

Релятивистская астрофизика

Я.Б.Зельдович
И.Д.Новиков

Я.Б.Зельдович
И.Д.Новиков

Релятивистская
астрофизика

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ
И. Д. НОВИКОВ

Релятивистская астрофизика



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика.

Книга содержит систематическое изложение проблем недавно возникшей науки — релятивистской астрофизики.

Одним из самых острых вопросов физики космоса является вопрос о строении Вселенной в целом, ее эволюции в прошлом, ее будущем; вопрос о физических процессах на ранних этапах расширения окружающего мира, о процессах, приведших к образованию галактик и звезд. Недавние астрономические открытия дают надежную наблюдательную основу разработки этих вопросов, составляющих так называемую космологическую проблему.

Столь же важными являются проблемы эволюции отдельных небесных тел и их систем, устойчивости этой эволюции и проблемы быстрых катастрофических процессов в небесных телах. Интерес к этим проблемам особенно возрос после открытия квазаров.

Во всех этих вопросах важную роль играет общая теория относительности Эйнштейна, однако предварительное знакомство читателя с этой теорией не предполагается.

Книга посвящена перечисленным проблемам. В первом разделе книги излагается современная теория тяготения, ее новейшие результаты. Второй раздел посвящен уравнению состояния вещества для всего диапазона плотностей и температур. В третьем разделе излагается теория строения, медленной и катастрофической эволюции отдельных небесных тел и, в частности, квазаров. Последний раздел посвящен космологии, ее классическим и новейшим проблемам.

Изложение строится таким образом, что качественная сторона вопросов доступна самому широкому кругу читателей: студентам и преподавателям университетов, технических и педагогических вузов, всем интересующимся астрофизикой. С другой стороны, дается подробная математическая теория вопросов.

Книга содержит 109 рисунков, 23 таблицы и 493 библиографические ссылки.

Предисловие	9
-----------------------	---

Раздел 1

ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

Глава 1

Введение	13
§ 1. Равенство инертной и гравитационной масс	13
§ 2. Основная идея ОТО	16
§ 3. Свойства неинерциальных систем	18
§ 4. Измерение времени и пространственных расстояний	21
§ 5. Некоторые формулы для криволинейных координат	25
§ 6. Динамические и кинематические величины	28
§ 7. Кривизна пространства — времени	31
§ 8. Уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения движения	33
§ 9. Закон Ньютона и слабое поле тяготения	36
§ 10. Аналог зееман-эффекта в гравитационном поле вращающегося тела	42
§ 11. Излучение гравитационных волн	43
§ 12. Гравитационное излучение двойных звезд	46

Глава 2

Неизбежность общей теории относительности (ОТО) и задачи теории тяготения	51
§ 1. Введение	51
§ 2. Единая теория поля, геометродинамика, фундаментальная масса и длина	52
§ 3. Тяготение в плоском пространстве	53
§ 4. Неизбежность идеи кривизны пространства—времени	61

Глава 3

Сферически-симметричное поле тяготения	64
§ 1. Введение	64
§ 2. Поле тяготения Шварцшильда	67
§ 3. Поле тяготения внутри звезды	69
§ 4. Движение по радиусу лучей света и ультрарелятивистских частиц	71
§ 5. Движение по радиусу нерелятивистских частиц	73
§ 6. Потенциальные кривые движения	78
§ 7. Круговые орбиты	81
§ 8. Движение релятивистской частицы в кулоновском поле	83
§ 9. Гравитационный захват нерелятивистской частицы	84
§ 10. Движение ультрарелятивистских частиц и лучей света	85

§ 11. Движение тел в поле тяготения Шварцшильда с учетом гравитационного излучения	87
§ 12. R - и T -области в пространстве — времени Шварцшильда	90
§ 13. Внутреннее решение для нестатического шара	95
§ 14. Метрика Крускала	97

Глава 4

Несферические поля тяготения	105
§ 1. Введение	105
§ 2. Статическое поле с аксиальной симметрией	106
§ 3. Внешнее поле вращающегося тела	111
§ 4. Сфера Шварцшильда во внешнем квадрупольном поле	115
§ 5. Гравитационное сжатие слабо вращающегося тела с малыми отклонениями от сферической симметрии	116
§ 6. Что происходит с веществом после ухода под S_m ?	121

Раздел II

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Глава 5

Введение	126
§ 1. Понятие давления; разные виды давления; случай дальнего действия	126

Глава 6

Холодное вещество	132
§ 1. Подразделение на области	132
§ 2. Вырожденный электронный газ	134
§ 3. Поправки в области высоких давлений	138
§ 4. Область средних плотностей, $10^6 > \rho > 500 \text{ г/см}^3$	141
§ 5. Ядерные процессы и ядерное взаимодействие — влияние на уравнение состояния	147
§ 6. Свойства нейтронного газа	153
§ 7. Плотность, превышающая ядерную	156
§ 8. Идеальный нейтронный газ при сверхвысокой плотности	158
§ 9. Идеальный газ с учетом взаимного превращения частиц	159
§ 10. Все ли «элементарные» частицы элементарны?	163
§ 11. Электромагнитное взаимодействие частиц	164
§ 12. Предельно жесткое уравнение состояния	167

Глава 7

Свойства вещества при высокой температуре	171
§ 1. Физические условия в обычных звездах	171
§ 2. Высокие температуры	173
§ 3. Различные типы равновесия	175

Глава 8

Термодинамические величины при высоких температурах	181
§ 1. Нейтральный газ, плазма; равновесие ионизации	181
§ 2. Термодинамика излучения	184

§ 3. Пары и нейтрино	187
§ 4. Диссоциация ядер	191
§ 5. Безразмерная энтропия	195

Раздел III

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СТАДИИ ЭВОЛЮЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Глава 9

Введение	198
--------------------	-----

Глава 10

Равновесие и устойчивость звезд	203
§ 1. Равновесие и устойчивость звезды в целом	203
§ 2. Общие задачи теории равновесия звезд	213
§ 3. Энергетический подход к теории равновесия звезды, состоящей из вещества с γ , близким к $4/3$	216
§ 4. Теория холодных белых карликов	221
§ 5. Нейтронные звезды	231
§ 6. Дефект массы	235
§ 7. Устойчивость нейтронных звезд	238
§ 8. О решениях с положительной энергией	240
§ 9. Равновесие сверхмассивной звезды	244
§ 10. Критические состояния звезд средней массы	259

Глава 11

Эволюция звезд и звездных систем	266
§ 1. Эволюция звезды с массой, меньшей «ОВ» предела	266
§ 2. Физика нейтронных звезд	273
§ 3. Эволюция звезды с массой, большей «ОВ» предела	277
§ 4. Нестабильность массивных звезд с ядерными источниками энергии	278
§ 5. Устойчивость эволюции звезды	280
§ 6. Релятивистский коллапс	286
§ 7. Метастабильность любого равновесного состояния	289
§ 8. Испускание нейтрино при коллапсе остывшей звезды	292
§ 9. Испускание нейтрино горячей плазмой при коллапсе массивных звезд	296
§ 10. Ранние фазы эволюции сверхмассивной звезды	302
§ 11. Эволюция сверхмассивной звезды (без турбулентности и вращения)	304
§ 12. Вращение и истечение. Общие соотношения	314
§ 13. Равновесие и форма вращающейся звезды. Ньютоновская теория	319
§ 14. Поправки на ОТО в теории вращающейся звезды	323
§ 15. Приближенная теория равновесия	328
§ 16. Вращающиеся массивные звезды, турбулентность и квазары	330
§ 17. Турбулентность	334
§ 18. Эволюция вращающейся звезды. Скорость истечения	336
§ 19. Равновесие и коллапс системы точечных масс, взаимодействующих только гравитационно	340

Глава 12

Физические процессы в окрестности релятивистских объектов и сопоставление с наблюдениями	346
§ 1. Аккреция газа нейтронными и застывшими звездами	346
§ 2. Падение частиц на звезду	348
§ 3. Гидродинамическое решение	350
§ 4. Движение и выделение энергии в газодинамическом решении; эффекты ОТО	353
§ 5. Несимметричная аккреция в поле застывшей звезды	355
§ 6. Магнитные и магнитогидродинамические явления	360
§ 7. Сопоставление с наблюдениями	367

Глава 13

Квезары	378
§ 1. Наблюдательные свойства квазаров	378
§ 2. Теория квазаров	380

Раздел IV

КОСМОЛОГИЯ

Глава 14

Введение	387
§ 1. Общее состояние космологической проблемы	387

Глава 15

Локальные свойства однородной изотропной космологической модели	395
§ 1. Локальный закон распределения скорости	395
§ 2. Закон эволюции. Критическая плотность	398
§ 3. Продолжительность расширения	400
§ 4. Два частных решения. Начальная стадия	402
§ 5. Влияние давления на закон расширения. Качественные соображения	404
§ 6. Уравнения движения с учетом давления	406
§ 7. Время расширения при наличии давления	408
§ 8. Начальная стадия при наличии давления	409

Глава 16

Геометрические топологические свойства однородной и изотропной модели мира	411
§ 1. Геометрическая структура модели Вселенной как целого	411
§ 2. Полузамкнутые миры и физическая интерпретация метрики Крускала	415
§ 3. Метрика открытого мира	420
§ 4. Случай критической плотности	424

Глава 17

Распространение света и нейтрино; методы проверки космологических теорий наблюдениями	427
§ 1. Красное смещение и уменьшение импульса	427
§ 2. Наблюдаемые величины и горизонт	429
§ 3. Графики и формулы для наблюдаемых величин	435

§ 4. Первое приближение и евклидово пространство. Параметр ускорения	443
§ 5. Распределение по видимым величинам	449
§ 6. Далекие объекты и общая плотность излучения	454
§ 7. Наблюдаемые величины во Вселенной, однородной лишь в среднем	465
§ 8. Исследование неоднородности распределения галактик	468
§ 9. О возможности определения космологической модели по наблюдениям далеких объектов	473
§ 10. Эволюция радиоисточников	476

Глава 18

Горячая космологическая модель. Физика ранних этапов расширения однородной модели	484
--	------------

§ 1. Гипотезы о состоянии вещества в начальной стадии расширения (общее введение)	484
§ 2. Космологическое расширение высокотемпературной плазмы и установление равновесия	490
§ 3. Рождение гравитонов на ранних стадиях расширения горячей модели	497
§ 4. Ядерные реакции в горячей модели	500
§ 5. Антинуклоны в горячей плазме	505
§ 6. Кварки в горячей модели	511

Глава 19

Развитие возмущений в горячей модели; происхождение галактик, скоплений галактик, квазаров	516
---	------------

§ 1. Вводные замечания	516
§ 2. Изменение пекулярных движений с космологическим расширением	517
§ 3. Гравитационная неустойчивость однородного мира	520
§ 4. Рост возмущений произвольной формы и автомодельные решения	524
§ 5. Неустойчивость и закон возрастания неоднородностей в горячей модели	531
§ 6. Гипотеза образования галактик и квазаров	534
§ 7. Спектр возмущений	538

Глава 20

Прохождение через сингулярное состояние и эпоха до расширения Метагалактики	544
--	------------

§ 1. Неоднородность плотности на раннем дозвездном этапе расширения: оценка верхнего предела неоднородности	544
§ 2. О возможности существования сверхплотных тел на ранних стадиях расширения горячей модели	547
§ 3. Что было до расширения Метагалактики?	551
§ 4. Зарядовая несимметрия и энтропия горячей Вселенной	552
§ 5. Осциллирующая модель и модель однократного сжатия и расширения	554

Глава 21

Анизотропные однородные космологические модели и некоторые выводы	558
--	------------

§ 1. Вводные замечания	558
§ 2. Ньютоновская теория анизотропного однородного решения	561
§ 3. Гравитационный парадокс ньютоновской теории	564
§ 4. Релятивистская теория анизотропного однородного решения	566
§ 5. Магнитная модель однородной Вселенной	570
§ 6. Ядерные реакции на ранней стадии в анизотропной горячей модели	575

§ 7. Рост возмущений плотности в анизотропных однородных моделях	578
§ 8. Нейтрино и гравитоны в анизотропной космологической модели	579
§ 9. Заключительные замечания	583

Глава 22

Критика некоторых других космологических направлений	586
§ 1. О принципе Маха	586
§ 2. Теория рождения вещества	588
§ 3. Другие объяснения красного смещения	591
§ 4. Электрическая Вселенная	592
§ 5. Направление времени	593
Дополнения	596
Литература	641

Релятивистская астрофизика — это словосочетание возникло недавно, лишь в 1963 г. Две проблемы составляют содержание предлагаемой книги: проблема Вселенной как целого (космология) и проблема изолированного тела-звезды, галактики или квазара (собственно астрофизика).

Необходимость выхода за рамки ньютоновской теории тяготения в космологии была осознана еще до создания Эйнштейном теории относительности в связи с рассмотрением так называемого гравитационного парадокса в безграничном пространстве, заполненном материей. После создания общей теории относительности появились предпосылки для развития современной космологии. В 1922—1924 гг. А. А. Фридманом были построены релятивистские нестационарные космологические модели. Замечательные работы Фридмана давно стали классическими. Последние годы характерны тем, что механическая картина движений и сил во Вселенной наполнилась новым конкретным физическим содержанием. Обнаружено электромагнитное излучение, соответствующее температуре 3°К и являющееся веским доказательством в пользу «горячей модели», предложенной Гамовым еще в 1948 г. Появилось больше уверенности в расчетах превращений элементарных частиц и ядерных реакций на ранней стадии космологического расширения. Более обоснованными и подробными стали гипотезы рождения скоплений галактик, звезд и квазаров из горячей плазмы в ходе ее расширения.

В противоположность космологии астрофизика, в узком смысле этого слова, до недавнего времени была нерелятивистской. Теория обычных звезд с массой, не превышающей 100 масс Солнца (в том состоянии, в котором мы наблюдаем эти звезды), не требует теории относительности. Ньютоновская теория тяготения вместе с термодинамикой и учением о свойствах плазмы и с ядерной физикой полностью количественно описывают светимость, размеры и спектры звезд. Теория строения звезд находится в хорошем согласии с наблюдениями. По мере израсходования ядерного горючего происходит эволюция звезды.

Теория эволюции приводит к состояниям звезды, в которых необходимо учитывать быстрые процессы, а также и специфические эффекты теории относительности. Интерес к этим эффектам особенно увеличился после открытия квазаров или сверхзвезд, как их первоначально называли. Эти тела, общая светимость которых в сотни раз больше, чем светимость гигантских галактик, явно необычайные по своим свойствам, вызвали к жизни целый ряд экзотических гипотез от аннигиляции антивещества с обычным веществом до отрицательной массы. Фантастические гипотезы — обычное явление при открытии нового, и им не придают серьезного значения. Но самое трезвое исследование эволюции и равновесия больших масс газа, т. е. «звезд» с массой больше 10^5 солнечных, приводит к выводу, что в этом случае существенную роль играют эффекты общей теории относительности, т. е. эти объекты являются предметом изучения релятивистской астрофизики.

Упомянутые выше вопросы составляют основное содержание предлагаемой книги. Излагая каждый вопрос, авторы стремились дать по возможности полную картину явления и всех физических факторов, не ограничиваясь одними релятивистскими эффектами и не считая все остальное известным. Может быть, главным недостатком, который мы ощущаем сами, является недостаточный учет роли магнитного поля в различных явлениях. С другой стороны, магнитной гидродинамике астрономических явлений посвящен ряд замечательных монографий — Х. Альвен «Космическая электродинамика» (1952), С. Б. Пикельнер «Основы космической электродинамики» (1966), С. А. Каплан, С. Б. Пикельнер «Межзвездная среда» (1963). Мы практически не касались также весьма важного вопроса о космических лучах и специфики излучения релятивистских частиц и плазмы в магнитных полях, отсылая читателя к монографиям: В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский «Происхождение космических лучей» (1963), И. С. Шкловский «Космическое радиоизлучение» (1956), В. Л. Гинзбург «Распространение электромагнитных волн в плазме» (1960) и к обзору В. Л. Гинзбурга и С. И. Сыроватского в УФН (1965).

Предлагаемая книга не предъявляет специальных высоких требований к подготовке читателя. В частности, достаточно иметь самые общие представления о теории относительности, не обязательна даже полная проработка второй части классической «Теории поля» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица. Важнейшие, давно известные и вошедшие в учебники результаты, например, решение Шварцшильда для поля изолированной массы или космологическое решение Фридмана, приведены в нашей книге. Более того, дается подробная физическая интерпретация извест-

ных формул, грубо говоря, они «разжевываются». Мы хотим показать читателю все богатство результатов, заключенных в этих формулах, способы обращения с ними и соответствие релятивистской и классической теорий. Наряду с этим в книге приведены некоторые новые результаты общей теории относительности и, естественно, все новое, что входит в предмет релятивистской астрофизики.

Книга была в основном закончена к лету 1966 г. В ходе дальнейшей работы над ней были сделаны добавления. В книге даются многие результаты, появившиеся только в 1966—67 гг. Быстрое развитие той области науки, которая освещается в нашей книге, создавало огромные трудности для ее написания. Не раз мы готовы были бросить работу, когда новые открытия заставляли существенно дополнять и развивать изложение, не один раз переносились сроки сдачи рукописи. И сейчас, когда пишется это предисловие, вызывает страх мысль о том, что будет еще через полгода при корректуре и через год, когда книга выйдет из печати, когда все написанное станет застывшим и необратимым, а наука будет продолжать идти вперед... Имея в виду сказанное, мы везде старались четко отделить уже решенные проблемы от еще решаемых или даже только возникающих на повестке дня. Разумеется, все «страхи» относятся непосредственно лишь к интерпретации тех или иных астрофизических явлений, которые еще не получили должного объяснения, к степени применимости к ним построенных моделей. Что же касается самих многочисленных моделей и задач, построенных и решенных в связи с этими явлениями, то они, разумеется, останутся правильными и в будущем, если они правильны сегодня. Известной подготовкой к данной книге явились обзоры, написанные авторами вместе и по отдельности за последние несколько лет. Однако быстрое развитие наук привело к тому, что эти обзоры использованы в меньшей мере, чем это первоначально предполагалось.

Итак, авторы вполне сознают, что книга содержит наряду с вполне достоверным «вечным» материалом догадки и гипотезы, большая часть которых на протяжении ближайших лет устареет и окажется неверной. В этой ситуации мы старались, как уже отмечалось, в меру своего понимания предупреждать читателя о степени достоверности каждой излагаемой теории или гипотезы. Наконец, некоторым оправданием рассмотрения иногда еще не проверенных полностью наблюдениями результатов может быть и то, что четкое изложение сомнительных гипотез стимулирует их опровержение.

При написании книги существенную помощь оказали сотрудники нашей группы А. Г. Дорошкевич, Б. В. Комберг,

Г. С. Бисноватый-Коган, Р. А. Сюняев, Д. К. Надежин, В. С. Имшенник, В. М. Дашевский, В. М. Чечеткин. Большая работа по оформлению рукописи проделана А. А. Гуськовой. Большую роль сыграл частый обмен мнениями и дискуссии с В. Л. Гинзбургом, И. С. Шкловским, С. Б. Пикельнером, Л. М. Озерным, Н. С. Кардашевым, Е. М. Лифшицем, И. М. Халатниковым и многими их сотрудниками. В. Л. Гинзбург и Л. М. Озерной прочли рукопись книги и сделали много ценных замечаний.

Полезным было участие одного из авторов (Н.) в Международной гравитационной конференции в Англии летом 1965 г. и в Нью-Йорке в январе 1967 г., где присутствовали Чандрасекар, Уилер, Фаулер, Торн и ряд других ученых, сделавших большой вклад в создание релятивистской астрофизики. Важной и интересной была переписка с Дикке и Лайзером.

Симпозиум в Бюракане в мае 1966 г., заслуга организации которого принадлежит В. А. Амбарцумяну, позволил встретиться с Оортом, М. Шмидтом, Э. М. и Дж. Бербиджами, Г. Мюнчем, Линдсом и рядом других выдающихся астрономов.

Пользуемся случаем принести искреннюю благодарность всем перечисленным лицам.

Я. Зельдович, И. Новиков

Москва,
15 апреля 1967 г.

Теория тяготения

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Равенство инертной и гравитационной масс

Современная теория тяготения, сформулированная в 1916 г. Альбертом Эйнштейном, явилась развитием специальной теории относительности (СТО) и поэтому часто называется «общей теорией относительности» (ОТО).

Суть СТО выражена в преобразованиях Лоренца для координат и времени и соответствующих законах преобразования таких физических величин, как энергия, импульс и т. д. Все предпосылки и выводы СТО—постоянство скорости света, зависимость массы от скорости, дефект массы и его связь с энергией системы, растяжение времени при быстром движении на примере распада частиц—подтверждены опытом. СТО вошла в практику инженерных расчетов. Поэтому в правильности СТО никаких сомнений нет.

Общая теория относительности (ОТО) находится в совершенно ином положении. Опыты, специфически подтверждающие ОТО, до сих пор немногочисленны. К ним относятся движение перигелия Меркурия, отклонение света в поле тяжести Солнца, изменение частоты света в поле тяжести. По существу, главным аргументом в пользу ОТО является тот известный каждому школьнику исходный факт, который вдохновил Эйнштейна—пропорциональность веса и массы, т. е. равенство ускорения различных тел в поле тяжести.

Закон тяготения Ньютона $F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}$ очень похож на закон Кулона $F = \frac{e_1e_2}{r^2}$. Естественно, возникает вопрос, почему так различны по своему содержанию теория электромагнитного поля, которая рассматривается в евклидовом пространстве, и ОТО с понятием кривизны пространства; нельзя ли поле тяготения также описывать как какое-то поле в евклидовом пространстве?

Ниже будет показано, что СТО и квантовая механика делают логически неизбежным характерное для ОТО искривление пространства — времени. ОТО является не только математически наиболее изящной и стройной, но физически необходимой теорией тяготения.

Как уже подчеркивалось, самой важной особенностью поля тяготения является то, что оно совершенно одинаково действует на различные тела, сообщая им одинаковые ускорения. Этот факт был установлен еще Галилеем. Поле тяготения тем самым в корне отличается от всех других известных в физике полей.

Естественно, что в последнее время, когда наблюдается оживление интереса к теории тяготения, одной из первых задач было экспериментальное выяснение вопроса о фактической точности вывода об одинаковости ускорений, сообщаемых полем тяготения разным телам. Иначе этот принцип формулируется как принцип строгой пропорциональности инертной и весомой массы. Последняя формулировка особенности действия поля гравитации на тела эквивалентна предыдущей. Действительно, в уравнениях движения тела в поле тяжести

$$m_{\text{и}} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = m_{\text{г}} \text{grad } U$$

слева стоит инертная масса, а справа гравитационная. Если для любых тел $m_{\text{и}} = \alpha m_{\text{г}}$ масса слева и справа сокращается, мы приходим к закону Галилея, поскольку масса вообще не входит в уравнение движения. Множитель α , очевидно, зависит только от единиц измерения и его выбирают равным единице.

В 1890 г. Этвеш применил чрезвычайно точный способ для проверки пропорциональности гравитационной и инертной масс. Суть опыта состояла в следующем. Всякое тело, находящееся на поверхности Земли и покоящееся относительно Земли, подвергается действию притяжения не только со стороны Земли, но также со стороны Солнца, Луны и др. небесных тел. На тело действуют также центробежные силы, связанные с суточным вращением Земли вокруг своей оси, с годовым обращением Земли вокруг Солнца, с месячным взаимным обращением центра Земли вокруг центра тяжести системы Земля—Луна.

Притяжением планет и других небесных тел можно пренебречь. Точно так же можно пренебречь ускорениями, связанными с движением Солнца в Галактике и т. д. Ускорение земного тяготения около 980 см/сек^2 , центробежное ускорение суточного вращения на широте Москвы около $1,5 \text{ см/сек}^2$. Ускорение солнечного поля тяготения на орбите Земли около $0,5 \text{ см/сек}^2$; центробежное ускорение годичного вращения Земли, очевидно, так-

же равно $0,5 \text{ см/сек}^2$. Действие Луны характеризуется ускорением $4 \cdot 10^{-3} \text{ см/сек}^2$.

Представим себе два тела, A и B , равной массы, уравновешенные на коромысле, подвешенном за середину к тонкой нити. Силы притяжения к Земле, к Солнцу и Луне пропорциональны гравитационной массе, центробежные силы пропорциональны инертной массе.

Для тел с одинаковым соотношением инертной и весомой масс результирующая сила, действующая на каждое тело, имеет одинаковое направление. Равновесие при определенном положении коромысла сохранится и при любом повороте коромысла относительно земной оси и относительно Солнца. Если же отношения масс разные, то при коромысле, установленном перпендикулярно к направлению центробежных сил, эти силы не будут уравновешены и вызовут поворот коромысла вокруг оси, совпадающей с нитью, на которой подвешено коромысло. Центробежная сила суточного вращения больше центробежной силы годового вращения; однако поворот коромысла относительно Солнца совершается просто в процессе вращения Земли, без изменения взаимного расположения коромысла и окружающих его лабораторных предметов и рельефа поверхности Земли. Поэтому практически удобнее следить за тем, испытывает ли коромысло повороты в зависимости от его ориентации относительно Солнца.

Из отсутствия таких поворотов Этвеш сделал вывод, что отношение весомой и инертной массы для разных тел различается не более, чем на 10^{-8} . В последнее время в США опыты Этвеша были повторены Дикке (1961а), Роллом, Кротковым и Дикке (1964). Помещая коромысло в высокий вакуум, применяя отсчет поворота коромысла с помощью фотоэлемента и автоматическое («кибернетическое») успокоение колебаний, Дикке повысил точность опыта. Его результат совпадает с результатом Этвеша: отношение гравитационной и инертной масс меди и свинца совпадают. Но, по Дикке, точность этого совпадения 10^{-10} ! Остановимся на смысле полученного результата.

Инертная масса зависит от энергии — это вывод СТО. Действительно, из СТО известно, что когда два атома дейтерия соединяются в один атом гелия, то инертная масса уменьшается приблизительно на $6 \cdot 10^{-3}$ своей величины в соответствии с дефектом масс гелия и дейтерия. Точные определения массы при помощи масс-спектрографа, с одной стороны, и прямые измерения энергии ядерных реакций, — с другой, подтверждают этот вывод СТО.

От чего же зависит гравитационная масса тела, и, следовательно, сила, испытываемая им в поле тяготения? Зависит ли

она от числа барионов в теле, т. е. от барионного заряда, наподобие того как электростатическое притяжение зависит от электрического заряда, или эта сила зависит от полной энергии тела? Для обычных веществ (не мезонов, не антивещества) число барионов и инертная масса приблизительно пропорциональны друг другу с расхождениями около 10^{-3} . Поэтому при малой точности опыт типа Этвеша не мог бы решить вопрос. Однако точность опыта 10^{-10} приводит к категорическому выводу о том, что сила тяжести пропорциональна именно энергии тела, как и инертная масса. Такая точность означает прочность фундамента ОТО.

Притяжение не определяется нуклонным зарядом тела и всемирное тяготение нельзя представлять себе наподобие электростатического притяжения разноименных электрических зарядов. Поэтому абсолютно ошибочны и антинаучны представления о том, что какие-то частицы, например, так называемая антиматерия (позитроны, антипротоны, антинейтроны), могут испытывать «антигравитацию». Из опытов на ускорителях хорошо известно, что для создания античастиц нужно затратить энергию; эта энергия является источником массы античастицы, античастица имеет весомую массу в точности такую же, как и соответствующая частица. Косвенным доказательством этого являются и опыты Этвеша и Дикке.

Ли и Янг (1955) (см. также работу Дикке (1962) ставили вопрос, нет ли наряду со всемирным тяготением еще аналога кулоновских сил, пропорциональных числу нуклонов; опыты Этвеша и Дикке показывают, что таких сил нет или, точнее, что если они есть, то во всяком случае эти силы находятся за пределами точности опыта; для этого нужно, чтобы предполагаемые Янгом и Ли силы были в 10^7 раз слабее гравитационных и в 10^{43} раз слабее кулоновских (для двух протонов) *).

Подчеркнем, что если бы силы, связанные с нуклонным зарядом, существовали, то ОТО тем не менее осталась бы в силе. Правда, в этом случае выявить из опыта фундаментальные факты, лежащие в основе ОТО, было бы гораздо сложнее.

§ 2. Основная идея ОТО

Ньютону представлялось очевидным, что физическое пространство — евклидово; существуют параллельные линии, сумма углов треугольника с прямыми сторонами равна π , длина окружности равна $2\pi r$ и т. д., а время течет всегда и везде одинаково.

*) Существование сил Ли и Янга невозможно в однородной изотропной космологической модели (см. гл. 22).

Сама идея, что свойства пространства могут быть иными (например, сумма углов треугольника зависит от его площади) возникла гораздо позже. Математически такие пространства были открыты и исследованы Лобачевским.

В СТО в инерциальной системе отсчета квадрат четырехмерного расстояния (в пространстве и времени) между двумя бесконечно близкими событиями (интервал) записывается в виде

$$ds^2 = (dct)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2, \quad (1.2.1)$$

где c — скорость света, t — время, x , y , z — декартовы координаты. Такая система координат носит название галилеевой.

Выражение (1.2.1) имеет вид, аналогичный выражению для квадрата расстояния в евклидовом трехмерном пространстве в декартовых координатах (с точностью до числа измерений и знаков перед квадратами дифференциалов в правой части). Такое пространство — время принято называть плоским евклидовым или, точнее, псевдоевклидовым, подчеркивая особый характер времени: в выражении (1.2.1) перед квадратом дифференциала времени стоит знак (+), в отличие от знаков перед пространственными координатами. Таким образом, СТО является теорией физических процессов в плоском пространстве — времени, носящем название пространства — времени Минковского.

Движение свободной частицы по инерции в этом пространстве — времени изображается прямой линией (рис. 1). Эта линия носит название мировой линии частицы. Мы не останавливаемся на упомянутых вопросах более подробно, предполагая, что читатель знаком с основами СТО.

Идея Эйнштейна, вдохновленная принципом эквивалентности и положенная в основу теории тяготения, заключается в том, что и в поле тяготения все тела движутся по экстремальным (геодезическим) линиям в пространстве — времени, которое, однако, уже не плоское, а искривленное.

Массы, создающие поле тяжести, искривляют пространство — время. Те тела, которые движутся в этом искривленном пространстве — времени, и в этом случае движутся по одним и тем

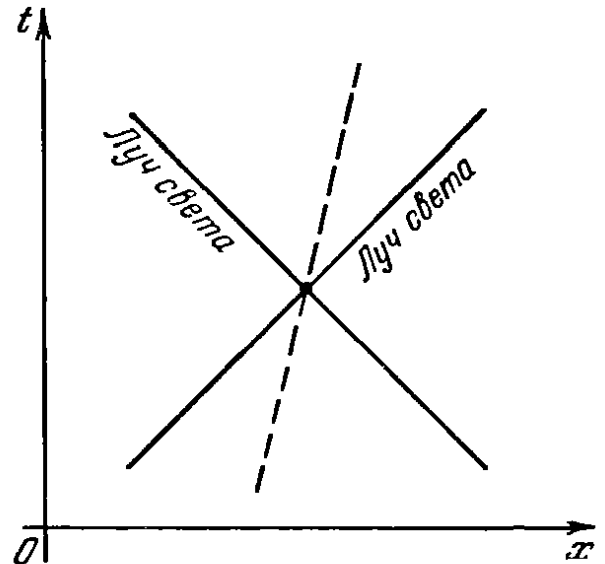


Рис. 1. Пространство — время Минковского. x — пространственная координата, t — время. Пунктир — мировая линия пробной частицы, движущейся по инерции.

же геодезическим линиям независимо от массы или состава тела. Движение по геодезической в искривленном пространстве—времени воспринимается нами как движение по кривой, с переменной скоростью. Но с самого начала в теории Эйнштейна заложено, что искривление траектории, закон изменения скорости—это свойства пространства—времени, свойства геодезических в этом пространстве, а значит, ускорение любых разных тел должно быть одинаково, значит, отношение весомой массы к инертной (от которого зависит ускорение тела в данном поле тяжести) для всех тел одинаково. Таким образом, поле тяготения есть отклонение свойств реального пространства—времени от свойств плоского многообразия.

В следующих параграфах будут кратко изложены математические методы описания кривизны пространства—времени, необходимые для дальнейшего. Читателей, интересующихся подробным изложением вопроса, мы отсылаем к книгам П. К. Рашевского (1964), Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (1962) и работе А. Л. Зельманова (1959b).

§ 3. Свойства неинерциальных систем

Для того чтобы лучше уяснить смысл кривизны пространства—времени, напомним сначала особенности геометрии пространства и течения времени в неинерциальных системах отсчета, движущихся с ускорением в плоском пространстве—времени Минковского. Это позволит нам ввести понятия, необходимые для вычислений в искривленном пространстве—времени *).

В мире Минковского (т. е. вдали от тяготеющих масс) в инерциальной системе отсчета геометрия евклидова и время течет везде одинаково.

Рассмотрим теперь, следуя Эйнштейну (1965 **) (см. также Ландау и Лифшиц (1962)), равномерно вращающийся диск. Наблюдатель A , не участвующий во вращении, может измерить длину окружности края диска l и его диаметр D (например, измеряя длину окружности, начерченную непосредственно под вращающимся диском, и диаметр этой окружности). Очевидно, $l/D = \pi$. Другой наблюдатель, B , находящийся на вращающемся диске, тоже измеряет длину окружности, непосредственно прикладывая масштаб к его краю, а затем к диаметру.

*) С математической точки зрения это соответствует введению криволинейных координат на плоскости; полученный аппарат используется для вычислений на кривой поверхности, где пользоваться криволинейными координатами просто необходимо.

**) Мы ссылаемся на собрание трудов Эйнштейна, первый том которых вышел в 1965 г.

Наблюдатель A замечает, что когда наблюдатель B прикладывает движущийся масштаб к краю диска, масштаб испытывает лоренцово сокращение длины. Следовательно, на длине той же окружности уложится больше масштабных отрезков, и длина окружности получится больше, чем при измерении в инерциальной системе, а именно $\tilde{l} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, где v — скорость края

диска. Когда на вращающемся диске масштаб прикладывают к диаметру, для неподвижного наблюдателя A он не сокращается в длину, так как движется в поперечном направлении. Следовательно, измерение диаметра даст то же число, что и в инерциальной системе $\tilde{D} = D$. Поэтому по изменению на вращающемся диске отношение $\frac{\tilde{l}}{\tilde{D}} = \frac{l}{D \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \pi$, что не соответствует

геометрии Евклида *).

Нетрудно понять математическую причину появления неевклидовости 3-мерной геометрии в неинерциальной системе отсчета в плоском 4-мерном пространстве — времени.

Когда рассматривается 3-мерное пространство инерциальной системы, это означает сечение 4-мерного пространства — времени «плоской» 3-мерной гиперповерхностью. Пространство 3-мерной неинерциальной системы получается искривленным сечением 4-мерного пространства — времени. Неудивительно, что геометрия этого искривленного сечения неевклидова. Ситуация полностью аналогична планиметрии на искривленной двумерной поверхности в обычном (плоском) трехмерном пространстве. Несмотря на то, что это пространство плоское, геометрия на кривой поверхности неевклидова.

Возвращаясь к вращающемуся диску, заметим, что если скорость вращения диска меняется, то геометрия будет меняться со временем.

Обратимся теперь к свойствам течения времени. Чем дальше от центра диска, тем больше линейная скорость вращения, тем медленнее идут часы согласно формуле СТО: $\tilde{t} = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Таким образом, темп течения времени разный в разных точках диска. Если же скорость вращения меняется, то темп этот меняется и с течением времени.

*) Заметим, что здесь нельзя обратить рассуждения, считая наблюдателя B покоящимся, а наблюдателя A движущимся, ибо на диске действуют центробежные и кориолисовы силы (вызванные вращением), которых нет в инерциальной системе A . Системы A и B неравноправны,

Но это еще не все. Рассмотрим часы, расположенные на одной окружности диска. Они движутся с одинаковой линейной скоростью v , и темп их хода одинаков. Чтобы они всегда показывали одинаковое время, у них должно быть общее начало отсчета, т. е. их нужно синхронизовать. Из СТО известно, что если синхронизовать с помощью лучей света часы I и II в двух точках

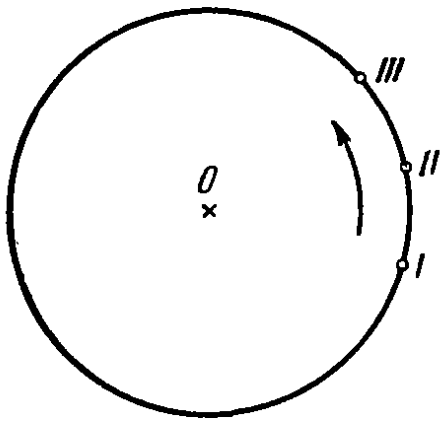


Рис. 2. К синхронизации часов на вращающемся диске (см. текст).

ках движущегося тела (рис. 2), то для неподвижного наблюдателя часы I идут несколько впереди часов II .

Поэтому если пытаться синхронизовать часы, расположенные на окружности на вращающемся диске, то получим следующее (см. рис. 2). Часы II отстают для внешнего наблюдателя от I , часы III от II и тем более от I и т. д. Обойдя всю окружность и вернувшись к I , мы должны заключить, что в этой же точке часы, синхронные с I , должны идти позади I , что явно нелепо.

Рассуждение показывает, что на вращающемся теле нельзя установить единое время. Время не только течет по-разному в разных точках, но и понятия одновременности не существует.

Подведем итог. Уже в обычном (и привычном!) плоском пространстве — времени с телами, движущимися ускоренно, нельзя связать жесткую систему пространственных координат, в которой выполняется 3-мерная геометрия Евклида и течет единое время, как это можно сделать с телами, движущимися по инерции. За исключением специальных случаев (например, равномерно вращающийся диск), любая система отсчета будет с течением времени деформироваться, геометрические свойства ее (как говорят, свойства сопутствующего пространства системы отсчета) будут меняться, так же как и ход связанных с ней часов.

В ньютоновской физике жесткая декартова система отсчета могла быть задана положением в каждый момент начала отсчета и ориентации осей. В релятивистской теории, чтобы определить систему отсчета, надо задать не только движение и повороты одного ее участка (начала отсчета), но и всех других участков. Таким образом, системой отсчета является совокупность пробных частиц (с каждой из которых связаны часы), заполняющих всю интересующую нас область пространства и движущихся по нашему произвольному выбору.

Аналогичная ситуация имеет место и в ОТО. Различие заключается в том, что в СТО в отсутствие полей тяготения все-

гда можно перейти от неинерциальной системы отсчета к инерциальной и пользоваться ею во всей интересующей нас области пространства — времени. В ОТО этого сделать нельзя вследствие кривизны пространства — времени.

Обратимся теперь к математическому выражению указанных выше особенностей.

§ 4. Измерение времени и пространственных расстояний

В инерциальной системе отсчета СТО не обязательно пользоваться декартовыми пространственными координатами. Можно использовать любые криволинейные координаты, например, сферические. В общем виде преобразование от одних пространственных координат к другим записывается в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3). \quad (1.4.1)$$

Здесь индекс α пробегает значения 1, 2, 3, а x^1, x^2, x^3 обозначают три пространственные координаты.

Выражение для ds^2 примет теперь вид, отличный от (1.2.1). Вместо последних трех квадратов дифференциалов декартовых координат будет стоять выражение квадрата элемента пространственного расстояния в криволинейных координатах (взятое с обратным знаком). В сферических координатах это будет $-dl^2 = -(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2)$, и интервал запишется в виде

$$ds^2 = (dct)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.4.2)$$

В цилиндрических координатах

$$ds^2 = (dct)^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2. \quad (1.4.3)$$

Преобразование (1.4.1) означает, что мы от одной 3-мерной пространственной сетки координат перешли к другой, но система отсчета (см. § 3 этой главы) осталась прежней. При переходе к иной системе отсчета, произвольно движущейся относительно инерциальной системы, преобразование координат содержит уже время

$$x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, t). \quad (1.4.4)$$

Переход к равномерно вращающейся системе отсчета записывается в виде (Ω — угловая скорость)

$$x^1 = \tilde{x}^1 \cos \Omega t - \tilde{x}^2 \sin \Omega t,$$

$$x^2 = \tilde{x}^1 \sin \Omega t + \tilde{x}^2 \cos \Omega t,$$

$$x^3 = \tilde{x}^3,$$

или в цилиндрических координатах

$$r = \tilde{r}, \quad z = \tilde{z}, \quad \varphi = \tilde{\varphi} + \Omega t. \quad (1.4.5)$$

В этом случае, подставляя (1.4.5) в (1.4.3), мы видим, что в общем случае меняется все выражение для ds^2 :

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 \tilde{r}^2) dt^2 - 2\Omega \tilde{r}^2 d\tilde{\varphi} dt - d\tilde{z}^2 - \tilde{r}^2 d\tilde{\varphi}^2 - d\tilde{r}^2. \quad (1.4.6)$$

Теперь квадрат интервала является некоторой общей квадратичной формой:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (1.4.7)$$

Здесь (и в дальнейшем) по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование; латинские индексы пробегают значение 0, 1, 2, 3; x^1, x^2, x^3 обозначают пространственные координаты (вообще говоря, криволинейные), $x^0 = ct$ — координата времени; g_{ik} — функции координат и времени. При $i \neq k$ каждое слагаемое с произведением одинаковых дифференциалов входит в сумму дважды, например, $g_{01} dx^0 dx^1$ и $g_{10} dx^1 dx^0$. По определению всегда считается $g_{ik} = g_{ki}$.

Величины g_{ik} называются компонентами *метрического тензора*; они определяют, как говорят, метрику пространства — времени. Конкретный вид g_{ik} как функций координат и времени определяется не только свойствами пространства — времени, но и выбором системы отсчета, выбором пространственных координат в ней и выбором способа отсчета времени (временной координаты).

В выражении (1.4.7) содержатся все сведения о геометрических свойствах системы отсчета и свойствах времени. Как пользоваться этим выражением? Во-первых, для определения течения времени в некоторой точке, очевидно, надо считать x^1, x^2 и x^3 постоянными: $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$. Тогда ds будет расстоянием во времени между двумя близкими событиями, т. е. умноженный на скорость света интервал времени $ds = c d\tau$. Следовательно,

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} dx^0. \quad (1.4.8)$$

В любой системе отсчета, образованной реальными телами, всегда $g_{00} > 0$.

Определим теперь пространственное расстояние dl . Это нельзя сделать, положив в (1.4.7) $dx^0 = 0, x^0 = \text{const}$. Дело в том, что одинаковым показаниям часов в разных точках пространства вовсе необязательно соответствует один и тот же момент реального времени. Поэтому, прежде чем проводить вычисление, надо определить, какому значению x^0 в соседней точке соответствует

«одновременное» данное значение x^0 в исходной точке. Такая синхронизация часов осуществляется с помощью световых сигналов. Мы не будем здесь останавливаться на вычислениях, отсылая интересующихся к учебнику Ландау и Лифшица (1962), и приведем сразу окончательную формулу для квадрата пространственного расстояния dl^2 :

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (1.4.9)$$

Величины, стоящие в скобке, обозначают через $h_{\alpha\beta}$. Они определяют метрику трехмерного пространства системы отсчета. Элемент объема 3-мерного пространства определяется выражением $dV = \sqrt{h} dx^1 dx^2 dx^3$; $h = |h_{ik}|$ — определитель матрицы, составленной из элементов h_{ik} .

Рассмотрим для примера тот же вращающийся диск. По формуле (1.4.8) находим из (1.4.6) для интервала времени (тильду над координатами в дальнейшем не пишем)

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} dt.$$

На оси вращения $r=0$ и $d\tau=dt$. Предыдущая формула теперь переписется в виде

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} d\tau_{\text{оси}}.$$

Время течет тем медленнее, чем дальше точка от оси вращения.

Для элемента пространственного расстояния (из 1.4.6) и (1.4.9) находим

$$dl = \sqrt{dr^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} + dz^2}. \quad (1.4.10)$$

С помощью (1.4.10) получаем, что при $z=\text{const}$, $r=\text{const}$, $dl = \frac{r d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}}$, и отношение длины окружности к диаметру

равно

$$\frac{l_{\text{окр}}}{d} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}},$$

т. е. больше π , в соответствии со сказанным в предыдущем параграфе.

Заметим, что если в данном месте поверхности отношение длины малой окружности к диаметру l/d меньше π , то

кривизна поверхности положительна и геометрия подобна геометрии на сфере. Если $l/d > \pi$, то кривизна отрицательна и геометрия подобна геометрии на псевдосфере (седлообразной поверхности).

Численно кривизна характеризуется квадратом радиуса кривизны a^2 , который определяется следующим образом. На поверхности чертится малый треугольник, стороны которого — кратчайшие линии — (геодезические). Обозначим через Σ сумму углов треугольника. Можно доказать, что разность $\Sigma - \pi$ пропорциональна площади треугольника S :

$$\Sigma - \pi = \tilde{C}S.$$

Коэффициент пропорциональности \tilde{C} носит название кривизны, а величина $a = 1/\tilde{C}^{1/2}$ — радиуса кривизны. Если $\Sigma > \pi$, то $\tilde{C} = 1/a^2 > 0$ — кривизна положительна. Если $\Sigma < \pi$, то $\tilde{C} = 1/a^2 < 0$ — кривизна отрицательна, a — мнимо. Чем меньше $|a^2|$, тем больше кривизна и геометрия сильнее отличается от евклидовой.

Кривизна 3-мерного пространства в данной точке определяется следующим образом. Через точку проводится геодезическая поверхность (аналог плоскости в евклидовом пространстве) и определяется ее кривизна. Эта кривизна называется римановой кривизной пространства в данном двумерном направлении. В разных направлениях кривизна может быть разная. Кривизна, усредненная по всем направлениям, носит название гауссовой кривизны пространства. Формулы для вычисления кривизны в общем случае мы выписывать не будем. Для важных частных случаев формулы даны в конце § 8 этой главы.

Приведем в заключение параграфа пример *нестатической*, т. е. деформирующейся с течением времени системы отсчета с отрицательной кривизной сопутствующего пространства.

Рассмотрим в пространстве — времени Минковского совокупность частиц, вылетающих в некоторый момент из одной точки со всевозможными скоростями по всем направлениям. Мировые линии таких частиц заполняют внутреннюю часть светового конуса. Систему отсчета, связанную с частицами, назовем системой Милна (рассматривавшего такую модель).

Переход от сферических координат \tilde{r} , $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}$ недеформирующейся системы отсчета и лабораторного времени \tilde{t} к координатам Милна ψ , θ , φ и собственному времени частиц t дается формулами

$$t^2 = \tilde{t}^2 - \tilde{r}^2, \quad \text{th } \psi = \frac{\tilde{r}}{\tilde{t}},$$

$$\theta = \tilde{\theta}, \quad \varphi = \tilde{\varphi}.$$

Подставляя эти преобразования в $ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2)$, получаем выражение для ds^2 в системе Милна:

$$ds^2 = d(ct)^2 - (ct)^2 [d\psi^2 + \text{sh}^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

В фиксированный момент времени проведем через начало координат экваториальную плоскость $\theta = \pi/2$. Очевидно, отношение длины экватора $l = 2\pi ct \text{sh} \psi$ к диаметру: $d = 2\psi ct$, $\frac{l}{d} = \pi \frac{\text{sh} \psi}{\psi} > \pi$. Таким образом, расширяющееся сопутствующее пространство этой системы имеет отрицательную кривизну.

§ 5. Некоторые формулы для криволинейных координат

В СТО вводится понятие 4-мерного вектора (4-вектора) B_i как совокупности четырех величин (функций координат и времени), которые при преобразовании Лоренца преобразовываются как координаты x^i . Примерами 4-вектора являются 4-скорость $u^i = \frac{dx^i}{ds}$, 4-импульс или 4-потенциал электромагнитного поля A_i . 4-тензор второго ранга B_{ik} определяется как совокупность величин, преобразующихся как произведение координат $x^i x^k$. Примером тензора является тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

По аналогии с тензором второго ранга вводится понятие тензора третьего и более высоких рангов.

В инерциальных системах СТО пользуются галилеевыми координатами, в которых интервал записывается в виде (1.2.1). При переходе к криволинейным координатам в 4-мерном пространстве — времени понятие тензора и вектора обобщаются. Прежде всего вводится понятие *ковариантных* и *контрвариантных* компонент вектора.

Контрвариантным 4-вектором называется совокупность величин B^i (с индексом сверху), которые при преобразовании координат $x^i = x^i(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ преобразуются по закону:

$$B^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \tilde{B}^k. \quad (1.5.1)$$

Контрвариантным вектором является, например, совокупность дифференциалов координат dx^i , поскольку $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k$.

Ковариантные компоненты того же вектора B_i (с индексом внизу) определяются следующим образом:

$$B_i = g_{ik} B^k. \quad (1.5.2)$$

Из определения g_{ik} как коэффициентов в (1.4.7) следует закон их преобразования $g_{ik} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} \tilde{g}_{lm}$. Используя этот закон и (1.5.2), находим закон преобразования для ковариантных компонент вектора:

$$B_i = g_{ik} B^k = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} \tilde{g}_{lm} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^n} \tilde{B}^n = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \tilde{B}_l. \quad (1.5.3)$$

По аналогии обобщается понятие тензора: для контрвариантного тензора B^{ik}

$$B^{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^m} \tilde{B}^{lm}, \quad (1.5.4)$$

для его ковариантных компонент

$$B_{ik} = g_{il} g_{mk} B^{lm} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} \tilde{B}_{lm}. \quad (1.5.5)$$

Можно использовать также смешанные компоненты:

$$B^i_k = B^{il} g_{lk} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m} \tilde{B}^m_l. \quad (1.5.6)$$

Аналогично обобщается понятие тензора более высокого ранга.

Компоненты g_{ik} , как показывает закон их преобразования, составляют тензор. Этот тензор играет в теории фундаментальную роль и носит название *фундаментального метрического тензора*.

Определитель

$$g = |g_{ik}| \quad (1.5.7)$$

называется *фундаментальным определителем*.

Величины

$$g^{ik} = \frac{A^{ik}}{g}, \quad (1.5.8)$$

где A^{ik} — алгебраические дополнения элемента g_{ik} , называются *контрвариантными компонентами метрического тензора*.

Из (1.5.8) следует, что

$$g_{il} g^{lm} = \delta_l^m, \quad (1.5.9)$$

где δ_m^l — символ Кронекера. Отсюда, используя (1.5.5), находим

$$B^{ik} = g^{il} g^{mk} B_{lm}. \quad (1.5.10)$$

Таким образом, если опускание значков производится с помощью ковариантных компонент g_{ik} , то их поднятие — с помощью контрвариантных компонент g^{ik} .

Смешанный тензор g^i_k равен символу Кронекера $g^i_k = \delta^i_k$. Образуем величину $A^i B_i$. Она является аналогом скалярного произведения векторов и не изменяется при преобразовании координат. В частности, квадрат длины вектора есть

$$A^2 = A^i A_i. \quad (1.5.11)$$

Аналогично можно сопоставить скаляр из двух тензоров

$$A^{ik} B_{ik} = A_i^k B_k^i = A_{lk} B^{lk}.$$

Все три записи эквивалентны. В частности, если второй тензор — фундаментальный, то $A^{ik} g_{lk} = A_l^i$ называют *следом* тензора.

Подобным же способом из тензоров высшего ранга можно образовывать тензоры более низкого ранга. Например,

$$A^i_{klm} g^m_i = A^i_{kll} = A_{kl}.$$

Такая операция называется *свертыванием* тензоров.

В криволинейных координатах обобщается также понятие дифференцирования векторов и тензоров. Ковариантной производной (обозначается точкой с запятой) контрвариантного вектора и ковариантного вектора называются величины (тензоры) соответственно

$$B^l_{;k} = \frac{\partial B^l}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik} B^i, \quad (1.5.12)$$

$$B_{i;k} = \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} B_l. \quad (1.5.13)$$

Здесь Γ^l_{mn} — символы Кристоффеля (не тензоры!), определяемые выражениями

$$\Gamma^l_{mn} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} \right). \quad (1.5.14)$$

В декартовых координатах, очевидно, все $\Gamma^l_{mn} = 0$, и ковариантное дифференцирование сводится к обычному.

Аналогично дифференцируются тензоры:

$$B^{ik}_{;l} = \frac{\partial B^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} B^{mk} + \Gamma^k_{ml} B^{im}, \quad (1.5.15)$$

$$B^l_{k;l} = \frac{\partial B^l_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} B^l_m + \Gamma^l_{ml} B^m_k, \quad (1.5.16)$$

$$B_{ik;l} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} B_{mk} - \Gamma^m_{kl} B_{im}. \quad (1.5.17)$$

Полезно заметить, что из (1.5.12) и (1.5.14) и выражения для ds^2 можно получить следующее выражение для ковариантной расходимости вектора:

$$B^l_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} B^l}{\partial x^i}. \quad (1.5.18)$$

Наконец, приведем уравнение в криволинейных координатах, определяющее геодезическую линию, соединяющую в 4-мерном пространстве две точки (в плоском пространстве это прямая):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^l_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (1.5.19)$$

Движение тела по инерции в пространстве Минковского, как известно из СТО, изображается прямой (времениподобной) линией. Следовательно, (1.5.19) есть уравнения движения тела по инерции, записанные в криволинейных координатах неинерциальной системы отсчета.

§ 6. Динамические и кинематические величины

Величины g_{ik} в (1.4.7) состояются из производных преобразования (1.4.4), определяющего движение системы отсчета относительно исходной инерциальной системы. В частности, в g_{ik} входят $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0}$, т. е. скорости. Поэтому естественно, что g_{ik} содержит информацию не только о течении времени и геометрии системы, но и о ее ускорениях и деформации. Приведем здесь окончательные формулы для вычисления динамических и кинематических величин, отсылая за подробностями к работам А. Л. Зельманова (1944, 1959b). Трехмерный вектор F^α ускорения, которое испытывает относительно системы отсчета свободное покоящееся в данный момент в этой системе тело, определяется, как будет показано ниже, выражением

$$F^\alpha = - \frac{c^2 \Gamma_{00}^\alpha}{g_{00}} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (1.6.1)$$

Величины Γ_{00}^α определены в предыдущем параграфе (см. (1.5.14)), F^α образует в системе отсчета поле инерциальных сил. F^α является трехмерным вектором и для операций с ним надо использовать тензор $h_{\alpha\beta}$ (см. § 4 этой главы). Напомним, что для вычисления величины вектора F^α (в данном случае 3-мерного), т. е. величины ускорения, необходимо образовать скаляр (см. (1.5.11)):

$$F = \sqrt{F^\alpha F_\alpha} = \sqrt{F^\alpha F^\beta h_{\alpha\beta}}.$$

Например, на вращающемся диске из (1.4.6) находим:

$$F^1 = \frac{\Omega^2 r}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}, \quad F^2 = F^3 = 0, \quad F = \frac{\Omega^2 r}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}.$$

Вращение системы отсчета, т. е. поле кориолисовых сил, определяется 3-мерным тензором угловой скорости вращения $A^{\alpha\beta}$. С помощью этого тензора можно вычислить 3-мерный вектор угловой скорости вращения *) $\tilde{\Omega}_\alpha$:

$$\tilde{\Omega}_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A^{\beta\gamma}. \quad (1.6.2)$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ определяется следующим образом: $\varepsilon_{123} = \left(-\frac{g}{g_{00}}\right)^{1/2}$; любая перестановка индексов меняет только знак компоненты; если хотя бы два значка совпадают, то $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Тензор угловой скорости вращения определяется с помощью выражений

$$A^{\alpha\beta} = \frac{-c}{\sqrt{g_{00}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^0} + g^{\alpha i} \Gamma_{i0}^\beta \right). \quad (1.6.3)$$

Скаляр $\tilde{\Omega} = \sqrt{\tilde{\Omega}_\alpha \tilde{\Omega}_\beta h^{\alpha\beta}}$ есть угловая скорость поворота за единицу собственного времени $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$.

Для вращающегося диска в цилиндрической системе координат имеем

$$A^{12} = -A^{21} = \frac{\Omega}{r \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}}.$$

Остальные $A^{\alpha\beta} = 0$. Вектор угловой скорости имеет компоненты:

$$\tilde{\Omega}_3 = \frac{\Omega}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}, \quad \tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_1 = 0.$$

В системе отсчета, в которой все $g_{0\alpha} = 0$, все $A_{\alpha\beta} = 0$. Если в некоторой области $A_{\alpha\beta} \neq 0$, т. е. система отсчета вращается, то в этой области нельзя синхронизовать часы. Для вращающегося диска это было показано выше. Если же $A_{\alpha\beta} = 0$, то это означает, что тело не вращается и преобразованием координаты времени $\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3)$ можно обратить все g_{0i} в нули, т. е. синхронизовать часы.

*) Мы обозначили здесь вектор $\tilde{\Omega}_\alpha$, чтобы не путать с вектором Ω релятивистской теории.

Пусть в некоторый момент тело покоится в данной системе отсчета. Тогда $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2$ и его 4-скорость имеет компоненты

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = g_{00}^{-1/2}; \quad u^\alpha = 0.$$

Из формулы (1.5.19) находим для пространственных компонент α :

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = -\frac{\Gamma_{00}^\alpha}{g_{00}}.$$

Подставляя выражение $ds^2 = c^2 d\tau^2$ и используя формулу (1.6.1), получаем

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\frac{c^2 \Gamma_{00}^\alpha}{g_{00}} = F^\alpha. \quad (1.6.1a)$$

Мы получили, что вектор ускорения свободной, покоящейся в данный момент частицы, действительно равен вектору действующей в системе инерциальной силы.

В частном случае стационарности метрики, т. е. при $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0} = 0$ выражение (1.6.1) переписывается в виде *)

$$F_\alpha = -\frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \right) / g_{00}. \quad (1.6.1b)$$

Наконец, деформация координатной системы определяется 3-мерным тензором $D_{\alpha\beta}$:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^0}. \quad (1.6.4)$$

Скаляр $D = D_\alpha^\alpha = D_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ — скорость относительного объемного расширения элемента объема системы dV . Если система с течением времени не деформируется, как, например, равномерно вращающийся диск, то $D_{\alpha\beta} = 0$.

Заметим, что F^α , $A^{\alpha\beta}$, Ω^α , $D^{\alpha\beta}$ не зависят от выбора координаты времени. Если мы будем преобразовывать координату времени [иными словами, по-разному выбирать единицу измерения времени (масштаб); кроме того, берется разное начало отсчета времени в разных точках системы отсчета]:

$$x^0 = x^0(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \quad (1.6.5)$$

то перечисленные величины вообще не меняются. Так и должно быть для величин, описывающих состояние движения системы

*) Точнее, для справедливости (1.6.1b) требуется только, чтобы $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g_{00}}{g_{00}^{1/2}} \right) = 0$.

отсчета, ибо преобразование (1.6.5) это состояние не меняет. Такие величины были названы А. Л. Зельмановым (1956) хронометрическими инвариантами. Далее, если менять только пространственные координаты, т. е. по-разному чертить координатную сетку системы отсчета:

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \quad (1.6.6)$$

то компоненты вектора F^{α} , например, меняются, аналогично изменениям компонент вектора при повороте декартовых координат, но сам вектор неизменен, неизменна его длина — скаляр F . То же относится к скалярам Ω , D .

Лишь при переходе к другой системе отсчета, т. е. к другому состоянию движения: $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$, $\partial x^{\alpha} / \partial \tilde{x}^0 \neq 0$ меняются и величины, его характеризующие, скаляры F , Ω , D .

§ 7. Кривизна пространства — времени

В предыдущих параграфах коротко перечислены геометрические и физические свойства неинерциальных систем в плоском пространстве—времени Минковского.

Согласно ОТО вблизи массивных тел пространство—время искривлено и является 4-мерным римановым пространством (точнее, псевдоримановым)*). В конечной (не малой) области этого 4-мерного пространства уже нельзя ввести галилееву систему координат, в которой интервал имел бы вид (1.2.1)

$$ds^2 = (dct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

но это можно сделать в малой области, введя в данном месте свободно движущуюся (свободно падающую в поле тяготения) систему отсчета. Такая система отсчета называется *локально галилеевой***). В локально галилеевой системе поле тяготения не проявляется — имеет место невесомость. Математически возможность выбрать такую систему, очевидно, связана с тем, что малый участок кривого пространства совпадает с плоским касательным пространством.

По отношению к локально галилеевой системе другие системы, в которых уже проявляется действие тяготения, движутся

*) Кривизна пространства — времени в ОТО не обязательно связана с присутствием вещества или (негравитационного) поля. Как будет видно из дальнейшего, ОТО предсказывает существование гравитационных волн, несущих энергию и вызывающих искривление пространства. С другой стороны, возможны нестационарные решения для пустого искривленного пространства — времени, описывающие анизотропную деформацию пространства и нигде не содержащие вещество (см. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников (1963)). Такие решения имеют особенность во времени.

***) Число таких систем в каждой точке — ∞^6 .

ускоренно, и переход от галилеевой в данной точке системы к этим системам есть просто переход в малой области от инерциальной системы к неинерциальным. Силы инерции и силы тяготения локально неразличимы. Следовательно, все формулы для геометрических, динамических и кинематических величин, приведенные в предыдущих параграфах и имеющие локальный характер, т. е. описывающие свойства системы в малой области в данный момент времени, будут справедливы и в общем случае кривого пространства—времени. Вычисление длин, промежутков времени гравитационно-инерциальных сил, вращения и т. д. производится в ОТО по приведенным выше формулам. Подчеркнем только, что теперь уравнения (1.5.19) определяют в произвольных координатах не прямую, а экстремальную в кривом пространстве—времени геодезическую линию (в искривленном пространстве—времени, очевидно, не может быть прямых линий; аналогами их являются геодезические).

