^3,$$

$$T_{2,0}^{\left(2,\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{8}\mu^2, \qquad T_{0,3}^{\left(3,\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{16}\nu^3,$$

$$T_{0,2}^{\left(2,\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{8}\nu^2, \qquad T_{2,1}^{\left(3,\frac{1}{2}\right)} = \frac{15}{16}\mu^2\nu,$$

$$T_{1,1}^{\left(2,\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4}\mu\nu, \qquad T_{1,2}^{\left(3,\frac{1}{2}\right)} = \frac{15}{16}\mu\nu^2.$$

Рассмотрим один частный случай. Пусть $q=n-p$. Тогда, поскольку (см. (III.7.9))

$$F(0,\beta,\gamma,\nu)=1,$$

формула (III.7.16) дает

$$T_{p,n-p}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!\,p!\,(n-p)!}\mu^p\nu^{n-p}. \qquad \text{(III.7.17)}$$

Заменяя здесь $n-p$ на q, имеем

$$T_{n-q,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!\,q!\,(n-q)!}\mu^{n-q}\nu^{q}.$$

Отметим еще одно свойство, а именно

$$T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)}(\mu,\nu) = T_{q,p}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)}(\nu,\mu), \qquad \text{(III.7.18)}$$

которое является следствием того, что равенство (III.7.1) не изменяется при замене величин p, μ, ξ соответственно на q, ν, η и величин q, ν, η на p, μ, ξ.

§ III.8. Многочлены Тиссерана в случае $m = 1$

Согласно (III.6.6), многочлены $T_{p,q}^{(n,1)}(\mu, \nu)$ определяются формулой

$$G_n^{(1)}(\mu\cos\xi + \nu\cos\eta) = \\ = \sum_{p,q} T_{p,q}^{(n,1)}(\mu, \nu)\exp i(p\xi + q\eta), \qquad \text{(III.8.1)}$$

где, как и раньше,

$$\mu = \cos^2\frac{I}{2}, \quad \nu = \sin^2\frac{I}{2},$$

а $G_n^{(1)}$ — многочлен Гегенбауэра.

Выполним, во-первых, одно преобразование*). Положим

$$x = a\cos\psi\cos\xi + b\sin\psi\cos\eta,$$

где

$$a = \cos\psi', \quad b = \sin\psi',$$

так что при $\psi' = \psi = \frac{I}{2}$ имеем

$$x = \mu\cos\xi + \nu\cos\eta. \qquad \text{(III.8.2)}$$

Тогда на основании результатов § III.6 общий член в $T_{p,q}^{(n,1)}$ будет иметь вид

$$Aa^{p+2r}b^{q+2s}\cos^{p+2r}\psi\sin^{q+2s}\psi = \\ = Aa^{p+2r}b^{q+2s}(1-\sin^2\psi)^r\sin^{2s}\psi\cos^p\psi\sin^q\psi, \qquad \text{(III.8.3)}$$

где A — постоянный коэффициент, а p, q, r, s — целые неотрицательные числа.

Имея в виду это, положим

$$T_{p,q}^{(n,1)} = \cos^p\psi\sin^q\psi\, Q_{p,q}^{(n)}(\psi), \qquad \text{(III.8.4)}$$

где $Q_{p,q}^{(n)}$ — многочлен относительно $\sin^2\psi$ степени $\frac{n-p-q}{2}$. Тогда равенство (III.8.1) преобразуется к виду

$$G_n^{(1)}(x) = \sum_{p,q} Q_{p,q}^{(n)}(\psi)\cos^p\psi\sin^q\psi\exp i(p\xi + q\eta). \qquad \text{(III.8.5)}$$

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $Q_{p,q}^{(n)}(\psi)$. Для этого сначала покажем,

*) Это преобразование называется преобразованием Стильтьеса.

что $G_n^{(1)}$, рассматриваемая как функция ψ, ξ и η, удовлетворяет такому дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 G_n^{(1)}}{\partial\psi^2} + 2\operatorname{ctg} 2\psi \frac{\partial G_n^{(1)}}{\partial\psi} + \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\partial^2 G_n^{(1)}}{\partial\xi^2} + \\ + \frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2 G_n^{(1)}}{\partial\eta^2} + n(n+2)G_n^{(1)} = 0. \quad \text{(III.8.6)}$$

Действительно, имеем

$$\frac{\partial G_n^{(1)}}{\partial\psi} = (-a\sin\psi\cos\xi + b\cos\psi\cos\eta)\frac{dG_n^{(1)}}{dx},$$

$$\frac{\partial^2 G_n^{(1)}}{\partial\psi^2} = (-a\cos\psi\cos\xi - b\sin\psi\cos\eta)\frac{dG_n^{(1)}}{dx} + \\ + (-a\sin\psi\cos\xi + b\cos\psi\cos\eta)^2\frac{d^2G_n^{(1)}}{dx^2},$$

$$\frac{\partial^2 G_n^{(1)}}{\partial\xi^2} = -a\cos\psi\cos\xi\frac{dG_n^{(1)}}{dx} + a^2\cos^2\psi\sin^2\xi\frac{d^2G_n^{(1)}}{dx^2},$$

$$\frac{\partial^2 G_n^{(1)}}{\partial\eta^2} = -b\sin\psi\cos\eta\frac{dG_n^{(1)}}{dx} + b^2\sin^2\psi\sin^2\eta\frac{d^2G_n^{(1)}}{dx^2}.$$

Подставляя эти производные в (III.8.6) и учитывая, что

$$a^2 + b^2 = 1,$$

находим

$$n(n+2)G_n^{(1)} + [1 - (a\cos\psi\cos\xi + b\sin\psi\cos\eta)^2]\frac{d^2G_n^{(1)}}{dx^2} - \\ - 3(a\cos\psi\cos\xi + b\sin\psi\cos\eta)\frac{dG_n^{(1)}}{dx} = 0,$$

или

$$(1-x^2)\frac{d^2G_n^{(1)}}{dx^2} - 3x\frac{dG_n^{(1)}}{dx} + n(n+2)G_n^{(1)} = 0,$$

а это — уравнение Гегенбауэра для случая $m = 1$, что и доказывает наше утверждение.

Подставим теперь (III.8.5) в (III.8.6). Тогда немедленно получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2Q_{p,q}^{(n)}}{d\psi^2} + \frac{1}{\sin\psi\cos\psi}[(2q+1)\cos^2\psi - (2p+1)\sin^2\psi]\frac{dQ_{p,q}^{(n)}}{d\psi} + \\ + (n-p-q)(n+p+q+2)Q_{p,q}^{(n)} = 0.$$

Преобразуем это уравнение, вводя новую независимую переменную:

$$z = \sin^2 \psi.$$

В результате будем иметь

$$(z^2 - z) \frac{d^2 Q_{p,q}^{(n)}}{dz^2} + [(\alpha + \beta + 1) z - \gamma] \frac{dQ_{p,q}^{(n)}}{dz} + \alpha\beta Q_{p,q}^{(n)} = 0, \tag{III.8.7}$$

где

$$\alpha = \frac{p+q-n}{2}, \quad \beta = \frac{p+q+n+2}{2}, \quad \gamma = q + 1. \tag{III.8.8}$$

Уравнение (III.8.7) имеет тот же вид, что и уравнение (III.7.7) предыдущего параграфа. Его решение поэтому дается формулой

$$Q_{p,q}^{(n)} = C' F(\alpha, \beta, \gamma, z), \tag{III.8.9}$$

где

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots \tag{III.8.10}$$

а C' не зависит от z, а является функцией a и b, т. е. функцией ψ'.

Таким образом, равенства (III.8.9) и (III.8.4) дают

$$T_{p,q}^{(n,1)} = C' \cos^p \psi \sin^q \psi F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \psi). \tag{III.8.11}$$

Найдем C'. С этой целью заметим, что из формул (III.8.1)—(III.8.3) следует, что $T_{p,q}^{(n,1)}$ не изменяется при замене ψ на ψ'. Поэтому наряду с (3.8.11) можно написать

$$T_{p,q}^{(n,1)} = C \cos^p \psi' \sin^q \psi' F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \psi'), \tag{III.8.12}$$

где C не зависит от ψ', а является функцией ψ. Следовательно,

$$C' \cos^p \psi \sin^q \psi F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \psi) = C \cos^p \psi' \sin^q \psi' F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \psi').$$

Отсюда находим

$$\frac{C'}{\cos^p \psi' \sin^q \psi' F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \psi')} = \frac{C}{\cos^p \psi \sin^q \psi F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \psi)}.$$

Левая часть полученного равенства есть функция только переменной ψ', в то время как правая часть — функция только переменной ψ. Но ψ и ψ' — независимые переменные. Поэтому каждая часть этого равенства равна постоянной. Обозначая эту постоянную через Q_0, имеем

$$C' = Q_0 \cos^p \psi' \sin^q \psi' F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \psi').$$

Формула (III.8.11) теперь дает

$$T_{p,q}^{(n,1)} = Q_0 (\cos\psi \cos\psi')^p (\sin\psi \sin\psi')^q \times \\ \times F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\psi) F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\psi').$$

Полагая здесь $\psi = \psi' = \frac{I}{2}$, получаем

$$T_{p,q}^{(n,1)} = Q_0 \left(\cos^2 \frac{I}{2}\right)^p \left(\sin^2 \frac{I}{2}\right)^q F^2\left(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \frac{I}{2}\right), \tag{III.8.13}$$

где α, β, γ определяются равенствами (III.8.8), а Q_0 — постоянная.

Найдем Q_0. Для этого воспользуемся тем же приемом, что и в случае $m = \frac{1}{2}$. Перепишем (III.8.13) в виде

$$T_{p,q}^{(n,1)} = Q_0 \mu^p \nu^q F^2 (\alpha, \beta, \gamma, \nu)$$

и найдем старший член в $F(\alpha, \beta, \gamma, \nu)$. С помощью (III.8.8) легко получаем, что он равен

$$(-1)^{\frac{n-p-q}{2}} \frac{\left(\frac{p+q+n}{2}+1\right)\left(\frac{p+q+n}{2}+2\right) \ldots n\nu^{\frac{n-p-q}{2}}}{(q+1)(q+2)\ldots\left(\frac{q-p+n}{2}\right)},$$

или

$$(-1)^{\frac{n-p-q}{2}} \frac{n!\, q!\, \nu^{\frac{n-p-q}{2}}}{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)! \left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}.$$

Поэтому старший член в $T_{p,q}^{(n,1)}$ запишется так:

$$Q_0 (-1)^p \mu^p \nu^q \left[\frac{n!\, q!}{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)! \left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}\right]^2 \nu^{n-p-q},$$

а коэффициент при ν^n в разложении $G_n^{(1)}$ будет иметь вид

$$\sum_{p,q}(-1)^p Q_0\left[\frac{n!\,q!}{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}\right]^2 \exp i\,(p\xi+q\eta).$$

Но, с другой стороны, согласно (III.5.2), имеем

$$G_n^{(1)}(x)=2^n\left[x^n-\frac{n\,(n-1)}{2\cdot 2n}\,x^{n-2}+\ldots\right],$$

а x дается равенством

$$x=\cos\xi+\nu\,(\cos\eta-\cos\xi).$$

Поэтому коэффициент при ν^n в разложении $G_n^{(1)}(x)$ будет равен

$$2^n\,(\cos\eta-\cos\xi)^n,$$

а, как мы уже видели,

$$2^n\,(\cos\eta-\cos\xi)^n=\sum H_{p,q}^{(n)}\exp i\,(p\xi+q\eta),$$

где $H_{p,q}^{(n)}$ определяется формулой (III.7.14).

Отсюда заключаем, что

$$Q_0=(-1)^p H_{p,q}^{(n)}\left[\frac{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}{n!\,q!}\right]^2,$$

или

$$Q_0=\frac{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}{(q!)^2\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!}.$$

Таким образом, окончательно получаем для $T_{p,q}^{(n,1)}$ следующую формулу:

$$T_{p,q}^{(n,1)}=\frac{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}{(q!)^2\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!}\times$$

$$\times\,\mu^p\nu^q F^2\left(\frac{p+q-n}{2},\ \frac{p+q+n+2}{2},\ q+1;\ \nu\right),\qquad\text{(III.8.14)}$$

где $F(\alpha,\beta,\gamma,\nu)$ дается равенством (III.8.11).

Явные выражения многочленов $T_{p,q}^{(n,1)}(\mu,\nu)$ для некоторых первых значков n, p, q приводятся в табл. 2.

Таблица 2

Выражения многочленов $T_{p,\,q}^{(n,\,1)}$ для $n = 1, 2, 3, 4$

n	p	q	$T_{p,\,q}^{(n,\,1)}$	n	p	q	$T_{p,\,q}^{(n,\,1)}$
1	1	0	μ	3	2	1	$3\mu^2\nu$
1	0	1	ν	3	1	2	$3\mu\nu^2$
2	0	0	$(1-2\nu)^2$	4	0	0	$(1-6\nu+6\nu^2)^2$
2	2	0	μ^2	4	2	0	$\mu^2(1-4\nu)^2$
2	0	2	ν^2	4	0	2	$\nu^2(3-4\nu)^2$
2	1	1	$\frac{3}{4}\mu\nu$	4	2	2	$6\mu^2\nu^2$
3	1	0	$\mu(1-3\nu)^2$	4	0	4	ν^2
3	0	1	$\nu(2-3\nu)^2$	4	4	0	$\mu^{?}$
3	3	0	μ^3	4	3	1	$4\mu^3\nu$
3	0	3	ν^3	4	1	3	$4\mu\nu^3$

Отметим еще одну частную формулу, а именно

$$T_{p,n-p}^{(n,1)}(\mu,\nu) = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\,\mu^p\nu^{n-p},$$

которая аналогична (III.7.17) для случая $m = \frac{1}{2}$.

§ III.9. Разложение возмущающей функции в спутниковой задаче трех тел

В § I.33 мы видели, что возмущающая функция в спутниковой задаче трех тел может быть представлена в виде ряда

$$R = \frac{fm'}{r'}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos H), \qquad \text{(III.9.1)}$$

где f — постоянная притяжения, m' — масса возмущающего тела, r и r' — радиус-векторы спутника и возмущающего тела, H — угол между этими радиус-векторами, P_n — многочлен Лежандра. Если за основную координатную плоскость взять плоскость орбиты возмущающего тела, то, согласно (I.33.14), $\cos H$ определится формулой

$$\cos H = \cos^2\frac{I}{2}\cos(u - u' + \Omega) + \sin^2\frac{I}{2}\cos(u + u' - \Omega).$$

Здесь I и Ω — наклон и долгота узла орбиты спутника,

u и u' — аргументы широты спутника и возмущающего тела соответственно.

Воспользуемся теперь результатами § III.7. Имеем

$$P_n(\cos H) = \sum_{p,q} T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} \times$$
$$\times \exp i\,[p(u - u' + \Omega) + q(u + u' - \Omega)], \quad \text{(III.9.2)}$$

где

$$T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} = T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)}\left(\cos^2\frac{I}{2},\ \sin^2\frac{I}{2}\right)$$

есть многочлен Тиссерана, $i = \sqrt{-1}$, а p и q — целые положительные и отрицательные числа.

Формулу (III.9.2) можно записать также в виде

$$P_n(\cos H) = T_{0,0}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} + 2\sum T_{p,0}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} \cos p(u - u' + \Omega) +$$
$$+ 2\sum T_{0,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} \cos q(u + u' - \Omega) +$$
$$+ 4\sum_{p,q} T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} \cos p(u - u' + \Omega)\cos q(u + u' - \Omega). \quad \text{(III.9.3)}$$

Заменяя здесь произведения косинусов суммой косинусов разности и суммы углов и подставляя в (III.9.1), получим

$$R = fm' \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} \left\{ T_{0,0}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} + 2\sum_{p} T_{p,0}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} \cos p(u - u' + \Omega) + \right.$$
$$+ 2\sum_{q} T_{0,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} \cos q(u + u' - \Omega) +$$
$$+ 2\sum_{p,q} T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} \cos[p(u - u' + \Omega) + q(u + u' - \Omega)] +$$
$$\left. + 2\sum_{p,q} T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)} \cos[p(u - u' + \Omega) - q(u + u' - \Omega)] \right\}. \quad \text{(III.9.4)}$$

Заметим, что значки p и q принимают здесь целые положительные значения, такие, что $p + q = n,\ n - 2,\ n - 4, \ldots$ Свободный член $T_{0,0}^{(n,1/2)}$ в этом разложении будет равен нулю, если n — нечетное число, и будет отличным от нуля при четном n.

§ III.10. Разложение возмущающей функции в астероидной задаче трех тел

Рассмотрим теперь планетную задачу трех тел. В § I.33 мы видели, что возмущающая функция задачи определяется формулой

$$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right),$$

в которой f — постоянная притяжения, m' — масса возмущающей планеты, r и r' — радиус-векторы возмущаемой и возмущающей планет, H — угол между этими радиус-векторами, Δ — взаимное расстояние между планетами, так что

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H}.$$

Будем предполагать для определенности, что

$$\alpha = \frac{r}{r'} < 1.$$

Разложим R в ряд по косинусам кратных H. Тогда, как мы видели в § II.1,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos H + \alpha^2}} = \frac{1}{2}L_1^{(0)}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} L_1^{(n)}(\alpha)\cos nH$$

и, следовательно,

$$R = \frac{fm'}{r'}\left\{\frac{1}{2}L_1^{(0)}(\alpha) + [L_1^{(1)}(\alpha) - \alpha]\cos H + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} L_1^{(n)}(\alpha)\cos nH\right\}. \qquad \text{(III.10.1)}$$

Здесь $L_1^{(n)}(\alpha)$ — коэффициент Лапласа.

Согласно (1.33.14),

$$\cos H = \mu\cos\xi + \nu\cos\eta, \qquad \text{(III.10.2)}$$

где

$$\mu = \cos^2\frac{I}{2}, \qquad \nu = \sin^2\frac{I}{2},$$
$$\xi = u - u' + \Omega, \quad \eta = u + u' - \Omega, \qquad \text{(III.10.3)}$$

причем I означает взаимный наклон орбит планет, Ω — долготу узла возмущаемой планеты в плоскости орбиты возмущающей планеты, u и u' — аргументы широты возмущаемой и возмущающей планет соответственно.

Воспользуемся теперь результатами § III.5 и § III.8. На основании (III.5.4) имеем

$$2\cos nH = G_n^{(1)}(\cos H) - G_{n-2}^{(1)}(\cos H),$$

где $G_n^{(1)}$ — многочлен Гегенбауэра. Поэтому

$$R = \frac{fm'}{r'}\left\{\frac{1}{2}L_1^{(0)}(\alpha) + [L_1^{(1)}(\alpha) - \alpha]\cos H + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} L_1^{(n)}(\alpha)\left[G_n^{(1)}(\cos H) - G_{n-2}^{(1)}(\cos H)\right]\right\}. \quad \text{(III.10.4)}$$

Далее, формула (III.8.1) дает

$$G_n^{(1)}(\cos H) = \sum_{p,q} T_{p,q}^{(n,1)} \exp i(p\xi + q\eta), \quad \text{(III.10.5)}$$

где

$$T_{p,q}^{(n,1)} = T_{p,q}^{(n,1)}\left(\cos^2\frac{I}{2}, \sin^2\frac{I}{2}\right)$$

есть многочлен Тиссерана, $i = \sqrt{-1}$, а p и q — целые положительные и отрицательные числа.

Если в формуле (III.10.5) перейти от экспонент к косинусам, то она примет вид

$$G_n^{(1)}(\cos H) = T_{0,0}^{(n,1)} + 2\sum_p T_{p,0}^{(n,1)}\cos p\xi + 2\sum_q T_{0,q}^{(n,1)}\cos q\xi +$$
$$+ 2\sum_{p,q} T_{p,q}^{(n,1)}\cos(p\xi + q\eta) + 2\sum_{p,q} T_{p,q}^{(n,1)}\cos(p\xi - q\eta), \quad \text{(III.10.6)}$$

при этом суммирование производится по всем целым положительным p и q, таким, что $p + q = n,\ n-2,\ n-4, \ldots$

Заметим, что

$$T_{p,q}^{(n,1)} = O\left(\cos^{2p}\frac{I}{2}\sin^{2q}\frac{I}{2}\right)$$

и что $T_{0,0}^{(n,1)}$ равен нулю, если n есть нечетное число.

Формулы (III.10.6), (III.10.4) вместе с (III.10.2) и решают поставленную задачу. Получаемое с помощью этих формул разложение возмущающей функции не связано предположением о малости наклона I. Им можно пользоваться и в случаях больших значений взаимного наклона. А такая ситуация часто встречается в теории движения астероидов.

§ III.11. Замечания

Многочлены $G_n^{(m)}(x)$ ввел в рассмотрение Леопольд Гегенбауэр, чье имя они и носят. Они были изучены им в его работах, опубликованных в 1874, 1877, 1888 и 1893 годах [1]. Гегенбауэр обозначал их через $C_n^{\nu}(x)$. Многочлены Гегенбауэра во многих отношениях близки к многочленам Лежандра $P_n(x)$, обращаясь в них, как мы видели, при $m = 0{,}5$. Поэтому теория многочленов $G_n^{(m)}(x)$ имеет много аналогов с теорией многочленов $P_n(x)$. Так, можно показать, что

$$G_n^{(m)}(x) = A(1-x^2)^{\frac{1}{2}-m} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+m-\frac{1}{2}}, \quad \text{(III.11.1)}$$

где

$$A = \frac{(-2)^n m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!(2n+2m-1)(2n+2m-2)\ldots(n+2m)}. \quad \text{(III.11.2)}$$

Эта формула аналогична формуле Родрига для $P_n(x)$.

С помощью (III.11.1) и уравнения Гегенбауэра (III.3.1) можно установить, что для $G_n^{(m)}(x)$ имеет место такое интегральное представление:

$$G_n^{(m)}(x) = A\frac{n!}{2\pi i}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-m} \int\limits_c \frac{(1-z^2)^{n+m-\frac{1}{2}}}{(z-x)^{n+1}} dz, \quad \text{(III.11.3)}$$

где c есть контур, окружающий точку $z = x$, а A дается формулой (III.11.2). Контурный интеграл (III.11.3) аналогичен интегралу Шлефли для $P_n(x)$.

Другие сведения о многочленах Гегенбауэра можно найти в монографии Н. Я. Виленкина [2].

Теперь несколько слов о многочленах $T_{p,q}^{(n,m)}(x)$. Эти многочлены ввел Тиссеран. Сведения о них изложены в его знаменитом «Трактате по небесной механике» [3]. В своих «Лекциях по небесной механике» [4] Пуанкаре рассматривает многочлены Тиссерана как частный случай гипергеометрических многочленов двух переменных Аппеля. Несколько модифицированные многочлены Тиссерана были рассмотрены в работе Р. А. Ляха [5], который вывел рекуррентные соотношения для этих многочленов и разработал методику их вычисления, отличную от методики Тиссерана. Алгоритм вычисления этих коэффициентов на ЭВМ составлен Б. К. Мартыненко [6].

Глава IV

ФУНКЦИИ НАКЛОНА

§ IV.1. Определение функции наклона $A_{n,m}^{(k)}(I)$

Рассмотрим функцию $\Psi(u)$ действительной переменной u:

$$\Psi(u) = P_n^{(m)}(\sin\varphi)\exp imw, \qquad \text{(IV.1.1)}$$

где $P_n^{(m)}(\sin\varphi)$ — присоединенная функция Лежандра, φ и w определяются формулами

$$\begin{gathered}\sin\varphi = \sin I \sin u,\\ \cos\varphi\cos w = \cos u,\\ \cos\varphi\sin w = \cos I\sin u,\end{gathered} \qquad \text{(IV.1.2)}$$

причем $i = \sqrt{-1}$, а I — вещественный параметр. Будем считать, что

$$0 \leqslant I \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi.$$

Покажем сначала, что функцию $\Psi(u)$ можно разложить в ряд вида

$$\Psi(u) = \sum_{k=-n}^{n} a_{n,m}^{(k)}(I)\exp iku, \qquad \text{(IV.1.3)}$$

где $a_{n,m}^{(k)}(I)$ — некоторые коэффициенты, зависящие от I.

Прежде всего, имеем

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi) = \cos^m\varphi\frac{d^mP_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^m}.$$

Поэтому (IV.1.1) можно записать так:

$$\Psi(u) = X(u)\frac{d^mP_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^m}, \qquad \text{(IV.1.4)}$$

где

$$X(u)=\cos^m\varphi\exp imw.$$

Используя формулу Муавра, находим

$$X(u)=\cos^m\varphi(\cos mw+i\sin mw)=\\ =[\cos\varphi(\cos w+i\sin w)]^m.$$

Подставляя сюда равенства (IV.1.2), получаем

$$X(u)=(\cos u+i\cos I\sin u)^m. \qquad \text{(IV.1.5)}$$

Рассмотрим ближе формулы (IV.1.4) и (IV.1.5). Из формулы (IV.1.5) следует, что $X(u)$ является однородным многочленом относительно $\cos u$ и $\sin u$ степени m, а с помощью первого равенства (IV.1.2) видно, что

$$\frac{d^m P_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^m}$$

есть многочлен относительно $\sin u$ степени $n-m$. Поэтому, если в (IV.1.4) перейти от косинусов и синусов к экспонентам, то мы убеждаемся в том, что функцию $\Psi(u)$ действительно можно представить в виде (IV.1.3).

Как мы увидим в дальнейшем, коэффициенты $a_{n,m}^{(k)}(I)$ являются вещественными при четном $n-m$ и мнимыми при $n-m$ нечетном. Поэтому положим

$$a_{n,m}^{(k)}(I)=i^{n-m}A_{n,m}^{(k)}(I), \qquad \text{(IV.1.6)}$$

так что вместо (IV.1.3) будем иметь

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\exp imw=i^{n-m}\sum_{k=-n}^{n}A_{n,m}^{(k)}(I)\exp iku. \qquad \text{(IV.1.7)}$$

Этой формулой и определяются функции $A_{n,m}^{(k)}(I)$. Поскольку в приложениях под I понимается наклон орбиты спутника, то $A_{n,m}^{(k)}(I)$ называются функциями наклона.

Перепишем теперь равенство (IV.1.7) в следующем виде:

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)(\cos mw+i\sin mw)=\\ =i^{n-m}\sum_{k=-n}^{n}A_{n,m}^{(k)}(I)(\cos ku+i\sin ku).$$

Отсюда находим

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\cos mw = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \sum_{k=-n}^{n} A_{n,m}^{(k)}(I)\cos ku,$$

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\sin mw = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \sum_{k=-n}^{n} A_{n,m}^{(k)}(I)\sin ku,$$

если $n-m$ четное, и

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\cos mw = (-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \sum_{k=-n}^{n} A_{n,m}^{(k)}(I)\sin ku,$$

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\sin mw = (-1)^{\frac{n-m-1}{2}} \sum_{k=-n}^{n} A_{n,m}^{(k)}(I)\cos ku,$$

если $n-m$ нечетное.

В частности, при $m=0$ имеем

$$P_n(\sin\varphi) = i^n \sum_{k=-n}^{n} A_{n,0}^{(k)}(I)\exp iku \qquad \text{(IV.1.8)}$$

и, далее,

$$P_n(\sin\varphi) = (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=-n}^{n} A_{n,0}^{(k)}(I)\cos ku,$$

если n четное, и

$$P_n(\sin\varphi) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{k=-n}^{n} A_{n,0}^{(k)}(I)\sin ku,$$

если n нечетное.

§ IV.2. Общее выражение для функции $A_{n,m}^{(k)}(I)$

Возьмем формулу (I.29.22)

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\exp im(\psi-\Omega) = \sum_{k=-n}^{n} P_{n,m}^{(k)}(I)\,P_n^{(k)}(0)\exp ik(\omega+\psi')$$

и положим в ней

$$\psi' = v, \quad u = v+\omega, \quad w = \psi - \Omega.$$

Тогда она примет вид

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\exp imw = \sum_{k=-n}^{n} P_{n,m}^{(k)}(I)\,P_n^{(k)}(0)\exp iku,$$

где w и φ связаны с u и I формулами (IV.1.2) (рис. 9).

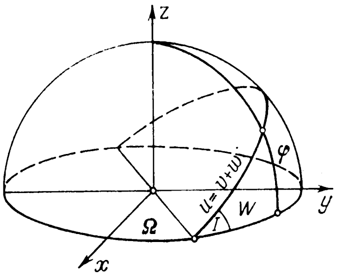


Рис. 9. Основной сферический треугольник

Сравнивая это равенство с (IV.1.7), находим

$$i^{n-m}A_{n,m}^{(k)}(I) = P_{n,m}^{(n)}(I)\,P_n^{(k)}(0). \qquad \text{(IV.2.1)}$$

Здесь $P_{n,m}^{(k)}(I)$, согласно (I.29.20), определяются формулой

$$P_{n,m}^{(k)}(I) = \sum_{r=r_1}^{r_2}(-i)^{2n-m-k-2r}\times$$
$$\times\frac{(n+m)\,(n-k)!}{r!\,(n-m-r)!\,(n-k-r)!\,(m+k+r)!}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{m+k+2r}\times$$
$$\times\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2n-m-k-2r},$$

где

$$r_1 = \max(0, -m-k),$$
$$r_2 = \min(n-m, n-k).$$

Положим в этой формуле

$$r = n-m-j. \qquad \text{(IV.2.2)}$$

Тогда

$$P_{n,m}^{(k)}(I) =$$
$$= \sum_{j=j_1}^{j_2}(-i)^{2j+m-k}\frac{(n+m)!\,(n-k)!}{j!\,(n-m-j)!\,(m-k+j)!\,(n+k-j)!}\times$$
$$\times\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{2n-m+k-2j}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{m-k+2j}, \qquad \text{(IV.2.3)}$$

где

$$j_1 = \max(0,\ k-m), \quad j_2 = \min(n-m,\ n+k).$$

Далее, имеем

$$P_n^{(k)}(0) = 0,$$

если $n-k$ — нечетное число, и

$$P_n^{(k)}(0)=(-1)^{\frac{n-k}{2}}\frac{(n+k)!}{2^n\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}, \qquad (IV.2.4)$$

если $n-k$ четное. Как было отмечено в § I.29, эта формула справедлива как при $k\geqslant 0$, так и при $k<0$.

Формулы (IV.2.1)—(IV.2.4) дают нам теперь для $A_{n,m}^{(k)}(I)$ следующее выражение:

$$A_{n,m}^{(k)}(I)=\frac{(n+m)!}{2^n\left(\frac{n+k}{2}\right)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!}\times$$

$$\times\sum_{j=j_1}^{j_2}(-1)^j\frac{(n+k)!\,(n-k)!}{j!\,(n-m-j)!\,(n+k-j)!\,(m-k+j)!}\times$$

$$\times\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{2n-m+k-2j}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{m-k+2j}. \qquad (IV.2.5)$$

Поскольку

$$C_{n+k}^{j}=\frac{(n+k)!}{j!\,(n+k-j)!},\quad C_{n-k}^{n-m-j}=\frac{(n-k)!}{(n-m-j)!\,(m-k+j)!},$$

то этой формуле можно придать такой вид:

$$A_{n,m}^{(k)}(I)=\frac{(n+m)!}{2^n\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}\times$$

$$\times\sum_{j=j_1}^{j_2}(-1)^j C_{n+k}^{j}C_{n-k}^{n-m-j}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{2n-\nu}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{\nu}, \qquad (IV.2.6)$$

где

$$\nu=m-k+2j. \qquad (IV.2.7)$$

Если в (IV.2.6) заменить k и j соответственно на $-k$ и $n-m-j$, то можно легко заметить, что

$$A_{n,m}^{(-k)}(I)=(-1)^{n-m}A_{n,m}^{(k)}(\pi-I). \qquad (IV.2.8)$$

Это свойство позволяет ограничиться рассмотрением функций $A_{n,m}^{(k)}(I)$ только с неотрицательным значком k.

При $k\geqslant 0$ имеем два случая:

1) $k\leqslant m$: $\quad j_1=0, \qquad j_2=n-m,$

2) $k>m$: $\quad j_1=k-m, \quad j_2=n-m.$

Поэтому, если в (IV.2.6) перейти от индекса суммирования j к r, согласно (IV.2.2), и ввести обозначение

$$\sigma = m + k + 2r, \tag{IV.2.9}$$

для $k \geqslant 0$ будем иметь

$$A_{n,m}^{(k)}(I) = \frac{(-1)^{n-m}(m+n)!}{2^n\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\alpha} (-1)^r C_{n+k}^{n-m-r} C_{n-k}^{r} \left(\cos\frac{I}{2}\right)^{\sigma} \left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2n-\sigma}, \tag{IV.2.10}$$

где

$$\alpha = \min(n-m,\ n-k). \tag{IV.2.11}$$

Поскольку $n-k$ есть четное число, то здесь значок k принимает такие значения:

$$k = n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots,$$

оставаясь всегда неотрицательным числом.

§ IV.3. Другие формулы для $A_{n,m}^{(k)}(I)$. Частные случаи

Введем обозначения

$$c = \cos\frac{I}{2}, \quad s = \sin\frac{I}{2} \tag{IV.3.1}$$

и воспользуемся равенствами

$$C_{n+k}^{n-m-r} = \frac{(n+k)!}{(n-m-r)!\,(k+m+r)!}, \quad C_{n-k}^{r} = \frac{(n-k)!}{r!\,(n-k-r)!}. \tag{IV.3.2}$$

Тогда формула (IV.2.10) запишется так:

$$A_{n,m}^{(k)}(I) = G_{n,m}^{(k)} c^{m+k} s^{2n-m-k} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{(n-m)!\,(n-k)!\,(m+k)!}{(n-m-r)!\,(n-k-r)!\,(m+k+r)!} \left(\frac{c}{s}\right)^{2r}, \tag{IV.3.3}$$

где

$$G_{n,m}^{(k)} = \frac{(-1)^{n-m}(n+m)!\,(n+k)!}{2^n (n-m)!\,(m+k)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}, \tag{IV.3.4}$$

а α определяется равенством (IV.2.11).

Рассмотрим частные случаи. Пусть $m=n$. Тогда $\alpha=0$ и формула (IV.2.10) дает

$$A_{n,n}^{(k)}(I)=\frac{(2n)!}{2^n\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{n+k}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{n-k}, \tag{IV.3.5}$$

или

$$A_{n,n}^{(k)}(I)=\frac{(2n)!}{2^{2n}\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}\sin^n I\operatorname{ctg}^k\frac{I}{2}. \tag{IV.3.6}$$

Пусть $k=n$. Тогда $\alpha=0$ и из формулы (IV.2.10) находим

$$A_{n,m}^{(n)}(I)=\frac{(-1)^{n-m}(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{n+m}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{n-m}, \tag{IV.3.7}$$

или

$$A_{n,m}^{(n)}(I)=\frac{(-1)^{n-m}(2n)!}{2^{2n}n!\,(n-m)!}\sin^n I\operatorname{ctg}^m\frac{I}{2}, \tag{IV.3.8}$$

Если $k=m=n$, то

$$A_{n,n}^{(n)}(I)=\frac{(2n)!}{2^n n!}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{2n}, \tag{IV.3.9}$$

или

$$A_{n,n}^{(n)}(I)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1+\cos I)^n. \tag{IV.3.10}$$

Найдем теперь значения функции $A_{n,m}^{(k)}(I)$ для $I=0$ и $I=\pi$. С этой целью вычислим минимальные значения показателей $2n-\sigma$ и σ в формуле (IV.2.10). При $k>m$ имеем $\alpha=n-k$ и, следовательно,

$$\min(2n-\sigma)=k-m.$$

Когда $k<m$, то $\alpha=n-m$ и

$$\min(2n-\sigma)=m-k.$$

Поэтому, если $k\neq m$, то $\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2n-\sigma}$ при $I=0$ обращается в нуль и имеем

$$A_{n,m}^{(k)}(0)=0\quad(k\neq m). \tag{IV.3.11}$$

Если $k = m$, то из (IV.2.10) следует, что

$$A_{n,m}^{(m)}(0) = \frac{(n+m)!}{2^n \left(\frac{n-m}{2}\right)! \left(\frac{n+m}{2}\right)!}. \qquad \text{(IV.3.12)}$$

В частности,

$$A_{n,0}^{(0)}(0) = \frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}!\right)^2}. \qquad \text{(IV.3.13)}$$

Для того чтобы найти значение функции $A_{n,m}^{(k)}(I)$ при $I = \pi$, заметим, что наименьшая степень $\cos\frac{I}{2}$ в формуле (IV.2.10) равна $m + k$. Поэтому если $m + k \neq 0$, то $A_{n,m}^{(k)}(\pi) = 0$. Таким образом,

$$A_{n,m}^{(k)}(\pi) = 0 \quad (m > 0, \; k > 0). \qquad \text{(IV.3.14)}$$

Если же $k = 0$ и $m = 0$, то формула (IV.2.10) дает

$$A_{n,0}^{(0)}(\pi) = \frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}!\right)^2}. \qquad \text{(IV.3.15)}$$

Выражение функций $A_{n,m}^{(k)}(I)$ через гипергеометрическую функцию будет дано в § VIII.15.

§ IV.4. Функции $A_n^{(k)}(I)$. Связь с присоединенными функциями Лежандра

Рассмотрим подробнее случай $m = 0$. В этом частном случае, если ввести обозначение

$$A_n^{(k)}(I) = A_{n,0}^{(k)}(I),$$

формулы (IV.2.10) и (IV.2.11) дают

$$A_n^{(k)}(I) = \frac{(-1)^n n!}{2^n \left(\frac{n-k}{2}\right)! \left(\frac{n+k}{2}\right)!} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r C_{n+k}^{n-r} C_{n-k}^{r} \left(\cos\frac{I}{2}\right)^{k+2r} \left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2n-k-2r}. \qquad \text{(IV.4.1)}$$

Как увидим далее, функции $A_n^{(k)}(I)$ имеют важные практические приложения. Рассмотрим их подробнее. Прежде всего, выведем еще одну формулу для $A_n^{(k)}(I)$.

Для этого воспользуемся теоремой сложения для многочленов Лежандра. Согласно (I.22.2), имеем

$$P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + \\ + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(\cos\theta)P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\omega.$$

Положим в этой формуле

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta' = I, \quad \omega = u - \frac{\pi}{2}.$$

Тогда получим

$$P_n(\sin I\sin u) = P_n(0)P_n(\cos I) + \\ + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(0)P_n^{(k)}(\cos I)\cos k\left(u - \frac{\pi}{2}\right). \quad \text{(IV.4.2)}$$

Используя равенство

$$2\cos k\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \exp iku \exp\left(-\frac{ik\pi}{2}\right) + \exp(-iku)\exp\frac{ik\pi}{2},$$

формулу (IV.4.2) можно записать в виде

$$P_n(\sin I\sin u) = P_n(0)P_n(\cos I) + \\ + \sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(0)P_n^{(k)}(\cos I)\exp\left(-\frac{ik\pi}{2}\right)\exp iku + \\ + \sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(0)P_n^{(k)}(\cos I)\exp\frac{ik\pi}{2}\exp(-iku). \quad \text{(IV.4.3)}$$

Но

$$\exp\frac{ik\pi}{2} = i^k, \quad \exp\left(-\frac{ik\pi}{2}\right) = (-i)^k.$$

Поэтому, сравнивая (IV.4.3) с (IV.1.8) при условии (IV.1.2), находим

$$A_n^{(0)}(I) = i^{-n}P_n(0)P_n(\cos I),$$

$$A_n^{(k)}(I) = (-1)^k i^{k-n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(0)P_n^{(k)}(\cos I),$$

$$A_n^{(-k)}(I) = i^{k-n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(0)P_n^{(k)}(\cos I).$$

Поскольку $n-k$ должно быть четным числом, то

$$A_n^{(k)}(I) = (-1)^{\frac{n+k}{2}} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(0)\, P_n^{(k)}(\cos I) \qquad (k \geqslant 0) \tag{IV.4.4}$$

и, далее,

$$A_n^{(-k)}(I) = (-1)^k A_n^{(k)}(I), \tag{IV.4.5}$$

или

$$A_n^{(-k)}(I) = (-1)^n A_n^{(k)}(I). \tag{IV.4.6}$$

Таким образом, можно ограничиться рассмотрением функций $A_n^{(k)}(I)$ с неотрицательными значками k. Используя (IV.2.4), окончательно получаем для $A_n^{(k)}(I)$ следующую формулу:

$$A_n^{(k)}(I) = \frac{(-1)^n (n-k)!}{2^n \left(\frac{n-k}{2}\right)! \left(\frac{n+k}{2}\right)!} P_n^{(k)}(\cos I). \tag{IV.4.7}$$

Здесь $k = n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots$ Полученная формула и дает нам связь функции $A_n^{(k)}(I)$ с присоединенной функцией Лежандра $P_n^{(k)}(\cos I)$.

Формуле (IV.4.7) можно придать и такой вид:

$$A_n^{(k)}(I) = \frac{(-1)^n (n-k)!}{2^n \left(\frac{n-k}{2}\right)! \left(\frac{n-k}{2}\right)!} \sin^k I \, \frac{d^k P_n(\cos I)}{d(\cos I)^k}.$$

Отсюда при $k > 0$ на границах области $0 \leqslant I \leqslant \pi$ имеем

$$A_n^{(k)}(0) = 0, \quad A_n^{(k)}(\pi) = 0.$$

Для $I = \frac{\pi}{2}$ при $k \geqslant 0$ из (IV.4.4) находим

$$A_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n+k}{2}} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \left[P_n^{(k)}(0)\right]^2,$$

или

$$A_n^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n+k}{2}} \frac{(n-k)!\,(n+k)!}{2^{2n}\left[\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!\right]^2}.$$

Если $k = 0$, то

$$A_n^{(0)}(I) = (-1)^n \frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}!\right)^2} P_n(\cos I).$$

Отсюда, учитывая, что n должно быть четным числом, имеем

$$A_n^{(0)}(0) = \frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}!\right)^2}, \quad A_n^{(0)}(\pi) = \frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}!\right)^2},$$

что совпадает с результатами § IV.3.

Умножим теперь (IV.4.2) на $\cos k\left(u - \frac{\pi}{2}\right)$ и проинтегрируем по u в пределах от 0 до 2π. Тогда

$$\frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(0)\, P_n^{(k)}(\cos I) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\sin I \sin u) \cos k\left(u - \frac{\pi}{2}\right) du.$$

Поскольку

$$|P_n(\sin I \sin u)| \leqslant 1,$$

то

$$\left| \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(0)\, P_n^{(k)}(\cos I) \right| \leqslant 1.$$

Сопоставляя этот результат с (IV.4.4), находим следующую оценку для $A_n^{(k)}(I)$:

$$|A_n^{(k)}(I)| \leqslant 1.$$

Выражение функции $A_n^{(k)}(I)$ через гипергеометрическую функцию дается в § VIII.15.

§ IV.5. Вычисление функций наклона и их производных. Дифференциальное уравнение для $A_{n,m}^{(k)}(I)$

Положим

$$\mathcal{A}_{n,m}^{(k)}(I) = c^{m+k} s^{2n-m-k} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\alpha} \frac{(-1)^j (n-m)!\,(n-k)!\,(m+k)!}{j!\,(n-m-j)!\,(n-k-j)!\,(m+k+j)!} \left(\frac{c}{s}\right)^{2j}, \qquad \text{(IV.5.1)}$$

где

$$c = \cos\frac{I}{2}, \quad s = \sin\frac{I}{2},$$

$$\alpha = \min(n - m,\ n - k),$$

так что в соответствии с (IV.3.3)

$$A_{n,m}^{(k)}(I) = G_{n,m}^{(k)} \hat{A}_{n,m}^{(k)}. \qquad \text{(IV.5.2)}$$

Коэффициент $G_{n,m}^{(k)}$ дается формулой

$$G_{n,m}^{(k)} = \frac{(-1)^{n-m}(n+m)!\,(n+k)!}{2^n\,(n-m)!\,(m+k)!\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}, \qquad \text{(IV.5.3)}$$

если $n - k$ четное, и

$$G_{n,m}^{(k)} = 0,$$

если $n - k$ нечетное.

Рассмотрим подробнее вопрос о вычислении функций $\hat{A}_{n,m}^{(k)}(I)$. Прежде всего, как будет показано в § VIII.15, для них имеются следующие представления через гипергеометрические многочлены:

$$\hat{A}_{n,m}^{(k)}(I) = c^{m+k} s^{m-k} F(m - n,\ n + m + 1,\ m + k + 1;\ c^2),$$

если $k \leqslant m$, и

$$\hat{A}_{n,m}^{(k)}(I) = c^{k+m} s^{k-m} F(k - n,\ n + k + 1,\ m + k + 1;\ c^2),$$

если $k \geqslant m$. Таким образом, имея программу для вычисления гипергеометрической функции, мы по этим формулам сразу находим $\hat{A}_{n,m}^{(k)}(I)$.

В то же время, как будет показано в § VIII.17, для $\hat{A}_{n,m}^{(k)}(I)$ имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}(m + k + 1)(m + k + 2)\, cs\hat{A}_{n,m}^{(k)} &= \\ = (m + k + 2)[m + k + 1 - 2(m + 1)c^2]\, &\hat{A}_{n,m+1}^{(k)} + \\ + (m - n + 1)(n + m + 2)\, &cs\hat{A}_{n,m+2}^{(k)},\end{aligned} \qquad \text{(IV.5.4)}$$

если $k \leqslant m$, и

$$\begin{aligned}(m + k + 1)(m + k + 2)\, cs\hat{A}_{n,m}^{(k)} &= \\ = (m + k + 2)[m + k + 1 - 2(k + 1)c^2]\, &\hat{A}_{n,m}^{(k+1)} + \\ + (k - n + 1)(n + k + 2)\, &cs\hat{A}_{n,m}^{(k+2)},\end{aligned} \qquad \text{(IV.5.5)}$$

если $k \geqslant m$.