Обратимся теперь к математическим средствам описания кривизны четырехмерного пространства—времени. Эта кривизна характеризуется тензором четвертого ранга:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl}. \quad (1.7.1)$$

Тензор R^i_{klm} носит название *тензора кривизны Римана*. Геометрический смысл этого тензора состоит в следующем. Пусть вектор из некоторой точки скользит вдоль малого замкнутого контура, составленного из геодезических линий так, чтобы угол вектора с геодезической не менялся (составляющие вектора по геодезическим линиям неизменны). В плоском пространстве—времени при возвращении в исходную точку вектор совпадает с первоначальным; в искривленном—ориентация вектора изменится (при неизменной длине!). Изменение компонент вектора A_k при обносе по контуру, огибающему малую двумерную поверхность Δf^{lm} , описывается формулой

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}.$$

Мы не будем здесь останавливаться на алгебраических и дифференциальных свойствах тензора кривизны. Отметим только, что число его независимых компонент равно 20.

Из тензора Римана путем операции свертывания (см. § 5 этой главы) можно получить тензор второго ранга:

$$R_{km} = R^i_{klm} g^l_i = R^i_{kim}. \quad (1.7.2)$$

Этот тензор симметричен:

$$R_{km} = R_{mk}; \quad (1.7.3)$$

он носит название тензора Риччи. Наконец, свертка R_{km} дает скаляр кривизны пространства:

$$R = R_{km}g^{km} = R^k_k. \quad (1.7.4)$$

Тензор R^i_{klm} полностью характеризует кривизну 4-мерного пространства—времени. В частности, равенство этого тензора нулю в некоторой области $R^i_{klm} = 0$ есть необходимое и достаточное условие того, что пространство—время в данной области неискривленное (плоское).

Равенство нулю скаляра $R=0$ и даже тензора $R_{ik}=0$ еще отнюдь не достаточно для того, чтобы пространство—время было плоским. Более того, поле тяготения вне материи как раз описывается уравнением $R_{ik}=0$.

§ 8. Уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения движения

Уравнения Эйнштейна определяют связь между кривизной пространства—времени и распределением и движением вещества и полей (кроме гравитационного). Они записываются в виде *)

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}R = \frac{\kappa}{c^2} T_{ik}. \quad (1.8.1)$$

Здесь $\kappa = 8\pi G/c^2$ — постоянная тяготения Эйнштейна, T_{ik} — тензор энергии — импульса, зависящий от распределения и движения вещества и электромагнитного поля (в принципе и других полей).

Для газа этот тензор в криволинейных координатах записывается в виде

$$T^{ik} = (\epsilon + P) u^i u^k - P g^{ik}. \quad (1.8.2)$$

Здесь $\epsilon = \rho c^2$ — плотность энергии вещества (включая и массу покоя частиц) в той системе отсчета, в которой элемент вещества покоится; P — давление. Мы считаем вязкость газа малой и пренебрегаем также потоком энергии относительно вещества по сравнению с ρc^3 .

Тензор энергии — импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} g_{lm} F^{il} F^{km} + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm}, \quad (1.8.3)$$

где F_{lm} — тензор электромагнитного поля. В СТО в декартовых координатах инерциальной системе отсчета тензор энергии — импульса удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial T^k_i}{\partial x^k} = 0, \quad (1.8.4)$$

*) О так называемом Λ члене в уравнениях Эйнштейна см. дополнение II.

которое, как известно, выражает закон сохранения энергии и количества движения.

Обобщением выражения (1.8.4) для криволинейных координат является равенство нулю ковариантной дивергенции:

$$T_{i;k}^k = \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^k T_i^l - \Gamma_{ik}^l T_i^k = 0. \quad (1.8.5)$$

Очень важно, что закон (1.8.5) следует из уравнений поля (1.8.1). Действительно, как показывается в учебниках, левая часть уравнений поля удовлетворяет соотношению

$$\left(R_i^k - \frac{1}{2} g_i^k R \right)_{;k} = 0. \quad (1.8.6)$$

Тем не менее, (1.8.5) не выражает непосредственно закон сохранения каких-либо величин (т. е. неизменности этих величин во времени), ибо для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство (1.8.4), а не (1.8.5) *).

Выражение (1.8.5) было бы правильнее называть уравнениями движения, так как они непосредственно выражают законы движения материи с учетом тяготения **). Чтобы это показать для случая T_{ik} газа, выберем систему отсчета, движущуюся вместе с веществом (сопутствующую систему отсчета), т. е. будем пользоваться лагранжевыми координатами и собственным временем каждого элемента вещества. Если же обозначим через E энергию объема V элемента вещества $E = \epsilon V$, то, используя (1.8.2), выражение (1.8.5) для нулевого индекса $i=0$ можно привести к виду

$$dE + P dV = 0, \quad (1.8.7)$$

а выражение (1.8.5) для пространственных значений индекса i записывается в виде

$$\frac{\partial P}{\partial x^\alpha} - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \frac{\partial P}{\partial x^0} = (\epsilon + P) \frac{F_\alpha}{c^2}. \quad (1.8.8)$$

Уравнение (1.8.7) описывает изменение энергии за счет работы сил давления при деформации газа, уравнения (1.8.8) определяют движение вещества в лагранжевых координатах. Очевидно, при переходе к нерелятивистскому случаю $g_{0\alpha} \rightarrow 0$, $\epsilon \gg P$, мы приходим в (1.8.8) к уравнениям Эйлера, записанным в лагранжевых координатах.

*) Только в случае (1.8.4) мы для суммы производных по пространственным координатам можем применить теорему Гаусса и перейти к интегралу по поверхности. В (1.8.5) этому мешают слагаемые, не имеющие вида обычной дивергенции.

***) Уравнения (1.8.4) также содержат уравнения движения в отсутствие поля тяготения.

Точные уравнения (1.8.8), в случае покоящегося вещества являются уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial P}{\partial x^\alpha} = (\varepsilon + P) \frac{F_\alpha}{c^2}. \quad (1.8.8a)$$

Подчеркнем, что справа стоит множитель $(\varepsilon + P)$, а не ε , как в нерелятивистской теории.

Запишем в криволинейных координатах закон сохранения числа исчезающих частиц (например, нуклонов). Пусть n_0 — плотность числа частиц в сопутствующей системе отсчета; составим 4-вектор

$$j^k = n_0 \frac{dx^k}{ds}. \quad (1.8.9)$$

Равенство нулю его ковариантной расходимости (см. (1.5.18))

$$j^k_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} \frac{dx^k}{ds} n_0 \right)}{\partial x^k} = 0 \quad (1.8.10)$$

означает сохранение с течением времени интеграла по трехмерному объему:

$$N = \int \int \int n_0 \frac{dx^0}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 = \int \int \int n_0 \frac{dx^0}{ds} \sqrt{g_{00}} dV. \quad (1.8.11)$$

Величина $n = n_0 \sqrt{g_{00}} \frac{dx^0}{ds}$ есть плотность распределения частиц в данной системе отсчета (см. ниже). Следовательно, полное число частиц N при выполнении (1.8.10) остается неизменным во времени.

Перепишем величину плотности распределения частиц $n = n_0 \sqrt{g_{00}} \frac{dx^0}{ds}$ через трехмерные величины. Определим прежде всего вектор трехмерной скорости v^α . Интервал собственного времени между двумя событиями в близких пространственных точках определяется выражением

$$cd\tau = \frac{g_{0i} dx^i}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Отсюда для компонент скорости получаем

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad v^2 = h_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = \frac{dl^2}{d\tau^2},$$

с помощью последнего выражения переписываем интеграл (1.8.11):

$$N = \int \int \int \frac{n_0 dV}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \left(1 + \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00} dx^0} \right)}}. \quad (1.8.12)$$

Выражение (1.8.12) отличается от обычной формулы специальной теории относительности только множителем $\left(1 + \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00} dx^0}\right)$ в знаменателе*). Этот множитель возник потому, что благодаря наличию компонент $g_{0\alpha}$ в выражении для интервала одновременному физическому моменту в разных (близких) пространственных точках соответствует разность координатного времени $\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}$.

Если в СТО использовать криволинейные четырехмерные координаты, в которых $g_{0\alpha} \neq 0$, то и там формула для числа частиц примет вид (1.8.12). Таким образом, в ОТО закон сохранения частиц записывается точно так же, как и в отсутствие тяготения. Это и не удивительно, так как тяготение, очевидно, никак не меняет числа частиц. В противоположность этому законы для импульса и энергии в ОТО пишутся иначе, чем в СТО, что связано с необходимостью учесть в общем балансе энергию и импульс поля тяготения.

Наконец, выпишем еще выражение для гауссовой кривизны трехмерного пространства (см. § 4 этой главы) сопутствующей системы отсчета в статическом случае (т. е. когда все $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$):

$$C_G = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}. \quad (1.8.13)$$

В случае изотропной (одинаковой по всем направлениям) деформации вещества и отсутствия вращения имеет место формула

$$C_G = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{1}{9} D^2. \quad (1.8.14)$$

Вывод приведенных формул см., например, в работе А. Л. Зельманова (1959b).

§ 9. Закон Ньютона и слабое поле тяготения

Рассмотрим слабое поле тяготения. В этом случае, очевидно, можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора мало отличаются от своих галилеевых значений (обозначенных индексом⁽⁰⁾):

$$\left. \begin{aligned} g_{ik} &= g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \\ g_{\alpha\beta}^{(0)} &= -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{0\alpha}^{(0)} = 0, \quad g_{00}^{(0)} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.9.1)$$

*) Множитель $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ описывает лоренцево сокращение объема.

Величины h_{ik} и их производные по координатам будем считать малыми. Рассмотрим простейший случай, когда поле создается медленно движущимися телами ($v/c \ll 1$) и электромагнитные поля слабы. Тогда, как показал еще Эйнштейн (см., например, А. Эйнштейн [1955]), можно так выбрать координаты, что уравнения тяготения запишутся (с точностью до малых первого порядка) в виде

$$\square h_{ik} = -\kappa \rho g_{ik}^{(0)}, \quad (1.9.2)$$

где \square — оператор Д'Аламбера

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial x^1{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2}.$$

Решение уравнений (1.9.2), как известно, записывается в виде запаздывающих потенциалов

$$h_{ik} = -\frac{\kappa g_{ik}^{(0)}}{4\pi} \int \left(\frac{\rho dV}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}}. \quad (1.9.3)$$

Написав решение (1.9.3) для неволновой зоны, получим

$$h_{ik} = -\frac{\kappa}{4\pi} g_{ik}^{(0)} \int \frac{\rho dV}{r} = -g_{ik}^{(0)} \frac{2\varphi}{c^2}, \quad (1.9.4)$$

где φ — ньютоновский потенциал тяготения. Выражения (1.9.1) теперь перепишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2} \right), \\ g_{11} &= g_{22} = g_{33} = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.9.5)$$

остальные $g_{ik} = 0$. Гравитационная сила F_α по формуле (1.6.1b) равна

$$F_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}.$$

Уравнения движения частицы (1.5.19) в случае метрики (1.9.5) сводятся в первом приближении к уравнениям

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\varphi}{c^2} \right). \quad (1.9.6)$$

Уравнения (1.9.6) соответствуют второму закону Ньютона. Таким образом, уравнения (1.9.4) и (1.9.6), следующие из уравнений Эйнштейна (1.8.1), в случае слабого поля содержат в себе теорию тяготения и механику Ньютона. С помощью метрики (1.9.5) можно получить первые поправки к теории Ньютона.

По формуле (1.4.8) для интервала времени находим

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 = \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} dt \approx \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right) dt. \quad (1.9.7)$$

На бесконечности $\varphi=0$ и $d\tau_\infty=dt$. Вблизи тяготеющих масс темп течения времени меньше, чем на бесконечности:

$$d\tau = \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right) d\tau_\infty. \quad (1.9.8)$$

Из формулы (1.9.8) следует, например, что колебания в атомных системах в поле тяготения происходят с меньшей частотой (по часам далекого наблюдателя). Следовательно, кванты света, испущенные такими системами, будут восприняты наблюдателем как кванты с меньшей частотой, т. е. как покрасневшие. Это — знаменитое гравитационное красное смещение, одно из первых наблюдательных предсказаний ОТО. Мы еще вернемся к этому вопросу при анализе точного решения уравнений Эйнштейна для сильного поля тяготения.

Если теперь, при написании уравнений движения для метрики (1.9.5) отказаться от предположения о малости скорости пробной частицы (что предполагалось в (1.9.6)), то из них легко получить два других известных вывода ОТО, уточняющих теорию Ньютона: вековое смещение перигелия орбиты Меркурия и отклонение луча света, проходящего вблизи Солнца. Мы вернемся к этим вопросам в параграфах о сильном поле тяготения.

Наконец, откажемся от предположения о пренебрежимой малости скоростей масс, создающих поле; тогда, написав сами уравнения поля с точностью до величин более высокого порядка малости, чем (1.9.1), можно получить первые исчезающие поправки $h_{0\alpha}$ в пространственно-временных компонентах метрического тензора.

Оказывается, что при надлежащем выборе координат величины $h_{0\alpha}$ в первом приближении определяются формулами

$$h_{0\alpha} = -\frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{\rho v^\alpha}{cr} dV, \quad (1.9.9)$$

где v^α — компоненты трехмерной скорости вещества. Посмотрим, к каким следствиям приводят эти поправки.

В § 6 этой главы было показано, что если в системе отсчета имеются отличные от нуля $h_{0\alpha}$ (неустранимые преобразованием координаты времени), то система вращается, т. е. в ней действуют силы Кориолиса. В случае малого отличия метрики g_{ik} от галилеевой и стационарности $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0} = 0$ формулы § 6 для

определения вектора угловой скорости вращения системы Ω сводятся к следующему результату

$$\Omega = \frac{c}{2} \overrightarrow{\text{rot}}(g_{01}, g_{02}, g_{03}), \quad (1.9.10)$$

где $\overrightarrow{(g_{01}, g_{02}, g_{03})}$ обозначает вектор с компонентами g_{01}, g_{02}, g_{03} . Из уравнений (1.9.9) и (1.9.10) следует, что вблизи вращающегося тела в гравитационном поле возникает поле кориолисовых сил, т. е. местная инерциальная система отсчета вращается относительно далекой от тела инерциальной системы.

Рассмотрим для примера вращающуюся полую сферу. Заметим, что в ньютоновской теории силы тяготения не зависят от движения вещества, и внутри полой сферы в ньютоновском приближении $\varphi = \text{const}$, гравитационных сил нет. Действительно, в силу сферической симметрии решение ньютоновского уравнения в пустоте $\nabla \varphi = 0$ должно иметь вид $\varphi = \frac{a}{r} + \text{const}$. Из отсутствия особенности в центре следует $a = 0$, $\varphi = \text{const}$.

Вычислим теперь компоненты $h_{0\alpha}$ внутри однородной полой сферы массы M и радиуса R , вращающейся с угловой скоростью ω . С помощью (1.9.9) находим (вычисления приведены в приложении к параграфу)

$$\left. \begin{aligned} h_{10} &= \frac{4GM\omega}{3c^3R} \tilde{r} \sin \theta \sin \varphi, \\ h_{20} &= -\frac{4GM\omega}{3c^3R} \tilde{r} \sin \theta \cos \varphi. \\ h_{30} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9.11)$$

Здесь \tilde{r}, θ и φ сферические координаты точки внутри сферы.

Из (1.9.11) определяем по формуле (1.9.10) вектор Ω :

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= 0, \\ \Omega_2 &= 0, \\ \Omega_3 &= -\frac{4}{3} \frac{GM\omega}{c^2R}, \\ \Omega^2 &= \Omega_\alpha \Omega^\alpha = \frac{16G^2M^2\omega^2}{9c^4R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9.12)$$

Таким образом, вращение сферы приводит к возникновению кориолисовых сил внутри сферы. Это явление аналогично возникновению магнитных сил внутри вращающейся заряженной сферы.

Подчеркнем, что наблюдатель внутри сферы, если он не может получить информацию из областей вне сферы, никаких кориолисовых сил не обнаружит. Действительно, внутри сферы

прецессия гирокомпасов (система гироскопов, указывающих неизменное направление в инерциальной системе отсчета) во всех точках одинакова и поэтому обнаружить ее невозможно. Только сравнив свою инерциальную систему с инерциальной системой вне сферы на бесконечности, наблюдатель обнаружит, что его система медленно прецессирует.

Аналогичный эффект вызывает вращение тела и во внешнем поле. Приведем сразу окончательную формулу

$$|\Omega| = \frac{G|K|}{c^2 r^3} (3 \cos^2 \theta + 1)^{1/2}, \quad (1.9.13)$$

где K — полный момент тела.

Наличие кориолисовых сил означает, что инерциальный компас (система гироскопов), который вдали от движущихся масс указывает на одни и те же далекие звезды, будет вблизи вращающегося тела поворачиваться с указанной угловой скоростью, меняя ориентацию относительно далеких звезд.

Скорость прецессии гирокомпаса у полюса вращающегося тела ($\theta=0$) в два раза больше, чем у экватора ($\theta=\pi/2$). При этом у полюса прецессия происходит в ту же сторону, что и вращение звезды, а у экватора — в противоположную сторону.

Для однородного шара, вращающегося с частотой ω , формула (1.9.13) может быть переписана в следующем виде:

$$|\Omega| = \frac{2GM}{5c^2 R} (3 \cos^2 \theta + 1)^{1/2} |\omega| \left(\frac{R}{r}\right)^3 \quad (1.9.14)$$

Вблизи обычных звезд и планет прецессия ничтожно мала (хотя в принципе измерима!). Так, у полюса Солнца $\Omega_{\odot} \approx \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ сек}^{-1} \approx 30 \text{ угл} \cdot \text{сек/год}$. У поверхности Земли $\Omega_{\oplus} \approx \approx -0,1 \text{ угл} \cdot \text{сек/год}$ на экваторе и $0,2 \text{ угл} \cdot \text{сек/год}$ на полюсе (за положительное выбрано направление вращения тела).

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 9

Вычислим смешанные компоненты метрического тензора внутри полый однородной вращающейся сферы. Эти компоненты вычисляются по формуле (1.9.9):

$$h_{0\alpha} = -\frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{\rho v^{\alpha}}{cr} dV. \quad (1.9.1\text{п})$$

Здесь v^{α} — компоненты скорости сферы в декартовой системе координат, r — расстояние от элемента dV до данной точки. Перейдем под знаком интегрирования к сферическим координатам. Компоненты скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= v^1 = -\omega y = -R\omega \sin \varphi \sin \theta, \\ v_y &= v^2 = \omega x = R\omega \cos \varphi \sin \theta, \\ v_z &= v^3 = 0. \end{aligned}$$

Здесь ω — угловая скорость вращения, R — радиус сферы. Очевидно, компонента h_{03} равна нулю. Величину r в (1.9.1п) выразим через угловые координаты: $r = R \sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos \alpha}$, где $\eta = \tilde{r}/R$, \tilde{r} — радиальная координата точки, где вычисляются $h_{0\alpha}$, $\cos \alpha$ — угол между направлением из центра на эту точку интегрирования и на элемент на сфере dV . Заменяя ρdV на $\frac{M}{4\pi} \sin \theta d\varphi d\theta$, где M — масса сферы, $M/4\pi$ — поверхностная плотность, имеем для h_{01} и h_{02}

$$\begin{cases} h_{01} \\ h_{02} \end{cases} = -\frac{\kappa M \omega}{8\pi^2 c} \int \frac{\sin^2 \theta \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix}}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos \alpha}} d\varphi d\theta. \quad (1.9.2n)$$

Преобразуем знаменатель подынтегрального выражения. Прежде всего $\cos \alpha = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0)$,

где θ_0 , φ_0 и θ , φ — угловые координаты рассматриваемой точки и элемента интегрирования соответственно. Теперь можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos \alpha}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n P_n(\cos \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \left\{ P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta_0) + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_0) \cos [m(\varphi - \varphi_0)] \right\}, \quad (1.9.3n) \end{aligned}$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $P_n^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра. Первое слагаемое в фигурных скобках в (1.9.3п) после умножения на $\sin \varphi$ или $\cos \varphi$ и интегрирования по φ в пределах $0 \div 2\pi$ в выражении (1.9.2п) дают ноль. Далее, используя соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos [m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{ \sin [(m+1)\varphi - m\varphi_0] + \\ &+ \sin [\varphi(1-m) + m\varphi_0] \} d\varphi = \pi \sin \varphi_0 \delta_m^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos [m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{ \cos [(m+1)\varphi - m\varphi_0] + \\ &+ \cos [(1-m)\varphi + m\varphi_0] \} d\varphi = \pi \cos \varphi_0 \delta_m^1, \end{aligned}$$

где δ_m^1 — символ Кронекера, получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \begin{cases} h_{01} \\ h_{02} \end{cases} &= \frac{\kappa M \omega}{8\pi c} 2 \int_{-1}^1 P_1^1(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \eta^n P_n^1(x) P_n^1(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 \end{Bmatrix} dx = \\ &= \frac{\kappa M \omega}{6\pi c} \eta P_1^1(\cos \theta_0) \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 \end{Bmatrix} = -\frac{4GM\omega}{3c^3 R} \tilde{r} \sin \theta_0 \begin{Bmatrix} -\sin \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Последнее выражение и приведено в тексте (с небольшим изменением обозначений).

§ 10. Аналог зееман-эффекта в гравитационном поле вращающегося тела

В предыдущем параграфе показано, что гравитационное поле вращающегося тела отличается от поля невращающегося тела, подобно тому как в электродинамике вращающееся заряженное тело создает не только электростатическое, но и магнитное поле.

Оказывается, эта аналогия простирается еще глубже. Компоненты гравитационного поля $h_{0\alpha}$, аналогичные магнитному полю, вызывают изменение спектра излучателя, подобные эффекту Зеемана (Зельдович (1965 *a*)).

Ниже будет показано, что линия спектра атома с частотой ω_0 , испущенная на полюсе вращающегося тела и принятая далеким наблюдателем над полюсом, расщепляется на две компоненты с противоположной круговой поляризацией и с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$, Ω вычисляется по формуле (1.9.14).

В отличие от классического магнитного зееман-эффекта, гравитационный эффект является универсальным, т. е. расщепление линии не зависит от конкретных свойств системы, испускающей свет. Оно одинаково для атома и молекулы, в оптическом и в радиодиапазоне.

Для доказательства рассмотрим линейный осциллятор на полюсе вращающегося тела. Аналогично маятнику Фуко, осциллятор все время колеблется в одном и том же направлении в местной инерциальной системе, т. е. в направлении, неизменном относительно местного инерциального компаса. С точки зрения наблюдателя, находящегося рядом, осциллятор испускает плоскополяризованную волну, которую можно рассматривать как суперпозицию двух волн с равной частотой, поляризованных по кругу в разные стороны.

Но относительно далекого наблюдателя инерциальный компас прецессирует с угловой скоростью Ω (см. § 9). Следовательно, с той же скоростью поворачивается и плоскость поляризации. Линейно поляризованный свет с поворачивающейся плоскостью поляризации, очевидно, представляет собой суперпозицию двух волн, поляризованных по кругу, но с различными частотами $\omega_0 \pm \Omega$. Итак, мы доказали, что свет, испущенный рядом, колеблющимся в центральном поле сил на полюсе вращающегося тела, воспринимается далеким наблюдателем как совокупность волн с круговой поляризацией, расщепленных по частоте. В силу принципа соответствия между квантовой теорией и классической механикой очевидно, что этот результат останется справедливым для любой атомной или молекулярной системы.

Альтернативное описание явления заключается в том, что право- и левополяризованные по кругу кванты испытывают

различное красное смещение в поле тяготения. Таким образом, здесь имеет место частный случай влияния момента вращения частицы (кванта) на движение частицы в гравитационном поле.

Из симметрии задачи ясно, что это различие целиком связано с вращением тела, создающего поле тяготения. Изменение частоты кванта, равное Ω , не зависит от частоты кванта ω_0 и происходит в основном на пути порядка $1/2$ или $1/3$ радиуса тела; на Земле оно составляет примерно $2,5 \cdot 10^{-15}$ гц на $2 \div 3 \cdot 10^8$ см, т. е. 10^{-23} гц/см. Это изменение можно сравнить с измеренным Паундом и Ребкой красным смещением всех квантов (правых и левых) в основном статическом поле Земли:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dx} = \frac{g}{c^2} = 10^{-18} \text{ см}^{-1}.$$

Для квантов с энергией 14 кэв, частота которых $4 \cdot 10^{18}$ гц, изменение частоты равно 4 гц/см и влияние спина (круговой поляризации) жестких квантов неизмеримо мало. Для протона влияние направления спина на его вес, связанное с вращением Земли, порядка 10^{-28} веса протона.

§ 11. Излучение гравитационных волн

В пустоте компоненты h_{ik} , описывающие слабое гравитационное поле, удовлетворяют уравнениям

$$\square h_{ik} = 0. \quad (1.11.1)$$

Эти уравнения справедливы лишь при определенном выборе координатной системы, а именно такой, в которой *)

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h \right) = 0. \quad (1.11.2)$$

В произвольном слабом поле такую систему всегда можно выбрать (Гильберт (1917)). Уравнение (1.11.1) есть волновое уравнение, аналогичное уравнениям электродинамики. Следовательно, нестационарные поля тяготения распространяются в пространстве аналогично электромагнитным волнам.

Всегда можно преобразованием координат перейти к системе, в которой новые \tilde{h}_{ik} уже не будут удовлетворять (1.11.1). Ясно, что в этом случае на гравитационные возмущения накладываются неинерциальные движения системы отсчета (так же «возмущающие» h_{ik}); это и «портит» уравнения (1.11.1).

Чтобы отделить распространение истинных гравитационных возмущений, обусловленных кривизной пространства — времени,

*) По определению, $h_i^k = h_{im} g^{(0)mk}$, $h = h_i^i$.

от возмущений, связанных с произволом в выборе системы отсчета, надо рассмотреть распространение величины, не зависящей от выбора системы отсчета, т. е. какого-либо инварианта кривизны. Скалярная кривизна $R = R^i_i$ и инвариант $R_{ik}R^{ik}$ в пустоте, естественно, равны нулю. Простейшим инвариантом, не равным тождественно нулю в пустоте, является величина

$$C = R_{iklm}R^{iklm}.$$

В системе, где справедливо (1.11.1), изменения поля h_{ik} распространяются в виде волн с фундаментальной скоростью c . Изменение инварианта C , вычисленное в этой системе с помощью h_{ik} , очевидно, также распространяется с фундаментальной скоростью. Этот факт (на него обратил внимание Эддингтон (1934)) уже не зависит от выбора системы отсчета. Следовательно, «истинное» гравитационное возмущение (искривление пространства — времени) распространяется в виде волны с фундаментальной скоростью в любой системе отсчета. В противоположность этому «возмущения» h_{ik} , связанные с преобразованиями координат, можно заставить распространяться с любой скоростью; это не возмущения кривизны, а в определенном смысле математические фикции.

От каких величин зависит гравитационное возмущение? Рассмотрим малый участок пространства — времени с распространяющейся волной h_{ik} . В малой области волну можно считать плоской. Выберем ось x^1 вдоль направления изменения поля в пространстве (вдоль распространения волны). Если теперь

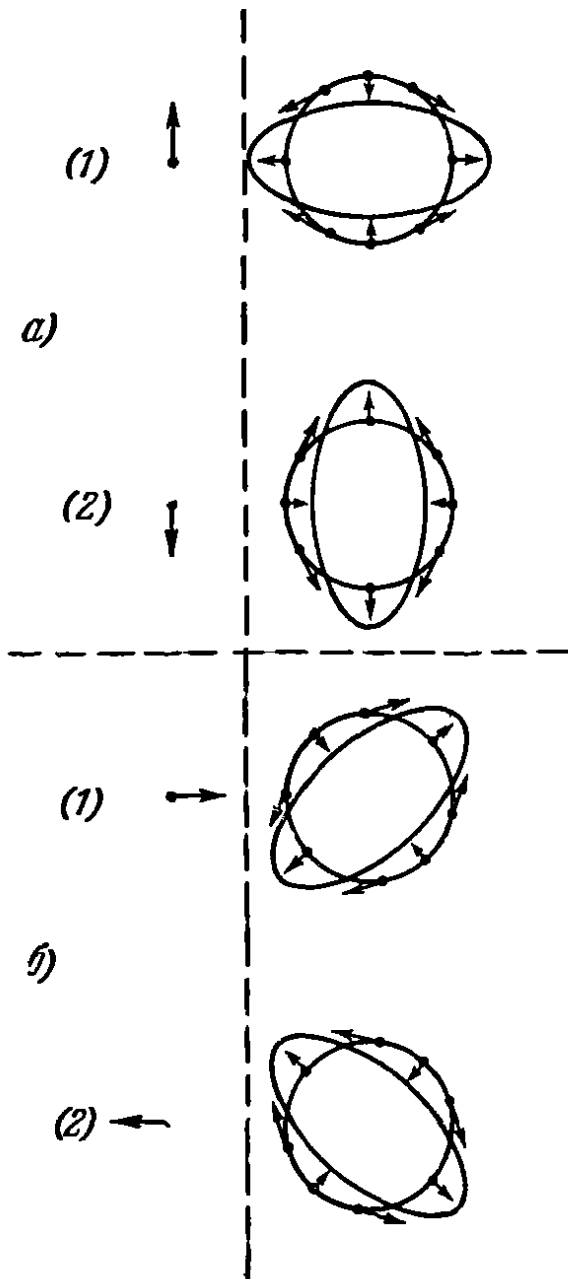


Рис. 3. Смещение пробных зарядов (точки слева) в поляризованной электромагнитной волне и пробных частиц (точки на окружности справа) в поляризованной гравитационной волне. а) Смещение частиц в противоположных фазах (1) и (2) одного состояния поляризации; б) Смещение частиц в противоположных фазах (1) и (2) второго состояния поляризации.

т. е. какого-либо инварианта кривизны. Скалярная кривизна $R = R^i_i$ и инвариант $R_{ik}R^{ik}$ в пустоте, естественно, равны нулю. Простейшим инвариантом, не равным тождественно нулю в пустоте, является величина

вычислить компоненты тензора Римана R_{iklm} , то окажется, что при выполнении уравнений поля $R_{ih}=0$, компоненты R_{iklm} зависят только от «поперечных» составляющих h_{22} , h_{23} и h_{33} , причем

$$\frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.11.3)$$

От этих же компонент зависит и скаляр S . Отсюда следует, что в гравитационной волне подходящим выбором координат всегда можно обратить в нуль все компоненты h_{ik} , кроме h_{22} , h_{23} и h_{33} . Это указывает на «поперечный» характер гравитационных волн.

Если далее рассмотреть пару свободных пробных частиц, то под действием проходящей гравитационной волны они приобретают относительное ускорение. Обозначим через r^α вектор, соединяющий близкие частицы. Рассматривая уравнение движения для близких частиц, можно показать, что

$$\frac{d^2 r^\alpha}{dt^2} = -c^2 R_{0\beta 0}^\alpha r^\beta. \quad (1.11.4)$$

Из компонент $R_{0\beta 0}^\alpha$ в волне отличны от нуля

$$\left. \begin{aligned} R_{0\ 20}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{22}}{\partial x^{02}}, \\ R_{0\ 30}^2 &= R_{0\ 20}^3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{23}}{\partial x^{02}}, \\ R_{0\ 30}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial x^{02}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11.5)$$

Компоненты R_{010}^α равны нулю. Поэтому если близкие частицы расположены вдоль распространения волны, то относительное ускорение их равно нулю. Максимальное относительное ускорение испытывают частицы, расположенные в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Таким образом, гравитационные волны действительно поперечные и определяются двумя величинами (учитывая (1.11.3)): h_{23} и $h_{22} - h_{33}$.

Подчеркнем, что в волне (как и в любом гравитационном поле) можно измерять только относительные ускорения, т. е. разности гравитационных полей. Мы еще вернемся к этому вопросу в гл. 2.

Две компоненты в волне h_{23} и $h_{22} = -h_{33}$ определяют два состояния поляризации. Однако, в отличие от электромагнитной волны, где независимое состояние поляризации определяется вектором колебания электрического поля, здесь поляризация носит тензорный характер. На рис. 3 изображено движение в полностью поляризованных электромагнитной и гравитационных

волнах пробных зарядов и масс соответственно (последние первоначально расположены по окружности).

Для того чтобы вычислить интенсивность гравитационного излучения системы движущихся тел, необходимо написать уравнения тяготения с точностью до малых величин более высокого порядка, чем это сделано в § 9. Мы не будем здесь останавливаться на вычислениях (Ландау и Лифшиц (1962)), а приведем сразу результат. Интенсивность излучения энергией системой dP в направлении единичного вектора \mathbf{n} в телесном угле $d\Omega$ есть *)

$$dL = \frac{G}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} (\ddot{K}_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)^2 + \frac{1}{2} \ddot{K}_{\alpha\beta}^2 - \ddot{K}_{\alpha\beta} \ddot{K}_{\alpha\gamma} n^\beta n^\gamma \right] d\Omega. \quad (1.11.6)$$

Здесь точка означает дифференцирование по t , $K_{\alpha\beta}$ — квадрупольный тензор масс:

$$K_{\alpha\beta} = \int \rho (3x^\alpha x^\beta - \delta_\alpha^\beta x_\gamma x^\gamma) dV. \quad (1.11.7)$$

Полная потеря энергии по всем направлениям дается выражением

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{K}_{\alpha\beta}^2. \quad (1.11.8)$$

Из выражений (1.11.6) — (1.11.8) наглядно видно, что излучение гравитационных волн является квадрупольным. Это низший возможный мультипольный порядок излучения. Дипольное излучение в теории тяготения возникнуть не может, очевидно, из-за того, что для всех тел отношение «гравитационного заряда» к «инертной массе» есть константа (см. § 1 гл. 1) и дипольный момент равен нулю.

Формулы мощности гравитационного излучения, записанные в виде, удобном для вычислений в астрофизических задачах, приводятся далее в § 12. (См. Дополнение III.)

§ 12. Гравитационное излучение двойных звезд

Рассмотрим гравитационное излучение двойной звезды для случая, когда поле можно считать слабым, $\varphi \ll c^2$. Эта задача для движения по эллиптической орбите детально проанализирована в работе П. Петерса и Дж. Мэтьюса (1963).

Пусть компоненты двойной звезды имеют массы m_1 и m_2 соответственно, и относительная эллиптическая орбита (т. е. движение одного тела относительно другого) определяется уравнением

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \psi}. \quad (1.12.1)$$

*) Обозначение для телесного угла Ω не следует путать с вектором угловой скорости поворота $\mathbf{\Omega}$, используемого в предыдущих параграфах.

Здесь a — большая полуось орбиты, e — эксцентриситет, ψ — истинная аномалия (полярный угол), r — радиус-вектор. С помощью уравнения (1.11.8) после усреднения по полному периоду обращения получается следующее выражение для полной потери энергии L на излучение гравитационных волн:

$$L = - \frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} f(e). \quad (1.12.2)$$

Зависимость от эксцентриситета определяется функцией $f(e)$:

$$f(e) = \frac{1 + \left(\frac{73}{24}\right) e^2 + \left(\frac{37}{96}\right) e^4}{(1 - e^2)^{7/2}}. \quad (1.12.3)$$

График этой функции изображен на рис. 4. С ростом эксцентриситета при фиксированном a излучение увеличивается. Причина этого состоит в том, что мощность излучения, как видно из (1.11.8), сильно зависит от изменения скорости, и происходит поэтому главным образом в периастре*), а чем больше эксцентриситет, тем ближе в периастре звезды, следовательно, сильнее ускорения и гравитационное излучение.

При движении по эллиптической орбите в излучении присутствует не только вторая гармоника частоты орбитального движения, как в квадрупольном излучении при круговом движении, но и другие гармоники.

Фурье-анализ дает следующее выражение для полного излучения на различных гармониках n :

$$L(n) = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} g(n, e), \quad (1.12.4)$$

где

$$g(n, e) = \frac{n^4}{32} \left\{ [J_{n-2}(ne) - 2eJ_{n-1}(ne) + \right. \\ \left. + \frac{2}{n} J_n(ne) + 2eJ_{n+1}(ne) - J_{n+2}(ne)]^2 + \right. \\ \left. + (1 - e^2) [J_{n-2}(ne) - 2J_n(ne) + J_{n+2}(ne)]^2 + \frac{4}{3n^2} [J_n(ne)]^2 \right\}. \quad (1.12.5)$$

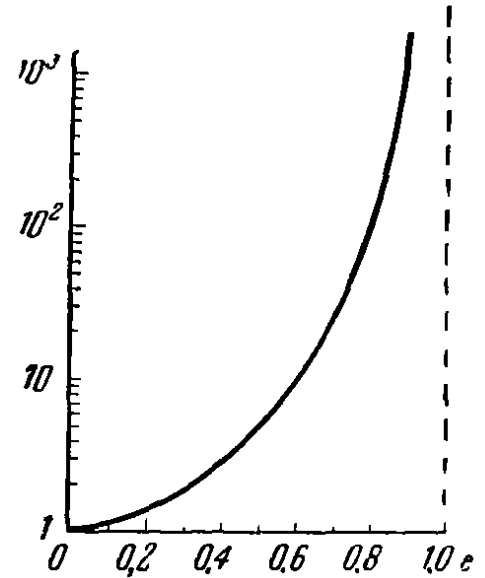


Рис. 4. Зависимость $f(e)$ излучения (в единицу времени, усредненного по периоду) от эксцентриситета орбиты e при постоянной большой оси орбиты a .

*) Периастром относительной орбиты называется точка орбиты, ближайшая к другой звезде.

Здесь J_n — функции Бесселя. Значения функции g в зависимости от n для $e=0,2; 0,5$ и $0,7$ изображены на рис. 5.

При больших эксцентриситетах излучение происходит главным образом на высших гармониках. Это объясняется тем, что излучение происходит, как отмечалось выше, в основном в периастре, т. е. в течение малой доли полного периода обращения.

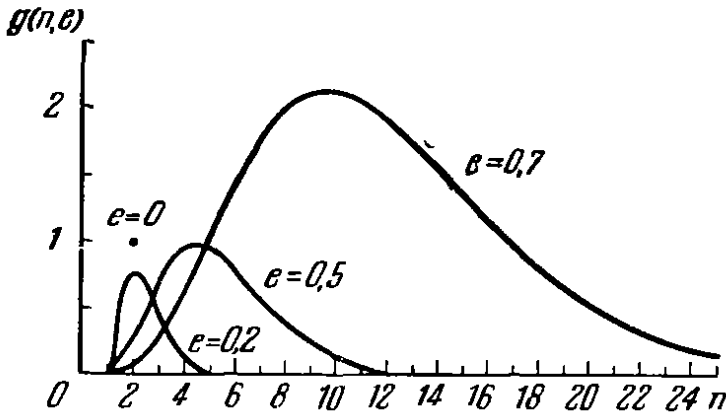


Рис. 5. Функция $g(n, e)$ относительной мощности излучения на разных гармониках для $e=0; 0,2; 0,5; 0,7$. Номер гармоники n может иметь только целые значения. При $e=0$ все излучение происходит на $n=2$.

Для круговой орбиты, используя (1.12.2) и (1.12.6), получаем следующую формулу для уменьшения радиуса орбиты (Ландау и Лифшиц, 1962):

$$\dot{a} = - \frac{64G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5 a^3}. \quad (1.12.7)$$

Для сильно вытянутых орбит \dot{e} имеет вид:

$$\dot{e} = \frac{\dot{a}}{a} (1 - e). \quad (1.12.8)$$

Рассмотрим теперь поляризацию излучения и распределение его по различным направлениям. Приведем здесь данные для движения по круговой орбите ($e=0$). Формулы для общего случая даны у П. Петерса и Дж. Мэтьюса (1963).

Распределения излучения по направлениям для двух независимых состояний поляризации, о которых сказано в предыдущем параграфе, определяются формулами

$$\frac{dL_1}{d\Omega} = \frac{1}{\pi} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} (1 + \cos^2 \theta)^2 \sin^2 2\varphi, \quad (1.12.9)$$

$$\frac{dL_2}{d\Omega} = \frac{4}{\pi} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} \cos^2 \theta \cos^2 2\varphi. \quad (1.12.10)$$

Излучение волн тяготения двойными звездами приводит к изменению орбиты. Подсчитаем изменение большой полуоси a . Полная энергия системы

$$E = - \frac{Gm_1 m_2}{2a}.$$

Следовательно,

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{Gm_1 m_2} \frac{dE}{dt}, \quad (1.12.6)$$

где $\frac{dE}{dt}$ определяется формулой (1.12.2).

Здесь θ — полярный угол, φ — разность долгот мгновенного положения радиуса-вектора и точки наблюдения. Множители $\sin^2 2\varphi$ и $\cos^2 2\varphi$ характеризуют зависимость от времени.

На полюсах ($\theta=0, \pi$) формулы (1.12.9) и (1.12.10) описывают круговую поляризацию гравитационной волны. Тензор относительного ускорения вращается с удвоенной частотой обращения звезд. Круговая поляризация гравитационных волн связана с тем, что в процессе излучения двойная звезда теряет не только энергию, но и момент вращения.

Угловое распределение полного излучения без разделения на компоненты поляризации, усредненное по периоду обращения, определяется формулой

$$\frac{dL}{d\Omega} = \frac{G^4}{2\pi c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} \times \\ \times (1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta). \quad (1.12.11)$$

Директриса распределения полного излучения по направлениям изображена на рис. 6. Излучение направлено главным образом к полюсам $\theta=0, \pi$.

Оценим мощность гравитационного излучения реальных астрономических систем. Для солнечной системы *) , подставляя в (1.12.2) данные для крупнейшей планеты — Юпитера, получаем $L = 5 \cdot 10^{10}$ эрг/сек. Это примерно в 10^{23} раз меньше светового излучения Солнца ($L_{\odot} \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг/сек).

Астрономам известны двойные звезды, мощность гравитационного излучения которых несравненно больше.

Приводим таблицу, заимствованную из работы В. Б. Брагинского (1965) для нескольких относительно близких двойных звезд.

Общий поток гравитационного излучения, падающий на Землю со всех направлений, определяется в основном не отдельными близкими системами, а всей совокупностью тесных двойных звезд (типа W UMa нашей Галактики, Мироновский

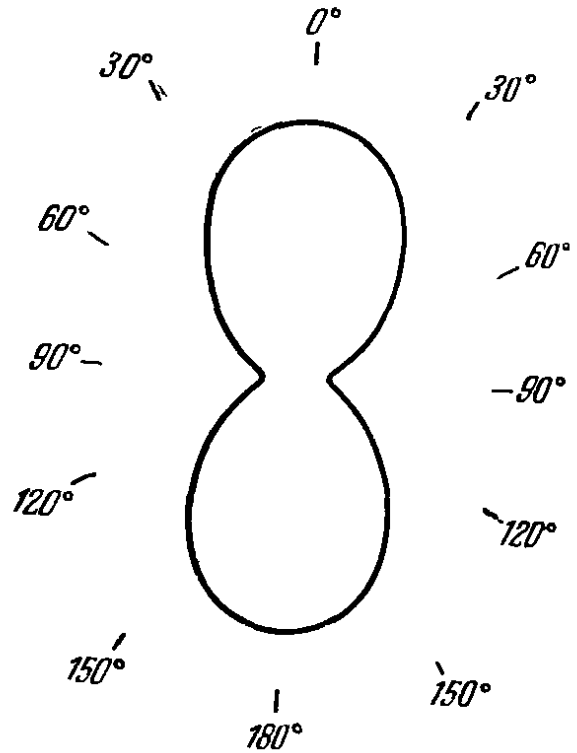


Рис. 6. Индикатриса гравитационного излучения для двойной звезды с круговой орбитой в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты.

*) Заметим, что высокочастотное гравитационное излучение имеет место при кулоновском рассеянии электронов в веществе Солнца. Мощность этого излучения около 10^{15} эрг/сек (Гандельман, Пинаев (1959); Мироновский (1965а)), что в 10^{18} раз меньше светового излучения.

Таблица I

Характеристики гравитационного излучения некоторых двойных звезд

Звезда	Период (сутки)	$\frac{m_1}{M_\odot}$	$\frac{m_2}{M_\odot}$	Расстояние от солнечной системы (см)	$\frac{dE}{dt}$, эрг/сек	Ожидаемый поток на Земле, эрг/сек см ²
UV Leo	0,6	1,36	1,25	$2,1 \cdot 10^{20}$	$1,8 \cdot 10^{31}$	$3,5 \cdot 10^{-12}$
V Pup	1,45	1,66	9,8	$1,2 \cdot 10^{21}$	$4 \cdot 10^{31}$	$2,3 \cdot 10^{-12}$
i Boo	0,268	1,35	0,68	$3,8 \cdot 10^{19}$	$1,9 \cdot 10^{30}$	$1,1 \cdot 10^{-10}$
YY Eri	0,321	0,76	0,50	$1,3 \cdot 10^{20}$	$2,6 \cdot 10^{29}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$
SW Lac	0,321	0,97	0,83	$2,3 \cdot 10^{20}$	$1,1 \cdot 10^{30}$	$1,7 \cdot 10^{-12}$
WZ Sge	81 мин.	0,6	0,03	$3 \cdot 10^{20}$	$3,5 \cdot 10^{29}$	$3 \cdot 10^{-13}$

(1965b)). Действительно, предположим для простоты, что плотность n_* двойных звезд в пространстве постоянна вплоть до расстояния R от нас, и мощность гравитационного излучения каждой звезды порядка L . Тогда поток излучения на Земле:

$$F_G = \int_0^R \frac{Ln_*}{4\pi r^2} 4\pi r^2 dr = Ln_* R,$$

т. е. поток определяется в основном далекими двойными системами. Ситуация здесь та же самая, что и с общей оптической освещенностью поверхности Земли звездами*). Подробные подсчеты, проведенные Мироновским (1965b), дают для F_G значение порядка 10^{-9} эрг/см² сек. Мощное гравитационное излучение должно возникать при некоторых катастрофических космических процессах. См. об этом далее § 11 гл. 3 и гл. 12.

Мы не останавливаемся здесь на задачах обнаружения гравитационного излучения. Интересующихся отсылаем к книге Дж. Вебера (1962) и обзору В. Б. Брагинского (1965).

*) Заметим, что освещенность Земли звездами далеких галактик мала из-за эффекта красного космологического смещения (см. раздел Космология). Поток излучения от звезд нашей Галактики на полтора порядка больше потока излучения звезд других галактик. По той же самой причине вклад в F_G двойных звезд далеких галактик несуществен.

ГЛАВА 2

НЕИЗБЕЖНОСТЬ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (ОТО) И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Введение

Прежде чем перейти к процессам в сильных гравитационных полях, мы остановимся на некоторых принципиальных вопросах. Для связности изложения здесь иногда кратко повторяются выводы предыдущих параграфов.

ОТО является теорией тяготения; она описывает тяготение как воздействие масс на свойства пространства и времени; в свою очередь эти свойства пространства и времени влияют на движение тел и другие физические процессы. Таким образом, теория тяготения резко отличается от теории других видов взаимодействия вещества: электромагнитного, ядерных сил и других.

Электромагнитное взаимодействие является наиболее изученным. Сходство между законом Кулона и законом тяготения Ньютона производит сильнейшее впечатление, как и сходство между планетной системой и системой электронов в атоме, которое является следствием сходства законов взаимодействия.

ОТО обладает огромной внутренней красотой и стройностью; построение ОТО потребовало введения одной константы — константы тяготения. Не раз отмечалась даже известная непропорциональность между мощностью теории и малым числом наблюдаемых выводов. Не следует забывать, однако, что следствиями ОТО являются:

1) сам закон Ньютона, 2) обоснование возможности применения этого закона к взаимодействию тел, окруженных безгранично простирающейся материей, 3) нестационарное космологическое решение Фридмана, т. е. хаббловское красное смещение спектров далеких объектов.

Только во вторую очередь следует назвать три известных экспериментальных факта, подтверждающих ОТО — смещение перигелия Меркурия, отклонение луча света, проходящего вблизи Солнца, и изменение частоты света в гравитационном поле.

§ 2. Единая теория поля, геометродинамика, фундаментальная масса и длина

За созданием ОТО последовали попытки аналогичным образом изложить теорию электромагнетизма, попытки геометризации электромагнитного поля и создания единой теории поля, объединяющей гравитацию и электромагнетизм. Все эти попытки не удалось. Гравитационное поле обладает универсальностью действия и сообщает одинаковое ускорение любым объектам. Эта универсальность делает возможным его описание изменением того пространства — времени, в котором все эти объекты движутся. Электромагнитное поле такой универсальностью не обладает, различные тела и частицы имеют разное отношение e/m и испытывают различные ускорения. Электромагнитное поле само создает гравитационные поля, пропорциональные квадратичным величинам, составленным из напряженностей электромагнитных полей. Грубо говоря, электромагнитное поле имеет энергию, и эта энергия имеет вес, как и всякая энергия.

Оказывается, что уравнения ОТО для пространства — времени, в котором есть электромагнитные поля, с необходимостью приводят к тому, что эти поля должны подчиняться уравнениям Максвелла. Этот результат можно сопоставить с тем известным фактом, что для «обычных» материальных тел (точечных масс или твердых тел) уравнения ОТО дают не только описание гравитационного поля, но и уравнения движения этих тел, т. е. включают в себя уравнения механики Ньютона. Уравнения Максвелла являются такими же уравнениями движения электромагнитных полей.

Отметим еще один важный пример вмешательства ОТО в теорию других негравитационных полей: из лагранжиана поля в кривом пространстве путем варьирования метрики пространства можно получить выражение тензора энергии — импульса рассматриваемого поля, притом сразу в явно симметричном виде ($T_{ik} = T_{ki}$).

Идея описания всех полей по создаваемым ими искривлениям пространства получила название *геометродинамики*. Наиболее последовательным ее выразителем является американский ученый Джон Арчибалд Уилер (J. A. Wheeler).

В последнее время привлекательность этой идеи поблекла, прежде всего в результате открытия и осознания разнообразия полей. В квантовой теории каждый сорт частиц описывается соответствующим полем: «световые» кванты — электромагнитное поле, π -, K -мезоны поля ядерных сил; то же относится и к двум сортам нейтрино и антинейтрино и т. д.

Ясно, что при таком разнообразии полей и частиц задание искривления пространства недостаточно, чтобы описать все поля и частицы, заполняющие пространство. Образно выражаясь, картина мира многоцветна, а гравитационное поле дает только черно-белую фотографию, по которой нельзя воспроизвести буйные цвета природы.

Принципиальные вопросы науки не решаются большинством голосов. Все же читатель должен знать, что подавляющее число физиков в настоящее время считают невыполнимой программу единой теории поля в смысле Эйнштейна, т. е. считают, что невозможно из одних уравнений ОТО получить все законы природы.

Если к величинам, входящим в ОТО (скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см·сек⁻¹, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см³сек⁻²г⁻¹) добавить квантовую постоянную Планка $h = 1,05 \cdot 10^{-27}$ см²сек⁻¹г, то получается набор, из которого можно построить величину размерности длины $l_g = 1,7 \cdot 10^{-33}$ см, времени $t_g = 6 \cdot 10^{-44}$ сек и массы $M = h^{1/2} c^{1/2} G^{-1/2} = 2 \cdot 10^{-5}$ г. Эта характерная масса гигантски превышает массы элементарных частиц, например, $m_e = 0,9 \cdot 10^{-27}$ г, $m_p = 1,6 \cdot 10^{-24}$ г.

Отсюда большинство физиков делает вывод, что теория элементарных частиц и, в частности, теория массы элементарных частиц — не связана с теорией гравитации и имеет совсем другой (пока не известный) фундамент *).

§ 3. Тяготение в плоском пространстве **)

Разочарование в единой теории поля породило новое направление в подходе к теории тяготения. Это направление можно изложить следующим образом. Бесспорно, ОТО является удовлетворительной теорией тяготения. Однако является ли ОТО единственно возможной, «неизбежной» теорией тяготения? (Наконец, мы подходим к тому вопросу, который вынесен в заголовок главы 2). Другие полевые теории могут быть развиты в рамках плоского пространства — времени. Нельзя ли и гравитацию рассматривать как особое поле, действие которого разыгрывается в плоском пространстве времени? Каковы должны

*) М. А. Марков (1966) и некоторые другие физики защищают точку зрения, согласно которой в глубокой основе теории элементарных частиц лежит все же гравитация и массы частиц в будущей теории получатся как величина $h^{1/2} c^{1/2} G^{1/2}$, умноженная на безразмерный множитель ($\sim 10^{-20}$), который будет следовать из теории.

***) Здесь и ниже, конечно, имеется в виду пространство Минковского; специальная теория относительности не подвергается ни сомнению, ни модификации.

быть свойства этого поля? Обязательно ли представление об искривлении пространства?

Начнем с разбора второго вопроса о свойствах предполагаемого поля.

Сходство между законом Кулона и законом Ньютона вселяет надежду на успех программы построения поля тяготения в плоском пространстве. Очень поучительно, что основные свойства искомой теории можно получить из простого мысленного эксперимента. Рассмотрим покоящуюся частицу, которая создает в окружающем пространстве потенциал $\varphi = a/r$. Потенциал частицы, движущейся с постоянной скоростью, можно получить из потенциала покоящейся частицы с помощью преобразований Лоренца, т. е. рассматривая то же самое поле $\varphi = a/r$ с точки зрения движущегося наблюдателя. Теперь рассмотрим не одну частицу, а совокупность частиц, движущихся по всем возможным направлениям и одновременно встречающихся в одной точке. Предполагается, что все направления равновероятны, так что эта совокупность частиц образует сферически-симметричную систему. Потенциал совокупности частиц получим путем суперпозиции (сложения) потенциала отдельных частиц. Ответ, который мы при этом получим, зависит от природы φ , т. е. от того, как ведет себя φ при лоренц-преобразовании, от трансформационных свойств φ .

Если φ есть скаляр, то оказывается, что для совокупности n движущихся частиц

$$\varphi = n\varphi_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

т. е. φ меньше, чем для покоящихся частиц. Если φ есть нулевая компонента 4-вектора, то $\varphi = n\varphi_1$, движение частиц не влияет на их потенциал и на создаваемое ими поле.

Наконец, если φ есть 0,0-компонента *) тензора второго ранга φ_{ik} , то получается

$$\varphi = \frac{n\varphi_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Второй случай как раз соответствует электромагнитной теории. Электроны в атоме движутся с большими скоростями (в тяжелых атомах порядка скорости света), однако это не меняет их наблюдаемого заряда, не нарушает точной компенсации заряда ядра зарядом электронов. Хорошо известно, что электростатиче-

*) По отношению к чисто пространственным поворотам потенциал φ во всех случаях ведет себя как 3-скаляр, а поле $\text{grad } \varphi$ как 3-вектор (вектор поля, силы).

ский потенциал φ есть нулевая компонента 4-вектора $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$, соответственно электрическое и магнитное поля вместе образуют тензор второго ранга $F_{ik} = -F_{ki}$.

Для гравитационного поля, очевидно, нужно выбрать третий вариант; φ как 0,0-компоненту тензора второго ранга. В этом (и только в этом) случае гравитационное поле n движущихся частиц оказывается пропорциональным сумме их масс. При этом автоматически учитывается, что масса движущейся частицы возрастает с увеличением скорости, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, в соот-

ветствии со специальной теорией относительности.

Можно еще иначе сформулировать результат. Принцип эквивалентности требует, чтобы различные тела испытывали одинаковое ускорение в поле тяготения, т. е. чтобы действующая на них сила была пропорциональна их массе. Третий закон Ньютона — равенство действия и противодействия — требует чтобы гравитационное поле тела было пропорционально его массе. Движение частиц, составляющих тело, увеличивает его массу. Следовательно, движение частиц должно увеличивать и создаваемое ими гравитационное поле, в отличие от электрического поля частиц, не зависящего от скорости заряда. Поэтому теория гравитационного поля должна отличаться от теории электромагнитного поля (несмотря на сходный вид в статическом случае; ср. выше о сходстве закона Кулона и закона Ньютона).

Гравитационный потенциал есть тензор второго ранга. Гравитационное поле имеет три индекса, $E_{00\alpha}$, где α соответствует пространственной координате.

Можно проследить и дальше сходство и различие гравитационного и электромагнитного полей. Переход от статического поля к полю движущегося тела производится путем лоренц-преобразования. При этом из компонент φ_{00} , $E_{00\alpha}$ получаются с коэффициентом v/c компоненты $\varphi_{0\beta}$, $E_{0\beta\alpha}$. Эти величины вполне аналогичны вектор-потенциалу и магнитному полю. Аналогия между полем тяготения движущегося (в частном случае — вращающегося) тела и магнитным полем движущихся зарядов отмечалась неоднократно.

Экспериментальное исследование «гравимагнитных» явлений сейчас оживленно дискутируется и, вероятно, будет осуществлено в ближайшие 5—10 лет. Такие опыты особенно интересны, потому что они подтвердят качественное отличие свойств гравитационного поля от простых ньютоновских представлений.

Выводы релятивистской теории тяготения в плоском пространстве совпадают с выводами ОТО для слабого поля тяготения (см. § 9—11 гл. 1). Это естественно, так как слабое поле

рассматривалось как тензор в плоском пространстве. Мы напомним некоторые выводы упомянутых параграфов.

В поле вращающегося тела, кроме потенциала φ_{00} , зависящего от массы тела, появляются компоненты $\varphi_{0\alpha}$, зависящие от вращения тела. Их знак меняется при изменении направления вращения тела. Частица, пролетающая мимо вращающегося тела, испытывает, кроме силы притяжения, еще и отклоняющую силу пропорциональную скорости частицы, наподобие лоренцовой силы, действующей на заряд, пролетающий в магнитном поле. Волчок (гироскоп), находящийся в поле вращающегося тела (например, Земли) не сохраняет постоянное направление оси, а прецессирует *) (см. § 9 гл. 1).

Напомним, что на полюсе Земли прецессия равна 0,2, а на экваторе — 0,1 угловых секунд в год. На поверхности нейтронной звезды (§ 5 гл. 10) при максимальной возможной скорости вращения соответствующей моменту $k \approx 0,02 GM^2/c^{**}$, прецессия гироскопа могла бы составить $\Omega \approx 50 \text{ сек}^{-1}$ радиан в секунду.

В. И. Пустовойт и А. А. Баутин (1964) показали, что прецессия гироскопа в поле вращающейся Земли в точности соответствует представлению о том, что у гироскопа, как и у Земли, есть гравимагнитные моменты, которые взаимодействуют так же, как два обыкновенных магнита. Наконец, оказалось, что воздействие гравимагнитного поля на колебательные и квантовые системы аналогично зееман-эффекту (см. § 10 гл. 1). Различие лишь в том, что зееман-эффект в магнитном поле зависит от отношения заряда электрона к его массе. Гравимагнитный зееман-эффект универсален: гравитационный заряд и масса для всех тел находятся в постоянном отношении (см. § 1 гл. 1).

В соответствии с дипольным характером (и так же как и в электромагнитном случае) гравимагнитный потенциал убывает как $1/r^2$, а поле как $1/r^3$, т. е. быстрее, чем статическое поле самой массы.

Еще быстрее убывают составляющие поля, зависящие от квадрупольного момента распределения масс и от неравномерного вращения массы, т. е. слагаемые более высокой мультипольности (по сравнению с диполем).

*) На большом расстоянии от Земли все виды поля тяготения обращаются в нуль и можно однозначно определить инерциальную систему координат, в которой центр Земли покоится. По отношению к этой системе координат однозначно определяется и угловая скорость прецессии. Фактически, как показывают наблюдения, эта система координат может быть определена как система, в которой постоянно положение на небе далеких астрономических объектов.

***) Предельно возможная скорость вращения определяется условием срыва вещества центробежной силой с экватора вращающегося тела.

Следующий, новый (по сравнению с теорией Ньютона) вывод, который дает релятивистская теория тяготения в плоском пространстве, заключается в существовании гравитационных волн (см. § 11 гл. 1). Уравнения поля таковы, что когда квадрупольный (или более высокий) момент тела меняется со временем, то в решении появляются также зависящие от времени квадрупольные составляющие, амплитуда которых убывает с расстоянием как $1/r$ — «волны». Подробнее см. в Дополнении III. Это значит, что на большом расстоянии от тела (больше длины волны) «волны» становятся сильнее, чем статические составляющие поля.

Уносимая волнами энергия пропорциональна квадрату амплитуды; плотность потока $\sim 1/r^2$, умноженная на поверхность сферы $4\pi r^2$, не зависит от расстояния, что соответствует конечному потоку излучаемой энергии.

В электромагнитном случае сохраняется заряд, а дипольный момент (магнитный и электрический) могут меняться со временем. В связи с сохранением заряда сохраняется и сферически-симметричная составляющая электрического поля (соответствующая закону Кулона), не существуют продольные сферически-симметричные волны, в которых эта составляющая менялась бы со временем. Низший мультиполь в электромагнитных волнах — это электрическое и магнитное дипольное излучение; поле волн поперечное.

Рассмотрим излучение гравитационных волн, действуя методом последовательных приближений. Без учета гравитационных волн сохраняются m масса, K — момент. Соответственно в пустом пространстве, окружающем систему, не могут меняться ни продольная сферически-симметричная статистическая составляющая (пропорциональная массе), ни гравимагнитная дипольная стационарная составляющая (пропорциональная моменту вращения). Следовательно, низший мультиполь гравитационных волн — квадруполь. С учетом излучения гравитационных волн мы должны иметь в виду, что уменьшается и масса, и момент вращающегося тела, а следовательно, меняются и продольная, и дипольная стационарные составляющие поля.

Гравитационные волны также не имеют продольной составляющей, т. е. они поперечны. Более того, наблюдаемыми являются только различия волновых полей в соседних точках на фронте волны, т. е. величины тензорного характера, например, на оси z — величины типа $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, $\frac{\partial E_x}{\partial y}$, $\frac{\partial E_y}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y}{\partial y}$. Образно говоря, наблюдаемые эффекты в гравитационной волне — это силы, которые стремятся гибкий круг, лежащий в плоскости волны, деформировать, превращая его в эллипс (см. § 11 гл. 1, рис. 3).