Далее, из формул (IV.3.5) и (IV.3.7) следует, что

$$\widehat{A}^{(k)}_{n,k} = c^{n+k} s^{n-k}, \quad \widehat{A}^{(n)}_{n,m} = c^{n+m} s^{n-m}. \qquad \text{(IV.5.6)}$$

Поэтому, задавая $\widehat{A}^{(k)}_{k,n}$ первой из этих формул и полагая в (IV.5.4) m равным

$$n-1, \; n-2, \; \ldots, \; k,$$

последовательно находим

$$\widehat{A}^{(k)}_{n,n-1}, \quad \widehat{A}^{(k)}_{n,n-2}, \; \ldots, \; \widehat{A}^{(k)}_{n,k}.$$

Другими словами, мы тем самым находим все $\widehat{A}^{(k)}_{n,m}$, для которых $k \leqslant m$.

Задавая затем $\widehat{A}^{(n)}_{n,m}$ второй формулой (IV.5.7) и полагая в (IV.5.5) k равным

$$n-1, \; n-2, \; \ldots, \; m,$$

последовательно можем вычислить

$$\widehat{A}^{(n-1)}_{n,m}, \quad \widehat{A}^{(n-2)}_{n,m}, \; \ldots, \; \widehat{A}^{(m)}_{n,m},$$

т. е. все $\widehat{A}^{(k)}_{n,m}$, для которых $k \geqslant m$.

Для нахождения производных $\widehat{A}^{(k)}_{n,m}$ по I следует воспользоваться формулами

$$\frac{d\widehat{A}^{(k)}_{n,m}}{dI} = \frac{m\left(c^2 - s^2\right) - k}{2cs}\, \widehat{A}^{(k)}_{n,m} - \frac{(m-n)(n+m+1)}{m+k+1}\, \widehat{A}^{(k)}_{n,m+1},$$

если $k \leqslant m$, и

$$\frac{d\widehat{A}^{(k)}_{n,m}}{dI} = \frac{k\left(c^2 - s^2\right) - m}{2cs}\, \widehat{A}^{(k)}_{n,m} - \frac{(k-n)(n+k+1)}{m+k+1}\, \widehat{A}^{(k+1)}_{n,m},$$

если $k \geqslant m$. Эти формулы будут выведены в § VIII.17.

В § VIII.16 мы выведем следующее дифференциальное уравнение для функции $A^{(k)}_{n,m}$:

$$\left(1 - x^2\right) \frac{d^2 A^{(k)}_{n,m}}{dx^2} - 2x \frac{dA^{(k)}_{n,m}}{dx} + \\ + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2 + k^2 - 2mkx}{1 - x^2} \right\} A^{(k)}_{n,m} = 0, \qquad \text{(IV.5.7)}$$

где $x = \cos I$. С помощью этого уравнения находим такую формулу для вычисления второй производной $A_{n,m}^{(k)}$ по I:

$$\frac{d^2A_{n,m}^{(k)}}{dI^2} = -\operatorname{ctg} I \frac{dA_{n,m}^{(k)}}{dI} - \left\{n(n+1) - \frac{m^2+k^2-2mk\cos I}{\sin^2 I}\right\} A_{n,m}^{(k)}.$$

Заметим, что для вычисления $A_{n,m}^{(k)}$ в силу (VIII.18.9) можно ограничиться использованием лишь одной из рекуррентных формул (IV.5.4) или (IV.5.5).

§ IV.6. Связь функций наклона с многочленами Тиссерана

Рассмотрим многочлены Тиссерана со значком $m = \frac{1}{2}$. Полагая

$$T_{p,q}^{(n)} = T_{p,q}^{\left(n,\frac{1}{2}\right)},$$

мы, согласно (III.7.3), будем иметь такое дифференциальное уравнение для $T_{p,q}^{(n)}$:

$$\frac{d^2T_{p,q}^{(n)}}{dI^2} + \operatorname{ctg} I \frac{dT_{p,q}^{(n)}}{dI} + \left\{n(n+1) - \frac{p^2}{\cos^2\frac{I}{2}} - \frac{q^2}{\sin^2\frac{I}{2}}\right\} T_{p,q}^{(n)} = 0.$$

Перейдем в этом уравнении к новой независимой переменной

$$x = \cos I.$$

Тогда

$$(1-x^2)\frac{d^2T_{p,q}^{(n)}}{dx^2} - 2x\frac{dT_{p,q}^{(n)}}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{2(p^2+q^2)-2(p^2-q^2)x}{1-x^2}\right\} T_{p,q}^{(n)} = 0. \qquad \text{(IV.6.1)}$$

Рассмотрим это уравнение детальнее. Если $p = q \neq 0$, то имеем

$$(1-x^2)\frac{d^2T_{p,p}^{(n)}}{dx^2} - 2x\frac{dT_{p,p}^{(n)}}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{4p^2}{1-x^2}\right\} T_{p,p}^{(n)} = 0.$$

Сравнивая полученное уравнение с (I.12.3), мы видим, что функции

$$T_{p,p}^{(n)}(x) \text{ и } P_n^{(2p)}(x)$$

отличаются друг от друга лишь постоянным множителем.

Если $p = q = 0$, то (IV.6.1) принимает вид

$$(1 - x^2)\frac{d^2T_{0,0}^{(n)}}{dx^2} - 2x\frac{dT_{0,0}^{(n)}}{dx} + n(n+1)T_{0,0}^{(n)} = 0.$$

А это — уравнение Лежандра. Следовательно,

$$T_{0,0}^{(n)}(x) = CP_n(x),$$

где C — постоянная, а $P_n(x)$ — многочлен Лежандра порядка n.

Сравним теперь уравнение (IV.6.1) с (IV.5.7). Мы видим, что одно уравнение переходит в другое, если

$$2(p^2 + q^2) = m^2 + k^2, \quad 2(p^2 - q^2) = 2mk. \tag{IV.6.2}$$

Отсюда находим

$$p = \pm\frac{m+k}{2} \quad q = \pm\frac{m-k}{2}. \tag{IV.6.3}$$

Если ограничиться рассмотрением случая $p \geqslant 0, q \geqslant 0$, то, так как $m \geqslant 0$, будем иметь при $p \geqslant q$

$$m = p + q, \quad k = p - q,$$

$$m = p - q, \quad k = p + q$$

и при $p \leqslant q$

$$m = q - p, \quad k = -(p + q).$$

Следовательно, имеют место следующие зависимости между многочленами Тиссерана и функциями наклона:

$$\begin{aligned} T_{p,q}^{(n)} &= C_1A_{n,p+q}^{(p-q)} \quad (p \geqslant q), \\ T_{p,q}^{(n)} &= C_2A_{n,p-q}^{(p+q)} \quad (p \geqslant q), \\ T_{p,q}^{(n)} &= C_3A_{n,q-p}^{(-p-q)} \quad (p \leqslant q), \end{aligned} \tag{IV.6.4}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные, зависящие от значков n, p, q.

Таким образом, из всего множества многочленов Тиссерана каждому многочлену соответствует своя функция наклона. Многочлен Тиссерана с точностью до постоянного множителя совпадает с соответствующей функцией наклона. Поскольку p и q — целые числа, то из (IV.6.3) следует, что для этих функций наклона $m-k$ должно быть четным числом. Подмножества функций наклона, для которых $m-k$ нечетно, не имеют аналогов многочленов Тиссерана. В этом смысле множество функций наклона богаче множества многочленов Тиссерана.

Дальнейшее рассмотрение этого вопроса продолжим в § VIII.18.

§ IV.7. Функция наклона $F_{n,m,l}(I)$

Многими авторами часто используются функции наклона $F_{n,m,l}(I)$. Они вводятся следующим образом. Поскольку в формуле (IV.1.7) $n-k$ — четное число, то, полагая

$$n-k=2l, \tag{IV.7.1}$$

ее можно записать в виде

$$P_n^{(m)}(\sin\varphi)\exp ikw = \\ = i^{n-m}\sum_{l=0}^{n} F_{n,m,l}(I)\exp i(n-2l)u. \tag{IV.7.2}$$

Таким образом,

$$F_{n,m,l}(I)=A_{n,m}^{(n-2l)}(I). \tag{IV.7.3}$$

Заменяя в (IV.2.6) с помощью (IV.7.1) k на l, получаем следующую формулу для функции $F_{n,m,l}(I)$:

$$F_{n,m,l}(I)=\frac{(n+m)!}{2^n l!\,(n-l)!}\sum_{j=j_1}^{j_2}(-1)^j C_{2n-2l}^{\,j}\, C_{2l}^{\,n-m-j}\, c^{2n-\nu}s^{\nu}, \tag{IV.7.4}$$

где

$$c=\cos\frac{I}{2},\quad s=\sin\frac{I}{2},$$
$$\nu=m-n+2l+2j,$$
$$j_1=\max(0,\,n-m-2l),$$
$$j_2=\min(n-m,\,2n-2l).$$

Если в (IV.7.4) заменить j и l соответственно на $n-m-j$ и $n-l$, то

$$F_{n,m,n-l}(I)=(-1)^{n-m}F_{n,m,l}(\pi-I). \tag{IV.7.5}$$

Это свойство для $F_{n,m,l}$ аналогично свойству (IV.2.8) для функций $A_{n,m}^{(k)}(I)$.

Имея в виду (IV.7.5), можно ограничиться рассмотрением функций $F_{n,m,l}$, для которых

$$0 \leqslant l \leqslant E\left(\frac{n}{2}\right), \tag{IV.7.6}$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ — целая часть числа $\frac{n}{2}$.

Делая теперь замену (IV.7.1) в (IV.3.2) и (IV.3.3), при условии (IV.7.6) будем иметь такую формулу для $F_{n,m,l}(I)$:

$$F_{n,m,l}(I) = G_{n,m,l} c^{n+m-2l} s^{n-m+2l} \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{\alpha} \frac{(-1)^j (n-m)!\,(2l)!\,(n+m-2l)!}{j!\,(n-m-j)!\,(2l-j)!\,(n+m-2l+j)!}\left(\frac{c}{s}\right)^{2j}, \tag{IV.7.7}$$

где

$$G_{n,m,l} = \frac{(-1)^{n-m}(n+m)!\,(2n-2l)!}{2^n (n-m)!\,(n+m-2l)!\,l!\,(n-l)!}. \tag{IV.7.8}$$

Выражение $F_{n,m,l}(I)$ через гипергеометрическую функцию будет дано в § VIII.15.

§ IV.8. Разложение возмущающей функции в теории движения ИСЗ

Согласно (I.31.5), возмущающая функция R, обусловленная несферичностью Земли, может быть представлена формулой

$$R = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} R_{l,m}, \tag{IV.8.1}$$

в которой

$$R_{l,m} = \frac{fm}{r} J_{l,m}\left(\frac{r_0}{r}\right)^l P_l^{(m)}(\sin\varphi)\cos m(\lambda - \lambda_{l,m}), \tag{IV.8.2}$$

где (рис. 10)

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin I \sin u, \\ \cos\varphi\cos w &= \cos u, \\ \cos\varphi \sin w &= \cos I \sin u, \\ \lambda &= w + \Omega - S. \end{aligned} \tag{IV.8.3}$$

Здесь r — геоцентрический радиус-вектор спутника, φ —

его геоцентрическая широта, λ и w — его долготы, отсчитываемые соответственно от гринвичского меридиана и восходящего узла орбиты ИСЗ, S — звездное гринвичское время; Ω, u, I — долгота восходящего узла, аргумент широты и наклон орбиты спутника, f — постоянная притяжения, m и r_0 — масса и средний экваториальный радиус Земли; $J_{l,m}$ и $\lambda_{l,m}$ — параметры гравитационного поля Земли, причем

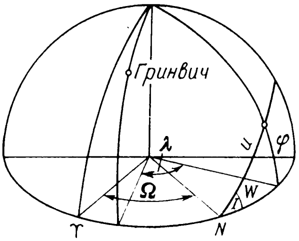


Рис. 10. Сферические координаты спутника

$$J_{l,0} = -J_l.$$

Формула (IV.8.2) дает нам при $m = 0$ зональную гармонику, при $0 \neq m \neq l$ тессеральную и при $m = l$ секториальную гармонику геопотенциала.

Наша задача заключается в выражении функции $R_{l,m}$ через элементы орбиты спутника. В этом параграфе мы выполним первый этап этой задачи, а именно: мы выразим $R_{l,m}$ через элементы a, I, Ω, u. Окончательное выражение $R_{l,m}$ через элементы a, e, I, Ω, ω и M будет дано в § VI.18.

Итак, рассмотрим функцию $\widehat{R}_{l,m}$:

$$\widehat{R}_{l,m} = \frac{fm}{r} J_{l,m} \left(\frac{r_0}{r}\right)^l P_l^{(m)}(\sin\varphi) \exp im(\lambda - \lambda_{l,m}), \quad \text{(IV.8.4)}$$

действительная часть которой дает нам функцию $R_{l,m}$.

С помощью четвертого равенства (IV.8.3) формула (IV.8.4) принимает вид

$$\widehat{R}_{l,m} = \frac{fm}{r} J_{l,m} \left(\frac{r_0}{r}\right)^l \exp mi(\Omega - S - \lambda_{l,m}) P_l^{(m)}(\sin\varphi) \exp imw,$$

или, если ввести большую полуось a,

$$\widehat{R}_{l,m} = \gamma_{l,m} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \exp mi(\Omega - S - \lambda_{l,m}) P_l^{(m)}(\sin\varphi) \exp imw, \quad \text{(IV.8.5)}$$

где

$$\gamma_{l,m} = J_{l,m} \frac{fm}{a} \left(\frac{r_0}{a}\right)^l. \quad \text{(IV.8.6)}$$

С помощью первых трех формул (IV.8.3) и равенства (IV.1.7), далее, находим

$$P_l^{(m)}(\sin\varphi) \exp imw = i^{l-m} \sum_{k=-l}^{l} A_{l,m}^{(k)}(I) \exp iku,$$

Поэтому

$$\hat{R}_{l,m} = i^{l-m}\gamma_{l,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times$$

$$\times \sum_{k=-l}^{l} A_{l,m}^{(k)}(I) \exp i\,(ku + m\Omega - mS - m\lambda_{l,m}), \quad \text{(IV.8.7)}$$

или, если воспользоваться (IV.7.2) и (IV.7.3),

$$\hat{R}_{l,m} = i^{l-m}\gamma_{l,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{l} F_{l,m,q}(I) \exp i\,[(l-2q)\,u + m\,(\Omega - S - \lambda_{l,m})]. \quad \text{(IV.8.8)}$$

Возьмем теперь в формулах (IV.8.7) и (IV.8.8) вещественные части. Тогда при $l-m$ четном будем иметь

$$R_{l,m} = (-1)^{\frac{l-m}{2}}\gamma_{l,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times$$

$$\times \sum_{k=-l}^{l} A_{l,m}^{(k)}(I) \cos(ku + m\Omega - mS - m\lambda_{l,m}), \quad \text{(IV.8.9)}$$

или

$$R_{l,m} = (-1)^{\frac{l-m}{2}}\gamma_{l,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{l} F_{l,m,q}(I) \cos[(l-2q)\,u + m\,(\Omega - S - \lambda_{l,m})]. \quad \text{(IV.8.10)}$$

При $l-m$ нечетном получаем такие выражения:

$$R_{l,m} = (-1)^{\frac{l-m+1}{2}}\gamma_{l,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times$$

$$\times \sum_{k=-l}^{l} A_{l,m}^{(k)}(I) \sin(ku + m\Omega - mS - m\lambda_{l,m}), \quad \text{(IV.8.11)}$$

или

$$R_{l,m} = (-1)^{\frac{l-m+1}{2}}\gamma_{l,m}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{l} F_{l,m,q}(I) \sin[(l-2q)\,u + m\,(\Omega - S - \lambda_{l,m})]. \quad \text{(IV.8.12)}$$

На этом первый этап разложения возмущающей функции в задаче о движении искусственного спутника в гравитационном поле Земли заканчивается.

§ IV.9. Замечания

Появление функций наклона связано с разработкой теории движения искусственных спутников Земли. По-видимому, впервые они были введены В. Каулой в его работе [1], посвященной разложению возмущающей функции от несферичности Земли в самом общем случае. В. Каула получил для этих функций общее выражение в виде трехкратной суммы. Позже И. Ижак [2] и Р. Аллан [3] нашли выражения в виде однократной суммы. Представление функций наклона через посредство многочленов относительно $\cos\frac{I}{2}$ и $\sin\frac{I}{2}$ было получено также В. А. Брумбергом [4].

Надо отметить работу Е. И. Тимошковой [5], в которой на основе теории представления групп вращения для функций наклона были выведены общая формула, рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение. Различные рекуррентные соотношения между соседними функциями наклона нашли также А. Шаль и И. Лакловери [6], Р. Гудинг [7], Г. Джиакалия [8]. Связь функций наклона с многочленами Тиссерана была установлена в работе автора [9]. Частный случай функций наклона рассматривался Б. Гарфинкелем [10] и автором [11].

В основу изложенной здесь теории функций наклона мы положили результаты Б. Джеффрис [12] о преобразовании сферических функций при повороте системы координат. Этот путь представляется нам естественным и наиболее простым.

Алгоритмы вычисления функций наклона на ЭВМ составлены А. М. Фоминовым, Л. Л. Филенко [13] и Н. В. Емельяновым [14].

Глава V

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

§ V.1. Определение функций Бесселя

Рассмотрим функцию комплексного переменного z

$$\Phi(z) = \exp\left[\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right], \qquad (V.1.1)$$

где x — любая действительная конечная величина. Эта функция имеет только две особые точки: $z = 0$ и $z = \infty$. Следовательно, она может быть разложена в ряд Лорана

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n, \qquad (V.1.2)$$

который сходится на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = 0$.

Коэффициенты $J_n(x)$ в этом разложении называются функциями Бесселя первого рода порядка n. Функция $\Phi(z)$ носит название производящей функции функций Бесселя.

Из формулы (V.1.1) видно, что $\Phi(z)$ не изменяется при замене z на $-z^{-1}$. Поэтому из формулы (V.1.2) следует, что

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \qquad (V.1.3)$$

Найдем развернутые выражения для функций Бесселя. Прежде всего, имеем

$$\exp\left(\frac{x}{2}z\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^p \frac{z^p}{p!},$$

$$\exp\left(-\frac{x}{2}z^{-1}\right) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\left(\frac{x}{2}\right)^q \frac{z^{-q}}{q!}.$$

Перемножая эти ряды, получаем

$$\Phi(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{p!\,q!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+q}z^{p-q}.$$

Положим здесь $p-q=n$. Тогда

$$\Phi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{q}\frac{(-1)^q}{q!\,(n+q)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}z^n.$$

Если $n\geqslant 0$, то коэффициент при z^n в этом разложении будет равен

$$J_n(x)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q!\,(n+q)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}, \qquad \text{(V.1.4)}$$

так что

$$J_0(x)=1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1^2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1^2\cdot 2^2}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\ldots,$$

$$J_n(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}\left\{1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1\,(n+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1\cdot 2\,(n+1)\,(n+2)}-\ldots\right\}.$$

Что касается функции Бесселя отрицательного порядка, то она выражается через функцию Бесселя положительного порядка посредством равенства (V.1.3).

Формула (V.1.4) показывает, что $J_n(x)$ является четной или нечетной функцией x смотря по тому, четно или нечетно n, т. е.

$$J_n(-x)=(-1)^n J_n(x). \qquad \text{(V.1.5)}$$

Явные выражения для функций Бесселя с точностью до x^7 приведены в § V.14.

§ V.2. Интегральная формула Бесселя и соотношения Якоби

Напишем равенство

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-z^{-1}\right)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)\,z^k \qquad \text{(V.2.1)}$$

и положим в нем

$$z=\exp(i\varphi).$$

Тогда, поскольку

$$\frac{1}{2}(z - z^{-1}) = i \sin \varphi,$$

оно примет вид

$$\exp(ix \sin \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) \exp(ik\varphi). \qquad (V.2.2)$$

Умножим обе части этого равенства на $\exp(-in\varphi)$ и проинтегрируем по φ в пределах от $-\pi$ до π. Это даст

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin \varphi - in\varphi)\, d\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(x) \int_{-\pi}^{\pi} \exp i(k-n)\varphi\, d\varphi.$$

Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(k-n)\varphi]\, d\varphi = \begin{cases} 0 & (k \neq n), \\ 2\pi & (k = n). \end{cases}$$

Поэтому

$$2\pi J_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix \sin \varphi - in\varphi)\, d\varphi.$$

Если разделить область интегрирования пополам и в первом интеграле заменить φ на $-\varphi$, то будем иметь

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \exp(in\varphi - ix \sin \varphi)\, d\varphi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \exp(-in\varphi + ix \sin \varphi)\, d\varphi.$$

Так как

$$\exp(in\varphi - ix \sin \varphi) + \exp(-in\varphi + ix \sin \varphi) = \\ = 2 \cos(n\varphi - x \sin \varphi),$$

то окончательно получаем следующую формулу:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi)\, d\varphi, \qquad (V.2.3)$$

которая называется интегральной формулой Бесселя для бесселевых функций.

Заметим, что из равенства (V.2.2) можно вывести еще несколько весьма полезных соотношений. В самом деле, переходя в нем по формулам Эйлера от экспонент к косинусам и синусам и учитывая (V.1.3), находим

$$\cos(x\sin\varphi)+i\sin(x\sin\varphi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)\,[\cos k\varphi+i\sin k\varphi]=$$
$$=J_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}J_k(x)\,[\cos k\varphi+i\sin k\varphi]+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_k(x)\,[\cos k\varphi-i\sin k\varphi],$$

или

$$\cos(x\sin\varphi)+i\sin(x\sin\varphi)=$$
$$=J_0(x)+2J_2(x)\cos 2\varphi+2J_4(x)\cos 4\varphi+\ldots+$$
$$+i\,[2J_1(x)\sin\varphi+2J_3(x)\sin 3\varphi+\ldots].$$

Приравнивая здесь действительные и мнимые части, будем иметь

$$\begin{aligned}\cos(x\sin\varphi)&=J_0(x)+2J_2(x)\cos 2\varphi+2J_4(x)\cos 4\varphi+\ldots\\ \sin(x\sin\varphi)&=2J_1\sin\varphi+2J_3\sin 3\varphi+\ldots\end{aligned}\qquad\text{(V.2.4)}$$

Можно указать еще два соотношения:

$$\begin{aligned}\cos(x\cos\varphi)&=J_0(x)-2J_2(x)\cos 2\varphi+2J_4(x)\cos 4\varphi-\ldots,\\ \sin(x\cos\varphi)&=2J_1(x)\cos\varphi-2J_3(x)\cos 3\varphi+\ldots,\end{aligned}\qquad\text{(V.2.5)}$$

которые получаются из (V.2.4) заменой φ на $\varphi+\frac{\pi}{2}$.

Формулы (V.2.4) и (V.2.5) были впервые выведены Якоби и носят его имя.

§ V.3. Рекуррентные соотношения между функциями Бесселя

Возьмем формулу

$$\exp\left[\frac{x}{2}(z-z^{-1})\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\,z^n\qquad\text{(V.3.1)}$$

и продифференцируем ее по z. Тогда получим

$$\frac{x}{2}(1+z^{-2})\exp\left[\frac{x}{2}(z-z^{-1})\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)\,z^{n-1},$$

или

$$\frac{x}{2}(1+z^{-2})\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)\, z^{n-1}.$$

Приравнивая в обеих частях этого равенства коэффициенты при z^{n-1}, будем иметь

$$\frac{x}{2}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] = nJ_n(x). \qquad \text{(V.3.2)}$$

Отсюда находим

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x). \qquad \text{(V.3.3)}$$

Формула (V.3.3), таким образом, позволяет последовательно вычислять значения функций $J_2(x)$, $J_3(x)$ и т. д., если известны значения $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

Продифференцируем теперь (V.3.1) по x. Это даст

$$\frac{1}{2}(z-z^{-1})\exp\left[\frac{x}{2}(z-z^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)\, z^n,$$

или

$$\frac{1}{2}(z-z^{-1})\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)\, z^n.$$

Приравнивая здесь члены с z^n, получаем

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \qquad \text{(V.3.4)}$$

Эта формула выражает производную функции Бесселя через функции Бесселя соседних индексов.

Выведем еще два соотношения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Заменяя в (V.3.4) $J_{n+1}(x)$ его выражением из (V.3.3), находим

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x). \qquad \text{(V.3.5)}$$

Если же в (V.3.4) подставить вместо $J_{n-1}(x)$ его значение из той же формулы (V.3.3), то получим

$$J_n'(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x). \qquad \text{(V.3.6)}$$

Умножая (V.3.5) и (V.3.6) соответственно на x^n и x^{-n}, будем иметь следующие формулы:

$$x^n J_n'(x) + n x^{n-1} J_n(x) = x^n J_{n-1}(x),$$

$$x^{-n} J_n'(x) - n x^{-n-1} J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x),$$

которые можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x), \qquad \text{(V.3.7)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_n(x)}{x^n}\right] = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}. \qquad \text{(V.3.8)}$$

Эти соотношения и нужно было нам вывести.

§ V.4. Дифференциальное уравнение Бесселя

Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $J_n(x)$. Для этого продифференцируем по x равенство (V.3.4). Это даст

$$J_n''(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}'(x) - J_{n+1}'(x)\right]. \qquad \text{(V.4.1)}$$

Но, заменяя в (V.3.4) n на $n-1$ и на $n+1$, имеем

$$J_{n-1}'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-2}(x) - J_n(x)\right],$$

$$J_{n+1}'(x) = \frac{1}{2}\left[J_n(x) - J_{n+2}(x)\right].$$

Поэтому равенство (V.4.1) примет вид

$$J_n''(x) = \frac{1}{4}\left[J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)\right],$$

или

$$J_n''(x) = -J_n(x) + \frac{1}{4}\left[J_{n-2}(x) + J_n(x)\right] + \frac{1}{4}\left[J_n(x) + J_{n+2}(x)\right]. \qquad \text{(V.4.2)}$$

Воспользуемся теперь формулой (V.3.2). Заменяя в ней n на $n-1$ и на $n+1$, находим, что

$$J_{n-2}(x) + J_n(x) = \frac{2(n-1)}{x} J_{n-1}(x),$$

$$J_n(x) + J_{n+2}(x) = \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1}(x).$$

Подставляя эти равенства в (V.4.2), находим

$$J_n''(x) =$$

$$= -J_n(x) + \frac{n}{2x}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] - \frac{1}{x}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)].$$

Если подставить сюда формулы (V.3.2) и (V.3.4), то окончательно найдем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0, \quad \text{(V.4.3)}$$

которое называется уравнением Бесселя.

§ V.5. Интегральная формула Пуассона

В этом параграфе мы выведем еще одну интегральную формулу для функций Бесселя, которая позволяет получить довольно точную оценку для этих функций.

Согласно (V.1.4), функция $J_n(x)$ определяется формулой

$$J_n(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q x^{n+2q}}{q!\,(n+q)!\,2^{n+2q}}.$$

Но

$$q!2^q = 2\cdot 4\cdot 6\ldots 2q = (2q)!!,$$

$$(n+q)!2^{n+q} = (2n+2q)!!$$

Поэтому

$$J_n(x) = x^n \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q x^{2q}}{(2n+2q)!!\,(2q)!!}. \quad \text{(V.5.1)}$$

Так как

$$(2q)!! = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2q}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2q-1)} = \frac{(2q)!}{(2q-1)!!},$$

то формулу (V.5.1) можно записать в виде

$$J_n(x) = \frac{x^n}{(2n-1)!!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,(2q-1)!!}{(2n+2q)!!\,(2q)!}(-1)^q x^{2q}. \quad \text{(V.5.2)}$$

Поскольку, далее,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi \cos^{2q}\varphi\, d\varphi = \frac{(2n-1)!!\,(2q-1)!!}{(2n+2q)!!},$$

то формула (V.5.2) может быть записана таким образом:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{\pi (2n-1)!!} \int_0^\pi \sin^{2n}\varphi \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q x^{2q} \cos^{2q}\varphi}{(2q)!}\, d\varphi. \quad \text{(V.5.3)}$$

Имея в виду теперь равенство

$$\cos(x\cos\varphi) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{x^{2q}\cos^{2q}\varphi}{(2q)!},$$

из (V.5.3) получаем следующую формулу:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x^n}{(2n-1)!!} \int_0^\pi \sin^{2n}\varphi \cos(x\cos\varphi)\, d\varphi, \quad \text{(V.5.4)}$$

которая называется интегральной формулой Пуассона.

Так как

$$|\sin^{2n}\varphi \cos(x\cos\varphi)| \leqslant 1,$$

то эта формула дает

$$|J_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{(2n-1)!!}, \quad \text{(V.5.5)}$$

что представляет собой довольно точную оценку для функции Бесселя n-го порядка.

§ V.6. Нули функции Бесселя

Заменим в уравнении Бесселя (V.4.3) x на kx, где k — некоторая постоянная. Это даст

$$\frac{d^2 J_n(kx)}{d(kx)^2} + \frac{1}{kx} \frac{dJ_n(kx)}{d(kx)} + \left[1 - \frac{n^2}{(kx)^2}\right] J_n(kx) = 0,$$

или

$$\frac{d^2 J_n(kx)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_n(kx)}{dx} + \left(k^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(kx) = 0.$$

Последнее уравнение можно записать также в виде

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{dJ_n(kx)}{dx}\right] + \left(k^2 x - \frac{n^2}{x}\right) J_n(kx) = 0.$$

Полагая в этом уравнении $k = k_1$ и $k = k_2$, где $k_1 \neq k_2$, будем иметь

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(k_1x)}{dx}\right] + \left(k_1^2x - \frac{n^2}{x}\right)J_n(k_1x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(k_2x)}{dx}\right] + \left(k_2^2x - \frac{n^2}{x}\right)J_n(k_2x) = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на $J_n(k_2x)$, второе на $J_n(k_1x)$ и вычтем одно из другого. Тогда получим

$$J_n(k_2x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(k_1x)}{dx}\right] - J_n(k_1x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(k_2x)}{dx}\right] + \\ + \left(k_1^2 - k_2^2\right)xJ_n(k_1x)J_n(k_2x) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(k_1x)}{dx}J_n(k_2x) - x\frac{dJ_n(k_2x)}{dx}J_n(k_1x)\right] + \\ + \left(k_1^2 - k_2^2\right)xJ_n(k_1x)J_n(k_2x) = 0. \quad \text{(V.6.1)}$$

Так как

$$\frac{dJ_n(kx)}{dx} = k\frac{dJ_n(kx)}{d(kx)} = kJ_n'(kx),$$

то равенство (V.6.1) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[k_1xJ_n'(k_1x)J_n(k_2x) - k_2xJ_n'(k_2x)J_n(k_1x)\right] + \\ + \left(k_1^2 - k_2^2\right)xJ_n(k_1x)J_n(k_2x) = 0. \quad \text{(V.6.2)}$$

Проинтегрируем это равенство по x в пределах от 0 до 1. Тогда, учитывая, что $xJ_n(k_1x)$ и $xJ_n(k_2x)$ при $x = 0$ обращаются в нуль, будем иметь

$$k_1J_n'(k_1)J_n(k_2) - k_2J_n'(k_2)J_n(k_1) + \\ + \left(k_1^2 - k_2^2\right)\int_0^1 xJ_n(k_1x)J_n(k_2x)\,dx = 0. \quad \text{(V.6.3)}$$

Перейдем теперь к рассмотрению корней уравнения

$$J_n(x) = 0. \quad \text{(V.6.4)}$$

Покажем, прежде всего, что это уравнение не имеет комплексных корней. Допустим противное: пусть (V.6.4) имеет корень $a + ib$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда, поскольку все коэффициенты разложения (V.1.4) для $J_n(x)$ являются действительными, оно должно иметь и сопряженный корень $a - ib$. Полагая, далее, в формуле (V.6.3)

$$k_1 = a + ib, \quad k_2 = a - ib \tag{V.6.5}$$

и замечая, что $k_1^2 \neq k_2^2$, мы получаем

$$\int_0^1 x J_n(k_1 x) J_n(k_2 x)\, dx = 0. \tag{V.6.6}$$

Но значения $J_n(k_1 x)$ и $J_n(k_2 x)$ при условии (V.6.5) будут комплексными и сопряженными и их произведение, а следовательно и все подынтегральное выражение, будет положительным. Поэтому формула (V.6.5) не должна иметь места.

Рассмотрим случай $a = 0$, т. е. докажем, что уравнение (V.6.4) не имеет и чисто мнимых корней $\pm ib$. В самом деле, при $x = ib$ формула (V.1.4) нам даст разложение

$$J_n(ib) = (ib)^n \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!\,(n+q)!} \frac{b^{2q}}{2^{n+2q}},$$

содержащее члены только одного знака, вследствие чего $J_n(ib)$ не может обращаться в нуль.

Таким образом, все корни функции $J_n(x)$ являются действительными. При четном n корни $J_n(x)$ будут попарно одинаковыми по абсолютной величине и обратными по знаку.

В следующем параграфе мы увидим, что функция $J_n(x)$ имеет бесчисленное множество действительных корней. Принимая пока без доказательства этот факт, докажем следующее утверждение: между любыми двумя последовательными корнями функции $J_n(x)$ находится один и только один корень функции $J_{n+1}(x)$ и наоборот. Для этого перепишем равенства (V.3.8) и (V.3.7) в виде

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_n(x)}{x^n}\right] = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n},$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n+1} J_{n+1}(x)\right] = x^{n+1} J_n(x). \tag{V.6.7}$$

В силу теоремы Ролля первое из них показывает, что между двумя последовательными корнями $J_{n+1}(x)$ лежит один корень $J_n(x)$. В силу той же теоремы из второго равенства (V.6.7) следует, что между двумя последовательными корнями $J_{n+1}(x)$ лежит один корень $J_n(x)$. Таким образом, корни $J_n(x)$ и $J_{n+1}(x)$ разделяют друг друга.

Пусть α и β — наименьшие положительные корни функций $J_n(x)$ и $J_{n+1}(x)$ соответственно. Так как $x^{n+1}J_{n+1}(x)$ имеет корень $x=0$, то, применяя теорему Ролля ко второму равенству (V.6.7), мы видим, что корень α функции $J_n(x)$ должен находиться в промежутке $(0, \beta)$. Другими словами, наименьший положительный корень $J_n(x)$ всегда меньше наименьшего положительного корня функции $J_{n+1}(x)$.

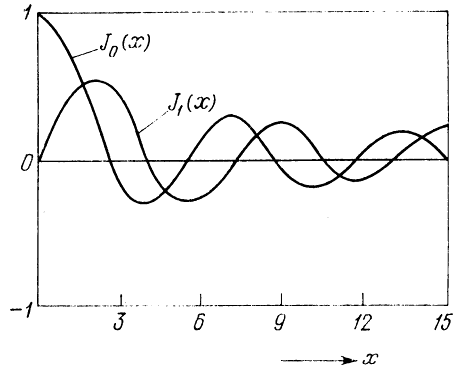


Рис. 11. Графики функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$

Таким образом, функция $J_n(x)$ есть ограниченная функция, имеющая колебательный характер. При малых x она приближенно дается формулой

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!},$$

а при очень больших x, как мы увидим в следующем параграфе, она приближенно равна

$$J_n(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Поведение функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ показано на рис. 11.

§ V.7. Асимптотическое представление $J_n(x)$ при больших значениях аргумента

В § V.1 было получено разложение бесселевой функции $J_n(x)$ по возрастающим степеням аргумента, сходящееся при всех значениях x. Это разложение весьма удобно для практических расчетов, когда значение x недостаточно велико. При больших значениях x ряд (V.1.4) сходится медленно, и для вычисления $J_n(x)$ требуется большое число членов. Поэтому очень важно иметь асимптотические разложения, которые позволяют практически вычислять функции Бесселя при больших значениях x.

Рассмотрим подробно вывод асимптотической формулы для функции Бесселя с нулевым значком. Для этого возьмем уравнение Бесселя (V.4.3) при $n=0$ и положим в нем

$$y=\sqrt{x}J_0(x). \tag{V.7.1}$$

Тогда будем иметь следующее уравнение для y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)y=0. \tag{V.7.2}$$

При больших значениях x величиной $1/4x^2$ можно пренебречь и, таким образом, представить y в виде

$$y=A\cos x+B\sin x, \tag{V.7.3}$$

где A и B — постоянные. Для нахождения этих постоянных воспользуемся следующим приемом. Из интегральной формулы Пуассона (V.5.4) при $n=0$ имеем

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\,d\varphi,$$

$$J_0'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\sin(x\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Далее, легко установить, что

$$J_0(x)\cos x-J_0'(x)\sin x=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\frac{\varphi}{2}\cos\left(2x\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\left(2x\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\,d\varphi.$$

Заменяя во втором интеграле φ на $\pi-\varphi$ и полагая $\eta=\sqrt{2x}\sin\frac{\varphi}{2}$, получаем

$$J_0(x)\cos\varphi-J_0'(x)\sin\varphi=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos\left(2x\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\,d\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{2x}}\left(1-\frac{\eta^2}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\cos^2\eta\,d\eta.$$

Но

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^{\sqrt{2x}}\left(1-\frac{\eta^2}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\eta^2 d\eta=\int_0^\infty \cos\eta^2\,d\eta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Поэтому, когда значение x велико, имеем

$$J_0(x)\cos x - J_0'(x)\sin x=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Аналогичным образом находим

$$J_0(x)\sin x + J_0'(x)\cos x=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Из этих двух равенств получаем

$$J_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}(\cos x+\sin x), \tag{V.7.4}$$

так что $A=B=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Имея в виду полученный результат, можно предположить, далее, что функция $J_0(x)$ представляется в виде следующего ряда:

$$J_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left\{\left(1+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots\right)\cos x+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\ldots\right)\sin x\right\}, \tag{V.7.5}$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 и т. д.— пока неопределенные коэффициенты.

Таким образом, формула (V.7.4) дает первый член ряда (V.7.5). Для определения коэффициентов A_k и B_k подставим (V.7.5) с помощью (V.7.1) в уравнение (V.7.2). Тогда будем иметь

$$\cos x\left\{\frac{2\cdot 1B_1-\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{2\cdot 2B_2-\left(1\cdot 2+\frac{1}{4}\right)A_1}{x^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\cdot 3B_3-\left(2\cdot 3+\frac{1}{4}\right)A_2}{x^4}+\ldots\right\}-\sin x\left\{\frac{2\cdot 1A_1+\frac{1}{4}}{x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\cdot 2A_2+\left(1\cdot 2+\frac{1}{4}\right)B_1}{x^3}+\frac{2\cdot 3A_3+\left(2\cdot 3+\frac{1}{4}\right)B_2}{x^4}+\ldots\right\}=0.$$

Приравнивая нулю члены этого ряда, находим

$$A_1 = -B_1 = -\frac{1}{8},$$

$$A_2 = B_2 = -\frac{9}{2\cdot 8^2},$$

$$A_3 = -B_3 = \frac{9\cdot 25}{2\cdot 3\cdot 8^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

В результате получаем

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left\{\left(1 - \frac{1}{8x} - \frac{9}{2\cdot 8^2 x^2} + \frac{9\cdot 25}{2\cdot 3\cdot 8^3 x^3} + \ldots\right)\cos x + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{1}{8x} - \frac{9}{2\cdot 8^2 x^2} - \frac{9\cdot 25}{2\cdot 3\cdot 8^3 x^3} + \ldots\right)\sin x\right\}.$$

Делая, далее, преобразование

$$\sqrt{2}\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt{2}\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

окончательно находим

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 - \frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{4!\,(8x)^4} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ldots\right] + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{1^2}{1!\,8x} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^2} + \ldots\right]\right\}. \qquad (V.7.6)$$

Подобным образом можно найти разложение для бесселевой функции с произвольным значком n. Это разложение имеет вид

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left[1 - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8x)^2} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!\,(8x)^4} - \ldots\right] +$$
$$+ \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{4n^2-1^2}{1!\,8x} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!\,(8x)^3} + \ldots\right]\right\}. \qquad (V.7.7)$$

Разложение (V.7.6) было получено Пуассоном в 1823 г., а разложение (V.7.7) — Якоби в 1849 г. Оба разложения являются расходящимися, но, несмотря на это, они пригодны для практических расчетов. Как показал Ганзен, если $x > 8$, то выписанные здесь члены дают значения функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с шестью точными десятичными знаками.

Методы, примененные Пуассоном и Якоби для вывода асимптотических разложений, не позволяют дать оценку остаточного члена ряда. Поэтому полученные ими результаты не являются обоснованными. Аккуратно обоснованную асимптотическую формулу можно получить, если воспользоваться методами контурного интегрирования в теории функций комплексного переменного. Ее можно записать таким образом:

$$J_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) U_n + \right.$$
$$\left. + \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) V_n\right], \qquad \text{(V.7.8)}$$

где

$$U_n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \cdots [4n^2 - (4k-1)^2]}{(2k)!\,(8x)^{2k}},$$
$$\text{(V.7.9)}$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \cdots [4n^2 - (4k-3)^2]}{(2k-1)!\,(8x)^{2k-1}}.$$
$$\text{(V.7.10)}$$

Анализ остаточного члена показывает, что если в разложении (V.7.9) и (V.7.10) ограничиться первыми p слагаемыми, то при $2p > n$ остаток каждого ряда не превышает по абсолютной величине соответствующего $(p+1)$-го члена, т. е. первого отбрасываемого члена.

Вывод формулы (V.7.8) и анализ остаточного члена можно найти в книгах [1] — [5].

Из (V.7.8) — (V.7.10) следует, что для очень больших значений x функция $J_n(x)$ может быть представлена формулой

$$J_n(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right).$$

При беспредельном увеличении x второе слагаемое стремится к нулю, а первое бесчисленное множество раз обращается в нуль. Таким образом, функция $J_n(x)$ имеет бесчисленное множество действительных корней.

§ V.8. Функции Бесселя мнимого аргумента

Функция Бесселя порядка n чисто мнимого аргумента, обозначаемая через $I_n(x)$, может быть определена следующим образом. Пусть, как и раньше, $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка n. Тогда *)

$$I_n(x) = (-i)^n J_n(ix). \qquad \text{(V.8.1)}$$

Так как для действительных значений x функция $J_n(ix)$ при четном n является вещественной, а при нечетном n принимает мнимые значения, то множитель $(-i)^n$ в формуле (V.8.1) выбран таким образом, чтобы $I_n(x)$ при действительном x была бы функцией вещественной.

Рассмотрим важнейшие свойства функции $I_n(x)$.

1. Представление функции $I_n(x)$ степенным рядом. Заменяя в формуле (V.1.4) x на ix, мы имеем

$$J_n(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{ix}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}.$$

Подставляя этот ряд в (V.8.1), получаем следующее разложение для $I_n(x)$:

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}. \qquad \text{(V.8.2)}$$

Отсюда следует, что

$$I_n(-x) = (-1)^n I_n(x). \qquad \text{(V.8.3)}$$

2. Дифференциальное уравнение для $I_n(x)$. Заменим в уравнении Бесселя (V.4.3) x на ix. Это даст

$$(ix)^2 \frac{d^2 J_n(ix)}{d(ix)^2} + ix \frac{dJ_n(ix)}{d(ix)} + [(ix)^2 - n^2] J_n(ix) = 0.$$

---

*) Функцию $I_n(x)$ называют также модифицированной функцией Бесселя.

Используя теперь (V.8.1), находим

$$x^2 \frac{d^2 I_n(x)}{dx^2} + x \frac{dI_n(x)}{dx} - (x^2 + n^2) I_n(x) = 0.$$

Таким образом, функция $I_n(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0. \qquad \text{(V.8.4)}$$

3. Рекуррентные соотношения. В § 5.3 мы вывели такие рекуррентные формулы для функций Бесселя $J_n(x)$:

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x),$$

$$2 \frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x).$$

Заменяя в них x на ix, будем иметь

$$\frac{2n}{ix} J_n(ix) = J_{n-1}(ix) + J_{n+1}(ix),$$

$$2 \frac{dJ_n(ix)}{d(ix)} = J_{n-1}(ix) - J_{n+1}(ix).$$

Если воспользоваться (V.8.1), то легко найдем следующие рекуррентные соотношения:

$$\frac{2n}{x} I_n(x) = I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x), \qquad \text{(V.8.5)}$$

$$2I'_n(x) = I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x). \qquad \text{(V.8.6)}$$

4. Интегральная формула для $I_n(x)$. Согласно (V.2.5), имеем

$$\cos(x\cos\varphi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x)\cos 2n\varphi,$$

$$\sin(x\cos\varphi) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x)\cos(2n+1)\varphi.$$

Заменяя здесь x на ix и замечая, что, согласно (V.8.1),

$$J_{2n}(ix) = (-1)^n I_{2n}(x),$$

$$J_{2n+1}(ix) = i(-1)^n I_{2n+1}(x),$$

получим

$$\cos(ix\cos\varphi) = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x)\cos 2n\varphi,$$

$$\sin(ix\cos\varphi) = 2i\sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}(x)\cos(2n+1)\varphi.$$

Сложим первое из этих равенств со вторым, умноженным на $-i$. Тогда, поскольку

$$\cos(ix\cos\varphi) - i\sin(ix\cos\varphi) = \exp(x\cos\varphi),$$

будем иметь

$$\exp(x\cos\varphi) = I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)\cos n\varphi. \qquad (V.8.7)$$

Если теперь обе части этого равенства умножить на $\cos n\varphi$ и проинтегрировать в пределах от 0 до 2π, то найдем следующую интегральную формулу для $I_n(x)$:

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(x\cos\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi. \qquad (V.8.8)$$

5. Интегральное представление Пуассона. Заменим в формуле Пуассона (V.5.4) x на ix. Это даст

$$J_n(ix) = \frac{1}{\pi}\frac{(ix)^n}{(2n-1)!!}\int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi\cos(ix\cos\varphi)\, d\varphi.$$

Представляя эту формулу в (V.8.1) и имея в виду, что

$$\cos(ix\cos\varphi) = \mathrm{ch}(x\cos\varphi),$$

получим

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x^n}{(2n-1)!!}\int_0^{\pi} \sin^{2n}\varphi\,\mathrm{ch}(x\cos\varphi)\, d\varphi. \qquad (V.8.9)$$

Эта формула является аналогом формулы Пуассона для функции Бесселя мнимого аргумента.