Силы, вызывающие смещение центра круга, не наблюдаемы: вместе со смещением центра на равную величину смещаются и другие тела, находящиеся в этой точке, наблюдаемы только разности смещений. Экспериментальное обнаружение гравитационного излучения (так же как и обнаружение гравимагнитных эффектов) является одной из важнейших задач ближайшего будущего. Гравитационное излучение взаимодействует с веществом гораздо слабее электромагнитного. Тем не менее, можно надеяться, что удастся за срок 5—10 лет обнаружить гравитационные волны от двойных звезд (см. § 12 гл. 1, § 11 гл. 3 и статью Брагинского (1965); см. также Вестервельт (1966)).

Таким образом, релятивистская теория тяготения в плоском пространстве (РТТПП) позволяет сделать весьма важные предсказания, выходящие за рамки ньютоновской теории тяготения. Еще раз подчеркнем, что перечисленные выводы РТТПП полностью согласуются с выводами ОТО. Исследование гравимагнитных эффектов или гравитационных волн не даст возможности выбрать между РТТПП и ОТО.

Следовательно, РТТПП нужно рассматривать вполне серьезно. Есть область, в которой РТТПП методически гораздо удобнее ОТО: это вопрос о квантовании гравитационного поля, который мы ниже вкратце рассмотрим.

К наиболее интригующему вопросу о том, какие же принципиальные причины не позволяют отказаться от ОТО, мы обратимся только в следующем параграфе.

Итак, обратимся к квантованию гравитационного поля. Теорию квантования, развитую для электромагнитного поля, нельзя непосредственно перенести на случай, когда роль поля играет искривление пространства. Между тем, если гравитационное поле рассматривается в плоском пространстве, т. е. в РТТПП, квантование такого поля не представляет принципиальных затруднений.

Важнейший результат заключается в том, что гравитационным волнам соответствуют кванты — «гравитоны», столь же реальные, как и кванты электромагнитного поля. Гравитоны представляют собой нейтральные частицы с массой покоя равной нулю, со спином равным 2 (в единицах \hbar , постоянной Планка), причем проекция спина на направление распространения может принимать только два значения, $+2$ или -2 ; суперпозиция волн с этими двумя значениями описывает все возможные состояния поляризации гравитационной волны. Гравитоны подчиняются статистике Бозе: возможны состояния, в которых многие гравитоны имеют одинаковый импульс, т. е. одинаковые частоту и длину волны. Как известно, такие состояния описываются классической (неквантовой) теорией поля; классическое описание тем точнее, чем больше число таких гравитонов. Гравитационное

излучение двойной звезды нет надобности описывать как поток гравитонов именно по той причине, что велик поток и применима классическая теория: точно так же излучение радиостанции мы описываем уравнениями Максвелла и не думаем о квантах.

Высокочастотные гравитоны, подобные гамма-квантам, отличаются весьма слабым взаимодействием с веществом из-за малости $Gm^2/\hbar c$, где m — масса элементарной частицы. Поэтому рождение и поглощение гравитонов во всех процессах на молекулярно-атомно-ядерном уровне представляет собой возможное в принципе, но крайне редкое экзотическое явление и не играет никакой заметной роли. В частности, рождение пар нейтрино (процесс, похожий на рождение гравитонов по своим последствиям) в 10^{10} раз сильнее рождения гравитонов.

Единственным исключением может быть ситуация вблизи сингулярного состояния в горячей модели Вселенной (см. ниже, гл. 18), при сверхвысоких плотностях и температурах: в этой ситуации гравитационного взаимодействия может оказаться достаточно для того, чтобы установилось термодинамическое равновесие между гравитонами и другими видами материи. В этом равновесии общая плотность энергии гравитонов равна плотности энергии электромагнитного излучения. Это равенство приближенно сохраняется и позже в ходе расширения. Наличие теплового электромагнитного излучения с температурой порядка 3°K (см. гл. 18), являющееся результатом расширения горячей в прошлом среды, позволяет предположить, что во Вселенной есть и фоновое тепловое (с планковским спектром для однородной изотропной космологической модели *) гравитационное излучение. Его средняя длина волны около $0,15\text{ см}$, частота $2 \cdot 10^{11}\text{ гц}$, плотность энергии $\sim 5 \cdot 10^{-13}\text{ эрг/см}^3$. Этот вопрос будет рассмотрен подробнее в гл. 18. Детектирование такого излучения необычайно трудное дело. Впрочем, в последнее время появляются новые идеи в области молекулярной генерации и детектирования гравитационных волн (Копвилем, Нагибаров (1965)).

Отметим одно распространенное неверное утверждение: говорят о том, что гравитационное взаимодействие представляет собой «обмен гравитонами». При этом иногда утверждают даже, что все частицы испускают гравитоны и при этом теряют энергию (см. К. П. Станюкович (1965); рецензия Я. Б. Зельдовича и Я. А. Смородинского, УФН 88, 199 (1966)).

В действительности, например, электромагнитное поле можно подразделить на продольные и поперечные компоненты **).

*) О возможности существования иной ситуации с фоновым гравитационным излучением см. гл. 18 и § 8 гл. 21.

**) Подразумевается, что поле разложено в интеграл Фурье, т. е. по «волнам» e^{ikx} , продольным и поперечным по отношению к направлению k .

Поперечные компоненты описывают распространяющиеся волны; их квантование приводит к понятию световых квантов как частиц с определенным импульсом и энергией и нулевой массой покоя. Продольные компоненты описывают кулоновское взаимодействие; их квантование не вносит ничего нового. Кулоновское поле стационарно, оно не зависит от времени: не существует квантов продольного поля, которые могли бы удаляться от источника поля.

Таким образом, электростатическое взаимодействие и испускание квантов — это два разных следствия одной теории; электростатическое взаимодействие не является результатом обмена свободными (поперечными) квантами.

Различный характер полей в смысле продольности и поперечности наглядно иллюстрирует нелепость буквального понимания термина «взаимодействие есть обмен квантами». Однако еще важнее помнить, что испускание волн, уносящих энергию, обязательно связано с ускоренным движением заряда в классической теории. В квантовой теории испускать кванты может лишь система, находящаяся в возбужденном состоянии. При этом система переходит, прямо или каскадно, в основное, нижнее состояние, и теряет способность испускать волны.

Между тем кулоновское поле существует у покоящегося заряда и у заряженной системы, находящейся в нижнем квантовом состоянии.

Это нужно иметь в виду и в случае ядерных сил. Теория скалярных мезонов (теория Юкавы; здесь не существенно, что мезоны псевдоскалярны, а не скалярны) предусматривает два факта:

- 1) существование свободных мезонов с определенной массой, со спином 0, подчиняющихся статистике Бозе;
- 2) взаимодействие нуклонов.

Когда мезонов много, можно говорить о классической теории мезонного поля; это поле скалярное, т. е. подобно полю температуры $T(\mathbf{r})$, а не векторному полю скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$; понятия продольных и поперечных волн здесь нет.

Однако и в мезонной теории остается в силе утверждение: испускать свободные мезоны может только ускоренно движущийся или возбужденный нуклон. Покоящийся нормальный нуклон создает вокруг себя мезонное поле, воздействующее на другие нуклоны, но это поле статическое, мезоны не испускаются, и нуклон, естественно, не теряет массы и энергии. Это видно также и из того, что статическое мезонное поле убывает экспоненциально с расстоянием, как $e^{-mcr/\hbar}$.

Гравитационное взаимодействие тел (ньютоновское притяжение) нельзя представлять себе как результат излучения грави-

тонов, сопровождающегося потерей энергии (массы) по обоим причинам: как из-за поперечности гравитонов, так и по энергетическим причинам. Идеи гравитационной потери энергии легко привести к абсурду простым сопоставлением: в этом случае почему не предположить потерю энергии электростатическую или связанную с ядерными силами, в 10^{40} раз более сильную?! Время изменения массы порядка 10^{10} лет (гравитационное) превратилось бы в 10^{-13} сек.

§ 4. *Неизбежность идеи кривизны пространства — времени*

Итак, РТТПП может быть полезной заменой ОТО в некоторых задачах, например, при квантовании. Но каково принципиальное соотношение между двумя теориями? Чрезвычайно ясный и поучительный анализ проблемы дал В. Тирринг (1961).

РТТПП количественно правильно описывает такие важнейшие эффекты, как отклонение луча света в поле тяготения и красное смещение кванта, испущенного осциллятором (атомом), находящимся вблизи тяжелого тела.

Первый эффект получается за счет того, что в этой теории уравнения Максвелла в пустом пространстве изменяются. Это изменение соответствует появлению показателя преломления, зависящего от гравитационного потенциала: это и необходимо, чтобы получить искривление светового луча. Но теперь оглянемся на то, какой ценой получено согласие с опытом: скорость распространения электромагнитных волн — скорость света — уже не равна фундаментальной константе c !

Обратимся ко второму эффекту — красному смещению линий.

В РТТПП в поле тяжелого тела есть система координат, в которой это тело покоится, и в этой системе есть определенное время, которое везде течет одинаково. Временной интервал между двумя событиями, происшедшими на поверхности тела, в точности равен временному интервалу между приемом двух соответствующих сигналов в удаленной точке *). Красное смещение объясняется тем, что гравитационный потенциал реально влияет на колебания осциллятора, замедляя их.

Время течет вблизи тела так же, как и на бесконечности, осциллятор колеблется медленнее, чем на бесконечности. Но также замедляются и любые другие процессы. Никакое локальное измерение частоты колебаний осциллятора не обнаружит ее (частоты) изменения, так как в том же отношении замедляются часы, находящиеся рядом, в том же гравитационном потенциале.

*) Как бы ни влияло поле тяготения на прохождение сигналов, время прохождения первого и второго сигнала в постоянном поле одинаково и оно сокращается при вычислении временного интервала.

Особенно неприятно, что влияет на процессы не поле, а именно потенциал, величина непосредственно локально неизмеряемая.

Изменим потенциал на постоянную величину: все наблюдаемые соотношения между числом колебаний осциллятора и числом качания маятника часов и т. п. останутся без изменений, хотя сами частоты, измеренные по «абсолютному» времени *), будут другими.

Наглядно можно представить себе такой опыт: окружим земной шар тяжелой поллой оболочкой. Потенциал на Земле изменится, хотя все поля останутся без изменений. Все результаты земных опытов останутся без изменений, но с точки зрения РТТПП по абсолютному времени (хранитель абсолютного времени по определению находится на бесконечности) процессы текут медленнее.

Итак, абсолютное время в теории в плоском пространстве существует, но никакими опытами, проделанными вблизи поверхности тела, его определить нельзя. Ясно, что такая ситуация очень похожа на ситуацию с эфиром в начале нашего века и подводит к выводу о том, что это абсолютное время является фикцией. В космологической проблеме, где нас окружает безграничное пространство с постоянной (в среднем) плотностью вещества, его даже нельзя определить.

Тирринг рассматривает вопрос более формально; он показывает, что существует преобразование потенциала **), оставляющее без изменения наблюдаемые величины; однако при этом преобразовании течение времени и ход часов по «абсолютному» времени изменяется. Другими словами, абсолютное время не инвариантно относительно преобразования. При этом изменение может быть разным в разных точках.

Теория РТТПП сама подводит к идее искривления пространства — времени, сама (при ее последовательном развитии) приводит к основным идеям ОТО.

Итак, последовательная РТТПП, совпадающая с ОТО в первых поправках к ньютоновскому закону, для объяснения универсальности действия поля тяготения вынуждена прибегать к нефизическим гипотезам о ненаблюдаемом «абсолютном» вре-

*) Понятие «абсолютного» времени здесь употребляется в смысле независимого от поля тяготения. Это время меняется при переходе к движущейся системе отсчета, в соответствии с преобразованиями Лоренца, и этим отличается от ньютоновского абсолютного времени.

***) По типу градиентного преобразования в электродинамике, когда к скалярному потенциалу φ добавляют $\frac{df}{dt}$, а к векторному A соответственно $\text{grad } f$, где f — произвольная функция; напомним, что в РТТПП потенциал — тензорный, т. е. имеет не одну компоненту, а 10.

мени, о влиянии на все процессы ненаблюдаемой величины — потенциала тяготения и т. п.

Идея кривизны пространства-времени, лежащая в основе ОТО, сразу же разрешает все трудности РТТПП, и с гениальной простотой объясняет универсальность действия поля тяготения.

Из сказанного следует, что, несмотря на скудность экспериментов, проверяющих ОТО, только эта теория, обладающая необыкновенной стройностью, внутренней красотой и убедительностью, может являться современной теорией тяготения.

Конкретные уравнения ОТО, связывающие кривизну пространства-времени с материей, конечно, не единственные из мыслимо возможных уравнений такого рода. Возможны, например, уравнения выше второго порядка. Вопрос о единственности уравнений ОТО в этом смысле неоднократно обсуждался, начиная с работ самого Эйнштейна. Поучительный анализ проблемы можно найти в книге Эддингтона (1934). Уравнения ОТО в известном смысле являются простейшими из возможных. Какое-либо изменение уравнений ОТО может быть произведено только по новым глубоким теоретическим и экспериментальным соображениям. О так называемом Λ -члене в уравнениях тяготения см. Дополнение II.

Практическое удобство РТТПП как приближения к ОТО, отмеченное выше, ограничивается случаем изолированных тел и слабых полей в бесконечном пустом пространстве. О неприменимости РТТПП в космологической проблеме сказано выше. Но РТТПП не годится и для описания гравитационного поля коллапсирующей звезды, вблизи ее шварцшильдовского радиуса (см. гл. 3).

Дело в том, что последовательная РТТПП должна быть нелинейной теорией. Это видно уже из того, что поле двух тел на большом расстоянии меньше суммы полей каждого тела в отдельности из-за гравитационного дефекта массы; взаимодействие тел уменьшает энергию, а значит, и массу системы. Нелинейность можно проследить и в случае гравитационных волн, но на этом мы не останавливаемся.

В области, где нелинейность существенна, РТТПП теряет все свое практическое удобство и становится невероятно громоздкой. Задачу о поле тела вблизи гравитационного (шварцшильдовского) радиуса (см. § 2 гл. 3) никто и не пытался решить в РТТПП.

По этим причинам в дальнейшем мы почти не будем пользоваться РТТПП. Принципиальные же преимущества, необходимость и неизбежность ОТО и понятия искривления пространства — времени, были показаны выше.

ГЛАВА 3

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Введение

Многие небесные тела, а также некоторые системы небесных тел, имеют симметричное распределение масс. Таковы (с хорошей точностью) медленно вращающиеся звезды, планеты, шаровые звездные скопления, эллиптические галактики типа E0, сферические скопления галактик. Гравитационное поле таких тел, очевидно, также сферически-симметрично*). Небесные тела и системы, если они слабо вращаются, на релятивистских стадиях эволюции также будут сферически-симметричными.

Мы подробно рассмотрим сферическое поле тяготения, имея в виду, с одной стороны, непосредственное приложение теории к изучению небесных тел, а также к космологической проблеме, с другой стороны, вследствие того, что в этом случае многие принципиальные вопросы могут быть выяснены до конца, так как симметрия упрощает уравнения Эйнштейна. Отклонения от сферической симметрии будут рассмотрены далее в гл. 4.

Выражение для интервала в сферически-симметричном поле может быть записано в следующем виде:

$$ds^2 = e^{\nu(x^0, x^1)} dx^{02} - e^{\lambda(x^0, x^1)} (dx^1)^2 - e^{\mu(x^0, x^1)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.1.1)$$

Здесь x^0 — временная координата, x^1 — радиальная пространственная координата, θ и φ — угловые координаты на сфере; для удобства вычислений записано $g_{00} = e^{\nu}$, $g_{11} = -e^{\lambda}$, $g_{22} = -e^{\mu}$. Смешанные компоненты $g_{0\alpha}$ всегда могут быть положены равными нулю, ибо вращение отсутствует (см. § 6 гл. 1). Функции ν , λ , μ могут зависеть от временной и радиальной координаты.

*) О влиянии далеких тел Вселенной на поле вблизи изолированного тела см. § 13 гл. 3 и § 1 гл. 15.

Уравнение Эйнштейна записывается для метрики (3.1.1) в виде

$$\frac{8\pi G}{c^4} P = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \nu' \right) - e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{\nu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 \right) - e^{-\mu}, \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{c^4} P = \frac{1}{4} e^{-\lambda} (2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') + \\ + \frac{1}{4} e^{-\nu} (\dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\mu}\dot{\nu} - \dot{\lambda}\dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2), \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$-\frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon = e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) - \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\dot{\lambda}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) - e^{-\mu}, \quad (3.1.4)$$

$$0 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (-2\dot{\mu}' - \dot{\mu}\mu' + \dot{\lambda}\mu' + \nu'\dot{\mu}). \quad (3.1.5)$$

Остальные уравнения обращаются в тождества. Точка означает дифференцирование по x^0 , штрих — по x^1 .

Законы сохранения (1.8.5) для тензора T_{ih} (1.8.2) в данном случае принимают следующий вид:

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\mu} = -\frac{2\dot{\varepsilon}}{\varepsilon + P}, \quad (3.1.6)$$

$$\nu' = -\frac{2P'}{\varepsilon + P}. \quad (3.1.7)$$

Вдали от сферической массы в пустоте метрика евклидова и выражение для интервала имеет в сферических координатах вид

$$ds^2|_{\infty} = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (x^1)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.1.8)$$

Преобразования координат x^0 и x^1

$$x^0 = x^0(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1), \quad x^1 = x^1(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1) \quad (3.1.9)$$

сохраняют сферическую симметрию. Воспользовавшись преобразованием типа (3.1.9), положим (старые координаты с тильдой наверху)

$$x^1 = e^{\mu(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1)/2}, \quad (3.1.10)$$

а затем $x^0 = x^0(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1)$ выберем так, чтобы в метрике не появились члены g_{10} (последнее всегда возможно). Тогда коэффициент при угловой части будет $(x^1)^2$, т. е. такой же, как в (3.1.8) для метрики на бесконечности, и интервал запишется в виде

$$ds^2 = e^{\nu} (dx^0)^2 - e^{\lambda} (dx^1)^2 - (x^1)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.1.11)$$

Разумеется, преобразование (3.1.10), приводящее интервал к виду (3.1.11), можно сделать не всегда. Действительно, после

преобразования (3.1.10) и расчетов коэффициентов $g_{\mu\nu}$ по формулам (3.1.9) может оказаться, что в выражении для интервала (3.1.11) коэффициент перед $(dx^0)^2$ окажется со знаком минус, а перед $(dx^1)^2$ со знаком плюс *). Если так случится, то это значит, что x^1 не имеет больше характера пространственной координаты, а имеет характер временной координаты; это означает, что при постоянстве всех других координат (x^0, θ, φ) теперь величина $\sqrt{g_{11}} dx^1$ измеряет собственное время частиц, неподвижных в данной системе отсчета. Иначе говоря, характер времени имеет та из координат в выражении

$$ds^2 = g_{AA} (dx^A)^2 + g_{BB} (dx^B)^2 - (x^A)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

коэффициент перед квадратом дифференциала которой входит со знаком (+).

Если x^1 окажется имеющим характер времени, то логично переобозначить координаты: x^1 назвать x^0 , а x^0 назвать x^1 , с тем чтобы временная координата всегда обозначалась x^0 .

Тогда при временном характере квадрата перед угловой частью в выражении для интервала мы будем иметь

$$ds^2 = e^{\nu} (dx^0)^2 - e^{\lambda} (dx^1)^2 - (x^0)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.1.12)$$

Итак, преобразованием типа (3.1.10) всегда можно привести интервал для сферического поля тяготения либо к (3.1.11) (Биркгоф (1923)), либо к (3.1.12) (Новиков (1961), (1962в)). Мировые (4-мерные) области, в которых интервал приводится к виду (3.1.11), будем называть R -областями, где интервал приводится к виду (3.1.12), T -областями. Очевидно, определения R и T областей инвариантны.

Из определения R и T областей и формул преобразования $g_{\mu\nu}$ легко получить условия для определения, к какой мировой области относится та или иная мировая точка. Если в данной точке в общем выражении (3.1.1)

$$e^{\nu-\lambda} > \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu'} \right)^2 \quad (3.1.13)$$

(точка означает дифференцирование по x^0 , штрих — по x^1), то точка лежит в R -области. При выполнении противоположного неравенства точка лежит в T -области. Вдали от масс, в слабом поле тяготения, где метрика приближается к своему асимптотическому виду при $x^1 \rightarrow \infty$ (3.1.8), условие (3.1.13), разумеется, всегда выполнено и мы находимся в обычных R -областях. Однако при чрезвычайно сильной концентрации масс до размеров

*) С одинаковым знаком коэффициенты получиться не могут в силу инвариантности сигнатуры метрики (+ — — —).

меньше критических *) оказывается, что в сильном поле тяготения x^1 уже не имеет смысла пространственной координаты, мы попадаем в T -область, и метрику нельзя записать в виде (3.1.11). Об этом подробнее говорится в § 13 гл. 3. Сейчас будем предполагать, что метрика приводится к виду (3.1.11) **), и мы находимся в R -области. Сначала мы рассмотрим поле тяготения в вакууме.

§ 2. Поле тяготения Шварцшильда

Уже в самой простой задаче — в рассмотрении движения пробных частиц и света в сильном поле тяготения в вакууме, создаваемом сферическим телом, содержатся те основные особенности, которые определяют строение плотных звезд (белые карлики, нейтронные звезды), массивных звезд, а также свойства катастрофического сжатия звезды — релятивистского коллапса.

Решение уравнений Эйнштейна (3.1.2) — (3.1.5) с метрикой (3.1.11) для такого поля (решение Шварцшильда ***) (1916)) определяет геометрические свойства пространства и темп течения времени вблизи тела, создающего поле. Оказывается, что это поле всегда постоянно (даже если вещество центрального тела совершает радиальные движения, оставаясь сферически-симметричным) и зависит только от полной энергии тела E (включая массу покоя составляющих тело частиц).

Выражение для четырехмерного интервала, приведенного к виду (3.1.11), в поле Шварцшильда имеет вид:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2, \quad (3.2.1)$$

где мы обозначили $x^1 = r$, $x^0 = ct$, а $M = E/c^2$. В выражении для ds^2 содержатся все сведения о гравитационном поле. Напомним (см. § 4 гл. 1), как пользоваться этим выражением для физических выводов. Первые три слагаемые в сумме дают взятый с обратным знаком квадрат расстояния между бесконечно близкими точками dl^2 , записанный в сферической системе координат. Неподвижный наблюдатель, находящийся вблизи массивного

*) Этот критический размер носит название гравитационного радиуса и зависит от массы: $r_g = 2GM/c^2$; см. далее § 2 гл. 3.

**) Преобразование (3.1.10) предполагает, кроме того, что μ монотонна по \tilde{x}^1 . Оказывается, что если x^1 имеет смысл пространственной координаты, то μ всегда монотонна по \tilde{x}^1 .

***) О свойствах решения Шварцшильда см., например, в учебнике Ландау и Лифшица (1962).

тела, может измерять расстояния в малой окрестности обычным способом, вводя декартовы координаты. В этих координатах $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Если он выберет $dz = r d\theta$, а $dy = \sin^2 \theta d\varphi$, то вне поля тяготения в евклидовом пространстве $dx = dr$. Вблизи массивного тела, в поле Шварцшильда, как видно из (3.2.1),

$$dx = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} dr. \quad (3.2.2a)$$

Перед dr стоит множитель, отличный от единицы, что отражает факт неевклидовости геометрии пространства. Из этого следует, например, что расстояние между двумя близкими окружностями, описанными в одной плоскости вокруг центрального тела и имеющими длины l_1 и l_2 , равно не $\frac{l_2 - l_1}{2\pi}$, а

$$\frac{l_2 - l_1}{2\pi} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2}.$$

Последнее слагаемое в (3.2.1) есть (умноженный на c^2) квадрат промежутка времени τ , текущего в данной точке:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \Delta t. \quad (3.2.2b)$$

Вдали от тела при $r \rightarrow \infty$ $\Delta\tau = \Delta t$. Чем ближе точка наблюдения к телу, создающему поле, тем медленнее течет время, т. е. данному промежутку времени на бесконечности Δt соответствует все меньший промежуток $\Delta\tau$. При $r \rightarrow 2GM/c^2$, $\Delta t \rightarrow 0$.

Найдем в поле Шварцшильда ускорение свободного падения тела, скорость которого невелика ($v \ll c$). С помощью выражения (1.6.1b) ускорение свободного падения F для пробной частицы записывается в следующем виде:

$$F = \sqrt{F_a F^a} = \frac{GM}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2}}. \quad (3.2.3)$$

Мы видим, что при $r = 2GM/c^2$ сила тяготения становится бесконечной. Это свидетельствует о том, что центральное тело, если оно статическое, заведомо не может иметь радиус меньше $2GM/c^2$. Используемая выше неподвижная недеформирующаяся сферическая система координат применима также только при $r > 2GM/c^2$. При меньших r интервал (3.1.1) уже не может быть приведен к виду (3.2.1). Этот критический радиус $r_g = 2GM/c^2$ носит название *гравитационного*, а сферу радиуса r_g называют *сферой Шварцшильда*. Заметим, что нестатическое тело может иметь размеры меньше гравитационного радиуса (см. § 12 гл. 1) однако мы не будем останавливаться на этом здесь.

На большом по сравнению с r_g расстоянии поле Шварцшильда есть обычное поле тяготения ньютоновской теории с гравитационным потенциалом $\varphi = GM/r$, а выражение для ускорения соответственно $F = -GM/r^2$. Гравитационный радиус Солнца 2,96 км, Земли 0,443 см. Радиусы Земли и Солнца много больше их гравитационных радиусов. Следовательно, вне Солнца, Земли и других обычных звезд и планет гравитационное поле с огромной точностью есть поле Ньютона. Внутри вещества решение Шварцшильда неприменимо.

§ 3. Поле тяготения внутри звезды

Рассмотрим теперь свойства сильного поля тяготения внутри покоящегося вещества. Здесь 4-мерный интервал записывается в виде (3.1.11)

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + e^{\nu(r)} c^2 dt^2. \quad (3.3.1)$$

Коэффициенты: $e^{\lambda(r)}$, описывающий отклонение геометрии от евклидовой, и $e^{\nu(r)}$, описывающий изменение темпа течения времени, определяются распределением вещества:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2} \int_0^R \rho r^2 dr, \quad (3.3.2)$$

$$e^{\nu} = \exp \int_r^{\infty} \left[\frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 + p) r e^{\lambda} - \frac{d\lambda}{dr} \right] dr. \quad (3.3.3)$$

Напомним, что ρ — плотность вещества, включающая не только сумму масс частиц единицы объема, но и их энергию (движения и взаимодействия *), кроме гравитационного).

Вне звезды, в вакууме выражения (3.3.2) и (3.3.3) дают соответственно

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2} \int_0^R \rho r^2 dr, \quad e^{\nu} = e^{-\lambda},$$

где R — поверхность звезды, на которой $\rho=0$. Эти выражения совпадают с приведенными в предыдущем параграфе, если масса записывается следующим образом:

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr. \quad (3.3.4)$$

*) Конечно, здесь имеются в виду только близкодействующие силы; крупномасштабные электрические и магнитные поля здесь не рассматриваются (см. об этом § 6 гл. 12).

Напомним, что вследствие неевклидовости пространства элемент объема $dv = 4\pi e^{\lambda/2} r^2 dr \neq 4\pi r^2 dr$. В интеграле (3.3.4) стоит $4\pi r^2 dr$, а не dV . Как будет показано ниже, замена dV на $4\pi r^2 dr$ связана с влиянием энергии поля тяготения на массу тела (см. об этом далее § 6 гл. 10).

Приведем другое выражение для массы покоящегося вещества, полученное Толменом (1930):

$$M = 4\pi \int_0^R \left(\rho + 3 \frac{P}{c^2} \right) e^{\nu/2} r^2 dr. \quad (3.3.5)$$

Из формул (3.3.2) видно, что коэффициент $e^\lambda \geq 1$, а $e^\nu < 1$ (так же, как и вне тяготеющей массы), поэтому внутри тела отклонение геометрии от евклидовой носит тот же характер, что и вне его и $dV > 4\pi r^2 dr$, а время течет медленнее, чем на бесконечности.

Из формулы (3.3.2) следует, что $e^\lambda \rightarrow 1$, когда $r \rightarrow 0$; метрика при этом приобретает галилеев вид. Это, конечно, не означает, что пространство здесь меньше искривлено, чем в других точках. Дело в том, что мы пользуемся сферическими координатами и условие $r \rightarrow 0$ означает, что берется малая окрестность около центра, а в малой окрестности любой точки метрика галилеева. Кривизна пространства зависит от λ'' и имеет размерность $см^{-2}$; следовательно, эффекты, вызываемые кривизной, уменьшаются пропорционально квадрату линейного размера. Поэтому при $r \rightarrow 0$ кривизна пространства не проявляется и $e^\lambda \rightarrow 1$ *).

В действительности гауссова кривизна (см. § 4 гл. 1) пространства C_G в центре звезды больше, чем в других местах. Величина C_G дается формулой (см. формулу (13) § 8 гл. 1):

$$C_G = \frac{8}{3} \frac{\pi G \rho}{c^2}. \quad (3.3.6)$$

Так как в центре звезды плотность максимальна, то и C_G максимальна. Конечно, не надо думать, что из (3.3.6) следует евклидовость пространства вне звезды (где $\rho = 0$) и даже в сильном поле вблизи звезды. Формула (3.3.6) дает только среднюю кривизну пространства по всем двумерным направлениям, и эта средняя кривизна действительно равна нулю. Однако вне звезды риманова кривизна пространства (см. § 4 гл. 1) не равна нулю и может иметь в зависимости от двумерного направления и положительное, и отрицательное значение. В центре звезды все направления равноценны; там кривизна для любой ориентации дается формулой (3.3.6) и всегда положительна.

*) Заметим, что существуют решения с конечной массой и $\rho_c = \infty$. В этих решениях кривизна в центре бесконечна, и $e_c^\lambda \neq 1$. Мы здесь не касаемся этих сингулярных решений.

Гравитационное поле, полученное «сшиванием» решений внутри звезды и снаружи, нигде не имеет каких-либо физических особенностей типа сферы Шварцшильда, и везде

$$1 \leq e^\lambda < \infty \text{ и } 0 < e^\nu < 1.$$

§ 4. Движение по радиусу лучей света и ультрарелятивистских частиц

Посмотрим теперь, как будут двигаться по радиусу в сферическом поле тяготения частицы, имеющие фундаментальную скорость c (например, фотоны и нейтрино). Поскольку локально наблюдатель может ввести координаты, в которых $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, то, используя принцип постоянства скорости света, измеренной локальным наблюдателем ($v_{\text{света}} = c$), получаем условие движения частицы с нулевой массой покоя: $ds = 0$. В силу симметрии частица, пущенная по радиусу, будет все время двигаться в радиальном направлении. Следовательно, при $\varphi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$

$$\frac{dr}{dt} = ce^{\frac{\nu-\lambda}{2}}. \quad (3.4.1)$$

Везде внутри звезды $e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} < 1$. За поверхностью звезды в вакууме $e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} < 1$, и эта величина

стремится к 1 при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, например, для нейтрино, вылетевшего из центра, изменение координаты r со временем t далекого внешнего наблюдателя должно иметь вид, изображенный на рис. 7. Пунктиром на этом рисунке показано движение нейтрино в отсутствии поля тяготения. Заметим, что в вакууме при $r \rightarrow r_g$

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \rightarrow 0.$$

Это, очевидно, вовсе не означает, что скорость света стремится к нулю. Скорость, измеряемая находящимся в данной точке наблюдателем, есть не $\frac{dr}{dt}$, а $\frac{dx}{d\tau}$, где dx и $d\tau$ — бесконечно

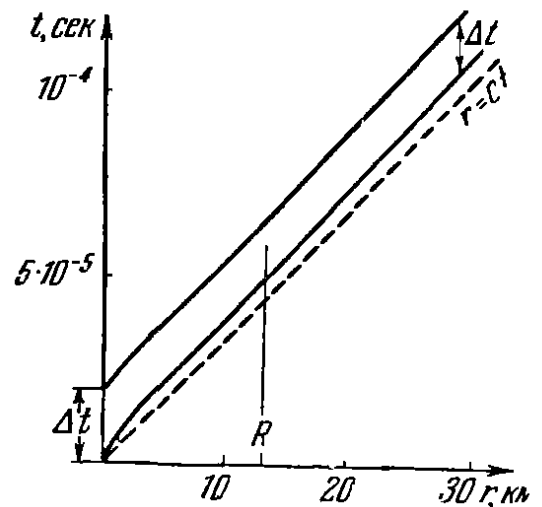


Рис. 7. Графики изменения r от t по часам далекого внешнего наблюдателя для двух нейтрино, вылетевших при $t = 0$ и $t = \Delta t$ из центра звезды с массой $0,64 M_\odot$, R — граница звезды ($R = 6,9 r_g$).

малое физическое расстояние и время соответственно (см. § 2 гл. 3). Для света всегда $\frac{dx}{dt} = c$.

Для далекого наблюдателя скорость луча света по его часам есть $\frac{dx}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$, т. е. с его точки зрения луч вблизи массы движется медленнее. На этом основан недавно предложенный новый способ проверки ОТО (Шапиро (1965)).

Предлагается производить радиолокационные наблюдения прохождения Меркурия за Солнцем (рис. 8). В ньютоновской

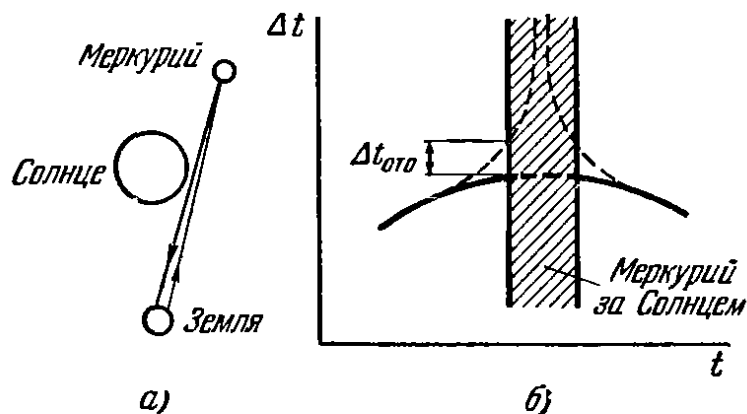


Рис. 8. Радиолокация планеты Меркурий для проверки ОТО. *a* — общая схема; *b* — изменение времени прохождения радиолокационного сигнала. По вертикальной оси отложено время прохождения сигнала туда и обратно, по горизонтальной оси — момент послышки сигнала. Пунктиром показано изменение, соответствующее эффектам ОТО. Заштрихована ненаблюдаемая область прохождения Меркурия за Солнцем.

теории изменение времени распространения радиосигналов туда и обратно определяется только изменением расстояния между Землей и Меркурием и графически изображается сплошной линией на рис. 8. Согласно ОТО уменьшение скорости сигналов вблизи Солнца приведет к добавочному изменению времени прохождения радиолуча *) для далекого наблюдателя; поэтому возникает добавочный подъем на графике рис. 8 (пунктир). Величина добавочного изменения в оптимальном случае порядка $2 \cdot 10^{-4}$ сек и в принципе может быть измерена. Правда, здесь необходимо учитывать еще изменение скорости радиосигналов в плазме солнечной короны. Для исключения этого эффекта можно проводить измерения на разных частотах.

*) Изменяется так же и траектория луча [знаменитое отклонение на $1,75''$ вблизи края солнечного диска (см. § 10 гл. 3)]; однако увеличение времени прохождения радиосигнала благодаря изменению длины траектории — величина более высокого порядка малости, чем эффект, указанный в тексте.

Как меняется энергия нейтрино и световых квантов, а следовательно, и частота соответствующих волн, при движении в поле тяготения? Рассмотрим изменение частоты. Пусть излучатель на поверхности звезды произвел две вспышки с интервалом Δt . Так как e^λ и e^ν не зависят от t , то эти вспышки придут к далекому наблюдателю так же с интервалом Δt по его часам, как это изображено на рис. 7. Но интервалу Δt в сильном поле тяготения соответствует промежуток времени

$$\Delta\tau = e^{\nu/2} \Delta t. \quad (3.4.2)$$

Следовательно, частота принятого наблюдателем сигнала, пропорциональная $1/\Delta\tau$, отличается от частоты испущенного сигнала $\omega_0 = 1/\Delta t$

$$\omega = \omega_0 \cdot e^{\nu/2}. \quad (3.4.3)$$

Частота сигнала уменьшается при выходе его из поля тяготения (и увеличивается при движении в обратном направлении). Соответственно этому уменьшается и энергия кванта $E = \hbar\omega$. Описанное явление называется *гравитационным красным смещением*. Для наблюдателя, находящегося на поверхности звезды, спектр испускания атомов выглядит точно так же, как и в лаборатории на Земле. Однако спектр тех же атомов звезды, наблюдаемый с Земли, сдвинут, благодаря описанному явлению, в красную сторону *).

§ 5. Движение по радиусу нерелятивистских частиц

Теперь обратимся к радиальному движению нерелятивистских частиц в вакууме.

В дальнейшем мы часто будем рассматривать движение тел в непосредственной близости от гравитационного радиуса центрального тела (где поле особенно сильно) и даже при $r \rightarrow r_g$. Как уже отмечалось в § 2 гл. 3, статическое тело не может иметь размеры $\leq r_g$, а Бонди (1964) показал, что размеры тела в равновесии не могут быть даже меньше $1,6 r_g$. Однако, как мы увидим далее в гл. 11, массивные и сверхмассивные звезды (с массой больше двух масс Солнца) в конце эволюции, потеряв устойчивость и сжимаясь, экспоненциально быстро для далекого наблюдателя достигают размеров гравитационного радиуса. Внешнее поле Шварцшильда в вакууме для таких неравновесных звезд, называемых застывшими (см. гл. 11), простирается вплоть до r_g . Именно к таким неравновесным сжимающимся

*) «Фиолетовое» смещение, вызванное у лучей, приходящих из космоса на Землю, ее гравитационным полем, составляет всего $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-9}$, и мы им пренебрегаем.

объектам относятся все рассуждения о движении частиц в вакууме вблизи r_g : частицы в своем движении не наталкиваются на поверхность тела.

Вернемся к поставленной задаче. Запишем сначала «координатную» скорость свободного падения в поле Шварцшильда, т. е. скорость изменения координаты r со временем t . Из уравнений для геодезических, используя выражение для интервала r_g в поле Шварцшильда, получаем

$$\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[1 - \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - \frac{r_g}{r_0}}\right]^{1/2} c. \quad (3.5.1)$$

Здесь r_g — гравитационный радиус центральной массы, r_0 — расстояние, с которого начинается падение и на котором $\frac{dr}{dt} = 0$. На большом расстоянии (r_0 и $r \gg r_g$) формула (3.5.1) переходит в обычное выражение ньютоновской теории

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{rr_0}} (r_0 - r).$$

Выражение (3.5.1) показывает скорость изменения координаты r по часам далекого наблюдателя. Местный неподвижный наблюдатель, находящийся рядом с падающим телом, определит его скорость так:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} = \left[1 - \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - \frac{r_g}{r_0}}\right]^{1/2} c. \quad (3.5.2)$$

С приближением тела к гравитационному радиусу $\frac{dx}{d\tau} \rightarrow c$. Совсем иначе меняется скорость $\frac{dx}{dt}$ по часам t далекого наблюдателя. Используя формулу (3.5.1), находим $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2}} \frac{dr}{dt} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow r_g$. Разумеется, стремление скорости $\frac{dx}{dt}$ к нулю вызвано замедлением течения времени вблизи r_g (ср. § 4 гл. 3). Скорость $v = \frac{dx}{d\tau}$ есть величина, имеющая непосредственный физический смысл. Ее измеряет покоящийся в той же точке наблюдатель. Именно она входит в выражение локаль-

ной энергии частицы (т. е. кинетической энергии, измеренной местным наблюдателем) по формуле $E_{\text{лок}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ и т. д.

Естественно, при падении частицы эта скорость все время возрастает под действием тяготения. Скорость $\frac{dx}{dt}$, которая определяется через время далекого наблюдателя, такого непосредственного смысла не имеет. Вдали от тяготеющей массы $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dr}{dt}$ и для падающей частицы $\frac{dx}{dt}$ возрастает, но вблизи массы $\frac{dx}{dt}$ уменьшается и, как мы видели выше, стремится к нулю при $r \rightarrow r_g$. Однако это уменьшение вызвано не «отталкиванием со стороны центрального тела», как неудачно пишет Мак-Витти (1961, стр. 136), а указанной выше связью между временами τ и t .

Из формулы (3.5.2) следует, что при движении частицы сохраняется величина

$$mc^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} = E,$$

которая является полной энергией частицы в поле тяготения.

Интеграл

$$\Delta t = \int_{r_0}^r \left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1} dr \quad (3.5.3)$$

расходится на верхнем пределе, если $r = r_g$. Таким образом, время t падения частицы до r_g всегда бесконечно. Даже для света, время распространения которого от r_0 до r определяется интегрированием (3.4.1) и равно

$$\Delta t = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_g}{c} \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}, \quad (3.5.4)$$

промежуток времени Δt , соответствующий достижению r_g , обращается в бесконечность, а быстрее света ничто двигаться не может.

Итак, по часам далекого неподвижного наблюдателя время достижения r_g всегда равно бесконечности. Любое тело, под действием каких бы сил оно ни находилось, может только асимптотически приближаться к r_g . Каково время падения по часам,

установленным на самой падающей частице? Свяжем систему отсчета с частицей. В этой системе часы не меняют положения, поэтому для них $ds = c dT$, где T — показание часов. Отсюда $\Delta T = \frac{1}{c} \int ds$. Но ds есть инвариантная величина, не меняющаяся при переходе к другой системе; ее можно вычислить в любой системе. Вычислим ds в системе Шварцшильда:

$$\Delta T = \frac{1}{c} \int_{r_1}^r \sqrt{\frac{1 - \frac{r_g}{r}}{\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}} dr. \quad (3.5.5)$$

Используя для $\frac{dr}{dt}$ выражение (3.5.1), видим, что (3.5.5) сходится при любом верхнем пределе, в том числе и при $r = r_g$. В частности, если частица падает с параболической скоростью (т. е. $\frac{dr}{dt} = 0$ на бесконечности), то

$$\Delta T = \frac{2}{3} \left[\frac{r_1}{c} \left(\frac{r_1}{r_g}\right)^{1/2} - \frac{r}{c} \left(\frac{r}{r_g}\right)^{1/2} \right] \quad (3.5.6)$$

— формула, совпадающая с формулой ньютоновской теории, если вместо r_g подставить его выражение. Здесь r_1 — положение частицы в момент начала отсчета ΔT . Итак, время падения до r_g по часам частицы конечно. То, что бесконечно во времени внешнего наблюдателя, конечно по часам падающего. Можно ли привести более наглядную иллюстрацию относительности понятия временной бесконечности?

Нам остается сделать только одно пояснение. С помощью выражения (3.5.3) можно найти $r = r(t)$, т. е. положение пробной частицы в момент t по часам далекого наблюдателя. Но это, конечно, не то место, где этот наблюдатель видит частицы в момент t ; свету нужно некоторое время Δt , чтобы пройти путь от частицы до наблюдателя. Это время легко рассчитать по формуле (3.5.4). Обозначим время прихода света к наблюдателю через t_* :

$$t_* = t + \Delta t. \quad (3.5.7)$$

Когда частица приближается к гравитационному радиусу, $t \rightarrow \infty$ и $\Delta t \rightarrow \infty$, поэтому t_* и подавно стремится к бесконечности. Таким образом, наблюдатель видит, что частица только асимптотически за бесконечное время приближается к гравитационному радиусу. С помощью приведенных выше выражений нетрудно получить формулу $r = r(t_*)$ для падающей частицы, т. е. тот закон, по которому наблюдатель видит приближение частицы к

гравитационному радиусу. Для $r \rightarrow r_g$ асимптотический вид этой формулы таков:

$$r = r_g + (r_1 - r_g) \cdot e^{-\frac{c(t_* - t_*^1)}{2r_g}}. \quad (3.5.8)$$

Здесь r_1 — положение частицы в момент t_*^1 :

$$(r_1 - r_g) \ll r_g.$$

Посмотрим теперь, как будет меняться яркость излучателя, падающего в поле Шварцшильда, для внешнего наблюдателя. Пусть в некоторый момент падающий источник находится вблизи r_g и движется с локальной скоростью $\frac{dx}{d\tau} = v$ по радиусу, соединяющему центральное тело с далеким наблюдателем A ; для сопутствующего наблюдателя, падающего вместе с источником, источник излучает изотропно с постоянной интенсивностью. Тогда плотность потока на бесконечности I_∞ будет для наблюдателя A :

$$I_\infty = \text{const} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left[\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2} \right]^2. \quad (3.5.9)$$

Здесь один множитель $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ описывает гравитационное красное смещение, второй множитель $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ связан с искривлением траектории лучей в поле тяготения, множитель $\left[\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2} \right]$

связан с доплер-эффектом, а второй такой же множитель с абберацией. Из (3.5.2) следует, что $1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{r_g}{r} \cdot \frac{r_0 - r}{r_0 - r_g}$ и при $r \rightarrow r_g$

$$I_\infty = \text{const} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^4. \quad (3.5.10)$$

Закон изменения r с t_* уже найден (3.5.8). Таким образом, мы получаем асимптотическое выражение, показывающее, как далекий наблюдатель видит изменение яркости падающего источника при $r \rightarrow r_g$:

$$I_\infty = \text{const} e^{-\frac{2c}{r_g}(t_* - t_*^1)}. \quad (3.5.11)$$

Частота принимаемой далеким наблюдателем световой волны стремится к нулю, по аналогичному закону, только показатель экспоненты вчетверо меньше по модулю.

Как мы увидим далее в § 10 гл. 3, при $r \rightarrow r_g$ лучи света, вышедшие из источника по определенному направлению, искривляясь в гравитационном поле, могут длительно кружить вблизи центра тяготения, прежде чем уйти к далекому наблюдателю. Эти лучи создают «ореол» вокруг тела (если его размеры меньше $1,5 r_g$); яркость ореола также экспоненциально быстро затухает. В выражении (3.5.11) «ореол» не учитывается. К этому вопросу мы вернемся в § 6 гл. 11.

§ 6. Потенциальные кривые движения

После выяснения основных особенностей радиального движения перейдем к общему случаю нерадиальных траекторий. Полная классификация типов движений имеется, например, в книге А. Ф. Богородского (1962); см. также работы С. Л. Галкина (1961) и Мэтцнера (1963). Анализ принципиальных вопросов устойчивости при движении по круговым орбитам дан в работе С. А. Каплана (1949а).

Уравнения движения в полярных координатах имеют вид (траектория плоская):

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2 - 1 + \frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^3}}{E^2}, \quad (3.6.1a)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{a^2}{E^2 r^4} \left(1 - \frac{1}{r}\right). \quad (3.6.1b)$$

Для удобства уравнения записаны в безразмерных величинах. Здесь r — шварцшильдовская радиальная координата, измеренная в единицах гравитационного радиуса $r_g = 2GM/c^2$; $dx = dr / \sqrt{1 - \frac{1}{r}}$ — элемент радиального расстояния; τ — время, измеряемое локальным наблюдателем в единицах r_g/c ; a — момент импульса, измеренный в единицах mcr_g , E — энергия, измеренная в единицах mc^2 ; m — масса пробной частицы. В энергию включена масса покоя, поэтому для частицы, покоящейся на бесконечности, $E^2 = 1$ *). На расстояниях, больших

*) Полная энергия частицы E , сохраняющаяся при движении, выражается через скорость v и g_{00} точно так же, как и при радиальном движении. Действительно, из (3.6.1a) и (3.6.1b) находим
$$\frac{E}{mc^2} = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Эта формула справедлива для любого статического поля. См. Ландау и Лифшиц (1962).

по сравнению с гравитационным радиусом, т. е. при $r \gg 1$ и при малой по сравнению с единицей энергии движения: $E - 1 \ll 1$, мы получаем из (3.6.1a, b) уравнения кеплеровой задачи в ньютоновской теории тяготения. Действительно, при этих условиях слагаемым a^2/r^3 в (3.6.1a) можно пренебречь, $dx \approx dr$, $E^2 - 1 \approx 2(E - 1)$. В этом случае $1/r$ — потенциал тяготения, a^2/r^2 — потенциал центробежных сил. Равенство нулю числителя в (3.6.1a) дает, очевидно, потенциальную кривую радиального движения.

Для ньютоновской теории такая кривая $E = E(r, a_1)$ для фиксированного (a_1) изображена на рис. 9. При любом a_1 кривая имеет минимум. Качественные особенности движения пробной частицы видны на рис. 9. Движение происходит при постоянной энергии E_1 и изображается горизонталью $E = E_1$. Частица с моментом a_1 перемещается вдоль горизонтали до соответствующей кривой поворота $E = E(r, a_1)$, затем движется в обратном направлении снова до пересечения с той же кривой и т. д., совершая финитное движение в «потенциальной яме». В соответствии с тем, что в этом примере выбрана $E_1 < 1$, а энергия, как и в ОТО, отсчитывается от mc^2 (от 1 в наших единицах), частица не уходит в бесконечность.

Если энергия частицы $E_2 > 1$ (см. рис. 9), то она приходит по гиперболе из бесконечности, достигает минимального r , соответствующего пересечению E с кривой $E = E(r, a_1)$ и снова уходит в бесконечность. Так как потенциальные кривые при $r \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности, $E \rightarrow \infty$ (см. рис. 9), то при любой большой энергии частица, обогнув притягивающий центр, уйдет снова в бесконечность, разумеется, если она не натолкнется на поверхность притягивающего тела. Гравитационный захват в ньютоновской теории двух точечных тел невозможен.

Обратимся теперь к релятивистской теории, к точному уравнению (3.6.1a). Здесь вид потенциальных кривых иной (рис. 10). Благодаря слагаемому a^2/r^3 , потенциальная кривая не поднимается неограниченно вверх как в ньютоновской теории,

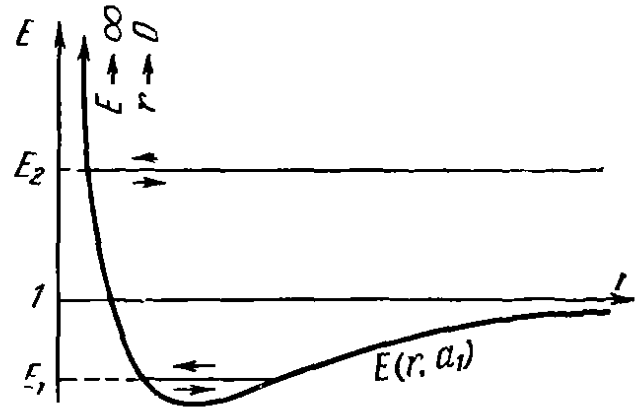


Рис. 9. Потенциальная кривая радиальной составляющей движения в ньютоновской теории при фиксированном моменте a_1 . По вертикали отложена полная энергия, включающая массу покоя частицы, в единицах mc^2 . $E_1 < 1$ — горизонталь финитного (эллиптического) движения; $E_2 > 1$ — горизонталь гиперболического движения.

а загибается вниз, стремясь к нулю на гравитационном радиусе $r=1$. Одна из таких кривых изображена на рис. 10. Кривая имеет и минимум и максимум.

Движение пробной частицы с $E_1 < 1$ в потенциальной яме (см. рис. 10) аналогично разобранным выше. Только в отличие от ньютоновской теории орбита частицы не есть замкнутая кривая (подробности см. в книге Богородского (1962)). В ньютоновской задаче «случайно» период радиальных колебаний равен времени изменения φ на 2π , что и означает замкнутость кривой:

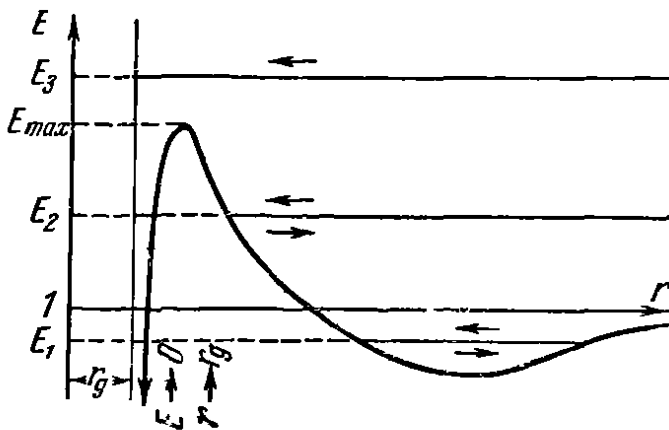


Рис. 10. Потенциальная кривая радиальной составляющей движения в ОТО при фиксированном моменте $a_1 \cdot E_1 < 1$ — горизонталь финитного движения; $1 < E_2 < E_{\max}$ — горизонталь гиперболического движения; $E_3 > E_{\max}$ — частица приближается к гравитационному радиусу и не уходит в бесконечность.

частицы с $E_3 > E_{\max, a_1}$ горизонталь $E = E_3$ не встречает потенциальной кривой. Такая частица достигает сферы гравитационного радиуса ($r=1$ в наших единицах) и не уходит больше в бесконечность. Происходит гравитационный захват частицы. Об этой важной особенности релятивистской теории подробнее сказано дальше.

Отметим еще следующее любопытное обстоятельство. Если частица имеет энергию лишь немного меньше E_{\max} , то вблизи точки поворота график правой части в (3.6.1a) подходит к нулю со сколь угодно малым наклоном, т. е. при изменении r на малую величину dr частица успевает описать сколь угодно большой угол φ , а значит, вблизи r_{\min} она может сделать много оборотов, прежде чем снова уйдет на бесконечность. В этом случае вблизи r_{\min} орбита совсем не похожа на ньютоновскую гиперболу. При $E = E_{\max}$ траектория будет навиваться на окружность $r = r_{E_{\max}}$.

в ОТО это не так. Знаменитое вековое смещение перигелия Меркурия на $42''$ в столетие есть проявление этой особенности.

При $1 < E_2 < E_{\max, a_1}$ (см. рис. 10) горизонталь $E_2 = \text{const}$ справа уходит в бесконечность, а слева упирается в кривую поворота. В этом случае частица приходит из бесконечности и уходит в бесконечность, аналогично гиперболическому движению в ньютоновской теории.

Важной особенностью потенциальной кривой в поле Шварцшильда является наличие максимума. Для

§ 7. Круговые орбиты

Если точка находится в экстремуме кривой $E(r, a_1)$, то это означает, что тождественно $dr \equiv 0$ и частица движется по кругу с $r = \text{const}$. Очевидно, что круговое движение в минимуме E устойчиво: при малом возмущении частица, получив малые изменения E и a_1 , будет совершать финитное движение (рис. 11), соответствующее $E = E_{\min} + \delta E_1$ и новой кривой поворота $E = E(r, a_1 + \delta a_1)$. Новая траектория мало отличается от прежней окружности.

Движение по окружности $r_{E_{\max}}$ в максимуме кривой E неустойчиво; теперь малое возмущение заставит частицу либо уйти в бесконечность, либо упасть к гравитационному радиусу.

Мы видели, что в ньютоновской теории потенциальная кривая при любом a имеет минимум. Следовательно, в ньютоновской теории для любого a существует устойчивая круговая орбита. Чем больше a , тем ближе орбита расположена к центру. Когда $a \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$. В эйнштейновской теории это не так: существует минимальный радиус круговой орбиты, на которой движение устойчиво, и соответственно минимальная энергия кругового движения. На это обстоятельство впервые обратил внимание С. А. Каплан (1949а). Чтобы убедиться в сказанном, достаточно построить графики $E = E(r, a)$ для разных a (рис. 12).

Мы видим, что при $a < \sqrt{3}$ графики не имеют экстремумов. При $a > \sqrt{3}$ каждая кривая имеет два экстремума — минимум и максимум (на рис. 12 отмечены вертикальными черточками). Минимумы соответствуют устойчивым орбитам и имеют $r > 3$, и соответственно $\sqrt{8/9} < E_{\min} < 1$. Координаты максимумов при a , возрастающем от $\sqrt{3}$ до ∞ , монотонно уменьшаются от $r = 3$ до $r = 3/2$, а энергия E_{\max} увеличивается от $E_{\max} = \sqrt{8/9} = 0,943$ до $E_{\max} \rightarrow \infty$.

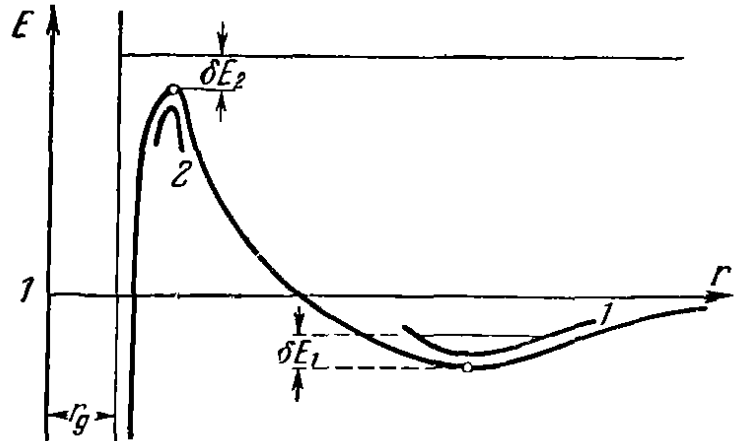


Рис. 11. Движение по круговой орбите в минимуме потенциальной кривой устойчиво, в максимуме — неустойчиво.

1 — потенциальная кривая $E = E(r, a_1 + \delta a_1)$; 2 — потенциальная кривая $E = E(r, a_2 + \delta a_2)$. На рисунке изображен случай, когда $\delta a_1 > 0$, $\delta a_2 < 0$.

Таким образом, ближайшая к центру устойчивая круговая орбита имеет $r=3$. Скорость движений на ней $v_{\text{круг}}=c/2$, соответствующая минимальная энергия $E_{\text{крит}}=0,943 mc^2$.

Напомним, что для далекого наблюдателя все процессы, в гравитационном поле протекают с замедлением в $\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}$ раз (см. § 2 и 3). Этот наблюдатель будет видеть

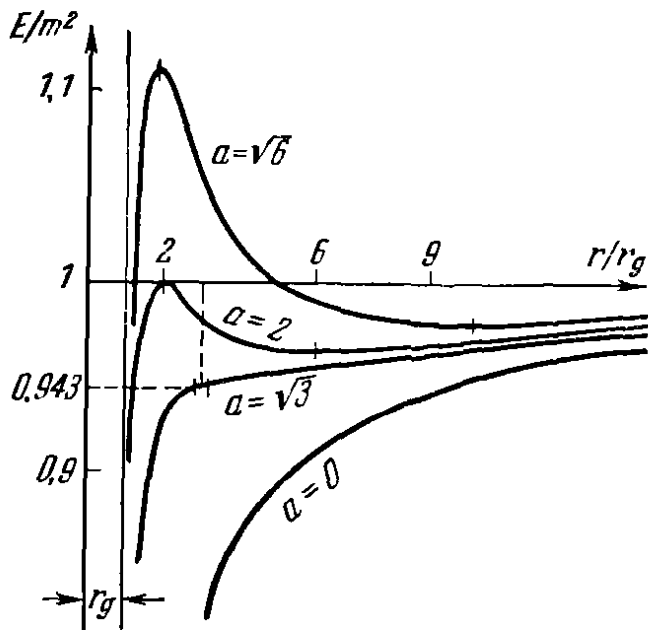


Рис. 12. Потенциальные кривые для разных моментов a . Цифры около кривых обозначают момент a , выраженный в единицах $mc r_g$

движение частицы на критической круговой орбите с периодом

$$T = \frac{12\pi}{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}} \frac{r_g}{c}.$$

Если на частице находится монохроматический излучатель с частотой ω_0 , то частота света (вышедшего вдоль или против v) воспринимаемая наблюдателем, определяется по формуле (см. § 5 гл. 3)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Первый множитель после ω_0 описывает замедление времени в гравитационном поле, второй — эффект Доплера. Для частицы, движущейся на $r_{\text{крит}}$, плоскость орбиты которой проходит через луч зрения наблюдателя, имеем: в момент движения к наблюдателю $\omega = \sqrt{2} \omega_0$ — фиолетовое смещение; в момент движения от наблюдателя: $\omega = \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_0$ — красное смещение; для покоящегося источника с тем же $r_{\text{крит}} = 3r_g$: $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_0$ — красное гравитационное смещение.

Ближе к тяготеющему центру в интервале $3/2 < r < 3$ расположены неустойчивые круговые орбиты. Скорость движения по последней из них (неустойчивой) с $r = 3/2$ равна световой $v=c$. Это соответствует бесконечной энергии $E=\infty$. Ближе к гравитационному радиусу (напомним, что он соответствует в принятых единицах $r=1$) вообще нет круговых орбит; это было отмечено еще Эйнштейном.

§ 8. Движение релятивистской частицы в кулоновском поле

Отвлекаясь несколько в сторону, рассмотрим следующую задачу: проанализируем круговое движение заряженной частицы в сильном кулоновском поле. Выводы этой задачи окажутся полезными для понимания особенностей строения плотных звезд.

Заряженная частица в сильном поле будет двигаться с релятивистской скоростью. Уравнение движения заряда e в постоянном поле E^* записывается в виде

$$\frac{dp}{dt} = eE^*.$$

Подставляя для нашей задачи $E^* = \frac{Z}{r^2} \mathbf{n}$, Z —заряд центрального тела, \mathbf{n} —единичный вектор в направлении радиуса, и $p = \frac{mv}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$,

получаем для кругового движения заряда в кулоновском поле

$$\frac{mv^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} = \frac{eZ}{r}. \quad (3.8.1)$$

Когда $r \rightarrow 0$, то $v \rightarrow c$. Перепишем (3.8.1) через момент импульса

$$a = \frac{mvr}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}:$$

$$a = \frac{\text{const}}{v}.$$

Из этого выражения видно, что при стремлении радиуса орбиты к нулю ($r \rightarrow 0$) и, следовательно, $v \rightarrow c$, момент стремится не к нулю, как в нерелятивистской теории, а к конечной величине $a_{\min} = \frac{\text{const}}{c}$.

Разумеется, сказанное останется справедливым, если мы будем рассматривать движение релятивистской частицы на круговой орбите в ньютоновском поле тяготения. Такое рассмотрение, очевидно, непоследовательно, ибо там, где скорость частицы на круговой орбите становится сравнимой с c , там сказываются и изменения в законе тяготения Ньютона. Однако полезно запомнить (это пригодится для дальнейшего), что учет только эффектов специальной теории относительности (СТО) приводит к конечному моменту при нулевом радиусе орбиты.

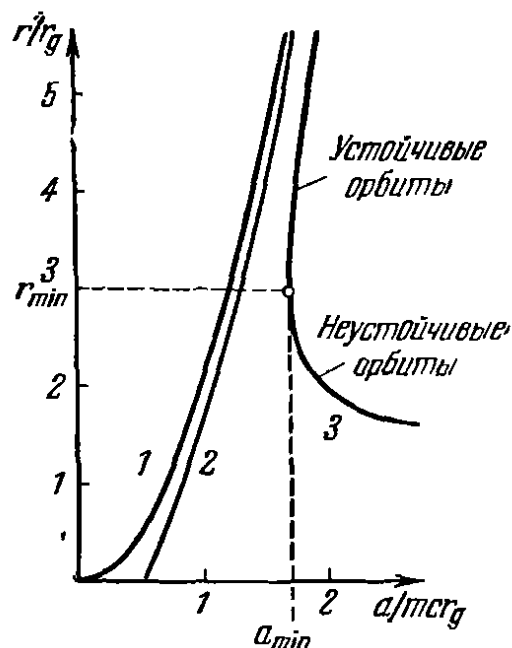


Рис. 13. Зависимость радиуса круговой орбиты r от момента a : 1—в ньютоновской теории; 2—в специальной теории относительности; 3—в общей теории относительности.

Итак, в нерелятивистской теории есть устойчивые круговые орбиты с любым r . При $r \rightarrow 0$ момент a также стремится к нулю (рис. 13). В непоследовательной теории, учитывающей только эффекты СТО, круговые орбиты могут иметь любой радиус r . При $r \rightarrow 0$ момент $a \rightarrow \text{const}$ (см. рис. 13). В ОТО имеется минимальный радиус устойчивой круговой орбиты r_{\min} и соответствующий ему момент a_{\min} (см. рис. 13).

§ 9. Гравитационный захват нерелятивистской частицы

Разберем важный для физических приложений случай движения тела, имеющего на бесконечности скорость v_∞ , пренебрежимо малую по сравнению с c и соответственно $E=1$. Проследим качественные особенности движения такого тела при разных a . Это движение на графике E, r изображается горизонталью $E=1$ (см. рис. 12). Если момент импульса на бесконечности меньше $a_{\text{крит}}=2$, то горизонталь $E=1$ не встречает кривой поворота $E=E(r, a)$ и, значит, траектория частицы заканчивается на сфере Шварцшильда.

При $a_{\text{крит}}=2$ траектория навивается на окружность. Если же $a > 2$, то тело снова уходит на бесконечность.

Когда a мало отличается от $a_{\text{крит}}=2$, частица, прежде чем уйти на бесконечность, совершает много оборотов вблизи $r=2$. Асимптотическая формула для числа оборотов имеет вид (Зельдович, Новиков (1964b))

$$N = - \frac{\ln(a-2)}{2^{3/2}\pi}.$$

Вернемся теперь к вопросу о гравитационном захвате. В ньютоновской теории частица, прилетающая из бесконечности, если она не ударяется о поверхность центрального тела, снова улетает в бесконечность — гравитационный захват невозможен. В эйнштейновой теории, как мы видели, частица с $a \leq 2$ гравитационно захватывается, и она уже не уходит в бесконечность. Сечение захвата определяется соотношением

$$\sigma_g = 4\pi \left(\frac{c}{v_\infty} \right)^2 r_g^2, \quad v_\infty \ll c. \quad (3.9.1)$$

Сравним этот захват с «геометрическим захватом» частицы тяготеющим шаром радиуса R в ньютоновской теории, т. е. со случаем, когда частица вблизи периастра наталкивается на поверхность шара. В этом случае сечение захвата будет:

$$\sigma_n = \pi \frac{2GM}{v_\infty^2} R, \quad (3.9.2)$$

где R — радиус шара. Сравнивая (3.9.1) и (3.9.2), видим, что в релятивистском случае захват происходит эффективно, так же как в ньютоновской теории с центральным телом радиуса $R=4r_g$.

Подчеркнем еще следующее. В ньютоновской теории захват на шар происходит с ударом о его поверхность. В поле Шварцшильда захваченное тело подходит к сфере Шварцшильда по спиральной траектории, совершив конечное число оборотов, асимптотически замедляя для далекого наблюдателя свою скорость. Такой подход растягивается на бесконечное время для внешнего наблюдателя, как это подробно описано в § 4 гл. 3 для случая движения по радиусу. Никакого удара здесь нет. Заметим еще, что траектория подходит к сфере Шварцшильда всегда перпендикулярно, по радиусу (см. 3.6.1a, b). Поэтому все формулы, приведенные в § 4 гл. 3 для частицы, падающей по радиусу, будут вблизи сферы Шварцшильда асимптотически справедливы и в общем случае ненулевого момента a падающей частицы*).

§ 10. Движение ультрарелятивистских частиц и лучей света

Рассмотрим теперь прямо противоположный случай движения частицы, всюду (и даже на бесконечности) являющейся ультрарелятивистской. Такими частицами всегда являются фотоны и нейтрино.

Уравнение для частицы, движущейся в поле Шварцшильда с фундаментальной скоростью c , получается из (3.4.1a, b) предельным переходом $v_\infty \rightarrow c$, что соответствует $E \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \infty$. Эти бесконечности, очевидно, следствия нормировки энергии на mc^2 , а момента на $mr_g c$. Замечая, что при $E \rightarrow \infty$, $a/E \rightarrow l$, где l — прицельное расстояние траектории на бесконечности, получаем в пределе $E \rightarrow \infty$:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{l^2}{r^2} - \frac{l^2}{r^3}, \quad (3.10.1a)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{l^2}{r^4} \left(1 - \frac{1}{r}\right). \quad (3.10.1b)$$

В ньютоновской теории отсутствует слагаемое l^2/r^3 в (3.10.1a) и $x=r$. В этом случае мы имеем равномерное движение по прямой.

Наличие члена l/r^3 и различие между r и x приводит к тому, что луч света, проходя вблизи тяготеющей массы, отклоняется от прямолинейного движения. При больших l (а значит, и больших r_{\min}) это отклонение невелико. Для луча, касающегося поверхности Солнца, оно составляет $1''75$. Именно это предсказание

*) Разумеется, мы все время подразумеваем, что в релятивистском случае движения центральная масса уже сколлапсировала, и частица не наталкивается на ее поверхность.

Эйнштейна, блестяще подтвержденное во время полного солнечного затмения 1918 г., было одним из первых экспериментальных доказательств справедливости общей теории относительности.

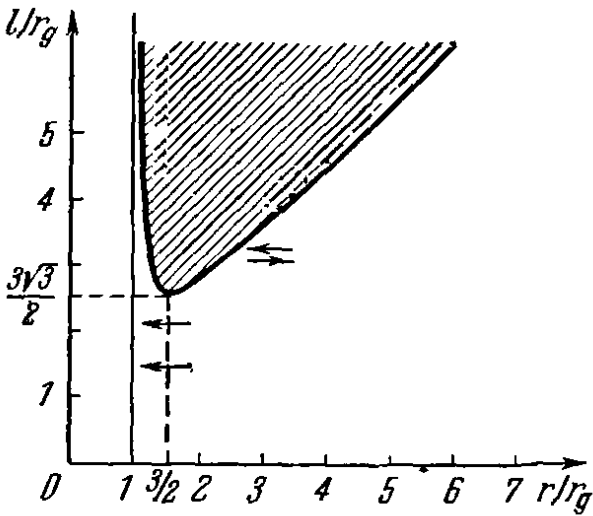


Рис. 14. Кривая зависимости r_{\min} ультрарелятивистской частицы от прицельного расстояния: l — прицельное расстояние на бесконечности. Частицы с $\frac{l}{r_g} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ гравитационно захватываются. Заштрихована область, где движение невозможно.

При малых r траектория луча может сильно отличаться от прямой. «Кривая поворота» — зависимость r_{\min} от l — изображена на рис. 14. Из этого рисунка видно, что луч (или ультрарелятивистская частица), идущий из бесконечности с прицельным параметром $l \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2,6$

(напомним, что все расстояние измеряется в единицах r_g) не встречает кривой поворота и, следовательно, гравитационно захватывается. В этом случае, как и в случае нерелятивистской частицы, траектория подходит к сфере Шварцшильда перпендикулярно.

Здесь так же вблизи предельной сферы справедливы асимптотические формулы, приведенные в § 4 гл. 3 для случая

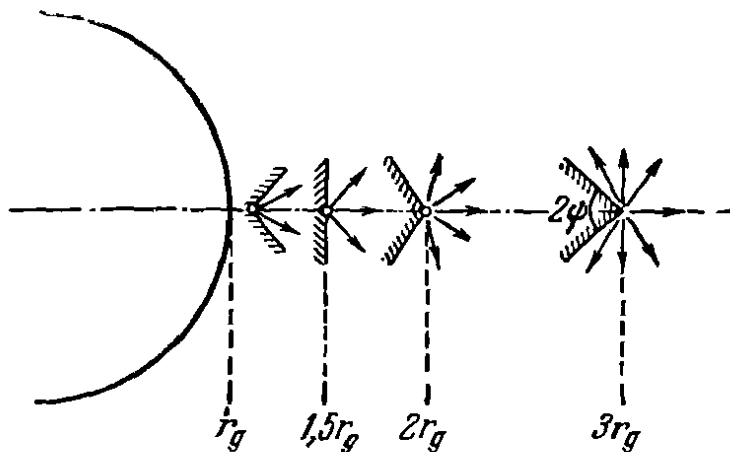


Рис. 15. Гравитационный захват излучения: лучи, вышедшие из каждой точки внутри конической полости, сечение которой заштриховано на рисунке, гравитационно захватываются.

радиального движения. В частности, время приближения луча к сфере Шварцшильда для внешнего наблюдателя растягивается в бесконечность.

Итак, сечение гравитационного захвата ультрарелятивистской частицы $\sigma = 27\pi r_g^2/4$.

Заметим еще, что луч света, испущенный источником, покоящимся на радиусе r , может уйти на бесконечность не при всех углах выхода. На рис. 15 лучи, выходящие внутри заштрихованного конуса, не уходят в бесконечность, а лучи, изображенные стрелками, уходят в бесконечность. Формула для угла ψ (см. рис. 15)

$$|\operatorname{tg} \psi| = \frac{1 - \frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{r} - 1 + \frac{4}{27} r^2}}. \quad (3.10.2)$$

§ 11. Движение тел в поле тяготения Шварцшильда с учетом гравитационного излучения

Учет гравитационного излучения даже в слабом поле тяготения качественно меняет картину движения, если энергия движения тела на бесконечности мала. Так, например, тело, имеющее на бесконечности строго нулевую энергию, после полета вблизи притягивающего центра и высвечивания энергии в виде гравитационных волн уже будет обладать отрицательной энергией, т. е. окажется гравитационно захваченным. Однако такой захват чисто формален, ибо потеря энергии при излучении в слабом поле крайне мала. Из формулы (3.11.1), выведенной ниже, следует, что, например, для двух обычных звезд одинаковой массы, сближающихся из бесконечности на расстояние порядка их размеров, захват произойдет только в том случае, если их относительная скорость на бесконечности меньше ~ 1 см/сек*). При этом их максимальное удаление после «захвата» (если скорость $v_\infty \ll 1$ см/сек) будет $\sim 3 \cdot 10^{26}$ см = 10^8 пс (!). Напомним, что размер нашей Галактики на четыре порядка меньше.

Обратимся теперь к вопросу об излучении гравитационных волн телами, движущимися в поле Шварцшильда на расстояниях, сравнимых с r_g , когда излучение велико. Существующая теория гравитационного излучения (см. Ландау и Лифшиц (1962); Эддингтон (1925)) применима только для процессов в слабом поле тяготения. Подробно эта теория описана в § 11 и 12 гл. 1. Однако из соображений размерности ясно, что приводимые в этом параграфе оценки по порядку величины должны быть верны и при движении на расстояниях, сравнимых с гравитационным радиусом центрального тела. Сделаем по этому поводу еще следующее замечание. Аналогично тому как заряд, движущийся равномерно по окружности со скоростью $v \approx c$, излучает главным образом высшие гармоники, излучение

*) В действительности дисперсия скоростей звезд Галактики в окрестности Солнца порядка десятков км/сек.

гравитационных волн телом в сильном поле тяготения, когда его скорость $v \approx c$, должно иметь такие же особенности (см. об этом работу В. И. Пустовойта и М. Е. Герценштейна (1962)). Однако в рассматриваемой задаче $v \approx c$ достигается лишь вблизи самого гравитационного радиуса, где излучение обрывается эффектами ОТО (гравитационное красное смещение, гравитационный захват излучения). При r , сколько-нибудь существенно превышающем r_g , указанные эффекты не меняют порядковых оценок.

Важной особенностью гравитационного излучения является следующее. При сближении тел под действием взаимного тяготения на расстояние порядка их гравитационных радиусов общее количество излученной энергии должно быть функцией только их масс, G и c . Из соображений размерности сразу следует, что малая константа G в формулы войти не может и общее количество высвеченной энергии должно равняться по порядку величины mc^2 , умноженной на функцию отношения массы тел m/M . Если m одного порядка с M , то можно сразу сделать вывод, что общее излучение гравитационной энергии не мало по сравнению с mc^2 , где m — масса меньшего тела (Дайсон (1963); Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков (1964в); Фаулер (1965)). Формулы приведены ниже. Общее излучение меньше величины mc^2 только за счет безразмерного численного коэффициента. Посмотрим, как влияет излучение гравитационных волн на движение массы m (Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков (1964б); см. также Смит, Хавач (1965)). Это излучение вызывает появление силы, действующей на тело, что приводит к своеобразному лучистому гравитационному трению. Сила трения вызвана взаимодействием массы m с собственным гравитационным полем и поэтому пропорциональна m^2 , в отличие от силы взаимодействия с внешним гравитационным полем, пропорциональной m . Таким образом, изменение движения тела вследствие излучения гравитационных волн, можно рассматривать в случае $m/M \ll 1$ как малую поправку к движению под действием силы внешнего поля.

При движении нерелятивистской частицы m , прилетающей из бесконечности, основная доля высвечиваемой энергии излучается при полете в вершине траектории, в периастре.

Используя общее выражение (1.11.8) для мощности гравитационного излучения, можно получить оценки для общего количества высвеченной энергии ΔE и времени высвечивания Δt :

$$\Delta E = \frac{c^2 m^2}{M} \left(\frac{r_g}{r} \right)^{3,5}, \quad \Delta t = \frac{r^{3/2}}{(2GM)^{1/2}},$$

где r — координата периастра. Потеря энергии за счет излучения приводит к тому, что тело гравитационно захватывается

массой M при значениях момента a , значительно превышающих $a=2$, когда и происходит захват пробной частицы в чисто механической задаче, описанной в § 9.

С учетом излучения, критические значения захвата a_3 и σ_3 зависят от параметра $x = \frac{c^2}{v_\infty^2} \frac{m}{M}$ и определяются следующим образом:

$$\text{для } x \gg 10, \quad a_3 = (2x)^{1/7}, \quad \sigma_3 = \pi \left(\frac{c}{v_\infty} \right)^2 (2x)^{2/7} r_g^2,$$

$$\text{для } x \ll 10, \quad a_3 = 2 + e^{-\frac{20}{x}}, \quad \sigma_3 = 4\pi \left(\frac{c}{v_\infty} \right)^2 \left(1 + e^{-\frac{20}{x}} \right) r_g^2.$$

Например, для $v \approx 10^6$ см/сек, $m/M \approx 0,1$ находим $x \approx 10^8$ и отсюда $a_3 \approx 10$, сечение σ в 25 раз больше, чем без учета излучения.

В результате захвата тело после пролета через периастр удаляется от M уже не на бесконечность, а на расстояние порядка

$$L \approx \frac{r_g}{2 \left[\frac{m}{M} \left(\frac{r_g}{r} \right)^{3/5} - \frac{v_\infty^2}{2c^2} \right]}. \quad (3.11.1)$$

При малом v_∞ и $r = 3r_g$ получаем $L \approx 600r_g$. При следующем подходе через периастр тело высветит еще энергию и т. д. Вытянутость орбиты будет быстро уменьшаться (см. § 12 гл. 1).

Как влияет гравитационное излучение на круговое движение частицы? Это движение изображается минимумами кривых на рис. 12. В результате высвечивания точка, изображающая движение, перемещается на диаграмме по минимумам кривых. Вначале, при больших r , эта эволюция очень медленна (см. § 12 гл. 1). Мощность излучения на круговой орбите определяется формулой (1.12.2). Преобразуем эту формулу к следующему виду:

$$\frac{dE}{dt} = 0,2 \frac{c^5}{G} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \left(\frac{r_g}{r} \right)^5.$$

Для обычных двойных звезд потеря энергии в год составляет 10^{-12} их полной энергии. При небольших r темп эволюции значительно выше. Уже для некоторых реальных звезд, составляющих тесные двойные системы, период обращения уменьшается за год уже на 10^{-9} долю. Круговое движение продолжается вплоть до последней устойчивости орбиты с $r_{\text{кр}} = 3r_g$ (см. § 7 гл. 3). Дальше начинается падение к сфере Шварцшильда. Энергия при движении по критической окружности составляет 0,943 от энергии при обращении на большом расстоянии. Следовательно, общее количество высвеченной энергии $\Delta E = 0,06 mc^2$ и не

зависит от массы центрального тела. Чем меньше отношение m/M , тем больше оборотов совершает тело, прежде чем высветит энергии ΔE и достигнет $r_{\text{крит}}$.

За один оборот на критической окружности высвечивается энергия $\sim 0,1 m^2 c^2 / M$. Тело переходит на спиральную орбиту, падая к сфере Шварцшильда. На этой орбите совершается еще $\sim (M/m)^{1/3}$ оборотов. Энергия, высвечиваемая за один оборот, всегда того же порядка, что и при $r=3r_g$. Таким образом, после достижения критической орбиты тело сваливается к сфере гравитационного радиуса, практически ничего не добавляя к уже высвеченной до этого энергии, если $m/M \ll 1$.

Если $m/M \sim 1$, то число оборотов после достижения критической орбиты порядка единицы, а излученная энергия того же порядка, что и до достижения этой орбиты. Хотя здесь сила лучистого трения уже не является малой поправкой к действию внешнего поля, но из соображений размерности, симметрии и соответствия с формулой для $M \gg m$ можно сразу написать приближенно формулу для высвеченной энергии, справедливую и при $m/M \sim 1$:

$$\Delta E_{\text{фин}} = \alpha \frac{c^2 m M}{m + M}, \quad (3.11.2)$$

где α — порядка 0,06.

Приведем еще формулу для общего количества высвеченной энергии при падении масс друг на друга с нулевым моментом: (лобовое движение, по прямой линии)

$$\Delta E_{\text{пад}} = \beta \frac{c^2 m^2 M^2}{(m + M)^3}. \quad (3.11.3)$$

Здесь $\beta \approx 0,02$, т. е. того же порядка, что и α . Эта формула применима при любом m/M и получена из тех же соображений, что и (3.11.2). Итак, в результате гравитационного излучения система может потерять несколько процентов энергии покоя.

§ 12. R - и T -области в пространстве — времени Шварцшильда

В § 2 гл. 3 мы видели, что радиус $r=r_g=2Gm/c^2$ имеет критическое значение. Сила тяготения F при $r=r_g$ обращается в бесконечность. Очевидно, никакое статическое тело не может иметь размер меньше r_g . Но что будет с нестатически сжимающимся телом, например, со сферическим облаком пылинок, которое сжимается под действием собственного тяготения и достигает r_g ?

В процессе сжатия масса тела M не меняется. Поэтому пылинки на поверхности шара просто падают в поле Шварцшиль-

да с массой M . Как мы видели в § 5 гл. 3, время падения до r_g конечно. Шар за конечное собственное время сожмется до r_g и будет сжиматься дальше. Только выбор недеформирующейся системы отсчета с $g_{22} = -e^\mu = -(x^1)^2$ не позволяет с ее помощью исследовать область внутри сферы Шварцшильда, ибо в этой области недеформирующихся систем отсчета не существует (Д. Финкельштейн (1958); Новиков (1961, 1962b, c)). На сфере Шварцшильда никаких особенностей в 4-мерном пространстве—времени (так называемых истинных особенностей) не существует. В частности, простейший отличный здесь от нуля инвариант, характеризующий искривленность 4-мерного континуума

$$C = R_{iklm}R^{iklm} = \frac{12r_g^2}{r^6},$$

не имеет особенности.

Проследим за сжимающимся шаром, когда его поверхность уходит внутрь сферы Шварцшильда. Для изучения поля вне шара в вакууме удобнее всего ввести систему отсчета из свободно падающих пробных частиц, имеющих на пространственной бесконечности нулевую скорость (система отсчета Леметра (1933); см. также Ю. А. Рылов (1961)). Движение таких частиц рассмотрено в § 5 гл. 3. В отличие от системы отсчета Шварцшильда, эта система охватывает и область пространства—времени внутри сферы Шварцшильда.

Квадрат интервала в этой системе записывается в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2} \frac{R - c\tau}{r_g}\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2} (R - c\tau)\right]^{4/3} r_g^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.12.1)$$

Момент пересечения падающей частицей сферы Шварцшильда определяется выражением

$$\frac{3}{2} (R - c\tau) = r_g. \quad (3.12.2)$$

Внутри сжимающегося шара в веществе решение (3.12.1) уже неприменимо и должно быть «сшито» с внутренним решением (Оппенгеймер, Снайдер (1939); Толмен (1934)). Для однородного сжимающегося пылевого шара это решение записывается в виде (подробности см. далее, § 13 гл. 3)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \left[\frac{3}{2} (R_0 - c\tau)\right]^{4/3} \frac{r_g^{2/3}}{R_0^2} [dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)],$$

где R_0 — лагранжев радиус границы шара.

Вернемся к свойствам пространства—времени в вакууме внутри сферы Шварцшильда.

С помощью условия для определения R - и T -областей (см. § 1 гл. 3), находим, что вне сферы Шварцшильда, т. е. при

$$\frac{3}{2}(R - c\tau) > r_g \quad (3.12.3)$$

лежит R -область. Внутри сферы Шварцшильда, при неравенстве, противоположном (3.12.3), лежит T -область.

Пространство — время в координатах R, τ Леметра изображено на рис. 16; угловые координаты не интересны в силу симметрии, и мы здесь и далее рассматриваем пространство — время

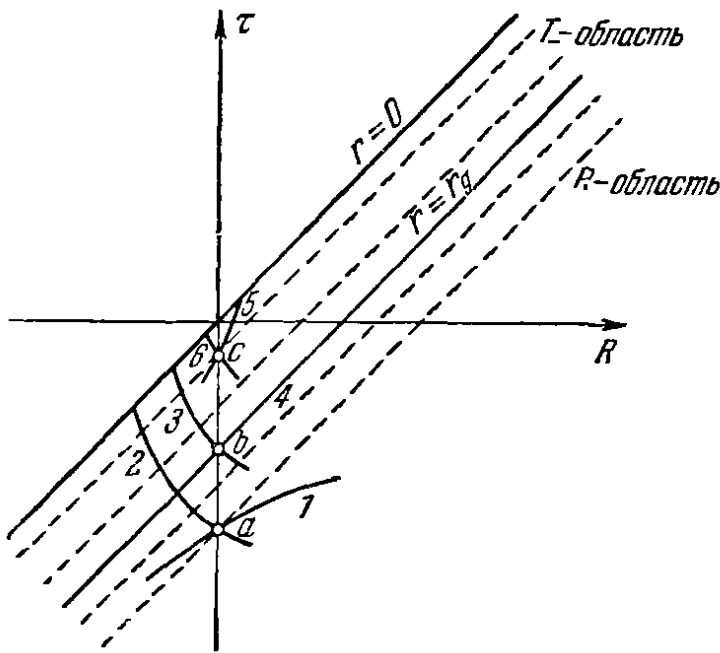


Рис. 16. Пространство — время Шварцшильда в координатах Леметра со сжимающейся T -областью. Пунктиры — линии $C = \text{const}$, в R -области они совпадают с $r = \text{const}$. Для радиальных лучей, вышедших в R -области (событие a) один идет на бесконечность (1), второй к центру (2); для события b луч 4 все время идет вдоль мировой линии гравитационного радиуса, для события c оба луча (5, 6) идут к центру.

Поэтому мы намеренно не называем в T -области величину r -радиусом. На том же рисунке 16 нанесены «световые конусы» радиальных лучей. Они определяются уравнением

$$c \frac{d\tau}{dR} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r}}, \quad r = \left[\frac{3}{2}(R - c\tau) \right]^{2/3} r_g^{1/3}. \quad (3.12.5)$$

Если вне сферы Шварцшильда (R -область) линии $r = \text{const}$ лежат внутри светового конуса и один из радиальных лучей

при фиксированных φ и θ . Каждая частица пересекает $r = r_g$ и за конечное время достигает истинной особенности пространства—времени, где инвариант кривизны C , записывающийся в координатах Леметра

$$C = \frac{12r_g^2}{\left[\frac{3}{2}(R - c\tau) \right]^6} \quad (3.12.4)$$

обращается в бесконечность. Линии $C = \text{const}$ совпадают с линиями $-g_{22} = r^2 = \text{const}$, т. е. с мировыми линиями точек фиксированной пространственноподобной координатной сферы. Эти линии $r = \text{const}$ изображены на рис. 16 пунктиром.

В T -области r , определяемая как $r^2 = g_{22}$, уже не является пространственной координатой, а имеет характер времени (см. § 1 гл. 3).

идет к центру, к меньшим r , а другой на бесконечность к большим r , то в T -области линии $r = \text{const}$ лежат вне светового конуса, и оба луча идут с увеличением кривизны и оба достигают особенности $r=0$, $C=\infty$. Мировая линия любой частицы лежит внутри светового конуса. Следовательно, любая частица в T -области движется только к истинной особенности $r=0$, $C=\infty$ и достигает ее за конечное собственное время. Движение от особенности наружу к сфере Шварцшильда здесь невозможно (Финкельштейн (1958)). Это было бы движение в прошлое.

Движение поверхности любого сферического тела можно рассматривать как движение пробной частицы (вообще говоря, не свободное, а под действием сил) в сферическом поле тяготения. Следовательно, поверхность сферической массы с любым уравнением состояния вещества (а не только пыль с $P=0$) после сжатия до размеров, меньших r_g , будет неограниченно сжиматься дальше и за конечное собственное время сожмется в точку $r=0$, достигнув $C=\infty$. Никакое внутреннее давление в сжимающемся шаре не в состоянии остановить сжатие в T -области. Мы здесь не останавливаемся на вопросах об устойчивости процесса сжатия (см. об этом § 2 гл. 19), о пределах применимости ОТО при больших плотностях и кривизнах C (см. § 6 гл. 4) и о том, что будет дальше со сжимающимся веществом (см. § 6 гл. 4).

Подчеркнем, что лучи света, вышедшие с поверхности тела после пересечения $r=r_g$, не идут к внешнему наблюдателю в R -области, и он о процессах в T -области ничего не узнает. Это явление носит название *гравитационного самозамыкания*.

В T -области есть очевидная несимметрия по отношению к направлению течения времени. В рассмотренном нами случае все движения в T -области направлены к $r=0$, $C=\infty$; обратных движений нет. Такую T -область удобно называть *сжимающейся* и обозначить T_- .

Уравнения ОТО инвариантны относительно выбора знака времени. Если в формулах (3.12.1) — (3.12.5) заменить τ на $-\tau$, то получим второй тип T -области — расширяющуюся T_+ -область с прямо противоположными свойствами (рис. 17). Здесь все тела движутся только от особенности $C=\infty$ наружу. Лучи света выходят из-под сферы Шварцшильда и не могут в нее войти из R -области. Этот тип T_+ -области в вакууме может быть «сшит» с внутренним решением расширяющегося шара, а не сжимающегося, как в случае T_- -области. Одновременное сосуществование в одном и том же месте T_- - и T_+ -областей, очевидно, невозможно.

Таким образом, физическое продолжение пространства—времени «внутри» сферы Шварцшильда (T -область) обладает двузначностью. При одном продолжении движение любых пробных

частиц и лучей света направлено внутрь от сферы Шварцшильда (T_- -область). При другом продолжении все движения направлены наружу (T_+ -область).

Такая неоднозначность отмечалась неоднократно, но важно подчеркнуть, что выбор между указанными продолжениями решения Шварцшильда в T -область не произволен, а физически определен условиями возникновения этой области (Новиков (1964b, d)). Если она возникает при сжатии шара до размеров,

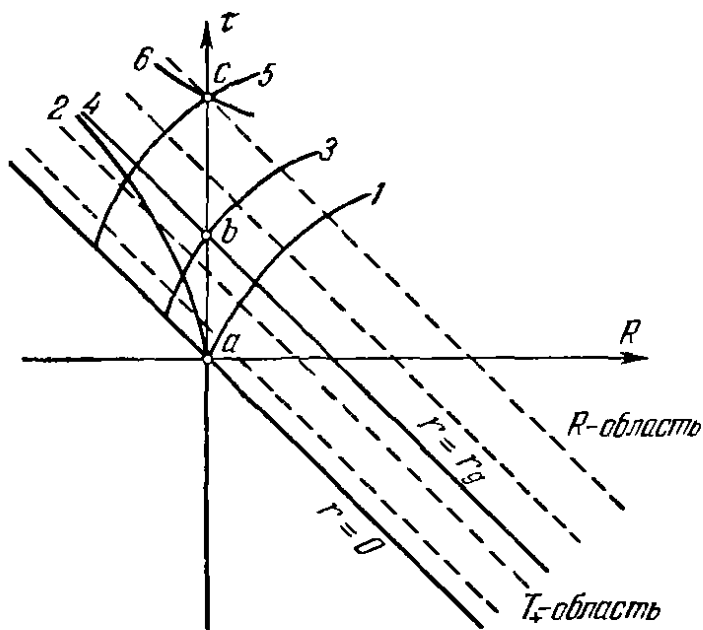


Рис. 17. Пространство — время Шварцшильда в координатах Леметра с расширяющейся T_+ -областью; изображены радиальные лучи, выходящие из событий a , b , c .

меньших гравитационного радиуса, т. е. поверхность после пересечения сферы Шварцшильда движется внутрь, то по непрерывности и пробные частицы вблизи поверхности должны двигаться внутрь, т. е. возникает T_- -область. Если с самого начала задавать скорости вещества шара с размерами меньше r_g направленными наружу, то решение внутри вещества может быть «сшито» только с T_+ -областью в вакууме.

блюдатель на поверхности сжимающейся звезды за конечное собственное время пересекает сферу Шварцшильда и достигает центральной особенности $S = \infty$. Будем рассматривать это явление в обратном порядке по времени. Тогда поверхность звезды, начиная расширяться от точки, за конечное собственное время пересечет сферу Шварцшильда и будет продолжать расширяться дальше. Так как при коллапсе время достижения сферы Шварцшильда для внешнего наблюдателя бесконечно, то, казалось бы, он будет видеть обратный процесс расширения от сферы Шварцшильда тоже бесконечно долгим, и уже не сможет увидеть то, что было до выхода из-под критической сферы.

В действительности это не так. Как уже отмечалось выше, лучи света свободно выходят из T_+ -области, и картина расширения не есть обращение во времени картины сжатия, а протекает принципиально иначе (Новиков, Озерной (1963); Фолькнер, Хойл, Нарликар (1964)). Причина этого, грубо говоря, со-

Рассмотрим теперь, как расширение шара из-под сферы Шварцшильда выглядит для внешнего наблюдателя. При коллапсе на-

блюдатель на поверхности сжимающейся звезды за конечное собственное время пересекает сферу Шварцшильда и достигает центральной особенности $S = \infty$. Будем рассматривать это явление в обратном порядке по времени. Тогда поверхность звезды, начиная расширяться от точки, за конечное собственное время пересечет сферу Шварцшильда и будет продолжать расширяться дальше. Так как при коллапсе время достижения сферы Шварцшильда для внешнего наблюдателя бесконечно, то, казалось бы, он будет видеть обратный процесс расширения от сферы Шварцшильда тоже бесконечно долгим, и уже не сможет увидеть то, что было до выхода из-под критической сферы.

В действительности это не так. Как уже отмечалось выше, лучи света свободно выходят из T_+ -области, и картина расширения не есть обращение во времени картины сжатия, а протекает принципиально иначе (Новиков, Озерной (1963); Фолькнер, Хойл, Нарликар (1964)). Причина этого, грубо говоря, со-

стоит в следующем. Явление затухания процессов при коллапсе объясняется совместным действием двух эффектов: замедления течения времени в сильном поле и (обобщенным) эффектом Доплера при удалении от наблюдателя поверхности сжимающейся звезды. Оба эффекта направлены в сторону замедления процессов. При расширении поверхности эффект Доплера действует в сторону ускорения для внешнего наблюдателя процессов на звезде. Этот эффект оказывается сильнее, чем замедление процессов в гравитационном поле. Внешний наблюдатель увидит эволюцию начиная не от застывшей картины при $R=r_g$, а увидит весь процесс расширения, начиная с точечных размеров.

В случае расширения поверхности шара с параболической скоростью (т. е. со скоростью, обращаемой в нуль на пространственной бесконечности) на рис. 18 приведен график изменения со временем частоты света для луча, приходящего к далекому наблюдателю из центра видимого диска. Через время $t_\infty \approx 0,28r_g/c$ по часам наблюдателя

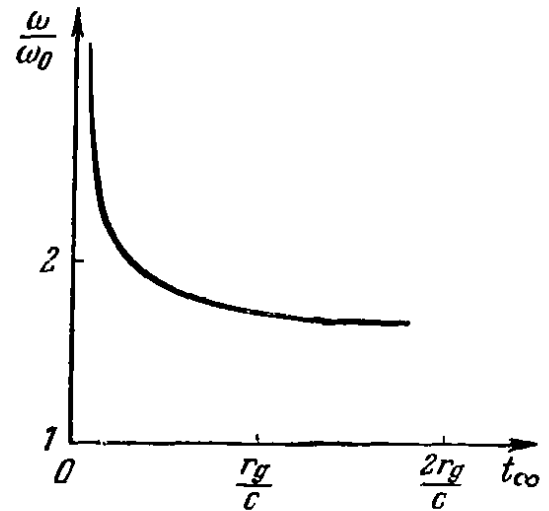


Рис. 18. Изменение частоты света, приходящего к далекому наблюдателю от центра видимого диска шара, который расширяется с параболической скоростью.

после прихода к нему первых лучей, вышедших в момент начала расширения поверхности от точки, наблюдатель увидит в центре видимого диска лучи, покинувшие поверхность в момент пересечения ею сферы Шварцшильда. Видимая частота этих лучей вдвое больше испущенной. В этот момент наблюдатель видит диск, имеющий угловые размеры $\varphi = 0,43 r_g/r$.

§ 13. Внутреннее решение для нестатического шара

Уравнения Эйнштейна (3.1.2) — (3.1.5) для сферического случая не могут быть решены в аналитическом виде в общем случае, для области внутри вещества с давлением, не говоря уже об учете переноса энергии и т. п. Решать их можно численными методами. Впервые такой расчет для сжимающейся звезды был проделан на электронной машине М. А. Подурцом (1964). Однако, как мы видели в предыдущем параграфе, качественные особенности движения поверхности шара в T -области не зависят от уравнения состояния вещества.

Оказывается, что и некоторые важные свойства решения внутри вещества качественно также не зависят от уравнения

состояния и могут быть получены при рассмотрении простейшего случая $P=0$ (пыль). В этом случае уравнения Эйнштейна полностью интегрируются аналитически (Толмен (1934)). Мы приводим здесь это решение (в виде, данном Ландау и Лифшицем (1962)) и некоторые выводы из него, откладывая разбор других следствий до следующего параграфа и IV раздела книги.

Решение записывается в сопутствующих (лагранжевых) координатах. При отсутствии давления пылинки движутся свободно и, следовательно, $g_{00} \equiv 1$ (см. § 6 гл. 1). Решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 - r^2(R, \tau)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\lambda dR^2, \\ e^\lambda &= \frac{r'^2}{1+f(R)}, \quad \dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}, \\ \frac{8\pi G\rho}{c^2} &= \frac{F'(R)}{r'r^2}. \end{aligned} \right\} (3.13.1)$$

Штрих означает дифференцирование по R , точка — по τ ; уравнение для \dot{r} очевидно интегрируется. Решение зависит от двух (после выбора координат) произвольных функций от R^*): $f=f(R)$ и $F=F(R)$; из уравнения для e^λ следует: $1+f > 0$. Эти функции определяют в начальный момент распределение и скорость движения вещества.

Важным свойством решения Толмена (3.13.1) является следующее. Произвольные функции f и F , определяющие решение, можно задавать, начиная от центра шара, где $r \equiv 0$, и дальше по радиусу R . При этом задание функций вблизи центра, скажем, до радиуса R_0 , никак не зависит от того, как будут задаваться функции вне сферы R_0 .

Иными словами, свойства решения внутри лагранжевой сферы R_0 никак не зависят от распределения и движения (сферически-симметричного!) вещества вне этой сферы. Внешнего вещества может совсем не быть или оно может простирается до бесконечности, это никак не влияет на вещество вблизи центра.

Сделанный вывод и дает основание не рассматривать влияние поля тяготения неограниченно простирающейся материи Вселенной**) на поле вблизи изолированного тела.

Если рассматривать не пыль, а вещество с отличным от нуля давлением, то вывод изменится лишь в том отношении, что при изменении решения вне сферы R_0 внутрь будет распространяться возмущение со скоростью звука. До тех мест, до которых это

*) В действительности после интегрирования уравнения с \dot{r} появляется еще одна функция от R . Однако если выбран масштаб по оси R (для фиксированного r), то эта функция уже не произвольна.

**) Если, конечно, движение этой материи однородно и изотропно (см. раздел IV).

возмущение еще не успело дойти, решение по-прежнему не зависит от внешнего вещества. Итак, внешнее вещество в сферически-симметричном случае (и только в этом случае!) гравитационно не влияет на внутреннее.

Точно так же как и в теории Ньютона, сферически-симметричное распределение вещества (движущегося только радиально!) не создает гравитационного поля внутри сферической полости. В последнем легко убедиться, так как в вакууме в полости сферическое поле может быть только полем Шварцшильда (Биркгоф, (1923); см. § 2 гл. 3), а это поле имеет особенности в центре, чего в пустой полости быть не может.

Сделаем в заключение следующее замечание. В ньютоновской теории внутри полой сферы нет поля, но потенциал φ , принимаемый равным нулю на бесконечности, конечно, не нуль. Он равен работе, которую нужно затратить, чтобы удалить частицу из полости на бесконечность. В полости $\varphi = \text{const} \neq 0$ и потенциал равен

$$\varphi = \int_{R_1}^{\infty} \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{r}, \quad (3.13.2)$$

где R_1 — внутренняя граница вещества. Добавление сферического слоя вещества к уже имеющейся сфере, конечно, ничего не изменит внутри, не создаст никакого поля, но изменит нормировку потенциала. Если по-прежнему считать, что $\varphi_{\infty} = 0$, то внутри добавленной сферы потенциал увеличится на постоянную величину, даваемую интегралом (3.13.2), где R_1 и ρ теперь относятся к добавленной сфере.

То же относится и к величине g_{00} в теории Эйнштейна, которая играет роль потенциала. Внутри полости эта величина постоянна, но не равна своему значению на бесконечности: $g_{00} = \text{const} \neq (g_{00})_{\infty}$. Мы вернемся к этому в § 7 гл. 10.

§ 14. Метрика Крускала

Вернемся к решению Шварцшильда в вакууме. Мы видели, что система координат Шварцшильда (3.2.1) применима только в R -области и не охватывает всего пространства — времени. Система Леметра (3.12.1) применима и в R - и в T -области. Однако, как показал Крускал (1960), и эта система в некотором смысле не полна.

Для пояснения сказанного оставим пока в стороне вопрос о «сшивке» решения в вакууме с решением для вещества, создающего поле тяготения и будем продолжать решение в вакууме на максимально возможную мировую область. Такой

областью в координатах Леметра R, τ (с T_+ -областью для конкретности, т. е. с заменой $\tau \rightarrow -\tau$ в формулах (3.12.1) — (3.12.5)) является на рис. 19а полуплоскость правее линии особенности $r=0$. Охватывает ли эта область все пространство — время, т. е. историю всех движущихся частиц?

Рассмотрим в такой системе частицу, свободно падающую к гравитационному радиусу $r=r_g$. Закон ее движения в расширяющейся системе Леметра записывается в виде ($r_g=1, c=1$)

$$\text{const} = R + 2\tau + 4 \left[\frac{3}{2} (R + \tau) \right]^{1/3} + 2 \ln \left| \frac{\left[\frac{3}{2} (R + \tau) \right]^{1/3} - 1}{\left[\frac{3}{2} (R + \tau) \right]^{1/3} + 1} \right|. \quad (3.14.1)$$

Мировая линия этой частицы изображена на рис. 19а. Эта линия асимптотически подходит к $r=r_g$. Но ведь мы знаем (см. § 5 гл. 3), что частица за конечное собственное время достигает $r=r_g$ и движется дальше. Однако расширяющаяся система

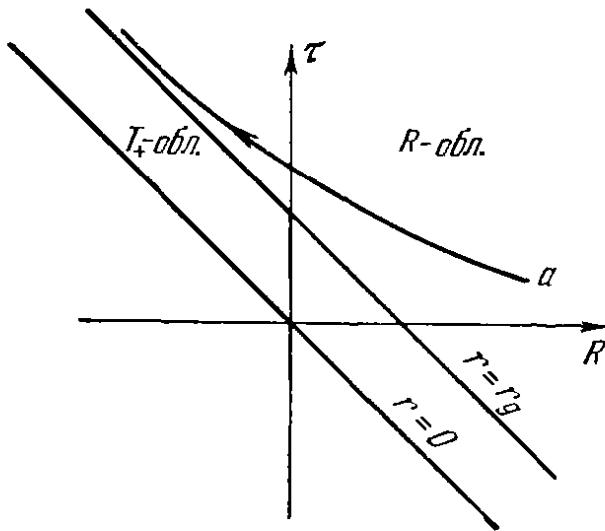


Рис. 19а. Мировая линия свободно падающей частицы (a) в расширяющейся системе Леметра.

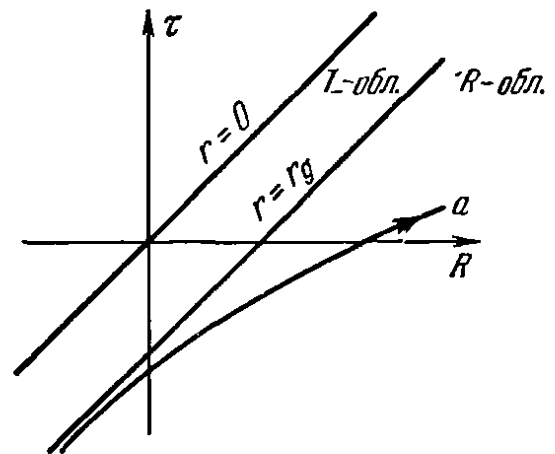


Рис. 19б. Мировая линия улетающей с параболической скоростью частицы (a) в сжимающейся системе Леметра.

Леметра не охватывает тех событий в жизни частицы, которые происходят после достижения r_g . Следовательно, эта система не полна. Она описывает полностью историю только вылетающих из-под сферы Шварцшильда частиц, но не описывает всей истории падающих частиц. Для сжимающейся системы Леметра (с T_- -областью) сказанное можно повторить для прошлого частицы, летящей от гравитационного радиуса (рис. 19б).

Таким образом, система Леметра не охватывает всех событий в сферическом поле тяготения в вакууме и в этом смысле не полна *).

Крускал (1960) первым нашел систему отсчета, полную в указанном смысле. Мы приведем здесь (имея в виду дальнейшие приложения) другую систему отсчета (Новиков (1963; 1964d)), обладающую той же полнотой, что и крускаловская, но которая осуществляется системой свободных пробных частиц (в отличие от системы Крускала, где пробные частицы, ее осуществляющие, движутся не свободно).

Эта система может быть получена из общего решения Толмана (3.13.1). Из последнего уравнения (3.13.1) следует, что в вакууме $F = F_0 = \text{const}$. Далее, систему отсчета выберем так, чтобы в момент $\tilde{\tau} = 0$, $\dot{r} = 0$ во всем пространстве. Наконец, масштаб радиальной координаты выберем так, чтобы при $\tilde{\tau} = 0$, $r = r_g(\tilde{R}^2 + 1)$ **). Эти условия полностью определяют решение. F и f имеют следующие значения:

$$F = r_g, \quad f = -\frac{1}{\tilde{R}^2 + 1}.$$

Решение может быть записано в следующем виде:

$$ds^2 = c^2 d\tilde{\tau}^2 - e^\lambda d\tilde{R}^2 - r^2(\tilde{R}, \tilde{\tau})(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.14.2)$$

$$e^\lambda = \frac{r'^2(\tilde{R}^2 + 1)}{\tilde{R}^2}, \quad (3.14.3)$$

$$\frac{\tilde{\tau}}{r_g c} = -(\tilde{R}^2 + 1) \sqrt{-\frac{r^2/r_g^2}{\tilde{R}^2 + 1} + \frac{r}{r_g}} + (\tilde{R}^2 + 1)^{3/2} \times \\ \times \left[\arcsin \sqrt{\frac{r/r_g}{\tilde{R}^2 + 1}} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.14.4)$$

Последнее уравнение определяет функцию $r = r(\tilde{R}, \tilde{\tau})$. Напишем уравнение истинной особенности $r = 0$ и гравитационного

*) Если рассматривать не пустое везде пространство, а шить решение Леметра для вакуума с решением внутри вещества (формула (3.13.1)), то полученное решение будет, разумеется, полным и будет описывать историю всех частиц. Мы в тексте намеренно стали на формальный путь рассмотрения пустого везде пространства.

**) Если $\dot{r} = 0$, то r не может быть меньше r_g , ибо в T -области невозможно $\dot{r} = 0$. (См. § 12 гл. 3 и подробнее работу Новикова, 1964d.)

радиуса $r=r_g$ в нашей системе координат. Эти условия запишутся соответственно в виде

$$r=0, \quad \frac{\tilde{\tau}}{r_g c} = \pm \frac{\pi}{2} (\tilde{R}^2 + 1)^{3/2}, \quad (3.14.5)$$

$$r=r_g, \quad \frac{\tilde{\tau}}{r_g c} = -(\tilde{R}^2 + 1) \sqrt{1 - \frac{1}{\tilde{R}^2 + 1}} + (\tilde{R}^2 + 1)^{3/2} \times \\ \times \left[\arcsin \sqrt{\frac{1}{\tilde{R}^2 + 1}} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.14.6)$$

Исследуем полученное решение.

Каждая частица, покоящаяся в системе $\tilde{R}=\text{const}=\tilde{R}_0$, начинает свою историю с истинной особенности $r=0$ в момент, определяемый (3.14.5) со знаком (—). Она движется в T_+ -области от $r=0$ к $r=r_g$, выходит из под сферы Шварцшильда $r=r_g$ в момент $\tilde{\tau}$, определяемый (3.14.6), достигает в момент $\tilde{\tau}=0$ наибольшего удаления r , определяемого соотношением

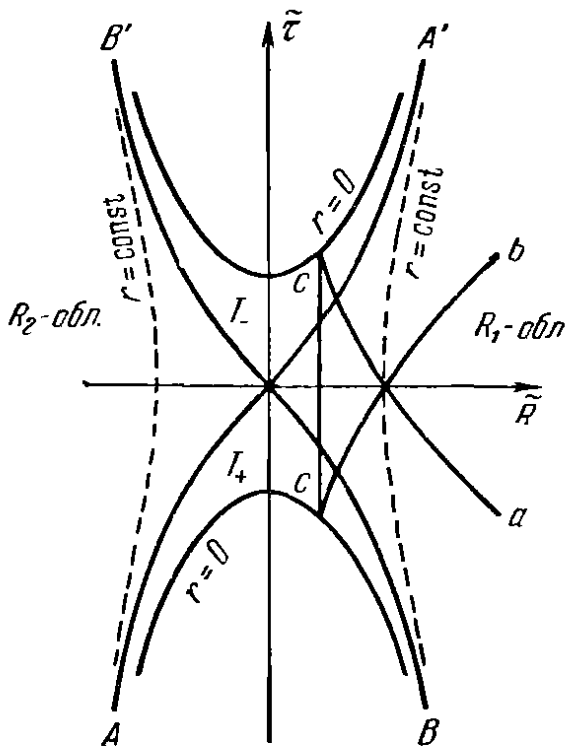
$$r = r_g (\tilde{R}^2 + 1),$$

затем снова начинает падать к сфере Шварцшильда, достигает ее в момент $\tilde{\tau}$, определяемый в (3.14.6) вторым значением \arcsin , и вновь достигает $r=0$ в момент $\tilde{\tau} = \frac{\pi}{2} (\tilde{R}^2 + 1)^{3/2} r_g c$.

Картина расположения R - и T -областей в координатах \tilde{R} и $\tilde{\tau}$ изображена на рис. 20. Во-первых, легко видеть, что система обладает свойством полноты: любая мировая линия свободной частицы либо начинается и (или) заканчивается на истинной особенности $r=0$, либо неограниченно идет в бесконечность. Система охватывает всю историю частиц.

Далее, расширяющаяся система Леметра охватывает только часть изображенного на рисунке пространства — времени, а именно, правее линии AA' (либо левее BB'). Соответственно

Рис. 20. Пространство — время Крускала. AA' и BB' — линии $r=r_g$; они являются границами R и T областей; a, b, c — мировые линии свободных частиц, a — падающей, b — улетающей, c — движущейся с эллиптической скоростью. Пунктирные кривые — линии $r = \text{const}$.



сжимающаяся система охватывает область правее BB' (либо левее AA').

Наиболее поразительным в нарисованной картине является наличие двух R -областей, R_1 и R_2 . Они соответствуют двум пространствам, евклидовым на бесконечности, соединенным через узкую «горловину» ($\tilde{R}=0$) — сферу минимального (в данный момент $\tau=\text{const}$) радиуса*). Радиус «горловины» меняется, увеличиваясь от нуля до r_g и снова уменьшаясь до нуля.

Мировые линии покоящихся в системе Шварцшильда наблюдателя $r=\text{const}$ в R_1 - и R_2 -областях изображены на рис. 20. Эти линии охватывают время наблюдателя от минус бесконечности до плюс бесконечности.

Никакой сигнал не может попасть из области R_1 в R_2 и наоборот**). Наблюдатели не могут получить никакой информации из «другой» R -области.

На рис. 21 изображено значение $r=r(\tilde{R})$ как функции лагранжа радиуса в разные моменты времени $\tilde{\tau}$. Величина $4\pi r^2$ является площадью сферы, охватывающей центр симметрии. Момент $\tilde{\tau}_0=0$, $\dot{r}=0$ есть момент максимального расширения системы отсчета.

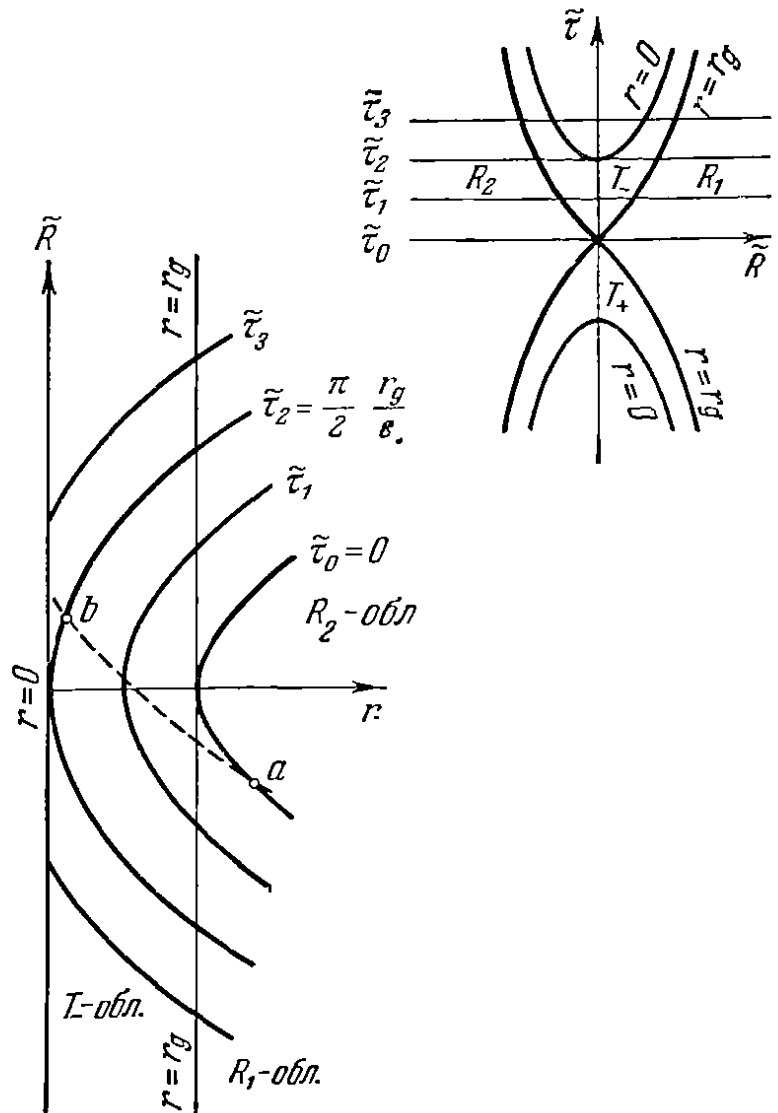


Рис. 21. Радиус сферы r как функция лагранжа радиуса \tilde{R} в разные моменты времени $\tilde{\tau}$. Вверху справа — пространственные сечения, для которых изображены на левом рисунке зависимости $r=r(\tilde{R})$. Пунктир ab — движение пробной частицы.

*) Такого рода топология пространства рассматривалась еще Эйнштейном и Розеном (1937).

***) Из T_+ можно попасть во все три области T_- , R_1 и R_2 . Из R_1 и R_2 только в T_- , но ни в какую другую. Из T_- вообще нельзя выйти, все другие области лежат для нее в абсолютно прошлом.

В этот момент нигде в пространстве нет сферы с $r < r_g$. В следующий момент $\tilde{\tau}_1$ система сжимается, и минимальный радиус горловины меньше r_g . При $\tilde{\tau}_3 > \frac{\pi}{2} \frac{r_g}{c}$ пространственное сечение уже двусвязно*). В области T_- -частицы и фотоны движутся только справа налево на рис. 21. Очевидно, что из R_1 нельзя попасть в R_2 (и наоборот).

Полученные выводы о двух евклидовых пространствах, соединенных узкой горловиной, кажутся весьма странными, и на первый взгляд пространство с такой топологией представляется математическим курьезом, не имеющим физического смысла.

Сразу же оговоримся, что метрика Крускала имеет ясный физический смысл (Новиков (1963); Гаррисон, Торн, Вакано, Уилер, (1965)). Два евклидовых пространства получились вследствие того, что мы использовали решение для поля тяготения, созданного веществом, а сшивки с веществом не произвели. Как будет показано далее в разделе IV книги (см. § 2 гл. 16), при сшивке решения для метрики Крускала для вакуума с решением для вещества наличие горловины времени не приводит ко второму евклидову пространству.

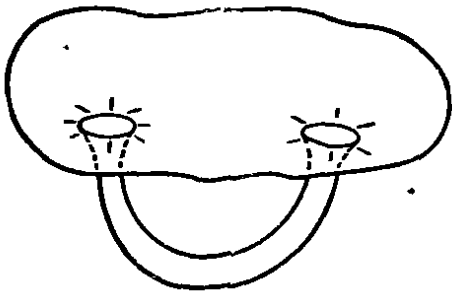


Рис. 22. Топологическая ручка Уилера.

Тем не менее в литературе появляются работы (см., например, Уилер (1955); Андерсон, Гаутроу (1966); Белифанте (1966), Израэль (1966)), в которых авторы пытаются «избавиться» от второй R -области без рассмотрения сшивки вакуумного решения с веществом.

Одним из таких направлений является попытка Уилера (1955) дать следующую топологическую интерпретацию метрике Эйнштейна и Розена (1937), топологически подобной метрике Крускала. Горловина или «ручка», как называет Уилер, следуя топологической терминологии, связывает две области одного и того же физического пространства, чрезвычайно удаленные друг от друга (см. рис. 22, где изображена двумерная аналогия трехмерного пространства в некоторый момент). Такая топология требует наличия «исконно геометродинамических объектов», неизвестных физике, и никак не связанных с реальными известными процессами. Поэтому мы на такой возможности останавливаться не будем.

*) Для $\tilde{\tau} < 0$ картина протекала в обратном порядке.

Другие авторы (Андерсон, Гаутроу (1966); Беллинфанте (1966); Израэль (1966)) «избавляются» от второй R -области более радикальным путем — ценой отказа от принципа причинности (!) в T - и R -области вблизи r_g . Суть этих работ состоит в следующем.

Отождествим на рис. 23 точки с координатами \tilde{R} , $\tilde{\tau}$ и $-\tilde{R}$, $-\tilde{\tau}$ и посмотрим, к каким физическим выводам это приведет. Будем из R_1 -области (R_2 теперь отображено на R_1 !) посылать лучи к r_g (рис. 23). После достижения $r=0$ в точках A, B, C фотоны «отражаются» от $r=0$ и из $A' \equiv A, B' \equiv B, C' \equiv C$ идут к r_g , выходят в R -область и снова встречаются сами с собою в прошлом в точках D, E, F .

Можно показать, что такие встречи фотонов всегда происходят при *) $r = r_0 \approx 1,28 r_g$. Таким образом, нарушается принцип причинности. Однако нарушения эти происходят только при $r < r_0$. Если $r > r_0$, то фотон или частица с массой покоя, не равной нулю, «отразившись» от $r=0$, вернется к тому же r уже в момент более поздний, чем момент испускания, и нарушения причинности нет.

В T -области ситуация в этой гипотезе еще более «тяжелая»: там не только нет причинности, но и нельзя однозначно определить направление течения времени. Так, фотон из точки B' движется налево до G' . Это означает то же, что он от B движется к G , т. е. «вспять» по времени, по отношению к фотону EGB . Достигнув $G' \equiv G$, он не может выйти в R -область (где направление времени определено!) и падает снова к $B \equiv B'$, повторяя «вспять» свою же историю. Аналогичная ситуация имеет место и для частиц с $m_0 \neq 0$. Итак, причинность нарушается, хотя и только в области с $r < r_g$.

С такой интерпретацией метрики Крускала нельзя согласиться по многим причинам. Во-первых, она противоречит основе ОТО — принципу эквивалентности (см. § 1 гл. 1). Согласно этому принципу, пространство — время локально —

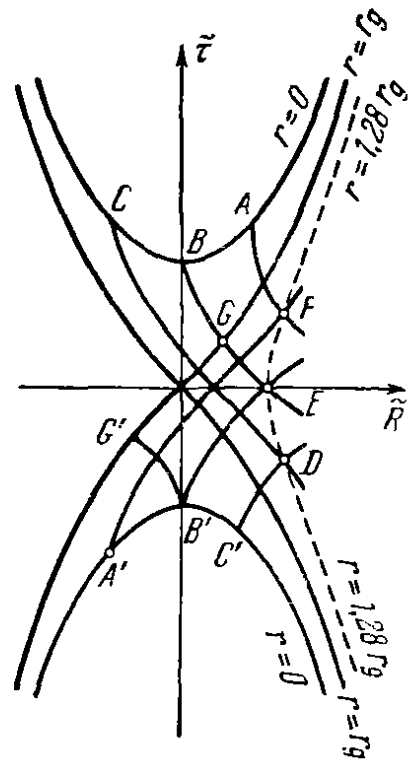


Рис. 23. Мировые линии световых лучей в пространстве—времени Крускала с отождествлением $\tilde{R}, \tilde{\tau} \rightarrow -\tilde{R}, -\tilde{\tau}$. Обозначения см. в тексте.

*) r_0 есть корень уравнения $\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{-r/r_g} = 1$.

лоренцово. В свободно падающей системе тяготение локально никак не проявляется, и в T -области, точно так же, как и везде в малой окрестности любого события, можно ввести локально лоренцову систему, в которой соблюдается причинность и световым конусом определено направление от прошлого к будущему.

Во-вторых, симметрия картинки на рис. 23 и возможность отождествления $\tilde{R}, \tilde{\tau} \rightarrow -\tilde{R}, -\tilde{\tau}$ имеют место только при полном отсутствии вещества. Если же мы рассмотрим реальную задачу возникновения T -области при сжатии разреженного первоначально вещества, то вся область рис. 20, лежащая левее линии a — границы сжимающегося шара, находится в веществе. Там решение для вакуума неприменимо, надо рассматривать решение в веществе (см. об этом далее, § 2, гл. 16), и манипуляции с отождествлением невозможны.

Наконец, в разделе IV § 4 гл. 16 будет показано, что при однородном в большом масштабе распределении вещества во Вселенной и изотропном движении его в космологической модели также есть T -области в веществе. В них, следуя логике авторов рассматриваемой гипотезы, также должна нарушаться причинность. Но эти области можно исследовать современными наблюдательными средствами!