6. Асимптотическое представление. При больших значениях x имеет место следующее асимптотическое разложение для $I_n(x)$:

$$I_n(x) \approx \frac{\exp x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(8x)^k}\left(4n^2 - 1^2\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(4n^2 - 3^2\right) \ldots \left[4n^2 - (2k-1)^2\right]\right\}, \quad \text{(V.8.10)}$$

которое можно вывести из (V.7.8).

§ V.9. Постановка задачи о разложении координат эллиптического движения в ряды Фурье по кратным средней аномалии

Выпишем сначала основные формулы невозмущенного эллиптического движения. Пусть a, n, M_0 и e — соответственно большая полуось, среднее движение, средняя аномалия в эпоху и эксцентриситет орбиты небесного тела. Тогда

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad \text{(V.9.1)}$$

$$E - e\sin E = M, \quad \text{(V.9.2)}$$

$$r = a(1 - e\cos E), \quad \text{(V.9.3)}$$

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \text{(V.9.4)}$$

$$\eta = a\sqrt{1 - e^2}\sin E, \quad \text{(V.9.5)}$$

где M — средняя аномалия, E — эксцентрическая аномалия, r, ξ, η — радиус-вектор и орбитальные координаты небесного тела, t_0 — начальный момент времени.

Если ввести истинную аномалию v по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \quad \text{(V.9.6)}$$

то r, ξ и η можно найти из равенств

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v}, \quad \text{(V.9.7)}$$

$$\xi = r\cos v, \quad \eta = r\sin v. \quad \text{(V.9.8)}$$

Приведенные здесь формулы дают орбитальные координаты и радиус-вектор небесного тела в виде неявных функций времени. Эти формулы довольно просто выражают координаты через эксцентрическую аномалию E, связь которой с временем t осуществляется посредством уравнений (V.9.1) и (V.9.2). Последнее уравнение, называемое уравнением Кеплера, является трансцендентным и его решение не может быть получено в конечном виде, а может быть найдено в виде бесконечных рядов.

Рассмотрим это уравнение подробнее. Мы видим, что при $0 \leqslant e < 1$ эксцентрическая аномалия E есть непрерывная функция M. Далее, при изменении M от 0 до 2π переменная E также изменяется от 0 до 2π. Отсюда следует, что любая непрерывная периодическая функция переменной E будет также непрерывной периодической функцией переменной M. Поэтому такую функцию можно разложить в ряд Фурье по кратным средней аномалии M.

Поскольку многие функции, встречающиеся в теории эллиптического движения, такие, например, как $E - M$, r, ξ, η, $\cos v$, $\sin v$, при всех $e < 1$ являются непрерывными периодическими функциями E с периодом 2π, то все они могут быть разложены в тригонометрические ряды вида

$$f(M) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kM + b_k \sin kM),$$

которые будут сходиться для всех M при $0 \leqslant e < 1$.

Коэффициенты a_k и b_k этих рядов определяются формулами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(M) \cos kM \, dM,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(M) \sin kM \, dM.$$

Если $f(M)$ — четная функция M, то все $b_k = 0$ и

$$f(M) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kM,$$

где

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(M) \cos kM \, dM.$$

Если $f(M)$ — нечетная функция M, то все $a_k = 0$ и

$$f(M) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kM,$$

где

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(M) \sin kM\, dM.$$

Как мы вскоре увидим, коэффициенты всех рядов, которые мы будем здесь рассматривать, будут выражены через функции Бесселя, аргументы которых зависят от эксцентриситета орбиты.

§ V.10. Ряд для эксцентрической аномалии

Согласно (V.9.2),

$$E - M = e \sin E. \qquad (V.10.1)$$

Поэтому, чтобы получить разложение для E, достаточно найти разложение для $\sin E$. Так как $\sin E$ есть нечетная функция M, то это разложение будет содержать только синусы углов, кратных M, т. е. оно будет иметь вид

$$\sin E = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin kM, \qquad (V.10.2)$$

где коэффициенты q_k определяются формулой

$$q_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin E \sin kM\, dM. \qquad (V.10.3)$$

Найдем эти коэффициенты. Прежде всего, применим к интегралу (V.10.3) операцию интегрирования по частям. Это даст

$$q_k = -\frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin E \frac{d \cos kM}{dM} dM = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kM \cos E\, dE. \qquad (V.10.4)$$

Подставляя сюда вместо M его выражение из (V.9.2), получаем

$$q_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos (kE - ke \sin E) \cos E\, dE.$$

Заменим в подынтегральном выражении произведение косинусов на косинусы разности и суммы углов. Тогда будем иметь

$$kq_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[(k-1)E - ke\sin E]\,dE +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[(k+1)E - ke\sin E]\,dE. \quad (V.10.5)$$

Сопоставляя интегралы в (V.10.5) с интегральной формулой (V.2.3) для функций Бесселя, находим

$$kq_k = J_{k-1}(ke) + J_{k+1}(ke). \quad (V.10.6)$$

Если теперь воспользоваться рекуррентной формулой (V.3.2), то

$$J_{k-1}(ke) + J_{k+1}(ke) = \frac{2}{e}J_k(ke)$$

и, следовательно,

$$q_k = \frac{2}{ke}J_k(ke). \quad (V.10.7)$$

Подставляя (V.10.2) и (V.10.7) в уравнение Кеплера, окончательно найдем

$$E = M + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kM, \quad (V.10.8)$$

где

$$A_k = \frac{2}{k}J_k(ke). \quad (V.10.9)$$

Формулы (V.10.9) и (V.1.4) для коэффициентов A_k дают

$$A_k = \frac{2}{k}\frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^k}{k!}\left[1 - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1\cdot(k+1)} + \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)}{1\cdot2\cdot(k+1)(k+2)} - \ldots\right].$$

Развернутые выражения для этих коэффициентов с точностью до e^7 имеют вид

$$A_1 = e\left(1 - \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{192} - \frac{e^6}{9216} + \ldots\right),$$

$$A_2 = \frac{e^2}{2}\left(1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{24} - \ldots\right),$$

$$A_3 = \frac{3e^3}{8}\left(1 - \frac{9e^2}{16} + \frac{81e^4}{640} - \ldots\right),$$

$$A_4 = \frac{e^4}{3}\left(1 - \frac{4e^2}{5} + \ldots\right),$$

$$A_5 = \frac{125e^5}{384}\left(1 - \frac{25e^2}{24} + \ldots\right),$$

$$A_6 = \frac{27e^6}{80}(1 - \ldots),$$

$$A_7 = \frac{7^5 e^7}{6!\, 2^6}(1 - \ldots).$$

Заметим, что коэффициент A_k пропорционален e^k.

§ V.11. Разложение радиус-вектора в ряд Фурье

Согласно § V.9, в невозмущенном эллиптическом движении радиус-вектор r выражается через эксцентрическую аномалию формулой

$$r = a(1 - e\cos E), \qquad \text{(V.11.1)}$$

где a — большая полуось и e — эксцентриситет орбиты небесного тела.

Для того чтобы получить разложение для r, очевидно, достаточно найти разложение для $\cos E$. Поскольку на основании § V.9 $\cos E$ является периодической, причем четной функцией M, то его разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\cos E = \frac{1}{2} p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos kM, \qquad \text{(V.11.2)}$$

где

$$p_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos E \cos kM\, dM \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

или

$$p_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos E \cos kM\, dM. \qquad \text{(V.11.3)}$$

Вычислим сначала p_0. Имеем

$$p_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos E\, dM.$$

Но из уравнения Кеплера (V.9.2) находим

$$dM = (1 - e\cos E)\, dE.$$

Поэтому

$$p_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos E\, dE - \frac{2e}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos^2 E\, dE.$$

Отсюда получаем

$$p_0 = -e. \tag{V.11.4}$$

Перейдем к вычислению коэффициентов p_k при $k \geqslant 1$. Применяя к интегралу (V.11.3) операцию интегрирования по частям, будем иметь

$$p_k = \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos E \frac{d \sin kM}{dM}\, dM = \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin kM \sin E\, dE, \tag{V.11.5}$$

так как внеинтегральный член равен нулю.

Подставим в (V.11.5) вместо M его выражение из (V.11.1). Это даст

$$p_k = \frac{1}{k\pi}\int\limits_0^{\pi} 2\sin(kE - ke\sin E)\sin E\, dE.$$

Заменяя здесь произведение синусов разностью косинусов, находим

$$kp_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos[(k-1)E - ke\sin E]\, dE -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos[(k+1)E - ke\sin E]\, dE.$$

Сопоставляя интегралы этого равенства с формулой (V.2.3), получаем

$$kp_k = J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke).$$

Но, согласно (V.3.4),

$$J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke) = 2J_k'(ke) = \frac{2}{k}\frac{dJ_k(ke)}{de}.$$

Поэтому

$$p_k = \frac{2}{k^2}\frac{dJ_k(ke)}{de}. \tag{V.11.6}$$

Если подставить теперь (V.11.2) и (V.11.6) в (V.11.1), окончательно находим следующее разложение для r:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos kM, \tag{V.11.7}$$

где

$$B_k = \frac{2e}{k^2} \frac{dJ_k(ke)}{de}. \tag{V.11.8}$$

Используя формулу (V.1.4), можно представить коэффициенты B_k в виде

$$B_k = \frac{2}{k} \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^k}{k!} \left[1 - \frac{k+2}{k(k+1)} \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1} + \right.$$
$$\left. + \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1 \cdot 2} - \ldots \right]$$

Отсюда с точностью до e^7 находим

$$B_1 = 2\left(\frac{e}{2}\right) - 3\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{7}{72}\left(\frac{e}{2}\right)^7 + \ldots,$$

$$B_2 = 2\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{16}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{e}{2}\right)^6 - \ldots,$$

$$B_3 = 3\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{45}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{567}{40}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \ldots,$$

$$B_4 = \frac{16}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{128}{5}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \ldots,$$

$$B_5 = \frac{125}{12}\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{4375}{72}\left(\frac{e}{2}\right)^7 + \ldots,$$

$$B_6 = \frac{108}{5}\left(\frac{e}{2}\right)^6 - \ldots,$$

$$B_7 = \frac{16807}{360}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \ldots$$

Заметим, что B_k имеет порядок e^k.

§ V.12. Разложение $\cos mE$ и $\sin mE$ в ряды Фурье по кратным средней аномалии

В предыдущих параграфах ряды Фурье были получены по кратным средней аномалии M для $\cos E$ и $\sin E$. В этом параграфе мы рассмотрим более общую задачу: найдем разложения в тригонометрические ряды по кратным M для функций $\cos mE$ и $\sin mE$, где m — любое целое число.

На основании § V.9 эти две функции являются непрерывными периодическими функциями M с периодом 2π, причем первая из них есть четная, а вторая нечетная функция M. Поэтому ряды Фурье для них могут быть записаны в виде

$$\cos mE = \frac{1}{2} p_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(m)} \cos kM, \qquad (\text{V}.12.1)$$

$$\sin mE = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(m)} \sin kM, \qquad (\text{V}.12.2)$$

где

$$p_k^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos mE \cos kM \, dM, \qquad (\text{V}.12.3)$$

$$q_k^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mE \sin kM \, dM. \qquad (\text{V}.12.4)$$

Определим сначала коэффициент $p_0^{(m)}$. Имеем

$$p_0^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos mE \, dM.$$

Заменяя дифференциал dM через dE согласно равенству

$$dM = (1 - e \cos E) \, dE,$$

находим

$$p_0^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos mE \, (1 - e \cos E) \, dE.$$

Но этот интеграл при $m = 1$, как мы уже видели, равен

$-e$, а при $m > 1$ он равен нулю, т. е.

$$p_0^{(1)} = -e, \quad p_0^{(m)} = 0 \ (m > 1). \qquad \text{(V.12.5)}$$

Перейдем к вычислению коэффициентов $p_k^{(m)}$. Применяя, как и раньше, к этому интегралу операцию интегрирования по частям, получаем

$$p_k^{(m)} = \frac{2m}{\pi k} \int_0^\pi \sin kM \sin mE \, dE.$$

Если воспользоваться уравнением Кеплера, то будем иметь

$$p_k^{(m)} = \frac{m}{\pi k} \int_0^\pi 2 \sin (kE - ke \sin E) \sin mE \, dE,$$

или

$$\frac{k}{m} p_k^{(m)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [(k-m) E - ke \sin E] \, dE - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [(k+m) E - ke \sin E] \, dE.$$

Сравнивая полученные интегралы с формулой (V.2.3), имеем

$$p_k^{(m)} = \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)]. \qquad \text{(V.12.6)}$$

Коэффициенты $q_k^{(m)}$ вычисляются аналогичным образом (см. также § V.10). В результате для них можно вывести такую формулу:

$$q_k^{(m)} = \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)]. \qquad \text{(V.12.7)}$$

Равенства (V.12.1), (V.12.2) и (V.12.5)—(V.12.7) дают теперь для $m > 1$ следующие формулы:

$$\cos mE = m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)] \cos kM, \qquad \text{(V.12.8)}$$

$$\sin mE = m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)] \sin kM. \qquad \text{(V.12.9)}$$

Поскольку, согласно (V.1.3) и (V.1.5),

$$J_{-k-m}(-ke) = J_{k+m}(ke),$$

то формулам (V.12.8) и (V.12.9) можно придать и такой вид:

$$\cos mE = m \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{k} J_{k-m}(ke) \cos kM,$$

$$\sin mE = m \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{k} J_{k-m}(ke) \sin kM,$$

где штрих означает, что при суммировании члены с $k=0$ должны быть опущены.

§ V.13. Уравнение центра

Уравнением центра называется разность $v - M$, где v и M — соответственно истинная и средняя аномалии. В этом параграфе мы получим разложение для этой разности в ряд Фурье по кратным средней аномалии и тем самым выразим v явным образом через M.

Согласно § V.9, связь между истинной и эксцентрической аномалиями дается формулой

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \tag{V.13.1}$$

где e — эксцентриситет орбиты. Пусть

$$z = \exp iv, \quad x = \exp iE. \tag{V.13.2}$$

Тогда, поскольку

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{1}{i} \frac{\exp\left(\frac{iv}{2}\right) - \exp\left(-\frac{iv}{2}\right)}{\exp\left(\frac{iv}{2}\right) + \exp\left(-\frac{iv}{2}\right)},$$

то

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{1}{i} \frac{z-1}{z+1}. \tag{V.13.3}$$

Аналогично,

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \frac{1}{i} \frac{x-1}{x+1}. \tag{V.13.4}$$

Подставляя (V.13.3) и (V.13.4) в формулу (V.13.1), будем иметь

$$\frac{z-1}{z+1} = \mu \frac{x-1}{x+1}, \tag{V.13.5}$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

Разрешая уравнение (V.13.5) относительно z, получаем

$$z = \frac{x-\beta}{1-\beta x}, \qquad \text{(V.13.6)}$$

где

$$\beta = \frac{\mu - 1}{\mu + 1},$$

или

$$\beta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

или

$$\beta = \frac{e}{2}\left[1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \ldots\right]. \qquad \text{(V.13.7)}$$

Перепишем равенство (V.13.6) в виде

$$z = x\frac{1-\beta x^{-1}}{1-\beta x}$$

и прологарифмируем. Это даст

$$\ln z = \ln x + \ln(1-\beta x^{-1}) - \ln(1-\beta x).$$

Разлагая правую часть этого равенства в ряд по степеням β, находим

$$\ln z = \ln x + \beta\left(x - x^{-1}\right) + \frac{1}{2}\beta^2\left(x^2 - x^{-2}\right) + \\ + \frac{1}{3}\beta^3\left(x^3 - x^{-3}\right) + \ldots$$

Но

$$\ln z = iv, \quad \ln x = iE, \quad x^k - x^{-k} = 2i\sin kE.$$

Следовательно,

$$v = E + 2\left[\beta\sin E + \frac{\beta^2}{2}\sin 2E + \frac{\beta^3}{3}\sin 3E + \ldots\right]. \qquad \text{(V.13.8)}$$

Таким образом, мы получили разложение для уравнения центра в ряд по кратным эксцентрической аномалии. Если теперь воспользоваться результатами предыдущего параграфа и подставить полученные там разложения для $\sin E$, $\sin 2E$ и т. д., то мы можем преобразовать ряд (V.13.8) в тригонометрический ряд по кратным средней аномалии. Коэффициенты этого ряда можно представить в виде степенных рядов относительно эксцентриситета e. В результате будем иметь

$$v - M = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \sin kM. \qquad \text{(V.13.9)}$$

Коэффициенты H_k этого разложения с точностью до e^7 включительно определяются формулами

$$H_1 = 4\left(\frac{e}{2}\right) - 2\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{107}{36}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \ldots,$$

$$H_2 = 5\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{22}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{17}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 - \ldots,$$

$$H_3 = \frac{26}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{43}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{95}{4}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \ldots,$$

$$H_4 = \frac{103}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{902}{15}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \ldots,$$

$$H_5 = \frac{1097}{30}\left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{5957}{36}\left(\frac{e}{2}\right)^7 + \ldots,$$

$$H_6 = \frac{1223}{15}\left(\frac{e}{2}\right)^6 - \ldots,$$

$$H_7 = \frac{47273}{252}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \ldots$$

Здесь была использована также формула (V.13.7).

§ V.14. Разложение некоторых функций в теории эллиптического движения

В предыдущих параграфах были получены тригонометрические разложения по кратным средней аномалии M для $E - M$, радиус-вектора r и уравнения центра $v - M$. В этом параграфе мы найдем соответствующие разложения для некоторых других функций, часто встречающихся в теории эллиптического движения.

1. Ряды для орбитальных координат ξ и η. Согласно § V.9, орбитальные координаты ξ и η выражаются через эксцентрическую аномалию E формулами

$$\frac{\xi}{a} = \cos E - e, \qquad \text{(V.14.1)}$$

$$\frac{\eta}{a} = \sqrt{1 - e^2} \sin E, \qquad \text{(V.14.2)}$$

где a — большая полуось и e — эксцентриситет орбиты.

Подставляя в (V.14.1) формулы (V.11.2), (V.11.4) и (V.11.6), получаем

$$\frac{\xi}{a} = -\frac{3}{2} e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k'(ke) \cos kM, \qquad (V.14.3)$$

где обозначено

$$J_k'(x) = \frac{dJ_k(x)}{dx}. \qquad (V.14.4)$$

Если подставить в (V.14.2) выражение для $\sin E$, найденное в § V.10, то будем иметь

$$\frac{\eta}{a} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin kM. \qquad (V.14.5)$$

2. Ряд для $\frac{a}{r}$. На основании (V.9.4)

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1 - e\cos E}.$$

Но из уравнения Кеплера следует, что

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e\cos E}.$$

Поэтому

$$\frac{a}{r} = \frac{dE}{dM}. \qquad (V.14.6)$$

Подставим сюда формулы (V.10.8) и (V.10.9). Это даст

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM. \qquad (V.14.7)$$

3. Ряды для $\cos v$ и $\sin v$. Из равенства (V.9.7) имеем

$$1 + e\cos v = (1 - e^2)\frac{a}{r}.$$

Отсюда находим

$$\cos v = -\frac{1}{e} + \frac{1-e^2}{e}\frac{a}{r}.$$

Подставляя сюда только что полученное разложение для $\frac{a}{r}$, получим

$$\cos v = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM. \quad (V.14.8)$$

Найдем теперь разложение для $\sin v$. Имеем

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{d}{dM}(1 - e\cos E) = e\sin E \frac{dE}{dM},$$

или

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{e\sin E}{1 - e\cos E}. \quad (V.14.9)$$

С другой стороны, поскольку

$$\sin v = \frac{2\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{v}{2}},$$

то равенство (V.9.6) даст

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E}.$$

Подставляя сюда (V.14.9), находим

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right).$$

Если воспользоваться разложением для $\frac{r}{a}$, полученным в § V.11, будем иметь

$$\sin v = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} 2J'_k(ke) \sin kM. \quad (V.14.10)$$

4. Разложение для $\left(\frac{r}{a}\right)^2$. Прежде всего, имеем

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \frac{d}{dM}(1 - e\cos E)^2 = 2e\sin E(1 - e\cos E)\frac{dE}{dM},$$

или

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 2e\sin E.$$

Подставим сюда разложение для $\sin E$, найденное в § V.10, и проинтегрируем. Тогда

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = C - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} J_k(ek) \cos kM,$$

где C — постоянная интегрирования.

С другой стороны,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\cos E + \frac{e^2}{2}\cos 2E.$$

Подставляя в это равенство ряды для $\cos E$ и $\cos 2E$ и приравнивая свободный член C, найдем

$$C = 1 + \frac{3}{2}e^2.$$

Поэтому окончательно получаем следующую формулу:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2}e^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} J_k(ke) \cos kM. \qquad (V.14.11)$$

5. Разложение для $\ln \frac{r}{a}$. Это разложение нетрудно получить, если воспользоваться формулой (V.11.7). Оно имеет вид

$$\begin{aligned}
\ln \frac{r}{a} = {} & \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{32}e^4 + \frac{1}{96}e^6 + \ldots + \\
& + \left(-e + \frac{3}{8}e^3 + \frac{1}{64}e^5 + \frac{127}{9216}e^7 + \ldots\right)\cos M + \\
& + \left(-\frac{3}{4}e^2 + \frac{11}{24}e^4 - \frac{3}{64}e^6 - \ldots\right)\cos 2M + \\
& + \left(-\frac{17}{24}e^3 + \frac{77}{128}e^5 - \frac{743}{5120}e^7 - \ldots\right)\cos 3M + \\
& + \left(-\frac{71}{96}e^4 - \frac{129}{160}e^6 - \ldots\right)\cos 4M + \\
& + \left(-\frac{523}{640}e^5 + \frac{10039}{9216}e^7 - \ldots\right)\cos 5M + \\
& + \left(-\frac{899}{960}e^6 + \ldots\right)\cos 6M + \left(-\frac{355\,081}{322\,560}e^7 + \ldots\right)\cos 7M + \ldots
\end{aligned}$$

6. Развернутые выражения для $J_k(ke)$ и $J_k'(ke)$. В полученных здесь результатах функции Бесселя встречаются в виде

$$J_k(ke) \quad \text{и} \quad J'_k(ke) = \frac{dJ_k(ke)}{d(ke)}.$$

Поэтому полезно привести развернутые выражения для этих функций. Сохраняя в этих выражениях члены с e^7, имеем

$$2J_1(e) = e\left(1 - \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{192} - \frac{e^6}{9216} + \ldots\right),$$

$$2J_2(2e) = e^2\left(1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{24} - \ldots\right),$$

$$2J_3(3e) = \frac{9e^3}{8}\left(1 - \frac{9e^2}{16} + \frac{81e^4}{640} - \ldots\right),$$

$$2J_4(4e) = \frac{4e^4}{3}\left(1 - \frac{4e^2}{5} + \ldots\right),$$

$$2J_5(5e) = \frac{625e^5}{384}\left(1 - \frac{25e^2}{24} + \ldots\right),$$

$$2J_6(6e) = \frac{81e^6}{40}(1 - \ldots),$$

$$2J_7(7e) = \frac{7^6e^7}{2^6\cdot 6!}(1 - \ldots)$$

и, далее,

$$2J'_1(e) = 1 - \frac{3e^2}{8} + \frac{5e^4}{192} - \frac{7e^6}{9216} + \ldots,$$

$$2J'_2(2e) = e\left(1 - \frac{2e^2}{3} + \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{90} + \ldots\right),$$

$$2J'_3(3e) = \frac{9}{8}e^2\left(1 - \frac{15e^2}{16} + \frac{189e^4}{640} - \ldots\right),$$

$$2J'_4(4e) = \frac{4e^3}{3}\left(1 - \frac{6e^2}{5} + \frac{8e^4}{15} - \ldots\right),$$

$$2J'_5(5e) = \frac{625e^4}{384}\left(1 - \frac{35e^2}{24} + \ldots\right),$$

$$2J'_6(6e) = \frac{81e^5}{40}\left(1 - \frac{12e^2}{7} + \ldots\right),$$

$$2J'_7(7e) = \frac{7^6e^6}{2^6\cdot 6!}(1 - \ldots),$$

$$2J'_8(8e) = \frac{2048e^7}{315}(1 - \ldots).$$

Если потребуются более точные выражения, то их можно найти из формул

$$J_k(ke) = \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^k}{k!}\left[1 - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1\cdot(k+1)} + \frac{\left(\frac{ke}{4}\right)^4}{1\cdot 2\,(k+1)(k+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^6}{1\cdot 2\cdot 3\,(k+1)(k+2)(k+3)} + \ldots\right],$$

$$2J_k'(ke) = \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}\left[1 - \frac{k+2}{k}\frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1\,(k+1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{k+4}{k}\frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1\cdot 2\,(k+1)(k+2)} - \ldots\right],$$

которые легко получаются из (V.1.4).

7. Сходимость тригонометрических рядов. Предел Лапласа. Как уже отмечалось, рассмотренные в предыдущих параграфах разложения различных функций теории эллиптического движения в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии M, в силу теоремы Дирихле сходятся для всех значений M при всех значениях $0 \leqslant e < 1$. Но теорема Дирихле не гарантирует абсолютную сходимость. Лаплас показал, что эти ряды абсолютно сходятся для всех значений M при

$$0 \leqslant e < 0{,}6627434\ldots$$

Величина $e^* = 0{,}6627434\ldots$ называется пределом Лапласа [8].

§ V.15. Замечания

Теория бесселевых функций имеет чрезвычайно интересную историю, богатую именами выдающихся ученых. Одним из первых столкнулся с этими функциями Л. Эйлер, который в 1764 г. рассмотрел задачу о колебаниях круглой упругой мембраны. Уравнение этой задачи имеет вид

$$\frac{1}{e^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}, \qquad (V.15.1)$$

где z — поперечное смещение точки мембраны с полярными координатами r, φ для момента времени t, e —

постоянная, зависящая от плотности и упругости мембраны.

Эйлер ищет частное решение задачи такого вида:

$$z = u(r)\sin(\alpha t + A)\sin(\beta\varphi + B), \qquad \text{(V.15.2)}$$

где α, β, A, B — постоянные.

Подстановка (V.15.2) в (V.15.1) дает для определения u следующее уравнение:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(\frac{\alpha^2}{e^2} - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u = 0.$$

Решение этого уравнения Эйлер находит в виде ряда, который с точностью до числового множителя совпадает с функцией Бесселя $J_\beta\left(\frac{\alpha r}{e}\right)$ целого значка β.

В 1769 г. Лагранж, используя тригонометрические ряды по кратным средней аномалии, вывел разложения для радиус-вектора и эксцентрической аномалии в эллиптическом движении. Коэффициенты A_n и B_n рядов, полученных Лагранжем, можно выразить через функции Бесселя следующим образом:

$$A_n = \frac{2}{n} J_n(ne), \quad B_n = -\frac{2e}{n} J_n'(ne),$$

где n — целое число, а e — величина эксцентриситета орбиты.

В 1819 г. Бессель опубликовал работу, в которой представил коэффициент B_n интегралом

$$B_n = -\frac{e}{n\pi}\int_0^{2\pi} \sin u \sin(nu - ne\sin u)\, du.$$

В работе, посвященной задаче о распространении теплоты в сплошном цилиндре и опубликованной в 1823 г., Пуассон рассматривает интеграл вида

$$\int_0^{\pi} \cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta\, d\theta,$$

где n — целое положительное число или нуль. Он находит формулу для приближенного вычисления интеграла при больших x для $n = 0$.

Следует отметить еще результаты исследований Даниила Бернулли о малых колебаниях висящих тяжелых цепей, опубликованные в 1738 г. Решение этой задачи получено им в виде бесконечного ряда, который совпадает с бесселевой функцией. Такой же ряд использовал Ж. Фурье в трактате, посвященном исследованию распространения тепла, вышедшем в 1822 г.

Такова вкратце предыстория введения Бесселем функций, которые ныне носят его имя*). Мемуар, в котором Бессель систематически изложил теорию бесселевых функций, был опубликован в 1824 г. Бессель обозначает эти функции через I_k^h и вводит их с помощью интеграла

$$I_k^h = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(hu - k \sin u)\, du,$$

который теперь называется интегралом Бесселя. В своих мемуарах в предположении, что k есть целое число, Бессель получил многие из тех результатов, которые были изложены нами в этой главе.

Дальнейшие исследования бесселевых функций связаны с применением методов теории функций комплексного переменного. Таким образом, рассматривается функция $J_\nu(z)$ в предположении, что z и ν — комплексные величины. Важнейшие результаты здесь получены Ломмелем, Нейманом, Гейне и другими исследователями.

Функциям Бесселя посвящена обширная литература. Это, прежде всего, трактат Г. Н. Ватсона [1], а также монографии [2] — [7]. Методы вычисления бесселевых функций на ЭВМ изложены в справочнике [9]. Сведения о конкретных алгоритмах вычисления их на ЭВМ можно найти в пособии [10].

---

*) Часто эти функции называют цилиндрическими, а иногда и функциями Фурье — Бесселя.

Глава VI

КОЭФФИЦИЕНТЫ ГАНЗЕНА И ОПЕРАТОРЫ НЬЮКОМА

§ VI.1. Теорема Коши

Пусть S — непрерывная периодическая функция эксцентрической аномалии E с периодом, равным 2π. Тогда, как известно, эту функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$S = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kE + b_k \sin kE). \qquad \text{(VI.1.1)}$$

Но в силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M \qquad \text{(VI.1.2)}$$

для всех e, меньших единицы, S является непрерывной и периодической функцией средней аномалии M периода 2π. Поэтому она может быть разложена в ряд вида

$$S = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kM + B_k \sin kM). \qquad \text{(VI.1.3)}$$

В большинстве задач небесной механики нахождение ряда (VI.1.1) представляет собой проблему более простую, нежели построение ряда (VI.1.3). Очень полезно поэтому иметь метод, позволяющий преобразовать разложение (VI.1.1) в разложение (VI.1.3). Изложением одного такого метода, который был разработан Коши, мы и займемся в настоящем параграфе.

Прежде всего, заменим тригонометрические ряды (VI.1.1) и (VI.1.3) соответствующими степенными рядами. Для этого положим

$$z = \exp iM, \quad y = \exp iE. \qquad \text{(VI.1.4)}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \cos kM &= \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right), \\ \sin kM &= \frac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right) \end{aligned} \qquad \text{(VI.1.5)}$$

и разложение (VI.1.3) запишется в виде

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k z^k, \qquad \text{(VI.1.6)}$$

где коэффициенты Q_k связаны с A_k и B_k зависимостями

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{1}{2}(A_k - iB_k), \\ Q_{-k} &= \frac{1}{2}(A_k + iB_k), \end{aligned} \qquad \text{(VI.1.7)}$$

или

$$\begin{aligned} A_0 &= 2Q_0, \\ A_k &= Q_k + Q_{-k}, \\ B_k &= i(Q_k - Q_{-k}). \end{aligned} \qquad \text{(VI.1.8)}$$

Поскольку коэффициенты ряда (VI.1.3) определяются формулами

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S\cos kM\, dM,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S\sin kM\, dM,$$

то с помощью (VI.1.5) находим, что

$$Q_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Sz^{-k} dM. \qquad \text{(VI.1.9)}$$

Аналогичным образом ряд (VI.1.1) можно заменить рядом

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k y^k, \qquad \text{(VI.1.10)}$$

где

$$q_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Sy^{-k} dE, \qquad \text{(VI.1.11)}$$

причем коэффициенты q_k связаны с a_k и b_k зависимостями, аналогичными (VI.1.8) и (VI.1.7).

Запишем теперь уравнение Кеплера (VI.1.2) в виде

$$\exp iM = \exp iE \exp(-ie \sin E).$$

Отсюда, учитывая (VI.1.4), получаем такое соотношение:

$$z = y \exp\left[-\frac{e}{2}\left(y - y^{-1}\right)\right]. \qquad \text{(VI.1.12)}$$

Продифференцируем, далее, уравнение (VI.1.2). Это даст

$$dM = (1 - e\cos E)\, dE,$$

или

$$dM = \left[1 - \frac{e}{2}\left(y + y^{-1}\right)\right] dE. \qquad \text{(VI.1.13)}$$

Подставляя, наконец, равенства (VI.1.12) и (VI.1.13) в (VI.1.9), мы получаем следующую формулу для Q_k:

$$Q_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_k y^{-k} dE, \qquad \text{(VI.1.14)}$$

где

$$U_k = S\left[1 - \frac{e}{2}\left(y + y^{-1}\right)\right]\exp\left[\frac{ke}{2}\left(y - y^{-1}\right)\right]. \qquad \text{(VI.1.15)}$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} y^n y^{-k} dE = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq k, \\ 2\pi, & \text{если } n = k, \end{cases}$$

выводим следующую теорему:

Для определения коэффициента Q_k *ряда* (VI.1.6) *нужно функцию* U_k*, в которой* S *заменено рядом* (VI.1.10), *разложить в ряд по степеням* y*. Коэффициент при* y^k *в этом разложении и будет равен* Q_k.

Эта теорема была доказана Коши.

§ VI.2. Определение коэффициентов Ганзена

Рассмотрим следующую функцию S радиус-вектора r и истинной аномалии v в эллиптическом движении:

$$S = \left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imv, \qquad \text{(VI.2.1)}$$

где a — большая полуось, n и m — целые числа. Будем предполагать, что $m \geqslant 0$, а n может быть как положительным, так и отрицательным.

Поскольку r и v связаны со средней аномалией формулами

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos E,$$
$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \qquad \text{(VI.2.2)}$$
$$E - e\sin E = M,$$

где e — эксцентриситет орбиты, то при $0 \leqslant e < 1$ функция S является непрерывной и периодической функцией M с периодом, равным 2π. Поэтому она может быть разложена в ряд вида

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n,m}^{(k)} \exp ikM. \qquad \text{(VI.2.3)}$$

Коэффициенты $X_{n,m}^{(k)}$ этого ряда, являющиеся функциями эксцентриситета e, называются коэффициентами Ганзена.

Умножим обе части равенства (VI.2.3) на $\exp(-ikM)$ и проинтегрируем по M в пределах от 0 до 2π. Тогда

$$X_{n,m}^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\exp(-ikM)\,dM. \qquad \text{(VI.2.4)}$$

Если ввести обозначения

$$x = \exp iv, \quad y = \exp iE, \quad z = \exp iM, \qquad \text{(VI.2.5)}$$

то с помощью (VI.2.1) и (VI.2.5) находим

$$X_{n,m}^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^n x^m z^{-k}\,dM. \qquad \text{(VI.2.6)}$$

Но поскольку

$$dM = \frac{r}{a}\,dE,$$

то для $X_{n,m}^{(k)}$ будем иметь такую интегральную формулу:

$$X_{n,m}^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} x^m z^{-k}\,dE, \qquad \text{(VI.2.7)}$$

которая позволяет найти развернутые выражения для коэффициентов $X_{n,m}^{(k)}$.

Перейдем в равенствах (VI.2.1) и (VI.2.3) от экспонент к косинусам и синусам и приравняем друг к другу их правые части. Это нам даст

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n (\cos mv + i\sin mv) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n,m}^{(k)} (\cos kM + i\sin kM).$$

Отсюда легко получаем следующие формулы:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv = C_0^{n,m} + C_1^{n,m}\cos M + C_2^{n,m}\cos 2M + \ldots \tag{VI.2.8}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv = S_1^{n,m}\sin M + S_2^{n,m}\sin 2M + \ldots,$$

где $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$ связаны с коэффициентами Ганзена соотношениями

$$\begin{aligned} C_0^{n,m} &= X_{n,m}^{(0)}, \\ C_k^{n,m} &= X_{n,m}^{(k)} + X_{n,m}^{(-k)}, \\ S_k^{n,m} &= X_{n,m}^{(k)} - X_{n,m}^{(-k)}. \end{aligned} \tag{VI.2.9}$$

Эти коэффициенты мы рассмотрим в § VI.6.

§ VI.3. Развернутые выражения для коэффициентов Ганзена. Применение функций Бесселя

Для нахождения общей формулы для $X_{n,m}^{(k)}$ мы воспользуемся правилом Коши, изложенным нами в § VI.1. В соответствии с этим правилом найдем сначала выражение для функции U_k. На основании (VI.1.15) имеем

$$U_k = S\left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right]\exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right],$$

где

$$S = \left(\frac{r}{a}\right)^n x^m,$$

а x и y определяются (VI.2.5).

Так как

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1}),$$

то для U_k находим

$$U_k = \left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right]^{n+1} x^m \exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right]. \quad \text{(VI.3.1)}$$

Чтобы выразить U_k через y, нам достаточно воспользоваться формулой (V.13.6)

$$x = y\frac{1 - \beta y^{-1}}{1 - \beta y}, \quad \text{(VI.3.2)}$$

где

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}. \quad \text{(VI.3.3)}$$

Выполним, однако, предварительно следующие преобразования:

$$1 - \frac{e}{2}\left(y + y^{-1}\right) = -\frac{ey^2 - 2y + e}{2y} =$$

$$= -\frac{e}{2y}(y - \beta)\left(y - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{e}{2\beta}(1 - \beta y)\left(1 - \frac{\beta}{y}\right).$$

В результате получаем

$$1 - \frac{e}{2}\left(y + y^{-1}\right) = \frac{1}{1 + \beta^2}(1 - \beta y)\left(1 - \beta y^{-1}\right). \quad \text{(VI.3.4)}$$

Подставим (VI.3.2) и (VI.3.4) в (VI.3.1). Тогда формула для U_k примет вид

$$U_k = \frac{y^m}{(1 + \beta^2)^{n+1}}(1 - \beta y)^{n-m+1}\left(1 - \beta y^{-1}\right)^{n+m+1} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{ke}{2}\left(y - y^{-1}\right)\right]. \quad \text{(VI.3.5)}$$

Если теперь разложить U_k в ряд по степеням y, то, согласно теореме Коши, коэффициент при y^k и будет равен $X_{n,m}^{(k)}$.

Используя формулу бинома Ньютона, имеем

$$(1 - \beta y)^{n-m+1} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n-m+1}^{r}(-\beta)^r y^r,$$

$$\left(1 - \beta y^{-1}\right)^{n+m+1} = \sum_{s=0}^{\infty} C_{n+m+1}^{s}(-\beta)^s y^{-s},$$

где, как обычно,

$$C_p^q = \frac{p(p-1)\ \ldots\ (p-q+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ q}, \quad C_p^0 = 1. \quad \text{(VI.3.6)}$$

С помощью этих разложений находим

$$(1-\beta y)^{n-m+1}\left(1-\beta y^{-1}\right)^{n+m+1}=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} C_{n-m+1}^{r} C_{n+m+1}^{s}(-\beta)^{r+s} y^{r-s}.$$

Полагая здесь

$$r-s=k-l-m,$$

где k и l — целые числа, будем иметь

$$(1-\beta y)^{n-m+1}\left(1-\beta y^{-1}\right)^{n+m+1}=$$

$$=\sum_{k-l=-\infty}^{\infty}\sum_{s}^{\infty} C_{n-m+1}^{k-l-m+s} C_{n+m+1}^{s}(-\beta)^{k-l-m+2s} y^{k-l-m},$$

или

$$(1-\beta y)^{n-m+1}\left(1-\beta y^{-1}\right)^{n+m+1}=\sum_{k-l=-\infty}^{\infty} E_{k-l}^{n,m} y^{k-l-m}, \tag{VI.3.7}$$

где при $k-l-m \geqslant 0$ коэффициенты $E_{k-l}^{n,m}$ определяются формулой

$$E_{k-l}^{n,m}=(-\beta)^{k-l-m}\sum_{s=0}^{\infty} C_{n-m+1}^{k-l-m+s} C_{n+m+1}^{s} \beta^{2s}. \tag{VI.3.8}$$

Как мы увидим вскоре, случай отрицательных значений $k-l-m$ легко сводится к указанному случаю.

Разложим теперь последний сомножитель в выражении (VI.3.5) для функции U_k в ряд по степеням y. Тогда, используя (V.2.1), получим

$$\exp\left[\frac{ke}{2}\left(y-y^{-1}\right)\right]=\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(ke)\, y^{p}, \tag{VI.3.9}$$

где $J_p(ke)$ — функция Бесселя.

Подставляя равенства (VI.3.2) и (VI.3.7) в (VI.3.5), находим

$$U_k=\frac{1}{(1+\beta^2)^{n+1}}\sum_{k-l=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} E_{k-l}^{n,m} J_p(ke)\, y^{k-l+p}.$$

В соответствии с теоремой Коши отсюда имеем следующую формулу для $X_{n,m}^{(k)}$:

$$X_{n,m}^{(k)}=\frac{1}{(1+\beta^2)^{n+1}}\sum_{l=-\infty}^{\infty} E_{k-l}^{n,m} J_l(ke). \tag{VI.3.10}$$

Эта формула, таким образом, выражает коэффициент Ганзена через функцию Бесселя и коэффициенты $E_{k-l}^{n,m}$. Рассмотрим подробнее эти коэффициенты.

Запишем равенство (VI.3.8) в виде

$$E_{k-l}^{n,m} = (-\beta)^{k-l-m}\left[C_{n-m+1}^{k-l-m} + \sum_{s=1}^{\infty} C_{n-m+1}^{k-l-m+s} C_{n+m+1}^{s} \beta^{2s}\right], \tag{VI.3.11}$$

где, согласно (VI.3.6),

$$C_{n+m+1}^{s} = \frac{(n+m+1)(n+m)\dots(n+m+1-s+1)}{1\cdot 2\dots s} \tag{VI.3.12}$$

и

$$C_{n-m+1}^{k-l-m+s} = \frac{(n-m+1)(n-m)\dots(n-k+l+1-s+1)}{1\cdot 2\dots(k-l-m+s)}.$$

Преобразуем последнее выражение. Имеем

$$C_{n-m+1}^{k-l-m+s} = C_{n-m+1}^{k-l-m}\frac{1\cdot 2\dots(k-l-m)}{(n-m+1)(n-m)\dots(n-k+l+1+1)}\times$$
$$\times\frac{(n-m+1)(n-m)\dots(n-k+l+1-s+1)}{[1\cdot 2\dots(k-l-m)][(k-l-m+1)\dots(k-l-m+s)]}.$$

Поэтому

$$C_{n-m+1}^{k-l-m+s} = C_{n-m+1}^{k-l-m}\frac{(n-k+l+1)(n-k+l)\dots(n-k+l+1-s+1)}{(k-l-m+1)(k-l-m+2)\dots(k-l-m+s)}. \tag{VI.3.13}$$

Подставим формулу (VI.3.12) и (VI.3.13) в (VI.3.11). Это даст

$$E_{k-l}^{n,m} = (-\beta)^{k-l-m} C_{n-m+1}^{k-l-m}\times$$
$$\times\left\{1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-n-m-1)(-n-m)\dots(-n-m-1+s-1)}{1\cdot 2\dots s}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(k-l-n-1)(k-l-n)\dots(k-l-n-1+s-1)}{(k-l-m+1)(k-l-m+2)\dots(k-l-m+s)}\beta^{2s}\right\}, \tag{VI.3.14}$$

так что

$$E_{k-l}^{n,m} = (-\beta)^{k-l-m} C_{n-m+1}^{k-l-m}\left\{1 - \frac{(n+m+1)(k-l-n-1)}{1\,(k-l-m+1)}\beta^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+m+1)(n+m)(k-l-n-1)(k-l-n)}{1\cdot 2\,(k-l-m+1)(k-l-m+2)}\beta^4 + \dots\right\}.$$

Отметим одно свойство, которым обладают коэффициенты $E_{k-l}^{n,m}$. Так как левая часть равенства (VI.3.7) не изменяется при замене y на y^{-1} и m на $-m$, то при такой замене не должна изменяться и правая часть. Отсюда легко выводим, что

$$E_{-(k-l)}^{n,-m} = E_{k-l}^{n,m}. \qquad \text{(VI.3.15)}$$

Таким образом, вычисление коэффициентов $E_{k-l}^{n,m}$, для которых $k-l-m$ отрицательно, сводится к нахождению коэффициентов, для которых $k-l-m$ положительно. Другими словами, формулы (VI.3.14) и (VI.3.15) решают задачу определения коэффициентов $E_{k-l}^{n,m}$ как для положительных, так и для отрицательных значений $k-l-m$.

Выражение $E_{k-l}^{n,m}$ через гипергеометрическую функцию будет дано в § VIII.14.