Мы не будем задерживаться дальше на рассматриваемой гипотезе. Повторяем, что метрика Крускала имеет ясный физический смысл. Однако мы поставим здесь точку, отложив физическую интерпретацию метрики Крускала до IV раздела § 2 гл. 16. Это делается не для того, чтобы, заинтриговав читателя, заставить его читать еще один раздел книги. Разбираемый вопрос имеет самое непосредственное отношение к космологической проблеме. Поэтому он будет изложен в разделе «Космология».

ГЛАВА 4

НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Введение

В предыдущей главе исследованы важнейшие свойства сферического поля. Ясно, что в реальных задачах условие сферической симметрии выполнено лишь с определенной точностью. Поэтому возникает вопрос, насколько полученные выводы являются общими, не связанными специально с симметрией задачи.

Для этого надо рассмотреть поля тяготения в несферическом случае. В общем случае эта задача необычайно сложна. Движение несимметричных масс сопровождается изменением поля, излучением гравитационных волн и т. д. Однако для решения принципиальных вопросов достаточно исследовать *малые* отклонения от сферической симметрии; это позволяет применить метод малых возмущений и сильно упрощает исследование.

В приложениях к астрофизическим задачам наибольший интерес представляют отклонения от сферической симметрии, связанные с вращением звезды, т. е. отклонения с сохранением осевой симметрии. Разумеется, сохранение осевой симметрии так же значительно упрощает математические вычисления и позволяет в ряде случаев получить точные частные решения без предположения о малости отклонений от сферической симметрии.

Следующие три проблемы, связанные с отклонениями от сферической симметрии, имеют большое значение для астрофизики:

1. Как будут изменяться с течением времени малые флуктуации материи и гравитационного поля в однородном и изотропном, расширяющемся или сжимающемся веществе *)?

2. Как повлияет вращение сверхплотной звезды на ее гравитационное поле?

*) Движение при условии однородности и изотропии, очевидно, можно считать сферически-симметричным. Подробнее см. § 1 гл. 15.

3. Как будет проходить гравитационное сжатие вращающейся сплюснутой звезды при уменьшении ее размеров до $R \sim r_g = \frac{2GM}{c^2}$? Сохраняются ли в этом случае качественные выводы, полученные для сферического случая в §§ 4, 5, 9, 10, 12 предыдущей главы?

Первая проблема имеет важнейшее значение для космологии и будет рассмотрена в соответствующем разделе «Космология»; две другие проблемы связаны с релятивистскими стадиями эволюции звезд и звездных систем. В этой главе будут рассмотрены свойства сильного поля тяготения вращающейся звезды и свойства поля тяготения сжимающегося тела с малыми отклонениями от сферической симметрии и слабо вращающегося. Применение выводов к физике звезд будет дано во втором разделе книги.

Мы начнем с исследования стационарных решений. Поле вращающейся статической звезды является стационарным. Кроме того, оказывается, что многие выводы об изменении поля при сжатии несферического тела также следуют из рассмотрения стационарных решений. Метод малых возмущений рассмотрен Редже и Уилером (1957). В изложении мы следуем в основном работе А. Г. Дорошкевича, Я. Б. Зельдовича, И. Д. Новикова (1965) и, как правило, не ссылаемся в дальнейшем на нее, приводя полученные там результаты.

§ 2. Статическое поле с аксиальной симметрией

Статическая задача для аксиально-симметричного поля, квадруполь и высших мультиполей была решена Эрецом и Розеном (1959) с помощью метода Вейля (1917, 1919). Выражение интервала для поля квадруполь с исправленной ошибкой, вкравшейся в работу Эреца и Розена, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & e^{2\psi} dt^2 - m^2 e^{2\gamma - 2\psi} (\lambda^2 - \mu^2) \left(\frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - 1} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2} \right) - \\
 & - m^2 e^{-2\psi} (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2) d\varphi^2, \\
 \psi = & \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{4} q (3\lambda^2 - 1)(3\mu^2 - 1) \right] \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{3}{2} q \lambda (3\mu^2 - 1) \right\}, \\
 \gamma = & \frac{1}{2} (1 + q + q^2) \ln \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} - \frac{3}{2} q (1 - \mu^2) \left[\lambda \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + 2 \right] + \\
 & + \frac{9}{4} q^2 (1 - \mu^2) \left[(\lambda^2 + \mu^2 - 1 - 9\lambda^2 \mu^2) \frac{\lambda^2 - 1}{16} \ln^2 \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \right. \\
 & \left. + \left(\lambda^2 + 7\mu^2 - \frac{5}{3} - 9\mu^2 \lambda^2 \right) \frac{\lambda}{4} \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{1}{4} \lambda^2 (1 - 9\mu^2) + \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Здесь m — масса тела, создающего поле, q — параметр, характеризующий квадрупольный момент. Единицы измерения выбраны так, что $c=1$, $G=1$. Поле Шварцшильда — частный случай приведенного решения и соответствует $q=0$, когда функции ψ и γ принимают значения

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda-1}{\lambda+1}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}.$$

Преобразование к координатам, которые на бесконечности являются сферическими и при $q=0$ переходят в обычные шварцшильдовские, осуществляется заменой *):

$$\lambda = \frac{r}{m} - 1, \quad \mu = \cos \theta.$$

Рассмотрим физические свойства решения (4.2.1).

Назовем *поверхностью Шварцшильда* S_m в стационарном поле (т. е. при $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \equiv 0$) такую поверхность, на которой $g_{00}=0$. На этой поверхности 1) красное гравитационное смещение квантов, уходящих от неподвижного излучателя на бесконечность, становится бесконечно большим, а энергия квантов стремится к нулю; 2) с приближением к S_m ход покоящихся часов, синхронизованных по любому пути с часами на бесконечности, стремится к нулю; 3) обращается в бесконечность гравитационно-инерциальная сила F (см. § 6, гл. 1). Свойства 1), 2) и 3) тесно связаны друг с другом. В поле Шварцшильда, как известно (см. § 2, гл. 3), S_m — это сфера с радиусом кривизны (в единицах, где $G=1$, $c=1$) $r_g=2m$. Длины окружностей на S_m в аксиально симметричном поле при условии $\mu=\text{const}$ или, что то же, $\theta=\text{const}$, равны $2\pi \sqrt{g_{33}}$. В случае сферы эти линии являются параллелями и их длина $l \sim \sqrt{g_{33}} \sim \sqrt{1-\mu^2}$. В решении (4.2.1) поверхности $g_{00}=0$ соответствует $\lambda=1$. При $g_{00} \rightarrow 0$ компонента g_{33} имеет асимптотический вид

$$g_{33} = A(1-\mu^2) g_{00}^{-\frac{q(3\mu^2-1)}{2+q(3\mu^2-1)}},$$

где A — ограниченная функция μ ($0 < A < \text{const}$); эту функцию мы ради краткости не выписываем. Если $q \neq 0$, то при $g_{00} \rightarrow 0$ и $q > 0$

$$g_{33} \rightarrow \infty \quad \text{для} \quad 1 \geq \mu^2 > \frac{1}{3},$$

$$g_{33} \rightarrow 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq \mu^2 < \frac{1}{3}.$$

*) При отсутствии сферической симметрии выбор удобной координаты r в значительной степени произволен, ее можно было бы определить не так, как в тексте, а, например, из условия: $r = \text{const}$, $g_{00} = \text{const}$.

Для случая $\mu^2 = 1/3$ при стремлении $g_{00} \rightarrow 0$, g_{33} остается константой.

Каждая поверхность $g_{00} = \text{const}$ замкнута. Вдали от источника поля — это сферы (рис. 24). При уменьшении g_{00} форма поверхности искажается. При $q > 0$ поверхность превращается в две вытянутые по полярной оси «груши», соединенные перемычкой (см. рис. 24). Каждая поверхность с меньшим $g_{00} = \text{const}$ лежит внутри предыдущей с большим g_{00} . Благодаря кривизне пространства при уменьшении g_{00} площади последовательности вложенных поверхностей, пройдя через минимум, начинают возрастать и при $g_{00} \rightarrow 0$ площади стремятся к бесконечности, а сами поверхности стремятся к предельной двухполостной поверхности $\mu^2 = 1/3$. Каждая из полостей замыкается на бесконечности. Еще раз подчеркнем, что эта предельная бесконечная поверхность g_{00} лежит внутри любой поверхности $g_{00} = \text{const} \neq 0$, имеющей конечную площадь.

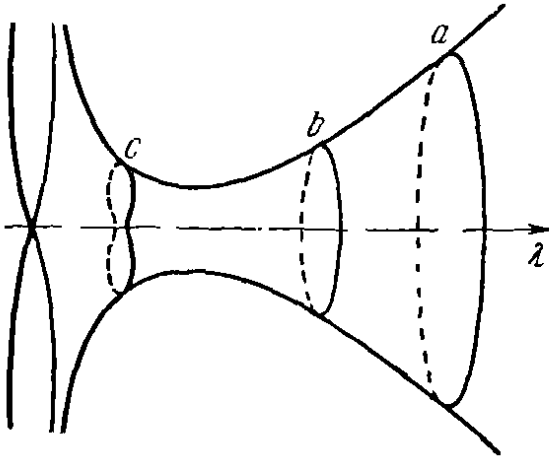


Рис. 24. Двумерная поверхность, вертикальные сечения которой $\lambda = \text{const}$ дают меридиональные сечения поверхности $g_{00} = \text{const}$ в решении Эреца и Розена (1959). Точки a, b, c — полюсы вложенных друг в друга поверхностей $g_{00} = \text{const}$; меньшие λ соответствуют внутренней поверхности. Точки a, b, c лежат в пространстве на одной прямой.

Аналогичные выводы следуют для случая $q < 0$. Только здесь в пределе $g_{33} \rightarrow \infty$ при $0 < \mu^2 < 1/3$ и $g_{33} \rightarrow 0$ при $\mu^2 > 1/3$.

Следовательно, в данном поле при сколько угодно малом $|q|$ поверхность S_m очень сильно отличается по своим геометрическим свойствам от сферы Шварцшильда.

Как подчеркивалось, в поле Шварцшильда на S_m не было особенности пространства — времени и $C = R^i_{klm} R_i{}^{klm} = 12/r_g^4 \neq \infty$. В решении (4.2.1) скаляр C имеет при $\mu = 0$ следующий асимптотический вид: при $g_{00} \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$

$$C = Aq^2 g_{00}^{-1} + \frac{12}{r_g^4}, \quad A = \text{const.}$$

Здесь написан главный расходящийся член и член, остающийся при $q = 0$. Следовательно, при сколько угодно малом, но отличном от нуля q на поверхности S_m появляются истинные особенности пространства — времени, и непосредственно продолжать 4-мерный континуум за эту поверхность для описания поля в вакууме не имеет смысла.

Рассмотрим свойства световых лучей в поле (4.2.1). В силу симметрии лучи света при $\mu=0$ и $\mu^2=1$, имеющие начальное направление по радиусу, будут все время двигаться в этом направлении. Вблизи S_m время распространения света от некоторой точки с $\lambda=\lambda_0$ до S_m

$$\begin{aligned} \text{при } \mu=0 \text{ (полюс)} \quad t_0 &= \text{const} (\lambda_0 - 1)^{q/8}, \\ \text{при } \mu^2=1 \text{ (экватор)} \quad t_0 &= \text{const} (\lambda_0 - 1)^{-q}. \end{aligned}$$

Таким образом, в отличие от поля Шварцшильда, время распространения света до S_m для внешнего наблюдателя конечно *).

Рассмотренные выводы, и в частности, конечное время распространения света до S_m не являются свойством специально квадрупольного отклонения от сферической симметрии. Покажем, что они являются общими для любого статического аксиально симметричного решения.

Уравнения тяготения для аксиально симметричного статического поля в вакууме могут быть записаны в виде (Вейль (1917, 1919))

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = \rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (4.2.4)$$

Координаты ρ, z связаны с координатами λ, μ , используемыми выше выражениями $\rho = m \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}$, $z = m\lambda\mu$. Уравнение для ψ совпадает с уравнением для потенциала в плоском пространстве в цилиндрических координатах.

Для источника вида **) $\sigma = \sigma(z)\delta(\rho)$, где $\delta(\rho)$ — дельта-функция, решение (4.2.2), очевидно, есть потенциал нити с линейной плотностью $\sigma = \sigma(z)$ в плоском пространстве. Вблизи $g_{00}=0$, ψ и γ записываются следующим образом ***):

$$\psi = \sigma(z) \ln \rho, \quad \gamma = \sigma^2(z) \ln \rho,$$

где $\sigma(z)$ произвольна. Асимптотическое выражение для метрики:

$$ds^2 = \rho^{2\sigma} dt^2 - \rho^{2\sigma(\sigma-1)} (d\rho^2 + dz^2) - \rho^{2(1-\sigma)} d\varphi^2.$$

*) Исключением является случай $\mu^2=1$, $q>0$, когда это время будет степенной бесконечностью.

**) Источник только такого вида на конечных расстояниях от особой поверхности дает малые отклонения от сферического решения.

***) Исключение представляет вырожденный случай «точечной особенности» (см. Дж. Л. Синг (1963), стр. 69, формула (1)).

Свойства этой метрики аналогичны разобранным выше. В частности, от точки с координатами ρ_0, z_0, φ_0 , двигаясь вдоль линии $z=z_0, \varphi=\varphi_0$ со скоростью, достаточно близкой к световой, можно за время $t = \rho_0^{(\sigma(z_0)-1)^2} \frac{1}{(\sigma(z_0)-1)^2}$ по часам внешнего наблюдателя добраться до $g_{00}=0$. Несферическую задачу в вакууме Редже и Уилер (1957) рассматривали методом малых возмущений, наложенных на шварцшильдовское решение. Из решения уравнений для малых возмущений, данного Редже и Уилером, видно, что в статическом случае любое возмущение, убывающее на бесконечности, неограничено растет при приближении к сфере Шварцшильда невозмущенной задачи, т. е. обладает теми же особенностями, что и рассмотренные выше точные решения.

Резюмируем выводы: при бесконечно малом отклонении от сферической симметрии вдали от S_m сама поверхность S_m очень сильно отличается от сферы Шварцшильда, становясь к тому же истинной особенностью пространства — времени; время распространения света до S_m для внешнего наблюдателя конечно.

Однако может ли быть реализовано решение с $q \neq 0$ во всей области вплоть до $g_{00}=0$?

В части этой области, где $g_{00} > 0$, это решение реализуется как внешнее поле статического тела с квадрупольным распределением масс. Но статическое тело заведомо не может иметь на поверхности $g_{00}=0$ уже потому, что тогда обращается в бесконечность гравитационная сила. Следовательно, статическое тело не может реализовать решение для вакуума во всем пространстве, вплоть до $g_{00}=0$. Не может быть реализовано это решение и нестатическим телом, с малыми в начале сжатия отклонениями от сферической симметрии, ибо, как мы увидим в § 4, при коллапсе в сопутствующей системе отсчета момент перехода границей тела S_m ничем не выделен; в этот момент на поверхности тела нет истинных особенностей пространства — времени ($C \neq \infty$), а в рассматриваемом решении они есть. Следовательно, исследованные выше решения не являются предельными для коллапса несферической массы.

Итак, реализовать решение с $q \neq 0$ во всей области, вплоть до $g_{00}=0$, невозможно и продолжать поле в вакууме внутри поверхности $g_{00}=0$ нельзя. Появление истинных особенностей здесь вполне аналогично появлению их при попытке рассчитать поле двух покоящихся масс (Синг (1963)). Это связано с тем, что уравнения поля одновременно есть уравнения движения. Появление истинной особенности здесь означает, что такое распределение масс реализовано быть не может.

Вырожденный случай сферической симметрии ($q=0$) отличается тем, что здесь при $g_{00}=0$ никаких истинных особенностей нет. Радиальные деформации шара не меняют внешнее поле. Поэтому решение для вакуума по всей области, включая $g_{00}=0$ в статической системе отсчета, может быть осуществлено нестационарным (сжимающимся или расширяющимся) шаром с размером меньше критической сферы S_m . Поле в вакууме в этом случае может быть продолжено внутрь сферы S_m (в T -область). Об этом подробно говорилось в предыдущей главе.

§ 3. Внешнее поле вращающегося тела

Рассмотрим теперь отклонения от сферической симметрии, связанные не с изменением распределения масс в источнике поля, а с вращением. Влияние вращения в случае слабого поля подробно рассмотрено в § 9 гл. 1. Здесь мы рассмотрим роль вращения, когда не выполняется условие слабости поля $\varphi \ll c^2$.

Начнем с рассмотрения точного частного решения. Р. П. Керр (1964) дает частное точное решение уравнений Эйнштейна в вакууме:

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= B, & -g_{11} &= \frac{1}{B}, \\ -g_{22} &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta - B \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2, \\ -g_{33} &= \sin^2 \theta (r^2 + a^2 + (1-B)a^2 \sin^2 \theta), \\ g_{02} &= B \frac{\partial f}{\partial \theta}, & g_{03} &= a(B-1) \sin^2 \theta, \\ g_{12} &= -\frac{\partial f}{\partial \theta}, & g_{13} &= -\frac{a \sin^2 \theta}{B}, \\ g_{23} &= a(B-1) \sin^2 \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}, & B &= 1 - \frac{r_g r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \\ f &= r + \frac{r_g}{2} \ln [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta - r r_g) r_g^2] + \\ &+ \frac{r_g^2}{2 \sqrt{r_g^2 - 4a^2 \cos^2 \theta}} \ln \frac{4(r^2 + a^2 \cos^2 \theta - r r_g)}{(2r - r_g + \sqrt{r_g^2 - 4a^2 \cos^2 \theta})^2}. \end{aligned} \right\} (4.3.1)$$

Единицы выбраны так, что $G=1$, $c=1$. Тогда $r_g = 2m$, $a=K/m$, где m — масса тела, K — полный момент. Здесь решение Керра записано так, что при $a=0$ оно переходит в решение Шварцшильда. Решение (4.3.1) описывает поле тела массы m с полным моментом $K=amc$.

У тела, частицы которого обладают только вращательными движениями вокруг оси симметрии, во внешнем поле в подходящей системе координат из недиагональных компонент

метрики отлична от нуля только g_{03} . (Поле медленно вращающегося шара см. далее.) Это сразу следует из соображений симметрии и эквивалентности прошлого и будущего. Решение Керра может быть приведено к такому виду, где отлична от нуля только g_{03} . Мы здесь этого делать не будем.

Анализ решения Керра (Керр (1965); Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1965); Бойер, Прайс (1965); Картер (1965), (1966)) приводит к следующим выводам.

1) При сколь угодно малом, но отличном от нуля a длины «параллелей» L на поверхности $g_{00} = \text{const}$ (эти длины пропорциональны $\sqrt{-g_{33} + g_{03}^2/g_{00}}$ при $\theta = \text{const}$ и $g_{00} = \text{const}$) стремятся к бесконечности при $g_{00} \rightarrow 0$. Асимптотическая формула:

$$L = 2\pi \frac{a \sin^2 \theta}{\sqrt{g_{00}}}.$$

2) Прецессия гироскопа вдали от тела определяется известным выражением (см. § 9 гл. 1): $\Omega^2 = \frac{c^2 a^2 r_g^2}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta)$ в локальном времени. Вблизи S_m прецессия в локальном времени стремится к бесконечности. Асимптотические формулы:

а) при $\theta = 0$ или π (полюс) $\Omega^2 \sim \frac{a^2}{g_{00}^2},$

б) при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (экватор) $\Omega^2 \sim \frac{a^2}{g_{00}^2},$

в) при $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}; \pi;$ $\Omega^2 \sim \frac{a^6}{g_{00}^3} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{3} \sin \theta + \sin^2 \theta\right).$

Последняя формула, дающая выражение прецессии вблизи $g_{00} = 0$ при всех полярных углах, кроме $0, \pi/2, \pi$, не переходит непосредственно в выражение прецессии на полюсе и экваторе, так как при этом обращается в нуль весь член данного порядка по g_{00} из-за угловой зависимости.

3) Скаляр кривизны $C = R_{ihlm} R^{iklm}$, в отличие от предыдущего типа отклонений от сферической симметрии (см. § 2 гл. 11), не имеет особенностей на S_m , и в частности, на экваторе, как и в решении Шварцшильда на S_m , имеем

$$C = \frac{12}{r_g^4}; \quad r_g = \frac{2Gm}{c^2}.$$

В этом решении поле в вакууме можно продолжать внутрь S_m в T -область *). В T -области в этом решении возможна система

*) Определение T -области, данное в § 1 гл. 3 для случая сферической симметрии, формально здесь неприменимо. Мы называем здесь T -областью область внутри поверхности $g_{00} = 0$.

отсчета, метрика в которой совпадает с метрикой Керра (4.3.1), только пространственная и временная координаты поменялись местами. Особенность пространства — времени в решении Керра имеется (как и в решении Шварцшильда) при $r=0$, где $C=\infty$.

4) Луч света, идущий к S_m в направлении полюса, и лучи света, идущие в плоскости «экватора», достигают S_m за логарифмически бесконечное время внешнего наблюдателя. (Синхронизация часов здесь ведется по траектории лучей.)

5) При синхронизации часов вдоль экватора на поверхности $g_{00}=\text{const}$ разность в показании часов ($\Delta\tau = \frac{g_{03}}{\sqrt{g_{00}}} 2\pi$) при возвращении в исходную точку стремится к бесконечности пропорционально $g_{00}^{-1/2}$, когда $g_{00} \rightarrow 0$.

После исследования точного, но частного решения перейдем к приближенному общему решению, полученному методом малых возмущений, которое описывает поле медленно вращающегося шара (без предположения слабости поля). Условие медленного вращения (малого момента) есть $K \ll mr_g c$.

Выпишем сначала уравнения для малых возмущений (к полю Шварцшильда в вакууме) в случае вращающегося шара без предположения статичности (это потребуется в дальнейшем).

Шар может радиально расширяться или сжиматься. Из соображений симметрии ясно, что при слабом вращении из возмущений $h_{\mu\nu}$ компонент шварцшильдовского решения в первом порядке будет только h_{03} , h_{13} и h_{23} (возмущения в диагональных компонентах второго порядка малости). С помощью малогс преобразования координат всегда можно обратить одну из этих величин в нуль: при преобразовании $\tilde{\varphi} = \varphi + \xi$ компоненты h_0^3 , h_1^3 и h_2^3 получают приращения $\Delta h_0^3 = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\Delta h_1^3 = \frac{\partial \xi}{\partial r}$, $\Delta h_2^3 = \frac{\partial \xi}{\partial \theta}$.

Обратим в нуль h_{23} .

Выпишем нетривиальные компоненты $\delta R_{\alpha\beta}$:

$$\left. \begin{aligned} \delta R_{23} &= - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{g_{11} h_{03}}{\sin^2 \theta} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{g_{00} h_{13}}{\sin^2 \theta} \right) = 0, \\ \delta R_{13} &= - \frac{1}{r^2} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^{-1} \theta \frac{\partial h_{13}}{\partial \theta} + 2 h_{13} \right) - \\ &\quad - g_{11} \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial t^2} + r^2 g_{11} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \frac{h_{03}}{r^2} = 0, \\ \delta R_{03} &= g_{00} \frac{\partial^2 h_{03}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} h_{03} - \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^{-4} \theta \frac{\partial h_{03}}{\partial \theta} - g_{00} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h_{13}}{\partial r} + \frac{2}{r} h_{13} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2)$$

Для нахождения стационарного решения положим $\frac{\partial h_{13}}{\partial t} = \frac{\partial h_{03}}{\partial t} = 0$. Тогда решение (4.3.2) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} h_{13} &= \psi(r) r^2 \sin^2 \theta, \\ h_{03} &= \frac{r_g}{r} \sum_n a_n f_n \left(\frac{r}{r_g} \right) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.3)$$

Здесь $c=1$, $G=1$, $\psi(r)$ — произвольная, $r_g=2m$, $a_n = \text{const}$, $f_n(x) = x^3 u_n(x) \int \frac{dx}{x^4 u_n^2(x)}$, $u_n(x) = F(2+n; 1-n; 4; x)$, F — гипергеометрическая функция Гаусса, P_n^1 — первый присоединенный полином Лежандра (см. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик (1962)).

Асимптотически $f_n(x) \sim x^{1-n}$, $x \gg 1$. Сделав теперь малое преобразование $\tilde{\varphi} = \varphi - \psi(r)$, получаем $h_{13} = 0$, и единственной отличной от нуля компонентой остается h_{03} , для которой справедливо (4.3.3).

Конкретный вид поля в вакууме определяется условиями сшивки на поверхности тела с внутренним решением. Условия сшивки, следующие из требований выполнимости уравнений поля на границе, требуют, чтобы h_{03} была везде непрерывна. Для шара с твердотельным законом вращения (но не обязательно стационарного — он может радиально деформироваться) это условие, как можно показать, приводит к тому, что в вакууме $h_{03} \sim \sin^2 \theta$ и $h_{13} \sim \sin^2 \theta$. Первое уравнение (4.3.2) тогда выполнено тождественно, а решение двух других совместно с граничным условием при помощи малого преобразования координат приводится к виду

$$h_{03} = -\sin^2 \theta \frac{2K}{r}, \quad (4.3.4)$$

где $K=at$ — полный момент.

Таким образом, внешнее поле такого сжимающегося шара постоянно (в линейных по a членах). Выражение (4.3.4) совпадает по форме с приведенным в учебнике Ландау и Лифшица (1962) для слабого поля. В действительности оно справедливо и в сильном поле при $a \gg r_g$ (с точностью до первого порядка по a). Выражение (4.3.4) для стационарного шара было независимо получено Гуровичем (1965).

В этом решении уравнений малых возмущений, наложенных на поле Шварцшильда, в поправках к компонентам $g_{\mu\nu}$ сохранены только члены, линейные на a , и отброшены члены с a^2 и более высокого порядка. Те из эффектов на $g_{00} = 0$ решения

Керра, которые зависят от линейных по a поправок к $g_{\mu\nu}$, сохраняются и в этом решении. В частности, здесь $C_{g_{00}=0} = 12/R_g^4 < \infty$ (в линейных членах).

Может ли быть реализовано решение с «вращательным» отклонением от сферической симметрии во всей области вплоть до $g_{00}=0$?

Реализация решения стационарным телом здесь отпадает по тем же причинам, что и в случае тела с квадрупольным моментом. Однако для нестационарного источника поля те же рассуждения, что в § 2 гл. 4, не проходят, так как здесь на $g_{00}=0$ инвариант C конечен. Мы увидим ниже, что стационарное решение «вращательного» типа действительно может осуществляться во всей области, вплоть до $g_{00}=0$, как асимптотическое при коллапсе вращающегося тела.

§ 4. Сфера Шварцшильда во внешнем квадрупольном поле

Закончим рассмотрение несферических статических полей следующим небольшим замечанием.

Существуют решения уравнений Эйнштейна, в которых имеется поверхность S_m , ничем качественно не отличающаяся от поверхности Шварцшильда для сферического случая. Однако в этом случае отклонения от сферической симметрии должны вызываться внешним полем. Например, если рассматривать сферическую массу во внешнем квадрупольном поле (нарастающим с удалением от массы m), то точное решение уравнений Эйнштейна в вакууме имеет вид (обозначения те же, что в § 2 гл. 4)

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{1}{4} q (3\lambda^2 - 1) (3\mu^2 - 1),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} - 3q\lambda (1 - \mu^2) - \\ - \frac{9}{16} q^2 (\lambda^2 - 1) (1 - \mu^2) [9\mu^2\lambda^2 - \lambda^2 - \mu^2 + 1].$$

Поверхность $g_{00}=0$ определяется условием $\lambda=1$. Эта поверхность S_m является деформированной внешними полями сферой Шварцшильда. Гауссова кривизна двумерной поверхности S_m

$$C_G = \frac{1}{4m^2} e^q [1 + 3q - 12q\mu^2 - 9q^2\mu^2 + 9q^2\mu^4]$$

различна при разных μ и везде конечна. Физические свойства этой S_m такие же, как и у сферы Шварцшильда.

Постоянное внешнее квадрупольное поле может быть создано удаленными массами, закрепленными на подпорках,

которые удерживают их от перемещений. Приблизительно на ограниченном интервале времени это же поле может быть создано и не закрепленными удаленными массами, скорости движения которых под влиянием взаимного тяготения будут вначале малы и поле почти статично.

§ 5. Гравитационное сжатие слабо вращающегося тела с малыми отклонениями от сферической симметрии *)

Напомним сначала кратко, как протекает сжатие однородного пылевого сферического облака радиуса r (см. § 12 гл. 3). Для далекого наблюдателя картина стремится к «застыванию» при $r \rightarrow r_g$ благодаря замедлению течения времени. Для него тело никогда не будет иметь размеры меньше, чем r_g . Наблюдатель, находящийся на поверхности сжимающегося облака, за конечное собственное время достигает $R=r_g$. Для него сжатие вовсе не «застывает» и продолжается дальше, уже внутри сферы Шварцшильда в T -области. Плотность вещества шара при $R=r_g$ и большой массе ничем не примечательна. Ее легко оценить:

$$\rho_g \approx \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_g^3} \approx 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \text{ г/см}^3,$$

где $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{33}$ г — масса Солнца.

Для $M=10^8 M_\odot$, например, $\rho_g \approx 2$ г/см³. После пересечения поверхностью шара гравитационного радиуса, лучи света от нее, как видно из рис. 25, уходят внутрь от поверхности Шварцшильда и никогда ее не пересекают, никогда не идут к внешнему наблюдателю.

Если в шаре вначале были небольшие возмущения плотности и скорости вещества, то они при сжатии будут усиливаться, что подробно исследовано в работе Е. М. Лифшица (1946) (см. гл. 19). Однако момент $R=r_g$ для динамики вещества шара ничем не примечателен и плотность вещества еще далека от бесконечности.

Следовательно, если в начале сжатия шара возмущения достаточно малы, то к моменту, когда $R=r_g$, они еще не успевают достаточно вырасти. Итак, поверхность шара в системе сопутствующего наблюдателя пересекает сферу r_g , когда возмущения в веществе и возмущения самого поля вокруг шара еще малы.

*) Мы не рассматриваем здесь крупномасштабных магнитных и электрических полей вокруг сжимающегося тела. Такие поля рассмотрены далее, в § 6 гл. 12.

Затем возмущения в шаре нарастают, но, как было показано в § 12 гл. 3, из-под сферы Шварцшильда к внешнему наблюдателю не поступает никакая информация. Следовательно, рост возмущений внутри S_m уже никак не сказывается на область пространства - времени вблизи поверхности Шварцшильда и во внешней области далекого наблюдателя (R -области). Читатель, склонный поверить в это без пояснений, может пропустить следующий абзац. Формальное математическое доказательство дано в приложении.

Дело в том, что возмущения гравитационного поля от шара распространяются со световой скоростью. Но из рис. 25 видно, что траектории лучей, вышедших из шара в T -области, не приближаются к поверхности Шварцшильда. Большие возмущения по характеристикам-лучам не приходят в эту область. Это значит, что возмущения в вакууме вблизи поверхности Шварцшильда всегда малы и свойства этой поверхности остаются неизменными. В частности, через нее к внешнему наблюдателю никогда не проходит никакое излучение, никакая информация. Следовательно, и при наличии возмущений в шаре для внешнего наблюдателя доступен только конечный интервал эволюции шара. Он может следить за развитием возмущений в шаре и в окружающем поле, но только до момента, когда $R=r_g$.

Теперь ясно, что внешнее поле пыли для далекого наблюдателя должно при $t \rightarrow \infty$ стремиться к стационарности, все $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$. В самом деле, в его системе отсчета возмущения, зависящие от времени, возникшие до достижения поверхностью шара r_g , должны, как и гравитационные волны, рассеяться в пространстве, а новых возмущений из-под сферы Шварцшильда поступать не может. Разумеется, все выводы сохраняются в силе и при рассмотрении сжатия вещества с отличным от нуля давлением.

Итак, предельное поле сжимающегося тела с малыми отклонениями от сферичности при $t \rightarrow \infty$ стационарно.

Вращение тела приводит к его сплюснутости, т. е. к нарушению сферичности. Возмущения внешнего поля, связанные с этими отклонениями от сферичности, есть величины второго порядка малости по сравнению с возмущениями от самого вращения, и ими можно пренебречь. Влияние же вращения на внешнее поле подробно рассмотрено выше в § 3 гл. 4.

При сжатии вращающегося шара во внешнем пространстве поле не меняется (в линейных по K/ct членах), и предельное поле будет полем Шварцшильда + поправка, вызванная вращением:

$$g_{03} = - \sin^2 \theta \frac{2K}{r}. \quad (4.5.1)$$

Такой вывод не удивителен. В ходе сжатия шара сохраняются масса M и момент K . Поэтому и предельное поле зависит от обоих этих величин.

Каково предельное поле сжимающегося тела, несферичность которого вызвана не вращением, а например, несимметричным распределением масс? Это поле должно быть стационарным. В § 2 гл. 4 было показано, что если поправки к полю Шварцшильда на квадрупольные и высшие мультипольные моменты (вызванные изменением в источнике поля) не зависят от времени, то сколь бы малыми они не были на конечных расстояниях от S_m , они неограниченно нарастают к S_m и приводят к появлению истинных особенностей $C = \infty$. С другой стороны, как мы видели в начале этого параграфа, в сопутствующей системе сжимающегося тела с малыми начальными отклонениями от сферической симметрии в распределении плотности, момент пересечения поверхностью тела поверхности Шварцшильда ничем не выделен и не сопровождается возникновением истинных особенностей ни в метрике, ни в плотности. Сопоставление этих результатов приводит к выводу о затухании квадрупольного и высших мультипольных моментов внешнего поля тяготения на релятивистских стадиях сжатия несимметричного тела.

Найдем закон, по которому происходит это затухание. Рассмотрение уравнений для статических аксиально симметричных квадрупольных возмущений метрики Шварцшильда показывает, что отличные от нуля компоненты возмущений могут быть записаны при $g_{00} \rightarrow 0$ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} h_{00} &\sim q \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \ln \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \\ h_{11} &\sim q \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \ln \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \\ h_{22} &\sim h_{33} \sim q \ln \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4.5.2)$$

где q — квадрупольный параметр возмущения. В написанных выражениях опущены множители, не зависящие от $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$.

При сжатии тела с $q \neq 0$ в сопутствующей системе все величины $h_{\mu\nu}$ конечны. Поскольку h_{22} и h_{33} не преобразуются при переходе от сопутствующей системы к шварцшильдовской, то очевидно, что при $r \rightarrow r_g$

$$q \sim \ln^{-1} \frac{r_g}{r - r_g} \sim \frac{1}{t}. \quad (4.5.3)$$

Последнее соотношение в (4.5.3) получено из уравнения (3.5.1) для закона свободного падения в поле Шварцшильда.

Итак, в первом порядке по q возмущения в диагональных членах асимптотически исчезают по закону t^{-1} *).

Даже если тело в целом не вращается, то при сжатии его во внешнем поле возникают недиагональные компоненты $g_{\alpha\beta}^0$, которые описывают вращение локальной инерциальной системы отсчета относительно далекой инерциальной системы (см. § 9 гл. 1). Возникновение этих отклонений связано с тангенциальными составляющими скорости сжимающегося несимметричного тела. Эти вращательные отклонения от сферической симметрии не затухают при $t \rightarrow \infty$.

Итак, предельное поле сжимающегося несимметричного слабо вращающегося тела есть (в первом порядке) поле Шварцшильда + «вращательные отклонения» в недиагональных членах.

Рассмотрение движения пробных частиц и лучей света в таком поле приводит к выводу, что свойства движения качественно те же, как и в случае поля Шварцшильда (см. § 9 и 10 гл. 3). Для внешнего наблюдателя частица с прицельным параметром меньше критического гравитационно захватывается и по спирали, совершив конечное число оборотов, подходит асимптотически при $t \rightarrow \infty$ к особой поверхности Шварцшильда $g_{00} = 0$.

То же имеет место и для лучей света. Никакое излучение, никакая информация из-под сферы S_m к внешнему наблюдателю не поступает, происходит гравитационное самозамыкание.

Эти выводы особенно важны для анализа катастрофического сжатия звезд, о чем будет говориться в следующем разделе книги.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 5

Рассмотрим коллапс сферической пылевой массы. Введем в пыли сопутствующую систему. Продолжим эту свободно падающую систему за границу пыли, воспользовавшись решением Толмена (см. § 12 и 13 гл. 3). Для конкретности будем считать, что точка на границе пыли падает с параболической скоростью, а плотность вещества внутри пыли однородна **). Метрика внутри пыли дается выражением, приведенным в § 12 гл. 3, а метрика вне пыли есть метрика Леметра (см. § 12 гл. 3) с ds^2 в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2}(R - \tau + \tau_0)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(R - \tau + \tau_0)\right]^{4/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.5.1\text{п})$$

*) То же относится и к высшим мультипольным моментам.

***) Если коллапс начался вдали от r_g , то вблизи r_g скорость границы всегда почти параболическая. Не представляет никакого труда обобщить доказательство на случай движения границы пыли с эллиптической или гиперболической скоростью и с градиентом плотности пыли по радиусу.

Здесь τ — собственное время, $\tau_0 = \text{const}$, τ_0 зависит от начала отсчета времени, R — сопутствующая координата, $c=1$, $r_g=1$. Пространство — время этой модели изображено на рис. 25. Пунктиры — линии $r = \text{const}$, где $r = \left[\frac{3}{2} (R - \tau + \tau_0) \right]^{2/3}$ — шварцшильдовская координата.

Пусть в момент $\tau=0$ (близкий к моменту τ_1 , когда граница пыли пересекает поверхность Шварцшильда $r=r_g$) возмущения плотности, скорости вещества и метрики $h_{\alpha\beta}$ при всех $R_1 \leq r < \infty$ малы.

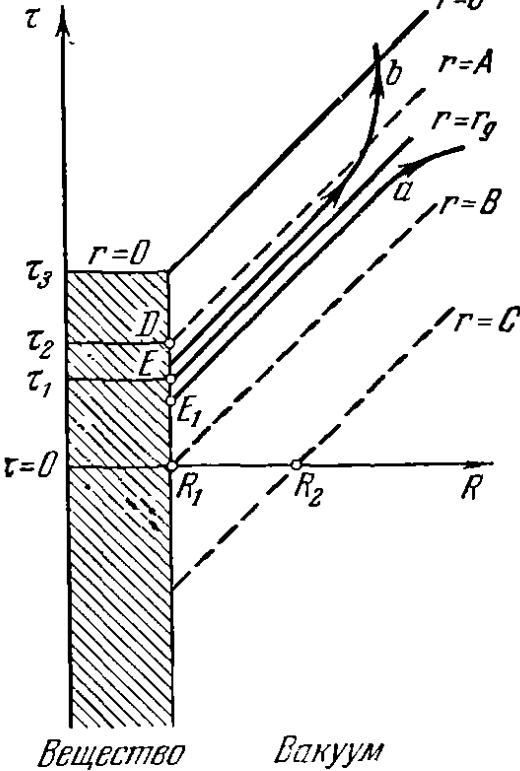


Рис. 25. Коллапс пылевого шара в свободно падающей системе отсчета (обозначения см. в приложении к § 5 гл. 4) a и b — мировые линии лучей света. Луч a , вышедший из E_1 вблизи τ_1 , долго идет вблизи $r=r_g$ (по времени любой системы отсчета).

кает r_g при конечной плотности $\bar{\rho}_c \approx \frac{2 \cdot 10^{16}}{(M_1 M_\odot)^2}$. Решения уравнений малых возмущений внутри пыли (см. далее § 2 гл. 19) показывают, что h неограниченно возрастает только при $\rho \rightarrow \infty$, а при $\rho = \bar{\rho}_c$ оно конечно. Таким образом, вплоть до момента τ_2 (еще далекого от τ_3 , когда $\rho = \infty$) в пыли при $R < R_1$ имеем $h < \epsilon_1$.

В свободно падающей системе в вакууме есть решения, неограниченно нарастающие на $r=r_g$. Однако корректная постановка задачи Коши исключает эти решения и вблизи поверхности шара в вакууме h мало вплоть до $\tau = \tau_2$. Таким образом, мы имеем в вакууме:

1) Из начальных условий: при $\tau=0$, $R > R_1$, $h = f(r) < \epsilon_2$.

2) Из малости возмущений на границе пыли: при $0 \leq \tau \leq \tau_2$ и $R = R_1$, $h = e^{i\omega\tau} f(r) < \epsilon_3$. Из 1) следует, что $f(r) < \epsilon_2$ при $r \geq B = \left[\frac{3}{2} (R_1 + \tau_0) \right]^{2/3}$

Далее, пусть на сколь угодно большом $r = \text{const}$ возмущения всегда будут малы (последнее очевидно). Тогда: 1) $h_{\alpha\beta}$ будут в рассматриваемой системе всегда малы при $R = \left[\frac{3}{2} (r - \tau - \tau_0) \right]^{2/3} > A$, т.е. правее и ниже пунктира $R=A$ на рис. 25; 2) луч света, покинувший пыль после момента τ_1 , никогда не выйдет за пределы поверхности Шварцшильда $r=r_g$ (см. рис. 25).

Докажем первое утверждение. Из (4.5.1 п) видно, что в вакууме компоненты $g_{\alpha\beta}$ зависят только от $r = \left[\frac{3}{2} (R - \tau + \tau_0) \right]^{2/3}$. Поэтому если мы теперь в качестве независимых переменных будем рассматривать не R и τ , а r и τ , то малые возмущения метрики в вакууме могут быть записаны в виде (индексы α, β в дальнейшем опускаем) $h = e^{i\omega\tau} f(r)$. Функция $f(r)$ зависит от θ и φ , но эта зависимость сейчас не существенна и мы ее не рассматриваем. Идея доказательства состоит в том, что из малости возмущений на линиях (см. рис. 25) $D-R_1-R_2$; далее по $r=C$ и из вида $h = e^{i\omega\tau} f(r)$ следует, что h мало везде внутри полосы, ограниченной $r=A$, $r=C$ и $D-R_1-R_2$. Приводим формальное доказательство. Граница пыли пересе-

(см. рис. 25). Из 2) следует, что $f(r) < \varepsilon_4$, где $\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_3}{|e^{i\omega\tau}|_{\max}}$ при $0 \leq \tau \leq \tau_2$ и $A < r \leq B$ (см. рис. 25).

Итак, всегда

$$f(r) < \varepsilon_5 \quad \text{при } r > A, \quad \varepsilon_5 = \max(\varepsilon_2, \varepsilon_4). \quad (4.5.2\text{п})$$

Теперь по условию $h < \varepsilon_6$ при достаточно большом $r = \text{const} = C$ и любом $\tau > 0$:

$$h_{r=C} = e^{i\omega\tau} f(C) < \varepsilon_6, \quad \tau > 0.$$

Таким образом,

$$e^{i\omega\tau} < \frac{\varepsilon_6}{f(C)} = \varepsilon_7, \quad \tau > 0. \quad (4.5.3\text{п})$$

Из (4.5.2п) и (4.5.3п) следует

$$h = e^{i\omega\tau} f(r) < \varepsilon_5 \cdot \varepsilon_7 = \varepsilon_8, \quad r > A, \quad \tau > 0.$$

Первое утверждение доказано. Докажем теперь второе утверждение.

В невозмущенной метрике (4.5.1п) для любого луча света (не обязательно идущего по радиусу) в T -области, при $r < r_g - F$, где F произвольная константа меньше r_g , справедливы неравенства *):

$$\frac{d\tau}{dR} \geq \sqrt{-\frac{g_{00}}{g_{11}}} > 1 - N,$$

где $N = \text{const}$. Это неравенство означает, что наклон луча на конечную величину больше, чем наклон линии $r = r_g$ (см. рис. 25).

Выше доказано, что всегда при $r > A$ возмущения метрики остаются малыми. Ясно, что эти возмущения мало меняют величину $\frac{d\tau}{dR}$ луча и неравенство

$$\frac{d\tau}{dR} > 1 - N$$

сохраняется. Таким образом, луч в области $A < r < r_g$ никогда не приближается к $r = r_g$ и тем более не может ее пересечь. Следовательно, мы доказали, что при коллапсе с малыми вначале отклонениями от сферической симметрии луч никогда не выходит из T -области.

§ 6. Что происходит с веществом после ухода под S_m ?

Вопрос, поставленный в заголовке параграфа, неизбежно возникает. Действительно, в случае строгой сферической симметрии, как показано в § 12 гл. 3, поверхность сжимающегося шара для сопутствующего наблюдателя после пересечения $r_g = = 2Gm/c^2$ неизбежно сжимается в точку, и бесконечная плотность достигается всем веществом шара. Что будет дальше? Правда, внешний наблюдатель об этом ничего не узнает, для него лишь при $t \rightarrow \infty$ $r \rightarrow r_g$; все, что будет потом, лежит для

*) Мы рассматриваем луч, для которого $\frac{dR}{d\tau} > 0$.

него всегда в абсолютном будущем (см. § 12 гл. 3). Но какова конечная судьба сжимающегося шара не для внешнего наблюдателя, а для сопутствующего наблюдателя, находящегося на его поверхности?

Релятивистское сжатие сферического тела, как уже отмечалось, неустойчиво. В ходе сжатия возмущение нарастает неограниченно при $\rho \rightarrow \infty$ (см. об этом далее § 2 гл. 19). Может ли развитие несимметрии привести к исчезновению особенности в решении и перевести сжатие в расширение после достижения некоторой максимальной плотности? Вопрос о возникновении истинных особенностей и их характер при произвольных движениях подробно обсуждался в работах Е. М. Лифшица и И. М. Халатникова (1960а, б; 1963); Е. М. Лифшиц, В. В. Судakov, И. М. Халатников (1961). В работе Пенроуза (1965) утверждается, что если тело сжалось до размеров меньше r_g , то возникновение истинных особенностей в решении неизбежно. Достигается ли при этом бесконечная плотность во всем веществе тела методом Пенроуза, выяснено быть не может.

Вся трудность вопроса о судьбе сжимающегося вещества состоит даже не в выяснении того, достигается ли в ходе сжатия какая-то максимальная, но конечная плотность, или максимальная плотность бесконечна, а в том, что будет после этого? Ведь тело не может вновь расшириться так, чтобы выйти из-под сферы Шварцшильда в R -область к тому внешнему наблюдателю, который видел ее сжатие. Для этого наблюдателя недоступно все, что случается после достижения r_g . Вопрос об исходе сжатия для сопутствующего наблюдателя до конца не решен.

Решение проблемы можно искать в двух направлениях. Во-первых, согласно теореме Пенроуза неизбежно возникновение в ходе сжатия бесконечных кривизн пространства — времени (а может быть, и бесконечных плотностей хотя бы частью вещества). В гл. 2 было показано, что при кривизнах больше критических значения $C \approx 1/(10^{-33} \text{ см})^4$, ($\rho \approx 10^{93} \text{ г/см}^3$) ОТО уже несправедлива, так как вступают в игру квантовые эффекты. Квантовой теории сильного гравитационного поля пока нет, и что будет после достижения такой кривизны, сказать пока нельзя. Некоторые соображения об этом см. в книге Гаррисона, Торна, Вакана, Уилера, 1965. Можно, конечно, высказать предположение, что вещество после достижения плотности $\rho \approx 10^{93} \text{ г/см}^3$ больше не расширяется и кривизны пространства — времени меньше $C \approx 1/(10^{-33} \text{ см})^4$ в будущем не достигаются, а пространственно-временные соотношения в столь экзотических условиях нам неизвестны. Это один из возможных ответов на вопрос о конечном исходе сжатия тела.

Однако рассмотрение релятивистского сжатия заряженного тяготеющего шара, что является, разумеется, искусственной модельной задачей, показывает, что указанная выше возможность вряд ли имеет место (в общем случае), и осуществляется другая возможность: сжатие вещества все же должно смениться расширением, но расширением в некотором смысле в другое внешнее пространство (Новиков (1966а, б)).

Рассмотрим здесь качественно этот частный искусственный пример, отсылая за подробностями к цитированным работам.

Исследуем сжатие однородного шара из слабо заряженной пыли $\epsilon^* < mG^{1/2}$, ϵ^* — заряд, m — масса. Выписанное условие означает, что гравитационное притяжение в шаре больше электростатического отталкивания (на ньютоновской стадии сжатия отношение этих сил постоянно). Будем считать, что вещество шара имеет первоначально малую плотность. Шар имеет однородное распределение заряда, и заряд не перераспределяется по веществу в ходе сжатия.

Рассмотрим сначала движение точки поверхности шара. Движение этой точки может рассматриваться, как движение заряженной пробной частицы во внешнем гравитационном и электрическом полях заряженного шара.

Если заряженный шар сжимается до размеров $r < r_1 = \frac{rg}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4(\epsilon^*)^2}{Gm^2}} \right)$, то гравитационное притяжение должно смениться отталкиванием. В ньютоновской теории такая ситуация невозможна; с точки зрения ОТО качественно это объясняется тем, что энергия электрического поля остающегося постоянным вне шара возрастает настолько, что превышает полную энергию шара. Так как полная энергия в ходе сжатия не меняется, то вблизи сильно сжатого шара поле должно соответствовать отрицательной массе и вызывать отталкивание.

Действие этого гравитационного отталкивания при сильном сжатии, а также действие электростатического отталкивания приводят к тому, что частица на поверхности не достигает $r=0$, и поверхность, достигнув минимального размера порядка $r = r_1$, снова расширяется. Плотность вещества нигде не достигает бесконечности, кроме центра. Смена сжатия расширением неодновременна, она начинается на краю шара и движется к центру. Максимальное сжатие каждого слоя $\rho \approx c^6 m^4 / (\epsilon^*)^6$, где ϵ^* и m — заряд и масса внутри слоя соответственно.

На рис. 26 изображено пространство — время рассматриваемого решения, аналогичное пространству — времени Крускала, и мировая линия частицы на границе шара (A, B, C, D). Область, занятая веществом, заштрихована. В ходе сжатия шара

его граница пересекает шварцшильдовскую сферу $r = r_g^*$) (в точке A на рис. 26) и из внешней $R'_{\text{внеш}}$ области попадает в сжимающуюся T_- -область. При размерах $r < r_1$ сжатие сменяется расширением (это происходит во внутренней R -области), и после прохождения расширяющейся T_+ -области граница шара вновь пересекает сферу Шварцшильда (точка D на рис. 26), выходя во внешнюю $R''_{\text{внеш}}$ -область. Но эта область, как видно на рис. 26, уже другая, а не та, из которой происходит сжатие. Она лежит по отношению к первой $R'_{\text{внеш}}$ -области в абсолютном будущем. Пространство на бесконечности этой R -области евклидово и является «другим» евклидовым пространством, отличным от того, в котором наблюдатель видел коллапс. Если заряд устремить к нулю, то вся внутренняя R -область сливается с истинной особенностью $r = 0$.

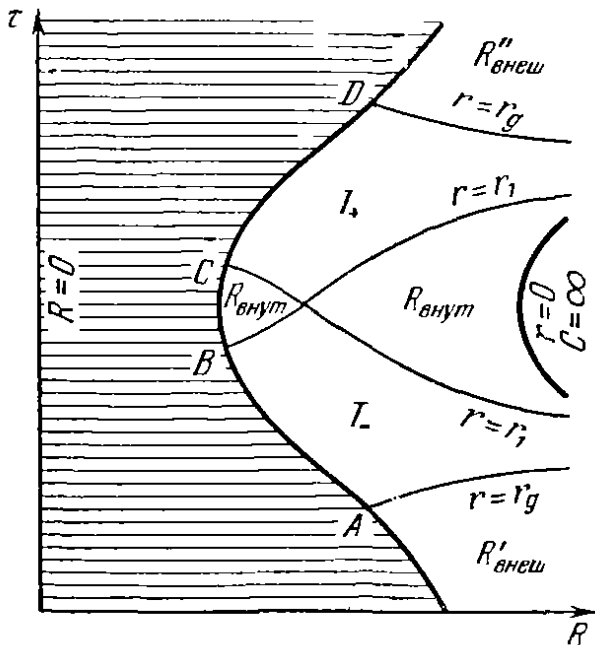


Рис. 26. Пространство — время решения для сжимающегося и вновь расширяющегося заряженного шара; τ — временная координата; R — радиальная пространственная координата (не являющаяся лагранжевой в веществе); $ABCD$ — мировая линия границы шара. Шар уходит под сферу Шварцшильда ($r = r_g$) из одного внешнего пространства $R'_{\text{внеш}}$ (в точке A) и появляется после расширения в другом внешнем пространстве $R''_{\text{внеш}}$ (в точке D).

расширением, т. е. на вопрос в заголовке параграфа. Можно предполагать, что рост возмущений при сжатии или же процессы при $\rho \approx 10^{93}$ г/см³ переводят сжатие вещества в расширение, но в расширение в другое внешнее пространство!

Таким образом, формальная сшивка решений для коллапса и антиколлапса нейтрального шара должна проводиться на линии истинной особенности $r = 0$ с учетом того, что вблизи $r = 0$ решение не описывает истинного характера движений ве-

*) Значение r_g для слабо заряженного шара практически совпадает со значением $r_g = 2Gm/c^2$ для нейтрального шара.

щества и поля, ибо ОТО неприменима, но вне этой узкой области решение отражает истинное движение. В таком полном решении (при однократном сжатии и расширении) есть две пространственные области с евклидовой метрикой на бесконечности, лежащие одна по отношению к другой в абсолютном будущем (в отличие от пространств R_1 и R_2 , в решении Крускала сшиваемых через «ручку»; см. § 14, гл. 3, рис. 20).

Мы не останавливаемся подробнее на этих вопросах, так как они еще далеки от окончательного выяснения, и хотели только обратить внимание на имеющиеся возможности.

Еще раз подчеркнем, что для наблюдателя на евклидовой бесконечности рассмотренные вопросы и не возникают. Чтобы ни происходило внутри S_m , он об этом не узнает*).

Также подчеркнем, что после уменьшения размеров шара в собственном времени до $r < r_g$, невозможно расширение его в то же внешнее пространство, откуда происходило сжатие, даже предполагая прохождение вещества через бесконечную плотность. Работы М. Е. Герценштейна (1966 а, б), в которых рассматривается такая смена сжатия расширением, просто ошибочны.

*) Иная ситуация в сжимающейся, а затем расширяющейся космологической модели, где нет евклидовой бесконечности (см. об этом Новиков (1964в)). В этой модели любой «наблюдатель» в ходе сжатия модели попадает в T -область, проходит через состояние бесконечной кривизны пространства — времени $S = \infty$ и затем выходит из T -области. При этом «наблюдатель» может видеть и сжатие шара, и его расширение из-под S_m .

Уравнение состояния вещества

ГЛАВА 5

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Понятие давления; разные виды давления; случай дальнего действия

Для анализа космологической проблемы и теории звезд необходимы сведения о всех видах взаимодействия частиц, из которых состоят рассматриваемые тела. Естественно, что при этом гравитационное взаимодействие должно быть выделено и рассматриваться отдельно. В главах I—IV изложено современное состояние теории тяготения.

В данной главе будут рассмотрены короткодействующие силы между частицами и те следствия, к которым они приводят. Безотносительно к конкретной природе этих сил, общим их свойством является аддитивность энергии взаимодействия для макроскопической системы: если систему разделить на макроскопические части, то энергия взаимодействия этих частей между собой окажется пренебрежимо малой по сравнению с энергией каждой части. Поэтому для короткодействующих сил и только для них можно ввести понятия плотности энергии ε или удельной энергии $E_{\text{уд}} = \varepsilon/n$, где n — плотность тех частиц (барионов), к которым мы относим энергию. Индекс «уд» (удельная) мы везде далее в этом разделе опускаем. Точно так же можно говорить и об удельной энтропии S (на один барион).

Наконец, главным свойством близкодействия в макроскопической системе является возможность ввести давление P . Давление есть величина, позволяющая описать силу взаимодействия двух частей системы как интеграл по разделяющей их поверхности

$$F = \int P ds, \quad (5.1.1)$$

где P зависит только от состояния вещества на этой поверхности, $P = P(n, S)$, т. е. от плотности n и энтропии S . Основное

термодинамическое соотношение имеет вид:

$$dE = -P(n, S) d(n^{-1}) + T(n, S) dS, \quad (5.1.2)$$

где P — давление, а T — температура. Следовательно,

$$P = n^2 \left(\frac{\partial E}{\partial n} \right)_S. \quad (5.1.3)$$

В нерелятивистском приближении плотность массы ρ г/см³ совпадает с плотностью массы покоя барионов $\rho_0 = nm_0$. В этом приближении можно говорить об удельной энергии E_1 на грамм вещества и писать так:

$$E_1 = E_1(\rho, S), \quad P = \rho^2 \left(\frac{\partial E_1}{\partial \rho} \right)_S. \quad (5.1.4)$$

Однако мы будем иметь дело и с такой ситуацией, когда $P \sim \sim \rho c^2$, $\rho = nm_0 \sim \rho$. Тогда уже нельзя считать плотность массы пропорциональной плотности частиц, нерелятивистская формула (5.1.4) теряет силу, и связь между E , ρ , n дается выражениями

$$\varepsilon = En, \quad \rho = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{En}{c^2} \quad (5.1.5)$$

вместе с (5.1.3).

В нерелятивистской теории энергия E определена с точностью до постоянного слагаемого, в релятивистской теории это не так.

Мы останавливаемся подробнее, чем обычно, на этих общеизвестных определениях также и в связи с тем, что иногда вводят понятия гравитационного давления и гравитационной плотности энергии. Ясно, что в случае гравитации силу нельзя свести к интегралу по поверхности, энергия системы не аддитивна. Строго можно сделать лишь следующее: рассмотрим систему, в которой вещество распределено неоднородно (например, в виде отдельных звезд), причем масштаб неоднородностей (расстояние между соседними звездами) мал по сравнению с размером всей системы. Тогда можно найти фактическую гравитационную энергию системы W (с учетом неоднородности) и гравитационную энергию W_0 строго однородной — в малом масштабе (т. е. без деления на звезды, а в виде сплошной среды) системы с тем же распределением средней плотности.

Разность $W - W_0$ уже является локальной величиной, ее можно записать как

$$W - W_0 = \int w_{\bar{\rho}} dV, \quad (5.1.6)$$

где ω_1 зависит только от локальной плотности и неоднородности, но не зависит от общих размеров и формы системы, в отличие от W и W_0 , в отдельности. Из величины ω_1 можно построить величину P_1 :

$$P_1 = (\bar{\rho}^2) \frac{\partial \omega_1}{\partial z}, \quad (5.1.7)$$

которая играет роль гравитационного вклада в давление. Лучше сказать, однако, что P_1 есть гравитационное давление неоднородностей, чтобы подчеркнуть их вклад в выражение силы; гравитационные силы, вычисленные по средней плотности ρ , не входят в P_1 и описываются отдельно гравитационным потенциалом ϕ и объемными силами $\rho \operatorname{grad} \phi$, соответствующими ему.

По всей вероятности, четкое разделение объемной гравитационной силы и гравитационного вклада в давление, зависящего от неоднородностей, связано с определенными предположениями о флуктуации. Этот вопрос в настоящее время не разработан*). Характеристика флуктуаций дается с помощью понятия спектральной плотности (см. гл. 19).

Формально, особый случай представляют собой электрические и магнитные поля. Закон Кулона подобен закону Ньютона. Поэтому на первый взгляд все сказанное о гравитации переносится на электростатическое взаимодействие. В действительности главное отличие состоит в том, что в электростатике есть заряды обоих знаков, а в гравитации все массы имеют один знак. В астрономии мы всегда имеем дело с электронейтральными системами. Если даже система в целом не нейтральна, то при наличии проводимости свободные заряды оказываются на поверхности системы, и в объеме вещество электронейтрально. Дальнодействующие кулоновские силы в электронейтральном веществе можно рассматривать по той же схеме, по которой рассматриваются короткодействующие силы; это естественно, так как именно электронейтральность обеспечивает фактическую малость взаимодействия каждого отдельного заряда с далекими областями, где соблюдается равенство положительных и отрицательных зарядов. Однако электронейтральность имет место лишь в среднем. В масштабе атома распределение заряда отнюдь не однородно, и это существенно. Вклад электростатических сил в давление и в энергию — это, по существу, именно величина, зависящая от микрон неоднородности (в атомном масштабе) распределения заряда в среде, которая в среднем нейтральна.

С другой стороны, следует помнить, что именно электростатические силы обуславливают электронейтральность: хорошо

*) Постановка вопроса см. М. Ф. Широков, И. З. Фишер (1962).

известно, какие гигантские поля возникают при минимальных отклонениях средней плотности электронов от плотности протонов в объеме вещества. Поэтому можно сказать, что электростатика связывает между собой электроны и нуклоны и позволяет говорить об одном общем давлении. Все же, в принципе, если бы нам понадобилось рассматривать строго систему с неравной нулю средней плотностью заряда, то нельзя было бы обойтись понятием давления. Пришлось бы найти распределение потенциала и электрическое поле во всей макроскопической системе и наряду с локальным давлением рассматривать объемную силу, действующую на заряженное вещество.

Магнитное поле создает объемную силу, действующую на среду, в которой течет электрический ток

$$F = \frac{1}{c} [jH] \quad (5.1.8)$$

(система единиц CGSE). С помощью уравнения Максвелла, связывающего ток с полем

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j, \quad \operatorname{div} H = 0 \quad (5.1.9)$$

(квазистационарное поле; пренебрегаем $\frac{\partial E^*}{\partial t}$), можно преобразовать выражение объемной силы к виду

$$F_\alpha = - \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}, \quad T_{\alpha\beta} = - \frac{1}{4\pi} \left(H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} H^2 \right), \quad (5.1.10)$$

т. е. к виду, подобному действию давления

$$F = - \nabla P. \quad (5.1.11)$$

Различие заключается в том, что вместо скалярной величины — давления — в случае магнитного поля мы имеем дело с тензором натяжений. В направлении магнитного поля («линий поля») происходит стягивание, эквивалентное натяжению с силой $H^2/8\pi$ дин/см², в двух перпендикулярных направлениях — расталкивание (давление) той же величины.