§ VI.4. Рекуррентные соотношения между коэффициентами Ганзена

Возьмем очевидное равенство

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \frac{1+e\cos v}{1-e^2}$$

и подставим в него формулу

$$\cos v = \frac{1}{2}[\exp iv + \exp(-iv)].$$

Это нам даст такое соотношение:

$$(1-e^2)\left(\frac{r}{a}\right)^n = \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} + \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \frac{e}{2}[\exp iv + \exp(-iv)],$$

умножая которое на $\exp imv$, получим

$$(1-e^2)\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imv = \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \exp imv + $$
$$+ \frac{e}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \exp i(m+1)v + \frac{e}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \exp i(m-1)v. \qquad \text{(VI.4.1)}$$

Но, согласно определению коэффициентов Ганзена,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n,m}^{(k)} \exp ikM,$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \exp imv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n+1,m}^{(k)} \exp ikM,$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \exp i(m+1)v = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n+1,m+1}^{(k)} \exp ikM, \tag{VI.4.2}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \exp i(m-1)v = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n+1,m-1}^{(k)} \exp ikM.$$

Подставляя эти формулы в (VI.4.1) и приравнивая в правой и левой частях полученного равенства члены при $\exp ikM$, будем иметь следующее рекуррентное соотношение:

$$(1-e^2) X_{n,m}^{(k)} = X_{n+1,m}^{(k)} + \frac{e}{2}\left[X_{n+1,m+1}^{(k)} + X_{n+1,m-1}^{(k)}\right]. \tag{VI.4.3}$$

Выведем второе рекуррентное соотношение. Для этого продифференцируем первое равенство (VI.4.2) по M. Это даст

$$n\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right) + im\left(\frac{r}{a}\right)^{n} \frac{\partial v}{\partial M}\Bigg] \exp imv =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikX_{n,m}^{(k)} \exp ikM. \tag{VI.4.4}$$

Но из формул § V.9 следует, что

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial M} = \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \sqrt{1-e^2}.$$

Подставим эти равенства и формулу

$$\sin v = \frac{i}{2}\left[\exp(-iv) - \exp iv\right]$$

в (VI.4.4). Тогда получим

$$\frac{ne}{2\sqrt{1-e^2}}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \exp i(m-1)v - \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \exp i(m+1)v\right] +$$

$$+ m\sqrt{1-e^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \exp imv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kX_{n,m}^{(k)} \exp ikM.$$

Отсюда, если воспользоваться определением коэффициентов $X_{n,m}^{(k)}$, находим

$$\frac{ne}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n-1,m-1}^{(k)} \exp ikM - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n-1,m+1}^{(k)} \exp ikM\right\} +$$
$$+ m\sqrt{1-e^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n-2,m}^{(k)} \exp ikM = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kX_{n,m}^{(k)} \exp ikM.$$

Приравнивая здесь друг другу коэффициенты при $\exp ikM$, будем иметь

$$k\sqrt{1-e^2}\, X_{n,m}^{(k)} = m(1-e^2)\, X_{n-2,m}^{(k)} +$$
$$+ \frac{ne}{2}\left[X_{n-1,m+1}^{(k)} - X_{n-1,m-1}^{(k)}\right]. \qquad \text{(VI.4.5)}$$

Если подставить в это рекуррентное соотношение формулу (VI.4.3), в которой n заменено на $n-2$, получим

$$k\sqrt{1-e^2}\, X_{n,m}^{(k)} = mX_{n-1,m}^{(k)} +$$
$$+ \frac{e}{2}\left[(m+n)\, X_{n-1,m-1}^{(k)} + (m-n)\, X_{n-1,m+1}^{(k)}\right]. \quad \text{(VI.4.6)}$$

Преобразуем полученное рекуррентное соотношение. Для этого сначала запишем его в виде

$$k(1-e^2)^{3/2} X_{n,m}^{(k)} = m(1-e^2)\, X_{n-1,m}^{(k)} +$$
$$+ \frac{1}{2} e(1-e^2)\left[(m+n)\, X_{n-1,m-1}^{(k)} + (m-n)\, X_{n-1,m+1}^{(k)}\right].$$
$$\text{(VI.4.7)}$$

Но из формулы (VI.4.3) следует, что

$$(1-e^2)\, X_{n-1,m}^{(k)} = X_{n,m}^{(k)} + \frac{e}{2}\left[X_{n,m+1}^{(k)} + X_{n,m-1}^{(k)}\right], \quad \text{(VI.4.8)}$$

$$(1-e^2)\, X_{n-1,m+1}^{(k)} = X_{n,m+1}^{(k)} + \frac{e}{2}\left[X_{n,m+2}^{(k)} + X_{n,m}^{(k)}\right], \quad \text{(VI.4.9)}$$

$$(1-e^2)\, X_{n-1,m-1}^{(k)} = X_{n,m-1}^{(k)} + \frac{e}{2}\left[X_{n,m}^{(k)} + X_{n,m-2}^{(k)}\right]. \quad \text{(VI.4.10)}$$

Поэтому, подставляя эти равенства в (VI.4.7), будем иметь

$$k(1-e^2)^{3/2}X_{n,m}^{(k)} = m\left(1+\frac{e^2}{2}\right)X_{n,m}^{(k)} + \frac{e}{2}(2m-n)X_{n,m+1}^{(k)} + \\ + \frac{e}{2}(2m+n)X_{n,m-1}^{(k)} + \frac{e^2}{4}(m-n)X_{n,m+2}^{(k)} + \\ + \frac{e^2}{4}(m+n)X_{n,m-2}^{(k)}. \quad \text{(VI.4.11)}$$

Найденное рекуррентное соотношение, таким образом, связывает пять коэффициентов Ганзена с одинаковыми верхним и первым нижним значками.

§ VI.5. Формула для производной

Возьмем равенство

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imv = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n,m}^{(k)} \exp ikM$$

и продифференцируем его по e. Тогда

$$n\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{r}{a}\right)\exp imv + im\left(\frac{r}{a}\right)^n\frac{\partial v}{\partial e}\exp imv = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{dX_{n,m}^{(k)}}{de}\exp ikM. \quad \text{(VI.5.1)}$$

Но формулы § V.9 дают

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{r}{a}\right) = -\cos v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \left(\frac{1}{1-e^2}+\frac{a}{r}\right)\sin v.$$

Поэтому (VI.5.1) примет вид

$$-n\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\cos v\exp imv + \frac{m}{1-e^2}\left(\frac{r}{a}\right)^n i\sin v\exp imv + \\ + m\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} i\sin v\exp imv = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{dX_{n,m}^{(k)}}{de}\exp ikM. \quad \text{(VI.5.2)}$$

Воспользуемся теперь равенствами

$$\cos v \exp imv = \frac{1}{2}\left[\exp i(m+1) + \exp i(m-1)v\right],$$

$$i \sin v \exp imv = \frac{1}{2}\left[\exp i(m+1) - \exp i(m-1)v\right]$$

и определением коэффициентов Ганзена. Тогда будем иметь

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \cos v \exp imv = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n-1,m+1}^{(k)} \exp ikM + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n-1,m-1}^{(k)} \exp ikM,$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} i \sin v \exp imv = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n-1,m+1}^{(k)} \exp ikM - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n-1,m-1}^{(k)} \exp ikM,$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{n} i \sin v \exp imv = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n,m+1}^{(k)} \exp ikM - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{n,m-1}^{(k)} \exp ikM.$$

Подставляя эти соотношения в (VI.5.2) и приравнивая в левой и правой частях полученного равенства члены при $\exp ikM$, найдем

$$\frac{dX_{n,m}^{(k)}(e)}{de} = \frac{m}{1-e^2}\frac{1}{2}\left[X_{n,m+1}^{(k)} - X_{n,m-1}^{(k)}\right] - \\ - \frac{1}{2}\left[(n-m)X_{n-1,m+1}^{(k)} + (n+m)X_{n-1,m-1}^{(k)}\right]. \quad \text{(VI.5.3)}$$

Подставим сюда равенства (VI.4.9) и (VI.4.10). Тогда получим

$$2(1-e^2)\frac{dX_{n,m}^{(k)}}{de} = -neX_{n,m}^{(k)} - (n-2m)X_{n,m+1}^{(k)} - \\ - (n+2m)X_{n,m-1}^{(k)} - \frac{e}{2}\left[(n-m)X_{n,m+2}^{(k)} + (n+m)X_{n,m-2}^{(k)}\right]. \quad \text{(VI.5.4)}$$

Комбинируя эту формулу с формулой (VI.4.11), окончательно найдем

$$2e(1-e^2)\frac{dX_{n,m}^{(k)}}{de} = -[2m+(n+m)e^2-2k(1-e^2)^{3/2}]X_{n,m}^{(k)} - \\ -(2n+4m)eX_{n,m-1}^{(k)} - (n+m)e^2X_{n,m-2}^{(k)}. \qquad \text{(VI.5.5)}$$

Полученная формула является наиболее удобной для вычисления производной коэффициента Ганзена.

§ VI.6. Коэффициенты $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$

Значения $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$ определяются как коэффициенты разложений:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n,m} \cos kM,$$
$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv = \sum_{k=1}^{\infty} S_k^{n,m} \sin kM. \qquad \text{(VI.6.1)}$$

Как мы видели в § VI.2, они связаны с коэффициентами Ганзена следующими формулами:

$$C_0^{n,m} = X_{n,m}^{(0)},$$
$$C_k^{n,m} = X_{n,m}^{(k)} + X_{n,m}^{(-k)},$$
$$S_k^{n,m} = X_{n,m}^{(k)} - X_{n,m}^{(-k)}.$$

Для этих коэффициентов Кэли [3] составил таблицы, которые дают $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$ с точностью до e^7 для

$$n=-5,\ -4,\ \ldots,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ 4,\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\ 5.$$

Так, например, для $n=-3$ и $m=0$ и $n=-3$, $m=2$ имеем

$$C_0^{-3,0} = 1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4+\frac{35}{16}e^6+\ldots,$$
$$C_1^{-3,0} = 3e+\frac{27}{8}e^3+\frac{261}{64}e^5+\ldots,$$
$$C_2^{-3,0} = \frac{9}{2}e^2+\frac{7}{2}e^4+\frac{141}{32}e^6+\ldots,$$
$$C_3^{-3,0} = \frac{53}{8}e^3+\frac{393}{128}e^5+\ldots, \qquad \text{(VI.6.2)}$$
$$C_4^{-3,0} = \frac{77}{8}e^4+\frac{129}{80}e^6+\ldots,$$

$$C_5^{-3,0} = \frac{1773}{128} e^5 + \ldots,$$

$$C_6^{-3,0} = \frac{3167}{160} e^6 + \ldots,$$

$$C_1^{-3,2} = -\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 + \frac{1}{768} e^5 + \ldots,$$

$$C_2^{-3,2} = 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{41}{48} e^4 - \frac{133}{1440} e^6 + \ldots,$$

$$C_3^{-3,2} = \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 + \frac{4971}{1280} e^5 - \ldots,$$

$$C_4^{-3,2} = \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 + \frac{9079}{720} e^6 - \ldots, \qquad \text{(VI.6.3)}$$

$$C_5^{-3,2} = \frac{845}{48} e^3 + \frac{32525}{768} e^5 + \ldots,$$

$$C_6^{-3,2} = \frac{533}{16} e^4 - \frac{13827}{160} e^6 + \ldots,$$

$$C_7^{-3,2} = \frac{228347}{3840} e^5 + \ldots,$$

$$C_8^{-3,2} = \frac{73369}{720} e^6 + \ldots,$$

$$S_1^{-3,2} = -\frac{1}{2} e + \frac{1}{24} e^3 - \frac{7}{256} e^5 + \ldots,$$

$$S_2^{-3,2} = 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{37}{48} e^4 - \frac{217}{1440} e^6 + \ldots,$$

$$S_3^{-3,2} = \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 + \frac{4809}{1280} e^5 - \ldots,$$

$$S_4^{-3,2} = \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 + \frac{8951}{720} e^6 - \ldots, \qquad \text{(VI.6.4)}$$

$$S_5^{-3,2} = \frac{845}{48} e^3 - \frac{32525}{768} e^5 + \ldots,$$

$$S_6^{-3,2} = \frac{533}{16} e^4 - \frac{13827}{160} e^6 + \ldots,$$

$$S_7^{-3,2} = \frac{228347}{3840} e^5 + \ldots,$$

$$S_8^{-3,2} = \frac{73369}{720} e^6 + \ldots$$

Разложения коэффициентов Ганзена по степеням эксцентриситета с точностью до e^{20} получены Ярнагиным [4].

§ VI.7. Операторы Ньюкома

Рассмотрим следующую задачу. Пусть нам дана функция двух переменных

$$\varphi(\ln r,\ w) = F(\ln r)\exp isw, \qquad \text{(VI.7.1)}$$

где $i=\sqrt{-1}$, s — любое целое число, r и w — радиус-вектор и истинная долгота в эллиптическом движении, так что

$$w = l + f, \quad f = v - M, \qquad \text{(VI.7.2)}$$

причем l — средняя долгота, а f — уравнение центра.

Если положить

$$\ln r = \ln a + \rho, \qquad \text{(VI.7.3)}$$

где a — большая полуось орбиты, то (VI.7.1) запишется в виде

$$\varphi = F(\ln a + \rho)\exp is(l+f). \qquad \text{(VI.7.4)}$$

Так как здесь величины ρ и f зависят от эксцентриситета e и средней аномалии M, то можно рассматривать φ как функцию e и M. Разложим эту функцию в ряд по степеням эксцентриситета, коэффициенты которого будут периодическими функциями M.

Эта задача решается следующим образом. Поскольку, как было показано в § V.14 и § V.13, величины ρ и f разлагаются в ряды по степеням e:

$$\begin{aligned}
\rho &= -e\cos M + e^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos 2M\right) + \\
&\qquad + e^3\left(\frac{3}{8}\cos M - \frac{17}{24}\cos 3M\right) + \ldots, \\
f &= 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \\
&\qquad + e^3\left(-\frac{1}{4}\sin M + \frac{13}{12}\sin 3M\right) + \ldots,
\end{aligned} \qquad \text{(VI.7.5)}$$

то можно сначала разложить (VI.7.4) в ряд Тейлора по степеням ρ и f. Подставляя затем в этот ряд вместо ρ и f ряды (VI.7.5) и располагая результат по степеням e, мы и получим нужное нам разложение.

Напомним теперь, что в случае функции одной переменной ряд Тейлора имеет вид

$$\varphi(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x).$$

Но, так как

$$\exp\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!},$$

то этот ряд можно записать в такой символической форме:

$$\varphi(x + \Delta x) = \exp\left(\Delta x \frac{d}{dx}\right) \varphi(x).$$

Аналогичным образом в случае функции любого числа переменных можно написать

$$\varphi(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ \ldots) = \\ = \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right) \varphi(x, y, \ldots). \quad \text{(VI.7.6)}$$

После этого отступления займемся практическим нахождением разложения функции (VI.7.1) в ряд по степеням e.

Если ввести обозначения

$$D = \frac{\partial}{\partial \ln a}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial l},$$

то, согласно (VI.7.6), мы имеем сначала такое символическое равенство:

$$\varphi = \exp(pD + fD_1)\varphi(\ln a,\ l).$$

Положим, далее,

$$\varphi_0 = \varphi(\ln a,\ l) = F(\ln a)\exp isl. \quad \text{(VI.7.7)}$$

Тогда, поскольку

$$D_1\varphi_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial l} = is\varphi_0, \quad D_1 = is,$$

это равенство примет вид

$$\varphi = \exp(\rho D + isf)\varphi_0. \quad \text{(VI.7.8)}$$

Запишем теперь ряды (VI.7.5) в виде

$$\begin{aligned} \rho &= e\rho_1 + e^2\rho_2 + e^3\rho_3 + \ldots \\ f &= ef_1 + e^2 f_2 + e^3 f_3 + \ldots \end{aligned} \quad \text{(VI.7.9)}$$

и введем обозначение

$$z = \exp iM.$$

Тогда из формул (VI.7.5) для коэффициентов ρ_1, f_1, ρ_2, $f_2 \dots$ найдем такие выражения:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 = -\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} z^{-1}, \\
&\rho_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} z^2 - \frac{3}{8} z^{-2}, \\
&\rho_3 = \frac{3}{16} z + \frac{3}{16} z^{-1} - \frac{17}{48} z^3 - \frac{17}{48} z^{-3}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{(VI.7.10)} \\
&f_1 = -iz + iz^{-1}, \\
&f_2 = -\frac{5}{8} iz^2 + \frac{5}{8} iz^{-2}, \\
&f_3 = \frac{1}{8} iz - \frac{1}{8} iz^{-1} - \frac{13}{24} iz^3 + \frac{13}{24} iz^{-3}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Далее, с помощью формул (VI.7.9) находим

$$\exp(\rho D + isf) = \exp[e(\rho_1 D + isf_1)] \times \\ \times \exp[e^2(\rho_2 D + isf_2)] \exp[e^3(\rho_3 D + isf)] \dots,$$

или, располагая по степеням e,

$$\exp(\rho D + isf) = k_0 + ek_1 + e^2 k_2 + \dots, \qquad \text{(VI.7.11)}$$

где

$$\begin{aligned}
&k_0 = 1, \\
&k_1 = \rho_1 D + isf_1, \\
&k_2 = \frac{1}{2} (\rho_1 D + isf_1)^2 + (\rho_2 D + isf_2), \\
&k_3 = \frac{1}{6} (\rho_1 D + isf_1)^3 + (\rho_3 D + isf_3) + (\rho_1 D + isf_1)(\rho_2 D + isf_2), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Подставляя сюда формулы (VI.7.10), получим

$$\begin{aligned}
&k_0 = 1, \\
&k_1 = \left(-\frac{1}{2} D + s\right) z + \left(-\frac{1}{2} D - s\right) z^{-1}, \\
&k_2 = \frac{1}{8} [D^2 + (-4s - 3) D + 5s + 4s^2] z^2 + \qquad \text{(VI.7.12)} \\
&+ \frac{1}{8} [D^2 + (4s - 3) D - 5s + 4s^2] z^{-2} + \frac{1}{4} (D^2 + D - 4s^2), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Запишем этот результат в виде

$$
\begin{aligned}
&k_0 = \Pi_0^0,\\
&k_1 = \Pi_1^1 z + \Pi_{-1}^1 z^{-1},\\
&k_2 = \Pi_2^2 z^2 + \Pi_0^2 + \Pi_{-2}^2 z^{-2},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&k_q = \Pi_q^q z^q + \Pi_{q-2}^q z^{q-2} + \ldots + \Pi_{-q}^q z^{-q},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
\qquad (\text{VI.7.13})
$$

где через $\Pi_q^r = \Pi_q^r(D, s)$ обозначены многочлены q-й степени относительно D и s. Эти символические многочлены и называются операторами Ньюкома.

Подставляя (VI.7.13) в (VI.7.11), будем иметь

$$
\exp(\rho D + isf) =
$$

$$
= \Pi_0^0 + e\left(\Pi_1^1 z + \Pi_{-1}^1 z^{-1}\right) + e^2\left(\Pi_2^2 z^2 + \Pi_0^2 + \Pi_{-2}^2 z^{-2}\right) + \ldots,
$$

или

$$
\exp(\rho D + isf) = \sum_{r=0}^{\infty} e^r \sum_{q=-r}^{r} \Pi_q^r z^q. \qquad (\text{VI.7.14})
$$

Сопоставляя равенства (VI.7.13) и (VI.7.12), мы для первых $\Pi_q^r(D, s)$ находим следующие явные выражения:

$$
\begin{aligned}
\Pi_0^0 &= 1,\\
2\Pi_1^1 &= -D + 2s,\\
2\Pi_{-1}^1 &= -D - 2s,\\
4\Pi_0^2 &= D^2 + D - 4s^2,\\
8\Pi_2^2 &= D^2 + (-4s - 3)D + 4s^2 + 5s,\\
8\Pi_{-2}^2 &= D^2 + (4s - 3)D + 4s^2 - 5s.
\end{aligned}
\qquad (\text{VI.7.15})
$$

Из этих равенств также нетрудно усмотреть, что

$$
\begin{aligned}
&\Pi_q^r = (D, -s) = \Pi_{-q}^r(D, s),\\
&\Pi_q^r = (D, s) = 0, \quad \text{если} \quad r < |q|,\\
&r - |q| = 0, 2, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Вернемся, однако, к формуле (VI.7.8). С помощью (VI.7.14) и (VI.7.7) она теперь примет вид

$$
\varphi = \sum_{r=0}^{\infty} e^r \sum_{q=-2}^{r} Q_q^r \lambda^s z^q,
$$

где $\lambda = \exp il$, а через Q_q^r обозначен результат применения оператора $\Pi_q^r(D, s)$ к функции $F(\ln a)$, т. е.

$$Q_q^r = \Pi_q^r F(\ln a).$$

При этом умножение D^k на $F(\ln a)$ означает

$$D^k F(\ln a) = \frac{d^k F(\ln a)}{d(\ln a)^k}.$$

Дальнейшее рассмотрение операторов Ньюкома мы продолжим в § VI.8—VI.10.

§ VI.8. Разложение коэффициентов Ганзена в ряды по степеням эксцентриситета. Использование многочленов Ньюкома

Имея в виду (VI.7.2) и (VI.7.3), мы можем написать

$$\exp(\rho D + isf) = \left(\frac{r}{a}\right)^D \exp is(v - M),$$

а если воспользоваться равенством (VI.7.14), то

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D \exp is(v - M) = \sum_{p=0}^{\infty} e^p \sum_{q=-p}^{p} \Pi_q^p(D, s) \exp iqM.$$

Изменяя здесь порядок суммирования, будем иметь

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D \exp isv = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{p} \Pi_q^p(D, s)\, e^p \exp i(q+s)M,$$

где

$$p - |q| = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ \infty. \tag{VI.8.1}$$

Таким образом,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp imv = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{p} \Pi_q^p(n, m)\, e^p \exp i(q+m)M, \tag{VI.8.2}$$

где p принимает значения из области (VI.8.1).

Сравнив теперь формулу (VI.8.2) с (VI.2.1) и (VI.2.3), сразу получаем

$$X_{n,m}^{(m+q)} = \sum_{p} \Pi_q^p(n, m)\, e^p.$$

Полагая здесь

$$m + q = k, \quad p = |k - m| + 2j,$$

окончательно находим следующую формулу для коэффициента Ганзена $X_{n,m}^{(k)}$:

$$X_{n,m}^{(k)} = e^{|k-m|} \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{k-m}^{|k-m|+2j}(n, m)\, e^{2j}. \qquad \text{(VI.8.3)}$$

Поскольку, как мы видели в § VI.7, операторы Ньюкома $\Pi_q^p(D, s)$ являются многочленами относительно D и s, то величины $\Pi_q^p(n, m)$, входящие в формулу (VI.8.3), будем называть просто многочленами Ньюкома. Первые из них таковы:

$$\begin{aligned}
&\Pi_0^0 = 1,\\
&2\Pi_1^1 = -n + 2m,\\
&4\Pi_0^2 = n^2 + n - 4m^2,\\
&8\Pi_2^2 = n^2 - (3 + 4m)\, n + 5m + 4m^2,\\
&16\Pi_1^3 = -n^3 + (1 + 2m)\, n^2 + (3 + 5m + 4m^2)\, n -\\
&\qquad\qquad - 2m - 10m^2 - 8m^3,\\
&48\Pi_3^3 = -n^3 + (9 + 6m)\, n^2 - (17 + 33m + 12m^2)\, n +\\
&\qquad\qquad + 26m + 30m^2 + 8m^3, \qquad \text{(VI.8.4)}\\
&64\Pi_0^4 = n^4 - 2n^3 - (1 + 8m^2)\, n^2 + 2n - 9m^2 + 16m^4,\\
&96\Pi_2^4 = n^4 - (6 + 4m)\, n^3 - (1 - 3m)\, n^2 +\\
&+ (22 + 47m + 48m^2 + 16m^3)n - (22m + 64m^2 + 60m^3 + 16m^4),\\
&384\Pi_4^4 = n^4 - (18 + 8m)\, n^3 + (95 + 102m + 24m^2)\, n^2 -\\
&\qquad - (142 + 330m + 192m^2 + 32m^3)\, n +\\
&\qquad\qquad + 206m + 283m^2 + 120m^3 + 16m^4.
\end{aligned}$$

При этом

$$\Pi_{-q}^p(n, m) = \Pi_q^p(n, -m),$$
$$\Pi_q^p(n, m) = 0, \quad \text{если} \quad p < |q|.$$

Рекуррентные формулы для многочленов Ньюкома мы выведем в следующем параграфе.

§ VI.9. Рекуррентные соотношения для многочленов Ньюкома

Для случая $k \geqslant m$, согласно (VI.8.3), мы имеем

$$X_{n,m}^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{k-m}^{k-m+2j}(n, m)\, e^{k-m+2j}. \qquad \text{(VI.9.1)}$$

Подставим эту формулу в (VI.5.4) и положим

$$k - m = q, \quad k - m + 2j = r.$$

Тогда, приравнивая в левой и правой частях полученного равенства члены с e^{r-1}, найдем

$$\begin{aligned} 4r\Pi_q^r(n, m) = {} & (4m - 2n)\,\Pi_{q-1}^{r-1}(n, m+1) - \\ & - (4m + 2n)\,\Pi_{q+1}^{r-1}(n, m-1) + (4r - 2n - 8)\,\Pi_q^{r-2}(n, m) + \\ & + (m - n)\,\Pi_{q-2}^{r-2}(n, m+2) - (m + n)\,\Pi_{q+2}^{r-2}(n, m-2). \end{aligned} \qquad \text{(VI.9.2)}$$

Если подставить (VI.9.1) в (VI.5.5) и приравнять в полученном равенстве коэффициенты при e^r, то аналогичным образом найдем следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} 2(r - q)\,\Pi_q^r(n, m) - 2(m + q)\sum_{s=1}^{\infty} C_s \Pi_q^{r-2s}(n, m) + {} & \\ + (n + m - 2r + 4)\,\Pi_q^{r-2}(n, m) + (2n + 4m)\,\Pi_{q+1}^{r-1}(n, m-1) + {} & \\ + (n + m)\,\Pi_{q+2}^{r-2}(n, m-2) = 0, & \end{aligned} \qquad \text{(VI.9.3)}$$

где

$$C_s = (-1)^s \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{3}{2} - s + 1\right)}{s!}. \qquad \text{(VI.9.4)}$$

Положим теперь в (VI.9.2) $r = q$. Тогда, принимая во внимание, что

$$\Pi_q^r = 0, \quad \text{если} \quad r < |q|,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} 4q\Pi_q^q(n, m) = {} & (4m - 2n)\,\Pi_{q-1}^{q-1}(n, m+1) + \\ & + (m - n)\,\Pi_{q-2}^{q-2}(n, m+2). \end{aligned} \qquad \text{(VI.9.5)}$$

Если положить в (VI.9.3) $r = q + 2$, то аналогичным образом найдем такое рекуррентное соотношение:

$$4\Pi_q^{q+2}(n, m) + (n + 4m + q)\Pi_q^q(n, m) +$$
$$+ (2n + 4m)\Pi_{q+1}^{q+1}(n, m - 1) = 0. \quad \text{(VI.9.6)}$$

Итак, мы вывели несколько рекуррентных соотношений, связывающих различные многочлены Ньюкома. Поскольку мы считали, что $k \geqslant m$, то эти соотношения имеют место при $q \geqslant 0$. В случае отрицательного нижнего значка надо воспользоваться равенством

$$\Pi_{-q}^r(n, m) = \Pi_q^r(n, -m),$$

которое было установлено в § VI.7.

§ VI.10. Вычисление многочленов Ньюкома и коэффициентов Ганзена

В основу вычисления многочленов Ньюкома $\Pi_q^r(n, m)$ мы положим рекуррентные формулы, полученные в предыдущем параграфе. Но мы их несколько преобразуем с тем, чтобы придать им более симметричную форму. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Поскольку

$$\Pi_q^r(n, m) = \Pi_{-q}^r(n, -m), \qquad \text{(VI.10.1)}$$

можно ограничиться случаем $q \geqslant 0$. Так как, далее,

$$\Pi_q^r(n, m) = 0 \quad (r < q), \qquad \text{(VI.10.2)}$$

то будем считать, что $r \geqslant q$.

Положим теперь

$$r = \rho + \sigma, \quad q = \rho - \sigma$$

и введем обозначение

$$\widehat{\Pi}_\sigma^\rho(n, m) = \Pi_{\rho-\sigma}^{\rho+\sigma}(n, m). \qquad \text{(VI.10.3)}$$

Из сказанного выше следует, что $\rho \geqslant \sigma \geqslant 0$, причем, конечно, ρ и σ — целые числа, ибо разность $r - q$ есть четное число.

Вместо (VI.10.1) и (VI.10.2) теперь будем иметь

$$\widehat{\Pi}_\sigma^\rho(n, m) = \widehat{\Pi}_\rho^\sigma(n, -m), \qquad \text{(VI.10.4)}$$

$$\widehat{\Pi}_\sigma^\rho(n, m) = 0 \quad (\sigma < 0) \qquad \text{(VI.10.5)}$$

и, далее, согласно (VI.8.4),

$$\widehat{\Pi}_0^0(n, m) = 1, \quad \widehat{\Pi}_0^1 = m - \frac{n}{2}. \tag{VI.10.6}$$

Подставим (VI.10.3) в (VI.9.5) и (VI.9.3). Тогда для многочленов $\widehat{\Pi}_\sigma^\rho$ получим следующие рекуррентные формулы:

$$4\rho\, \widehat{\Pi}_0^\rho(n, m) = (4m - 2n)\, \widehat{\Pi}_0^{\rho-1}(n, m+1) + \\ + (m - n)\, \widehat{\Pi}_0^{\rho-2}(n, m+2) \tag{VI.10.7}$$

и

$$4\sigma \widehat{\Pi}_\sigma^\rho(n, m) = \\ = -(2n + 4m)\, \widehat{\Pi}_{\sigma-1}^\rho(n, m-1) - (n+m)\, \widehat{\Pi}_{\sigma-2}^\rho(n, m-2) - \\ - (n + 4m + \rho - 5\sigma + 4)\, \widehat{\Pi}_{\sigma-1}^{\rho-1}(n, m) + \\ + 2(m + \rho - \sigma) \sum_{\tau \geqslant 2} C_\tau \widehat{\Pi}_{\sigma-\tau}^{\rho-\tau}(n, m), \tag{VI.10.8}$$

где

$$C_\tau = (-1)^\tau \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) \ldots \left(\frac{3}{2} - \tau + 1\right)}{\tau!}, \tag{VI.10.9}$$

причем

$$\tau = 2, 3, \ldots, \min(\rho, \sigma). \tag{VI.10.10}$$

Если в этих формулах принять за исходные данные величины, даваемые равенствами (VI.10.6), то последовательно можно найти

$$\begin{array}{lll} \widehat{\Pi}_0^2(n, m), & \widehat{\Pi}_1^1(n, m), & \\ \widehat{\Pi}_0^3(n, m), & \widehat{\Pi}_1^2(n, m), & \\ \widehat{\Pi}_0^4(n, m), & \widehat{\Pi}_1^3(n, m), & \widehat{\Pi}_2^2(n, m), \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

При этом элементы первого столбца вычисляются по формуле (VI.10.7), а остальные — по формуле (VI.10.8).

Итак, мы рассмотрели порядок вычисления многочленов $\widehat{\Pi}_\sigma^\rho(n, m)$. Что касается многочленов Ньюкома и коэффициентов Ганзена, то они теперь могут быть найдены по формулам

$$\Pi_q^r(n, m) = \widehat{\Pi}_{\frac{r-q}{2}}^{\frac{r+q}{2}}(n, m), \tag{VI.10.11}$$

$$X_{n,m}^{(k)} = e^{k-m} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \widehat{\Pi}_\sigma^{k-m+\sigma}(n, m)\, e^{2\sigma}, \tag{VI.10.12}$$

которые следуют из (VI.10.3) и (VI.8.3).

Первая из этих формул дает нам многочлены Ньюкома с неотрицательными q. В случае отрицательных q надо воспользоваться формулой (VI.10.1). Формула (VI.10.12) имеет место при $k \geqslant m$. В случае, если $k < m$, для вычисления коэффициентов Ганзена следует воспользоваться равенством

$$X_{n,m}^{(k)} = X_{n,-m}^{(-k)}. \qquad \text{(VI.10.13)}$$

Для вычисления первой и второй производных коэффициентов Ганзена по эксцентриситету имеем такие формулы:

$$\frac{dX_{n,m}^{(k)}}{de} = e^{k-m-1} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (k-m+2\sigma)\, \widehat{\Pi}_{\sigma}^{k-m+\sigma}(n, m)\, e^{2\sigma}, \qquad \text{(VI.10.14)}$$

$$\frac{d^2 X_{n,m}^{(k)}}{de^2} = e^{k-m-2} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (k-m+2\sigma)(k-m-1+2\sigma)\, \widehat{\Pi}_{\sigma}^{k-m+\sigma}(n, m)\, e^{2\sigma}, \qquad \text{(VI.10.15)}$$

которые следуют из (VI.10.12).

§ VI.11. Коэффициенты $M_n^{(k)}$

Пусть r и p — радиус-вектор и параметр орбиты в эллиптическом движении. Тогда

$$\frac{r}{p} = (1 + e\cos v)^{-1}, \qquad \text{(VI.11.1)}$$

где e — эксцентриситет орбиты, а v — истинная аномалия. Пусть, далее, n есть целое положительное или отрицательное число. Тогда, очевидно, $\left(\frac{r}{p}\right)^n$ можно представить в виде

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n = M_n^{(0)} + 2\sum_{k=1}^{\infty} M_n^{(k)} \cos kv, \qquad \text{(VI.11.2)}$$

где коэффициенты $M_n^{(k)}$, которые являются функциями e, определяются формулой

$$M_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos kv\, dv}{(1 + e\cos v)^n}. \qquad \text{(VI.11.3)}$$

Рассмотрим подробнее эти коэффициенты.

Выведем сначала формулы, позволяющие вычислять $M_n^{(k)}$ для любых значков n и k. Пусть

$$\beta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

так что

$$e = \frac{2\beta}{1+\beta^2}, \quad \sqrt{1-e^2} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}.$$

Тогда будем иметь

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n = (1+\beta^2)^n (1+2\beta\cos v+\beta^2)^{-n}, \qquad (\text{VI.11.4})$$

а формула (VI.11.3) примет вид

$$M_n^{(k)} = \frac{(1+\beta^2)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos kv\,dv}{(1+2\beta\cos v+\beta^2)^n}. \qquad (\text{VI.11.5})$$

Положим теперь

$$x = \exp iv.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \cos kv &= \frac{1}{2}\left(x^k + x^{-k}\right), \\ 1+2\beta\cos v+\beta^2 &= (1+\beta x)\left(1+\beta x^{-1}\right), \end{aligned} \qquad (\text{VI.11.6})$$

а формула (VI.11.2) преобразуется к виду

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n = M_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} M_n^{(k)}\left(x^k + x^{-k}\right). \qquad (\text{VI.11.7})$$

Так как из (VI.11.3) следует, что

$$M_n^{(-k)}(e) = M_n^{(k)}(e), \qquad (\text{VI.11.8})$$

то вместо (VI.11.7) будем иметь

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_n^{(k)} x^k. \qquad (\text{VI.11.9})$$

Подставляя (VI.11.6) в равенство (VI.11.4), получим

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n = (1+\beta^2)^n (1+\beta x)^{-n}\left(1+\beta x^{-1}\right)^{-n}. \qquad (\text{VI.11.10})$$

Разложим правую часть (VI.11.10) в ряд по степеням x. Имеем

$$(1+\beta x)^{-n} = 1 - n\beta x + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\beta^2 x^2 - \\ - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\beta^3 x^3 + \ldots, \qquad \text{(VI.11.11)}$$

$$(1+\beta x^{-1})^{-n} = 1 - n\beta x^{-1} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\beta^2 x^{-2} - \\ - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\beta^3 x^{-3} + \ldots \qquad \text{(VI.11.12)}$$

Перемножая эти ряды и подставляя результат в (VI.11.10), получим разложение для $\left(\frac{r}{p}\right)^n$ в виде (VI.11.9), где

$$M_n^{(0)} = (1+\beta^2)^n\left\{1 + \frac{n^2}{1}\beta^2 + \left[\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\right]^2\beta^4 + \right. \\ \left. + \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right]^2\beta^6 + \ldots\right\}, \qquad \text{(VI.11.13)}$$

$$M_n^{(k)} = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\ldots k}(-\beta)^k(1+\beta^2)^n \times \\ \times\left\{1 + \frac{n}{1}\frac{n+k}{k+1}\beta^2 + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\frac{(n+k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)}\beta^4 + \ldots\right\}. \qquad \text{(VI.11.14)}$$

Формулы (VI.11.3) и (VI.11.4) показывают, что при $n > 0$ коэффициенты $M_n^{(k)}$ выражаются бесконечными рядами по степеням β. Эти ряды абсолютно сходятся при $\beta < 1$, так как при $\beta < 1$ абсолютно сходятся разложения (VI.11.11) и (VI.11.12). Если $n < 0$ и $k \geqslant -n+1$, то все коэффициенты $M_n^{(k)}$ равны нулю. При $n < 0$ и $k \leqslant -n$ ряды (VI.11.13) и (VI.11.14) превращаются в многочлены.

Рассмотрим, однако, подробнее случай $n < 0$. Полагая $-n = \nu > 0$, в соответствии с (VI.11.3) имеем

$$M_{-\nu}^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 + e\cos v)^\nu \cos kv\, dv. \qquad \text{(VI.11.15)}$$

Формула бинома Ньютона дает

$$(1+e\cos v)^\nu = \sum_{m=0}^{\nu} C_\nu^m e^m \cos^m v, \qquad \text{(VI.11.16)}$$

где, как обычно,

$$C_\nu^m = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1)}{1\cdot 2\ldots m}, \quad C_\nu^0 = 1.$$

Умножая (VI.11.16) на $\cos kv$ и интегрируя по v в пределах от 0 до 2π, получаем

$$\int_0^{2\pi} (1+e\cos v)^\nu \cos kv\,dv = \sum_{m=0}^{\nu} C_\nu^m e^m \int_0^{2\pi} \cos^m v \cos kv\,dv.$$

Но, как известно,

$$\int_0^{2\pi} \cos^m v \cos kv\,dv = 0,$$

если $m-k$ есть нечетное число или $m<k$, и

$$\int_0^{2\pi} \cos^m v \cos kv\,dv = \frac{2\pi}{2^m} C_m^{\frac{m-k}{2}}, \qquad \text{(VI.11.17)}$$

если $m-k$ есть четное число. Полагая поэтому $m-k = 2j$, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+e\cos v)^\nu \cos kv\,dv = \sum_{j=0}^{\lambda} C_\nu^{k+2j} C_{k+2j}^j \left(\frac{e}{2}\right)^{k+2j}, \qquad \text{(VI.11.18)}$$

где $\lambda = \frac{\nu-k}{2}$ или $\lambda = \frac{\nu-k-1}{2}$, смотря по тому, четное или нечетное $\nu - k$.

Подставляя (VI.11.18) в (VI.11.15), получаем следующую формулу для $M_{-\nu}^{(k)}$:

$$M_{-\nu}^{(k)} = \left(\frac{e}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{\lambda} C_\nu^{k+2j} C_{k+2j}^j \left(\frac{e}{2}\right)^{2j},$$

или

$$M_{-\nu}^{(k)} = \left(\frac{e}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{\lambda} \frac{\nu!}{j!\,(k+j)!\,(n-k-2j)!} \left(\frac{e}{2}\right)^{2j}. \qquad \text{(VI.11.19)}$$

Рассмотрим теперь частные случаи. Пусть $k=\nu$. Тогда из (VI.11.19) имеем

$$M_{-\nu}^{(\nu)}(e) = \left(\frac{e}{2}\right)^\nu. \qquad \text{(VI.11.20)}$$

Этот результат также непосредственно следует из формулы (VI.11.14).

Найдем значение $M_{-\nu}^{(k)}(e)$ при $e=1$. Из формулы (VI.11.15) имеем

$$M_{-\nu}^{(k)}(1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2\frac{v}{2}\right)^{\nu}\cos kv\,dv,$$

или, если положить $v=2\varphi$,

$$M_{-\nu}^{(k)}(1)=\frac{2^{\nu}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{2\nu}\varphi\cos 2k\varphi\,d\varphi.$$

Но, согласно (VI.11.17),

$$\int_0^{\pi}\cos^{2\nu}\varphi\cos 2k\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2^{2\nu}}C_{2\nu}^{\nu-k}.$$

Поэтому

$$M_{-\nu}^{(k)}(1)=\frac{1}{2^{\nu}}\,\frac{(2\nu)!}{(\nu-k)!\,(\nu+k)!}.$$

Так как $M_{-\nu}^{(k)}$ есть многочлен относительно e с положительными коэффициентами, то при $0\leqslant e<1$ для $k>0$

$$0\leqslant M_{-\nu}^{(k)}(e)<\frac{1}{2^{\nu}}\,\frac{(2\nu)!}{(\nu-k)!\,(\nu+k)!}.$$

Поскольку, далее, $M_{-\nu}^{(0)}(0)=1$, то при $0\leqslant e<1$

$$1\leqslant M_{-\nu}^{(0)}(e)<\frac{(2\nu)!}{2^{\nu}\,(\nu!)^2},$$

или

$$1\leqslant M_{-\nu}^{(0)}(e)<\frac{(2\nu-1)!!}{\nu!}.$$

Коэффициенты $M_n^{(k)}$ с отрицательными n находят приложение в теории движения ИСЗ.

§ VI.12. Рекуррентные соотношения между коэффициентами $M_n^{(k)}(e)$

Рассмотрим интеграл

$$M_n^{(k)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos kv\,dv}{(1+e\cos v)^n}. \qquad \text{(VI.12.1)}$$

Применяя к нему операцию интегрирования по частям, будем иметь

$$M_n^{(k)} = -\frac{ne}{2\pi k}\int_0^{2\pi} \frac{\sin v \sin kv\, dv}{(1+e\cos v)^{n+1}}, \qquad \text{(VI.12.2)}$$

или

$$M_n^{(k)} = -\frac{ne}{4\pi k}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(k-1)v\, dv}{(1+e\cos v)^{n+1}} + \frac{ne}{4\pi k}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(k+1)v\, dv}{(1-e\cos v)^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$M_n^{(k)} = -\frac{ne}{2k}\left[M_{n+1}^{(k-1)} - M_{n+1}^{(k+1)}\right]. \qquad \text{(VI.12.3)}$$

С другой стороны, из (VI.12.1) имеем

$$M_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos kv\, dv}{(1+e\cos v)^{n+1}} + \frac{e}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos v \cos kv\, dv}{(1+e\cos v)^{n+1}}. \qquad \text{(VI.12.4)}$$

Заменяя во втором интеграле произведение косинусов суммой косинусов, отсюда легко находим

$$M_n^{(k)} = M_{n+1}^{(k)} + \frac{e}{2}\left[M_{n+1}^{(k-1)} + M_{n+1}^{(k+1)}\right]. \qquad \text{(VI.12.5)}$$

Приравняем друг другу правые части равенств (VI.12.3) и (VI.12.5) и заменим n на $n-1$. Это даст нам такое рекуррентное соотношение:

$$M_n^{(k)} = \frac{e}{2k}\left[(n-1-k)\, M_n^{(k+1)} - (n-1+k)\, M_n^{(k-1)}\right]. \qquad \text{(VI.12.6)}$$

Применим теперь операцию интегрирования по частям ко второму интегралу (VI.12.4) и воспользуемся формулой (VI.12.1). Тогда получим

$$M_n^{(k)} = M_{n+1}^{(k)} - \frac{n+1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^2 \sin^2 v \cos kv\, dv}{(1+e\cos v)^{n+2}} + \frac{ek}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin v \sin kv\, dv}{(1+e\cos v)^{n+1}}.$$

Если с помощью легко проверяемого равенства

$$e^2 \sin^2 v = -(1-e^2) + 2(1+e\cos v) - (1+e\cos v)^2$$

преобразовать первый интеграл в сумму трех интегралов и воспользоваться формулой (VI.12.2), то найдем следующее рекуррентное соотношение:

$$(n+1)(1-e^2)M_{n+2}^{(k)} = (2n+1)M_{n+1}^{(k)} - \frac{n^2-k^2}{n} M_n^{(k)}, \qquad \text{(VI.12.7)}$$

которое связывает три коэффициента $M_n^{(k)}$ соседних нижних значков.

§ VI.13. Формула для производной. Дифференциальное уравнение для $M_n^{(k)}$

Продифференцируем формулу (VI.12.1) по e. Это даст

$$\frac{dM_n^{(k)}(e)}{de} = -\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos v \cos kv\, dv}{(1+e\cos v)^{n+1}}. \qquad \text{(VI.13.1)}$$

Разбивая этот интеграл на два интеграла путем замены произведения косинусов соответствующей суммой косинусов и используя (VI.12.1), мы получим следующую формулу для производной $M_n^{(k)}$ по e:

$$\frac{dM_n^{(k)}}{de} = -\frac{n}{2}\left[M_{n+1}^{(k-1)} + M_{n+1}^{(k+1)}\right]. \qquad \text{(VI.13.2)}$$

Но из (VI.12.5) следует, что

$$M_{n+1}^{(k-1)} + M_{n+1}^{(k+1)} = \frac{2}{e}\left[M_n^{(k)} - M_{n+1}^{(k)}\right].$$

Поэтому вместо (VI.13.2) будем иметь такую формулу:

$$\frac{dM_n^{(k)}}{de} = -\frac{n}{e}\left[M_n^{(k)} - M_{n+1}^{(k)}\right]. \qquad \text{(VI.13.3)}$$

Выведем теперь дифференциальное уравнение для функции $M_n^{(k)}$. Перепишем равенство (VI.13.3) в виде

$$e\frac{dM_n^{(k)}}{de} + nM_n^{(k)} - nM_{n+k}^{(k)} = 0 \qquad \text{(VI.13.4)}$$

и продифференцируем его по e. Тогда

$$e\frac{d^2M_n^{(k)}}{de^2} + (n+1)\frac{dM_n^{(k)}}{de} - n\frac{dM_{n+1}^{(k)}}{de} = 0.$$

Но если в (VI.13.3) заменить n на $n+1$, то

$$\frac{dM_{n+1}^{(k)}}{de} = -\frac{n+1}{e} M_{n+1}^{(k)} + \frac{n+1}{e} M_{n+2}^{(k)}.$$

Поэтому

$$e\frac{d^2M_n^{(k)}}{de^2} + (n+1)\frac{dM_n^{(k)}}{de} + \frac{n(n+1)}{e} M_{n+1}^{(k)} - \frac{n(n+1)}{e} M_{n+2}^{(k)} = 0.$$

Исключая отсюда с помощью (VI.12.7) функцию $M_{n+2}^{(k)}$, получим

$$e^2(1-e^2)\frac{d^2M_n^{(k)}}{de^2} + (n+1)e(1-e^2)\frac{dM_n^{(k)}}{de} +$$
$$+ (n^2-k^2)M_n^{(k)} - n(n+e^2+ne^2)M_{n+1}^{(k)} = 0.$$

Если в это равенство подставить вместо $M_{n+1}^{(k)}$ его выражение из (VI.13.4), то найдем следующее уравнение:

$$e^2(1-e^2)\frac{d^2M_n^{(k)}}{de^2} + e[1-2(n+1)e^2]\frac{dM_n^{(k)}}{de} -$$
$$-[n(n+1)e^2+k^2]M_n^{(k)} = 0. \quad \text{(VI.13.5)}$$

Таким образом, коэффициент $M_n^{(k)}$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

§ VI.14. Связь коэффициентов $M_n^{(k)}$ с $X_{n,k}^{(0)}$

Согласно § VI.6,

$$C_0^{n,m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv\, dM.$$

Но так как

$$C_0^{n,m} = X_{n,m}^{(0)} \quad \text{и} \quad \frac{r}{a} = (1-e^2)\frac{r}{p},$$

то

$$X_{n,m}^{(0)} = \frac{(1-e^2)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{p}\right)^n \cos mv\, dM.$$

Перейдем здесь от дифференциала dM к дифференциалу dv, согласно равенству

$$dM = \left(\frac{r}{p}\right)^2 (1-e^2)^{3/2} dv.$$

Тогда

$$X_{n,m}^{(0)} = \frac{(1-e^2)^{n+\frac{3}{2}}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r}{p}\right)^{n+2} \cos mv\, dv,$$

или, если заменить n на $n-2$ и m на k,

$$X_{n-2,k}^{(0)} = \frac{(1-e^2)^{n-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r}{p}\right)^{n} \cos kv\, dv. \quad \text{(VI.14.1)}$$

Но, как мы знаем,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r}{p}\right)^{n} \cos kv\, dv = M_n^{(k)}.$$

Поэтому из равенства (VI.14.1) следует, что

$$M_n^{(k)} = (1-e^2)^{-n+\frac{1}{2}} X_{n-2,k}^{(0)}, \quad \text{(VI.14.2)}$$

или

$$X_{n,k}^{(0)} = (1-e^2)^{n+\frac{3}{2}} M_{n+2}^{(k)}. \quad \text{(VI.14.3)}$$

Формулы (VI.14.2) и (VI.14.3) и дают нам связь между коэффициентом $M_n^{(k)}$ с коэффициентом Ганзена с нулевым верхним значком.