Описывать влияние магнитного поля понятием давления можно лишь в том случае, если мы имеем дело с мелкомасштабным хаотическим полем. Тогда усреднение сил по большой поверхности, пересекающей линии поля под различными углами на разных участках поверхности, даст результат

$$\bar{F} = \bar{P}s, \quad \bar{P} = \frac{\bar{H}^2}{24\pi} = \frac{\bar{\epsilon}}{3}, \quad (5.1.12)$$

где $\bar{\epsilon}$ — средняя плотность энергии, s — площадь поверхности.

Итак, в мелкомасштабном случае хаотического и в среднем изотропного магнитного поля можно говорить о средней энергии поля и среднем давлении поля. Отметим возможную интерпретацию магнитной энергии и магнитного давления: эти величины физически являются результатом движения заряженных частиц, а еще точнее, — результатом взаимодействия движущихся заряженных частиц. Поясним это.

Если бы мы имели дело с зарядами одного знака, то магнитное взаимодействие, связанное с движением, было бы в v^2/c^2 раз меньше электростатического. Однако в электронейтральной системе в среднем электростатическое взаимодействие равно нулю, между тем движение зарядов одного знака относительно другого (ток) остается возможным.

Движение заряженных частиц — электронов, как и движение всяких частиц, дает вклад в энергию и давление просто за счет кинетической энергии частиц. Выпишем эти величины:

$$E = \frac{m_e \bar{v}^2}{2}, \quad \varepsilon = n m_e \frac{\bar{v}^2}{2}, \quad P_c = \frac{2}{3} \varepsilon = n \frac{m_e \bar{v}^2}{3}. \quad (5.1.13)$$

Здесь E — кинетическая энергия одной частицы, ε и P_c соответствующие плотность энергии (эрг/см³) и давление.

В каком соотношении находится магнитная и кинетическая энергия и соответствующие давления? Результат решающим образом зависит от масштаба l тех областей, в которых электроны движутся коррелированно, в одном направлении.

В самом деле, $j \sim n v e$, $H \sim l j / c$ (так как $|\text{rot } H| \sim H/l$),

$$P_m \sim H^2 \sim \frac{l^2 j^2}{c^2} \sim \frac{l^2 n^2 v^2 e^2}{c^2}. \quad (5.1.14)$$

Сравним это выражение с кинетическим давлением:

$$\frac{P_m}{P_c} \sim \frac{l^2 n e^2}{m_e c^2}. \quad (5.1.15)$$

Итак, интересующее нас отношение

$$\frac{P_m}{P_c} \sim l^2 r_0 n,$$

где

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 3 \cdot 10^{-14} \text{ см}. \quad (5.1.16)$$

Если взять для примера $n = 6 \cdot 10^{23}$ 1/см³, $l = 1$ см, получим $P_m/P_c \approx 10^{10}$. При упорядоченном (хотя бы в масштабе 1 см)

движении электронов магнитное давление может играть решающую роль. Мы вернемся к этому вопросу позже, в связи с теорией сверхзвезд.

Здесь же, после затянувшегося введения, пора перейти к «обычному» давлению. Мы начнем с рассмотрения давления холодного вещества, где единственной переменной является плотность. Затем мы обратимся к состоянию вещества при высокой температуре; особенно подробно рассмотрим понятие энтропии, до сих пор недостаточно популярное среди астрономов, и, наконец, займемся адиабатами горячего вещества. В этой связи необходимо будет более строго рассмотреть вопрос о термодинамическом равновесии и о применении термодинамики к не вполне равновесным системам.

ГЛАВА 6

ХОЛОДНОЕ ВЕЩЕСТВО

§ 1. Подразделение на области

Состояние холодного вещества полностью характеризуется его плотностью и составом. Более того, с учетом взаимодействия между элементарными частицами, при большой плотности вещества, состав вещества в термодинамическом равновесии оказывается зависящим от плотности.

Весь диапазон изменения плотности грубо подразделяется на следующие участки *):

1. $\rho < 50 \text{ г/см}^3$ или, лучше сказать, $P < 1 \div 5$ млн. кг/см^2 . В этой области сильно проявляются индивидуальные физико-химические свойства веществ, меняющиеся в соответствии с периодическим законом Менделеева. Для давлений до $(10 \div 20) \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$ практически для всех веществ есть экспериментальные данные, полученные статическими методами. Для ряда веществ измерения проведены до рекордных давлений около 10 млн. кг/см^2 взрывными методами. В этой области приоритет принадлежит Л. В. Альтшулеру (1965) и созданной им советской школе. Методы теоретического расчета давления разработаны Г. М. Гандельманом (1962) и Н. А. Дмитриевым (1962), однако вследствие большой трудоемкости, количество рассчитанных кривых $P(\rho)$ для разных элементов еще мало.

2. $50 \text{ г/см}^3 < \rho < 500 \text{ г/см}^3$. В этой области индивидуальные различия между различными химическими элементами и соединениями уже стерты. Вместе с тем теория, в которой электроны рассматриваются как свободные (см. ниже п. 3)) здесь еще несправедлива. Электростатическое поле атомных ядер и взаимодействие электронов между собой существенно влияет на давление, которое зависит, следовательно, не только от плотности, но и от заряда (порядкового номера) ядра. Отличие от

*) Границы в какой-то мере условны, так как переходы между областями плавные. К тому же границы зависят от состава; приводим средние величины,

первой области заключается в том, что зависимость от Z в рассматриваемой второй области является плавной и монотонной.

Уравнения состояния в этой области рассмотрены в известной работе Н. Н. Калиткина (1960), откуда мы заимствуем ниже график и формулы.

Первая и вторая области представляют малый интерес для астрофизики (для физики Земли и других планет они важны!), ибо чем ниже давление, тем при более низкой температуре надо учитывать влияние температуры на уравнение состояния, и даже при сравнительно низкой температуре понятие холодного вещества уже неприменимо.

3. $500 \text{ г/см}^3 < \rho < 10^{12} \text{ г/см}^3$. В этой весьма широкой и важной области электроны можно рассматривать как свободные. К ним применяется теория вырожденного электронного газа. Вместе с тем, расстояние между ядрами еще больше радиуса ядерных сил, так что недостаточно известное взаимодействие нуклонов не влияет на состояние вещества.

Рассматриваемая область подразделяется на область, где электроны нерелятивистские ($\rho < 2 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$), и область, где большинство электронов имеют энергию порядка и больше mc^2 , так называемая область релятивистского вырождения ($\rho > 2 \times 10^6 \text{ г/см}^3$).

Далее, при плотности больше $10^7 \div 10^{10} \text{ г/см}^3$ (в зависимости от состава ядер) электроны большой энергии способны вызвать перестройку ядер; при приближении к краю области $\rho \sim \sim 10^{12} \text{ г/см}^3$ большая часть нуклонов превращается в свободные нейтроны.

4. $10^{12} \text{ г/см}^3 < \rho < 10^{14} \text{ г/см}^3$. Вещество состоит преимущественно из нейтронов; взаимодействие их между собой существенно; иначе говоря, нейтроны нельзя рассматривать как отдельные частицы, они как бы образуют гигантское ядро.

5. $10^{14} \text{ г/см}^3 < \rho < 10^{16} \text{ г/см}^3$. Согласно В. А. Амбарцумяну и Г. С. Саякяну (1963), в этой области в равновесии наряду с нейтронами и небольшим количеством протонов и электронов появляются и многие другие типы элементарных частиц.

6. $10^{16} \text{ г/см}^3 < \rho < 10^{93} \text{ г/см}^3$. Область, практически неизведанная ни теоретически, ни экспериментально. Здесь можно высказать только самые общие суждения об ограничениях, накладываемых на уравнение состояния теорией относительности.

7. Область $\rho > 10^{93} \text{ г/см}^3$. На первый взгляд, всякое подразделение после $\rho \sim 10^{16} \text{ г/см}^3$ напоминает пародию Аверченко: «История мидян темна и неизвестна, ученые делят ее тем не менее на три периода...». В действительности смысл такого подразделения связан с квантовыми эффектами. Плотность 10^{93} г/см^3 получается, если поставить задачу (см. гл. 2): найти величину

размерности плотности, построенную из мировых постоянных: \hbar — постоянной Планка, c — скорости света и G — гравитационной постоянной. Такая постоянная имеет вид

$$\rho_g = \frac{c^5}{\hbar G^2} = 5 \cdot 10^{93} \text{ г/см}^3. \quad (6.1.1)$$

При $\rho < \rho_g$ квантовые эффекты в самой гравитации не играют существенной роли (хотя они существенны для частиц). Мы не знаем конкретно давления и плотности энергии как функции плотности частиц и энтропии. Мы знаем, однако, что эти функции существуют, знаем термодинамические соотношения между ними, знаем те уравнения Эйнштейна, в которые эти функции входят.

Мы можем при $\rho < \rho_g$ пользоваться понятиями непрерывного пространства и времени.

При $\rho \geq \rho_g$ положение существенно меняется. Становятся важными квантовые эффекты, связанные с гравитацией. Но гравитация в теории Эйнштейна связана с метрикой пространства — времени. Следовательно, сама метрика пространства — времени не может быть рассмотрена классически. Никакой конкретной теории, в которой квантовым образом рассматривалось бы пространство и время, в настоящее время не существует.

В духе всего предыдущего развития физики разумно сделать только одно предположение: если плотность достигает квантовой величины ρ_g в ограниченной со всех сторон области пространства и времени, то не нарушаются интегральные законы сохранения, написанные для состояний до и после периода $\rho \geq \rho_g$.

Такова общая классификация тех областей давления и плотности, очень различных по свойствам и очень различных по теоретическим методам трактовки, с которыми приходится иметь дело в релятивистской астрофизике. По областям 1 и 7 мы ограничимся приведенными замечаниями; другие будут более подробно рассмотрены ниже.

Начнем рассмотрение с наиболее важной и в то же время наиболее ясной третьей области.

§ 2. Вырожденный электронный газ

Для связности изложения напомним общеизвестные сведения, приводя попутно численные значения коэффициентов. Классическое изложение вопроса содержится в «Статистической физике» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (1964).

Согласно принципу Паули каждый квантовый уровень занят одним электроном или свободен. При равной нулю температуре

заняты все уровни с энергией $E \leq E_F$, свободны все уровни с энергией $E > E_F$. Величина E_F — граничная энергия — называется кратко «энергия Ферми», или « e -ферми». Соответственно говорят об «импульсе ферми» p_F . При данном движении электрона (данной орбитальной волновой функции) есть два уровня в соответствии с тем, что спин электрона $1/2 \hbar$ может иметь две проекции на произвольную ось, $1/2 \hbar$ и $-1/2 \hbar$.

Число орбитальных состояний в квазиклассическом движении равно объему в шестимерном фазовом пространстве (пространстве координат и импульсов), деленному на $(2\pi\hbar)^3$ — «объем одной ячейки» *). С учетом спина,

$$dn = 2 \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (6.2.1)$$

Отсюда получаем число уровней в 1 см^3 с импульсом меньше p_F (импульса ферми), имея в виду, что $\int d^3x = 1 \text{ см}^3$, $\int d^3p = \frac{4\pi}{3} p_F^3$.

$$n = 2 \frac{4\pi}{3} \frac{p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (6.2.2)$$

Удобно выразить p_F в единицах $m_e c$, вводя безразмерный параметр $x = p_F / m_e c$ (не путать с координатами, стоящими в формуле (6.2.1)). Получим

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 x^3 = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{x}{l_c} \right)^3. \quad (6.2.3)$$

Здесь $\hbar / m_e c = l_c = 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ см}$ есть так называемая комптоновская длина волны электрона. Естественно, что n , имея размерность $1/\text{см}^3$, пропорционально l_c^{-3} . Подставляя числа, получим

$$n = 6 \cdot 10^{29} x^3. \quad (6.2.4)$$

Обозначим через μ_e молекулярный вес на один электрон, т. е. среднее число нуклонов на один электрон. Тогда

$$\rho = \mu_e m_0 n = \mu_e \frac{6 \cdot 10^{29}}{6 \cdot 10^{23}} x^3 = \mu_e \cdot 10^6 x^3, \quad (6.2.5)$$

поскольку масса нуклона $m_0 = 1/\alpha$, где $\alpha = 6 \cdot 10^{23} \text{ 1/g}$ — число Авогадро. Соответственно,

$$x = \left(\frac{\rho}{\mu_e} \cdot 10^{-6} \right)^{1/3}. \quad (6.2.6)$$

*) Чтобы самим получить объем ячейки, сосчитайте число решений уравнения Шредингера в «ящике», т. е. в объеме параллелепипеда с данными длинами ребер l_x, l_y, l_z и с условием $\psi = 0$ на сторонах параллелепипеда. Проверьте, что такое же число уровней получится, если заменить условие $\psi = 0$ (соответствующее бесконечному потенциалу) условием периодичности $\psi(x, y, z) = \psi(x + n_x l_x, y + n_y l_y, z + n_z l_z)$, где все числа n — целые.

Отсюда и следует, что при $\rho < \mu_e \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$ ($\mu_e = 1$ для водорода, $\mu_e = 4/2 = 2$ для He^4 , $\mu_e = 56/26 = 2,17$ для железа), $x < 1$, т. е. $p_F < m_e c$, электроны нерелятивистские. При

$$\rho > \mu_e \cdot 10^6 \text{ г/см}^3, \quad p_F > m_e c.$$

Точное выражение полной энергии электрона E'_F при заданном импульсе p_F , справедливое при любых (нерелятивистских и релятивистских) значениях импульса

$$E'_F = \sqrt{(m_e c^2)^2 + c^2 p_F^2} = m_e c^2 \sqrt{1 + x^2}. \quad (6.2.7)$$

Выпишем предельные случаи этой формулы:

$$\left. \begin{aligned} E'_F &= m_e c^2 \left(1 + \frac{x^2}{2}\right), & x \ll 1, \\ E'_F &= m_e c^2 \left(x + \frac{1}{2x}\right), & x \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

Это выражение включает энергию покоя, т. е. для покоящегося электрона принято $E_0 = m_e c^2$. Для расчетов, связанных с ядерными реакциями, где принято выражать энергию в миллионах электроновольт, напомним, что $1 \text{ Мэв} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}$, $m_e c^2 = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ эрг} = 0,51 \text{ Мэв}$. Поставим вопрос, сколько энергии выделится при превращении сжатого вещества с энергией электронов E'_F в обычный газ. При этом электроны переходят в состояние, где их энергия практически *) равна $E_0 = m_e c^2$. Из формулы (6.28) найдем разность:

$$E'_F - E_0 = \left\{ \begin{aligned} m_e c^2 (\sqrt{1 + x^2} - 1) &= \frac{x^2}{2} m_e c^2, & x \ll 1, \\ m_e c^2 \left(x - 1 + \frac{1}{2x}\right), & & x \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.9)$$

Обратимся к средней энергии электронов. Необходимо найти

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{m_e c^2 \int_0^x \sqrt{1 + x^2} x^2 dx}{\int_0^x x^2 dx} = \\ &= \frac{3m_e c^2}{8x^3} [x(1 + 2x^2) \sqrt{1 + x^2} - \ln(x + \sqrt{1 + x^2})]. \quad (6.2.10) \end{aligned}$$

*) Энергия связи электронов в атоме мала; она составляет в среднем на один электрон $13,5 \text{ эв} = 2,7 \cdot 10^{-5} m_e c^2$ для водорода, $7,7 \cdot 10^{-5} m_e c^2$ для гелия, $10^{-3} m_e c^2$ для железа. Далее мы пренебрегаем этой величиной.

Наряду с этим точным выражением полезны асимптотические формулы (выписываем сразу для $E - E_0$):

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} - E_0 &= \frac{3x^2}{10} m_e c^2, & x \ll 1, \\ \bar{E} - E_0 &= m_e c^2 \left(\frac{3}{4} x - 1 + \frac{3}{4} \frac{1}{x} \right), & x \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.11)$$

Давление вырожденного электронного газа можно выразить через энергию, приходящуюся на один электрон по термодинамической формуле

$$P = n^2 \frac{dE}{dn}. \quad (6.2.12)$$

В этой формуле E находится под знаком дифференцирования и потому безразлично, пользуемся ли мы E или $E - E_0$:

$$\frac{dE}{dn} = \frac{dE}{dx} \left(\frac{dn}{dx} \right)^{-1} = \frac{dE}{dx} \left(\frac{d \ln n}{dx} \right)^{-1} n^{-1} = \frac{1}{3} x \frac{dE}{dx} n^{-1}, \quad (6.2.13)$$

так как $n = ax^3$, $\ln n = 3 \ln x + \ln a$, $\frac{d \ln n}{dx} = 3 \frac{1}{x}$.

Для газа из невзаимодействующих частиц давление можно также найти, рассматривая перенос импульса через единичную площадку частицами с заданной скоростью и импульсом,

$$P = \int u_z p_z dn.$$

Мы выбрали площадку в плоскости x, y , т. е. \perp оси z . Угол между импульсом и осью z обозначим θ :

$$\begin{aligned} u_z &= u \cdot \cos \theta, & p_z &= p \cdot \cos \theta, \\ u &= \frac{c^2 p}{E} = c \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & p &= m_e c x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{2(m_e c)^4 c}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{x_F} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} x x^2 dx = \\ &= \frac{8\pi (m_e c)^4 c}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= \frac{(m_e c)^4 c}{8\pi^2 \hbar^3} \left[x \sqrt{1+x^2} \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \end{aligned}$$

Оба способа естественно дают одинаковый ответ:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{m_e c^2}{\hbar^3} f(x), \quad \text{где } x = \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{1/3}, \\ f(x) &= \frac{1}{8\pi^2} \left[x \sqrt{1+x^2} \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.15)$$

Снова выпишем формулы для двух предельных случаев; нерелятивистский:

$$P = \frac{m_e c^2}{l_c^3} \frac{x^5}{15\pi^2} = \frac{2}{3} (\bar{E} - E_0) n = \frac{1}{15\pi^2} \frac{m_e c^2}{l_c^3} \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{5/3} = \cdot 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad (6.2.16)$$

ультрарелятивистский:

$$P = \frac{m_e c^2}{l_c^3} \frac{1}{12\pi^2} x^4 \cong \frac{1}{3} (\bar{E} - E_0) n \cong \cong \frac{1}{12\pi^2} \frac{m_e c^2}{l_c^3} \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{4/3} = 1.2 \cdot 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad (6.2.17)$$

В последних двух формулах оставлен только старший член в давлении (x^4) и в выражении энергии ($^{3/4}x$), а следующие члены опущены.

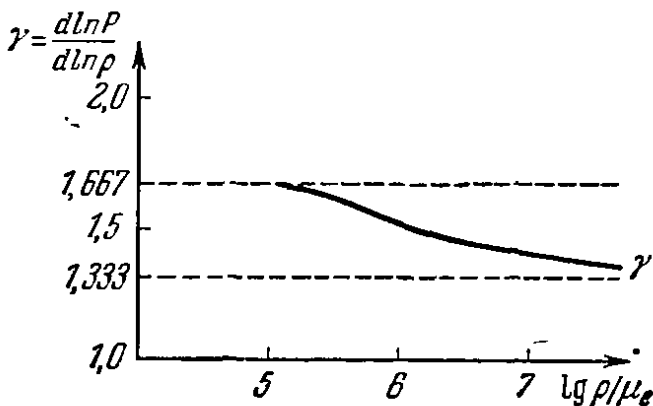


Рис. 27. Показатель адиабаты $\gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ для вещества, давление которого определяется вырожденными электронами, а плотность — барионами.

Итак, для вырожденного электронного газа показатель адиабаты $\frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ равен $^{5/3}$ при малой плотности и $^{4/3}$ при большой плотности.

На рис. 27 показан график зависимости показателя адиабаты от плотности; заметьте, что на оси ординат показан только отрезок от $^{4/3}$ до $^{5/3}$, а по оси абсцисс плотность*) отложена в логарифмическом масштабе. Как видно из графика, показатель адиабаты плавно меняется в указанных пределах. (Таблицы см. Шатцман (1958)).

§ 3. Поправки в области высоких давлений

В предыдущем параграфе электронный газ рассматривался как идеальный, не учитывалось электростатическое взаимодействие электронов между собой, взаимодействие электронов с ядрами, а также взаимодействие ядер между собой. Уже из этого перечисления, в котором упоминаются взаимодействия разного знака (притяжение и отталкивание), естественно следует вывод, что в первом приближении эти взаимодействия взаимно уничтожаются и благодаря этому оправдывается при-

*) Точнее, величина ρ/μ_e , благодаря чему график становится универсальным для любого вещества.

ближение свободного электронного газа. Эта взаимная компенсация очевидным образом связана с тем, что вещество в среднем электронейтрально. Главная поправка связана с тем, что положительный заряд не распределен равномерно в пространстве, а сосредоточен в отдельных ядрах. Эта поправка уменьшает энергию и уменьшает давление: отталкивающие друг друга ядра находятся в среднем на большем расстоянии друг от друга по сравнению со средним расстоянием между притягивающимися ядрами и электронами; отталкивание слабее притяжения.

Очевидно, что при абсолютном нуле температуры (и без учета квантовых эффектов для тяжелых ядер) ядра располагаются в решетке с плотнейшей упаковкой*). Найдем приближенное выражение поправки к энергии. Заменяем ячейку решетки шаром того же объема, $V = \frac{1}{N} = \frac{4\pi r_1^3}{3}$, где N — число ядер в 1 см^3 , r_1 — радиус шара. Потенциал заряда Ze , помещенного в центре, есть Ze/r ; энергия взаимодействия Z электронов, равномерно распределенных в объеме шара, с ядром равна

$$E_{n,e} = - \int_0^{r_1} \frac{Ze}{r} \rho_e \cdot 4\pi r^2 dr = - \frac{3(Ze)^2}{2r_1} \quad (6.3.1)$$

(мы учли, что $\rho_e V = -Ze$), здесь ρ_e — плотность заряда электронов в шаре.

Теперь найдем взаимодействие электронов между собой. Потенциал внутри равномерно заряженного шара:

$$\varphi = \frac{Ze}{r_1} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_1^2} \right).$$

Энергия взаимодействия:

$$E_{ee} = \frac{1}{2} \int \rho_e \varphi dV = \frac{(Ze)^2}{r_1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \right) = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{r_1}. \quad (6.3.2)$$

Вся электростатическая энергия одной ячейки

$$E = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{5} \right) \frac{(Ze)^2}{r_1} = -\frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{r_1}. \quad (6.3.3)$$

Взаимодействием с электронами и ядрами, находящимися в других ячейках, можно пренебречь, поскольку эти ячейки

*) Так называется решетка, в которой при данном минимальном расстоянии между ядрами достигается наибольшая объемная плотность ядер. Очевидно, что эта же решетка решает и обратную задачу — расположения ядер с наибольшим расстоянием между соседями при данной объемной плотности.

электронейтральны: внешнее поле заряда одного знака, окруженного сферически-симметричным облаком нейтрализующего заряда другого знака, равно нулю. Значит, ошибка связана лишь с отклонением элементарной ячейки решетки от сферической формы. Точный расчет показывает, что ошибка приведенного выше приближенного выражения составляет меньше 0,3%.

Другой способ расчета, принципиально более прозрачный, состоит в следующем: найдем электрическое поле E^* внутри ячейки, состоящей из центрального ядра и распределенного отрицательного заряда электронов:

$$E^* = \frac{Ze}{r^2} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^3 \right];$$

очевидно, поле зависит от заряда в области $r < r_1$ при $r = r_1$, $E^* = 0$.

Теперь найдем энергию поля, т. е. $\int \frac{(E^*)^2}{8\pi} dV$. Однако здесь надо не забывать, что за нуль принята энергия вещества при нулевой плотности, т. е. энергия ядра и электронов, находящихся далеко от ядра. У нулевой системы тоже есть поле:

$$E_0^* = \frac{Ze}{r^2}.$$

Искомая электростатическая энергия сжатого вещества, отсчитанная от энергии при нулевой плотности, равна разности двух интегралов:

$$E = \frac{(Ze)^2}{8\pi} \int_0^{r_1} \frac{1}{r^4} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^3 \right]^2 4\pi r^2 dr - \frac{(Ze)^2}{8\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr.$$

Переписав выражение следующим образом, получим в согласии с предыдущим расчетом конечную величину:

$$E = \frac{(Ze)^2}{2} \int_0^{r_1} \frac{1}{r^4} \left[-2 \left(\frac{r}{r_1} \right)^3 + \left(\frac{r}{r_1} \right)^6 \right] r^2 dr - \frac{1}{2} (Ze)^2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{r^4} r^2 dr = -\frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{r_1}. \quad (6.3.3')$$

Сравним электростатическую энергию со средней энергией вырожденных релятивистских электронов. Элементарная ячейка содержит одно ядро, а следовательно, Z электронов. Найдем радиус ячейки r_1 , выраженный через плотность электронов n :

$$\frac{4\pi}{3} r_1^3 = \frac{1}{N} = \frac{Z}{n}, \quad r_1 = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{Z}{n} \right)^{1/3}. \quad (6.3.4)$$

Электростатическая энергия, отнесенная к одному электрону и выраженная через плотность электронов, равна

$$\epsilon_{el} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n^{1/3}. \quad (6.3.5)$$

Закон зависимости от n такой же, как и для ферми-энергии релятивистского вырожденного электронного газа. Напомним, что в расчете на один электрон в ультрарелятивистском пределе

$$E_F = cp_F = \hbar c (3\pi^2 n)^{1/3}.$$

Средняя энергия электрона

$$\bar{E} = \frac{3}{4} E_F = \hbar c \cdot \frac{3}{4} (3\pi^2)^{1/3} n^{1/3}. \quad (6.3.6)$$

Отношение электростатической энергии к средней энергии Ферми газа

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{el}}{\bar{E}} &= -\frac{e^2 Z^{2/3}}{\hbar c} \left(\frac{4\pi}{3 \cdot 3\pi^2} \right)^{1/3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{10} = -0,62 \frac{e^2}{\hbar c} Z^{2/3} = \\ &= -4,56 \cdot 10^{-3} Z^{2/3}. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Эта поправка для ультрарелятивистского газа является главной. В силу одинаковой зависимости от n в равном отношении находятся и поправка к давлению и само давление идеального газа. Есть еще второстепенные поправки, связанные с тем, что взаимодействующие электроны распределены неравномерно; при этом в ультрарелятивистском случае наряду с электростатическим взаимодействием надо учитывать и магнитное взаимодействие электронов. Наличие ядер несколько нарушает распределение плотности электронов в пространстве. Заимствуем у Сальпетера (1961) окончательное выражение давления с учетом поправок в ультрарелятивистском случае:

$$\frac{P}{P_0} = 1,00116 - 4,56 \cdot 10^{-3} Z^{2/3} - 1,78 \cdot 10^{-5} Z^{4/3}. \quad (6.3.8)$$

Здесь P_0 — давление, вычисленное без учета поправок. Это выражение дает соответственно при $Z=1, 2, 12, 26$:

$$\frac{P}{P_0} = 0,9976; \quad 0,9859; \quad 0,9768; \quad 0,9598.$$

§ 4. Область средних плотностей, $10^6 > \rho > 500$ г/см³

Выше было выяснено, что основная поправка к уравнению состояния связана с электростатическим взаимодействием ядер и электронов и снижает давление по сравнению с давлением свободного невзаимодействующего вырожденного газа.

При этом было получено выражение энергии (на один электрон):

$$\varepsilon_{el} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n^{1/3}. \quad (6.4.1)$$

В нерелятивистской области средняя энергия свободного электрона

$$\overline{E - E_0} = \frac{3}{5} m_e c^2 \frac{x^2}{2} = \frac{3}{10} m_e c^2 \left(\frac{n}{\frac{m_e^3 c^3}{3\pi^2 \hbar^3}}\right)^{2/3}. \quad (6.4.2)$$

Найдем плотность, при которой в этом приближении давление равно нулю. В этом случае должно выполняться равенство

$$\overline{E - E_0} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{el}. \quad (6.4.3)$$

Это соотношение получается из условия

$$\frac{\partial (\overline{E - E_0} + \varepsilon_{el})}{\partial n} = 0 \quad (6.4.4)$$

и выражает теорему вириала. Это приближение дает «нормальную плотность» ρ_0 , т. е. плотность, которую вещество имеет при $P=0$, соответствующую

$$n_0^{1/3} = \frac{2^{1/3}}{\pi} Z^{2/3} \frac{e^2 m_e}{\hbar^2} = \frac{2^{1/3}}{\pi} Z^{2/3} \frac{1}{a_0}, \quad (6.4.5)$$

где $a_0 = e^2 m_e / \hbar^2 = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см — это «боровский» радиус, радиус первой орбиты атома водорода в старой квантовой механике Нильса Бора.

Соответствующая плотность

$$\rho_0 = \frac{A}{Z} \frac{n}{6 \cdot 10^{23}} = \frac{2}{\pi^3} \frac{AZ}{6 \cdot 10^{23} a^3} = AZ \quad (6.4.6)$$

т. е. около 1 для водорода, 300 для магния, 1300 для железа, 16 000 для свинца. Согласие с опытом очень плохое. Причина заключается в том, что расчет был проведен по невозмущенному равномерному распределению электронов. На самом же деле взаимодействие с ядром весьма сильно меняет распределение электронов в пространстве. В 30-х годах была разработана приближенная теория, в которой электронный газ с давлением $P = an^{2/3}$ рассматривался в поле ядра и самих электронов. Эта теория получила название теории *самосогласованного* поля.

Рассматривается распределение электронов внутри элементарной ячейки, которую заменяют шаром того же объема, радиуса R . Плотность электронов $n(r)$ зависит от радиуса r .

Кроме того, рассматривается электростатический потенциал $\varphi(r)$. Уравнения имеют следующий вид: уравнение Пуассона, дающее зависимость φ от $n(r)$:

$$\Delta\varphi = 4\pi en(r), \quad (6.4.7)$$

где $e = 4,77 \cdot 10^{-10}$ — положительное число, заряд электрона (по модулю) — $en(r)$ есть плотность заряда.

Второе уравнение можно записать как условие механического равновесия элемента объема, занятого электронами, на который действуют электростатические силы и силы давления:

$$(-ne)(-\nabla\varphi) - \frac{\partial P(n)}{\partial r} = 0. \quad (6.4.8)$$

Когда объемная сила является потенциальной и давление зависит только от плотности, уравнение равновесия можно проинтегрировать: в данном случае

$$\frac{e d\varphi}{dr} - \frac{d}{dr} \int \frac{1}{n} dP = 0, \quad H(n) - e\varphi = K, \quad (6.4.9)$$

где K — константа, H — удельная (на один электрон) энтальпия электронного газа, $H = \int \frac{1}{n} dP = E + \frac{1}{n} P$.

Замечательно, что $H(n) = E_F(n)$. В самом деле, для нерелятивистского газа $\bar{E} - E_0 = \frac{3}{5}(E_F - E_0)$, $P = n \frac{2}{3}(\bar{E} - E_0) = n \frac{2}{5}(E_F - E_0)$, откуда легко получится с точностью до несущественного слагаемого указанное соотношение между H и E_F . Это соотношение является общим, оно справедливо и в релятивистской области. Окончательно получается уравнение

$$E_F - e\varphi = K'. \quad (6.4.10)$$

Смысл этого уравнения ясен: в равновесии полная энергия минимальна, равновесие должно быть в первом приближении безразличным по отношению к любым перемещениям небольшого числа электронов с одного места на другое. Эти перемещения можно производить, взяв электрон в одном месте (r') и поместив его в другое место (r''), что даст условие

$$E_F(r') - e\varphi(r') = E_F(r'') - e\varphi(r''). \quad (6.4.11)$$

При этом r' и r'' любые, $r' - r''$ не малó.

Другой способ связан с перемещением всех электронов, находящихся в данной точке, на малое расстояние δr . Его рассмотрение приводит к уравнению равновесия в гидродинамической форме, с градиентом давления. Ясно, что обе формы условия равновесия должны быть эквивалентны,

Мы так подробно остановились на этом вопросе в связи с тем, что совершенно аналогичная ситуация имеет место для звезды как целого; как мы увидим ниже, условие механического равновесия звезды эквивалентно условию постоянства суммы химического потенциала и гравитационного потенциала по всей звезде.

Вернемся к микромиру. Так как энергия Ферми просто выражается через плотность электронов, то получим

$$An^{2/3} - e\varphi = K', \quad n = B(K' + e\varphi)^{3/2}$$

и окончательно уравнение самосогласованного поля:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = c(K'' + \varphi)^{3/2}, \quad (6.4.12)$$

где c — известная константа, элементарно выражающаяся через h , m , e , а $K'' = K'/e$ константа, значение которой заранее не задано.

Граничные условия получаются из следующих соображений: в центре элементарной ячейки находится ядро с зарядом Ze , значит, при $r \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow Ze/r + \text{const}$. Внутри шара должны на-

ходиться Z электронов, так что $4\pi \int_0^R n(r) r^2 dr = Z$. Это усло-

вие приводит к тому, что ячейка в целом электронейтральна. Отсюда следует (в этом легко убедиться и формально из уравнения), что при $r = R$, $\frac{d\varphi}{dr} = 0$. Второе граничное условие выполняется лишь при вполне определенном значении K' *).

Давление вещества равно давлению электронного газа на границе ячейки, т. е. выражается через $K' + e\varphi(R)$. На границе при $r = R$ электрическое поле равно нулю, ячейки взаимодействуют друг с другом только через давление. Можно показать, что такое наглядное определение совпадает с выражением давления через производную энергии по плотности.

Из анализа размерности следует, что результат можно представить в виде

$$P = B\bar{n}^{-5/3} \left[\frac{Ze^2}{R} / E_F(\bar{n}) \right]. \quad (6.4.13)$$

Здесь \bar{n} — средняя плотность электронов:

$$\bar{n} = 6 \cdot 10^{23} \frac{\rho Z}{A} = \alpha \frac{\rho Z}{A}, \quad \alpha = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{z},$$

*) К величине φ можно добавить произвольную постоянную, тогда K' уменьшается на соответствующую величину; сумма $K' + e\varphi$ определена однозначно.

A — атомный вес, $B\bar{n}^{5/3}$ — давление свободного вырожденного электронного газа (без учета изменения плотности за счет взаимодействия с ядром). Выражение $B\bar{n}^{5/3}$ приведено выше (6.2.16).

$f[y]$ — безразмерная функция, характеризующая влияние перераспределения заряда на давление. При этом ясно, что эта функция может быть только $f < 1$, так как плотность электронов на границе ячейки обязательно меньше средней.

Безразмерная f является функцией безразмерного отношения потенциальной энергии к кинетической

$$y = \frac{Ze^2}{R} / E_F. \quad (6.4.14)$$

Выразим y через плотность, опуская все безразмерные множители

$$\left. \begin{aligned} R &= \left(\frac{A}{\alpha \rho} \right)^{1/3}, \\ E_F &= \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \bar{n}^{2/3}}{m} = \frac{\hbar^2 \left(\frac{\alpha Z \rho}{A} \right)^{2/3}}{m}, \\ y &= \frac{Ze^2 \left(\frac{\alpha \rho}{A} \right)^{1/3} m}{\hbar^2 (\alpha Z \rho' A)^{2/3}} = \frac{me^2 Z^{1/3} A^{1/3}}{\hbar^2 \alpha^{1/3} \rho^{1/3}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.15)$$

Поведение функции f в двух предельных случаях $y \ll 1$ и $y \gg 1$ можно предвидеть. В первом случае в пределе $f(0) = 1$, а следующий член разложения

$$f(y) = 1 - By$$

даст поправку пропорциональную $\rho^{1/3}$ [ср. выше формулы § 3]. Не столь очевиден другой предельный случай. Следует ожидать, что при данном размере ячейки при неограниченном увеличении заряда ядра Z давление стремится к вполне определенному пределу. Наглядная картина такова: мы увеличиваем заряд ядра и одновременно увеличиваем число электронов. При этом новые электроны садятся вблизи ядра и экранируют добавленный заряд, распределение зарядов вдали от ядра не меняется, стремится к определенному пределу при $Z \rightarrow \infty$. Этот принцип, подтвержденный интегрированием уравнения*), приводит к следующему выводу: чтобы выражение для давления

$$P = \text{const} \cdot Z^{5/3} \rho^{5/3} f\left(\frac{Z^{1/3}}{\rho^{1/3}}\right)$$

не зависело от Z в пределе $Z \rightarrow \infty$, надо, чтобы $f(y) = y^{-5}$ при

*) При $Z \rightarrow \infty$ решение имеет асимптотический вид: $\phi \sim r^{-4}$, $n(r) \sim r^{-6}$.

$y \gg 1$. Но в таком случае

$$P = \text{const} \cdot \rho^{10/3}. \quad (6.4.16)$$

Любопытно, что такие качественные соображения дают асимптотический закон при не слишком высоком давлении, близкий к $P \sim \rho^3$. Закон $P \sim \rho^3$ был получен Ландау и Станюковичем (1945) для продуктов взрыва взрывчатых веществ. Затем Станюкович (1955) показал, что этот закон очень удобен для газодинамических расчетов.

Эксперименты по сжатию железа и ряда других элементов довольно широкой области давления (до ~ 10 млн. атм) приблизительно описываются близким уравнением

$$P = a(\rho^3 - \rho_0^3). \quad (6.4.17)$$

Расчеты уравнения состояния с помощью уравнения (6.4.13) все же грубы*). Оставаясь в рамках усредненного, коллективного описания электронов, можно учесть ряд поправок и значительно уточнить результат. Эта работа была проделана Калиткиным (1960) с использованием соображений

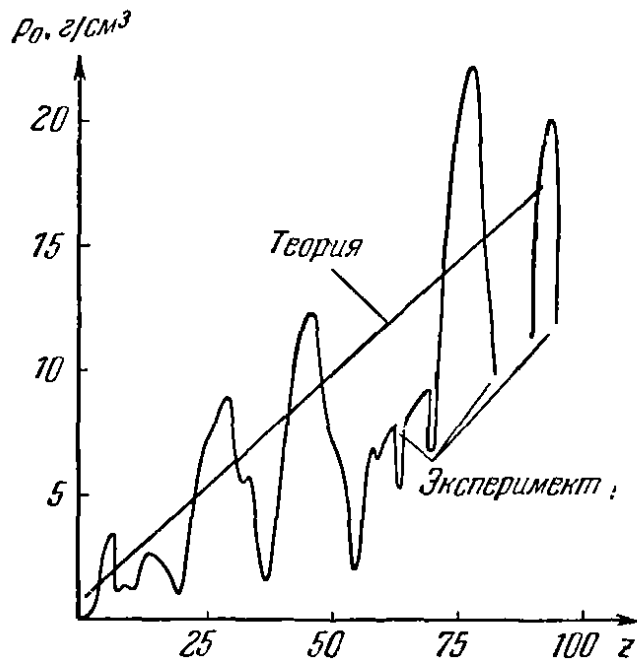


Рис. 28. Экспериментальная и теоретическая (статистическая) зависимость плотности несжатого вещества от заряда ядер.

Киржница, Компанейца, Павловского и др. Дальнейшее уточнение возможно лишь при рассмотрении индивидуальных орбит электронов и специфических химических свойств элементов.

Результат Калиткина (1960) сводится к выражению для давления в виде разности двух членов

$$P = B \left(\frac{\rho Z}{A} \right)^{5/3} f \left(\frac{Z^{1/3} A^{1/3}}{\rho^{1/3}} \right) - c \left(\frac{\rho Z}{A} \right)^{4/3} \varphi \left(\frac{Z^{1/3} A^{1/3}}{\rho^{1/3}} \right), \quad (6.4.18)$$

где первый член совпадает с найденным раньше, а второй содержит поправки. Функции f и φ — см. в работе Калиткина (1960). Эта простая формула в среднем довольно хорошо описывает даже такую «деликатную» величину, как ρ_0 — плотность элементов при нормальных условиях.

Приводим заимствованный из работы Калиткина график рис. 28, на котором сопоставлены вычисленная и измеренная

*) Подробно теория самосогласованного поля изложена у Гомбаша (1950).

ρ_0 в зависимости от атомного номера Z . За пределами теории лежат только колебания, связанные с химической спецификой, периодические отклонения вверх и вниз. При давлении $5 \div 10$ млн. атм они уже сильно сглажены.

Приводим также табл. II для нескольких элементов, заимствованную из работы Сальпетера (1961). В таблице приведено отношение полного давления к давлению вырожденного газа (6.2.15), как функция параметра релятивизации x для фиксированных Z .

Т а б л и ц а II

Отношение полного давления к давлению вырожденного газа

x	$\left(\frac{2}{\mu_e}\right)\rho \frac{z}{\text{см}^3}$	Z			
		2	6	12	26
0,05	$2,44 \times 10^2$	0,760	0,564	$\sim 0,3$	—
0,1	$1,95 \times 10^3$	0,8802	0,7819	0,6705	$\sim 0,5$
0,2	$1,56 \times 10^4$	0,9404	0,8906	0,8341	0,7308
0,3	$5,26 \times 10^4$	0,9604	0,9266	0,8882	0,8178
0,4	$1,25 \times 10^5$	0,9705	0,9445	0,9150	0,8607
0,5	$2,44 \times 10^5$	0,9765	0,9551	0,9303	0,8860
0,6	$4,21 \times 10^5$	0,9805	0,9620	0,9410	0,9024
0,7	$6,68 \times 10^5$	0,9833	0,9669	0,9482	0,9138
0,8	$1,00 \times 10^6$	0,9853	0,9705	0,9535	0,9221
1,0	$1,95 \times 10^6$	0,9881	0,9752	0,9605	0,9332
1,2	$3,37 \times 10^6$	0,9898	0,9782	0,9684	0,9401
1,4	$5,36 \times 10^6$	0,9909	0,9801	0,9677	0,9447
1,6	$8,00 \times 10^6$	0,9917	0,9814	0,9697	0,9479
1,8	$1,14 \times 10^7$	0,9922	0,9824	0,9711	0,9511
2,0	$1,56 \times 10^7$	0,9926	0,9831	0,9721	0,9519
2,5	$3,04 \times 10^7$	0,9932	0,9842	0,9738	0,9546
3,0	$5,26 \times 10^7$	0,9935	0,9848	0,9748	0,9562
4,0	$1,25 \times 10^8$	0,9938	0,9853	0,9757	0,9577
5,0	$2,44 \times 10^8$	0,9939	0,9856	0,9761	0,9585
7,5	$8,22 \times 10^8$	0,9939	0,9858	0,9765	0,9592
∞	∞	0,9939	0,9859	0,9768	0,9598

При больших Z и малых x , когда значение отношения меньше 0,5, данные расчетов ненадежны (правый верхний угол таблицы).

§ 5. Ядерные процессы и ядерное взаимодействие — влияние на уравнение состояния

В области плотности выше 10^8 г/см³ уравнение состояния существенно зависит от ядерных процессов и взаимодействий. Можно поставить точную задачу о нахождении состояния с наименьшей энергией при каждой данной плотности барионов и

нуле температуры Энергия есть сумма энергии ядер и энергии электронов; последняя зависит от $Z/A=1/\mu_e$. В релятивистском ферми-газе средняя энергия одного электрона

$$\bar{E} = \frac{3}{4} E_F = \frac{3}{4} c p_F = \frac{3}{4} m_e c^2 \left(\frac{\rho}{10^6 \mu_e} \right)^{1/3}. \quad (6.5.1)$$

Соответственно энергия электронов на один грамм:

$$E_e = \frac{3}{4} \frac{m_e c^2}{m_p} \left(\frac{\rho}{10^6} \right)^{1/3} \mu_e^{-4/3} = 3,75 \cdot 10^{15} \rho^{1,3} \mu_e^{-4/3} \text{ эрг/г}. \quad (6.5.2)$$

Таким образом, энергия сжатого состояния отличается от ядерной энергии отдельных атомов

$$E = E_n(A, Z) + E_e. \quad (6.5.3)$$

Минимум E_n , как известно, соответствует стабильному и наиболее распространенному изотопу железа Fe_{56}^{26} . Добавочный член E_e играет тем бóльшую роль, чем больше плотность. Добавочный член смещает минимум в сторону ядер с большим μ_e . По расчетам Сальпетера (1961) при $E_F = 20,6 \text{ Мэв}$, $\rho = 1,9 \times 10^{11} \text{ г/см}^3$, $P = 3,2 \cdot 10^{29} \text{ эрг/см}^3$ становится энергетически выгодным превращение Fe в Sr. Здесь и ниже (и в табл. III и IV) E_F не включает mc^2 . Этот изотоп Sr_{120}^{38} является в обычных условиях радиоактивным, однако при рассматриваемых условиях наличие ферми-распределения электронов с граничной энергией $E_F > 20,6 \text{ Мэв}$ запрещает распад стронция. Подробнее процесс перехода от Fe к Sr с изменением плотности показан в табл. III (Салтер (1961)), где приведены Ферми-энергии Мэв и соответствующие плотности (г/см^3) для переходов при равновесных условиях между различными ядрами (Z, A).

Т а б л и ц а III

Критические точки перехода между различными ядрами

Z, A	(26,56)	(28,62)	(28,64)	(28,66)	(28,68)	(30,76)	(30,78)	(30,80)	(32,90)	(38,120) n
E_F	0,6	2,5	3,9	6,1	7,0	8,5	9,5	14,8	20,6	24,0
$\log_{10} \rho$	7,15	8,63	9,15	9,69	9,87	10,13	10,28	10,84	11,28	11,53

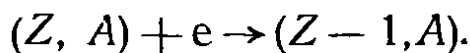
При плотностях больше $\rho = 10^{11,53}$ равновесным уже является состояние из отдельных нейтронов (подробнее см. далее). Для давления в принципе получается кривая $P(\rho)$ такая же, как при фазовых превращениях 1-го рода (конденсация пара в жидкость и т. п.). На рис. 29 приводится схематическая упрощен-

ная зависимость $P(\rho)$ (учтены лишь железо, стронций, нейтроны). На участке $O - A$ в равновесии Fe_{56}^{26} , $P = a_1 \rho^{4,3}$; на участке $B - C$ в равновесии Sr_{120}^{38} , $P = a_2 \rho^{4,3}$; на участке $D - E$ в равновесии нейтроны, $P = a_3 \rho^{4,3}$. В промежутках, например, на участке $A - B$ сосуществуют при одинаковом давлении железо и стронций. Количество того и другого зависит от плотности, линейно изменяясь на отрезке $A - B$. То же относится к стронцию и на участке $C - D$.

Точки A и B соответствуют равному давлению, а следовательно, и равной плотности электронов. При этом очевидно, что плотности двух веществ в точках A и B находятся в соотношении, обратном μ_e , так что конкретно плотность $\rho_B = 1,47 \rho_A$ возрастает при превращении в 1,47 раз. Поскольку взаимодействие ядер пренебрежимо мало, то ни на давление, ни на энергию не влияет расположение ядер; в частности, не существенно, образуют ли железо и стронций две геометрически разделенных фазы или твердый раствор.

Однако все проведенное выше рассмотрение, будучи принципиально правильным и строгим, представляет собой пример излишнего ригоризма или даже педантизма. Дело в том, что при низкой температуре нет никакого реального механизма, который мог бы превратить железо в стронций за разумное время. Формулируем ту же мысль иначе: для того чтобы превратить $\text{Fe}_{56}^{26} \rightarrow \text{Sr}_{120}^{38}$ за разумное время, нужны высокие температуры, нужно сначала разбить ядро железа на составные части — α -частицы и нейтроны и по-другому перетасовать их. Но при соответствующей высокой температуре будет иным и равновесие. Процессы и равновесие при высокой температуре будут рассмотрены в следующей главе.

Реально при сжатии вещества при достижении определенной пороговой E_F становится возможным обратный β -процесс: электрон захватывается ядром и один из протонов ядра превращается в нейтрон:



Процесс называется нейтронизацией вещества. Он протекает со скоростью слабых взаимодействий.

При сжатии железа при достижении $E_F = 3,7 \text{ Мэв}$ $\rho = 1,15 \times 10^9 \text{ г/см}^3$ станет возможным превращение железа в Mn_{56}^{25} .

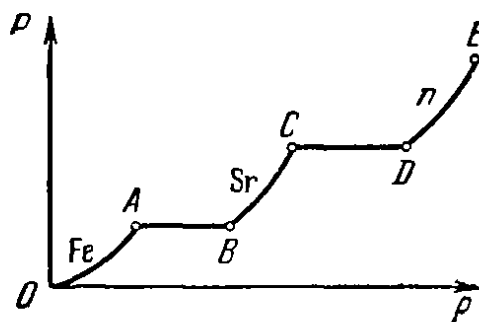


Рис. 29. Упрощенная схема (подробнее см. табл. II) зависимости давления от плотности холодного вещества.

Но порог превращения нечетно-нечетного Mn_{56}^{25} в четно-четный Cr_{56}^{24} меньше, равен 1,6 Мэв. Поэтому каждое ядро Mn_{56}^{25} тут же будет превращаться в Cr_{56}^{24} *).

Таким образом, при сжатии до плотности хотя бы ненамного превышающей критическую $\rho_c = 1,15 \cdot 10^9$ г/см³, начинается превращение железа в хром. При этом давление равно

$$1,2 \cdot 10^{23} \left(\frac{E}{m_e c^2} \right)^4 = 3,3 \cdot 10^{26} \text{ эрг/см}^3.$$

Плотность возрастает в отношении $26/24 = 1,08$ раз. Скорость этой реакции рассмотрим ниже. По порядку величины, при превышении P_c на 1% нужно время порядка 10^6 сек, чтобы реакция прошла.

Двухступенчатый ход реакции (медленно: $Fe \rightarrow Mn$; быстро, с избытком энергии $Mn \rightarrow Cr$) приводит к необратимости процесса. В самом деле, если вещество, которое в ходе сжатия превратилось в хром Cr_{56}^{24} , медленно расширяется, то распад хрома начнется лишь после того как E_F упадет ниже 1,6 Мэв, т. е. при плотности $\rho = 7,6 \cdot 10^7$ г/см³ и давлении $1,2 \cdot 10^{25}$ эрг/см³. При этом за каждым распадом $Cr \rightarrow Mn + e^- + \bar{\nu}$ будет немедленно следовать $Mn \rightarrow Fe + e^- + \bar{\nu}$, поскольку этот второй процесс существенно надпороговый (E распада 3,7 Мэв, $E_F = 1,6$ Мэв). В интервале давлений от

$$1,2 \cdot 10^{23} \left(\frac{1,6}{0,511} \right)^4 = 1,15 \cdot 10^{25} \text{ эрг/см}^3 \text{ до } 1,2 \cdot 10^{23} \left(\frac{3,7}{0,511} \right)^4 = \\ = 3,3 \cdot 10^{26} \text{ эрг/см}^3$$

вещество может содержать любые количества железа и хрома, в зависимости от предшествующей истории рассматриваемого элемента массы.

Выше предполагалось, что в ходе термоядерных реакций при высокой температуре и не слишком высокой плотности было достигнуто полное термодинамическое равновесие, затем произошло остывание; равновесное состояние вещества после остывания есть Fe_{56} . После этого происходит сжатие и превращения:



В принципе возможно сжатие вещества, которое не подвергалось действию высокой температуры или подвергалось действию недостаточно высокой температуры и состоит не из же-

*) В принципе уже при $E_F = 2,65$ Мэв возможен двойной процесс $Fe + 2e^- \rightarrow Cr + 2\nu$. Однако вероятность такого процесса ничтожна, поэтому мы его не рассматриваем.

леза, а из других элементов. Приводим пороги нейтронизации для нескольких ядер (табл. IV).

Таблица IV

Пороги нейтронизации

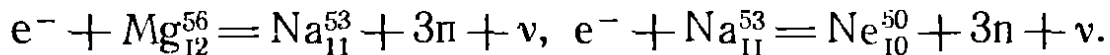
Ядро	E_F , Мэв	ρ_c , г/см ³	P_c , эрг/см ³	Продукт цепной реакции на пороге
H	0,78	10^7	$5,5 \cdot 10^{23}$	$H \rightarrow n, n + H = D$
${}^2_2\text{He}^3$	0,018	$2,8 \cdot 10^4$	$1,8 \cdot 10^{17}$	$\text{He}^3 \rightarrow T$
${}^2_2\text{He}^4$	20,6	$1,32 \cdot 10^{11}$	$3,2 \cdot 10^{29}$	$\text{He}^4 \rightarrow T + n, e^- + T = 3n$
${}^6_6\text{C}^{12}$	13,4	$4,45 \cdot 10^{10}$	$5,7 \cdot 10^{28}$	$\text{C}^{12} \rightarrow \text{B}^{11}$
${}^{14}_{14}\text{Si}^{28}$	4,6	$1,92 \cdot 10^9$	$7,8 \cdot 10^{26}$	${}^{14}_{14}\text{Si}^{26} \rightarrow {}^{13}_{13}\text{Al}^{28}$
${}^{26}_{26}\text{Fe}^{56}$	3,7	$1,15 \cdot 10^9$	$3,3 \cdot 10^{26}$	$\text{Fe} \rightarrow \text{Mn}, \text{Mn} \rightarrow \text{Cr}$

Обращает на себя внимание особо низкий порог превращения He^3 и особая прочность He^4 . Порог реакции для водорода такой, что при этой плотности даже в холодном веществе довольно быстро идет процесс $p+p=D+e^++\nu$ или $p+p+e^-=D+\nu$. Эти процессы, идущие в условиях низкой температуры, называются *пикноядерными*; расчет скорости первого процесса — см. (Зельдович (1957), Вильдхак (1940)). Эти процессы не имеют точного порога, но скорость их сильно зависит от плотности. При плотности критической по $H+e^-=n+\nu$ время пикноядерной реакции равно 10^{10} сек.

При дальнейшем повышении давления, выше того, которое соответствует $E_F \sim 20$ Мэв, наступает качественно новое явление. При более низком давлении происходили превращения одних ядер в другие, но все эти ядра имели одинаковое массовое число A и были стабильны относительно ядерных сил. При более высоком давлении получают ядра, распадающиеся с выбрасыванием свободных нейтронов. Конкретный пример такой ситуации содержится в табл. III; при реакции $e^- + \text{He}^4$ можно было бы ожидать образования H^4 . Но ядро H^4 не существует, оно распадается на нейтроны и T . В данном случае порог нейтронизации T ниже порога He^4 (9,5 Мэв), так что в результате первичной пороговой реакции $e^- + \text{He}^4$ в ходе последующих реакций остаются только свободные нейтроны. Нейтроны поодиночке не присоединяются к He^4 , поскольку ядро He^5 не существует*).

*) Не исключено, что в условиях высокой плотности образование He^6 и He^8 происходит путем попарного присоединения нейтронов $\text{He}^4 + 2n = \text{He}^6 + \gamma$. Порог $e^- + \text{He}^6 = T + 3n + \nu$ несколько выше, чем порог для He^4 (E_F больше на 4%, P_c — на 12%).

Аналогичное явление произойдет и в любой другой цепочке, например, при $A=56$ после $Fe \rightarrow Mn \rightarrow Cr$ при повышении E_F процесс пойдет дальше и приблизительно при $Z=12$ (т. е. для экзотического ядра Mg_{12}^{56}) при $E_F \cong 20 \div 22$ Мэв начнется испускание свободных нейтронов, пойдут реакции



Таким образом, в ходе сжатия можно наметить три области: а) область стабильных ядер, б) область бета-радиоактивных ядер, возникающих путем ядерной реакции с электронами, при которой внутри ядра протоны превращаются в нейтроны; эти ядра стабилизированы присутствием электронов и в) область нейтронного газа, смешанного с такими бета-радиоактивными ядрами, которые не способны присоединять свободные нейтроны*). Энергия связи таких ядер, отнесенная к одному протону, порядка 24 Мэв. Отсюда следует, что в равновесии с ними находится количество электронов, обеспечивающее $E_F=24$ Мэв, т. е. $n_e=6 \cdot 10^{29} (48^3) = 7 \cdot 10^{34}$ 1/см³. При этом

$$P = 6,6 \cdot 10^{29} \text{ дин/см}^2.$$

Считая для этих ядер $Z/A=1/4$ (как у He^8), найдем плотность распределения самих ядер (плотность вещества)

$$\rho = n \cdot \frac{A}{Z} \cdot \frac{1}{\alpha} = 4 \cdot 7 \cdot 10^{34} / 6 \cdot 10^{23} = 4 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3.$$

Следовательно, при общей плотности ρ , превышающей 4×10^{11} г/см³, соответствующей давлению $6,6 \cdot 10^{29}$ дин/см², в равновесии находится нейтронный газ с $\rho_n = \rho - 4 \cdot 10^{11}$ (г/см³), электроны с плотностью $n = 7 \cdot 10^{34}$ 1/см³ и ядра, предельно перегруженные нейтронами; их плотность есть $\rho = 4 \cdot 10^{11}$ г/см³.

В литературе можно встретить предположение, что вещество в этих условиях можно рассматривать как смесь или равномерный раствор, состоящий из нейтронов и протонов. В действительности, до тех пор, пока общая плотность вещества меньше ядерной, несомненно, что протоны не распределены равномерно, а соединены с соответствующим числом нейтронов в такие ядра, которые дают максимальную энергию связи Q_p на один протон при произвольном числе нейтронов. В ядре He^4 $Q_p=14$ Мэв, в стабильном C^{12} $Q_p=15,3$ Мэв, но в C^{16} $Q_p=18,5$ Мэв, в радиоактивном ядре S^{38} $Q_p=20$ Мэв, в Cu^{49} $Q_p=21$ Мэв. Эти величины еще не максимальны, поскольку на опыте не получены предельно перегруженные ядра.

*) Примером ядра, не способного присоединять одиночные нейтроны, является He^4 ; примерами ядер, не способных присоединять никакое число нейтронов, — ядра T и He^8 .

§ 6. Свойства нейтронного газа

В первом приближении будем рассматривать свободные нейтроны как идеальный газ, т. е. на время забудем о взаимодействии нейтронов с оставшимися ядрами и между собой. Учтем, однако, что нейтроны подчиняются статистике Ферми.

Для нейтронного газа ферми-импульс $p_F = m_n c (\rho_n / 10^6)^{1/3}$, где $\rho_n = \rho - 4 \cdot 10^{11}$, при ядерной плотности $\rho_n = 2 \cdot 10^{14}$ получим $p_F = 450 m_n c = m_n c / 4$, где m_n — масса нейтрона. Таким образом, хотя и приближенно, нейтроны еще можно считать нерелятивистскими и $E_F = p_F^2 / 2M = 1/32 m_n c^2 = 30$ Мэв при $\rho_n \approx 2 \cdot 10^{14}$ г/см³. При $\rho < 2 \cdot 10^{14}$ г/см³ получим выражение давления нерелятивистского идеального нейтронного ферми-газа

$$P_n = \frac{2}{3} \bar{E}_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot E_F n = 5,5 \cdot 10^9 \rho_n^{5/3}. \quad (6.6.1)$$

Полное давление равно сумме давления электронного газа с $E_F = 24$ Мэв и нейтронного ферми-газа. Таким образом,

$$P = 6,6 \cdot 10^{29} + 5,5 \cdot 10^9 (\rho - 4 \cdot 10^{11})^{5/3}. \quad (6.6.2)$$

Поучительно определить ту плотность, при которой сравнивается давление нейтронов и электронов. Из (6.6.2) получаем

$$\rho_n = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ г/см}^3, \quad \rho = 1,5 \cdot 10^{12} \text{ г/см}^3.$$

При ядерной плотности $\rho = 2 \cdot 10^{14}$ г/см³ давление нейтронов равно $3,5 \cdot 10^{33}$ дин/см², в 5000 раз больше давления электронов; плотность (в 1/см³) нейтронов ~ в 2000 раз больше плотности электронов и в пятьсот раз больше плотности ядер, присутствующих в веществе при этой плотности.

Однако при ферми-энергии нейтронов 30 Мэв уже изменилось условие, определяющее граничную энергию электронов. В самом деле, при реакции $e^- + p = n + \nu$ теперь нужно не только затратить энергию связи, приходящуюся на один протон в ядрах, равную 24 Мэв (см. выше § 5), но и поместить образовавшийся нейтрон на верх нейтронного ферми-распределения, израсходовав еще 30 Мэв (раньше, когда эта энергия была меньше 24 Мэв, мы ею пренебрегали; она меняется как $\rho_n^{2/3}$). Поэтому следует ожидать, что ферми-энергия электронов повысится до 54 Мэв; соответственно получим плотность ядер не $4 \cdot 10^{11}$ г/см³, а $5 \cdot 10^{12}$ г/см³ (2,5% ρ_n), плотность электронов (в 1/см³) 0,6% плотности нейтронов, давление электронов $1,6 \cdot 10^{31}$ (0,7% P) — все при общей плотности

$$\rho \cong \rho_n = 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3.$$

Приведенные выше численные соотношения и формулы, однако, следует рассматривать только как оценки порядков величин по той причине, что выше не учтено взаимодействие нейтронов. Непосредственное наблюдение рассеяния нейтрона на нейтроне в настоящее время не осуществимо. Косвенно о взаимодействии нейтронов можно судить по реакциям типа $\pi^- + D = n + p$ и $\pi^- + D = n + p + \pi^0$, $\gamma + D = n + p + \pi^+$, а также по взаимодействию нейтронов с ядрами, вычитая вклад протонов, присутствующих в ядрах.

Изучение ядер привело к формулировке принципа изотопической инвариантности (ниже кратко ПИИ). Для наших целей формулировка ПИИ такова: ядерное взаимодействие протонов и нейтронов в одинаковых состояниях в точности одинаково.

Понятие квантовомеханического состояния включает в себя энергию, орбитальный момент L и спиновый момент системы S . В частности, одинаково взаимодействие $p+p$ (двух протонов между собой), $p+n$ (протон — нейтрон) и $n+n$ (два нейтрона) — в одинаковом состоянии с $L=0$ и $S=0$ при одинаковой энергии. Здесь нужно сделать две оговорки: 1) одинаково ядерное взаимодействие, но электромагнитное взаимодействие не удовлетворяет принципу ПИИ и различно; это различие легко учесть; 2) протон и нейтрон в смысле принципа Паули представляют собой различные частицы, поэтому например, для системы $p+n$ разрешено состояние $L=0$, $S=1$ (с параллельными спинами p и n), а для $p+p$ и для $n+n$ это состояние запрещено. Поэтому не удивительно, что $p+n$ могут образовать связанную систему — дейтрон D (именно в состоянии с $L=0$, $S=1$), а $p+p$ и $n+n$ такой системы не образуют.