§ VI.15. Дифференциальное уравнение для коэффициента Ганзена $X_{n,m}^{(0)}$

Заменим в уравнении (VI.13.5) n на $n+2$ и k на m. Это даст

$$e^2(1-e^2)\frac{d^2 M_{n+2}^{(m)}}{de^2} + e(1-6e^2-2ne^2)\frac{dM_{n+2}^{(m)}}{de} - \\ - [(n+2)(n+3)e^2 + m^2] M_{n+2}^{(m)} = 0. \quad \text{(VI.15.1)}$$

Но, согласно (VI.14.3),

$$M_{n+2}^{(m)} = (1-e^2)^{-n-\frac{3}{2}} X_{n,m}^{(0)}.$$

Поэтому, если подставить это равенство в (VI.15.1), получим следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$e^2(1-e^2)\frac{d^2X_{n,m}^{(0)}}{de^2}+e(1+2ne^2)\frac{dX_{n,m}^{(0)}}{de}-$$

$$-[n(n+1)e^2+m^2]X_{n,m}^{(0)}=0, \quad (\text{VI.15.2})$$

которому удовлетворяет коэффициент Ганзена $X_{n,m}^{(0)}$.

§ VI.16. Метод Ньюкома разложения возмущающей функции в теории движения планет

В § II.9 мы рассмотрели проблему разложения возмущающей функции в теории движения планет для случая круговых орбит. В этом параграфе мы рассмотрим эту проблему с учетом эксцентриситетов e и e' планетных орбит. Считая эксцентриситеты малыми величинами, разложим возмущающую функцию R в ряд по степеням e и e'.

Согласно § I.32, функция R определяется формулой

$$R=fm'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r\cos H}{r'^2}\right),$$

в которой

$$\Delta^2=r^2+r'^2-2rr'\cos H,$$

где r и r' — гелиоцентрические радиус-векторы планет, а H — угол между этими радиус-векторами. Рассмотрим рис. 8 на с. 102. На этом рисунке

$$OP=w \quad \text{и} \quad OP'=w'$$

представляют собой истинные долготы планет, отсчитываемые от их общего узла. Если положить

$$w=\Pi+v \quad \text{и} \quad w'=\Pi'+v',$$

то Π и Π' будут долготами перигелиев планет, которые отсчитываются от общего узла, а v и v' — истинными аномалиями. Далее, из сферического треугольника OPP' находим

$$\cos H=\cos w\cos w'+\sin w\sin w'\cos I,$$

или

$$\cos H=\cos(w-w')-2\sigma^2\sin w\sin w',$$

где

$$\sigma=\sin\frac{I}{2},$$

а I — взаимный наклон орбит. Таким образом, R есть функция r, r', w, w' и σ.

Чтобы облегчить применение формулы Тейлора, удобнее рассматривать R как функцию не r и r', а $\ln r$ и $\ln r'$, ибо (см. § V.14) переход от $\ln a$ к $\ln r$ происходит путем прибавления некоторого приращения, в то время как переход от a к r осуществляется при помощи умножения a на некоторый множитель. Итак, будем считать, что

$$R = F(\ln r, \ln r', w, w', \sigma).$$

Положим теперь

$$l = \Pi + M, \quad l' = \Pi' + M',$$

$$f = v - M, \quad f' = v' - M',$$

так что

$$w = l + f, \quad w' = l' + f'.$$

Здесь l и l' — средние долготы, отсчитываемые от общего узла, а f и f' — уравнения центров для рассматриваемых планет. Пусть, далее,

$$\ln r = \ln a + \rho, \quad \ln r' = \ln a' + \rho'.$$

Тогда

$$R = F(\ln a + \rho, \ \ln a' + \rho', \ l + f, \ l' + f', \ \sigma). \qquad \text{(VI.16.1)}$$

Если положить $e = 0$ и $e' = 0$, то

$$\rho = 0, \quad \rho' = 0, \quad f = 0, \quad f' = 0$$

и мы получим функцию

$$R_0 = F(\ln a, \ln a', l, l', \sigma) \qquad \text{(VI.16.2)}$$

для случая круговых орбит, который был рассмотрен в § II.9. В том же параграфе было получено развернутое выражение для R_0. Оно может быть записано в виде

$$R_0 = \sum H_{s,s'} \cos(sl + s'l'). \qquad \text{(VI.16.3)}$$

Поэтому если ввести функцию

$$\widehat{R}_0 = \sum H_{s,s'} \lambda^s \lambda^{s'}, \qquad \text{(VI.16.4)}$$

где

$$\lambda = \exp il, \quad \lambda' = \exp il', \qquad \text{(VI.16.5)}$$

то ее действительная часть будет равна R_0. Коэффициенты $H_{s,s'}$ надо рассматривать как функции $\ln a$, $\ln a'$ и σ.

Обратимся теперь к § VI.7 и введем обозначения

$$D=\frac{\partial}{\partial \ln a},\quad D'=\frac{\partial}{\partial \ln a'},$$

$$D_1=\frac{\partial}{\partial l},\qquad D_1'=\frac{\partial}{\partial l'}.$$

Тогда разложение функции R в ряд Тейлора по степеням ρ, ρ', f и f' может быть записано в такой символической форме:

$$R=\exp\left(\rho D+\rho' D'+fD_1+f'D_1'\right)\widehat{R}_0, \tag{VI.16.6}$$

где $\widehat{R}_0$ определяется формулой (VI.16.4). Это первый шаг на пути разложения функции R в ряд по степеням эксцентриситетов.

Второй шаг заключается в разложении оператора

$$\exp\left(\rho D+\rho' D'+fD_1+f'D_1'\right)$$

в степенной ряд относительно e и e'. Так как этот оператор есть произведение двух операторов

$$\exp(\rho D+fD_1)\quad \text{и}\quad \exp(\rho' D'+f'D'),$$

то рассмотрим сначала каждый из них в отдельности.

Согласно § VI.7,

$$\exp(\rho D+fD_1)=\exp(\rho D+isf)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}e^r\sum_{q=-r}^{r}\Pi_{q,0}^{r,0}z^q, \tag{VI.16.7}$$

где

$$z=\exp iM,\quad \Pi_{q,0}^{r,0}=\Pi_q^r(D,s),$$

а Π_q^r — операторы Ньюкома.

Аналогично,

$$\exp\left(\rho' D'+f'D_1'\right)=\sum_{r'=0}^{\infty}e'^{r'}\sum_{q'=-r'}^{r'}\Pi_{0,q'}^{0,r'}z'^{q'}, \tag{VI.16.8}$$

где

$$z'=\exp iM',\quad \Pi_{0,q'}^{0,r'}=\Pi_{q'}^{r'}(D',s').$$

Если ввести сложные операторы

$$\Pi_{q,q'}^{r,r'}=\Pi_q^r(D,s)\,\Pi_{q'}^{r'}(D',s'), \tag{VI.16.9}$$

то при помощи (VI.16.7) и (VI.16.8) будем иметь

$$\exp\left(\rho D + \rho' D' + f D_1 + f' D_1'\right) = \\ = \sum_{r,r'} e^r e'^{r'} \sum_{q,q'} \Pi_{q,q'}^{r,r'} z^q z'^{q'}. \quad \text{(VI.16.10)}$$

Полагая

$$P_{q,q'}^{r,r'} = \Pi_{q,q'}^{r,r'} H_{s,s'} \quad \text{(VI.16.11)}$$

и имея в виду равенства (VI.16.6), (VI.16.10) и (VI.16.4), получаем

$$R = \sum e^r e'^{r'} P_{q,q'}^{r,r'} \lambda^s \lambda'^{s'} z^q z^{q'}.$$

Выделяя здесь действительную часть, окончательно находим разложение возмущающей функции в следующем виде:

$$R = \sum e^r e'^{r'} P_{q,q'}^{r,r'} \cos(sl + s'l' + qM + q'M'), \quad \text{(VI.16.12)}$$

где значки r и r' изменяются от 0 до $+\infty$, а значки q и q' — от $-\infty$ до $+\infty$. При этом, как следует из § VI.7, каждая из разностей $r - |q|$, $r' - |q'|$ равна неотрицательному четному числу. Кроме того, формула (II.8.17) показывает, что сумма $s + s'$ равна также четному числу.

Коэффициенты $P_{q,q'}^{r,r'}$ в (VI.16.12) зависят от больших полуосей a, a' и взаимного наклона I. Они являются результатом применения операторов $\Pi_{q,q'}^{r,r'}$ к коэффициентам $H_{s,s'}$ разложения возмущающей функции в случае нулевых эксцентриситетов, т. е. к коэффициентам разложения (II.9.17). Из § II.9 следует, что большие полуоси входят в $H_{s,s'}$ посредством функций

$$\frac{1}{a'} L_1^{(k)}(\alpha), \quad \frac{\alpha}{a'} L_3^{(k)}(\alpha), \quad \frac{\alpha^2}{a'} L_5^{(k)}(\alpha), \ \ldots, \left(\alpha = \frac{a}{a'}\right), \quad \text{(VI.16.13)}$$

где $L_n^{(k)}$ — коэффициенты Лапласа. Дело, таким образом, сводится к применению операторов $\Pi_{q,q'}^{r,r'}$ к этим функциям. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Представляя коэффициент $H_{s,s'}$ в виде

$$H_{s,s'} = \frac{1}{a'} F(\alpha),$$

легко находим, что

$$a \frac{\partial H_{s,s'}}{\partial a} + a' \frac{\partial H_{s,s'}}{\partial a'} = - H_{s,s'},$$

или

$$DH_{s,s'} + D'H_{s,s'} = -H_{s,s'}.$$

Отсюда

$$D + D' = -1.$$

Поэтому

$$\Pi_{0,q'}^{0,r'} = \Pi_{q'}^{r'}(-D-1, s')$$

и, следовательно,

$$\Pi_{q,q'}^{r,r'} = \Pi_q^r(D, s)\,\Pi_{q'}^{r'}(-D-1, s').$$

Таким образом, вычисление сложных операторов $\Pi_{q,q'}^{r,r'}$ сводится к вычислению простых операторов Ньюкома Π_q^r.

Вычисление операторов Π_q^r рассматривалось в § VI.10. Оператор Π_q^r есть многочлен относительно D степени r. При этом

$$D = \frac{d}{d(\ln a)} = a\frac{d}{da} = \frac{d}{d(\ln\alpha)} = \alpha\frac{d}{d\alpha}$$

и

$$D^n L_1^{(k)}(\alpha) = \frac{d^n L_1^{(k)}}{d(\ln\alpha)^n}. \tag{VI.16.14}$$

Вместо операторов D^n можно ввести операторы D_α^n по формуле

$$D_\alpha^n = \frac{d^n}{d\alpha^n}. \tag{VI.16.15}$$

Тогда, например,

$$\left(3 + 5\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2\right) L_1^{(k)}$$

означает

$$3L_1^{(k)} + 5\alpha\frac{dL_1^{(k)}}{d\alpha} - \alpha^2\frac{d^2L^{(k)}}{d\alpha^2}.$$

Из (VI.16.14) и (VI.16.15) легко находим

$$\begin{aligned}
D &= \alpha D_\alpha,\\
D^2 &= \alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2,\\
D^3 &= \alpha D_\alpha + 3\alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^3 D_\alpha^3,\\
D^4 &= \alpha D_\alpha + 7\alpha^2 D_\alpha^2 + 6\alpha^3 D_\alpha^3 + \alpha^4 D_\alpha^4
\end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом, вычисление коэффициентов $P_{q,q'}^{r,r'}$ разложения (VI.16.12) сводится к вычислению коэффициентов Лапласа и их производных. А эта проблема была рассмотрена нами в § II.7.

Примечание. До сих пор мы рассматривали возмущающую функцию в случае внутренней планеты, т. е. мы интересовались возмущениями некоторой планеты с массой m и элементами a, e, ..., M_0 со стороны планеты внешней с массой m' и элементами a', e', ..., M_0'. В этом случае

$$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right).$$

Если мы будем рассматривать возмущения внешней планеты со стороны планеты внутренней, то возмущающая функция определится формулой

$$R' = fm\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r'\cos H}{r^2}\right).$$

Мы видим, что в этом случае никаких принципиальных изменений в методику разложения возмущающей функции вносить не надо. Первые члены обеих функций с точностью до постоянного множителя совпадают друг с другом. Второй член в R, как мы видели в § II.9, в случае нулевых эксцентриситетов равен

$$-\frac{fm'}{a'}\{\alpha(1-\sigma^2)\cos(l-l') + \alpha\sigma^2\cos(l+l')\}.$$

Второй член в R' для нулевых эксцентриситетов равен

$$-\frac{fm}{a'}\{\alpha^{-2}(1-\sigma^2)\cos(l-l') + \alpha^{-2}\sigma^2\cos(l+l')\}.$$

Для того чтобы получить разложения для вторых слагаемых в R и R', нужно только применить операторы Ньюкома к этим двум выражениям.

Более подробные сведения о разложении возмущающей функции в планетной теории можно найти в статье [13].

§ VI.17. Первые члены разложения возмущающей функции

Приведем теперь окончательное развернутое выражение для возмущающей функции, которое получается методом, изложенным в предыдущем параграфе. При этом мы ограничимся членами нулевого, первого и второго порядков относительно эксцентриситетов e и e' и членами нулевого и второго порядка относительно $\sigma = \sin\frac{I}{2}$.

Полагая для краткости

$$a_j = L_1^{(j)}(\alpha), \quad b_j = \alpha L_3^{(j)}, \quad \alpha = \frac{a}{a'},$$

будем иметь

$$R = \frac{fm'}{a'} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Big[\Big\{\frac{1}{2} a_j + \frac{1}{8}(e^2 + e'^2)\left[-4j^2 + 2\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2\right] a_j -$$

$$-\frac{1}{4}\sigma^2 (b_{j-1} + b_{j+1}) - \frac{1}{16}\left(e^2 + e'^2\right)\sigma^2\left[-4j^2 + 2\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2\right] \times$$

$$\times (b_{j-1} + b_{j+1})\Big\} \cos(jM' - jM + j\Pi' - j\Pi) +$$

$$+ \Big\{\frac{1}{4} ee'\left[4j^2 + 2j - 2\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2\right] a_j -$$

$$-\frac{1}{8} ee'\sigma^2\left[4j^2 + 2j - 2\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2\right](b_{j-1} + b_{j+1})\Big\} \times$$

$$\times \cos[(j+1)M' - (j+1)M + j\Pi' - j\Pi] +$$

$$+ \frac{1}{16} e^2\sigma^2\left[4j^2 - 3j - 1 - (4j-2)\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2\right] b_j \times$$

$$\times \cos[(j+1)M' - (j+1)M + (j+1)\Pi' - (j-1)\Pi] +$$

$$+ \frac{1}{16} e'^2\sigma^2\left[4j^2 - j - 1 - (4j-2)\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2\right] b_j \times$$

$$\times \cos[(j-1)M' - (j-1)M + (j+1)\Pi' - (j-1)\Pi] +$$

$$+ \frac{1}{8} ee'\sigma^2\left[-4j^2 + 2j + 2 + (4j-2)\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2\right] b_j \times$$

$$\times \cos[jM' - jM + (j+1)\Pi' - (j-1)\Pi] +$$

$$+ \Big\{\frac{1}{2} e[-2j - \alpha D_\alpha] a_j - \frac{1}{4} e\sigma^2[-2j - \alpha D_\alpha](b_{j-1} + b_{j+1})\Big\} \times$$

$$\times \cos[jM' - (j-1)M + j\Pi' - j\Pi)] + \frac{1}{2} e'[2j + 1 + \alpha D_\alpha] a_j -$$

$$-\frac{1}{4} e'\sigma^2[2j + 1 + \alpha D_\alpha](b_{j-1} + b_{j+1})\Big\} \cos[(j+1)M' -$$

$$- jM + j\Pi' - j\Pi] + \frac{1}{4} e\sigma^2[2j - 2 - \alpha D_\alpha] b_j \times$$

$$\times \cos[(j+1)M' - jM + (j+1)\Pi' - (j-1)\Pi] +$$

$$+\frac{1}{4}e'\sigma^2[-2j-1+\alpha D_\alpha]\,b_j\cos[jM'-(j-1)M+$$

$$+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]+\left\{\frac{1}{8}e^2\left[4j^2-5j+(4j-2)\alpha D_\alpha+\right.\right.$$

$$\left.+\alpha^2D_\alpha^2\right]a_j-\frac{1}{16}e^2\sigma^2\left[4j^2-5j+(4j-2)\alpha D_\alpha+\alpha^2D_\alpha^2\right]\times$$

$$\left.\times(b_{j-1}+b_{j+1})\right\}\cos[jM'-(j-2)M+j\Pi'-j\Pi]+$$

$$+\left\{\frac{1}{4}ee'\left[-4j^2-2j-(4j+2)\alpha D_\alpha-\alpha^2D_\alpha^2\right]a_j-\right.$$

$$-\frac{1}{8}ee'\sigma^2\left[-4j^2-2j-(4j+2)\alpha D_\alpha-\alpha^2D_\alpha^2\right]\times$$

$$\left.\times(b_{j-1}+b_{j+1})\right\}\cos[(j+1)M'-(j-1)M+j\Pi'-j\Pi]+$$

$$+\left\{\frac{1}{8}e'^2\left[4j^2+9j+4+(4j+6)\alpha D_\alpha+\alpha^2D_\alpha^2\right]a_j-\right.$$

$$-\frac{1}{16}e'^2\sigma^2\left[4j^2+9j+4+(4j+6)\alpha D_\alpha+\alpha^2D_\alpha^2\right]\times$$

$$\left.\times(b_{j-1}+b_{j+1})\right\}\cos[(j+2)M'-jM+j\Pi'-j\Pi]+$$

$$+\frac{1}{2}\sigma^2b_j\cos[(j+1)M'-(j-1)M+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]+$$

$$+\frac{1}{4}e\sigma^2[-2j+2-\alpha D_\alpha]\,b_j\cos[(j+1)M'-$$

$$-(j-2)M+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]+$$

$$+\frac{1}{4}e'\sigma^2[2j+3+\alpha D_\alpha]\,b_j\cos[(j+2)M'-(j-1)M+$$

$$+(j+1)\Pi'-(j-1)\Pi]]+\alpha\left\{\left[1-\frac{1}{2}\left(e^2+e'^2\right)-\sigma^2\right]\times\right.$$

$$\times\cos(M'-M+\Pi'-\Pi)+ee'\cos(2M'-2M+\Pi'-\Pi)-$$

$$-\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sigma^2\right)e\cos(M'+\Pi'-\Pi)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma^2\right)e\times$$

$$\times\cos(M'-2M+\Pi'-\Pi)+(2-2\sigma^2)\,e'\times$$

$$\times\cos(2M'-M+\Pi'-\Pi)-\frac{3}{2}e\sigma^2\cos(M'+\Pi'+\Pi)+$$

$$+\frac{1}{8}e^2\cos(M'+M+\Pi'-\Pi)+\frac{3}{8}e^2\cos(M'-3M+\Pi'-$$

$$-\Pi)-3ee'\cos(2M'+\Pi'-\Pi)+\frac{1}{8}e'^2\cos(M'+M-$$

$$- \Pi' + \Pi) + \frac{27}{8} e'^2 \cos(3M' - M + \Pi' - \Pi) +$$

$$+ \sigma^2 \cos(M' + M + \Pi' + \Pi) + \frac{1}{2} e\sigma^2 \times$$

$$\times \cos(M' + 2M + \Pi' + \Pi) + 2e'\sigma^2 \cos(2M' + M + \Pi' + \Pi) \Big\}.$$

Здесь M и M' — средние аномалии планет, а Π и Π' — долготы перигелиев, отсчитываемые от линии пересечения плоскостей орбит.

§ VI.18. Разложение возмущающей функции в теории движения ИСЗ (продолжение)

В § IV.8 для гармоники потенциала со значками l, m, записанной в комплексной форме, было получено следующее выражение:

$$\hat{R}_{l,m} = i^{l-m} \gamma_{l,m} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{q=0}^{\infty} F_{l,m,q}(I) \times$$
$$\times \exp i\,[(l-2q)\,u + m\,(\Omega - S - \lambda_{l,m})],$$

где

$$\gamma_{l,m} = J_{l,m} \frac{fm}{a} \left(\frac{r_0}{a}\right)^l, \quad u = v + \omega.$$

Поэтому $\hat{R}_{l,m}$ можно представить в виде

$$\hat{R}_{l,m} = i^{l-m} \gamma_{l,m} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \exp i\,(l-2q)\,v \times$$
$$\times F_{l,m,q}(I) \exp i\,[(l-2q)\,\omega + m\,(\Omega - S - \lambda_{l,m})].$$

Но, согласно § VI.2,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-l-1} \exp i\,(l-2q)\,v = \sum_{p=0}^{\infty} X_{-l-1,\,l-2q}^{(p)} \exp ipM.$$

Следовательно,

$$\hat{R}_{l,m} = i^{l-m} \gamma_{l,m} \sum_{q=0}^{l} \sum_{p=0}^{\infty} F_{l,m,q}(I)\, X_{-l-1,\,l-2q}^{(p)}(e) \times$$
$$\times \exp i\,[pM + (l-2q)\,\omega + m\,(\Omega - S - \lambda_{l,m})]. \quad \text{(VI.18.1)}$$

Напомним, что здесь $F_{l,m,q}(I)$ — функция наклона, а $X_{l-1,\,l-2q}^{(p)}$ — коэффициент Ганзена.

Возьмем в (VI.18.1) вещественную часть. Тогда получим при четном $l-m$

$$R_{l-m} = (-1)^{\frac{l-m}{2}} \gamma_{l,m} \sum_{q=0}^{l} \sum_{p=0}^{\infty} F_{l,m,q} X_{-l-1,l-2q}^{(p)} \times$$
$$\times \cos\left[pM + (l-2q)\,\omega + m\,(\Omega - S - \lambda_{l,m})\right] \quad \text{(VI.18.2)}$$

и при нечетном $l-m$

$$R_{l,m} = (-1)^{\frac{l-m-1}{2}} \gamma_{l,m} \sum_{q=0}^{l} \sum_{p=0}^{\infty} F_{l,m,q} X_{-l-1,l-2q}^{(p)} \times$$
$$\times \sin\left[pM + (l-2q)\,\omega + m\,(\Omega - S - \lambda_{l,m})\right]. \quad \text{(VI.18.3)}$$

Возмущающая функция R, обусловленная несферичностью Земли, теперь определится формулой

$$R = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} R_{l,m}.$$

Таким образом, функция R окончательно выражена через элементы a, e, I, Ω, ω, M.

§ VI.19. Вековая и долгопериодическая части возмущающей функции

Вековые и долгопериодические возмущения имеют место только в случае зональных гармоник *). Они происходят от той части возмущающей функции, которая не зависит от средней аномалии M.

Поскольку вековые и долгопериодические возмущения являются наиболее значительными неравенствами, то на них стоит остановиться подробнее.

Рассмотрим сначала случай четной гармоники ($l = 2\nu$). Собирая в (VI.18.2) члены с $p=0$, имеем

$$R_{2\nu,0} = (-1)^{\nu} \gamma_{2\nu,0} \sum_{q=0}^{2\nu} F_{2\nu,0,q} X_{-2\nu-1,2\nu-2q}^{(0)} \cos 2\,(\nu - q)\,\omega.$$

Но, согласно (6.14.3),

$$X_{-2\nu-1,2\nu-2q}^{(0)} = (1-e^2)^{-2\nu+\frac{1}{2}} M_{-2\nu+1}^{(2\nu-2q)}.$$

---

*) Мы здесь не рассматриваем случай резонанса.

Поэтому

$$R_{2\nu,0}=(-1)^{\nu}J_{2\nu,0}\frac{fm}{a}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{2\nu}(1-e^2)^{-2\nu+\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\sum_{q=0}^{2\nu}F_{2\nu,0,q}M_{-2\nu+1}^{(2\nu-2q)}\cos 2(\nu-q)\,\omega.$$

Аналогичным образом для случая нечетной гармоники ($l=2\nu+1$) найдем

$$R_{2\nu+1,0}=(-1)^{\nu}J_{2\nu+1,0}\frac{fm}{a}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{2\nu+1}(1-e^2)^{-2\nu-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\sum_{q=0}^{2\nu+1}F_{2\nu+1,0,q}M_{-2\nu}^{(2\nu-2q+1)}\sin(2\nu-2q+1)\,\omega.$$

Полученные формулы можно также записать в виде (см. § IV.7)

$$R_{2\nu,0}=(-1)^{\nu+1}J_{2\nu}\frac{fm}{a}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{2\nu}(1-e^2)^{-2\nu+\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\sum_{k=-\nu}^{\nu}A_{2\nu}^{2k}(I)\,M_{-2\nu+1}^{(2k)}(e)\cos 2k\omega, \qquad \text{(VI.19.1)}$$

$$R_{2\nu+1,0}=(-1)^{\nu+1}J_{2\nu+1}\frac{fm}{a}\left(\frac{r_0}{a}\right)^{2\nu+1}(1-e^2)^{-2\nu-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\sum_{k=-\nu}^{\nu}A_{2\nu+1}^{(2k+1)}(I)\,M_{-2\nu}^{(2k+1)}(e)\sin(2k+1)\,\omega. \qquad \text{(VI.19.2)}$$

Входящие в эти формулы функции эксцентриситета $M_s^{\sigma}(e)$ являются многочленами относительно e (см. § VI.14). Следовательно, эти формулы полностью учитывают как наклон I, так и эксцентриситет e. Они справедливы для всех I и e из области $0\leqslant I\leqslant\pi$, $0\leqslant e<1$.

Из формул (VI.19.1) и (VI.19.2) следует, что вековая часть возмущающей функции обусловлена только гармониками четного порядка.

§ VI.20. Замечания

Сначала о коэффициентах Ганзена. Они были введены Ганзеном в его мемуаре, посвященном разложению в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии различных функций в теории эллиптического движения и опубликованном в 1853 г. [1]. Ганзен вывел для этих коэффициентов ряды по степеням величины β и нашел рекуррентные соотношения. Другой способ получения таких рядов был изложен Тиссераном в его «Трактате по небесной механике» [2]. Как уже отмечалось, для коэффициентов $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$ при

$$n = -5, -4, \ldots, +4, \quad m = 0, 1, \ldots, 5$$

с точностью до e^7 включительно Кэли составил таблицы и опубликовал их в 1859 г. [3]. М. Ярнагин опубликовал таблицы значений $C_k^{n,m}$ и $S_k^{n,m}$ с точностью до e^{20} [4].

Как мы видели, теория коэффициентов Ганзена тесно связана с теорией многочленов Ньюкома. Эти многочлены, рассматриваемые как операторы, были введены С. Ньюкомом в его фундаментальном трактате, опубликованном в 1895 г. и посвященном разложению возмущающей функции в теории движения планет в ряд по степеням эксцентриситета с использованием средних аномалий в качестве основных аргументов [5]. Еще ранее, в 1891 г., С. Ньюком опубликовал обширный трактат, в котором рассматривается разложение возмущающей функции с использованием в качестве основных аргументов эксцентрических аномалий [6]. Там также вводятся аналогичные операторы, которые не совпадают с операторами $\Pi_q^r(D, s)$, рассмотренными в этой главе.

Помимо С. Ньюкома, многочленами $\Pi_q^r(n, m)$ занимались Р. Иннес [7], Цейпель [8] и другие исследователи [9]. Они дали различные способы вычисления этих многочленов, вывели рекуррентные формулы. В § VI.10 мы изложили один способ вычисления $\Pi_q^r(n, m)$, основанный на рекуррентных формулах Цейпеля.

Еще несколько слов о коэффициентах Ганзена. В § VI.15 было показано, что коэффициент $X_{n,m}^{(0)}$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка. В общем случае для $X_{n,m}^{(k)}$ дифференциальное уравнение нашел В. А. Брумберг [11]. Оно оказалось линейным уравнением четвертого порядка.

Функции эксцентриситета $M_n^{(k)}(e)$ рассматривались в работах автора [12].

Алгоритм вычисления операторов Ньюкома на ЭВМ составлен Б. К. Мартыненко [14]. Алгоритм вычисления коэффициентов Ганзена на ЭВМ реализован А. М. Фоминовым и Л. Л. Филенко [15].

Глава VII

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ

§ VII.1. Эллиптический интеграл первого рода

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \text{(VII.1.1)}$$

в котором

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{и} \quad 0 < k < 1. \qquad \text{(VII.1.2)}$$

Определенный таким образом интеграл (VII.1.1) называется эллиптическим интегралом первого рода в нормальной форме Лежандра. Число k называется модулем этого интеграла.

Подстановкой

$$x = \sin\varphi$$

интеграл (VII.1.1) приводится к нормальной тригонометрической форме:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \qquad \text{(VII.1.3)}$$

Эллиптический интеграл, взятый в пределах от 0 до $\pi/2$, называется полным эллиптическим интегралом первого рода и обозначается через $K(k)$:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \qquad \text{(VII.1.4)}$$

Наряду с интегралом $K(k)$ часто приходится рассматривать интеграл

$$K(k') = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}},$$

где k' определяется из равенства

$$k^2 + k'^2 = 1$$

и называется дополнительным модулем для модуля k.

Угол θ, определяемый по формуле

$$k = \sin\theta,$$

называют модулярным углом.

§ VII.2. Определение эллиптических функций Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$

Рассмотрим интеграл

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \tag{VII.2.1}$$

как функцию верхнего предела φ. Видно, что функция определена для любого вещественного φ. Ее производная

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

при любом φ конечна и отлична от нуля. Так как она положительна, то u является монотонно возрастающей функцией φ. При изменении φ от $-\infty$ до $+\infty$ функция u также изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим теперь верхний предел φ как функцию u. Такая функция обозначается

$$\varphi = \operatorname{am}(u,\ k) \quad \text{или} \quad \varphi = \operatorname{am} u \tag{VII.2.2}$$

и называется амплитудой. Из предыдущего следует, что φ является однозначной функцией u. Она определена для любого u, непрерывна и имеет конечную производную:

$$\frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}.$$

Таким образом, функция $\operatorname{am} u$ появляется в результате обращения эллиптического интеграла первого рода в нормальной тригонометрической форме Лежандра. При этом под обращением интеграла понимается рассмотрение верхнего предела интеграла как функции самого интеграла. Введем теперь следующие функции:

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin(\operatorname{am} u), \\ \cos\varphi &= \cos(\operatorname{am} u). \end{aligned} \tag{VII.2.3}$$

Очевидно, они являются однозначными, непрерывными и дифференцируемыми функциями u.

Рассмотрим также как функцию u положительное значение квадратного корня $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ и обозначим ее через $\Delta\operatorname{am} u$:

$$\Delta\operatorname{am} u = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1-k^2(\sin\operatorname{am} u)^2}. \tag{VII.2.4}$$

Функции

$$\sin(\operatorname{am} u),\ \cos(\operatorname{am} u),\ \Delta\operatorname{am} u$$

были введены Якоби и называются эллиптическими функциями Якоби. Для этих функций Гудерман предложил следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \sin(\operatorname{am} u), \\ \operatorname{cn} u &= \cos(\operatorname{am} u), \\ \operatorname{dn} u &= \Delta\operatorname{am} u, \end{aligned} \tag{VII.2.5}$$

которые и являются в настоящее время общепринятыми.

Из формул (VII.2.3) — (VII.2.5) следует, что функции Якоби связаны между собой простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u + k^2\operatorname{sn}^2 u &= 1. \end{aligned} \tag{VII.2.6}$$

Поэтому каждые две из них могут быть легко выражены через третью.

§ VII.3. Периодичность функций Якоби. Четность и нечетность

Докажем, что эллиптические функции Якоби являются периодическими функциями, причем $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{cn} u$ имеют период $4K$, а $\operatorname{dn} u$ — период $2K$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода. Другими словами, мы покажем, что для любого u имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u+4K) &= \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+4K) &= \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+2K) &= \operatorname{dn} u, \end{aligned} \tag{VII.3.1}$$

где

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{VII.3.2}$$

Для этого докажем сначала, что при увеличении u на $2K$ функция $\operatorname{am} u$ увеличивается на π, т. е., что

$$\operatorname{am}(u+2K) = \operatorname{am} u + \pi. \tag{VII.3.3}$$

Согласно (VII.3.2), имеем

$$2K = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} + \int_0^{\pi/2} \frac{dt'}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t'}}.$$

Полагая во втором интеграле $t' = \pi - t$, получаем

$$2K = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

или

$$2K = \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}.$$

Напишем равенство

$$u + 2K = \int_0^{\varphi} \frac{dt'}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t'}} + \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

и положим в нем $t' = t - \pi$. Тогда найдем

$$u + 2K = \int_{\pi}^{\pi+\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} + \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}},$$

или

$$u + 2K = \int_0^{\pi+\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}.$$

Полученное равенство показывает, что при увеличении эллиптического интеграла первого рода на $2K$ его амплитуда увеличивается на π. Отсюда и следует формула (VII.3.3). Докажем теперь справедливость первого равенства (VII.3.1). Имеем

$$\operatorname{sn}(u+4K)=\sin[\operatorname{am}(u+4K)]=\sin[\operatorname{am}(u+2K)+\pi]=$$
$$=\sin[\operatorname{am}u+2\pi]=\sin(\operatorname{am}u)=\operatorname{sn}u.$$

Аналогичным способом доказывается справедливость второго равенства (VII.3.2). Доказательство третьей формулы (VII.3.2) проводится следующим образом:

$$\operatorname{dn}(u+2K)=\sqrt{1-k^2\sin^2[\operatorname{am}(u+2K)]}=$$
$$=\sqrt{1-k^2\sin^2(\operatorname{am}u+\pi)}=\sqrt{1-k^2\sin^2(\operatorname{am}u)}=\operatorname{dn}u.$$

Рассмотрим еще одно свойство эллиптических функций. Положим в интеграле

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{dt'}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t'}},$$

$t'=-t$. Тогда получим

$$u=-\int_0^{-\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}.$$

Отсюда следует, что

$$-\varphi=\operatorname{am}(-u),$$

или

$$\operatorname{am}(-u)=-\operatorname{am}u, \qquad \text{(VII.3.4)}$$

т. е. $\operatorname{am}u$ есть нечетная функция u. Используя этот факт, покажем, что справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn}u,\quad \operatorname{cn}(-u)=\operatorname{cn}u,\quad \operatorname{dn}(-u)=\operatorname{dn}u. \qquad \text{(VII.3.5)}$$

Действительно,

$$\operatorname{sn}(-u)=\sin[\operatorname{am}(-u)]=\sin(-\operatorname{am}u)=$$
$$=-\sin(\operatorname{am}u)=-\operatorname{sn}u.$$

Аналогично доказываются два других равенства (VII.3.5). Таким образом, $\operatorname{sn}u$ является нечетной функцией, в то время как $\operatorname{cn}u$ и $\operatorname{dn}u$ являются четными функциями u.

§ VII.4. Формулы приведения

В этом параграфе мы выведем формулы, которые аналогичны формулам приведения для тригонометрических функций. Прежде всего, найдем соотношения, связывающие эллиптические функции аргумента $K \pm u$ с эллиптическими функциями аргумента u, где K, как и раньше, есть полный эллиптический интеграл первого рода.

Сделаем в интеграле

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

замену переменного по формуле

$$\sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{VII.4.1}$$

Тогда

$$\cos\psi = \frac{k'\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{VII.4.2}$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\psi} = \frac{k'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{VII.4.3}$$

$$\cos\psi\, d\psi = -\frac{k'^2\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}},$$

где $k'^2 = 1 - k^2$. Поэтому

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Поскольку, далее, при $\psi = 0$ величина φ равна $\pi/2$, то

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -\int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

или

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = K - u,$$

где

$$\operatorname{am} u = \varphi. \tag{VII.4.4}$$

Следовательно,

$$\psi = \operatorname{am}(K - u). \tag{VII.4.5}$$

Подставляя теперь в равенства (VII.4.1)—(VII.4.3) вместо φ и ψ их значения из (VII.4.4) и (VII.4.5), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(K-u) &= \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{cn}(K-u) &= \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{dn}(K-u) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} u}. \end{aligned} \tag{VII.4.6}$$

Итак, мы нашли первую группу формул приведения. Чтобы получить вторую группу, заменим в (VII.4.6) u на $-u$ и воспользуемся тем обстоятельством, что $\operatorname{sn} u$ — нечетная, а $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ — четные функции u. Мы будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(K+u) &= \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{cn}(K+u) &= -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \\ \operatorname{dn}(K+u) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \end{aligned} \tag{VII.4.7}$$

где k' — дополнительный модуль.

Перейдем к выводу других формул приведения. Из равенства (VII.3.3) легко находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2K+u) &= -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(2K+u) &= -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(2K+u) &= \operatorname{dn} u. \end{aligned} \tag{VII.4.8}$$

Заменяя здесь u на $-u$ и используя свойство четности и нечетности эллиптических функций, получаем такие формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2K-u) &= \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(2K-u) &= -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(2K-u) &= \operatorname{dn} u. \end{aligned} \tag{VII.4.9}$$

С помощью (VII.4.8) и (VII.4.7) легко выводятся также следующие соотношения:

$$\operatorname{sn}(3K+u) = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$
$$\operatorname{cn}(3K+u) = \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \text{(VII.4.10)}$$
$$\operatorname{dn}(3K+u) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}.$$

Действительно, имеем, например,

$$\operatorname{sn}(3K+u) = \operatorname{sn}[2K+(K+u)] = -\operatorname{sn}(K+u) = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

Заменяя в (VII.4.10) u на $-u$, получаем еще одну группу формул:

$$\operatorname{sn}(3K-u) = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$
$$\operatorname{cn}(3K-u) = -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \text{(VII.4.11)}$$
$$\operatorname{dn}(3K-u) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}.$$

Накопец, с помощью (VII.4.8) и (VII.4.9) можно найти следующие равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(4K-u) &= -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(4K-u) &= \operatorname{cn} u, \qquad \text{(VII.4.12)} \\ \operatorname{dn}(4K-u) &= \operatorname{dn} u. \end{aligned}$$

Итак, мы вывели все формулы приведения для якобиевых функций. Для удобства они представлены в табл. 3.

Таблица 3

Формулы приведения

	$K \pm u$	$2K \pm u$	$3K \pm u$	$4K \pm u$
sn	$\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$	$\mp \operatorname{sn} u$	$-\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$	$\pm \operatorname{sn} u$
cn	$\mp \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$	$-\operatorname{cn} u$	$\pm \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$	$\operatorname{cn} u$
dn	$\frac{k'}{\operatorname{dn} u}$	$\operatorname{dn} u$	$\frac{k'}{\operatorname{dn} u}$	$\operatorname{dn} u$

§ VII.5. Дифференциальные уравнения для функций Якоби

В § VII.2 мы видели, что

$$\frac{d\varphi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \qquad \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \operatorname{dn} u.$$

Поэтому

$$\frac{d\varphi}{du} = \operatorname{dn} u. \tag{VII.5.1}$$

Дифференцируя равенства

$$\operatorname{sn} u = \sin\varphi, \quad \operatorname{cn} u = \cos\varphi,$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

и используя (VII.5.1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{sn} u}{du} &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d \operatorname{cn} u}{du} &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{d \operatorname{dn} u}{du} &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned} \tag{VII.5.2}$$

Если возвести эти равенства в квадрат и воспользоваться формулами (VII.2.6), то можно легко найти следующие дифференциальные уравнения для эллиптических функций Якоби:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \operatorname{sn} u}{du}\right)^2 &= (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u), \\ \left(\frac{d \operatorname{cn} u}{du}\right)^2 &= (1 - \operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u), \\ \left(\frac{d \operatorname{dn} u}{du}\right)^2 &= (1 - \operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u - k'^2), \end{aligned} \tag{VII.5.3}$$

где k' — дополнительный для k модуль.

Из первого уравнения (VII.5.3) следует, что

$$u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}. \tag{VII.5.4}$$

Таким образом, эллиптическая функция $\operatorname{sn} u$ есть результат обращения эллиптического интеграла первого рода в нормальной форме Лежандра.

Из второго и третьего уравнений (VII.5.3) вытекает, что функции $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ являются результатом обращения следующих интегралов:

$$u = \int\limits_1^{\operatorname{cn} u} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}}, \qquad \text{(VII.5.5)}$$

$$u = \int\limits_1^{\operatorname{dn} u} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}}. \qquad \text{(VII.5.6)}$$

При этом под обращением интеграла, как и раньше, понимается рассмотрение верхнего предела интеграла как функции самого интеграла.

§ VII.6. Случаи вырождения эллиптических функций

Покажем теперь, что при $k=0$ эллиптические функции вырождаются в тригонометрические, а при $k=1$ — в гиперболические функции.

Действительно, если в интеграле (VII.5.4) положить $k=0$, то его можно записать в виде

$$u = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда $u = \arcsin x$, или $x = \sin u$. Следовательно,

$$\operatorname{sn} u = \sin u.$$

Но тогда формулы (VII.2.6) дают

$$\operatorname{cn} u = \cos u, \quad \operatorname{dn} u = 1.$$

Пусть теперь $k=1$. Тогда интеграл (VII.5.4) принимает вид

$$u = \int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^2}$$

и мы имеем

$$u = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

или

$$\frac{1+x}{1-x} = e^{2u}.$$

Отсюда

$$x = \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1} = \frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}} = \operatorname{th} u.$$

Поэтому

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{th} u,$$

а из формул (VII.2.6) сразу следует, что

$$\operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u}.$$

Таким образом, тригонометрические и гиперболические функции можно рассматривать как частные случаи эллиптических функций.

§ VII.7. Поведение функций Якоби на отрезке $[0, 4K]$

Имея в виду то, что эллиптические функции Якоби являются периодическими с общим периодом $4K$ (функция $\operatorname{dn} u$ имеет период $2K$), рассмотрим их поведение на отрезке $[0, 4K]$.

Прежде всего, найдем значения функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ в точках $u = 0$, K, $2K$, $3K$. Рассматривая равенство

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

мы видим, что $u = 0$, когда $\varphi = 0$, и $u = K$, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Другими словами,

$$\operatorname{am} 0 = 0, \quad \operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда, в силу определения эллиптических функций, сразу имеем

$$\operatorname{sn} 0 = 0, \quad \operatorname{cn} 0 = 1, \quad \operatorname{dn} 0 = 1 \qquad \text{(VII.7.1)}$$

и, далее,

$$\operatorname{sn} K = 1, \quad \operatorname{cn} K = 0, \quad \operatorname{dn} K = k'. \qquad \text{(VII.7.2)}$$

Полагая в формулах (VII.4.8) $u = 0$, получаем

$$\operatorname{sn} 2K = 0, \quad \operatorname{cn} 2K = -1, \quad \operatorname{dn} 2K = 1. \qquad \text{(VII.7.3)}$$

Если положить $u = 0$ в формулах (VII.4.10), то найдем

$$\operatorname{sn} 3K = -1, \quad \operatorname{cn} 3K = 0, \quad \operatorname{dn} 3K = k'. \qquad \text{(VII.7.4)}$$

Заметим, наконец, что вследствие периодичности

$$\operatorname{sn} 4K = 0, \quad \operatorname{cn} 4K = 1, \quad \operatorname{dn} 4K = 1. \qquad \text{(VII.7.5)}$$

Полученные результаты собраны в табл. 4.

Таблица 4

Значения функций Якоби

u	0	K	$2K$	$3K$	$4K$
$\operatorname{sn} u$	0	1	0	-1	0
$\operatorname{cn} u$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{dn} u$	1	k'	1	k'	1

Из определения функций Якоби следует, что они могут принимать значения в следующих областях:

$$-1 \leqslant \operatorname{sn} u \leqslant +1, \quad -1 \leqslant \operatorname{cn} u \leqslant +1, \quad k' \leqslant \operatorname{dn} u \leqslant 1.$$

Графики функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ для $k = 0{,}5$ и $k = 0{,}9$ приводятся на рис. 12. Вид графиков зависит от

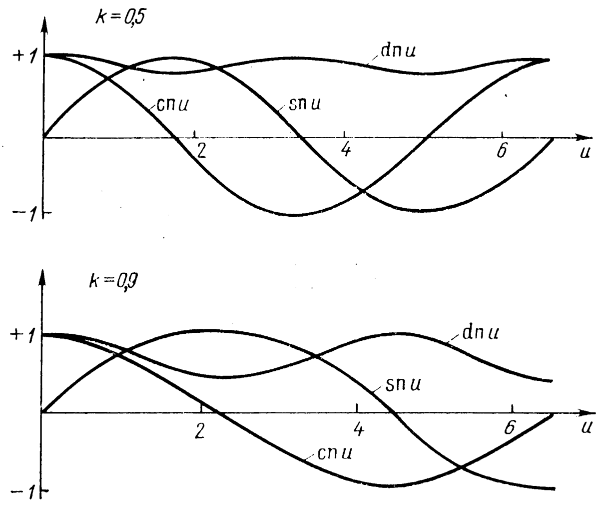


Рис. 12. Графики функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

значения модуля k. Так, в случае $\operatorname{sn} u$ картина выглядит следующим образом. При $k = 0$ функция $\operatorname{sn} u$ вырождается в $\sin u$ с периодом 2π и мы имеем синусоиду. Для малых значений k график $\operatorname{sn} u$ напоминает синусоиду.

При увеличении k график $\operatorname{sn} u$ все более и более отличается от синусоиды. При этом период $4K$ увеличивается, стремясь при $k \to 1$ к бесконечности. Наконец, для $k = 1$ функция $\operatorname{sn} u$ вырождается в гиперболическую функцию $\operatorname{th} u$, которая уже не имеет действительного периода.

§ VII.8. Разложение величины K в ряд по степеням модуля k

Мы уже заметили, что в теории эллиптических функций Якоби очень важную роль играет полный эллиптический интеграл первого рода K:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}. \qquad \text{(VII.8.1)}$$

Он аналогичен $\frac{\pi}{2}$ в теории тригонометрических функций. Сейчас мы укажем один из способов его вычисления, основанным на разложении интеграла (VII.8.1) в ряд по степеням модуля k.

Согласно формуле бинома Ньютона, имеем

$$(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} k^4 \sin^4\varphi + \ldots,$$

или

$$(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n}\varphi, \qquad \text{(VII.8.2)}$$

где, как и раньше, обозначено

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1),$$
$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n).$$

Но

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому, подставляя (VII.8.2) в (VII.8.1) и интегрируя, находим

$$K = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}, \qquad \text{(VII.8.3)}$$

или

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right].$$

Полученное разложение сходится при $k < 1$.

§ VII.9. Теорема сложения для функции sn u

В этом параграфе мы покажем, как можно выразить функцию $\operatorname{sn}(u + v)$ через функции Якоби от u и v.

Пусть

$$x = \operatorname{sn} u, \quad y = \operatorname{sn} v. \tag{VII.9.1}$$

Тогда, согласно (VII.5.4),

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}, \tag{VII.9.2}$$

$$v = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}}. \tag{VII.9.3}$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}} = 0. \tag{VII.9.4}$$

Это уравнение имеет трансцендентный интеграл

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}} = A,$$

который в силу (VII.9.2) и (VII.9.3) можно записать в виде

$$u + v = A. \tag{VII.9.5}$$

Здесь A — произвольная постоянная.

Так как $dv = -du$, то равенства (VII.9.2) и (VII.9.3) дают

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}, \tag{VII.9.6}$$

$$\frac{dy}{du} = -\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2), \qquad \text{(VII.9.7)}$$

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

Дифференцируя эти уравнения, получим

$$\frac{d^2x}{du^2} = 2k^2x^3 - (1 + k^2)\, x,$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = 2k^2y^3 - (1 + k^2)\, y.$$

Отсюда легко находим

$$y\,\frac{d^2x}{du^2} - x\,\frac{d^2y}{du^2} = 2k^2xy\,(x^2 - y^2),$$

или

$$\frac{d}{du}\left(y\,\frac{dx}{du} - x\,\frac{dy}{du}\right) = 2k^2xy\,(x^2 - y^2). \qquad \text{(VII.9.8)}$$

Умножим теперь первое уравнение (VII.9.7) на y^2, а второе — на $-x^2$ и сложим. Это даст

$$y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - x^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = -(x^2 - y^2)(1 - k^2x^2y^2). \qquad \text{(VII.9.9)}$$

Разделим (VII.9.8) на (VII.9.9). Тогда получим

$$\frac{\frac{d}{du}\left(y\,\frac{dx}{du} - x\,\frac{dy}{du}\right)}{y^2\left(\frac{dx}{du}\right)^2 - x^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2} = -\frac{2k^2xy}{1 - k^2x^2y^2},$$

или

$$\frac{\frac{d}{du}\left(y\,\frac{dx}{du} - x\,\frac{dy}{du}\right)}{y\,\frac{dx}{du} - x\,\frac{dy}{du}} = -\frac{2k^2xy\left(y\,\frac{dx}{du} + x\,\frac{dy}{du}\right)}{1 - k^2x^2y^2},$$

или

$$\frac{\frac{d}{du}\left(y\,\frac{dx}{du} - x\,\frac{dy}{du}\right)}{y\,\frac{dx}{du} - x\,\frac{dy}{du}} = \frac{\frac{d}{du}(1 - k^2x^2y^2)}{1 - k^2x^2y^2},$$

или

$$\frac{d}{du}\ln\left(y\,\frac{dx}{du} - x\,\frac{dy}{du}\right) = \frac{d}{du}\ln(1 - k^2x^2y^2).$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du} = C(1 - k^2x^2y^2), \qquad \text{(VII.9.10)}$$

где C — произвольная постоянная.

Если воспользоваться равенствами (VII.9.6), то (VII.9.10) примет вид

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = C. \qquad \text{(VII.9.11)}$$

Из (VII.9.1) и формул (VII.2.6) следует, что

$$\sqrt{1-y^2} = \operatorname{cn} v, \quad \sqrt{1-k^2y^2} = \operatorname{dn} v,$$

$$\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = \operatorname{dn} u.$$

Поэтому (VII.9.11) можно записать в виде

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = C. \qquad \text{(VII.9.12)}$$

Равенства (VII.9.12) и (VII.9.5) являются первыми интегралами дифференциального уравнения (VII.9.4), причем каждый из них содержит произвольную постоянную. Но так как это уравнение имеет первый порядок, то из общей теории дифференциальных уравнений следует, что эти интегралы не могут быть независимыми. Поэтому

$$C = f(A)$$

или

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = f(u+v).$$

Полагая здесь $v = 0$, мы видим, что $\operatorname{sn} u = f(u)$. Следовательно,

$$f(u+v) = \operatorname{sn}(u+v)$$

и окончательно имеем

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = \operatorname{sn}(u+v). \qquad \text{(VII.9.13)}$$

Формула (VII.9.13) и выражает собой теорему сложения для функции $\operatorname{sn} u$.

§ VII.10. Теорема сложения для функций $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$

Образуем с помощью формулы (VII.9.13) выражения для

$$1-\operatorname{sn}^2(u+v) \quad \text{и} \quad 1-k^2\operatorname{sn}^2(u+v).$$

Имеем

$$1-\operatorname{sn}^2(u+v)=1-\frac{(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} u)^2}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)^2}$$

и

$$1-k^2\operatorname{sn}^2(u+v)=1-\frac{k^2(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)^2}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)^2}.$$

Произведя несложные выкладки (используя при этом равенства (VII.2.6)), получим

$$1-\operatorname{sn}^2(u+v)=\left(\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}\right)^2,$$

$$1-k^2\operatorname{sn}^2(u+v)=\left(\frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v-k^2\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}\right)^2.$$

Если извлечь квадратные корни, то найдем

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \qquad \text{(VII.10.1)}$$

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v-k^2\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}. \qquad \text{(VII.10.2)}$$

Чтобы убедиться в правильности выбора знака при извлечении квадратного корня, достаточно положить здесь $v=0$.

Формулы (VII.10.1) и (VII.10.2) и дают нам теоремы сложения для $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$.

§ VII.11. Формулы умножения и деления аргумента на 2

Формулы удвоения аргумента для эллиптических функций можно легко получить из только что доказанных теорем сложения. Действительно, полагая в равенствах (VII.9.13), (VII.10.1) и (VII.10.2) $v=u$, сразу находим следующие формулы:

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}, \qquad \text{(VII.11.1)}$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}.$$

Перейдем к выводу формул деления аргумента на 2. Из (VII.11.1) имеем

$$1 + \operatorname{cn} 2u = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$1 - \operatorname{dn} 2u = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u - \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}.$$

Разделим второе из этих равенств на первое и заменим $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ их выражениями через $\operatorname{sn} u$ согласно формулам

$$\operatorname{cn}^2 u = 1 - \operatorname{sn}^2 u, \quad \operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u.$$

Это даст

$$\frac{1 - \operatorname{dn} 2u}{1 + \operatorname{cn} 2u} = k^2 \operatorname{sn}^2 u.$$

Отсюда, заменяя u на $\frac{u}{2}$, получаем

$$\operatorname{sn} \frac{u}{2} = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{cn} u}}. \qquad \text{(VII.11.2)}$$

Формулы для $\operatorname{cn} \frac{u}{2}$ и $\operatorname{dn} \frac{u}{2}$ можно вывести следующим образом. Из (VII.11.2) имеем

$$1 - \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2} = \frac{k^2 + k^2 \operatorname{cn} u - 1 + \operatorname{dn} u}{k^2 (1 + \operatorname{cn} u)}.$$

Умножая числитель и знаменатель правой части на $1 + \operatorname{dn} u$ и заменяя затем $\operatorname{dn}^2 u$ его выражением

$$\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u,$$

получаем

$$1 - \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2} = \frac{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u + \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(1 + \operatorname{cn} u)(1 + \operatorname{dn} u)},$$

или

$$\operatorname{cn}^2\frac{u}{2}=\frac{\operatorname{cn}u+\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u},$$

откуда

$$\operatorname{cn}\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{cn}u+\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}}. \qquad \text{(VII.11.3)}$$

Воспользуемся снова формулой (VII.11.2). Имеем

$$1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}=\frac{\operatorname{cn}u+\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{cn}u}.$$

Поэтому

$$\operatorname{dn}\frac{u}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{cn}u+\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{cn}u}}. \qquad \text{(VII.11.4)}$$

Заметим, что с помощью теорем сложения можно вывести целый ряд других соотношений для эллиптических функций, аналогичных тем, которые имеются в теории тригонометрических функций.

§ VII.12. Функция Якоби чисто мнимого аргумента

Рассмотрим равенство

$$iv=\int\limits_0^{iy}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad \text{(VII.12.1)}$$

в котором $i=\sqrt{-1}$, а v и y — действительные переменные, причем

$$y>0, \quad -\infty<v<+\infty.$$

Из этого равенства, согласно (VII.5.4), имеем

$$iy=\operatorname{sn}(iv, k) \qquad \text{(VII.12.2)}$$

и, далее,

$$\sqrt{1+y^2}=\operatorname{cn}(iv,\ k), \quad \sqrt{1+k^2y^2}=\operatorname{dn}(iv,\ k). \qquad \text{(VII.12.3)}$$

Положим теперь

$$y=\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}},$$

где $0<\eta<1$, так что переменная t изменяется по прямой в пределах от 0 до $i\eta(1-\eta^2)^{-1/2}$. Поэтому если положить

$$t = \frac{i\tau}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

то τ будет изменяться в пределах от 0 до η. Эта подстановка нам дает также

$$dt = \frac{i\,d\tau}{(1-\tau^2)^{3/2}},$$

$$\sqrt{1-t^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$\sqrt{1-k^2t^2} = \frac{\sqrt{1-k'^2\tau^2}}{\sqrt{1-\tau^2}},$$

где $k'^2 = 1 - k^2$.

Подставляя эти равенства в (VII.12.1), получаем

$$v = \int\limits_0^{\eta} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}}.$$

Отсюда

$$\eta = \operatorname{sn}(v, k').$$

Следовательно,

$$y = \frac{\operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')}. \tag{VII.12.4}$$

Подстановка этого равенства в (VII.12.2) дает следующую формулу:

$$\operatorname{sn}(iv, k) = i\,\frac{\operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')}, \tag{VII.12.5}$$

которая связывает функцию $\operatorname{sn} u$ чисто мнимого аргумента с функциями Якоби вещественного аргумента.

Подставляя теперь (VII.12.5) в (VII.12.3), получаем такие формулы:

$$\operatorname{cn}(iv, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(v, k')}, \tag{VII.12.6}$$

$$\operatorname{dn}(iv, k) = \frac{\operatorname{dn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')}. \tag{VII.12.7}$$

Напомним, что здесь k' есть дополнительный для k модуль.

Формулы (VII.12.5)—(VII.12.7) часто называют мнимым преобразованием Якоби.

В заключение этого параграфа выведем несколько соотношений, которые нам понадобятся в будущем.

Пусть

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}}.$$

Тогда на основании равенств (VII.7.2), в которых надо заменить K на k соответственно на K' и k', а k' — на k, имеем

$$\operatorname{cn}(K', k') = 0, \quad \operatorname{sn}(K', k') = 1, \quad \operatorname{dn}(K', k') = k.$$

Поэтому из формул (VII.12.5) — (VII.12.7) легко находим

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(iK', k)\operatorname{cn}(K', k') &= i, \\ \operatorname{cn}(iK', k)\operatorname{cn}(K', k') &= 1, \\ \operatorname{dn}(iK', k)\operatorname{cn}(K', k') &= k. \end{aligned} \tag{VII.12.8}$$

Именно эти соотношения и нужно было нам вывести.

§ VII.13. Функции Якоби комплексного аргумента

Предполагая, что

$$w = u + iv,$$

где u и v — действительные переменные, а $i = \sqrt{-1}$, рассмотрим функции

$$\operatorname{sn} w, \quad \operatorname{cn} w, \operatorname{dn} w.$$

Определим эти функции с помощью теорем сложения.

Заменяя в формуле (VII.9.13) v на iv, получим

$$\operatorname{sn} w = \frac{\operatorname{sn}(u, k)\operatorname{cn}(iv, k)\operatorname{dn}(iv, k) + \operatorname{sn}(iv, k)\operatorname{cn}(u, k)\operatorname{dn}(u, k)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)\operatorname{sn}^2(iv, k)}.$$

Подставим сюда вместо

$$\operatorname{sn}(iv, k), \quad \operatorname{cn}(iv, k), \quad \operatorname{dn}(iv, k)$$

их значения из равенств (VII.12.5) — (VII.12.7). Это даст

$$\operatorname{sn} w = \frac{1}{\lambda}\operatorname{sn}(u, k)\operatorname{dn}(v, k') + \\ + \frac{i}{\lambda}\operatorname{sn}(v, k')\operatorname{cn}(v, k')\operatorname{cn}(u, k)\operatorname{dn}(u, k), \tag{VII.13.1}$$

где

$$\lambda = \operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)\operatorname{sn}^2(v, k'). \tag{VII.13.2}$$

Используя равенства (VII.10.1), (VII.10.2), а также (VII.12.5) — (VII.12.7), аналогичным образом найдем

$$\operatorname{cn} w = \frac{1}{\lambda} \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{cn}(v, k') -$$
$$- \frac{i}{\lambda} \operatorname{sn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k') \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k), \quad \text{(VII.13.3)}$$

$$\operatorname{dn} w = \frac{1}{\lambda} \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{cn}(v, k') \operatorname{dn}(v, k') -$$
$$- \frac{ik^2}{\lambda} \operatorname{sn}(v, k') \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k). \quad \text{(VII.13.4)}$$

Здесь, как и раньше, $k'^2 = 1 - k^2$, а λ дается равенством (VII.13.2).

Таким образом, формулы (VII.13.1) — (VII.13.4) выражают функции Якоби комплексного аргумента $w = u + iv$ через якобиевы функции действительных аргументов u и v.

Отметим теперь некоторые свойства эллиптических функций комплексного аргумента w.

Путем непосредственной проверки нетрудно убедиться в том, что они удовлетворяют, как и функции действительного аргумента, соотношениям

$$\operatorname{sn}^2 w + \operatorname{cn}^2 w = 1,$$
$$\operatorname{dn}^2 w + k^2 \operatorname{sn}^2 w = 1.$$

Легко убеждаемся также в том, что

$$\operatorname{sn}(-w) = -\operatorname{sn} w, \quad \operatorname{cn}(-w) = \operatorname{cn} w, \quad \operatorname{dn}(-w) = \operatorname{dn} w.$$

Как и в случае действительного аргумента, для функций Якоби комплексного аргумента имеют место следующие теоремы сложения:

$$\operatorname{sn}(w_1 + w_2) = \frac{\operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w_2 \operatorname{dn} w_2 + \operatorname{sn} w_2 \operatorname{cn} w_1 \operatorname{dn} w_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w_1 \operatorname{sn}^2 w_2}, \quad \text{(VII.13.5)}$$

$$\operatorname{cn}(w_1 + w_2) = \frac{\operatorname{cn} w_1 \operatorname{cn} w_2 - \operatorname{sn} w_1 \operatorname{sn} w_2 \operatorname{dn} w_1 \operatorname{dn} w_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w_1 \operatorname{sn}^2 w_2}, \quad \text{(VII.13.6)}$$

$$\operatorname{dn}(w_1 + w_2) = \frac{\operatorname{dn} w_1 \operatorname{dn} w_2 - k^2 \operatorname{sn} w_1 \operatorname{sn} w_2 \operatorname{cn} w_1 \operatorname{cn} w_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w_1 \operatorname{sn}^2 w_2}, \quad \text{(VII.13.7)}$$

где

$$w_1 = u_1 + iv_1, \quad w_2 = u_2 + iv_2.$$

Справедливость формул (VII.13.5) — (VII.13.7) можно проверить (хотя это и весьма громоздко) путем подстановки в них равенств вида (VII.13.1) — (VII.13.4) и использования соотношений (VII.9.13), (VII.10.1) и (VII.10.2).

§ VII.14. Двоякопериодичность функций Якоби

В § VII.3 мы видели, что эллиптические функции Якоби в случае действительного аргумента обладают свойством периодичности. Рассмотрим этот вопрос подробнее в общем случае, когда аргумент функции Якоби является комплексным.

Возьмем формулы (VII.13.5) и (VII.13.6) и положим в них

$$w_1 = w, \quad w_2 = 4K.$$

Тогда получим

$$\operatorname{sn}(w + 4K) = \frac{\operatorname{sn} w \operatorname{cn} 4K \operatorname{dn} 4K + \operatorname{sn} 4K \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w \operatorname{sn}^2 4K},$$

$$\operatorname{cn}(w + 4K) = \frac{\operatorname{cn} w \operatorname{cn} 4K - \operatorname{sn} w \operatorname{sn} 4K \operatorname{dn} w \operatorname{dn} 4K}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w \operatorname{sn}^2 4K}.$$

Но, согласно (VII.7.5),

$$\operatorname{sn} 4K = 0, \quad \operatorname{cn} 4K = 1, \quad \operatorname{dn} 4K = 1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sn}(w + 4K) = \operatorname{sn} w, \quad \operatorname{cn}(w + 4K) = \operatorname{cn} w. \qquad \text{(VII.14.1)}$$

Значит, каждая из функций $\operatorname{sn} w$ и $\operatorname{cn} w$ имеет действительный период, равный $4K$.

Чтобы доказать, что функция $\operatorname{dn} w$ имеет действительный период $2K$, возьмем формулу (VII.13.7) и положим в ней

$$w_1 = w, \quad w_2 = 2K.$$

Это даст

$$\operatorname{dn}(w + 2K) = \frac{\operatorname{dn} w \operatorname{dn} 2K - k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{sn} 2K \operatorname{cn} w \operatorname{cn} 2K}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 w \operatorname{sn}^2 2K},$$

Но поскольку

$$\operatorname{sn} 2K = 0, \quad \operatorname{cn} 2K = -1, \quad \operatorname{dn} 2K = 1,$$

то

$$\operatorname{dn}(w + 2K) = \operatorname{dn} w, \qquad \text{(VII.14.2)}$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что каждая из эллиптических функций имеет еще по одному мнимому периоду. Для этого рассмотрим сначала преобразование якобиевых функций, связанное с заменой аргумента w на $w+iK'$, где K' — полный эллиптический интеграл первого рода с дополнительным модулем k'.

Возьмем формулу (VII.13.5) и умножим числитель и знаменатель ее правой части на $\mathrm{cn}^2(-iw_2, k')$. Это делается для того, чтобы избежать в последующем неопределенности, связанной с обращением в бесконечность числителя и знаменателя. Тогда

$$\mathrm{sn}(w_1+w_2) =$$
$$= \frac{1}{\mu}\mathrm{cn}(w_1, k)\mathrm{cn}(w_2, k)\mathrm{cn}(-iw_2, k')\mathrm{dn}(w_2\, k)\mathrm{cn}(-iw_2\, k') +$$
$$+\frac{1}{\mu}\mathrm{sn}(w_2, k)\mathrm{cn}(-iw_2, k')\mathrm{cn}(w_1, k)\,\mathrm{dn}(w_1, k)\,\mathrm{cn}(-iw_2, k'),$$

где

$$\mu = \mathrm{cn}^2(-iw_2,\ k') - k^2\,\mathrm{sn}^2(w_1,\ k)\,\mathrm{sn}^2(w_2,\ k)\,\mathrm{cn}^2(-iw_2,\ k').$$

Полагая здесь

$$w_1 = w, \quad w_2 = iK'$$

и имея в виду равенства (VII.12.8), получим

$$\mathrm{sn}(w+iK') = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,w}. \tag{VII.14.3}$$

Поступая подобным образом с формулами (VII.13.6) и (VII.13.7), также найдем

$$\mathrm{cn}(w+iK) = -\frac{i\,\mathrm{dn}\,w}{k\,\mathrm{sn}\,w}, \tag{VII.14.4}$$

$$\mathrm{dn}(w+iK') = -\frac{i\,\mathrm{cn}\,w}{\mathrm{sn}\,w}. \tag{VII.14.5}$$

Из (VII.14.3) следует, что

$$\mathrm{sn}(w+2iK') = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}(w+iK')}.$$

Используя еще раз (VII.14.3), получаем

$$\mathrm{sn}(w+2iK') = \mathrm{sn}\,w. \tag{VII.14.6}$$

Следовательно, функция $\mathrm{sn}\,w$ имеет мнимый период $2iK'$.

Точно так же из (VII.14.4) и (VII.14.5) находим

$$\mathrm{cn}(w+2iK') = -\,\mathrm{cn}\,w,$$
$$\mathrm{dn}(w+2iK') = -\,\mathrm{dn}\,w.$$

Двукратное применение этих формул дает

$$\operatorname{cn}(w+4iK')=\operatorname{cn} w, \tag{VII.14.7}$$

$$\operatorname{dn}(w+4iK')=\operatorname{dn} w, \tag{VII.14.8}$$

т. е. функции $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$ имеют мнимый период $4iK'$.

Итак, показано, что эллиптические функции Якоби имеют как вещественные, так и мнимые периоды. Поскольку сумма и разность периодов функции являются также периодом этой функции, то каждая из функций Якоби имеет бесчисленное множество периодов. Так, например, функция $\operatorname{sn} w$ имеет следующие периоды:

$$\pm 4K \pm 2iK', \quad \pm 8K \pm 2iK', \quad \pm 8K \pm 4iK', \ \ldots \tag{VII.14.9}$$

Заметим теперь, что для никакой функции Якоби мы не сможем указать один основной период ω (как это можно сделать, например, в случае тригонометрических функций), такой, что любой другой период этой функции получался бы из основного путем умножения его на некоторое целое число. Действительно, если бы такой период существовал, то, например, в случае $\operatorname{sn} w$ должны были бы выполняться два соотношения

$$4K = m_1\omega, \quad 2iK' = m_2\omega,$$

где m_1 и m_2 — целые числа. Но тогда отношение двух периодов $4K$ и $2iK'$ должно было бы равняться действительному числу m_2/m_1, что невозможно, ибо оно является мнимой величиной $iK'/2K$.

Однако для каждой из якобиевых функций можно указать два основных периода ω_1 и ω_2, таких, что любой другой период Ω этой функции будет определяться формулой

$$\Omega = m\omega_1 + n\omega_2, \tag{VII.14.10}$$

где m и n — целые числа. Так, для функции $\operatorname{sn} w$ можно взять

$$\omega_1 = 4K, \quad \omega_2 = 2iK'.$$

Тогда формула (VII.14.10) даст все периоды, указанные в (VII.14.9). Конечно, выбор основных периодов можно осуществить бесчисленным множеством способов. По-видимому, этот выбор является наиболее простым.

Для функции $\operatorname{cn} w$ можно положить

$$\omega_1 = 4K, \quad \omega_2 = 2K + 2iK',$$

а для $\operatorname{dn} w$ —

$$\omega_1 = 2K, \quad \omega_2 = 4iK'.$$

Таким образом, функции $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$ являются двоякопериодическими функциями. Этим они, в частности, отличаются от тригонометрических функций, которые являются однопериодическими.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию этому важному свойству якобиевых функций. Для этого воспользуемся плоскостью комплексного переменного w, где каждому значению $w = u + iv$ соответствует точка с прямоугольными координатами u, v.

Возьмем на этой плоскости четыре точки:

$$w = 0, \quad w = \omega_1 + \omega_2, \quad w = \omega_1, \quad w = \omega_2.$$

Эти точки являются вершинами параллелограмма периодов. В случае функции $\operatorname{sn} w$ основным параллелограммом периодов будет прямоугольник со сторонами $4K$ и $2K'$ (рис. 13), в случае $\operatorname{cn} w$ — параллелограмм с основанием $4K$, углом при основании $\operatorname{arctg} \frac{K'}{K}$ и высотой $2K'$, и в случае $\operatorname{dn} w$ — прямоугольник со сторонами $2K$ и $4K'$.

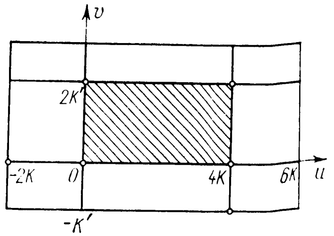


Рис. 13. Параллелограмм периодов для функции $\operatorname{sn} u$

Покроем всю плоскость w сетью параллелограммов, равных основному параллелограмму периодов и одинаково с ним расположенных. При этом потребуем, чтобы параллелограммы не налагались друг на друга и не оставляли просветов в плоскости. Эти параллелограммы называются параллелограммами периодов. Для всех значений w точки

$$w, \; w + \omega_1, \; \ldots, \; w + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

где m_1 и m_2 — целые числа, будут занимать сходные положения в параллелограммах периодов. Любые две такие точки называются сравнимыми. Из свойства двоякопериодичности следует, что в сравнимых точках функция Якоби принимает одно и то же значение. Другими словами, значения якобиевой функции в любом параллелограмме периодов являются простым повторением ее значений в любом другом параллелограмме периодов.

Поскольку для всякой точки комплексной плоскости существует только одна сравнимая точка в основном параллелограмме периодов (если исключить из него стороны, не проходящие через начало координат), то нам достаточно изучить поведение эллиптической функции внутри основного параллелограмма периодов и на его сторонах, прилегающих к началу координат, чтобы узнать поведение этой функции во всей комплексной плоскости.

В заключение этого параграфа выведем еще одну совокупность формул, которые нам потребуются в будущем.

Положим в (VII.13.5)

$$w_1 = w, \quad w_2 = 2K$$

и примем во внимание, что

$$\operatorname{sn} 2K = 0, \quad \operatorname{cn} 2K = -1, \quad \operatorname{dn} 2K = 1.$$

Тогда получим

$$\operatorname{sn}(w + 2K) = -\operatorname{sn} w.$$

Заменяя здесь w на $w + 2iK'$, будем иметь

$$\operatorname{sn}(w + 2K + 2iK') = -\operatorname{sn}(w + 2iK').$$

Равенство (VII.14.6) теперь дает

$$\operatorname{sn}(w + 2K + 2iK') = -\operatorname{sn} w. \qquad \text{(VII.14.11)}$$

Аналогичным образом находим

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cn}(w + 2K + 2iK') &= \operatorname{cn} w, \\ \operatorname{dn}(w + 2K + 2iK') &= -\operatorname{dn} w. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.14.12)}$$

Эти формулы нам и нужно было вывести.

§ VII.15. Нули и полюсы функций Якоби

Найдем те точки внутри основного параллелограмма периодов и на его сторонах, в которых функции Якоби обращаются в нуль, а также те точки, в которых эти функции обращаются в бесконечность.

Отыщем сначала нули функции $\operatorname{sn} w$. Согласно (VII.13.1) и (VII.13.2), имеем

$$\operatorname{sn} w = \frac{\operatorname{sn}(u, k)\operatorname{dn}(v, k')}{\operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(v, k')\operatorname{sn}^2(u, k)} + i\,\frac{\operatorname{sn}(v, k')\operatorname{cn}(v, k')\operatorname{cn}(u, k)\operatorname{dn}(u, k)}{\operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(v, k')\operatorname{sn}^2(u, k)}, \qquad \text{(VII.15.1)}$$

где $w = u + iv$.

Для того чтобы комплексное число равнялось нулю, нужно, чтобы равнялись нулю одновременно его действительная и мнимая части. Приравнивая нулю числитель действительной части (VII.15.1) и замечая, что для любого действительного v функция $\operatorname{dn}(v, k')$ не равна нулю, находим

$$\operatorname{sn}(u, k) = 0. \qquad \text{(VII.15.2)}$$

Так как в случае основного параллелограмма периодов u изменяется в пределах от 0 до $4K$, то на основании § VII.7 решениями уравнения (VII.15.2) будут

$$u = 0, \quad u = 2K, \quad u = 4K. \qquad \text{(VII.15.3)}$$

Но при этих значениях u имеем

$$\operatorname{cn} 0 = 1, \quad \operatorname{cn} 2K = -1, \quad \operatorname{cn} 4K = 1,$$
$$\operatorname{dn} 0 = 1, \quad \operatorname{dn} 2K = 1, \quad \operatorname{dn} 4K = 1.$$

Поэтому мнимая часть (VII.15.1) при условиях (VII.15.3) обратится в

$$\pm \frac{\operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')}.$$

А это выражение будет равно нулю при

$$v = 0, \quad v = 2K' \qquad \text{(VII.15.4)}$$

(для основного параллелограмма периодов v изменяется в пределах от 0 до $2K'$).

Таким образом, числители действительной и мнимой частей (VII.15.1) обращаются в нуль, если u и v определяются равенствами (VII.15.3) и (VII.15.4). Но при этих значениях u и v знаменатель (VII.15.1) равен единице. Следовательно, (VII.15.3) и (VII.15.4) дают нули функции $\operatorname{sn} w$. Комбинируя значения u из (VII.15.3) со значениями v из (VII.15.4), найдем все нули $\operatorname{sn} w$, лежащие внутри основного параллелограмма периодов и на его сторонах. В результате имеем

$$w = 0, \qquad w = 2K, \qquad w = 4K,$$
$$w = 2iK', \quad w = 2K + 2iK', \quad w = 4K + 2iK'.$$

Заметим, однако, что только

$$w = 0 \quad \text{и} \quad w = 2K \qquad \text{(VII.15.5)}$$

не лежат на сторонах основного параллелограмма периодов, не проходящих через начало координат. Поэтому мы найдем любой другой нуль функции $\operatorname{sn} w$, если прибавим к одному из значений w из (VII.15.5) некоторое целое число основных периодов этой функции. Все возможные нули $\operatorname{sn} w$ будут определяться формулами

$$w = 4Km + 2iK'n,$$
$$w = 2K + 4Km + 2iK'n,$$

где m и n — целые числа.

Очень просто находятся и особые точки функции $\operatorname{sn} w$. Для этого нужно приравнять нулю знаменатель (VII.15.1):

$$\operatorname{cn}^2(v, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(v, k') \operatorname{sn}^2(u, k).$$

Оказывается, что особыми точками $\operatorname{sn} w$, лежащими внутри основного параллелограмма периодов и на его сторонах, проходящих через начало координат, являются

$$w = iK', \quad w = 2K + iK', \qquad \text{(VII.15.6)}$$

так что все возможные особые точки функции $\operatorname{sn} w$ определяются формулами.

$$w = iK' + 4Km + 2iK'n,$$
$$w = 2K + iK' + 4Km + 2iK'n,$$

где m и n — целые числа.

Как мы увидим в § VII.17, все особые точки якобиевых функций являются полюсами.

Нули и полюсы функций $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$ могут быть найдены точно так же, как и в случае $\operatorname{sn} w$. Они приводятся в табл. 5.

Таблица 5

Нули и полюсы функций Якоби

	Нули		Полюсы	
$\operatorname{sn} w$	0	$2K$	iK'	$2K + iK'$
$\operatorname{cn} w$	K	$3K$	$2K + iK'$	$4K + iK'$
$\operatorname{dn} w$	$K + iK'$	$K + 3iK'$	iK'	$3iK'$

§ VII.16. Разложение функций Якоби в ряды Тейлора

В предыдущем параграфе мы видели, что для каждой из трех якобиевых функций ближайшей к началу координат особой точкой является точка $w = iK'$. Поэтому любая из этих функций может быть разложена в ряд Тейлора

$$f(w)=f(0)+\frac{w}{1!}f'(0)+\frac{w^2}{2!}f''(0)+\ldots,$$

который будет сходиться при $|w|<K'$.

Для нахождения коэффициентов этих рядов воспользуемся обычным в таких случаях приемом. Согласно (VII.5.2), имеем

$$\begin{aligned}(\operatorname{sn} w)' &= \operatorname{cn} w\, d\operatorname{n} w,\\ (\operatorname{cn} w)' &= -\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w,\\ (\operatorname{dn} w)' &= -k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w.\end{aligned} \qquad \text{(VII.16.1)}$$

Дифференцируя эти равенства, находим

$$\begin{aligned}(\operatorname{sn} w)'' &= (\operatorname{cn} w)' \operatorname{dn} w + \operatorname{cn} w (\operatorname{dn} w)',\\ (\operatorname{cn} w)'' &= -(\operatorname{sn} w)' \operatorname{dn} w - \operatorname{sn} w (\operatorname{dn} w)',\\ (\operatorname{dn} w)'' &= -k^2 (\operatorname{sn} w)' \operatorname{cn} w - k^2 \operatorname{sn} w (\operatorname{cn} w)'.\end{aligned} \qquad \text{(VII.16.2)}$$

Если продифференцировать последние равенства, то мы увидим, что

$$(\operatorname{sn} w)''', \quad (\operatorname{cn} w)''', \quad (\operatorname{dn} w)'''$$

будут выражены через функции $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ и их первые и вторые производные. И, вообще, производные порядка n функций Якоби выражаются через функции $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ и их производные до $(n-1)$-го порядка. Поэтому, полагая в полученных выражениях для производных $w=0$, можно найти любое число коэффициентов разложений якобиевых функций в ряды Тейлора.

Положим в формулах (VII.16.1) и (VII.16.2) $w=0$. Тогда, поскольку, согласно (VII.7.1),

$$\operatorname{sn} 0=0, \quad \operatorname{cn} 0=1, \quad \operatorname{dn} 0=1,$$

получим

$$\begin{aligned}&(\operatorname{sn} 0)'=1, \quad &&(\operatorname{cn} 0)'=0, \quad &&(\operatorname{dn} 0)'=0,\\ &(\operatorname{sn} 0)''=0, \quad &&(\operatorname{cn} 0)''=-1, \quad &&(\operatorname{dn} 0)''=-k^2.\end{aligned}$$

Подобным образом можно найти коэффициенты при членах более высокого порядка. В результате для функций $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$, $\operatorname{dn} w$ будем иметь следующие разложения:

$$\operatorname{sn} w = w - 2k\alpha\frac{w^3}{3!} + 4k^2(3+\alpha^2)\frac{w^5}{5!} - 8k^3(33\alpha+\alpha^3)\frac{w^7}{7!} + \ldots, \qquad \text{(VII.16.3)}$$

$$\operatorname{cn} w = 1 - \frac{w^2}{2!} + (1 + 4k^2)\frac{w^4}{4!} -$$

$$- (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{w^6}{6!} + \ldots, \quad \text{(VII.16.4)}$$

$$\operatorname{dn} w = 1 - k^2 \frac{w^2}{2!} + k^2 (4 + k^2)\frac{w^4}{4!} -$$

$$- k^2 (16 + 44k^2 + k^4)\frac{w^6}{6!} + \ldots, \quad \text{(VII.16.5)}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

При $k = 0$ формулы (VII.16.3) и (VII.16.4) дают нам разложения для $\sin w$ и $\cos w$.

§ VII.17. Поведение функций Якоби в окрестностях особых точек

Из результатов, полученных в § VII.15, следует, что особые точки якобиевых функций даются формулой

$$w = 2mK + (2n + 1)iK',$$

где m и n — целые числа, включая и нуль.

Найдем теперь разложения функций Якоби в окрестностях некоторых ближайших к началу координат особых точек. Рассмотрим сначала разложение для функции $\operatorname{sn} w$ в окрестности точки $w = iK'$.

Используя свойство нечетности функции $\operatorname{sn} w$ и равенства (VII.14.3) и (VII.14.6), легко находим такую формулу:

$$\operatorname{sn} w = \frac{1}{k \operatorname{sn}(w - iK')}. \quad \text{(VII.17.1)}$$

Но если воспользоваться разложением (VII.16.3), то будем иметь

$$\frac{1}{\operatorname{sn}(w - iK')} = \frac{1}{(w - iK') - \frac{1 + k^2}{3!}(w - iK')^3 + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{w - iK'}\left[1 - \frac{1 + k^2}{3!}(w - iK')^2 + \ldots\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{w - iK'}\left[1 + \frac{1 + k^2}{3!}(w - iK')^2 + \ldots\right].$$

Подставляя этот результат в (VII.17.1), получим

$$\operatorname{sn} w = \frac{1}{k} \frac{1}{w - iK'} + \frac{1 + k^2}{6k}(w - iK') + \ldots \quad \text{(VII.17.2)}$$

Таким образом, мы нашли разложение в ряд Лорана функции $\operatorname{sn} w$ в окрестности точки $w = iK'$. Мы видим, что точка iK' является простым полюсом функции $\operatorname{sn} w$, причем вычет $\operatorname{sn} w$ относительно этой точки равен k^{-1}.

Рассмотрим теперь другую особую точку

$$w = 2K + iK', \quad \text{(VII.17.3)}$$

лежащую в основном параллелограмме периодов. Так как

$$\operatorname{sn} w = -\operatorname{sn}(w - 2K), \quad \text{(VII.17.4)}$$

то, заменяя в (VII.17.2) w на $w - 2K$ и подставляя результат в (VII.17.4), получаем

$$\operatorname{sn} w = -\frac{1}{k} \frac{1}{w - 2K - iK'} - \frac{1 + k^2}{6k}(w - 2K - iK') + \ldots \quad \text{(VII.17.5)}$$

Мы видим, что точка (VII.17.3) для функции $\operatorname{sn} w$ является также простым полюсом. Вычет относительно этого полюса равен $-k^{-1}$.

Аналогичным образом можно найти разложения в ряды Лорана функций $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$. Эти разложения в окрестностях особых точек, лежащих в основных параллелограммах периодов, имеют вид

$$\operatorname{cn} w = \frac{i}{k} \frac{1}{w - 2K - iK'} + \frac{(1 - 2k^2)\, i}{6k}(w - 2K - iK') + \ldots \quad \text{(VII.17.6)}$$

$$\operatorname{cn} w = -\frac{i}{w - 4K - iK'} - \frac{(1 - 2k^2)\, i}{6}(w - 4K - iK') + \ldots \quad \text{(VII.17.7)}$$

$$\operatorname{dn} w = -\frac{i}{w - iK'} - \frac{(k^2 - 2)\, i}{6}(w - iK') + \ldots \quad \text{(VII.17.8)}$$

$$\operatorname{dn} w = \frac{i}{w - 3iK'} + \frac{(k^2 - 2)\, i}{6}(w - 3iK') + \ldots \quad \text{(VII.17.9)}$$

Таким образом, все особые точки функций $\operatorname{cn} w$ и $\operatorname{dn} w$ являются также простыми полюсами. При этом вычет $\operatorname{cn} w$ относительно полюса $w = 2K + iK'$ равен ik^{-1}, а относительно полюса $w = 4K + iK$ равен $-ik^{-1}$. Вычеты функции

$\operatorname{dn} w$ относительно полюсов $w = iK'$ и $w = 3iK'$ равны соответственно $-i$ и i.

Заметим, что для каждой из якобиевых функций сумма вычетов относительно полюсов в параллелограмме периодов равна нулю.

§ VII.18. Разложение эллиптических функций в ряды Фурье

Очевидно, функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ при вещественном u удовлетворяют условиям теоремы Дирихле и поэтому могут быть разложены в ряды Фурье.

Рассмотрим функцию $\operatorname{sn} u$. Пусть

$$u = \frac{2Kx}{\pi} \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi u}{2K}.$$

Мы видим, что при изменении u от 0 до $4K$ переменная x изменяется от 0 до 2π. Поэтому функция $\operatorname{sn} u$ будет периодической функцией x с периодом 2π. Так как $\operatorname{sn} u$ есть нечетная функция, то ее разложение в ряд Фурье будет иметь вид

$$\operatorname{sn} u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad \text{(VII.18.1)}$$

Если заменить здесь x на $\pi - x$, то будем иметь

$$\operatorname{sn} u = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n \sin nx. \qquad \text{(VII.18.2)}$$

Сравнивая (VII.18.1) и (VII.18.2), получаем

$$b_n = (-1)^{n-1} b_n.$$

Отсюда

$$b_{2n} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$\operatorname{sn} u = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin (2n-1) x. \qquad \text{(VII.18.3)}$$

Коэффициенты этого разложения, как известно, определяются формулой

$$b_{2n-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sn} u \sin (2n-1) x \, dx,$$

или

$$b_{2n-1}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sn}\frac{2Kx}{\pi}\,e^{i(2n-1)x}dx. \qquad \text{(VII.18.4)}$$

Для того чтобы вычислить b_{2n-1}, рассмотрим следующий интеграл:

$$J=\int\limits_{c}\operatorname{sn}\frac{2Kx}{\pi}\,e^{i(2n-1)x}dx, \qquad \text{(VII.18.5)}$$

где контур c представляет собой параллелограмм с вершинами

$$-\pi,\ \pi,\ 2\pi+\pi\tau,\ \pi\tau,$$

причем

$$\tau=\frac{iK'}{K}.$$

Преобразуем сначала интеграл (VII.18.5). Имеем

$$J=\int\limits_{-\pi}^{\pi}+\int\limits_{\pi}^{2\pi+\pi\tau}+\int\limits_{\pi\tau}^{-\pi}+\int\limits_{2\pi+\pi\tau}^{\pi\tau}.$$

Заменяя в третьем интеграле x на $x-2\pi$, мы видим, что интегралы по боковым сторонам взаимно уничтожаются. Поэтому

$$J=\int\limits_{-\pi}^{\pi}+\int\limits_{2\pi+\pi\tau}^{\pi\tau}. \qquad \text{(VII.18.6)}$$

Заменим теперь во втором интеграле (VII.18.6) x на $x+\pi+\pi\tau$. Тогда, поскольку (см. (VII.14.11))

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2Kx}{\pi}+2K+2iK'\right)=-\operatorname{sn}\frac{2Kx}{\pi}$$

и

$$e^{i(2n-1)(x+\pi+\pi\tau)}=-q^{2n-1}e^{i(2n-1)x},$$

где

$$q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \qquad \text{(VII.18.7)}$$

найдем

$$J=\left(1-q^{2n-1}\right)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sn}\frac{2Kx}{\pi}\,e^{i(2n-1)x}\,dx,$$

или, имея в виду (VII.18.4),

$$J = \pi i (1 - q^{2n-1}) b_{2n-1}. \qquad \text{(VII.18.8)}$$

Полученное равенство, таким образом, выражает коэффициент b_{2n-1} через интеграл (VII.18.5). Вычислим теперь этот интеграл. Для этого воспользуемся теоремой о вычетах, согласно которой интеграл от аналитической

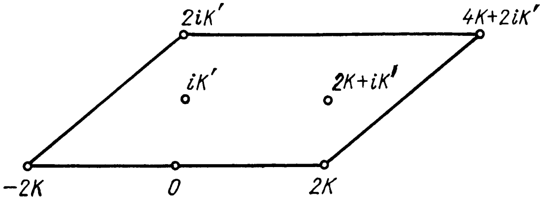


Рис. 14. Контур c'

функции, взятый по замкнутому контуру, равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно всех особых точек, лежащих внутри контура.

Перейдем в интеграле (VII.18.5) от переменной интегрирования x к переменной u. Тогда

$$J = \frac{\pi}{2K} \int\limits_{c'} \operatorname{sn} u e^{\frac{i(2n-1)\pi u}{2K}} du. \qquad \text{(VII.18.9)}$$

При этом параллелограмм c' на плоскости комплексного переменного u имеет вершины (рис. 14)

$$-2K,\ 2K,\ 4K + 2iK',\ 2iK'.$$

Внутри этого параллелограмма подынтегральная функция интеграла (VII.18.9), согласно § VII.15, имеет только два полюса:

$$u = iK' \quad \text{и} \quad u = 2K + iK'.$$

Вычеты этой функции относительно указанных полюсов на основании результатов § VII.17 равны соответственно

$$\frac{1}{k} e^{-\frac{(2n-1)\pi K'}{2K}} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{k} e^{-\frac{(2n-1)\pi K'}{2K}} e^{i(2n-1)\pi},$$

или, если принять во внимание обозначение (VII.18.7),

$$\frac{1}{k} q^{\frac{2n-1}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{k} q^{\frac{2n-1}{2}}.$$

Поэтому по теореме о вычетах получаем

$$J = \frac{2\pi^2 i}{kK} q^{\frac{2n-1}{2}}. \qquad \text{(VII.18.10)}$$

Сопоставляя теперь (VII.18.8) и (VII.18.10), находим

$$b_{2n-1} = \frac{2\pi}{kK} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}. \qquad \text{(VII.18.11)}$$

Следовательно, искомое нами разложение имеет вид

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \sin(2n-1)\frac{\pi u}{2K}. \qquad \text{(VII.18.12)}$$

Аналогичным образом можно найти разложения для функций $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$. Они записываются в следующем виде:

$$\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \cos(2n-1)\frac{\pi u}{2K}, \qquad \text{(VII.18.13)}$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos 2n \frac{\pi u}{2K}. \qquad \text{(VII.18.14)}$$

Имея разложение (VII.18.14), легко можно найти разложение для функции $\operatorname{am} u$. Действительно, согласно § VII.2,

$$\frac{d \operatorname{am} u}{du} = \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u}, \quad \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dn} u.$$

Поэтому

$$\operatorname{am} u = \int_0^u \operatorname{dn} u \, du.$$

Подставляя сюда (VII.18.14) и интегрируя, находим

$$\operatorname{am} u = \frac{\pi u}{2K} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n}{n(1+q^{2n})} \sin 2n \frac{\pi u}{2K}. \qquad \text{(VII.18.15)}$$

Для вещественного u разложения (VII.18.12) — (VII.18.15) сходятся для $|k| < 1$ при любом u. Можно показать, что если u комплексная величина, то полученные разложения сходятся в полосе $|\operatorname{Im} u| < K'$. На границах этой полосы все три функции Якоби имеют полюсы.