Исследуя $p+p$ и $p+n$ и учитывая ПИИ, было установлено, что два нейтрона притягивают друг друга в состоянии $L=0$, $S=0$. Потенциальная энергия взаимодействия порядка 20 Мэв при расстоянии $r_0 \leq 10^{-13} \text{ см}$.

Такое притяжение по квантовой механике оказывается недостаточным для того, чтобы связать два нейтрона: в рыхлой системе (с большим средним расстоянием между нейтронами) вероятность того, что нейтроны взаимодействуют, мала; в плотной системе кинетическая энергия нейтронов слишком сильно возрастает, и нет состояния с отрицательной полной энергией. Опыт показывает, хотя и с меньшей уверенностью, что не существует и связанного состояния n^4 (тетранейтрона) [см., например, последнюю сводку П. Ф. Аргонетал (1965) и обзор А. И. Базя, В. И. Гольданского и Я. Б. Зельдовича (1965)].

Однако притяжение нейтронов между собой должно существенно (в несколько раз) понизить давление нейтронного газа

по сравнению с давлением идеального ферми-газа *). В области плотностей меньше ядерной до $\sim 5,2 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$ играет роль только взаимодействие пар нейтронов в состоянии с $L=0$; условия задачи весьма просты и тем не менее задача о состоянии нейтронного газа даже в этой постановке до сих пор не решена точно.

Из размерности следует *), что в широкой области $10^{11} < \rho < 2 \cdot 10^{13}$

$$P_n = \beta \cdot 5,5 \cdot 10^9 \rho_n^{5/3},$$

где β — постоянный численный коэффициент ($\beta < 1$), неизвестный (нет уверенности даже в том, что $\beta > 0$), но не зависящий от плотности.

При дальнейшем увеличении плотности начинает сказываться более сложный характер ядерных сил. Кроме столкновений пар нейтронов с $L=0$, при большой плотности играют роль и столкновения с $L=1, 2, \dots$. Малая плотность ($\rho < 2 \cdot 10^{13} \text{ г/см}^3$) соответствует малой энергии сталкивающихся нейтронов, $E_F < 10 \text{ Мэв}$, и можно было рассматривать взаимодействия только с $L=0$, описывая его с помощью виртуального уровня с энергией $E=60 \text{ кэв}$ (пренебрегая E по сравнению с E_F , можно прийти к выводу $P \sim \rho_n^{5/3}$). Но и при $L=0$, $E_F > 10 \text{ Мэв}$ нельзя ограничиваться приближением виртуального уровня.

Должно сказаться то обстоятельство, что на весьма малых расстояниях (которые прощупываются при рассеянии нейтронов и протонов большой энергии) притяжение сменяется отталкиванием. Наконец, при большой плотности взаимодействие может и не сводиться к совокупности парных взаимодействий. Данных по рассеянию нуклона на нуклоне для построения теории недостаточно. Эксперимент со столкновением нескольких быстрых частиц или с прямым определением давления явно невозможен. Количественная теория уравнения состояния при ядерной и более высокой плотности не существует, и развитие ее до создания последовательной теории сильного взаимодействия невозможно. Выражения для давления, приводимые в ряде работ, ненадежны, авторы преувеличивают точность своих результатов.

Предупредив читателя о необходимости здорового скептицизма по отношению к точности формулы, приведем для справок формулу, используемую Камероном (1959a):

$$P = 5,3 \cdot 10^9 \rho_0^{5/3} + 1,6 \cdot 10^{-5} \rho_0^{8/3} - 1,4 \cdot 10^5 \rho_0^2, \quad \rho_0 = m_n n, \quad (6.6.3)$$

соответствующая скорость звука:

$$a_{зв}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = c^2 \frac{8,8 \cdot 10^9 \rho_0^{2/3} + 4,3 \cdot 10^{-5} \rho_0^{5/3} - 2,8 \cdot 10^5 \rho_0}{c^2 + 1,3 \cdot 10^{11} \rho_0^{2/3} + 2,6 \cdot 10^{-5} \rho_0^{5/3} - 2,8 \cdot 10^5 \rho_0} \quad (6.6.4)$$

*) Соображения о состоянии нейтронного газа см. Зельдович (1960),

Более сложное выражение приводится в работе Сальпетера (1961).

В формулах (6.6.3) и (6.6.4) под ρ_0 понимается плотность массы покоя, т. е. величина, пропорциональная плотности барионов (в данном случае при $\rho < 10^{15}$ г/см³ барионы являются нейтронами). Полная плотность массы включает в себя также и энергию:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{E_1}{c^2} \right) = \rho_0 \left(1 + \frac{1}{c^2} \int_0^{\rho_0} \frac{P}{\rho_0^2} d\rho_0 \right). \quad (6.6.5)$$

Подробнее о соотношении ρ и ρ_0 см. § 7 гл. 6.

Заметим также, что выражение (6.6.4) при $\rho > 3,7 \cdot 10^{15}$ г/см³ приводит к скорости звука, бóльшей скорости света. Следовательно, формула (6.6.3) заведомо неверна при $\rho > 3,7 \cdot 10^{15}$ г/см³.

§ 7. Плотность, превышающая ядерную

Рассмотрим закон зависимости давления от плотности в области плотности $\rho > 10^{14}$ г/см³. Верхняя граница рассматриваемой области $\rho < 10^{93}$ г/см³. В этой области нет никаких экспериментальных данных, которые могли бы лечь в основу искомого закона. Поэтому, в сущности, содержание нижеследующего параграфа составляет выяснение пределов, в которых лежит давление, т. е. тех ограничений, которые накладывают общие физические законы. Прежде всего в рассматриваемой области необходимо условиться о терминологии.

Обозначим n плотность (число в 1 см³) барионов. Если в системе имеются и барионы (n_1) и антибарионы (\bar{n}_1), то $n = n_1 - \bar{n}_1$, и в этом смысле точнее было бы говорить об n как о плотности барионного заряда *).

В нерелятивистской области плотность $\rho = nm_0$, где m_0 масса одного бариона **). В силу зависимости массы от энергии, при работе сжатия (на барион) ϵ_1 , сравнимой с $m_0 c^2$ плотность ρ оказывается больше чем nm_0 . Будем называть $nm_0 = \rho_0$ «плотностью массы покоя». Очевидно, что $\rho = n \left(m_0 + \frac{\epsilon_1}{c^2} \right)$, а не ρ_0 , входит в уравнения гидродинамики: величиной $dm = \rho dV$ определяется инертная масса элемента объема.

Однако в уравнениях термодинамики играют существенную роль величины, отнесенные к единице массы покоя. Когда в

*) Такая ситуация возникает при сверхвысокой температуре.

***) Точнее m_0 определим как массу, приходящуюся на один барион в наименьшем энергетическом состоянии при $\rho = T = 0$, т. е. как 1/56 массы ядра Fe⁵⁶.

мысленном опыте рассматривается процесс, совершаемый над данным количеством вещества, заключенного в непроницаемый сосуд, то сохраняется масса покоя в сосуде, $\rho_0 V$, тогда как масса, т. е. ρV , меняется в соответствии с производимой работой. Поэтому определим удельную энергию \bar{E} , удельную энтропию \bar{S} на единицу массы покоя *). Включим в \bar{E} и энергию покоя: $E = E_{\text{нр}} + c^2$, где $E_{\text{нр}}$ — нерелятивистское определение энергии. При этом

$$\rho = \rho_0 \frac{E}{c^2}. \quad (6.7.1)$$

При постоянной энтропии, и в частности, при $S=0$, как известно,

$$P = - \frac{\partial E}{\partial V} = - \frac{\partial E}{\partial \left(\frac{1}{\rho_0} \right)} = \rho_0^2 \frac{\partial E}{\partial \rho_0} = \rho_0^2 c^2 \frac{\partial \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)}{\partial \rho_0}. \quad (6.7.2)$$

Соответственно можно найти и скорость звука. Оказывается, скорость звука $a_{\text{зв}}$ (см., например, учебник Ландау и Лифшица (1954))

$$a_{\text{зв}}^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (6.7.3)$$

В соответствии с тем, что есть две разные плотности, ρ и ρ_0 , можно говорить о двух разных показателях адиабаты, в зависимости от того, рассматривается ли давление P как функция ρ или ρ_0 .

Проиллюстрируем соотношения на примере степенного (асимптотического при больших плотностях) закона: пусть

$$\rho = a \rho_0^b. \quad (6.7.4)$$

Тогда по формулам (6.7.2) и (6.7.4) найдем

$$P = (b - 1) c^2 a \rho_0^b = (b - 1) c^2 \rho. \quad (6.7.5)$$

Итак, при асимптотическом законе любой показатель адиабаты по плотности массы покоя ρ_0 приводит к показателю адиабаты, равному 1, для зависимости давления от плотности ρ .

Находим, далее,

$$a_{\text{зв}}^2 = (b - 1) c^2. \quad (6.7.6)$$

Уже отсюда видно, что релятивистское требование $a_{\text{зв}}^2 \leq c^2$ приводит к ограничению $b \leq 2$ (ср. ниже § 12).

*) Иногда удобно будет относить все величины к одному бариону или, что то же, к единице барионного заряда.

§ 8. Идеальный нейтронный газ при сверхвысокой плотности

В качестве первого приближения, в пионерской работе Оппенгеймера и Волкова (1938) был рассмотрен нейтронный газ в предположении, что нейтроны никак не взаимодействуют между собой. Нейтроны являются фермионами; таким образом, вся теория вырожденного нейтронного газа оказывается подобной теории вырожденного электронного газа. Подобие это имеет место постольку, поскольку мы в качестве независимой переменной пользуемся плотностью частиц n или, что то же, плотностью покоя ρ_0 . В частности, связь ферми-импульса и n в точности совпадает для электронов и нейтронов:

$$n = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \quad (6.8.1)$$

Найдем характерную плотность покоя, при которой происходит переход от нерелятивистского к релятивистскому нейтронному ферми-газу: условие *)

$$p_F = m_0 c$$

дает

$$(\rho_0)_c = \frac{m_0^4 c^3}{3\pi^2 \hbar^3} = 5,25 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3.$$

Обозначим безразмерную плотность покоя

$$\frac{\rho_0}{(\rho_0)_c} = \chi. \quad (6.8.2)$$

Введем безразмерный ферми-импульс

$$t = \frac{p_F}{m_0 c} = \chi^{1/3}. \quad (6.8.3)$$

Имея в виду релятивистское выражение энергии нейтрона

$$E_n = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2},$$

легко получим выражения для плотности ρ и давления:

$$\begin{aligned} \rho &= 3 (\rho_0)_c \int_0^t \sqrt{1 + q^2} q^2 dq = \\ &= \frac{3}{8} (\rho_0)_c [(2t^2 + 1)t \sqrt{t^2 + 1} - \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})], \quad (6.8.4) \end{aligned}$$

*) Мы здесь не различаем m_0 (см. сноску на стр. 156) и массу нейтрона. Различие около 1% пренебрежимо мало по сравнению с влиянием других упрощающих предположений.

$$P = (\rho_0)_c c^2 \int \frac{q^4 dq}{\sqrt{1+q^2}} =$$

$$= \frac{3}{8} (\rho_0)_c c^2 \left[t \sqrt{1+t^2} \left(\frac{2}{3} t^2 - 1 \right) + \ln(1 + \sqrt{t^2 + 1}) \right], \quad (6.8.5)$$

$$a_{зв} = \frac{1}{\sqrt{3}} c \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}. \quad (6.8.6)$$

В частности, при $\chi = t = 1$, т. е. при критической плотности покоя $\rho_0 = (\rho_0)_c$, имеем $\rho = 1,26 (\rho_0)_c$, $P = 0,154 (\rho_0)_c c^2$.

Легко найти асимптотику при $\chi \rightarrow \infty$:

$$\rho = \frac{3}{4} (\rho_0)_c \chi^{4/3}, \quad P = \frac{1}{4} (\rho_0)_c c^2 \chi^{4/3} = \frac{1}{3} \rho c^2, \quad a_{зв} = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (6.8.7)$$

Итак, в пределе $\rho \gg \rho_0$ массой покоя можно пренебрегать. Идеальный ультрарелятивистский ферми-газ имеет скорость звука, асимптотически приближающуюся к

$$\frac{c}{\sqrt{3}} = 0,58c.$$

Этот результат можно считать естественным, практически все частицы движутся со скоростью света, но по всем направлениям. Забегая вперед (уравнение состояния при высокой температуре см. в гл. 8), отметим, что для любого ультрарелятивистского газа асимптотически (а при нулевой массе покоя частиц, т. е. для нейтрино и квантов точно), имеют место соотношения

$$P = \frac{1}{3} \rho c^2 = \frac{\varepsilon}{3}, \quad a_{зв} = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (6.8.8)$$

§ 9. Идеальный газ с учетом взаимного превращения частиц

Выше был рассмотрен газ, состоящий только из нейтронов. Основанием для этого были расчеты «нейтронизации», т. е. обратного бета-процесса:

$$e^- + p = n + \nu.$$

Напомним, что при ядерной плотности расчет приводил к выводу, что равновесная концентрация электронов и протонов составляет меньше 1%. Этот результат есть следствие того факта, что при рассматриваемой плотности электроны являются релятивистскими, их энергия много больше энергии, соответствующей массе покоя, и в то же время нейтроны и протоны еще не являются релятивистскими, их энергия практически не отличается от энергии, соответствующей массе покоя.

Однако когда и нейтроны становятся релятивистскими, их энергия растет, равновесие снова сдвигается влево, в написанной выше формуле в сторону увеличения электронов и протонов. Для статического состояния звезды нейтрино и антинейтрино можно считать свободно выходящими. Следовательно, их концентрация и ферми-энергия равна нулю. Отсюда условие равновесия для написанной выше реакции является условием для химических потенциалов

$$\mu_p + \mu_e = \mu_n. \quad (6.9.1)$$

Но для холодного ферми-газа химический потенциал совпадает с ферми-энергией.

Плотность массы покоя и концентрация n определяются суммой концентраций протонов и нейтронов. Обозначим

$$n_p = \alpha n, \quad n_n = (1 - \alpha) n. \quad (6.9.2)$$

Далее необходимо удовлетворить условию электронейтральности: это значит, что

$$n_{e^-} = n_p = \alpha n.$$

В ферми-энергию следует включать массу покоя; в ультрарелятивистском случае пренебрежем ею (при меньшей плотности разумно пренебречь массой покоя электрона и разностью масс покоя протона и нейтрона, но не самой m_n). Уравнение для химических потенциалов даст

$$m_0 c^2 (\alpha \chi)^{1/3} + m_0 c^2 (\alpha \chi)^{1/3} = m_0 c^2 [(1 - \alpha) \chi]^{1/3}, \quad (6.9.3)$$

откуда следует

$$8\alpha = 1 - \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{9}, \quad 1 - \alpha = \frac{8}{9}.$$

Таким образом, в равновесии оказывается 88,9% n , 11,1% p (среди барионов) и электроны, плотность которых равна плотности протонов. Значит, при монотонном изменении плотности доля протонов и электронов проходит через глубокий минимум. Действительно, при совсем низких давлениях в равновесии число нейтронов и протонов примерно одинаково и $\alpha \sim 50\%$ *), а при ядерной плотности, как мы видели в § 5 и 6 этой главы, $\alpha \sim 10^{-3}$. В соответствии с общими принципами термодинамики (Ле-Шателье — Браун), превращение части нейтронов обратно в протоны и электроны несколько снижает давление при данном χ . Обозначая P_n давление чистых нейтронов, найдем

$$P = [\alpha^{4/3} + \alpha^{4/3} + (1 - \alpha)^{4/3}] P_n = 0,96 P_n.$$

*) Точнее, для железа Fe_{26}^{56} , $\alpha = \frac{26}{56} = 46,3\%$; $1 - \alpha = \frac{30}{56} = 53,7\%$.

Асимптотический закон зависимости давления от плотности покоя меняется только за счет множителя 0,96; показатель степени и выражение для скорости звука $a_{зв} = \frac{c}{\sqrt{3}}$ не меняются.

В. А. Амбарцумян и Г. С. Саакян (1960) первые и притом весьма обстоятельно рассмотрели ситуацию, которая возникает в связи с тем, что современная физика значительно расширила ассортимент элементарных частиц. Наряду с нейтроном, протоном и электроном в принципе следует рассматривать мюоны (μ^+ , μ^-), пионы (π^+ , π^0 , π^-), каоны (K^0 , \bar{K}^0 , K^+ , K^-) и разнообразные барионы Λ , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^0 , Ξ^- . Общие принципы написания условий равновесия те же, что и в рассмотренном выше элементарном примере. Можно показать, однако, что нет необходимости выписывать соотношения между химическими потенциалами (ферми-энергиями), соответствующие всем возможным реакциям превращения частиц. Превращения частиц удовлетворяют двум законам: закону сохранения барионного заряда*) и закону сохранения электрического заряда. Закон сохранения нейтринного заряда в рассматриваемой задаче не играет роли, поскольку ν и $\bar{\nu}$, по предположению, свободно покидают систему.

Положим для любой частицы r

$$\mu_r = aq_{er} + bq_{br}, \quad (6.9.4)$$

где q_{er} — электрический заряд, а q_{br} — барионный заряд частицы.

Коэффициенты a и b одинаковы для всех разнообразных видов частиц, находящихся в системе. Легко убедиться, что в таком случае для любой реакции, например

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4,$$

для которой выполняются законы сохранения

$$\left. \begin{aligned} q_{e1} + q_{e2} &= q_{e3} + q_{e4}, \\ q_{b1} + q_{b2} &= q_{b3} + q_{b4}, \end{aligned} \right\} \quad (6.9.5)$$

при выполнении (6.9.4) тождественно выполняется и условие равновесия

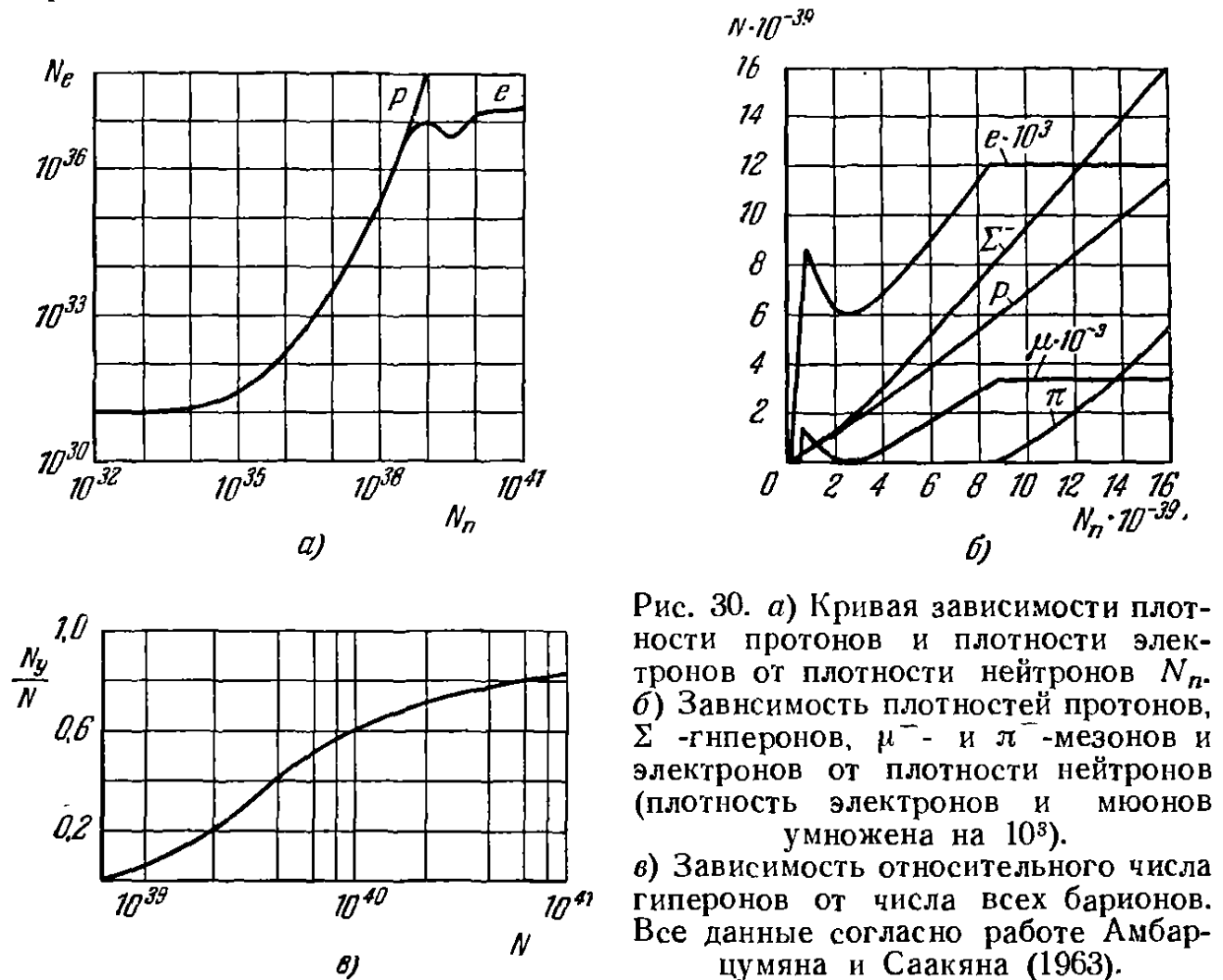
$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4. \quad (6.9.6)$$

Зная химический потенциал данного сорта частиц, элементарно находим их концентрацию. Таким образом, полный состав

*) С учетом всех перечисленных типов частиц, сохранение барионного заряда означает, что постоянная сумма чисел n , p , Λ , ..., Ξ (концентрация частиц обозначается той же буквой).

равновесной смеси, состоящей из большого числа компонент, выражается только через два параметра, a и b .

Условие электронейтральности фиксирует значение a : легко убедиться, что увеличивая a мы увеличиваем концентрацию положительно заряженных частиц и уменьшаем концентрацию отрицательных.



При каждом b есть $a_0(b)$, дающее электронейтральный состав. Его барионная плотность зависит монотонно от одного параметра b и, таким образом, легко интерполяцией найти равновесный состав для любого ρ_0 .

Отметим только две особенности решения при нулевой температуре:

1) для фермионов в случае $\mu_r < m_r c^2$ соответствующие частицы (r) полностью отсутствуют в равновесии;

2) для бозонов (π -, K -мезонов) в предположении полного отсутствия взаимодействия концентрация также равна нулю при $\mu_r < m_r c^2$. При наличии концентрации этих частиц $r > 0$, $\mu_r \equiv m_r c^2$ и от количества r не зависит m . Это следует из того, что бозоны (без взаимодействия!) все находятся в основном состоянии, т. е. покоятся.

Из первого свойства следует, что по мере роста ρ_0 отдельные типы частиц включаются при определенных пороговых плотностях. Из второго свойства следует, что в равновесной системе совершенно отсутствуют нейтральные мезоны: при $q_{er}=0$, $q_{br}=0$ видим $\mu_r=0$, значит, и $r=0$.

Далее ясно, что существование π^- делает невозможным существование K^- и любых других более тяжелых отрицательных мезонов. Тем более запрещено существование положительных мезонов, а также позитрона и антибарионов.

Отметим, что закон сохранения странности (или так называемого гиперзаряда) не должен учитываться в расчетах; действительно, этот закон относится к сильным взаимодействиям, происходящим за время столкновения частиц, 10^{-20} сек и меньше. Однако за время $\sim 10^{-8}$ сек (малое даже по масштабу нестационарных явлений в звездах) процессы с изменением странности вполне успевают пройти. Равновесный состав в зависимости от ρ_0 , найденный в работе Амбарцумяна и Саакяна, 1963, показан на рис. 30.

Были проделаны аналогичные расчеты с другими наборами частиц (Камерон (1959а)). Общие свойства решения мало отличаются от упрощенных систем (n ; pre^-), рассмотренных выше.

При рассмотрении определенного конечного числа сортов частиц асимптотически $P = \text{const} \cdot \rho_0^{4/3}$, $a_{зв} \rightarrow c/\sqrt{3}$. Давление и плотность энергии только меньше, чем для нейтронного газа в отношении $N^{-1/3}$, где N — число сортов барионов.

§ 10. Все ли «элементарные» частицы элементарны?

Рассмотрение 8, 18 или даже большего числа барионов и резонансов (см., например, обзоры А. Розенфельда и др. (1965), Зельдовича (1965)) как независимых сортов элементарных частиц представляется неестественным любому здравомыслящему физику. До недавнего времени резонансы рассматривались как возбужденные состояния «обычных» барионов. Более радикальная точка зрения заключается в том, что все барионы (как обычные, так и резонансы) представляют собой сложные системы, состоящие из трех более фундаментальных частиц — кварков.

В обоих случаях при сверхвысокой плотности, когда объем, приходящийся на частицу, становится меньше собственного объема частицы (которая является составной и имеет свою пространственную структуру), заведомо нельзя рассматривать частицы как элементарные.

Можно предположить, например, что в пределе, когда кинетическая (ферми) энергия кварков станет много больше энергии связи кварков*), можно будет рассматривать сжатое вещество как кварковый газ.

В этом случае асимптотически получим равное число кварков всех трех типов, $n_1 = n_2 = n_3$ **). При этом каждое число равно n — барионной плотности, поскольку один барион состоит из трех кварков. Значит, асимптотически давление в этой модели втрое больше давления идеального нейтронного газа.

На первый взгляд этот результат противоречит общему принципу Ле-Шателье — Брауна; в предыдущем разделе подчеркивалось, что с учетом превращения частиц давление обязательно ниже давления идеального нейтронного газа P_n . Нет ли внутреннего противоречия или ошибки в кварковой модели с $P_q = 3P_n$? Вопрос об асимптотике давления составных частиц был рассмотрен в работе одного из авторов (Зельдович (1965d)).

Оказалось, что если частицы (в данном случае — нейтроны) являются составными (из кварков), то нельзя рассматривать их как невзаимодействующие, — они отталкиваются; это отталкивание является следствием принципа Паули для кварков.

Идеальный нейтронный газ большой плотности в этом случае не является физически допустимым состоянием, поэтому нет и нарушения принципа Ле-Шателье — Брауна.

§ 11. Электромагнитное взаимодействие частиц

Можно ли что-нибудь высказать об уравнении состояния при наличии взаимодействия между частицами? В одном очень важном случае оказывается, что это так, а именно, для электромагнитного поля. Плотность энергии поля равна $(E^{*2} + H^2)/8\pi$, где E^* — напряженность электрического поля, H — магнитного поля.

В общем случае силы определяются максвелловским тензором натяжений и в упорядоченных полях силы резко анизотропны (натяжение вдоль поля $E^{*2}/8\pi$ и расталкивание в двух перпендикулярных направлениях поперек поля $E^{*2}/8\pi$, аналогично для магнитного поля).

Однако сумма нормальных натяжений на три перпендикулярные площадки всегда тождественно равна $(E^{*2} + H^2)/8\pi$, т. е. равна плотности энергии. Этот результат не зависит от

*) Речь идет о связи между собой трех кварков, образующих барион.

***) (p_1) — заряд $+2/3$, странность 0 (p);
 (p_2) — заряд $-1/3$, странность 0 (p);
 (p_3) — заряд $-1/3$, странность -1 (λ).

того, имеем ли мы дело со статическими или переменными полями, с полями в той области, где находятся заряды и токи или с полями (в частности, полем электромагнитной волны) в пустоте. Когда можно говорить о давлении электромагнитного поля? Для этого нужно, чтобы при усреднении по времени или по макроскопическим площадкам все направления (в среднем) оказывались равноценными. Тогда сумма напряжений равна $3P$ и, следовательно, для электромагнитного поля всегда $\varepsilon = 3P$, где ε — объемная плотность энергии. Мы отмечали, что такое равенство имеет место для ультрарелятивистского газа, в частности, для совокупности световых квантов, т. е., говоря классически, для совокупности электромагнитных волн.

Однако полученный выше результат богаче: ведь электромагнитное поле не исчерпывается полем волн. Это видно уже из того, что электромагнитные волны поперечные. Кулоновское поле заряда, например, продольно и его нельзя свести к свободным электромагнитным волнам.

Давление и плотность энергии системы заряженных частиц не обязательно вычислять как производную от энергии. В принципе можно непосредственно в веществе данной плотности мысленно провести поверхность и найти поток импульса, нормальный к поверхности, т. е. давление; эта операция может быть сделана и в классической механике и в квантовой теории. Здесь не предполагается производить вычисления: изложенный выше подход нужен для того, чтобы сказать, что давление взаимодействующих частиц можно представить как сумму «кинетического» давления движущихся невзаимодействующих частиц и давления электромагнитного поля, осуществляющего взаимодействие*):

$$P = P_p + P_f. \quad (6.11.1)$$

Точно так же энергию взаимодействия можно описать как энергию поля. Поэтому плотность энергии также запишем в виде суммы

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_f. \quad (6.11.2)$$

Для частиц

$$P_p \leq \frac{\varepsilon_p}{3} \quad (6.11.3)$$

знак равенства относится к частицам с нулевой массой покоя. Для поля

$$P_f = \frac{\varepsilon_f}{3}. \quad (6.11.4)$$

*) Индексы p — particles — частицы, f — field — поле.

Отсюда

$$P = P_p + P_f \leq \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_f}{3}, \quad \varepsilon - 3P \geq 0. \quad (6.11.5)$$

Таков общий вывод для электромагнитно-взаимодействующих частиц и электромагнитного поля.

Область применимости этого неравенства чрезвычайно широка. Оно применимо к идеальному ферми-газу из нейтральных частиц. Оно остается применимым и при учете электромагнитного взаимодействия заряженных частиц холодного ферми-газа (впрочем, в этом случае взаимодействие дает лишь малую поправку порядка $e^2/\hbar c = 1/137$). Но неравенство применимо и к горячему газу, в котором плотность энергии квантов больше плотности энергии обычных частиц (обладающих массой покоя). Оно остается в силе и при таких температурах, когда рождаются пары частица — античастица (электроны и позитроны).

Наконец, неравенство (6.11.5) применимо и к магнитотурбулентной среде, в которой более или менее хаотические электрические токи создают хаотические магнитные поля и взаимодействуют с этими полями. В соответствии со способом вывода нам не пришлось применять условие вмороженности магнитного поля или какие-либо соображения о проводимости среды: от проводимости и вмороженности зависит время жизни, т. е. эволюция и будущее данного состояния, но не само давление и энергия состояния в данный момент.

При этом надо выбрать такой масштаб токов и полей, при котором упорядоченно движутся огромные числа заряженных частиц: только в этом случае магнитное давление будет больше кинетического. С другой стороны, масштаб токов и полей должен быть мал по сравнению с размерами всей системы для того, чтобы, усредняя по площади, можно было говорить о среднем давлении. В системе типа магнитного диполя нет «давления», подчиняющегося закону Паскаля, есть только анизотропные давления (напряжения).

По той же причине можно говорить о давлении и плотности энергии только для электронейтральной системы. Общий вопрос о различной трактовке близкодействующих и далекодействующих сил был освещен в начале раздела (гл. 5, § 1).

В общерелятивистской теории тензора энергии — импульса неравенство $\varepsilon - 3P \geq 0$ записывается особенно сжато и красиво.

В локально евклидовой сопутствующей системе отсчета и при выполнении закона Паскаля

$$\varepsilon = T_0^0, \quad -P = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3, \quad \text{т. е.} \quad T_\alpha^\beta = -P\delta_\alpha^\beta, \quad (6.11.6)$$

где δ_α^β — символ Кронекера. Запишем в виде свертки

$$T = T_a^a = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 = \varepsilon - 3P \geq 0. \quad (6.11.7)$$

Фактическая правильность неравенства для широкого круга систем и сжатая общековариантная формулировка неравенства наталкивали на предположение, что неравенство $T = \varepsilon - 3P \geq 0$ представляет собой общий закон природы. Предполагалось, что в будущем можно будет найти общее доказательство, относящееся не только к электромагнитному, но и к любому взаимодействию.

В работе Зельдовича (1961), изложению которой посвящен следующий параграф, эти предрассудки были опровергнуты.

Заметим, что асимптотика $\varepsilon = 3P$ изящно записывается в виде $T = T_a^a = 0$, но дает для скорости звука мало изящное выражение $a_{зв} = c/\sqrt{3}$. Трудно представить себе, чтобы релятивистские соображения приводили бы к чему-нибудь, отличному от условия $a_{зв} \leq c$.

§ 12. Предельно жесткое уравнение состояния

Рассмотрим систему частиц, взаимодействующих с векторным полем. Векторное поле аналогично электромагнитному с одним лишь отличием: в плотность лагранжиана добавлен член, пропорциональный A_k, A^k , где A_k — вектор-потенциал (4-вектор φ, A_k):

$$L = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik} - \frac{1}{8\pi} \mu_*^2 A_k A^k. \quad (6.12.1)$$

Остальные уравнения обычные. Такое изменение лагранжиана приводит к изменению характера решений уравнений поля. С одной стороны, меняются решения типа волн, распространяющихся в пустоте. Для этих решений получается другая связь между длиной волны и частотой.

В выражении

$$A_k = a_k e^{i\omega t + ikr} \quad (6.12.2)$$

уравнения дают

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \mu_*^2 c^2. \quad (6.12.3)$$

Такая связь (6.12.3) соответствует в квантовой теории квантам поля — «вектонам», обладающим массой покоя, равной

$$m = \frac{\hbar \mu_*}{c}. \quad (6.12.4)$$

В частности, вектоны могут быть и покоящимися; электромагнитные кванты с массой покоя, равной нулю, в отличие от вектонов, всегда движутся со скоростью света.

При данном k у волны есть три независимых решения, соответствующих трем типам поляризации (в отличие от двух для электромагнитного поля). Эти три решения соответствуют квантовой картине вектона как частицы со спином 1 (момент \hbar). Проекция этого спина на произвольную ось может принимать три значения 1, 0, -1 .

Для системы свободных волн такого поля получается

$$\varepsilon > 3P,$$

как и следует ожидать из квантовой картины движения частиц (вектонов) с отличной от нуля массой покоя.

Однако эти решения не исчерпывают содержания теории: это видно уже из того, что компонент потенциала 4, а свободные волны имеют только три независимых решения. Нужно рассмотреть еще статическое поле заряда и взаимодействие зарядов. В электромагнитной задаче

$$\varphi = \frac{e}{r}, \quad \text{энергия взаимодействия } \varepsilon_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}. \quad (6.12.5)$$

В рассматриваемом случае получается «потенциал Юкавы»

$$\varphi = \frac{g e^{-\mu r}}{r}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{g_1 g_2 e^{-\mu r_{12}}}{r_{12}}, \quad (6.12.6)$$

где g играет роль заряда, характеризует взаимодействие частицы с вектонным полем. В этом изменении закона взаимодействия и заключается суть дела.

Благодаря экспоненте, можно взять макроскопическую систему, заряженную с постоянной плотностью заряда. Пусть размеры системы $R \gg \frac{1}{\mu}$ больше характерной длины затухания. Тогда, несмотря на заряд, внешнее поле системы пренебрежимо и можно говорить о плотности энергии и о давлении в заряженной системе в зависимости от плотности заряда.

Подсчитаем энергию, элементарно суммируя попарное взаимодействие равномерно распределенных частиц. Мы предположим, что среднее расстояние между частицами $n^{-1/3}$ меньше юкавского радиуса взаимодействия μ^{-1} , и заменим суммирование интегрированием. Энергия взаимодействия частиц в объеме V

$$E_V = n^2 g^2 \int_V \int_V \frac{e^{-\mu r_{12}}}{r_{12}} dV_1 dV_2 = \frac{2\pi g^2 a^2 V}{\mu^2}. \quad (6.12.7)$$

Если частицы (заряды) имеют массу m_0 и покоятся, то мы получим плотность энергии и плотность ρ ,

$$\rho = n m_0 + \frac{2\pi g^2 a^2}{\mu^2} = \rho_0 + b \rho_0^2, \quad (6.12.8)$$

где

$$b = \frac{2\pi g^2}{m_0^2 \mu^2}.$$

Отсюда найдем давление:

$$P = c^2 b \rho_0^2, \quad (6.12.9)$$

так что асимптотически

$$P \rightarrow c^2 \rho = \varepsilon. \quad (6.12.10)$$

Соответственно для скорости звука получим

$$a_{зв}^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{2b\rho_0}{1+2b\rho_0} c^2 \quad (6.12.11)$$

и асимптотически $a_{зв} \rightarrow c$ при $\rho \rightarrow \infty$. Для простоты выше рассматривались покоящиеся заряды. Если заряженные частицы суть фермионы, то при большой плотности они станут релятивистскими, их собственный вклад в плотность и давление будет $n^{4/3}$. Однако движение частиц при данной их плотности не меняет создаваемого ими потенциала — факт хорошо известный в электромагнитной теории *) и не меняющийся в теории вектонов. Поэтому движение частиц не изменит пропорционального n^2 члена в плотности энергии и в давлении. При достаточно большом n этот член всегда станет главным. В упомянутой статье Зельдовича (1961) дано более подробное и формальное доказательство результата.

Результат имеет принципиальное значение. Удалось построить последовательную релятивистскую теорию взаимодействия, в которой $\varepsilon \rightarrow P$ и нарушается неравенство (6.11.7), возможно, $\varepsilon - 3P < 0$. Следовательно, опровергнуто предположение, что неравенство $\varepsilon - 3P \leq 0$ является следствием теории относительности; это неравенство следует рассматривать как свойство определенного, не самого общего, класса систем. Остается другой вопрос, гораздо более трудный: что происходит на самом деле со сверхплотным веществом, с барионами большой плотности, каково неравенство для них? На этот вопрос в настоящее время нельзя дать определенный ответ. В природе осуществляется далеко не все, что не противоречит теории относительности.

Опыт показывает, что существуют нейтральные векторные мезоны ω^0 и ϕ^0 с массой около $1/2$ массы нуклона **). Взаимодей-

*) Пример: 82 электрона свинца, часть из которых движется со скоростью порядка $c/2$, абсолютно точно компенсируют заряд 82 протонов, содержащихся в ядре (см. гл. 2).

***) Унитарный скаляр, который одинаково взаимодействует с любым барионом, независимо от его странности, нужно строить как линейную комбинацию ω и ϕ .

ствие их с нуклонами приблизительно соответствует предположениям, сделанным выше; оно исследовано при не слишком большом импульсе.

Асимптотика взаимодействия, которая нужна нам, зависит от того, можно ли ω и ϕ рассматривать как кванты поля или же сами ω и ϕ являются в свою очередь составными частицами и слеплены из кварков и антикварков. Тогда при больших энергиях взаимодействие ω и ϕ с барионами изменится. Возникнет, однако, новый вопрос и новые возможности: какое взаимодействие слепляет кварки и антикварки в мезонах и барионах? Не является ли это совсем еще не известное взаимодействие подходящим кандидатом на роль векторного поля? Этот перечень вопросов без ответов можно было бы продолжить. Вывод, который можно сделать из всего предыдущего, один: в области, где мы не знаем ничего конкретного, единственное ограничение, налагаемое общими принципами, есть $a_{зв} \leq c$.

Никаких других ограничений (и в частности, $\varepsilon > 3P$) в общем случае нет. Итогом исследования оказалось не уточнение результата, а устранение предрассудка...

ГЛАВА 7

СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА ПРИ ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

§ 1. Физические условия в обычных звездах

Почти вся астрофизика имеет дело с веществом, находящимся при высокой температуре. Даже в том случае, когда рассматривалось холодное вещество, то лишь предполагалось, что температура недостаточно высока, чтобы существенно изменить свойства вещества. При плотности порядка 10^6 г/см^3 это означает $T < 10^9$, а при плотности 10^{14} г/см^3 соответственно $T < 10^{11}$ градусов; по житейским стандартам эти температуры достаточно высоки. Неудивительно, что белые карлики при плотности $\sim 10^6 \text{ г/см}^3$ имеют высокую температуру поверхности, $T \approx 10^4$, а гипотетические нейтронные звезды (плотность которых 10^{14}) должны излучать рентгеновские лучи, имея на поверхности $T \approx 10^6$. Вместе с тем механическое равновесие этих плотных объектов практически определяется свойствами холодного вещества и не зависит от их температуры, поскольку температура их недр ниже указанных пределов.

Звезды, лежащие на главной последовательности (т. е. однородные по химическому составу звезды, в которых идут ядерные реакции), составляющие основную долю звездного населения, имеют температуру в центре порядка $10^7 - 10^8$ градусов при плотности $0,1 \div 10 \text{ г/см}^3$. В этом случае мы говорим о горячих звездах; равновесие их полностью определяется именно тепловым давлением. Это связано с тем, что плотность вещества в таких звездах мала. При массе звезды $M < 100 M_{\odot}$ главный вклад в давление и в плотность энергии вносит плазма — совокупность ядер и электронов, образующих одноатомный газ с показателем адиабаты $5/3$.

В периферических слоях температура ниже и на поверхности звезд температура опускается до $50\,000 - 3000^\circ$; в последнее время открыты объекты неизвестной природы с температурой поверхности порядка $700 - 1000^\circ \text{ К}$. Поэтому во внешней оболочке звезд ионизация уже отнюдь не является полной; наряду

со свободными электронами в газе находятся и ионы, частично сохранившие электронную оболочку. У самой поверхности в атмосфере холодных звезд есть и нейтральные атомы и даже молекулы химических соединений.

Равновесное тепловое излучение играет решающую роль в выражении потока энергии в звезде, даже когда его плотность энергии мала по сравнению с плотностью энергии плазмы. Теплопроводность горячего вещества определяет перенос лучистой энергии *).

При высокой температуре пробег квантов зависит от их рассеяния на свободных электронах (комpton-эффект), при более низкой температуре главную роль в определении теплопроводности вещества играет поглощение и испускание квантов электронами в поле ядра, притом во всех вариантах: электрон свободный ($E > 0$) и до и после взаимодействия с квантом, переход электрона из связанного ($E < 0$) в свободное ($E > 0$) состояние при поглощении и из свободного в связанное при испускании кванта, и, наконец, переход электрона из одного связанного состояния ($E < 0$) в другое ($E < 0$).

Совокупность вопросов, относящихся к обычным звездам, подробно разработана. Расчеты ядерных реакций в звездах, потоков тепла и даже тонкости наблюдаемого спектра — в настоящее время проводятся с большой точностью. Достаточно известны и все исходные величины, относящиеся к этой области (сечения ядерных реакций, непрозрачность вещества и т. д.). По существу, ее не следует относить к релятивистской астрофизике. Поэтому мы отсылаем читателя к хорошо известным книгам по астрофизике (см. литературу в гл. 9).

Ряд вопросов, связанных с ионизацией, теплопроводностью и гидродинамикой горячего газа, изложен также в книге Зельдовича и Райзера (1966). Отметим здесь только один момент, который выявился за последние два года и не нашел еще должного отражения в литературе. Речь идет о влиянии переходов электронов 3-го типа (связанный — связанный). При этом изолированный атом или ион дает спектр испускания или поглощения, состоящий из отдельных линий. Долгое время предполагалось, что роль отдельных линий в непрозрачности вещества мала. В действительности тяжелые элементы дают очень большое число линий, а взаимодействие с электронами и другими ионами расширяет линии. В целом оказывается, что в важной для звезд области плотностей и температур для обычного состава звездного вещества вклад линий в непрозрачность может

*) В отдельных областях звезд (зависящих от массы звезды и стадии ее эволюции) перенос энергии осуществляется конвекцией.

уменьшить теплопроводность в два раза. Основная работа по расчету теплопроводности принадлежит Коксу, Стюарту и Айлерсу (1965). Расчеты изменения структуры звезд главной последовательности за счет увеличения непрозрачности из-за поглощения в линиях проделали В. С. Имшенник и Д. К. Надежин (1966).

§ 2. Высокие температуры

Для релятивистской астрофизики представляют интерес более высокие температуры, которые, с одной стороны, приводят к неустойчивости звезды и, с другой стороны, сами появляются в катастрофические периоды эволюции звезд. Ранний дозвездный период эволюции Вселенной также предположительно характеризуется весьма высокими температурами.

В области высокой температуры наиболее характерным является рождение частиц. Прежде всего речь идет о рождении квантов (электромагнитного излучения). При температуре, приближающейся к $m_e c^2/k \approx 6 \cdot 10^9$, становится существенным рождение электронно-позитронных пар. При еще более высоких температурах возможно и рождение других более тяжелых нейтральных (π^0 , k^0 , \bar{k}^0) и заряженных (μ^\pm , π^\pm , k^\pm) элементарных частиц, вплоть до нуклон-антинуклонных пар (\bar{n} , \bar{p} , n , p), а также частиц, которые можно рассматривать как возбужденные состояния нуклонов («странные» частицы Λ , Σ , ..., резонансы Δ , Σ^* ...). Ясно, что в этой области очень больших плотностей сильно взаимодействующих частиц количественные предсказания весьма неопределенны; неизвестен даже полный список частиц или состояний, которые нужно рассматривать.

Особо стоит вопрос о равновесном содержании нейтрино и антинейтрино. Как показали эксперименты последних лет, есть два сорта нейтрино и два сорта антинейтрино — так называемые электронные $\bar{\nu}_e$, ν_e и мюонные $\bar{\nu}_\mu$, ν_μ . Так как масса покоя этих частиц равна нулю, то равновесное их содержание и соответствующая плотность энергии и давление весьма близки к тем же величинам для квантов (электромагнитного излучения).

Поэтому система, состоящая из определенного числа различных частиц, может превратиться в систему того же состава плюс любое число квантов. Однако нельзя таким же способом без изменения состава остальной системы создать только нейтрино или только антинейтрино. Беспрепятственно с точки зрения законов сохранения могут возникать или исчезать только пары $\nu_e + \bar{\nu}_e$ или $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$. Наконец, по современным взглядам нейтрино являются спиральными частицами: это значит, что

при данном направлении импульса момент нейтрино может быть только антипараллелен импульсу (момент антинейтрино соответственно только параллелен импульсу). Поэтому энергия, давление и число нейтрино антинейтринных пар вдвое меньше, чем те же величины для ультрарелятивистских электронно-позитронных пар, при $kT > m_e c^2$.

Между квантами и нейтрино есть и существенные различия: кванты полностью нейтральны, нейтрино же являются нейтральными лишь в смысле электрического и барионного заряда. Однако существуют понятия лептонных зарядов (электронного и мюонного), которым соответствуют два закона сохранения:

$$n(e^-) + n(\nu_e) - n(e^+) - n(\bar{\nu}_e) = \text{const},$$

$$n(\mu^-) + n(\nu_\mu) - n(\mu^+) - n(\bar{\nu}_\mu) = \text{const}.$$

Однако главная особенность нейтрино заключается в их малом взаимодействии со всеми другими частицами (а также и между собой). Поэтому нужны очень специальные условия, чтобы поддерживалось термодинамическое равновесие между нейтрино и другими частицами. Эти условия реализуются только в неограниченно протяженном однородном веществе, в горячей модели Вселенной. В этом случае большая длина пробега нейтрино в пространстве не играет роли, на смену нейтрино, ушедшим из данного объема, приходит равное число нейтрино из соседних объемов. На ранних стадиях космологического расширения, когда температура выше $2-3 \cdot 10^{10}$ К, скорость установления равновесия достаточно велика по сравнению со скоростью изменения плотности и других величин. В этой ситуации мы действительно имеем дело с полным термодинамическим равновесием всех частиц, включая и нейтрино. Более подробно об этом см. в разделе, посвященном космологии.

В ходе эволюции звезды и даже в начале катастрофических процессов сжатия или взрыва звезды, характерное время вылета нейтрино из звезды весьма мало по сравнению со всеми другими временами. Поэтому мгновенная концентрация нейтрино в каждый момент пренебрежимо мала по сравнению с равновесной концентрацией или по сравнению с концентрацией квантов.

Поэтому применительно к состоянию вещества в звезде в действительности, как правило, следует рассматривать состояние неполного равновесия, без нейтрино *). Такие процессы, как рождение и аннигиляция пар $e^+ + e^- \rightleftharpoons 2\gamma$, рождение и поглоще-

*) См. по этому поводу работу В. С. Имшенника, Д. К. Надежина, В. С. Пинаева (1966).

ние квантов $e + Z \rightleftharpoons e + Z + \gamma$ (Z — ядро) идут всегда быстро, поэтому в звезде всегда имеется полное локальное равновесие между тепловым движением ядер и электронов, между квантами и позитронами.

Рождение нейтрино и антинейтрино, которые тут же вылетают из звезды, надо рассматривать как фактор, вызывающий эволюцию звезды, отдачу тепла и уменьшение энтропии. Есть принципиальное различие между рождением пар e^+ , e^- и рождением пар ν , $\bar{\nu}$.

И тот и другой процессы сопровождаются затратой энергии и понижением давления (по сравнению с тем, которое было бы без рождения этих пар). Однако e^+ , e^- не выходят из системы. Если в ходе сжатия рождаются e^+ , e^- , то при расширении они снова исчезают, отдавая свою энергию в общий запас.

С учетом пар e^+ , e^- меняется конкретный вид функции $E(T, \rho)$, $S(T, \rho)$ или $P(\rho, S)$, но сохраняется уравнение $\frac{dS}{dt} = 0$.

Рождение $\bar{\nu}\nu$ безвозвратно уходящих из системы приводит к тому, что $\frac{dS}{dt} = -\omega(T, \rho) \neq 0$ (расчету ω посвящен ряд работ; см. ниже).

§ 3. Различные типы равновесия

Наиболее ясным и простым является случай, когда все процессы взаимного превращения, рождения и аннигиляции частиц происходят быстро по сравнению с уходом частиц и по сравнению со скоростью изменения внешних заданных параметров (плотности или давления, энтропии или температуры). Именно в этом случае осуществляется полное термодинамическое равновесие.

Состояние системы, находящейся в полном термодинамическом равновесии, определяется заданием параметров, соответствующих законам сохранения, которые выполняются в превращениях частиц. Нужно задать барионный заряд и лептонные заряды системы. Электрический заряд, как правило, равен нулю: из-за дальнего действия электростатических сил даже малый избыток частиц одного знака заряда приводит к огромным электрическим полям и этот избыток заряда быстро уходит на поверхность тела и исчезает.

Однако такое полное термодинамическое равновесие осуществляется не всегда. Есть еще один очень важный случай, в котором также можно говорить о равновесии и применять формулы статистики и термодинамики. Это случай, когда часть процессов идет очень быстро, а другая часть процессов идет

очень медленно. Примером является газ при температуре 10^6 — 10^7 °К и плотности между 10^{-3} и 10^7 г/см³.

В таком газе быстро устанавливается максвелловское распределение по энергиям электронов и ионов. Быстро устанавливается равновесие ионизации и равновесие с электромагнитным излучением. С другой стороны, весьма мала скорость рождения пар $\nu_e \bar{\nu}_e$ (и особенно мала скорость рождения $\nu_\mu \bar{\nu}_\mu$). Весьма мала и скорость ядерных реакций. Поэтому в данном случае можно пользоваться понятием равновесия, но равновесия ограниченного. Это равновесие соответствует максимуму энтропии при данной энергии и данном количестве ядер различных сортов. Характерно, что для задания ограниченного равновесия нужно задание большего числа параметров по сравнению с полным равновесием: мы должны задать отдельно концентрацию водорода, гелия и т. д., а не одну только общую концентрацию барионов. Это, очевидно, связано с тем, что при температуре, когда практически исключаются ядерные реакции, сохраняется не только общее число барионов, но и число отдельных типов ядер.

Счастливым обстоятельством является резкая, экспоненциальная зависимость от температуры скорости ядерных реакций, протекающих по сильному взаимодействию, т. е. сводящихся к перегруппировке протонов и нейтронов; примером такого процесса является распад $\text{Fe}_{26}^{56} = 13\text{He}^4 + 4\text{n}$. Благодаря резкой зависимости можно всю исследуемую область разделить на область, в которой процесс не идет совсем (ограниченное равновесие), и область, в которой данный процесс идет быстро, и по отношению к нему имеет место равновесие (более полное, менее ограниченное равновесие). Считая быстрыми все «сильные» процессы перегруппировки, мы должны задать суммарные концентрации протонов и нейтронов (притом как свободных, так и связанных с ядрами) в качестве независимых переменных.

Концентрация всех различных типов ядер (заряд Z , атомный вес A) при этом получится из условий равновесия, которые можно записать с помощью химических потенциалов

$$\mu(Z, A) = Z\mu(p) + (A - Z)\mu(n). \quad (7.3.1)$$

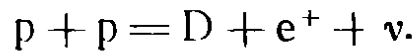
Химические потенциалы $\mu(p)$ и $\mu(n)$ здесь относятся к протонам и нейтронам, оставшимся свободными. В условиях, когда ядра не вырождены, условие равновесия имеет вид обычного закона действующих масс, известного в физической химии,

$$[Z, A] = \text{const} [p]^Z [n]^{A-Z}, \quad (7.3.2)$$

где квадратными скобками обозначены соответствующие концентрации.

Однако такая картина часто оказывается слишком идеализированной. Сложность истинной картины кинетики и равновесия ядерных реакций в горячей плазме в звездах связана с тем, что деление процессов на быстрые и медленные не совпадает с классификацией их как процессов, зависящих от сильного взаимодействия (связанных только с перегруппировкой протонов и нейтронов) и процессов, зависящих от слабого взаимодействия, в которых происходят превращения протонов в нейтроны и обратно.

Процессы сильного взаимодействия идут медленно в тех случаях, когда они требуют столкновения заряженных частиц, а температура не очень высока. Скорость процессов слабого взаимодействия может быть очень различной. Скорость особенно мала, когда необходимо, чтобы взаимодействие прошло во время столкновения частиц, например, как в $p-p$ реакции



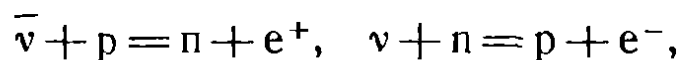
Спонтанный бета-распад характеризуется временами, колеблющимися весьма сильно и прежде всего в зависимости от энергии, выделяющейся при распаде. Приведем три примера: распад трития $T \rightarrow He^3 + e^- + \bar{\nu}$, энергия 18 кэв, время полураспада 12 лет. Нейтрон $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$; энергия (за вычетом массы покоя электрона) 0,8 Мэв, время 11 мин. Для гелия 8 $He^8 \rightarrow Li^8 + e^- + \bar{\nu}$ время 0,01 сек.

При весьма высоких температурах, когда в равновесии содержится много электронно-позитронных пар, время установления равновесия по слабому взаимодействию сокращается, становится меньше времени спонтанного распада за счет того, что включаются новые процессы:



Здесь возникает существенное различие между ситуацией в космологии и в звездах.

В космологии, как уже отмечалось, нейтрино никуда не уходят. Значит, наряду с выписанными выше процессами, идут и обратные:



и достигается истинное термодинамическое равновесие.

В звездах ν и $\bar{\nu}$ беспрепятственно улетают, поэтому полное, детальное равновесие невозможно. В последних работах авторы

(Имшенник, Надежин, Пинаев (1966)) ищут стационарное состояние, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d[p]}{dt} &= -\alpha[p][e^-] + \beta[n][e^+] + \gamma[n] = 0, \\ \frac{d[n]}{dt} &= \alpha[p][e^-] - \beta[n][e^+] - \gamma[n] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.3)$$

где α и β — константы скоростей соответствующих процессов, γ — вероятность распада свободного нейтрона.

Соотношение между концентрациями $[p]$ и $[n]$ в стационарном состоянии оказывается близким к тому, которое получается в равновесии при равном количестве ν и $\bar{\nu}$, т. е. при условии равенства нулю химического потенциала нейтрино.

Здесь важен, однако, другой факт: каждый акт реакции или цикл $p \rightarrow n \rightarrow p$ сопровождается необратимой потерей энергии с улетающими ν и $\bar{\nu}$ (Имшенник, Надежин, Пинаев (1967), Чечеткин). Значит в равновесной звезде в принципе не может быть ситуации, когда время установления равновесия или, точнее, стационарного состояния по превращению $p \rightleftharpoons n$ было бы на много порядков меньше времени эволюции; ведь именно тот же фактор, тот же процесс, который ведет к установлению равновесия, ведет также и к изменению состояния, к падению энтропии. Это обстоятельство нужно учитывать, рассматривая поздние, высокотемпературные стадии эволюции звезд.

Существует ли верхний предел температуры? Список сильно взаимодействующих частиц за последние несколько лет чрезвычайно быстро увеличился. Наряду со «странными» барионами (Λ , Σ , Ξ , Ω) и мезонами (K , \bar{K}) с временем жизни порядка $10^{-8} \div 10^{-10}$ сек, в этот список на равных правах входят и так называемые «резонансы» с временем жизни $10^{-18} \div 10^{-22}$ сек. Число этих резонансов уже приближается к 200 и продолжает расти. С другой стороны, выдвинуто предположение, что все это многообразие частиц можно рассматривать как соединения трех сортов кварков и трех сортов антикварков, гипотетических субэлементарных частиц*). Гипотезы о структуре и взаимодействии элементарных частиц самым решительным образом влияют на связь между температурой и плотностью энергии при сверхвысоких температурах ($kT \sim Mc^2$, где M — масса бариона).

Одно крайнее предположение заключается в том, что все частицы и резонансы рассматриваются как статически независимые. Более того, предполагается, что при сверхвысокой температуре взаимодействием частиц можно пренебречь. Плотность

*) Популярное изложение гипотезы кварков см. Зельдович (1965d).

энергии в этом случае дается выражением

$$\varepsilon = \alpha(T) \cdot \sigma T^4, \quad (7.3.4)$$

где σT^4 — плотность энергии фотонов ($\sigma = 7,57 \cdot 10^{-15}$ эрг/см³ × град⁴), а множитель α дает число сортов частиц, энергия покая которых меньше или порядка kT . Предполагая, что α экспоненциально зависит от T , $\alpha \sim e^{kT/Mc^2}$ получим закон зависимости $T(\varepsilon)$ совершенно нового типа,

$$T \sim Mc^2 \ln \left(\frac{\varepsilon k^4}{\sigma (Mc^2)^4} \right), \quad (7.3.5)$$

вместо

$$T \sim \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_0 \sigma} \right)^{1/4} \quad (7.3.6)$$

при $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$.

Более того, в литературе имеются высказывания, что α растет так быстро, что температура достигает конечного предела при $\varepsilon \rightarrow \infty$, Р. Хагедорн (1965). Из опытов по рассеянию энергичных частиц делается вывод, что этот предел сравнительно низок, $T_{\text{max}} \sim 1,5 \cdot 10^{12}$, впрочем, выявить на опыте логарифмическую зависимость нелегко.

С другой стороны, в гипотезе о кварках естественно считать, что асимптотически при $kT \geq M_q c^2$ (M_q — масса кварка) в равновесии будут только кварки, антикварки и лептоны, обычных сильно взаимодействующих частиц не будет, так же как в обычных условиях при высокой температуре нет атомов и молекул, есть только ядра и электроны. Предположительно, M_q в пять или 10 раз больше массы протона.

В этой гипотезе асимптотически

$$\varepsilon = \alpha_1 \cdot \sigma T^4, \quad (7.3.7)$$

где вклад в α_1 кварков равен $3 \cdot 2,75 \cong 8$; всего, с учетом μ^\pm , ν_e , ν_μ , e^\pm и γ , получим $\alpha \sim 18$.

Последняя формула (7.3.7) кажется более правдоподобной для больших температур, чем странная зависимость (7.3.5). Но в чем же тогда заключается ошибка в рассуждениях, приводящих к формуле (7.3.5)? Ведь многочисленные сорта частиц действительно существуют.

Начнем с простого примера. Атом водорода безусловно существует как связанное состояние. Его масса мало отличается от массы протона. Будем рассматривать атом водорода как частицу. Рассуждая формально, мы придем к выводу (явно неверному), что при температуре $kT \sim m_p c^2$, когда много протонов и антипротонов, должно быть также много атомов водорода (p, e^-) и антиводорода (\bar{p}, e^+).

Но в чем формальная причина ошибки? Дело в том, что мы не учитывали взаимодействия атома водорода с гигантским количеством электронов, позитронов, протонов и антипротонов, составляющих высокотемпературную плазму. Мы не учли также собственного объема атома водорода. Об индивидуальном атоме можно говорить лишь в том случае, если в объеме $4a_0^3$ (a_0 — боровский радиус) нет других частиц. Между тем мы рассматривали атомы как частицы и при плотности гораздо большей $1/4a_0^3$.

Отсюда становится ясно, что ошибка, приведшая к формуле (7.3.5), заключалась в самом учете существования разных видов частиц, мезонов, барионов, резонансов: ошибочным было предположение, что при большой их плотности можно рассматривать газ как идеальный.

В действительности, следует ожидать, что учет взаимодействия разнообразных частиц как раз и даст те результаты, к которым приводит кварковая модель. Отталкивание частиц ограничит их рождение и уменьшит теплоемкость системы.

Для аналогичного вопроса о веществе сверхвысокой плотности (но холодном) эта идея была развита в работе Я. Б. Зельдовича (1959) (универсальное отталкивание барионов). Итак, существование огромного числа элементарных частиц не приводит, по-видимому, к верхнему пределу температуры. Попытку установить верхний предел температуры для области, где квантовые эффекты перепутаны с эффектами ОТО, сделал А. Д. Сахаров (1966). Мы отсылаем интересующихся к этой работе.

ГЛАВА 8

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

§ 1. Нейтральный газ, плазма; равновесие ионизации

Приведем без вывода основные формулы, имеющиеся в учебниках. Энергию выражаем в эргах, температуру в градусах; за единицу массы принят один грамм. Точнее (это будет существенно далее), термодинамические величины относятся к одному грамму массы покоя.