Коэффициенты разложений для $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ и $\operatorname{am} u$ довольно просто выражаются через величину q, которая определяется формулой (VII.18.7). Для этой важной величины можно получить разложение в ряд по степеням модуля k. Первые члены этого ряда выглядят следующим образом:

$$q = \frac{k^2}{16}\left(1 + \frac{k^2}{2} + \frac{21}{64}k^4 + \ldots\right). \qquad \text{(VII.18.16)}$$

Вопрос о вычислении q подробно рассмотрен в § VII.20.

Подставим (VII.18.16) в (VII.18.15), (VII.18.12) и (VII.18.13). Тогда будем иметь

$$\operatorname{am} u = v + \frac{k^2}{8}\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)\sin 2v + \frac{k^4}{256}\sin 4v + \ldots,$$

$$\operatorname{sn} u = \left(1 + \frac{k^2}{16} + \frac{7}{256}k^4\right)\sin v + \\ + \frac{k^2}{16}\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)\sin 3v + \frac{k^4}{256}\sin 5v + \ldots,$$

$$\operatorname{cn} u = \left(1 - \frac{k^2}{16} - \frac{9}{256}k^4\right)\cos v + \\ + \frac{k^2}{16}\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)\cos 3v + \frac{k^4}{256}\cos 5v + \ldots,$$

где $v = \frac{\pi u}{2K}$. Невыписанные здесь члены содержат k^6 и выше.

Мы видим, таким образом, что полученные тригонометрические ряды для $\operatorname{am} u$ и функций Якоби при малых значениях k сходятся очень быстро.

§ VII.19. Тета-функции Якоби

Рассмотрим следующую функцию комплексного переменного u:

$$\theta_4(u) = G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2n-1}e^{2iu}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2n-1}e^{-2iu}\right), \qquad \text{(VII.19.1)}$$

где

$$G = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2n}\right), \quad q = e^{i\pi\tau}, \qquad \text{(VII.19.2)}$$

а τ — постоянное комплексное число, мнимая часть которого положительна, так что $|q| < 1$.

Вследствие абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1}$$

все три произведения сходятся абсолютно и равномерно в любой ограниченной области значений u *). Следовательно, $\theta_4(u)$ есть аналитическая функция во всякой конечной части комплексной плоскости, т. е. целая функция u.

Объединяя произведения и переходя к тригонометрическим функциям, получим

$$\theta_4(u) = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2u + q^{4n-2}), \quad \text{(VII.19.3)}$$

откуда следует, что $\theta_4(u)$ является четной функцией u и, кроме того,

$$\theta_4(u + \pi) = \theta_4(u). \quad \text{(VII.19.4)}$$

Посмотрим теперь, как изменяется $\theta_4(u)$ при увеличении аргумента на величину $\pi\tau$. Имеем

$$\theta_4(u + \pi\tau) = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n+1} e^{2iu}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-3} e^{-2iu}) = \\ = \frac{1 - q^{-1} e^{-2iu}}{1 - qe^{2iu}} \theta_4(u),$$

или окончательно

$$\theta_4(u + \pi\tau) = -q^{-1} e^{-2iu} \theta_4(u). \quad \text{(VII.19.5)}$$

Из формул (VII.19.1) и (VII.19.2) следует, что нулями функции $\theta_4(u)$ являются простые нули в тех точках, в которых

$$e^{\pm 2iu} = e^{(2n-1)\pi i\tau}.$$

Отсюда находим

$$u = m\pi + (2n - 1)\frac{\pi\tau}{2}, \quad \text{(VII.19.6)}$$

где m и n — любые целые положительные или отрицательные числа.

*) См., например: *Гурса Э.*, Курс математического анализа.— М.: Гостехиздат, 1933, т. 2, с. 26.

Введем теперь еще три функции, родственные $\theta_4(u)$:

$$\theta_1(u) = -iq^{1/4}e^{iu}\theta_4\left(u + \frac{\pi\tau}{2}\right),$$
$$\theta_2(u) = \theta_1\left(u + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \text{(VII.19.7)}$$
$$\theta_3(u) = \theta_4\left(u + \frac{\pi}{2}\right).$$

Функции $\theta_1(u)$, $\theta_2(u)$, $\theta_3(u)$, $\theta_4(u)$ были введены Якоби и носят название тета-функций.

Только что мы рассмотрели важнейшие свойства функции $\theta_4(u)$. Рассмотрим теперь свойства других тета-функций. Из (VII.19.7) и (VII.19.1) получаем, прежде всего,

$$\theta_1(u) = 2Gq^{1/4}\sin u\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - 2q^{2u}\cos 2u + q^{4n}\right),$$
$$\theta_2(u) = 2Gq^{1/4}\cos u\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + 2q^{2n}\cos 2u + q^{4n}\right), \qquad \text{(VII.19.8)}$$
$$\theta_3(u) = G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + 2q^{2n-1}\cos 2u + q^{4n-2}\right).$$

Отсюда видно, что $\theta_1(u)$ является нечетной функцией u, а функции $\theta_2(u)$ и $\theta_3(u)$ — функции четные.

Нули этих функций также будут простыми, и их можно легко найти из (VII.19.7) и (VII.19.1). Так, для $\theta_1(u)$ имеем

$$u = m\pi + n\pi\tau, \qquad \text{(VII.19.9)}$$

для $\theta_2(u)$

$$u = (2m-1)\frac{\pi}{2} + n\pi\tau, \qquad \text{(VII.19.10)}$$

и для $\theta_3(u)$

$$u = (2m-1)\frac{\pi}{2} + (2n-1)\frac{\pi\tau}{2}. \qquad \text{(VII.19.11)}$$

Соотношения (VII.19.7) вместе с (VII.19.4) и (VII.19.5) позволяют получить различные формулы преобразования тета-функций. Такие соотношения собраны в табл. 6, в которой для сокращения записи введены обозначения

$$r = q^{-1/4}e^{-i\pi u}, \quad s = q^{-1}e^{-2i\pi u}.$$

Поскольку тета-функции являются функциями аналитическими с действительными отличными от нуля периодами, то они могут быть представлены в виде рядов

Таблица 6

Формулы преобразования тета-функций

	$u+\frac{\pi}{2}$	$u+\frac{\pi\tau}{2}$	$u+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}$	$u+\pi$	$u+\pi\tau$	$u+\pi+\pi\tau$
θ_1	$\theta_2(u)$	$ir\theta_4(u)$	$r\theta_3(u)$	$-\theta_1(u)$	$-s\theta_1(u)$	$s\theta_1(u)$
θ_2	$-\theta_1(u)$	$r\theta_3(u)$	$-ir\theta_4(u)$	$-\theta_2(u)$	$s\theta_2(u)$	$-s\theta_2(u)$
θ_3	$\theta_4(u)$	$r\theta_2(u)$	$ir\theta_1(u)$	$\theta_3(u)$	$s\theta_3(u)$	$s\theta_3(u)$
θ_4	$\theta_3(u)$	$ir\theta_1(u)$	$r\theta_2(u)$	$\theta_4(u)$	$-s\theta_4(u)$	$-s\theta_4(u)$

Фурье, равномерно сходящихся в любой конечной области. Найдем сначала разложение в тригонометрический ряд функции $\theta_4(u)$. Так как она есть функция четная, то ее разложение имеет вид

$$\theta_4(u)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos nu.$$

Заменяя здесь u на $u+\pi$, получим

$$\theta_4(u+\pi)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n \cos nu.$$

Отсюда, учитывая (VII.19.4), находим

$$b_n=(-1)^n b_n.$$

Следовательно, $b_{2n+1}=0$ и, значит,

$$\theta_4(u)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\cos 2nu, \qquad \text{(VII.19.12)}$$

или, если перейти к экспонентам,

$$\theta_4(u)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}}{2}\left(e^{2inu}+e^{-2inu}\right). \qquad \text{(VII.19.13)}$$

Для нахождения коэффициентов b_{2n} мы поступим следующим образом. Заменим сначала в (VII.19.13) u на $u+\pi\tau$, а затем обе части равенства (VII.19.13) умножим на $-q^{-1}e^{-2iu}$. Так как левые части этих двух равенств, согласно (VII.19.5), будут равны, мы будем иметь

$$b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}}{2}\left(q^{2n}e^{2inu}+q^{-2n}e^{-2inu}\right)=$$

$$=-\frac{b_0}{q}e^{-2iu}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}}{2q}\left(e^{2(n-1)iu}+e^{-2(n+1)iu}\right).$$

Приравнивая здесь члены при одинаковых значениях аргумента, получаем

$$b_2 = -2qb_0, \quad b_{2n+2} = -q^{2n+1}b_{2n}.$$

Подставляя эти выражения в (VII.19.12), имеем

$$\theta_4(u) = b_0\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nu\right\}.$$

Положим теперь в этом равенстве и в формуле (VII.19.1) $u=0$. Тогда, сопоставляя друг с другом полученные выражения для $\theta_4(0)$, находим $b_0 = 1$. Поэтому окончательно

$$\theta_4(u) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nu. \quad \text{(VII.19.14)}$$

Аналогичным образом выводятся тригонометрические ряды и для остальных тета-функций. Имеем

$$\theta_1(u) = 2q^{1/4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}q^{(2n+1)^2}\sin(2n+1)u,$$

$$\theta_2(u) = 2q^{1/4}\sum_{n=1}^{\infty}q^{(2n+1)^2}\cos(2n+1)u, \qquad \text{(VII.19.15)}$$

$$\theta_3(u) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2nu.$$

Отметим, что полученные для тета-функций тригонометрические разложения благодаря множителю qn^2 сходятся изумительно быстро. Поэтому они очень удобны для практического вычисления этих функций.

§ VII.20. Вычисление эллиптических функций

В этом параграфе мы выразим эллиптические функции Якоби через тета-функции. Это даст возможность использовать для вычисления эллиптических функций ряды, полученные в предыдущем параграфе.

Итак, в соответствии с § 7.18 положим

$$\tau = i\,\frac{K'}{K}, \qquad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

где K и K' — полные эллиптические интегралы первого рода с модулями k и $k' = \sqrt{1-k^2}$, и рассмотрим следующую функцию:

$$\varphi(u) = \frac{\theta_1\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\theta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}. \qquad \text{(VII.20.1)}$$

Мы видим, что нули этой функции совпадают с нулями функции $\theta_1\left(\frac{\pi}{2K}u\right)$ и, согласно (VII.19.9), даются формулой

$$u = 2mK + 2niK'.$$

Полюса этой функции совпадают с нулями $\theta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)$ и, как следует из (VII.19.6), определяются равенством

$$u = 2mK + (2n-1)iK'.$$

Наконец, при помощи табл. 6 устанавливаем, что $\varphi(u)$ имеет периоды $4K$ и $2iK'$.

Вспоминая теперь результаты § VII.14 и § VII.15, мы видим, что функции $\operatorname{sn} u$ и $\varphi(u)$ обладают одинаковыми периодами, нулями и полюсами. Следовательно, по теореме Лиувилля отношение этих функций есть величина постоянная*). Обозначая эту постоянную через A, будем иметь

$$\operatorname{sn} u = A\frac{\theta_1\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\theta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}. \qquad \text{(VII.20.2)}$$

Для нахождения постоянной A поступим следующим образом. Полагая в (VII.20.2) $u = K$ и переходя при помощи табл. 6 к тета-функциям нулевого аргумента, находим

$$1 = A\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}. \qquad \text{(VII.20.3)}$$

А если в (VII.20.2) положить $u = K + iK'$, то аналогичным образом, получаем

$$\frac{1}{k} = A\frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}. \qquad \text{(VII.20.4)}$$

---

*) См. книгу Н. И. Ахиезера [12].

Так как, согласно (VII.19.15), $\theta_2(0)>0$ и $\theta_3(0)>0$, то и $A>0$. Поэтому из (VII.20.3) и (VII.20.4) выводим, что $A=\frac{1}{\sqrt{k}}$. Следовательно,

$$\operatorname{sn} u=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\theta_1\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\theta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}. \tag{VII.20.5}$$

Тем же путем мы можем прийти к таким соотношениям:

$$\operatorname{cn} u=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\theta_2\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\theta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}, \tag{VII.20.6}$$

$$\operatorname{dn} u=\sqrt{k'}\,\frac{\theta_3\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}{\theta_4\left(\frac{\pi}{2K}u\right)}. \tag{VII.20.7}$$

Мы видим, таким образом, что все три функции Якоби весьма просто выражаются через тета-функции. Ранее мы видели, как быстро сходятся тригонометрические ряды для тета-функций. Эти обстоятельства и определяют способ вычисления функций Якоби. Использование тета-функций, по-видимому, дает нам лучший способ вычисления эллиптических функций.

Нам остается рассмотреть вопрос о вычислении параметра q по модулю k. Выведем для этого соответствующие формулы. Из (VII.20.7) при $u=0$ имеем

$$\sqrt{k'}=\frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}.$$

Если ввести параметр ε по формуле

$$2\varepsilon=\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} \tag{VII.20.8}$$

и воспользоваться равенствами (VII.19.14) и (VII.19.15), полагая в них $u=0$, то находим

$$\varepsilon=\frac{q\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^{4n(n+1)}}{1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{4n^2}}. \tag{VII.20.9}$$

Рассмотрим функцию

$$F(\varepsilon, q) = \varepsilon - \frac{q \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{4n(n+1)}}{1 + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{4n^2}}.$$

Поскольку при $0 \leqslant k < 1$

$$0 \leqslant \varepsilon < 0{,}5, \quad 0 \leqslant q < 1,$$

то эта функция является аналитической относительно ε и q в указанной области значений k, ε, q. Так как, далее,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_{\varepsilon=q=0} \neq 0, \quad F(0, 0) = 0,$$

то, согласно теореме о неявных функциях, параметр q будет аналитической функцией ε, т. е. можно разрешить уравнение (VII.20.9) относительно q и найти решение в виде ряда по возрастающим степеням ε.

Ограничиваясь несколькими первыми членами, получим

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13} + O(\varepsilon^{17}) \quad \text{(VII.20.10)}$$

Формулы (VII.20.8) и (VII.20.10) и решают нашу задачу.

Разложение для q до ε^{37} можно найти в работе [14]. Там же рассмотрена задача о вычислении эллиптических функций с высокой точностью.

§ VII.21. Замечания

Эллиптические интегралы впервые встречаются в исследованиях Якова Бернулли по теории упругости и Маклорена в связи с задачей спрямления дуги эллипса. Важные свойства этого класса интегралов были открыты Эйлером и Лежандром. Лежандр посвятил эллиптическим интегралам обстоятельный трактат [1].

Идея обращения эллиптических интегралов и введение в анализ на этой основе эллиптических функций принадлежит Гауссу, Абелю и Якоби. В 1797 г. Гаусс рассматривает задачу обращения интеграла

$$S = \int\limits_0^r \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}},$$

представляющего собой длину дуги лемнискаты $r^2 = \sin 2\theta$ и вводит две функции, называемые лемнискатическим синусом и лемнискатическим косинусом. Для этих функций, являющихся частным случаем функций Якоби, Гаусс вывел теорему сложения, установил свойство двоякопериодичности и распространил их определение на всю область комплексного переменного. Уже через год Гаусс рассматривает эллиптический интеграл первого рода и вводит обратную функцию, которую он называет универсальнейшим лемнискатическим синусом.

Если при построении лемнискатических функций Гаусс исходил из аналогии с тригонометрическими функциями, то развивая теорию эллиптических функций, он руководствуется аналогией с лемнискатическими функциями.

Полученные Гауссом результаты были опубликованы в 1876 г., уже после его смерти [2]. В 1827 г. Абель опубликовал первую часть мемуара, посвященного эллиптическим функциям [3]. Это была первая публикация, в которой эллиптические функции определяются как функции, обратные эллиптическим интегралам. Весьма интересна реакция Гаусса на эту публикацию. В письме к Бесселю от 30 марта 1828 г. он пишет [4]: «Он (Абель — *Е. А.*) избрал совершенно тот же путь, который я проложил в 1798 г., поэтому неудивительно большое совпадение результатов. К моему удивлению, это распространяется также и на форму и отчасти на выбор обозначений, так что многие его формулы кажутся точной копией моих. Во избежание всякого недоразумения я отмечаю, однако, что я не помню, чтобы я когда-нибудь делился этими вещами с кем бы то ни было».

В 1828 и 1829 годах вышли в свет вторая часть мемуара и очерк Абеля, посвященные эллиптическим функциям (очерк вышел уже после его смерти) [3], [5]. Абель исходит из эллиптического интеграла первого рода в форме

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)}}$$

и, помимо функции

$$x = \varphi(\alpha),$$

вводит еще две функции:

$$f(\alpha) = \sqrt{1 - c^2\varphi^2(\alpha)}, \quad F(\alpha) = \sqrt{1 + e^2\varphi^2(\alpha)},$$

которые также являются эллиптическими. Он выписывает теоремы сложения для этих функций. Определив φ, f, F

чисто мнимого аргумента, он с помощью теорем сложения распространяет определение всех трех функций на область комплексного переменного. Затем устанавливает их двоякопериодичность, находит нули и полюсы и т. д.

В сентябре 1827 г., т. е. в том же месяце, когда появился первый мемуар Абеля, в журнале Шумахера была опубликована заметка Якоби, посвященная преобразованию эллиптических интегралов [6]. Доказательство заявленных здесь теорем он публикует в том же году в другой своей заметке [7]. Это были первые публикации Якоби по теории эллиптических функций.

Свой основной труд по теории эллиптических функций «Новые основания эллиптических функций», в которой дана развернутая теория этих функций, Якоби опубликовал в 1829 г. [8].

Отправляясь здесь от эллиптического интеграла первого рода, Якоби вводит четыре функции, носящие теперь его имя. Заметим, что общепринятые обозначения для них были предложены Хр. Гудерманом в 1838 г.

В этой работе Якоби рассматривает также две вспомогательные функции $\Theta(u)$ и $H(u)$, через которые функции $\operatorname{sn}(u)$, $\operatorname{cn}(u)$ и $\operatorname{dn}(u)$ выражаются формулами

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H(u+K)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

Функции $\Theta(u)$ и $H(u)$ представляются всюду сходящимися тригонометрическими рядами

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v - 2q^9\cos 6v + \ldots$$

$$H(u) = 2q^{1/4}\sin v - 2q^{9/4}\sin 3v + 2q^{25/4}\sin 5v + \ldots,$$

где

$$v = \frac{\pi u}{2K}, \quad q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right).$$

Прошло немного лет после выхода в свет «Новых оснований эллиптических функций», и Якоби выступает с новым подходом к построению теории этих функций. В лекциях по теории эллиптических функций, которые Якоби читал в 1835—1836 годах в Кенигсбергском университете, в основу изложения положены четыре тета-функции. Определения и свойства этих функций даются независимо от эллиптических интегралов. Прообразами тета-функций являются функции $\Theta(u)$ и $H(u)$, рассмотренные им ранее. Лекции Якоби были опубликованы уже после смерти его учеником К. Борхардтом [9].

Рассмотренные нами функции Якоби являются яркими представителями целого класса двоякопериодических однозначных функций комплексного переменного. Дальнейшая разработка теории этих функций принадлежит Лиувиллю и Вейерштрассу. Вейерштрасс ввел в рассмотрение новые функции, названные теперь функциями Вейерштрасса. Теорию этих функций он изложил в лекциях, которые на протяжении многих лет читал в Берлинском университете. Эти лекции в переработанном виде были изданы его учеником Г. А. Шварцем в 1893 г. [10].

Более подробно исторические сведения, касающиеся создания теории эллиптических функций, содержатся в монографии [4]. См. также книги [11] — [16].

Таблицы эллиптических интегралов и эллиптических функций приводятся в изданиях [17], [18]. Задача о практическом вычислении эллиптических функций, как уже отмечалось ранее, рассмотрена И. А. Герасимовым [14]. Сведения о конкретных алгоритмах вычисления эллиптических функций на ЭВМ можно найти в справочном пособии [19].

Глава VIII

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ГАУССА

§ VIII.1. Определение гипергеометрической функции

Гипергеометрическая функция, обозначаемая через $F(a, b, c; z)$, определяется следующим рядом:

$$F(a, b, c; z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1) b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2) b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} z^3 + \ldots \quad \text{(VIII.1.1)}$$

Здесь a, b, c и z называются соответственно первым, вторым, третьим и четвертым аргументами гипергеометрической функции. При этом аргумент c не может быть целым отрицательным числом.

Если один из аргументов a, b равен целому отрицательному числу, то ряд обрывается и функция $F(a, b, c; z)$ является многочленом. Так, если $a = -m$, где m — положительное целое число, то ряд окончится на члене с z^{m-1}.

Предполагая, что ни один из аргументов a, b, c не есть целое отрицательное число, рассмотрим сходимость ряда (VII.1.1). Обозначая n-й член ряда через u_n:

$$u_n = \frac{a(a+1) b(b+1) \ldots (a+n-1)(b+n-1)}{n!\; c(c+1) \ldots (c+n-1)} z^n,$$

при $n \to \infty$ имеем

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} \right| |z| \to |z|.$$

Отсюда по признаку Даламбера заключаем, что ряд (VIII.1.1) абсолютно сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$. Таким образом, гипергеометрическая функция $F(a, b, c; z)$ является аналитической функцией z в круге $|z| < 1$.

Из формулы (VIII.1.1) следует, что

$$F(a,\ b,\ c;\ z) = F(b,\ a,\ c;\ z), \qquad \text{(VIII.1.2)}$$

т. е. гипергеометрическая функция симметрична относительно аргументов a и b.

§ VIII.2. Дифференциальное уравнение Гаусса

Покажем, что гипергеометрическая функция $y = F(a, b, c, z)$ удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dy}{dz} - aby = 0. \qquad \text{(VIII.2.1)}$$

Для этого найдем частное решение этого уравнения в виде

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{(VIII.2.2)}$$

где a_n — пока неопределенные коэффициенты. Дифференцируя (VIII.2.2) будем иметь

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}.$$

Если подставить эти равенства вместе с (VIII.2.2) в уравнение (VIII.2.1), то получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1+c) a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) + n(a+b+1) + ab] a_n z^n.$$

Приравнивая в левой и правой частях этого равенства друг другу члены при z^n, найдем

$$(n+1)(n+c)a_{n+1} = (n^2 + na + nb + ab)a_n.$$

Отсюда

$$a_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} a_n. \qquad \text{(VIII.2.3)}$$

Полученная рекуррентная формула позволяет по a_0 последовательно найти все коэффициенты. Полагая $a_0 = 1$, имеем

$$a_1 = \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}, \quad a_2 = \frac{a(a+b)\,b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}, \ldots$$

Подставим значения этих коэффициентов в (VIII.2.2). Тогда получим решение уравнения (VIII.2.1) в виде

$$y = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} z^3 + \ldots$$

Сравнивая найденный ряд с рядом (VIII.1.1), мы видим, что наше частное решение совпадает с функцией $F(a, b, c; z)$. Таким образом, гипергеометрическая функция в самом деле удовлетворяет уравнению (VIII.2.1), которое называется гипергеометрическим уравнением Гаусса.

§ VIII.3. Гамма-функция Эйлера

Гамма-функция Эйлера, обозначаемая через $\Gamma(p)$, определяется следующим интегралом:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, \qquad \text{(VIII.3.1)}$$

где предполагается, что $p > 0$.

Покажем, прежде всего, что этот интеграл имеет определенное значение. Для этого рассмотрим интеграл

$$I(p) = \int_\varepsilon^1 t^{p-1} e^{-t} dt + \int_1^l t^{p-1} e^{-t} dt, \qquad \text{(VIII.3.2)}$$

где ε — очень малое положительное число, а l — очень большое положительное число, так что $I(p) \to \Gamma(p)$, когда $\varepsilon \to 0$ и $l \to \infty$.

Поскольку при достаточно больших t мы имеем $e^t > t^{p+1}$, то

$$t^{p-1} e^{-t} < \frac{1}{t^2}$$

и, следовательно, второй интеграл в (VIII.3.2) всегда имеет предел.

Что касается первого интеграла в (VIII.3.2.), то, обозначая через $f(t)$ подынтегральную функцию, будем иметь

$$t^{1-p} f(t) \to 1.$$

Но, согласно одному из признаков сходимости Коши, этот интеграл имеет предел, если $1-p$ меньше единицы, т. е. если p — положительная величина.

Таким образом, когда $\varepsilon \to 0$ и $l \to \infty$, интеграл в (VIII.3.2) имеет предел, а поэтому (VIII.3.1.) имеет смысл. Интеграл (VIII.3.1) называется также интегралом Эйлера второго рода.

Функция $\Gamma(p)$ при $p>0$ имеет только положительные значения. Она стремится к бесконечности, когда $p \to 0$ или $p \to \infty$. Минимальное значение $\Gamma(p)$ равно 0,855603... и достигается при $p=1{,}461632...$

Выведем теперь одно очень важное соотношение для гамма-функции. Для этого применим к интегралу (VIII.3.1) операцию интегрирования по частям. Тогда получим

$$\Gamma(p) = -t^{p-1}e^{-t}\Big|_0^\infty + (p-1)\int_0^\infty t^{p-2}e^{-t}dt.$$

Так как первое слагаемое правой части равно нулю, то в соответствии с определением гамма-функции будем иметь

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1). \qquad \text{(VIII.3.3)}$$

Это и есть то соотношение, которое нам нужно было вывести.

Пусть n есть целое положительное число. Тогда с помощью (VIII.3.3) последовательно находим

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)\Gamma(p+n-1),$$

$$\Gamma(p+n-1)=(p+n-2)\Gamma(p+n-2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p).$$

Перемножение этих равенств дает

$$\Gamma(p+n)=p(p+1)\ldots(p+n-1)\Gamma(p).$$

Полученная формула позволяет свести вычисление гамма-функции любого аргумента к случаю, когда аргумент заключается между нулем и единицей.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $p=n$ есть целое число. Из (VIII.3.1) при $p=1$ имеем

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

Полагая в (8.3.3) последовательно $p=2, 3, \ldots, n$, получаем

$$\Gamma(2)=1, \quad \Gamma(3)=1\cdot 2, \ldots$$

и, вообще,

$$\Gamma(n)=1\cdot 2\ldots(n-1)=(n-1)!$$

Более подробные сведения о гамма-функции можно найти в монографии [4].

§ VIII.4. Интеграл Эйлера первого рода

Интегралом Эйлера первого рода называется следующий интеграл:

$$B(p, q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \qquad \text{(VIII.4.1)}$$

в котором $p>0$ и $q>0$.

Подстановкой $t=\sin^2\varphi$ он приводится к виду

$$B(p, q)=\int_0^{\pi/2} 2\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\, d\varphi. \qquad \text{(VIII.4.2)}$$

Если в (VIII.4.1) заменить t на $1-t$, то сразу получаем такое соотношение:

$$B(p, q)=B(q, p).$$

Далее, интегрируя по частям, находим

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q dt=\frac{1}{p}t^p(1-t)^q\Big|_0^1+\frac{q}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt.$$

Отсюда имеем следующее равенство:

$$B(p, q+1)=\frac{q}{p}B(p+1, q).$$

Покажем теперь, что между интегралом Эйлера первого рода и гамма-функцией имеет место следующая замечательная зависимость:

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad \text{(VIII.4.3)}$$

Для доказательства возьмем функцию

$$f(x, y)=4x^{2q-1}y^{2p-1}e^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{(VIII.4.4)}$$

и проинтегрируем ее внутри квадрата со стороной a, образованного осями координат и прямыми $x=a$, $y=a$, а затем перейдем к пределу при $a\to\infty$. Тогда получим

$$J=\lim_{a\to\infty}\left\{\int_0^a 2x^{2q-1}e^{-x^2}dx\int_0^a 2y^{2p-1}e^{-y^2}dy\right\}.$$

Но, полагая $t=x^2$ и учитывая (VIII.3.1), будем иметь

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a 2x^{2q-1}e^{-x^2}dx=\int_0^\infty t^{q-1}e^{-t}dt=\Gamma(q).$$

Аналогично,

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a 2y^{2p-1}e^{-y^2}dy=\Gamma(p). \qquad \text{(VIII.4.5)}$$

Поэтому

$$J=\Gamma(p)\Gamma(q). \qquad \text{(VIII.4.6)}$$

С другой стороны, если перейти к полярным координатам

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

и взять интеграл от функции (VIII.4.4) внутри сектора, ограниченного осями координат и окружностью $x^2+y^2=R^2$, а затем устремить R к бесконечности, то найдем

$$J=\lim_{R\to\infty}\left\{\int_0^R 2r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\int_0^{\pi/2}2\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\,d\varphi\right\}.$$

Но, согласно (VIII.4.5),

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R 2r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr=\Gamma(p+q),$$

а второй интеграл равен $B(p,q)$. Поэтому

$$J=\Gamma(p+q)B(p,q).$$

Сравнивая это равенство с (VIII.4.6), получаем

$$\Gamma(p+q)B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q).$$

Отсюда и следует формула (VIII.4.3).

§ VIII.5. Интегральные формулы для $F(a, b, c; z)$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\Phi(z) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt. \quad \text{(VIII.5.1)}$$

Предполагая, что $|z| < 1$, разложим $(1-tz)^{-a}$ в ряд по возрастающим степеням z. Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона, которая дает

$$(1-tz)^{-a} = 1 + atz + \frac{a(a+1)}{1\cdot 2}t^2z^2 + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}t^nz^n + \ldots$$

Умножим все члены этого ряда на $t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}$ и проинтегрируем. Тогда

$$\Phi(z) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}z^n dt,$$

или

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}z^n\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt.$$

Но, согласно (VIII.4.1),

$$\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt = B(n+b, c-b).$$

Следовательно,

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\cdot 2\ldots n}B(n+b, c-b)z^n. \quad \text{(VIII.5.2)}$$

Преобразуем полученное равенство. Применяя (VIII.4.3), мы имеем

$$B(n+b, c-b) = \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)}.$$

Используя затем (VIII.3.4), получаем

$$B(n+b,\ c-b)=\frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}\,\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}. \tag{VIII.5.3}$$

Подставим (VIII.5.3) в (VIII.5.2). Тогда найдем

$$\Phi(z)=\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a(a+1)\dots(a+n-1)]\,[b(b+1)\dots(b+n-1)]}{1\cdot 2\dots n\cdot c(c+1)\dots(c+n-1)}\,z^n,$$

или

$$\Phi(z)=\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\,F(a,b,c;z). \tag{VIII.5.4}$$

Принимая во внимание (VIII.5.1), отсюда получаем

$$F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt. \tag{VIII.5.5}$$

Так как, согласно (VIII.4.3),

$$\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}=B(b,c-b),$$

то формула (VIII.5.5) принимает следующий вид:

$$F(a,b,c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt. \tag{VIII.5.6}$$

Формулы (VIII.5.5) и (VIII.5.6) и дают нам интегральные представления гипергеометрической функции.

§ VIII.6. Одна формула преобразования

Возьмем формулу (VIII.5.1) и заменим в ней z на $\frac{z}{z-1}$ и t на $1-t$. Тогда получим

$$\Phi\left(\frac{z}{z-1}\right)=(1-z)^a\int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}(1-tz)^{-a}dt. \tag{VIII.6.1}$$

Но, если заменить z на $\frac{z}{z-1}$ в равенстве (VIII.5.4), то найдем

$$\Phi\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F\left(a, b, c; \frac{z}{z-1}\right). \quad \text{(VIII.6.2)}$$

С помощью (VIII.5.5), далее, имеем

$$\int_0^1 t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}(1-tz)^{-a}dt=\frac{\Gamma(c-b)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a, c-b, c; z).$$

Подставим полученное равенство вместе с (VIII.6.2) в (VIII.6.1). Это даст следующую формулу:

$$F\left(a, b, c; \frac{z}{z-1}\right)=(1-z)^{a}F(a, c-b, c; z). \quad \text{(VIII.6.3)}$$

Заменяя здесь b на $c-b$, будем иметь

$$F(a, b, c; z)=(1-z)^{-a}F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right), \quad \text{(VIII.6.4)}$$

а если воспользоваться (VIII.1.2), то

$$F(a, b, c, z)=(1-z)^{-b}F\left(b, c-a, c; \frac{z}{z-1}\right). \quad \text{(VIII.6.5)}$$

Эти формулы выражают гипергеометрическую функцию аргумента z через гипергеометрическую функцию аргумента $\frac{z}{z-1}$.

§ VIII.7. Формула для производной. Одно рекуррентное соотношение

Возьмем формулу (VIII.5.6) и продифференцируем ее по z. Это даст

$$\frac{d}{dz}F(a, b, c; z)=\frac{a}{B(b, c-b)}\int_0^1 t^{b}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a-1}dt.$$

С другой стороны, если в (VIII.5.6) заменить a на $a+1$, b на $b+1$ и c на $c+1$, то будем иметь

$$F(a+1, b+1, c+1; z)=$$
$$=\frac{1}{B(b+1, c-b)}\int_0^1 t^{b}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a-1}dt,$$

Поэтому

$$\frac{d}{dz} F(a, b, c; z) = \frac{aB(b+1, c-b)}{B(b, c-b)} F(a+1, b+1, c+1; z). \tag{VIII.7.1}$$

С помощью равенств (VIII.4.3) и (VIII.3.3) находим

$$\frac{B(b+1, c-b)}{B(b, c-b)} = \frac{\Gamma(b+1)\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c+1)} = \frac{b}{c}.$$

Подставляя этот результат в (VIII.7.1), окончательно получаем

$$\frac{d}{dz} F(a, b, c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; z). \tag{VIII.7.2}$$

Продифференцируем теперь (VIII.7.2) по z и снова воспользуемся этой формулой. Тогда найдем

$$\frac{d^2}{dz^2} F(a, b, c; z) = \frac{ab}{c}\,\frac{(a+1)(b+1)}{c+1} F(a+2, b+2, c+2; z). \tag{VIII.7.3}$$

Подставляя (VIII.7.2) и (VIII.7.3) в уравнение Гаусса (VIII.2.1), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} c(c+1)F(a, b, c; z) &= \\ &= (c+1)[c-(a+b+1)z]F(a+1, b+1, c+1; z) + \\ &+ (a+1)(b+1)z(1-z)F(a+2, b+2, c+2; z). \end{aligned} \tag{VIII.7.4}$$

Это и есть то рекуррентное соотношение, которое нам надо было установить.

§ VIII.8. Выражение полных эллиптических интегралов через гипергеометрическую функцию

Пусть аргументы гипергеометрической функции $F(a, b, c; z)$ равны

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad z = k^2.$$

Тогда с помощью (VIII.1.1) находим

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) = \\ = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left[\frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\right]^2 k^{2n} + \ldots$$

Сравнивая полученный ряд с рядом (VII.8.3), видим, что

$$K(k)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right). \qquad \text{(VIII.8.1)}$$

Полученная формула связывает, таким образом, полный эллиптический интеграл первого рода с гипергеометрической функцией.

§ VIII.9. Выражение коэффициентов Лапласа через гипергеометрическую функцию

Пусть аргументы функции $F(a,\ b,\ c;\ z)$ равны

$$a=\frac{n}{2},\quad b=\frac{n}{2}+k,\quad c=k+1,\quad z=\alpha^2.$$

Тогда, используя (VIII.1.1), находим

$$F\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k,\ k+1;\ \alpha^2\right)=$$
$$=1+\frac{n}{2}\frac{n+2k}{2k+2}\alpha^2+\frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\frac{(n+2k)(n+2k+2)}{(2k+2)(2k+4)}\alpha^4\ldots \qquad \text{(VIII.9.1)}$$

Сопоставляя этот ряд с (II.2.5), мы видим, что он отличается от ряда для коэффициентов Лапласа $L_n^{(k)}(\alpha)$ только множителем

$$2\frac{n(n+2)\ldots(n+2k-2)}{2\cdot 4\ldots(2k)}\alpha^k.$$

Поэтому получаем следующую формулу:

$$\frac{1}{2}L_n^{(k)}(\alpha)=\frac{n(n+2)\ldots(n+2k-2)}{2^k k!}\alpha^k F\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k,\ k+1;\ \alpha^2\right), \qquad \text{(VIII.9.2)}$$

которая связывает коэффициент Лапласа с гипергеометрической функцией.

Если в (VIII.9.1) положить $k=0$, то имеем

$$F\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2},1;\alpha^2\right)=1+\left(\frac{n}{2}\right)^2\alpha^2+$$
$$+\left[\frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\right]^2\alpha^4+\left[\frac{n(n+2)(n+4)}{2\cdot 4\cdot 6}\right]^2\alpha^6+\ldots$$

Сравнение этого ряда с рядом (II.2.4) показывает, что

$$\frac{1}{2} L_n^{(0)}(\alpha) = F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 1; \alpha^2\right). \qquad \text{(VIII.9.3)}$$

Эта формула дает выражение коэффициента Лапласа с нулевым верхним значком через гипергеометрическую функцию.

Введем теперь обозначения:

$$(m, i) = m(m+1)\ldots(m+i-1), \quad (m, 0) = 1.$$

Тогда формула (VIII.9.2) запишется в виде

$$\frac{1}{2} L_n^{(k)}(\alpha) = \frac{\left(\frac{n}{2}, k\right)}{(1, k)} \alpha^k F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k, k + 1; \alpha^2\right). \qquad \text{(VIII.9.4)}$$

Полученная формула справедлива при любом k, в том числе и при $k = 0$.

Если воспользоваться преобразованием (VIII.6.4), то будем иметь

$$\frac{1}{2} L_n^{(k)}(\alpha) = \frac{\left(\frac{n}{2}, k\right)}{(1, k)} \frac{\alpha^k}{(1-\alpha^2)^{n/2}} F\left(\frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}, k + 1; -p^2\right), \qquad \text{(VIII.9.5)}$$

где

$$p^2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Найденная формула дает для коэффициентов Лапласа следующее разложение:

$$\frac{1}{2} L_n^{(k)}(\alpha) = \frac{n(n+2)\ldots(2n+2k-2)}{2^k k!} \frac{\alpha^k}{(1-\alpha^2)^{n/2}} \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{n}{2}\frac{n-2}{2k+2} p^2 + \frac{n(n+2)}{2\cdot 4} \frac{(n-2)(n-4)}{(2k+2)(2k+4)} p^4 + \ldots\right\}, \qquad \text{(VIII.9.6)}$$

которое сходится при $|p| < 1$, или при $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Заметим, что формулы (VIII.9.3) и (VIII.9.2) позволяют легко выразить коэффициенты Лапласа $L_1^{(0)}$ и $L_1^{(1)}$ через полные эллиптические интегралы. Действительно, полагая в (VIII.9.3) $n=1$, получаем

$$\frac{1}{2}L_1^{(0)}(\alpha)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\alpha^2\right).$$

Отсюда с помощью (VIII.8.1) сразу находим

$$L_1^{(0)}(\alpha)=\frac{4}{\pi}K(\alpha). \qquad \text{(VIII.9.7)}$$

Аналогично, если в формуле (VIII.9.2) положить $n=1$ и $k=1$, то будем иметь

$$L_1^{(1)}(\alpha)=\alpha F\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},2;\alpha^2\right).$$

Используя, далее, (VIII.8.1) и (VIII.9.4), получаем

$$L_1^{(1)}(\alpha)=\frac{4}{\pi\alpha}[K(\alpha)-E(\alpha)]. \qquad \text{(VIII.9.8)}$$

Формулы (VIII.9.7) и (VIII.9.8) были получены нами другим путем в § II.3.

§ VIII.10. Выражение многочленов Лежандра через гипергеометрическую функцию

Рассмотрим сначала многочлены Лежандра четного порядка. Согласно (1.1.7), имеем

$$P_{2n}(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{(4n-2r)!}{2^{2n}r!\,(2n-r)!\,(2n-2r)!}x^{2n-2r}.$$

Полагая здесь $n-r=k$, найдем

$$P_{2n}(x)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2n+2k)!}{2^{2n}(n-k)!\,(n+k)!\,(2k)!}x^{2k}.$$

Если, далее, воспользоваться равенствами

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}=1\cdot 3\ldots(2n-1)=(2n-1)!!,$$

$$(n-k)!=\frac{n!}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}, \qquad \text{(VIII.10.1)}$$

то получим

$$P_{2n}(x)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\left\{1-\frac{2n(2n+1)}{2!}x^2+\right.$$
$$\left.+\frac{2n(2n-2)(2n+1)(2n+3)}{4!}x^4-\ldots\right\}. \qquad \text{(VIII.10.2)}$$

Рассмотрим теперь гипергеометрическую функцию $F(a, b, c; z)$ с аргументами

$$a = -n, \quad b = n + \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad z = x^2.$$

С помощью (VIII.1.1) находим

$$F\left(-n,\ n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right) =$$

$$= 1 - \frac{2n(2n+1)}{2!} x^2 + \frac{2n(2n-2)(2n+1)(2n+3)}{4!} x^4 - \ldots$$

Поэтому

$$P_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} F\left(-n, n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right). \quad \text{(VIII.10.3)}$$

Перейдем теперь к случаю многочленов Лежандра нечетного порядка. Согласно (I.1.7), имеем

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(4n+2-2r)!\, x^{2n+1-2r}}{2^{2n+1} r!\,(2n+1-r)!\,(2n+1-2r)!}.$$

Положим здесь $n - r = k$. Тогда

$$P_{2n+1}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n+2+2k)!\, x^{2k+1}}{2^{2n+1}(n-k)!\,(n+1+k)!\,(2k+1)!}. \quad \text{(VIII.10.4)}$$

Используя равенства (VIII.10.1) и

$$\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} = (2n+1)!!,$$

можно привести формулу (VIII.10.4) к виду

$$P_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!!}{2^n n!} \left\{x - \frac{2n(2n+3)}{3!} x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{2n(2n-2)(2n+3)(2n+5)}{5!} x^4 - \ldots\right\}. \quad \text{(VIII.10.5)}$$

Но с другой стороны,

$$F\left(-n, n + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right) = 1 - \frac{2n(2n+3)}{3!} x^2 +$$

$$+ \frac{2n(2n-2)(2n+3)(2n+5)}{5!} x^4 - \ldots$$

Сравнивая это равенство с (VIII.10.5), находим

$$P_{2n+1}(x) = (-1)\,\frac{(2n+1)!!}{2^n n!}\,xF\left(-n,\, n+\frac{3}{2},\, \frac{3}{2};\; x^2\right). \tag{VIII.10.6}$$

Полученная формула выражает многочлен Лежандра нечетного порядка через гипергеометрическую функцию.

§ VIII.11. Выражение присоединенных функций Лежандра через гипергеометрическую функцию

Согласно § I.11, присоединенная функция Лежандра определяется формулой

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\,\frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}. \tag{VIII.11.1}$$

Выведем сначала отсюда еще одно общее выражение для $P_n^{(m)}(x)$. С этой целью положим $z = \frac{1-x}{2}$. Прежде всего, имеем

$$(x^2-1)^n = (-1)^n 2^{2n} z^n (1-z)^n$$

и, далее,

$$(1-z)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k z^k,$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Поэтому

$$(x^2-1)^n = 2^{2n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} C_n^k z^{n+k}.$$

Продифференцируем это равенство $n+m$ раз по x. Используя для этого зависимость

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m}}\,\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}},$$

будем иметь

$$\frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}} = (-\text{л})^m 2^{n-m} \times$$

$$\times \sum_{k=m}^{n} (-1)^k C_n^k (n+k)(n+k-1)\ldots(k-m+1)\,z^{k-m}. \tag{VIII.11.2.}$$

Но, как легко видеть,

$$(n+k)(n+k-1)\dots(k-m+1)C_n^k = \frac{(n+k)!\,n!}{(k-m)!\,k!\,(n-k)!}.$$

Поэтому, если подставить (VIII.11.2) в (VIII.11.1), то получим

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\sum_{k=m}^{n}(-1)^{m+k}\frac{(n+k)!\,z^{k-m}}{2^m k!\,(n-k)!\,(k-m)!}.$$

Заменяя здесь $k-m$ на r, окончательно найдем следующую формулу для $P_n^{(m)}(x)$:

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{n-m}(-1)^r\frac{(n+m+r)!}{2^m\,(m+r)!\,(n-m-r)!\,r!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^r. \quad \text{(VIII.11.3)}$$

Запишем теперь полученную формулу в виде

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{(n+m)!}{2^m m!\,(n-m)!}(1-x^2)^{m/2}\left\{1-\frac{(n-m)(n+m+1)}{1\,(m+1)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{(n-m)(n-m-1)(n+m+1)(n+m+2)}{1\cdot 2\,(m+1)(m+2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2-\dots\right\}$$

и сопоставим ее с формулой (VIII.1.1). Мы видим, что выражение, стоящее в фигурных скобках, представляет собой гипергеометрическую функцию с аргументами $a = m-n$, $b = m+n+1$, $c = m+1$, $z = \frac{1-x}{2}$. Следовательно,

$$P_n^{(m)}(x) = \frac{(n+m)!}{2^m m!\,(n-m)!}(1-x^2)^{m/2}\times$$

$$\times F\left(m-n, m+n+1, m+1, \frac{1-x}{2}\right). \quad \text{(VIII.11.4)}$$

Эта формула и выражает присоединенную функцию Лежандра через гипергеометрическую функцию.

Заметим, что если в (VIII.11.3) и (VIII.11.4) положить $x = \cos\theta$, то будем иметь

$$P_n^{(m)}(\cos\theta) = \sin^m\theta\sum_{r=0}^{n-m}(-1)^r\frac{(n+m+r)!\,\sin^{2r}\frac{\theta}{2}}{2^m\,(m+r)!\,(n-m-r)!\,r!},$$

$$P_n^{(m)}(\cos\theta) = \frac{(n+m)!\,\sin^m\theta}{2^m m!\,(n-m)!}\times$$

$$\times F\left(m-n, m+n+1, m+1, \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \quad \text{(VIII.11.5)}$$

Эти формулы могут быть весьма полезными на практике.

Если теперь в (VIII.11.4) и (VIII.11.5) положить $m = 0$, то получим

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right),$$

$$P_n(\cos\theta) = F\left(-n, n+1, 1, \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Эти две формулы дают нам еще одно представление многочлена Лежандра через гипергеометрическую функцию.

§ VIII.12. Выражение коэффициентов $M_n^{(k)}(e)$ через гипергеометрическую функцию

Рассмотрим сначала общий случай. Согласно (VI.11.14), имеем следующее выражение для $M_n^{(k)}(e)$:

$$M_n^{(k)} = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}(-\beta)^k(1+\beta^2)^n \times$$

$$\times\left\{1 + \frac{n(n+k)}{1(k+1)}\beta^2 + \frac{n(n+1)(n+k)(n+k+1)}{1\cdot 2(k+1)(k+2)}\beta^4 + \ldots\right\},$$

где

$$\beta = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}.$$

Сопоставляя это выражение с (VIII.1.1), сразу получаем

$$M_n^{(k)} = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}(-\beta)^k(1+\beta^2)^n \times$$

$$\times F(n, n+k, k+1, \beta^2). \qquad \text{(VIII.12.1)}$$

Эта формула справедлива для любых целых n, как положительных, так и отрицательных.

Если n есть отрицательное число, то в этом случае для $M_n^{(k)}$ можно получить еще одно выражение через гипергеометрическую функцию. Полагая $-n = \nu > 0$, в соответствии с (VI.11.19) будем иметь

$$M_{-\nu}^{(k)} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}\left(\frac{e}{2}\right)^k\left\{1 + \frac{(\nu-k)(\nu-k-1)}{2^2\cdot 1(k+1)}e^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(\nu-k)(\nu-k-1)(\nu-k-2)(\nu-k-3)}{2^4\cdot 1\cdot 2(k+1)(k+2)}e^4 + \ldots\right\}.$$

Сравнивая эту формулу с (VIII.1.1), мы видим, что выражение, заключенное в фигурные скобки, есть гипергеометрическая функция с аргументами

$$a = \frac{k-\nu}{2}, \quad b = \frac{k-\nu+1}{2}, \quad c = k+1, \quad z = e^2.$$

Следовательно,

$$M_{-\nu}^{(k)} = \frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}\left(\frac{e}{2}\right)^k F\left(\frac{k-\nu}{2}, \frac{k-\nu+1}{2}, k+1, e^2\right). \tag{VIII.12.2}$$

Поскольку $k = 0, 1, \ldots, \nu$, гипергеометрическая функция в (VIII.12.2) является многочленом относительно e^2.

§ VIII.13. Выражение коэффициентов Ганзена $X_{n,m}^{(0)}$ через гипергеометрическую функцию

Формулы предыдущего параграфа позволяют легко выразить коэффициенты $X_{n,m}^{(0)}$ через гипергеометрическую функцию. Действительно, согласно (6.14.3),

$$X_{n,m}^{(0)} = (1-e^2)^{n+\frac{3}{2}} M_{n+2}^{(m)}.$$

Поэтому, используя (8.12.1) и замечая, что

$$1 - e^2 = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2},$$

получаем следующую формулу:

$$X_{n,m}^{(0)} = (-1)^m \frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+m+1)}{m!} \times$$
$$\times \frac{\beta^m (1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} F(n+2, m+n+2, m+1, \beta^2) \tag{VIII.13.1}$$

которая справедлива для всех целых n, положительных или отрицательных.

В случае отрицательных n для $X_{n,m}^{(0)}$ можно получить еще одно выражение через гипергеометрическую функцию. Полагая в (VI.13.3) $-n = \nu > 0$, имеем

$$X_{-\nu,m}^{(0)} = (1-e^2)^{-\nu+\frac{3}{2}} M_{-\nu+2}^{(m)}. \tag{VIII.13.2}$$

Если $m > \nu - 2$, то, согласно § VI.11, $M_{-\nu+2}^{(m)} = 0$ и тогда $X_{-\nu,m}^{(0)} = 0$. Поэтому можно считать, что $\nu - 2 \geqslant m$.

Воспользуемся теперь формулой (VIII.12.2), которая в данном случае имеет вид

$$M_{-\nu+2}^{(m)} = \frac{(\nu-2)!}{m!\,(\nu-m-2)!}\left(\frac{e}{2}\right)^m \times$$
$$\times F\left(\frac{m-\nu+2}{2}, \frac{m-\nu+3}{2}, m+1, e^2\right). \quad \text{(VIII.13.3)}$$

Но

$$\frac{(\nu-2)!}{(\nu-m-2)!} = (\nu-2)(\nu-3)\ldots(\nu-m-1).$$

Следовательно, если подставить (VIII.13.3) в (VIII.13.2), получим

$$X_{-\nu,m}^{(0)} = (\nu-2)(\nu-3)\ldots(\nu-m-1)\left(\frac{e}{2}\right)^m \times$$
$$\times (1-e^2)^{\frac{3}{2}-\nu} F\left(\frac{m-\nu+2}{2}, \frac{m-\nu+3}{2}, m+1, e^2\right).$$
$$\text{(VIII.13.4)}$$

Заметим, что поскольку одно из чисел

$$\frac{m-\nu+2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{m-\nu+3}{2}$$

обязательно является целым отрицательным, то гипергеометрическая функция в (VIII.13.4) есть многочлен относительно e^2.

§ VIII.14. Связь коэффициентов Ганзена $X_{n,m}^{(k)}$ с гипергеометрической функцией

В § VI.3 была получена для $X_{n,m}^{(k)}$ следующая формула:

$$X_{n,m}^{(k)} = \frac{1}{(1+\beta^2)^{n+1}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} E_{k-s}^{n,m} J_s(ke), \quad \text{(VIII.14.1)}$$

в которой $J_s(ke)$ — функция Бесселя порядка s, а $E_{k-s}^{n,m}$ определяется равенством

$$E_{k-s}^{n,m} = (-\beta)^{k-s-m} C_{n-m+1}^{k-s-m}\left\{1 + \frac{(-n-m-1)(k-s-n-1)}{1\,(k-s-m+1)}\beta^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(-n-m-1)(-n-m)(k-s-n-1)(k-s-n)}{1\cdot 2\,(k-s-m+1)(k-s-m+2)}\beta^4 + \ldots\right\}.$$
$$\text{(VIII.14.2)}$$

Сравнивая выражение в (VIII.14.2), заключенное в фигурные скобки, с рядом (VIII.1.1), мы видим, что оно представляет собой гипергеометрическую функцию с аргументами

$$a = -n - m - 1, \qquad b = k - n - s - 1,$$
$$c = k - m - s + 1, \quad z = \beta^2.$$

Поскольку

$$E^{n,-m}_{-(k-s)} = E^{n,m}_{k-s},$$

то вычисление коэффициентов $E^{n,m}_{k-s}$, для которых $k - s - m$ отрицательно, сводится к нахождению коэффициентов, для которых $k - s - m$ положительно. Поэтому можно считать, что $k - s - m \geqslant 0$, и, следовательно,

$$C^{k-s-m}_{n-m+1} = \frac{(n-m+1)(n-m)\ldots(n-k+s+2)}{(k-s-m)!}.$$

В результате для $E^{n,m}_{k-s}$ имеем такую формулу:

$$E^{n,m}_{k,s} = \frac{(n-m+1)(n-m)\ldots(n-k+s+2)}{(k-s-m)!}(-\beta)^{k-s-m} \times$$
$$\times F(-n-m-1, k-s-n-1, k-s-m+1; \beta^2). \tag{VIII.14.3}$$

Формулы (VIII.14.3) и (VIII.14.1) и дают связь коэффициентов Ганзена с гипергеометрической функцией Гаусса.

§ VIII.15. Связь функций наклона с гипергеометрическими многочленами

Запишем формулу (IV.3.3) в виде

$$A^{(k)}_{n,m}(I) = G^{(k)}_{n,m}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{m+k}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2n-m-k} \times$$
$$\times \sum_j (-1)^j \frac{(n-m)!\,(n-k)!\,(m+k)!}{(n-m-j)!\,(n-k-j)!\,(m+k+j)!\,j!}\left(\operatorname{ctg}\frac{I}{2}\right)^{2j}, \tag{VIII.15.1}$$

Напомним, что здесь $k \geqslant 0$, а значок суммирования j принимает такие значения:

$$0 \leqslant j \leqslant n-m, \quad \text{если} \quad k \leqslant m,$$
$$0 \leqslant j \leqslant n-k, \quad \text{если} \quad k > m.$$

Числовой коэффициент $G_{n,m}^{(k)}$ дается равенством (IV.3.4).

Рассмотрим ближе сумму в (VIII.15.1). Она может быть расписана так:

$$1 + \frac{(m-n)(k-n)}{k+m+1}\left(-\operatorname{ctg}^2\frac{I}{2}\right) + \\ + \frac{(m-n)(m-n+1)(k-n)(k-n+1)}{(m+k+1)(m+k+2)}\left(-\operatorname{ctg}\frac{I}{2}\right)^2 + \ldots,$$

т. е., согласно (VIII.1.1), она равна

$$F\left(m-n,\, k-n,\, m+k+1;\, -\operatorname{ctg}^2\frac{I}{2}\right).$$

Следовательно,

$$A_{n,m}^{(k)}(I) = G_{n,m}^{(k)}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{m+k}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2n-m-k} \times \\ \times F\left(m-n,\, k-n,\, m+k+1;\, -\operatorname{ctg}^2\frac{I}{2}\right). \quad \text{(VIII.15.2)}$$

Мы видим, что в полученной формуле степень гипергеометрического многочлена $\left(\text{относительно } -\operatorname{ctg}^2\frac{I}{2}\right)$ равна $n-m$, если $k \leqslant m$, и равна $n-k$, если $k > m$.

Воспользуемся теперь следующим преобразованием для гипергеометрических функций (см. § VIII.6):

$$F(a, b, c; z) = (1-z)^{-a}F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right) = \\ = (1-z)^{-b}F\left(b, c-a, c; \frac{z}{z-1}\right).$$

В нашем случае

$$a = m-n, \quad b = k-n, \quad c = m+k+1,$$
$$z = -\operatorname{ctg}^2\frac{I}{2}, \quad \frac{z}{z-1} = \cos^2\frac{I}{2}.$$

Поэтому формула (VIII.15.2) преобразуется к виду

$$A_{n,m}^{(k)}(I) = G_{n,m}^{(k)}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{m+k}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{m-k} \times \\ \times F\left(m-n,\, n+m+1,\, m+k+1;\, \cos^2\frac{I}{2}\right), \quad \text{(VIII.15.3)}$$

если $k \leqslant m$, и

$$A_{n,m}^{(k)}(I) = G_{n,m}^{(k)}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{m+k}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{k-m} \times$$
$$\times F\left(k-n,\ n+k+1,\ m+k+1;\ \cos^2\frac{I}{2}\right), \qquad \text{(VIII.15.4)}$$

если $k \geqslant m$.

Формулы (VIII.15.3) и (VIII.15.4), как легко видеть, можно объединить в одну. Действительно, если положить

$$\begin{aligned} \alpha &= -n + \max(m,\ k), \\ \beta &= 1 + n + \max(m,\ k), \\ \gamma &= m + k + 1, \end{aligned} \qquad \text{(VIII.15.5)}$$

то для всех $k \geqslant 0$ можно написать

$$A_{n,m}^{(k)}(I) = G_{n,m}^{(k)}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{m+k}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{|m-k|} \times$$
$$\times F\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \cos^2\frac{I}{2}\right). \qquad \text{(VIII.15.6)}$$

Эта формула при $k \leqslant m$ переходит в (VIII.15.3), а при $k \geqslant m$ — в (VIII.15.4).

Подобные выражения через гипергеометрические многочлены можно найти и для функций $A_{n,m}^{(k)}(I)$ с отрицательным верхним значком. Для этого надо воспользоваться свойством (IV.2.8). Считая $k > 0$, мы имеем

$$A_{n,m}^{(-k)}(I) = (-1)^{n-m} A_{n,m}^{(k)}(\pi - I).$$

Поэтому формулы (VIII.15.2) и (VIII.15.6) дают

$$A_{n,m}^{(-k)}(I) = (-1)^{n-m} G_{n,m}^{(k)}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{2n-m-k}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{m+k} \times$$
$$\times F\left(m-n,\ k-n,\ m+k+1;\ -\operatorname{tg}^2\frac{I}{2}\right) \qquad \text{(VIII.15.7)}$$

и

$$A_{n,m}^{(-k)}(I) = (-1)^{n-m} G_{n,m}^{(k)}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{|m-k|}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{m+k} \times$$
$$\times F\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \sin^2\frac{I}{2}\right), \qquad \text{(VIII.15.8)}$$

где α, β, γ определяются равенствами (VIII.15.5).

Рассмотрим теперь частный случай $m = 0$. В этом случае формулы (VIII.15.2) и (VIII.15.4) дают

$$A_n^{(k)}(I) = G_{n,0}^{(k)} \left(\cos \frac{I}{2}\right)^k \left(\sin \frac{I}{2}\right)^{2n-k} \times$$
$$\times F\left(-n, k-n, k+1; -\operatorname{ctg}^2 \frac{I}{2}\right) \quad \text{(VIII.15.9)}$$

и

$$A_n^{(k)}(I) = G_{n,0}^{(k)} \left(\cos \frac{I}{2}\right)^k \left(\sin \frac{I}{2}\right)^k \times$$
$$\times F\left(k-n, n+k+1, k+1; \cos^2 \frac{I}{2}\right), \quad \text{(VIII.15.10)}$$

где

$$G_{n,0}^{(k)} = \frac{(-1)^n (n+k)!}{2^n k! \left(\frac{n-k}{2}\right)! \left(\frac{n+k}{2}\right)!}. \quad \text{(VIII.15.11)}$$

С другой стороны, если воспользоваться формулами (IV.4.7) и (VIII.11.5), то получим

$$A_n^{(k)}(I) = \frac{(-1)^n (n+k)!}{2^{n+k} k! \left(\frac{n-k}{2}\right)! \left(\frac{n+k}{2}\right)!} \sin^k I \times$$
$$\times F\left(k-n, n+k+1, k+1; \sin^2 \frac{I}{2}\right). \quad \text{(VIII.15.12)}$$

Сравнение равенств (VIII.15.10) и (VIII.15.12), между прочим, дает следующее свойство функций $A_n^{(k)}(I)$:

$$A_n^{(k)}(\pi - I) = A_n^{(k)}(I).$$

Приведем теперь выражения для функции наклона $F_{n,m,l}(I)$ через гипергеометрические многочлены. Формулы (IV.7.3), (IV.7.7) и (VIII.15.2) дают

$$F_{n,m,l}(I) = G_{n,m,l} \left(\cos \frac{I}{2}\right)^{n+m-2l} \left(\sin \frac{I}{2}\right)^{n-m+2l} \times$$
$$\times F\left(m-n, -2l, n+m-2l+1; -\operatorname{ctg}^2 \frac{I}{2}\right),$$

а из равенств (VIII.15.3) и (VIII.15.4) находим

$$F_{n,m,l}(I) = G_{n,m,l} \left(\cos \frac{I}{2}\right)^{n+m-2l} \left(\sin \frac{I}{2}\right)^{m-n+2l} \times$$
$$\times F\left(m-n, n+m+1, n+m-2l+1; \cos^2 \frac{I}{2}\right),$$

если $n-m \leqslant 2l$, и

$$F_{n,m,l}(I) = G_{n,m,l}\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{n+m-2l}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{n-m-2l} \times$$
$$\times F\left(-2l, 2n-2l+1, n+m-2l+1; \cos^2\frac{I}{2}\right),$$

если $n-m \geqslant 2l$.

Здесь $G_{n,m,l}$ дается формулой (IV.7.8).

§ VIII.16. Вывод дифференциального уравнения для функции $A_{n,m}^{(k)}(I)$

Установленная в предыдущем параграфе связь функций наклона с гипергеометрической функцией дает возможность легко вывести дифференциальное уравнение для $A_{n,m}^{(k)}(I)$. Рассмотрим сначала случай $k \geqslant 0$. Для этого возьмем формулу (VIII.15.6), положим в ней

$$z = \cos^2\frac{I}{2}, \quad \sin^2\frac{I}{2} = 1 - z$$

и перепишем ее в виде

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = A_0 z^p (1-z)^q A_{n,m}^{(k)}. \qquad \text{(VIII.16.1)}$$

Здесь

$$A_0 = \left[G_{n,m}^{(k)}\right]^{-1}$$

есть постоянная, определяемая равенством (IV.3.4),

$$p = -\frac{m+k}{2}, \quad q = -\frac{|m-k|}{2}, \qquad \text{(VIII.16.2)}$$

а α, β, γ даются формулами (VIII.15.5).

Положим, далее,

$$\Phi(z) = A_0 z^p (1-z)^q. \qquad \text{(VIII.16.3)}$$

Тогда (VIII.16.1) примет вид

$$F(z) = \Phi(z) A_{n,m}^{(k)}.$$

Подставляя теперь это равенство в уравнение Гаусса

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]\frac{dF}{dz} - \alpha\beta F = 0,$$

получим такое уравнение:

$$a_0\frac{d^2A_{n,m}^{(k)}}{dz^2} + a_1\frac{dA_{n,m}^{(k)}}{dz} + a_2 A_{n,m}^{(k)} = 0, \qquad \text{(VIII.16.4)}$$

где

$$a_0 = z(1-z),$$
$$a_1 = 2z(1-z)\Phi' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]\Phi, \qquad \text{(VIII.16.5)}$$
$$a_2 = z(1-z)\Phi'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)z]\Phi' - \alpha\beta\Phi,$$

причем штрих означает дифференцирование по z.

Дифференцируя далее (VIII.16.3), находим

$$\Phi' = [p-(p+q)z]z^{-1}(1-z)^{-1}\Phi,$$
$$\Phi'' = \{p(p-1) + 2p(1-p-q)z - (p+q)(1-p-q)z^2\}z^{-2}(1-z)^{-2}\Phi.$$

Подставим эти выражения в (VIII.16.5) и воспользуемся равенствами (VIII.16.2) и (VIII.16.5). Тогда будем иметь

$$a_0 = z(1-z)\Phi,$$
$$a_1 = (1-2z)\Phi,$$
$$a_2 = \left\{n(n+1) - \frac{(m+k)^2 - 4mkz}{z(1-z)}\right\}\Phi.$$

После сокращения на Φ уравнение (VIII.16.4) примет вид

$$z(1-z)\frac{d^2A_{n,m}^{(k)}}{dz^2} + (1-2z)\frac{dA_{n,m}^{(k)}}{dz} + \left\{n(n+1) - \frac{(m+k)^2 - 4mkz}{z(1-z)}\right\}A_{n,m}^{(k)} = 0. \qquad \text{(VIII.16.6)}$$

Введем, наконец, новую переменную x по формуле

$$x = 2z - 1 = \cos I.$$

Тогда окончательно найдем для $A_{n,m}^{(k)}$ следующее дифференциальное уравнение:

$$(1-x^2)\frac{d^2A_{n,m}^{(k)}}{dx^2} - 2x\frac{dA_{n,m}^{(k)}}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2+k^2-2mkx}{1-x^2}\right\}A_{n,m}^{(k)} = 0. \qquad \text{(VIII.16.7)}$$

Итак, мы вывели дифференциальное уравнение для $A_{n,m}^{(k)}$ в случае $k \geqslant 0$. Подобным образом можно вывести дифференциальное уравнение для $A_{n,m}^{(k)}$ в случае отрицательного верхнего значка. Для этого нужно воспользоваться формулой (VIII.15.8). В результате получим для $A_{n,m}^{(-k)}$ при $k > 0$ уравнение:

$$(1-x^2)\frac{d^2A_{n,m}^{(-k)}}{dx^2} - 2x\frac{dA_{n,m}^{(-k)}}{dx} +$$

$$+\left\{n(n+1) - \frac{m^2+k^2+2mkx}{1-x^2}\right\}A_{n,m}^{(-k)} = 0.$$

Сопоставление этого уравнения с (VIII.16.7) показывает, что функция $A_{n,m}^{(k)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (VIII.16.7) при всех k, как положительных, так и отрицательных, а также и при $k=0$.

§ VIII.17. Вывод рекуррентных соотношений для функций $\widehat{A}_{n,m}^{(k)}(I)$

Рассмотрим сначала случай $m \geqslant k$. Согласно (IV.5.1) и (VIII.15.6), имеем

$$\widehat{A}_{n,m}^{(k)} = c^{m+k}s^{m-k}F(\alpha, \beta, \gamma; c^2), \qquad \text{(VIII.17.1)}$$

где

$$c = \cos\frac{I}{2}, \quad s = \sin\frac{I}{2},$$

$$\alpha = m-n, \quad \beta = n+m+1, \quad \gamma = m+k+1. \quad \text{(VIII.17.2)}$$

Отсюда находим

$$F(\alpha, \beta, \gamma; c^2) = c^{-m-k}s^{-m+k}\widehat{A}_{n,m}^{(k)},$$

$$F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; c^2) = c^{-m-1-k}s^{-m-1+k}\widehat{A}_{n,m+1}^{(k)},$$

$$F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2; c^2) = c^{-m-2-k}s^{-m-2+k}\widehat{A}_{n,m+2}^{(k)}.$$

$$\text{(VIII.17.3)}$$

Воспользуемся теперь рекуррентным соотношением (VIII.7.4), которое в данном случае запишется так:

$$\gamma(\gamma+1)F(\alpha, \beta, \gamma; c^2) =$$

$$=(\gamma+1)[\gamma-(\alpha+\beta+1)c^2]F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; c^2)+$$

$$+(\alpha+1)(\beta+1)c^2s^2F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2; c^2).$$

Подставляя сюда (VIII.17.3) и имея в виду (VIII.17.2), сразу получаем

$$(m-n+1)(n+m+2)cs\widehat{A}_{n,m+2}^{(k)} +$$

$$+(m+k+2)[m+k+1-2(m+1)c^2]\widehat{A}_{n,m+1}^{(k)} -$$

$$-(m+k+1)(m+k+2)cs\widehat{A}_{n,m}^{(k)} = 0. \quad \text{(VIII.17.4)}$$

Этому рекуррентному соотношению можно придать и такой вид:

$$(m-n+1)(n+m+2)\sin I\widehat{A}_{n,m+2}^{(k)} + \\ + 2(m+k+2)[k-(m+1)\cos I]\,\widehat{A}_{n,m+1}^{(k)} - \\ -(m+k+1)(m+k+2)\sin I\widehat{A}_{n,m}^{(k)} = 0. \quad \text{(VIII.17.5)}$$

Аналогичным образом выводится рекуррентное соотношение в случае $m \leqslant k$. Для этого надо воспользоваться формулой

$$\widehat{A}_{n,m}^{(k)} = c^{k+m}s^{k-m}F(k-n,\ n+k+1,\ m+k+1;\ c^2). \quad \text{(VIII.17.6)}$$

В результате будем иметь

$$(k-n+1)(n+k+2)\,cs\widehat{A}_{n,m}^{(k+2)} + \\ + (m+k+2)[m+k+1-2(k+1)c^2]\,\widehat{A}_{n,m}^{(k+1)} - \\ -(m+k+1)(m+k+2)\,cs\widehat{A}_{n,m}^{(k)} = 0, \quad \text{(VIII.17.7)}$$

или

$$(k-n+1)(n+k+2)\sin I\widehat{A}_{n,m}^{(k+2)} + \\ + 2(m+k+2)[m-(k+1)\cos I]\,\widehat{A}_{n,m}^{(k+1)} - \\ -(m+k+1)(m+k+2)\sin I\widehat{A}_{n,m}^{(k)} = 0. \quad \text{(VIII.17.8)}$$

Перейдем теперь к выводу формул для производной $\widehat{A}_{n,m}^{(k)}$ по I. Продифференцируем выражение (VIII.17.1) по I. Это нам даст

$$\frac{d\widehat{A}_{n,m}^{(k)}}{dI} = \frac{m(c^2-s^2)-k}{2cs}\widehat{A}_{n,m}^{(k)} - c^{m+k+1}s^{m-k+1}F'(\alpha,\beta,\gamma;c^2),$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу c^2. Но, согласно (VIII.7.2),

$$F'(\alpha,\beta,\gamma;c^2) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1;\ c^2) = \\ = \frac{(m-n)(n+m+1)}{m+k+1}F(m+1-n,\ n+m+2,\ m+k+2;c^2).$$

Поэтому с помощью той же формулы (VIII.17.1) для случая $m \geqslant k$ находим

$$\frac{d\widehat{A}_{n,m}^{(k)}}{dI} = \frac{m(c^2-s^2)-k}{2cs}\widehat{A}_{n,m}^{(k)} - \frac{(m-n)(n+m+1)}{m+k+1}\widehat{A}_{n,m+1}^{(k)}. \quad \text{(VIII.17.9)}$$

В случае $m \leqslant k$ подобным образом мы можем получить формулу

$$\frac{d\widehat{A}_{n,m}^{(k)}}{dI} = \frac{k(c^2 - s^2) - m}{2cs}\widehat{A}_{n,m}^{(k)} - \\ - \frac{(k-n)(n+k+1)}{m+k+1}\widehat{A}_{n,m}^{(k+1)}. \qquad \text{(VIII.17.10)}$$

Заметим, что коэффициенты рекуррентных соотношений в случае $m \geqslant k$ переходят в коэффициенты соответствующих рекуррентных соотношений в случае $m \leqslant k$, если поменять местами m и k.

§ VIII.18. Связь многочленов Тиссерана с функциями наклона (продолжение § IV.6)

В § IV.6 нами были установлены три зависимости (IV.6.4) между многочленом Тиссерана $T_{p,q}^{(n)}$ и функциями наклона. Рассмотрим эти зависимости подробнее. Возьмем первую из них:

$$T_{p,q}^{(n)} = C_1 A_{n,p+q}^{(p-q)}. \qquad \text{(VIII.18.1)}$$

Здесь C_1 — постоянная, которую надо определить. Для нахождения этой постоянной поступим следующим образом. Используя свойство (III.7.18):

$$T_{p,q}^{(n)}\left(\cos^2\frac{I}{2}, \sin^2\frac{I}{2}\right) = T_{q,p}^{(n)}\left(\sin^2\frac{I}{2}, \cos^2\frac{I}{2}\right),$$

из формулы (III.7.16) находим

$$T_{p,q}^{(n)} = \widehat{R}_0\left(\cos\frac{I}{2}\right)^{2p}\left(\sin\frac{I}{2}\right)^{2q} \times \\ \times F\left(q+p-n,\ n+p+q+1,\ 2p+1;\ \cos^2\frac{I}{2}\right), \qquad \text{(VIII.18.2)}$$

где

$$\widehat{R}_0 = \frac{(n+p+q)!\,(n+p-q)!}{2^{2n}(2p)!\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)}. \qquad \text{(VIII.18.3)}$$

С другой стороны, поскольку

$$p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0 \quad \text{и} \quad p \geqslant q,$$

формулы (VIII.15.3) и (IV.3.4) дают

$$A_{n,p+q}^{(p-q)} = G_{n,p+q}^{(p-q)} \left(\cos \frac{I}{2}\right)^{2p} \left(\sin \frac{I}{2}\right)^{2q} \times$$

$$\times F\left(p+q-n,\ n+p+q+1,\ 2p+1;\ \cos^2 \frac{I}{2}\right), \quad \text{(VIII.18.4)}$$

где

$$G_{n,p+q}^{(p-q)} = \frac{(-1)^{n-p-q}\,(n+p+q)!\,(n+p-q)!}{2^n\,(n-p-q)!\,(2p)!\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}. \quad \text{(VIII.18.5)}$$

Подставим (VIII.18.2) и (VIII.18.4) в равенство (VIII.18.1). Тогда найдем

$$C_1 = \frac{\widehat{R}_0}{G_{n,p+q}^{(p-q)}}.$$

Подставляя сюда (VIII.18.3) и (VIII.18.5) и учитывая, что $n-p-q$ есть четное число (см. § III.6), получаем

$$C_1 = \frac{(n-p-q)!}{2^n\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!}.$$

Таким образом,

$$T_{p,q}^{(n)} = \frac{(n-p-q)!}{2^n\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!}\,A_{n,p+q}^{(p-q)}. \quad \text{(VIII.18.6)}$$

Аналогичным образом можно найти постоянные C_2 и C_3, которые входят в зависимости (IV.6.4). Для нахождения C_2 надо воспользоваться формулами (VIII.18.2), (VIII.18.4) и, конечно, вторым равенством (IV.6.4). Для определения C_3 надо использовать формулы (III.7.16) и (VIII.15.8). В результате получим

$$C_2 = \frac{(n-p+q)!}{2^n\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!},$$

$$C_3 = \frac{(n+p-q)!}{2^n\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}.$$

Таким образом,

$$T_{p,q}^{(n)}=\frac{(n-p+q)!}{2^n\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!}A_{n,p-q}^{(p+q)}\quad\text{(VIII.18.7)}$$

и

$$T_{p,q}^{(n)}=\frac{(n+p-q)!}{2^n\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)}A_{n,q-p}^{(-p-q)}.\quad\text{(VIII.18.8)}$$

Сопоставим теперь друг с другом равенства (VIII.18.6) — (VIII.18.8). Тогда найдем следующие зависимости между функциями наклона:

$$A_{n,p+q}^{(p-q)}=\frac{(n-p+q)!}{(n-p-q)!}\,\frac{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!}{\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!}A_{n,p-q}^{(p+q)},$$

$$A_{n,p+q}^{(p-q)}=\frac{(n+p-q)!}{(n-p-q)!}\,\frac{\left(\frac{n+p+q}{2}\right)!\left(\frac{n-p-q}{2}\right)!}{\left(\frac{n+p-q}{2}\right)!\left(\frac{n-p+q}{2}\right)!}A_{n,q-p}^{(-p-q)},$$

$$A_{n,p-q}^{(p+q)}=\frac{(n+p-q)!}{(n-p+q)!}A_{n,q-p}^{(-p-q)},$$

или

$$A_{n,m}^{(k)}=\frac{(n-k)!}{(n-m)!}\,\frac{\left(\frac{n+m}{2}\right)!\left(\frac{n-m}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}A_{n,k}^{(m)},$$

$$A_{n,m}^{(-k)}=\frac{(n-k)!}{(n-m)!}\,\frac{\left(\frac{n+m}{2}\right)!\left(\frac{n-m}{2}\right)!}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!}A_{n,k}^{(-m)},\quad\text{(VIII.18.9)}$$

$$A_{n,m}^{(k)}=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}A_{n,-m}^{(-k)}.$$

Последняя формула носит формальный характер, ибо второй нижний индекс у нас неотрицательный.

§ VIII.19. Замечания

Гипергеометрический ряд впервые встречается во II томе «Интегрального исчисления» Л. Эйлера, изданном в Петербурге в 1769 г. [1]. В нем, в частности, показано, что интеграл

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt$$

может быть разложен в ряд вида

$$B(b, c-b)\left[1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}\frac{b(b+1)}{c(c+1)}x^2+\ldots\right],$$

где $B(b,\ c-b)$ — эйлеров интеграл первого рода. Там устанавливается также, что этот интеграл удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x(1-x)d^2y+[c-(a+b+1)x]dy\,dx-aby\,dx^2=0$$

(см. § VIII.2 и § VIII.5).

Сам Гаусс, по-видимому, впервые столкнулся с гипергеометрическим рядом около 1800 г., когда рассматривал задачу о разложении функции

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-1/2}$$

в тригонометрический ряд [2]. Коэффициенты этого ряда — коэффициенты Лапласа — выражаются через посредство гипергеометрических функций. Это были частные случаи гипергеометрического ряда, которым соответствуют $a=\frac{1}{2}$ и разные b и c, отличающиеся от a на целые числа (см. § VIII.9). Примерно в это время, рассматривая задачу об арифметико-геометрическом среднем, он получил также разложение полного эллиптического интеграла первого рода в ряд по степеням модуля k. Этому частному случаю соответствуют $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$, $x=k^2$ (см. § VIII.8).

Систематическое рассмотрение гипергеометрического ряда в общем случае дано Гауссом в двух работах, одна из которых была опубликована уже после его смерти (см. [2]). В этих работах установлены все важнейшие свойства гипергеометрического ряда, изложенные нами в настоящей главе. В частности, Гаусс рассмотрел сходимость ряда и показал, что ряд сходится, если $|x|<1$, и расходится, если $|x|>1$. Кроме того, он исследовал сходимость при $x=1$ и доказал, что если $c-a-b>0$, то при $x=1$ ряд также сходится. Он нашел, что

$$F(a, b, c, 1)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

Гаусс вывел ряд линейных соотношений (рекуррентные формулы Гаусса), связывающих три функции

$$F(a,\ b,\ c,\ x),\quad F(a',\ b',\ c',\ x),\quad F(a'',\ b'',\ c'',\ x),$$

для которых все разности $a-a'$, $b-b'$, $c-c'$, $a-a''$, $b-b''$, $c-c''$ являются целыми числами. Одно из таких соотношений приводится нами в § VIII.7. Другие можно найти в справочнике [3].

Гаусс получил линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет функция $F(a,\ b,\ c,\ x)$. Он показал, что вторым независимым решением этого уравнения является функция

$$F(a,\ b,\ a+b+1-c,\ 1-x).$$

Гаусс подчеркивал важность введения в анализ гипергеометрического ряда. Он отмечал, что едва ли можно назвать какую-либо изучавшуюся аналитиками трансцендентную функцию, которую нельзя было бы свести к этому ряду. Это замечание подтверждается тем фактом, что многие специальные функции, рассмотренные нами в настоящей книге, так или иначе связаны с этой замечательной функцией Гаусса $F(a,\ b,\ c,\ x)$.

Надо отметить, что в своих исследованиях Гаусс нигде не пользовался интегральным представлением Эйлера. Именно: опираясь на интегральное представление, впоследствии было проведено систематическое изучение гипергеометрической функции как функции комплексного переменного x и комплексных параметров a, b, c. Подробная аналитическая теория гипергеометрической функции была создана трудами К. Вейерштрасса, Б. Римана, Э. Куммера, Л. Фукса, Г. Шварца и Ф. Клейна [4].

В работах П. Аппеля гипергеометрическая функция была обобщена на случай многих комплексных переменных [5].

Сведения о конкретных алгоритмах вычисления гипергеометрической функции на ЭВМ можно найти в справочном пособии [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К главе I

1. *Legendre A. M.* Recherches sur l'attraction des sphéroides homogenes.— Mem. savants étrangers, 1785.
2. *Legendre A. M.* Recherches sur la figure des planètes.— Mem. Ac. Paris, 1787, 1794.
3. *Laplace P. S.* Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes.— Mem. Ac. Paris, 1785.
4. *Laplace P. S.* Traité de mécanique céleste: T. 2.— Paris, 1798, T. 5.— Paris, 1825.
5. *Heine E.* Handbuch der Kugelfunktionen.— Berlin, 1861.
6. История математики: Т. 3. Математика XVIII столетия/Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1972.
7. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций.— М.: ИЛ, 1952.
8. *Jeffreys B.* Transformation of Tesseral Harmonics under Rotation.— Geophysical Journal, 1965, v. 10, p. 141.
9. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике.— 2-е изд.— М.: Наука, 1976.
10. *Пеллинен Л. П.* Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов.— Итоги науки. Сер. Космонавтика.— М., 1972.
11. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика: Основные задачи и методы.— М.: Наука, 1968.
12. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию.— М.: Наука, 1968.
13. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала.— М.: Гостехиздат, 1946.
14. *Субботин М. Ф.* Курс небесной механики: Т. 3.— М.: Гостехиздат, 1949.
15. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения.— М.: Физматгиз, 1961.
16. *Holshevnikov K. W.* Le développement du potential dans le cas d'une densité analytique.— Cel. Mech., 1977, v. 3, p. 2.
17. *Сагитов М. У.* Лунная гравиметрия.— М.: Наука, 1979.
18. *Аким Э. Л., Бажинов И. К., Павлов В. П., Почукаев В. Н.* Поле тяготения Луны и движение ее искусственных спутников.— М.: Машиностроение, 1984.
19. *Агеев М. И., Алик В. П., Марков Ю. И.* Библиотека алгоритмов 101б — 150б.— М.: Сов. радио, 1978, вып. 3, с. 119.

К главе II

1. *Laplace P. S.* Traité de mécanique céleste: T. 1.— Paris, 1799.
2. *Tisserand F.* Traité de mécanique céleste: T. 1.— Paris, 1899.
3. *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике.— М.: Наука, 1965.
4. *Le Verrier U. J. J.* Recherches astronomiques.— Annales L'Observ. de Paris, T. 2. Paris, 1856.
5. *Runkle J. D.* Smiths. Contrib. to Knowledge, Washington, 1855.
6. *Broun E. W.* and *Brouwer D.* Tables for the development of the disturbing function with shedules for harmonic analysis.— Cambridge, 1933.
7. *Герасимов И. А.* Вычисление коэффициентов Лапласа и их производных для случая $0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}9$.— Астрон. циркуляр № 1174, 1981.

К главе III

1. *Gegenbauer L.* Wiener Sitzungsberichte.— Berlin, LXX, 1874; LXXV, 1877; XCVII, 1888; CII, 1893.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Т. 2.— М.: Наука, 1974.
3. *Tisserand F.* Traité de mécanique céleste: T. 1.— Paris, 1889.
4. *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике.— М.: Наука, 1965.
5. *Лях Р. А.* Некоторые изменения в методике разложения пертурбационной функции.— Бюл. Ин-та теор. астрон., АН СССР, 1959, Т. 7, с. 422.
6. *Мартыненко Б. К.* О разложении пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов в эллиптической задаче трех тел.— Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1965, т. 10, № 7.

К главе IV

1. *Kaula W. M.* Analysis of gravitational and geometric aspects of geodetic utilization of satellites.— Geophys. J., 1961, v. 5, p. 104.
2. *Izsak.* Tesseral harmonics of the geopotential and corrections to station coordinates.— J. Geophys. Res., 1964, v. 69, p. 2621.
3. *Allan R. R.* Resonance effect due to the longitude dependence of the gravitational field of a rotating primary.— Planet. Space Sci., 1967, v. 15.
4. *Брумберг В. А.* Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах.— Бюл. ин-та теор. астрон. АН СССР, 1967, № 11, с. 73.
5. *Тимошкова Е. И.* К вопросу о разложении пертурбационной функции.— Астрон. ж., 1972, т. 49, с. 879.
6. *Challe A., Laclaverie J. J.* Fonction perturbatrice et représentation analytique du mouvement d'un satellite.— Astron. and Astrophys., 1969, v. 36, p. 15.
7. *Gooding R. H.* A recurrence relation for inclination functions.— R. A. E., Technical report 70074, 1970.
8. *Giacalia G. E. O.* A note on the inclination functions of satellite theory.— Celestial Mechanics, 1976, v. 13, p. 502.
9. *Аксенов Е. П.* Многочлены Тиссерана и функции наклона в теории ИСЗ.— Астрон. ж., 1986, т. 63, вып. 2.
10. *Garfinkel B.* Addition theorem for a derivative of a Legendre polinomial.— Astron. J., 1964, v. 69, p. 567.
11. *Аксенов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли.— М.: Наука, 1977.

12. *Jeffreys B.* Transformation of tesseral harmonics under rotation.— Geophysical Journal, 1965, v. 10, p. 141.
13. *Фоминов А. М., Филенко Л. Л.* Вычисление нормированных функций наклона и их производных.— Алгоритмы небесной механики, Ин-т теор. астрон. АН СССР, 1978, № 19.
14. *Емельянов Н. В.* Вычисление нормированных функций наклона и их производных при больших значениях индексов.— Тр. ГАИШ, 1985, т. 59, с. 83.

К главе V

1. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций.— М.: ИЛ, 1949.
2. *Кузьмин Р. О.* Бесселевы функции.— Л.: ГНТИ, 1933.
3. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: Ч. II.— М.: Гостехиздат, 1943.
4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: Т. III, 4.2.— М.: Гостехиздат, 1953.
5. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.— М.: Гостехиздат, 1953.
6. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми.— М.: Физматгиз, 1959.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
8. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика: Основные задачи и методы.— М.: Наука, 1975.
9. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ.— Киев: Наукова Думка, 1984.
10. *Агеев М. И., Алик В. П., Марков Ю. И.* Библиотека алгоритмов 101б — 150б.— М.: Сов. радио, 1978, вып. 3, с. 120.

К главе VI

1. *Hansen P. A.* Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reinen.— Abhandl. d. K. S. Ges. d. Wissensch., 1853, Bd IV.
2. *Tisserand F.* Traité de Mécanique Céleste: t. 1.— Paris, 1889.
3. *Cayley A.* Tables of the Developments of Functions in the Theory of Elliptic Motion.— Memoirs of the R. Astron. Society, 1859, v. 29.
4. *Jarnagin M. P.*— Astron. Papers, 1965, v. 18.
5. *Newcomb S.*— Astron. Papers 5, 1895, p. 1.
6. *Newcomb S.*— Astron. Papers 3, 1891, p. 1.
7. *Innes R. T. A.* Note on certain Coefficients appearing in the Algebraical Development of the Perturbative Function.— Monthly Notices, 1909, v. 69.
8. *Zeipel H.* Sur le calculs des opérateurs de Newcomb, Arkiv für Matematik.— Astronomi och Fyzik, 1912, Bd 8, Nr. 19.
9. *Izsak I. G., Gerard J. M., Efimba R., Barnett M. P.* Construction of Newcomb Operators on a digital Computer.— Smithsonian Astrophys. Obs., Spec. Rep., 1964, No. 140.
10. *Cherniach J. R.* Computation of Hansen Coefficients.— Smithsonian Astrophys. Obs., Spec. Rep., 1972, No. 346.
11. *Брумберг В. А.* О дифференциальном уравнении для коэффициентов Ганзена.— Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1970, № 6 (139).

12. *Аксенов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли.— М.: Наука, 1977.
13. *Орлов Б. А.* Разложение пертурбационной функции по методу Ньюкома.— Тр. Астрон. обс. ЛГУ, 1936, т. 6, с. 82—125.
14. *Мартыненко Б. К.* О разложении пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов в эллиптической задаче трех тел.— Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1965, т. 10, № 7.
15. *Фоминов А. М., Филенко Л. Л.* Вычисление коэффициентов Ганзена и их производных.— Алгоритмы небесной механики, Ин-т теор. астрон. АН СССР, 1978, № 19.

К главе VII

1. *Legendre A. M.* Traité des fonctions elliptiques et integrales eulériennes; T. 1—2.— Paris, 1825, 1826.
2. *Gauss C. F.* Werke: Bd 3, 1876.
3. *Abel N. H.* Recherches sur les fonctions elliptiques.— Journ. für Math.: Bd 2, 1827; Bd 3, 1828.
4. Математика XIX века: Геометрия, теория аналитических функций/Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1981, с. 132.
5. *Abel N. H.* Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.— Journ. für Math., 1829, Bd 4.
6. *Jacobi K. G. J.* Extraits de deux lettres a Schoumacher.— Astron. Nachr., 1829, Bd 4.
7. *Jacobi K. G. J.* Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis.— Astron. Nachr., 1827, Nr. 127.
8. *Jacobi K. G. J.* Fundamenta nova functionum ellipticarum.— Königsberg, 1829.
9. *Jacobi K. G. J.* Gesammelte Werke: Bd 1.— Berlin, 1881.
10. *Schwarz G. A.* Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, Nach Vorlesungen und Aufzeichungen des Herrn Prof. K. Weierstrass.— Göttingen, 1883.
11. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: Ч. 2.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1963.
12. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций.— 2-е изд.— М.: Наука, 1970.
13. *Сикорский Ю. С.* Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.
14. *Герасимов И. А.* Вычисление эллиптических функций в задачах небесной механики.— Астрон. ж., 1984, т. 61, № 3, с. 609—610.
15. *Журавский А. М.* Справочник по эллиптическим функциям.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941.
16. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: Т. III, Ч. 2.— М.: Гостехиздат, 1953.
17. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
18. *Шулер М., Гебелейн Х.* Таблицы эллиптических функций.— М.: ВЦ АН СССР, 1961 (БМТ, вып. 13).
19. *Агеев М. И., Алик В. П., Марков Ю. И.* Библиотека алгоритмов 101б — 150б.— М.: Сов. радио, 1978, вып. 3, с. 120.

К главе VIII

1. *Euler L.* Instiutionum calculi integrals, 2, S—P, 1769.
2. Математика XIX века: Геометрия, теория аналитических функций/Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1981.
3. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— 5-е изд.— М.: Наука, 1971.
4. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа; Т. 2.— М.: Физматгиз, 1963.
5. *Appel P.*— Arch. Math. Phys., 1881, t. 66.
6. *Агеев М. И., Алик В. П. Марков Ю. И.* Библиотека алгоритмов 101б — 150б.— М.: Сов. радио, 1978, вып. 3, с. 120.

Евгений Петрович АКСЕНОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

Редакторы *В. Б. Орлов, И. Е. Рахлин*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Л. И. Назарова, Л. С. Сомова*

ИБ № 12756

Сдано в набор 09.07.85. Подписано к печати 17.06.86. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 1. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 16,8. Усл. кр.-отт. 16,8. Уч.-изд. л. 16,16. Тираж 1850 экз. Заказ № 823. Цена 2 р. 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

КНИГИ ПО АСТРОНОМИИ

Вышли из печати:

Гурзадян Г. А. Звездные вспышки. Физика, Космогония, 1985.— 6 р. 40 к.

Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Некорректные задачи астрофизики, 1985.— 3 р. 70 к.

Обридко В. Н. Солнечные пятна и комплексы активности, 1985.— 3 р. 30 к.

Хромов Г. С. Планетарные туманности: физика, эволюция, космогония, 1985.— 4 р. 20 к.

Готовятся к печати:

Витинский Ю. И., Конецкий М., Куклин Г. В. Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца

Горбацкий В. Г. Введение в физику галактик и скоплений галактик

Лозинская Т. А. Сверхновые звезды и звездный ветер. Взаимодействие с газом галактики

Новиков И. Д., Фролов В. П. Физика черных дыр

Товмасян Г. М. Внегалактические источники радиоизлучения

Литературу по астрономии можно приобрести в магазинах Книготорга и Академкниги, распространяющих научно-техническую литературу.