В нерелятивистском одноатомном газе

$$P = \frac{RT\rho}{\mu}, \quad E = \frac{3}{2} \frac{RT}{\mu} + \text{const}, \quad (8.1.1)$$

где ρ — плотность массы покоя, μ — молекулярный вес, $\mu=1$ (а не 1,008) для водорода, $\mu=4$ для He^4 . Газовая постоянная $R=8,31 \cdot 10^7$ эрг/г · град.

Общее выражение для удельной энтропии (на грамм)

$$S = - \frac{R}{\mu} \ln \frac{\rho}{\mu m} + \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} \ln kT + \frac{(c + 5/2) R}{\mu}, \quad (8.1.2)$$

где c — так называемая химическая постоянная $c = \ln \left[g \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]$.

Приводим численные значения c для атомного водорода $c=20,204$ и для He^4 $c=22,824$.

Для водорода в значении c учтено, что основное состояние 4-кратно вырождено за счет спина протона и спина электрона. Предполагается, что $kT \gg \Delta E$, где ΔE — разность энергии состояний с параллельными $\mathcal{F}=1$ спинами и антипараллельными спинами $\mathcal{F}=0$; это ΔE соответствует радиолнии $\lambda=21$ см.

Для полностью ионизованного газа имеют место те же формулы, с той разницей, что эффективный вес, отнесенный ко всем частицам (ядрам и электронам),

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \frac{Z}{A}}, \quad (8.1.3)$$

где μ_0 относится к нейтральному газу: $\mu=0,5$ для водорода и $\mu=4/3$ для He^4 при полной ионизации. Приводим также значения константы энтропии: $s/\mu=41,794$ для Н и $s/\mu=17,1$ для гелия.

Уравнение для равновесия ионизации (уравнение Саха) выпишем через концентрации частиц, *штук/см³*:

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{g_1 g_e}{g_0} e^{-\frac{I}{kT}}. \quad (8.1.4)$$

Аналогично пишется и уравнение для второй ионизации ($n_2 n_e/n_1$) и т. д. Здесь g_1 — статистический вес иона, $g_e=2$ то же для электрона, g_0 — для нейтрального атома. Получим численно для водорода

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{13,6 \text{ эВ}}{kT}} = 2,4 \cdot 10^{15} e^{-\frac{1,58 \cdot 10^5}{T}} T^{3/2},$$

для гелия (первая ионизация! $n_1=[\text{He II}]$)

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = 4 \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{24,6 \text{ эВ}}{kT}} = 9,6 \cdot 10^{15} e^{-\frac{2,85 \cdot 10^5}{T}} T^{3/2}.$$

Приводим соответствующую таблицу для водорода.

Таблица V

Температура, при которой водород ионизован наполовину

ρ	10^{-24}	10^{-16}	10^{-8}	10^{-4}	10^{-2}
$n_e = n_1 = n_0$	0,3	$3 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^{15}$	$3 \cdot 10^{19}$	$3 \cdot 10^{21}$
T	$3,2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$11 \cdot 10^3$	$27 \cdot 10^3$	$61 \cdot 10^3$
kT/I	$2 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$

Отметим, что хотя в принципе для ионизации нужно, чтобы тепловая энергия (kT) была порядка энергии ионизации I , в действительности из-за статистического фактора величина kT/I оказывается существенно меньше единицы.

Как в одноатомном нейтральном газе, так и в полностью ионизованном газе показатель адиабаты γ равен $5/3$, т. е.

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_s = \frac{5}{3}.$$

Однако в области, где ионизация не 0 и не 100%, а следовательно, процент ионизации зависит от плотности и давления, показатель адиабаты значительно меньше $5/3$ (однако $1 \leq \gamma \leq 5/3$).

В плоскости $\lg P - \lg \rho$ линии $S = \text{const}$ имеют вид, показанный на рис. 31 с двумя асимптотами. Асимптоты имеют уравнение $\lg P = \frac{5}{3} \lg \rho + \text{const}$; левая асимптота A относится к нейтральному газу, B относится к полностью ионизованному газу.

Расстояние по вертикали Δ между двумя параллельными асимптотами различно для различных значений S . Для теории

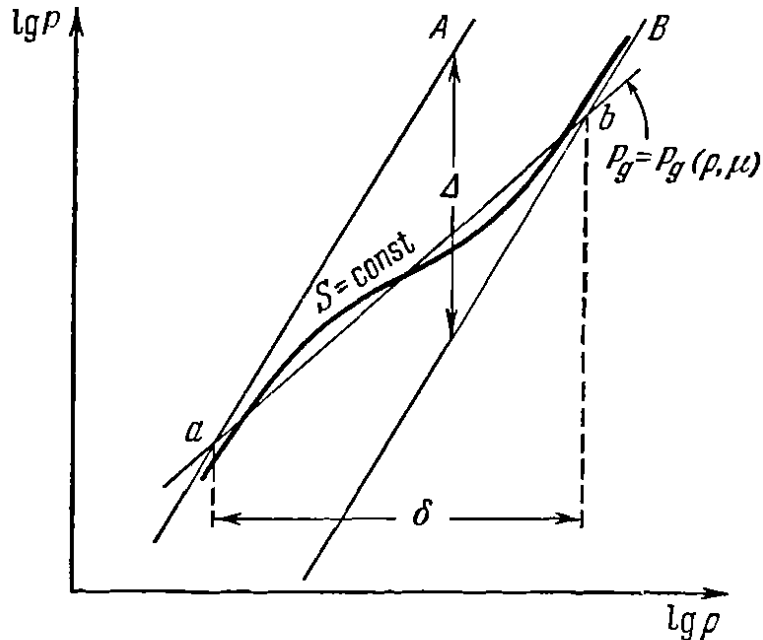


Рис. 31. Изэнтропы в плоскости $\lg \rho - \lg P$ для водорода (схема). Линия A — асимптота $S = \text{const}$ до ионизации, линия B — асимптота $s = \text{const}$ после ионизации.

равновесия массы под действием силы тяжести играет роль пересечение линии $P(\rho)$ при $S = \text{const}$ с линией *) $P_g = 0,36GM^{2/3}\rho^{4/3}$. В логарифмических координатах эта последняя линия изображается прямой с наклоном меньшим, чем наклон асимптот (наклон $\gamma = \frac{d \lg P}{d \lg \rho}$ равен $4/3$ и $5/3$, соответственно). При данном M эта линия пересекает асимптоты в точках a и b ; в определенном интервале M линия трижды пересекает адиабату, что соответствует существованию двух решений для данной массы, описываемых крайними точками (средняя точка соответствует неустойчивому решению **).

*) Выражение P_g дает силу притяжения массы половины звезды на расстоянии порядка $1/2$ радиуса звезды R , поделенное на R^2 . Равенства $P(\rho)$ и P_g означают равновесие сил, расширяющих звезду (давление плазмы $P(\rho)$), и сил, сжимающих звезду (тяготение P_g), (см. об этом далее, гл. 10).

***) Эти рассуждения указывают лишь на принципиальную возможность существования двух решений. Подробно ситуация разбирается в следующем разделе.

Различие плотности в этих двух решениях приближенно соответствует расстоянию по горизонтали между b и a (см. рис. 31). Легко показать, что $\delta = 3\Delta$. Напомним, что отношение плотности в двух решениях равно $\rho_b/\rho_a = 10^\delta$, отношение давлений $P_b/P_a = 10^{1,33\delta}$, поскольку δ относится к графику в логарифмическом масштабе.

§ 2. Термодинамика излучения

Выражение плотности энергии излучения имеет вид

$$\varepsilon = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{cp \cdot 4\pi p^2 dp}{e^{\frac{cp}{kT}} - 1}, \quad (8.2.1)$$

где p — импульс кванта. Производя интегрирование, получаем

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} T^4 = \sigma T^4. \quad (8.2.2)$$

Приводим численное выражение, ε эрг/см³ в зависимости от T в различных единицах,

$$\varepsilon = 7,57 \cdot 10^{-15} T^4 (\text{°K}) = 7,57 \cdot 10^{21} T_9^4 = 1,37 \cdot T^4 \text{эв},$$

где $T_9 = \frac{T}{10^9}$. При этом давление

$$P = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Энтропия единицы объема

$$S_V = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{T} = \frac{4}{3} \sigma T^3 \quad (8.2.3)$$

(заметим, что размерность энтропии эрг/см³ · град, так что S_V зависит от того, в каких единицах выражена температура).

В технической литературе принято было обозначать σ коэффициент в выражении потока энергии (а не ее плотности) в поле равновесного излучения; мы этот коэффициент обозначим через a . Итак,

$$q \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} = a T^4 = \frac{c}{4} \varepsilon = \frac{c}{4} \sigma T^4, \quad a = 5,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^4}.$$

В дальнейшем будем рассматривать плазму, находящуюся в равновесии с излучением. Энергией и энтропией атомов, ионов и электронов, составляющих плазму, пренебрежем. Однако плотность массы покоя целиком определяется именно плот-

ностью плазмы. Таким образом, получим удельные (на один грамм) величины

$$E = \frac{\sigma T^4}{\rho}, \quad S = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^3}{\rho}. \quad (8.2.5)$$

При адиабатическом сжатии $S = \text{const}$ находим

$$T = \left(\frac{3S\rho}{4\sigma} \right)^{1/3}, \quad P = \frac{3^{1/3} S^{4/3}}{4^{4/3} \sigma^{1/3}} \rho^{4/3}. \quad (8.2.6)$$

Таким образом, показатель адиабаты $\gamma = 4/3$ для вещества, главный вклад в энергию которого вносит излучение.

Отметим, что число квантов в единице объема дается выражением

$$n_\gamma = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{\frac{cp}{e^{kT}} - 1} = 0,244 \left(\frac{kT^0}{\hbar c} \right)^3 = 20T^3 (\text{°K}), \quad (8.2.7)$$

откуда средняя энергия, приходящаяся на один квант,

$$\overline{\hbar\omega} = \frac{\varepsilon}{N} = 2,8kT.$$

Число квантов на один грамм плазмы пропорционально T^3/ρ , т. е. пропорционально удельной энтропии. Это обстоятельство подробно анализируется в § 5 этой главы.

Сравним энергию и давление излучения с энергией и давлением плазмы. Принято обозначать через β отношение давления плазмы к полному давлению

$$\beta = \frac{\frac{RT\rho}{\mu}}{\frac{1}{3}\sigma T^4 + \frac{RT\rho}{\mu}}. \quad (8.2.8)$$

Для полностью ионизованного водорода найдем, что

$$\beta = 0,5 \quad \text{при} \quad \frac{T^3}{\rho} = \frac{3R}{\mu\sigma} = 6,6 \cdot 10^{22}.$$

Таким образом, связь между плотностью и температурой $T_{1/2}$, при которой $\beta = 1/2$, дается выражением

$$T_{1/2} = 4 \cdot 10^7 \rho^{1/3}.$$

Удобно преобразовать выражение для β к виду

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{T^3 \mu \sigma}{3R\rho}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{T}{T_{1/2}} \right)^3}. \quad (8.2.9)$$

Заметим, что при $\beta=0,5$ давление плазмы и излучения равны. При этом энергия излучения вдвое больше энергии плазмы. Однако дополнительная плотность массы, связанная по принципу эквивалентности с энергией $\Delta\rho=\varepsilon/c^2$, составляет малую долю плотности массы покоя плазмы

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\varepsilon}{\rho_0 c^2} = \frac{1,5\sigma T^4}{\rho_0 c^2} = 10^{-35} \frac{T^4}{\rho_0} = \left(\frac{2T}{10^9 \rho_0^{1/4}}\right)^4. \quad (8.2.10)$$

Таким образом, существует широкая область, в которой энергия излучения сравнима или даже больше энергии плазмы, но плотность массы излучения весьма мала по сравнению с плотностью массы покоя плазмы. К тому же при релятивистских расчетах изменение массы данного числа барионов при изменении энергии учитывается отдельно.

Отметим особо, что каждому определенному значению β отвечает определенное отношение T^3/ρ , а следовательно, и определенное

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho^{4/3}} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma T^4}{\rho^{4/3}} + \frac{RT}{\mu \rho^{1/3}} = \frac{R}{\mu} \sqrt[3]{\frac{3R}{\mu\sigma}} \left[\left(\frac{T}{T_{1/2}}\right)^4 + \frac{T}{T_{1/2}} \right] = \\ &= \frac{R}{\mu} \sqrt[3]{\frac{3R}{\mu\sigma}} \left[\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{4/3} + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/3} \right]. \quad (8.2.11) \end{aligned}$$

Как уже отмечалось (см. стр. 183), отношение $P/\rho^{4/3}$ непосредственно зависит от массы звезды. Подробно об этом см. ниже § 2 гл. 10, однако уже здесь полезно дать представление о роли давления излучения и давления плазмы в звездах различной массы.

Таблица VI

Зависимость β и γ от массы однородной звезды из водорода ($\mu = 0,5$) и железа ($\mu = 56/27$)

β	1	0,9	0,8	0,5	0,3	0,2	0,1	0
$M (\mu = 0,5)$	0	$5,7 \cdot 10^{34}$	$1,0 \cdot 10^{35}$	$4,1 \cdot 10^{35}$	$1,4 \cdot 10^{36}$	$3,2 \cdot 10^{36}$	$1,4 \cdot 10^{37}$	∞
$M (\mu = 56/27)$	0	$3,3 \cdot 10^{32}$	$5,9 \cdot 10^{33}$	$2,4 \cdot 10^{34}$	$7,9 \cdot 10^{34}$	$1,9 \cdot 10^{35}$	$7,8 \cdot 10^{35}$	∞
γ	$\frac{5}{3}$	$\frac{4,687}{3}$	$\frac{4,533}{3}$	$\frac{4,278}{3}$	$\frac{4,158}{3}$	$\frac{4,103}{3}$	$\frac{4,05}{3}$	$\frac{4}{3}$

В последней строке табл. VI даны значения показателя адиабаты γ , определенного по изэнтропической зависимости давления от плотности. Очевидно, что γ зависит только от β . Нетрудно получить формулу для полностью ионизованной плазмы,

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S = \gamma = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \beta \frac{4-3\beta}{8-7\beta}. \quad (8.2.12)$$

по которой и вычислены приведенные в таблице значения γ . Существуют в литературе и другие определения эффективного показателя γ как величины, характеризующей, например, зависимость температуры от плотности и т. д., но мы ими пользоваться не будем.

§ 3. Пары и нейтрино

Приводим выражения для равновесной плотности электронов n_- и позитронов n_+ в виде интегралов

$$n_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{E_e - \frac{\mu}{kT}} + 1}, \quad (8.3.1)$$

$$n_+ = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{E_e + \frac{\mu}{kT}} - 1}. \quad (8.3.2)$$

Здесь $E_e = \sqrt{m_e c^2 + c^2 p^2}$, μ — химический потенциал электронов; в выражении для позитронов μ_+ уже учтено, что сумма химических потенциалов позитронов и электронов в равновесии равна нулю, поскольку все заряды такой пары тождественно равны нулю. Само значение μ определяется из условия электронейтральности газа $n_- - n_+ = \sum Z_i n_i$, где n_i — концентрация ядер, Z_i — их заряды, выраженные в единицах заряда электрона.

Энергия единицы объема определяется аналогичными интегралами

$$E_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{E_e 4\pi p^2 dp}{e^{E_e - \frac{\mu}{kT}} + 1}, \quad E_+ = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{E_e 4\pi p^2 dp}{e^{E_e + \frac{\mu}{kT}} - 1}. \quad (8.3.3)$$

Здесь, однако, следует сделать оговорку: обычно за нуль энергии принимается энергия холодного вещества, включающая в себя энергию массы покоя тех электронов, которые имелись в холодном веществе. Число их равно $\sum Z_i n_i = n_- - n_+$. Поэтому полная энергия единицы объема в этой системе:

$$E = E_- + E_+ - m_e c^2 (n_- - n_+). \quad (8.3.4)$$

Наконец, выражение энтропии частиц, находящихся в единице объема:

$$S_- = k \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \ln \left(e^{E_e - \frac{\mu}{kT}} + 1 \right) \frac{4\pi p^2 dp}{e^{E_e - \frac{\mu}{kT}} + 1} \quad (8.3.5)$$

и аналогично (с изменением знака μ) для S_+ .

Эти общие выражения резко упрощаются в предельных случаях, к рассмотрению которых мы и переходим.

Первый предельный случай — невырожденный нерелятивистский газ электронов и позитронов. Для этого нужно, чтобы $\mu < m_e c^2$, что достигается при

$$m_e c^2 \left(\frac{\rho}{10^6} \right)^{1/3} < kT < m_e c^2. \quad (8.3.6)$$

Возникают два упрощения: в знаменателе пренебрегаем единицей по сравнению с $e^{\frac{E_e - \mu}{kT}}$, энергию записываем в нерелятивистском виде:

$$E_e = m_e c^2 + \frac{p^2}{2m_e}. \quad (8.3.7)$$

Введем еще обозначение $\mu' = \mu - m_e c^2$. Получим тогда

$$\left. \begin{aligned} n_- &= e^{\frac{\mu'}{kT}} \frac{2 (2\pi m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}, \\ n_+ &= e^{-\frac{\mu' + 2m_e c^2}{kT}} \frac{2 \cdot (2\pi m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.8)$$

и условие равновесия в виде закона действующих масс

$$n_- n_+ = e^{-\frac{2m_e c^2}{kT}} \frac{(m_e kT)^3}{2\pi^3 \hbar^6}. \quad (8.3.9)$$

Вместе с условием, дающим $n_- = n_+$, имеем два уравнения для двух величин n_- и n_+ . В том же приближении, оставляя первые исчезающие члены в разложении по $(kT/m_e c^2)$, имеем добавки, связанные с рождением пар:

$$\Delta E = 2n_+ m_e c^2, \quad \Delta S = \frac{\Delta E}{T}.$$

Второй предельный случай соответствует зарядовой симметрии, что выражается условием $\mu \cong 0$, $n_+ \cong n_-$. Этот случай при малой плотности плазмы реализуется при низкой температуре, так что есть область перекрытия двух предельных случаев. Чем больше плотность плазмы, тем выше должна быть температура для того, чтобы реализовать второй предельный случай. При $\mu = 0$ все величины, отнесенные к единице объема, зависят от одного параметра $x = kT/m_e c^2$, например,

$$n_+ = n_- = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{e^{\frac{x}{1+z^2}} + 1}. \quad (8.3.10)$$

Аналогичные выражения получаются и для других величин. Удобные асимптотические формулы имеют место для

больших и для малых x :

$$\left. \begin{aligned} n_+ = n_- &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 e^{-\frac{1}{x}} x^{3/2}, \\ E_+ = 2n_+ m_e c^2, \quad S_+ &= \frac{E_+}{T}, \quad P_+ = \frac{kT}{m_e c^2} E_+ \end{aligned} \right\} x \ll 1, \quad (8.3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} n_+ = n_- &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 2x^3 \left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots \right), \\ E_+ = \frac{7}{4} \sigma T^4, \quad P_+ &= \frac{1}{3} E_+, \quad S_+ = \frac{7}{3} \sigma T^3, \end{aligned} \right\} x \gg 1, \quad (8.3.12)$$

где σ — константа, относящаяся к квантам (см. предыдущий параграф *).

Рассмотрим теперь газ, состоящий из плазмы и излучения, к которому при высокой температуре добавляются пары. Так же, как это было сделано в предыдущем параграфе, пренебрежем энергией и давлением плазмы, но все величины будем относить к единице массы плазмы. Плотностью электронов плазмы также пренебрегаем, при этом реализуется зарядово-симметричный случай.

В двух предельных случаях получим простые ситуации: при $x \ll 1$ только излучение:

$$E = \frac{\sigma T^4}{\rho}, \quad P = \frac{1}{3} \sigma T^4, \quad S = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^3}{\rho}, \quad (8.3.13)$$

при $x \gg 1$, кроме излучения, равновесный релятивистский позитронно-электронный газ:

$$E = \left(\sigma T^4 + \frac{7}{4} \sigma T^4 \right) = \frac{11}{4} \sigma T^4, \quad P = \frac{11}{12} \sigma T^4, \quad S = \frac{11}{9} \frac{\sigma T^3}{\rho}. \quad (8.3.14)$$

Из этих формул легко найти выражения $P(\rho, S)$ для обоих случаев. Кривая $P(\rho, S = \text{const})$ в логарифмических координатах имеет вид, показанный на рис. 32, *a* (не в масштабе).

Наклон левой и правой асимптот (показаны пунктиром) одинаков; он соответствует $\gamma = 4/3$.

Однако легко убедиться, что правая асимптота лежит ниже левой на величину $1/3 \ln(11/4)$. Значит, в промежутке в среднем γ должно быть меньше $4/3$ и можно показать, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) d \ln \rho = -\frac{1}{3} \ln \frac{11}{4}.$$

*) Здесь E_+ , S_+ , P_+ — величины, относящиеся к парам, т. е. включающие вклад как позитронов, так и электронов.

Пинаева (1964) подробно рассмотрела задачу о показателе адиабаты в зависимости от температуры. Заимствуем из ее работы табл. VII значений $\gamma = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S$ и график рис. 32, б.

Таблица VII
Зависимость γ от температуры

$T, \text{кэВ}$	50	70	100	125	150	200	300	500	700	∞
γ	1,320	1,267	1,221	1,234	1,259	1,301	1,336	1,345	1,342	$\frac{4}{3}$

Показатель адиабаты γ много меньше $\frac{4}{3}$ в области, где с увеличением $\frac{4}{3}$ происходит переход от чистого излучения к излучению с парами e^+ , e^- . При $T \gtrsim 300$ кэВ γ становится больше $\frac{4}{3}$.

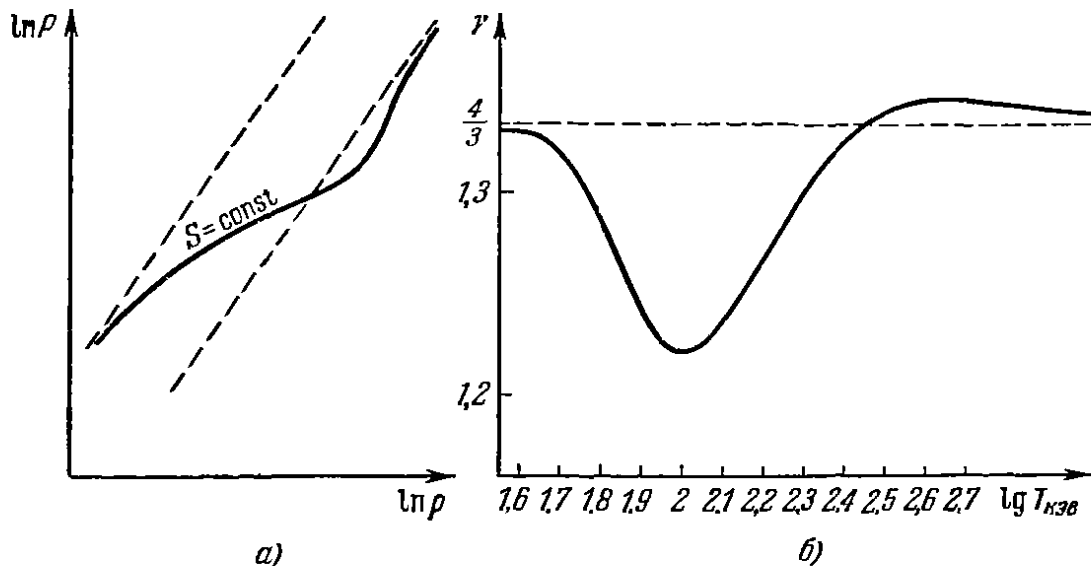


Рис. 32. а) Схематическое изображение зависимости давления от плотности ρ , когда можно пренебречь давлением плазмы, в области температур, при которых в равновесии появляются пары e^+ , e^- .
б) Зависимость $\gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ от T для тех же условий, что и рис. 32, а.

Это происходит потому, что число пар e^+ , e^- при изэнтропическом сжатии растет уже медленно, а ферми-газ пар e^+ , e^- имеет всегда $\gamma > \frac{4}{3}$.

Значение рассматриваемого вопроса связано с тем, что уменьшение γ ниже критической величины $\gamma = \frac{4}{3}$ связано с потерей устойчивости звезды (см. ниже § 1 гл. 10). Кроме того, в космологии горячей модели Вселенной возникает задача об адиабатическом расширении газа, первоначально состоящего из пар, и излучения до низкой температуры, при которой пар уже нет.

Выражения для числа и термодинамических функций нейтрино совпадают с выражениями для ультрарелятивистских электронов (при $m_e c^2/kT \rightarrow 0$) с одной только поправкой: вместо статистического веса два для электрона, соответствующего спину $1/2$, для нейтрино нужно взять статистический вес 1, как для спиральной частицы. Поэтому в равновесии имеем

$$\varepsilon_{\nu_e} = \varepsilon_{\bar{\nu}_e} = \varepsilon_{\nu_\mu} = \varepsilon_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{7}{16} \sigma T^4, \quad (8.3.15)$$

$$\varepsilon_{\nu_e} + \varepsilon_{\bar{\nu}_e} = \varepsilon_{\nu_\mu} + \varepsilon_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{7}{8} \sigma T^4. \quad (8.3.16)$$

§ 4. Диссоциация ядер

В предыдущем параграфе рассмотрена термодинамика излучения в пренебрежении роли плазмы. Это приближение справедливо при малой плотности вещества.

При большой плотности (10^2 — 10^9 г/см³) плазмы и высокой температуре (до нескольких единиц на 10^{10}) решающую роль в термодинамическом поведении вещества играют ядерные процессы.

При низкой температуре, очевидно, равновесие ядерных процессов соответствует образованию ядра с наименьшей энергией, т. е. с наибольшим дефектом массы*). Таким ядром является наиболее распространенный (это не случайно) изотоп Fe^{56} . Однако, как впервые отметили Хойл и Фаулер, при высокой температуре следует ожидать диссоциации $\text{Fe}^{56} \rightarrow 13\alpha + 4n$. Энергия, необходимая для этого процесса, равна 124,4 Мэв. В термодинамические формулы входит отношение этой энергии к увеличению числа частиц $\Delta N = 13 + 4 - 1 = 16$; на одну новую частицу приходится $Q_1 = 124,4/16 \cong 7,7$ Мэв. Так же как и при ионизации атома, диссоциация происходит при температурах значительно меньше Q_1/k ; $T = \alpha Q_1/k$, где безразмерный множитель α значительно меньше единицы.

В табл. VIII во 2-й и 3-й строках приведены температуры 50% диссоциации железа ($T_{1/2}$), вычисленные для нескольких значений плотности. Вычисления ведутся по очевидной формуле типа формулы Саха — все рассматриваемые ядра Fe, He⁴ и невырожденные и нерелятивистские; учитываются первые возбужденные уровни ядра Fe⁵⁶; ядра He⁴ и n не имеют возбужденных уровней.

*) Чтобы быть точным, наименьшей должна быть сумма массы ядра и нейтрализующих его электронов; именно эта сумма, практически не отличающаяся от массы нейтрального атома, приводится в масс-спектрометрических таблицах.

Таблица VIII

Температуры (в миллиардах градусов) 50% диссоциации железа и гелия

ρ	1	10^3	10^5	10^9
Fe $\left\{ \begin{array}{l} (T_{9})_{1/2} \\ \alpha = kT/Q_1 \end{array} \right.$	3,43 $3,83 \cdot 10^{-2}$	4,1 $4,59 \cdot 10^{-2}$	5,79 $6,48 \cdot 10^{-2}$	9,57 $10,7 \cdot 10^{-2}$
He $\left\{ \begin{array}{l} (T_{9})_{1/2} \\ \alpha = kT/Q_1 \end{array} \right.$	4,2 $3,85 \cdot 10^{-2}$	5,49 $4,98 \cdot 10^{-2}$	8 $7,26 \cdot 10^{-2}$	15,2 $1,37 \cdot 10^{-1}$

Далее следует диссоциация $\text{He}^4 \rightleftharpoons 2p + 2n$. Энергия процесса 28,4 Мэв, что дает на одну рожденную частицу $Q_1 = 28,4/3 = 9,5$ Мэв. Таким образом, Q_1 диссоциации гелия больше той же величины для диссоциации железа. Оба процесса в какой-то мере разделены по температуре: существует, хотя и не широкая, область, в которой железо диссоциирует, образуя гелий, но гелий еще не диссоциирует.

В таблице в 4-й и 5-й строках приведены $T_{1/2}$ и α для He^4 .

Все эти расчеты очень схематичны. С одной стороны, следовало бы попытаться рассмотреть весь набор ядер, стабильных и нестабильных, которые появляются в равновесии при высокой температуре. С другой стороны, нужно проверить все звенья кинетики процессов, приводящих к установлению равновесия. Основным процессом является фотодиссоциация ядер квантами равновесного электромагнитного излучения. При температуре, при которой заметна диссоциация $T \sim T_{1/2}$, плотность квантов с энергией больше Q_1 достаточно велика. Поэтому, например, отрыв нейтронов от железа (так же как и обратный процесс присоединения нейтронов) идет достаточно быстро.

Барьер для ядер He^4 (α -частиц) в ядрах среднего атомного веса также не велик. Косвенный аргумент в пользу быстрого установления равновесия заключается в том, что рассматриваются температуры более высокие, чем те, при которых произошел синтез железа.

В случае диссоциации гелия есть своеобразный барьер: при средней энергии на частицу $Q_1 = 9,5$ Мэв первый акт $\text{He}^4 \rightarrow \text{He}^3 + p$ или $\text{He}^4 \rightarrow T + p$ требует энергии 20 ± 21 Мэв. В целом, вопрос о скорости установления равновесия нуждается в дополнительном исследовании.

В последнее время В. С. Имшенник и Д. К. Надежин (1965) провели подробное исследование термодинамики плазмы с учетом возможного превращения $p \rightleftharpoons n$, т. е. с учетом процессов

слабого взаимодействия, а также с учетом рождения пар. Поскольку эти расчеты проводились применительно к теории звезд, химический потенциал нейтрино полагался равным нулю. Имшенником, Надежиным и Пинаевым (1966) показано, что расчеты при таком предположении достаточно точны.

Основным результатом расчетов является определение показателя адиабаты γ в широкой области плотности и температуры. Мы заимствуем из упомянутой работы рис. 33а, на котором изображено поле температур и плотности (плотность дана в логарифмическом масштабе). Наиболее интересны границы области, в которой показатель адиабаты меньше критического значения $\gamma = 4/3$, которое, как уже упоминалось в § 3 этой главы, определяет границу устойчивости звезды (подробнее см. § 1 гл. 10). Как видно из рис. 33, эта область ограничена и слева и справа (заштрихованные кривые).

Диссоциация железа, а затем и гелия, и рождение пар снижают γ до величины меньше критической $\gamma = 4/3$ при $T \sim 2 \div 6 \times 10^9$ (в зависимости от плотности), на левой границе*). Однако после того как закончилась диссоциация и релятивистские пары дали газ с $\gamma = 4/3$, большое число нерелятивистских частиц — нуклонов p и n — снова повышают γ до величины выше $4/3$ при $T > 10 \div 20 \cdot 10^9$.

На рис. 33, а проведены кривые: 1) $x_{\text{Fe}} = x_{\text{He}}$ — линия, на которой наполовину диссоциировано железо; 2) $x_{\text{He}} = x_p + x_n$ — линия половинной диссоциации гелия; 3) $x_+ = \frac{1}{2} x_-$ — линия, на которой число пар e^+ , e^- равно числу первоначальных электронов, так что $e^- = e_0^- + e_n^- = 2e_n^- = 2e_n^+$. На рисунке отчетливо видно, что нижний левый уступ заштрихованной кривой близок к третьей линии: это значит, что при $\rho \leq 10^6 \text{ г/см}^3$ и $T \sim 4 \times 10^9$ переход γ через $4/3$ обусловлен именно рождением пар.

При более высокой плотности основным эффектом является диссоциация железа. Однако возвращение к $\gamma > 4/3$ в ходе роста температуры достигается лишь после того, как закончилась и диссоциация гелия.

Весьма наглядно появление двух минимумов γ , $\gamma_{\text{min}_1} = 0,98$ и $\gamma_{\text{min}_2} = 1,06$ при совместном действии пар и диссоциации железа в первом случае, пар и диссоциации гелия — во втором.

*) Отсюда следует вывод, что в принципе потеря устойчивости звездой (когда γ становится меньше $4/3$ в ходе медленного сжатия и увеличения T) может затем в ходе уже быстрого сжатия привести к новому устойчивому состоянию с $\gamma > 4/3$. Эти равновесные состояния, лежащие при $\rho > 2 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$ с центральной температурой, достигающей $10^{11} \text{ }^\circ\text{K}$ (не показано на рис. 33а), рассчитанных Бисноватым-Коганом (1967). Подробнее см. следующий раздел.

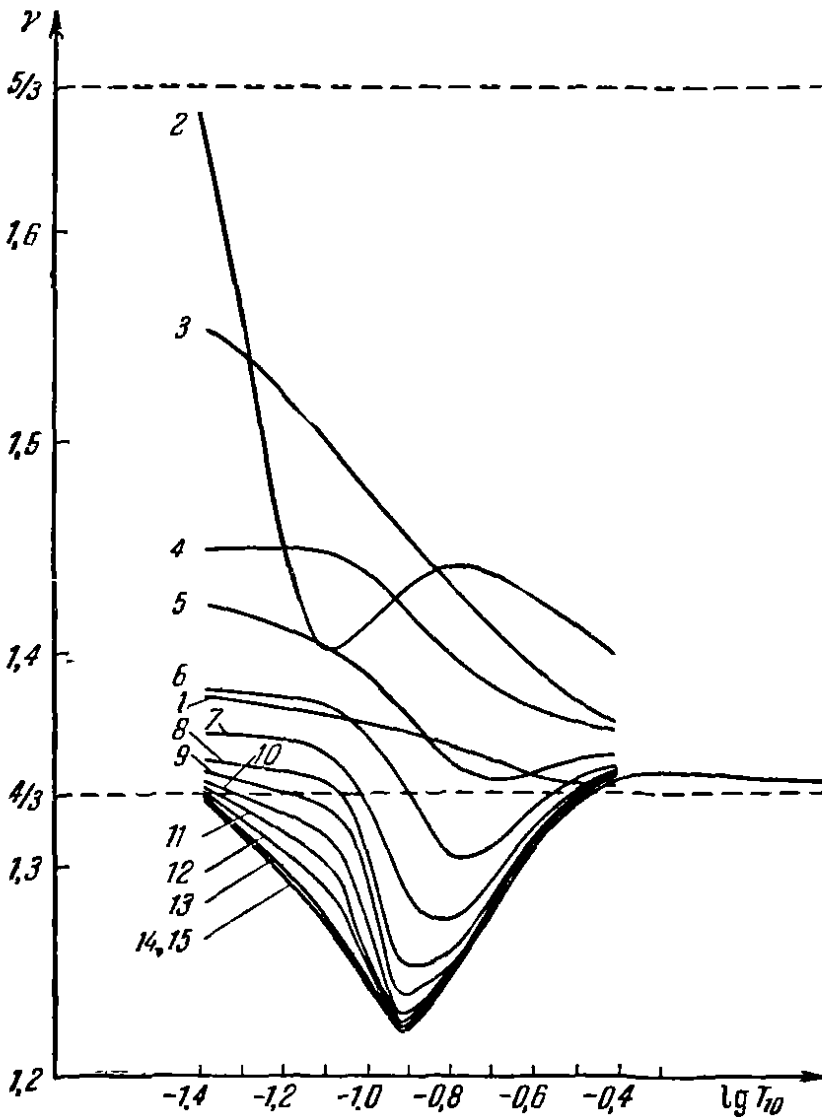
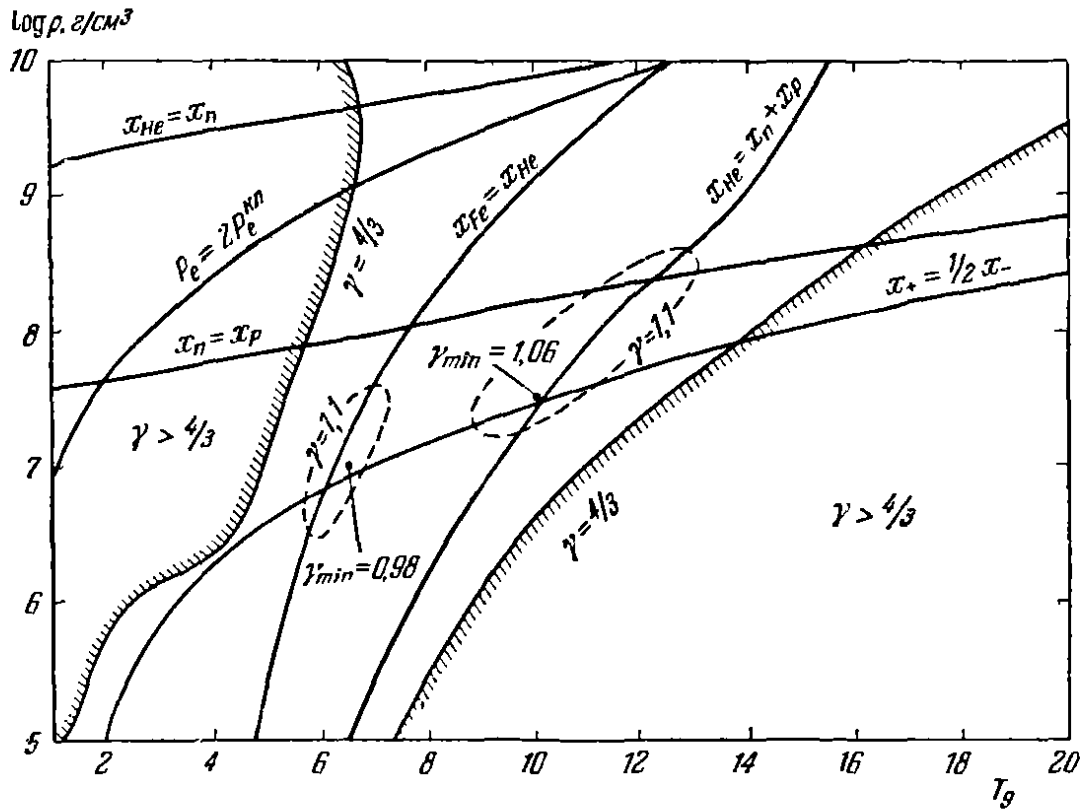


Рис. 33. а) $\rho - T$ -диаграмма для горячего плотного вещества (обозначения см. в тексте).

б) Зависимость γ от T для чистого железа вдоль изэнтроп $S = \text{const}$. Изэнтропы построены для следующих значений $S_{10} = (S \text{ эрг/г} \cdot \text{град})/10^{10}$:

- 1 — $S_{10} = 0,003981$;
- 2 — $S_{10} = 0,01$;
- 3 — $S_{10} = 0,01585$;
- 4 — $S_{10} = 0,02512$;
- 5 — $S_{10} = 0,03981$;
- 6 — $S_{10} = 0,0631$;
- 7 — $S_{10} = 0,1$;
- 8 — $S_{10} = 0,1585$;
- 9 — $S_{10} = 0,2512$;
- 10 — $S_{10} = 0,3981$;
- 11 — $S_{10} = 0,631$;
- 12 — $S_{10} = 1,0$;
- 13 — $S_{10} = 2,512$;
- 14 — $S_{10} = 10$;
- 15 — $S_{10} = 15,85$.

Температура дана в $T_{10} = T^\circ \text{K}/10^{10}$.

В левом верхнем углу при большой плотности заметную роль начинает играть вырождение электронов: кривая $P_e = 2P_e^{кл}$ показывает условия, при которых удваивается за счет вырождения давление электронов; пары в этой области роли не играют.

Вырождение электронов существенно и для равновесия между нейтронами и протонами, как видно из рис. 33,а линии $x_n = x_p$, $n/p = 1$, это равновесие зависит в основном от плотности, а не от температуры.

На рис. 33,б заимствованном из работы Бисноватого-Когана и Каждана (1966), показано значение γ вдоль изэнтроп с разным значением S . Сравнение этого рисунка с рис. 32,б показывает, как влияет наличие вещества на показатель адиабаты γ . В изображенной здесь области параметров (важных для теории равновесия больших звезд) еще не проявляются эффекты диссоциации железа и гелия, существенные при больших значениях температур. Термодинамические величины для таких температур приведены в работе Имшенника и Надежина (1965).

Расчеты такого рода (вместе с данными о скорости потери энергии нейтрино, скорости ядерных реакций, непрозрачностью вещества и др.) представляют собой настоящий фундамент теории эволюции звезд.

§ 5. Безразмерная энтропия

В заключение раздела об уравнении состояния получим удобные формулы, дающие выражение энтропии в безразмерных единицах.

Энтропия в классической теории определяется дифференциально $dS = dQ/T$ с точностью до постоянной величины; она имеет размерность *кал/г·градус*. Квантовая теория определяет абсолютное значение энтропии. При этом $S = k \ln W$, где k — постоянная Больцмана, W — вероятность состояния. Пользование специальными тепловыми единицами представляет удобную условность, в рациональной системе T измеряется в единицах энергии, $k \equiv 1$. В этой системе найдем энтропию, приходящуюся на один нуклон $S_1 = \ln W_1$. Если система состоит только из нуклонов, то W_1 есть среднее число клеток фазового объема, приходящихся на нуклон, т. е. отношение числа квантовых уровней Γ , на которых находятся нуклоны, к числу нуклонов: в нерелятивистском газе

$$\Gamma = \frac{\bar{p}^3 V}{(2\pi\hbar)^3}, \quad \text{где} \quad \bar{p} = (3Tm)^{1/2}, \quad V — \text{объем.}$$

$$W_1 = \frac{\Gamma}{N} = 3^{3/2} \cdot m^{3/2} T^{3/2} n^{-1} \hbar^{-3} = 1,8 \cdot 10^{79} m^{3/2} T^{3/2} n^{-1}.$$

Для ионизованного водорода с плотностью $\rho = 10^{-29} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ($n = 6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-3}$) при $T = 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ с учетом вклада электронов (и численных множителей, опущенных выше) получим $W_1 = 10^{34}$, $S_1 = \ln W = 78$. В звезде

$$\rho = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} (n = 6 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}), \quad T = 10^8, \quad W_1 = 10^8, \quad S_1 = 18,4.$$

Учтем излучение. Энергия в единице объема и соответствующая энтропия:

$$\varepsilon = \sigma T^4, \quad S = \frac{4}{3} \sigma T^3, \quad \sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} = 7,57 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{град}^4}.$$

Безразмерная энтропия на нуклон:

$$S_1 = \frac{S}{kn} = 72,5 \frac{T^3}{n}; \quad (T \text{ }^\circ\text{K}).$$

Для сравнения приведем число квантов в единице объема

$$n_\gamma = \frac{\varepsilon}{h\nu} \approx \frac{\varepsilon}{27kT}, \quad n_\gamma = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\frac{pc}{kT}} - 1}$$

(вторая формула для n_γ — точная), p — импульс кванта и число квантов на один нуклон

$$N_\gamma = \frac{n_\gamma}{n} = 20,4 \frac{T^3}{n} = \frac{S_1}{3,7}.$$

Аналогичный расчет для равновесного спектра нейтрино и антинейтрино (с химпотенциалом $\mu = 0$ с учетом спиральности нейтрино) даст

$$\varepsilon = \frac{7}{8} \sigma T^4, \quad S = \frac{7}{6} \sigma T^3,$$

безразмерная энтропия

$$S_2 = \frac{S}{kn} = 64 \frac{T^3}{n}, \quad n_{\nu, \bar{\nu}} \approx \frac{\varepsilon}{6,22 \cdot kT}; \quad n_\nu = n_{\bar{\nu}} = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\frac{cp}{kT}} - 1},$$

число нейтрино на один нуклон

$$N_{\nu, \bar{\nu}} = \frac{n_\nu + n_{\bar{\nu}}}{n} = \frac{15,2T^3}{n} = \frac{S_2}{4,2}.$$

Суммарная энтропия в безразмерных единицах дается формулой

$$S \approx 4(N_\gamma + N_\nu + N_{\bar{\nu}} + \dots).$$

В этой формуле все наглядно ясно, вплоть до множителя 4. Термодинамическая вероятность W_1 есть произведение вероятностей (числа состояний на частицу) каждой из частиц — кванта, нейтрино, приписанных к нуклону.

Средняя энергия этих частиц $q \approx 4kT$, значит, доля заполнения ими фазового пространства

$$\frac{1}{e^{\frac{q}{kT}} + 1} \approx \frac{1}{e^{\frac{q}{kT}} - 1} \approx e^{-\frac{q}{kT}} \approx e^{-4},$$

т. е. в среднем на частицу приходится e^4 состояний. Следовательно,

$$W_1 \cong (e^4)^{N_\nu + N_{\bar{\nu}} + N_{\bar{\nu}}},$$

откуда и следует выражение энтропии.

Релятивистские стадии эволюции космических объектов

ГЛАВА 9

ВВЕДЕНИЕ

Переходим теперь непосредственно к рассмотрению небесных тел, для которых существенны эффекты общей теории относительности, т. е. для которых эти эффекты качественно меняют ситуацию по сравнению с ньютоновской теорией.

Объекты, для которых эффекты ОТО велики, до сих пор астрономами не найдены, и, как ни парадоксально это звучит, именно этот факт породил в астрономии поистине драматическую ситуацию. Движущий конфликт этой драмы связан с выводами о конечной судьбе обычных звезд.

Теория строения звезд, находящихся в состоянии медленной эволюции, разработана в деталях и отлично согласуется с наблюдениями. Полностью рассчитано распределение температуры и плотности в Солнце и других звездах, содержащих достаточный запас водорода (звезды главной последовательности диаграммы Герцшпрунга — Рессела). Рассчитана светимость (общее выделение энергии), радиус, спектр, их эволюция. Оказалось, что полученные соотношения подтверждаются наблюдениями. Это выдающееся достижение последних 20 лет убеждает нас в правильности основных положений теории, касающихся свойств вещества при температуре звездных недр и скорости ядерных реакций в этих условиях.

Но если теория правильна применительно к стационарному состоянию звезды, то необходимо серьезно отнестись и к выводам теории, касающимся конечной судьбы звезд. Общее направление эволюции заключается в расходовании ядерного горючего, в постепенном повышении температуры и плотности в центре звезды.

Рассчитать в деталях поздние стадии эволюции звезды трудно по чисто техническим причинам (даже с помощью счетных машин) и это до сих пор еще не сделано. Поэтому конечное состояние ищут не прослеживая в деталях всю эволюцию, а пользуясь другим подходом. Зададимся тем, что израсходо-

вано все ядерное горючее (иначе продолжались бы реакции), температура упала до нуля (иначе продолжалось бы излучение энергии наружу) и ищем распределение вещества, удовлетворяющее условию механического равновесия.

Для звезд с массой меньше $1,2 M_{\odot}$ ответ хорошо известен: получается равновесное состояние, в котором электронные оболочки атомов раздавлены, но ядра еще находятся на достаточных расстояниях друг от друга; давление вырожденного электронного газа противостоит тяготению; такие звезды называются белыми карликами *). Наблюдения подтверждают это предсказание теории.

При массе звезды больше $1,2 M_{\odot}$, но меньше критической $M_{кр} \approx 2M_{\odot}$ равновесное состояние представляет собой нейтронную звезду. Вещество сжато до плотности того же порядка, что и плотность атомного ядра (10^{14} г/см^3). Радиус звезды порядка 10 км , потенциал силы тяжести порядка $0,2 c^2$.

Очевидно, становится необходимым учитывать те изменения законов тяготения, которые вытекают из ОТО.

Что же вносит теория относительности в вопрос о судьбе звезды? При массе меньше $M_{кр}$ возникают только количественные изменения. Но само существование максимальной критической массы $M_{кр}$ есть результат теории относительности. При этом оказывается, что критическая масса имеется при любом мыслимом уравнении состояния, совместимом с теорией относительности. При массе больше критической не существует равновесного решения! Конечной стадией эволюции должно быть неограниченное сжатие.

В этой стадии учет общей теории относительности приводит к парадоксальному, на первый взгляд, выводу: вследствие замедления течения времени далекий наблюдатель регистрирует асимптотическое приближение звезды к определенному состоянию. Это состояние не является равновесным, его можно назвать «застывшим». Никакого парадокса в действительности нет, просто вывод теории неожидан и непривычен. Релятивистское замедление течения времени одновременно обозначает стремление к нулю частоты квантов, принимаемых наблюдателем. Происходит гравитационное самозамыкание звезды, она перестает для внешнего наблюдателя излучать энергию, прекращается поток информации.

*) Это название исторично. Как было отмечено в § 1 и 7, физики могут называть вещество «холодным», когда его температура не влияет на уравнение состояния. Белые карлики имеют на поверхности температуру $\sim 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$, но в указанном смысле могут считаться «холодными». При температуре $10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ эти звезды имеют белый цвет, с чем и связано их название. См. об истории открытия белых карликов в книге Е. Шацмаиа (1958).

Итак, теория предсказывает три типа небесных тел в конечном состоянии в зависимости от их массы:

1) белые карлики, 2) нейтронные звезды, 3) «застывшие» звезды.

Конфликт между теорией и наблюдениями заключается в том, что ни нейтронных, ни застывших звезд до сих пор не обнаружено. Не наблюдаены именно те тела, для теории которых играет важную или решающую роль ОТО. Вопрос о существовании таких тел имеет большое значение и для космологии: общая кривизна пространства в больших масштабах и замкнутость или бесконечность однородной Метагалактики зависят от плотности всех видов материи, в том числе нейтронных и застывших звезд. Первая грубая оценка Хойла, Фаулера, Дж. и Е. М. Бербиджей (1964) и др. привела к предположению, что общая масса застывших звезд может быть сравнима с массой видимых звезд. Однако эта оценка сильно зависит от сделанных упрощающих предположений.

Каковы возможные пути решения конфликта между теорией и наблюдениями? С одной стороны, следует учесть трудность наблюдения нейтронных и особенно застывших звезд. Какими свойствами они обладают? Как они должны проявлять себя, находясь в соседстве с другими звездами и межзвездной среде, содержащей пыль, газ, магнитное поле?

Может быть, и в самом деле в галактиках (и в нашей Галактике) много застывших и нейтронных звезд, но они трудно наблюдаемы?

С другой стороны, нужно проанализировать допущения, которые привели к выводу о неизбежности указанного конечного состояния звезды, в частности, возможные способы потери массы, роль вращения звезды и ее магнитного поля. В ходе эволюции массивной звезды рост плотности сопровождается повышением температуры. В определенный момент звезда подходит к границе устойчивости, за которой наступает катастрофическое сжатие. Однако к этому моменту вещество звезды еще содержит запас ядерной энергии*). Освобождение этой энергии может привести к тому, что сжатие сменится расширением и взрывом звезды. Следует, однако, иметь в виду, что наблюдаемая частота взрывов звезд дает величину, во много раз меньшую ожидаемого числа звезд, заканчивающих эволюцию; другими словами, наблюдательные данные говорят скорее против предположения, что все звезды путем взрыва избегают превращения в нейтронное или застывшее состояние. Не-

*) Этот запас существенно зависит от того, происходило ли перемешивание различных слоев звезды путем конвекции.

известно, какую долю массы может потерять звезда при стационарном гидродинамическом истечении вещества с поверхности.

Итак, несоответствие между выводами теории и наблюдениями объективно существует уже давно. Вместе с тем, нельзя отрицать, что открытие квазаров («quasars» в литературе на английском языке) резко обострило ситуацию. Выяснилось, что для теории квазаров существенную роль должны играть, с одной стороны, даже малые поправки на ОТО, с другой стороны, макроскопические движения и магнитное поле, т. е. факторы, не играющие определяющей роли для строения обычных звезд.

В связи с квазарами десятки теоретиков вернулись к теории равновесия и сжатия звезд с учетом общей теории относительности; астрономы вспомнили классические работы Оппенгеймера, Волкова и Снайдера периода 1938—1939 гг. Вместе с тем, по естественному психологическому закону, возникло предположение, что две загадки, связанные между собой, — судьба обычных звезд и сущность квазаров, — может быть, имеют общий ответ.

Сейчас мы думаем, что это не совсем так, хотя, безусловно, обе проблемы имеют перекрывающиеся аспекты, в том числе и связанные с ОТО.

В этом разделе рассматривается описанный выше круг вопросов.

Изложение начинается с того, что очень кратко напоминаются сведения о равновесии звезды и ее устойчивости. Затем излагается теория равновесного состояния звезд из инертной материи (в том числе и сверхмассивных звезд). После этого рассматривается эволюция звезды, ее переход в конечное состояние. Разумеется, в нашу задачу не входит сколько-нибудь подробное рассмотрение медленной эволюции звезды, что делается в соответствующих монографиях (см. конец параграфа). Мы рассматриваем только общий характер эволюции, ее темп и устойчивость. Это важно для того, чтобы выяснить условия, приводящие в состояние, когда существенны эффекты ОТО, или, наоборот, выяснить причины, из-за которых звезда может избежать релятивистской стадии.

Затем рассматривается катастрофическое сжатие (коллапс) звезды, потерявшей устойчивость в ходе медленной эволюции. изучаются процессы, сопровождающие коллапс, и, наконец, рассматривается финальная стадия коллапса звезды с $M \geq 1,6 M_{\odot}$ — релятивистский коллапс, приводящий к состоянию застывшей звезды. Вслед за этим обсуждаются особенности эволюции сверхмассивной звезды и роль вращения в эволюции. Эти вопросы важны для теории квазаров. Далее

исследуются процессы, которые должны протекать в окрестности релятивистских объектов и рассматриваются методы обнаружения этих звезд. В заключение рассматривается возможная физическая природа квазаров.

Изложенные вопросы рассмотрены ранее в обзорах авторов (см. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков (1964а, 1965; см. также (1966а) и И. Д. Новиков, Я. Б. Зельдович (1965)).

Приведем здесь также краткий список некоторых монографий и обзоров, в которых затрагиваются вопросы, обсуждаемые ниже.

Классическая теория строения звезд и нерелятивистских этапов их эволюции имеется в монографиях Чандрасекара (1939); Е. М. и Дж. Бербиджей (1958); К. Шварцшильда (1958); Франка-Каменецкого (1959); в сборнике «Строение звезд» под редакцией Аллера и Мак-Лафлина (1965); *Hand. d. Phys.*, т. 51, 1958; Бааде (1963); Ибена (1967), а также в учебнике Д. Я. Мартынова (1965) и в популярной книге С. А. Каплана (1963).

Основные выводы работ Оппенгеймера и Волкова и Оппенгеймера и Снайдера изложены в учебниках Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (1962, 1964). Вопросы теории сверхплотных конфигураций из холодного вещества рассматриваются В. А. Амбарцумяном и Г. С. Саакяном (1963); в наших обзорах; Гаррисоном, Торном, Вакано, Уилером (1965).

Принципиальные вопросы влияния малых эффектов ОТО на устойчивость звезды вблизи критического состояния рассмотрены С. А. Капланом (1949b); В. Фаулером (1964а, b); Чандрасекаром (1964а, b, 1965) и в наших обзорах.

Вопросы излучения нейтрино изложены в обзорах В. С. Пинаева (1963а) и Чиу (1964). В последнем обзоре рассмотрены также и другие вопросы релятивистской астрофизики.

Теория взрыва сверхновой изложена в работе Фаулера и Хойла (1964), астрономические аспекты — в монографии И. С. Шкловского (1966).

В последнее время появился ряд новых работ по теории взрыва сверхновых (см. Добавление IV).

Обзор проблемы квазаров дан Е. М. Бербидж (1967).

Разумеется, приведенный список не претендует на полноту.

ГЛАВА 10

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД

§ 1. Равновесие и устойчивость звезды в целом

Звезда в обычном состоянии представляет собой газовый шар, находящийся в гидродинамическом и тепловом равновесии. Гидродинамическое равновесие обеспечивается равенством силы тяготения и силы давления, действующих на каждый элемент массы звезды. Тепловое равновесие означает равенство энергии, выделяемой в недрах звезды, и энергии, излучаемой с поверхности звезды. Если бы условие гидродинамического равновесия не выполнялось, то звезда моментально пришла бы в движение и перестала бы существовать как стационарный объект.

Действительно, пусть давление не точно компенсирует тяготение, так что под действием нескомпенсированной силы вещество получит ускорение, сравнимое с ускорением свободного падения $g = GM/R^2$. Тогда элементы вещества сместятся на расстояние порядка радиуса звезды R за следующее время (называемое гидродинамическим):

$$t_H \approx \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{-1/2} \quad (10.1.1)$$

(индекс H — Hydrodynamic).

Подставляя данные для Солнца $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г и $R = R_\odot = 7 \cdot 10^{10}$ см, получаем $t_H \approx 10^3$ сек. Итак, для существования звезды в стационарном состоянии необходимо выполнение устойчивого гидростатического равновесия. Условие равновесия записывается в виде

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)\rho}{r^2}. \quad (10.1.2)$$

Слева стоит сила давления, действующая на единицу объема, справа — сила притяжения его массой $M(r)$, заключенной внутри сферы радиуса r . Для анализа вопросов равновесия и устойчивости будем в этом параграфе все вещество звезды характеризовать средними плотностью $\bar{\rho}$ и давлением \bar{P} , давая

порядковые оценки величинам. Такой способ является грубым, но зато очень наглядно выявляет физическую сущность вопроса. О точной теории устойчивости равновесной модели звезды см. далее § 3 и последующие. Эта теория подтверждает грубые оценки. Используя средние характеристики, можно написать для всей звезды:

$$M \approx \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{\rho}, \quad \frac{\bar{P}}{R} = \bar{\rho} \frac{GM}{R^2}. \quad (10.1.3)$$

Используя эту формулу, легко оценить давление в звезде, а затем, используя для оценки уравнение состояния идеального газа, также и температуру недр *). Подставляя в (10.1.3) данные для Солнца, находим $\bar{P}_\odot \approx 10^6$ дин/см², $\bar{T}_\odot \approx 10^7$ °К.

Используя полученные оценки, мы приходим к весьма важному выводу:

Характерное время гидродинамических процессов в звезде гораздо меньше времени тепловых процессов и процессов переработки ядерного горючего. В самом деле, для Солнца, например, характерное время теплового процесса определяется условием:

$$t_{T_\odot} \approx \frac{E_{T_\odot}}{L_\odot} \approx \frac{3kT_\odot}{m} \cdot \frac{M_\odot}{L_\odot} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ лет},$$

где E_{T_\odot} — тепловая энергия Солнца, m — масса протона, L_\odot — светимость и M_\odot — масса Солнца ($L_\odot = 4 \cdot 10^{33}$ эрг/сек). Таким образом, Солнце без всяких ядерных источников энергии могло бы существовать тридцать миллионов лет. С другой стороны, время переработки ядерного топлива

$$t_{N_\odot} \approx \frac{E_{N_\odot}}{L_\odot} \approx \frac{0,01 \cdot c^2 \cdot 0,1 M_\odot}{L_\odot} = 10^{10} \text{ лет}.$$

Здесь E_{N_\odot} — запас ядерной энергии вещества Солнца, $0,01 c^2$ — максимальная энергия ядерных реакций на единицу массы, $0,1 M_\odot$ — масса ядра, где температура достаточно велика для ядерных реакций.

*) Формула (10.1.3) позволяет дать еще один подход к нахождению t_H . Этот подход заключается в оценке времени прохождения звуком расстояния порядка радиуса звезды. Скорость звука есть $v_{зв} = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^{1/2}$. Используя для оценки усредненное уравнение равновесия (10.1.3), находим, что

$$v_{зв} = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2},$$

откуда следует (10.1.1).

Мы видим, что $t_H \ll t_T$ и $t_H \ll t_N$. Полученные оценки приводят к выводу, что отыскание конфигураций (распределения плотности и давления), удовлетворяющих уравнениям гидростатического равновесия, является первой задачей в теории звезд.

Эволюция, зависящая от тепловых и ядерных процессов, от потери и аккреции вещества, представляет собой последовательную смену равновесных конфигураций. Достижение предела существования таких конфигураций приводит к нарушению равновесия и к катастрофическим явлениям.

Для анализа гидростатического равновесия мы воспользуемся энергетическим методом. Подробное обоснование метода и вычисления см. в приложении к этому параграфу. См. также книгу Гаррисона, Торна, Вакано и Уилера (1965) и работы Чандрасекара (1964a, b, 1965). В тексте мы сформулируем общие выводы.

Условие гидростатического равновесия совпадает с условием экстремума полной энергии звезды при заданном числе сохраняющихся элементарных частиц — барионов и заданной энтропии. Уравнение для градиента давления есть уравнение Эйлера вариационной задачи нахождения экстремума энергии, зависящей от распределения вещества. Это утверждение справедливо как в классической ньютоновской теории, так и в общей теории относительности. Поэтому естественно строить теорию равновесных конфигураций, рассматривая их энергию в зависимости от параметров. Минимум энергии соответствует устойчивому равновесию, а максимум энергии — неустойчивому; в энергетическом подходе выяснение устойчивости не требует дополнительных расчетов. Между тем непосредственное рассмотрение решения дифференциального уравнения равновесия не позволяет еще судить об устойчивости, поскольку необходимо дополнительно исследовать линеаризованное уравнение малых возмущений.

Следует особо подчеркнуть роль энтропии: ее роль обусловлена термодинамическим соотношением $P = - \left(\frac{\partial E_1}{\partial \frac{1}{\rho}} \right)_S$, где

E_1 — удельная энергия, S — удельная энтропия (все величины на единицу массы покоя). Это соотношение позволяет установить связь между энергией звезды, в которую входит E_1 , и уравнением равновесия, в которое входит давление P . Поэтому в теорию входит E_1 как функция именно ρ и S , а не ρ и температуры T .

Для иллюстрации общей ситуации будем сначала грубо характеризовать все вещество средней плотностью ρ и средней

энергией на грамм вещества \bar{E}_1 . Полная энергия звезды массы M записывается в виде

$$E = \int_V E_1 \rho dV - G \int_V \frac{m \rho}{r} dV. \quad (10.1.4)$$

Первое слагаемое — внутренняя энергия, второе — гравитационная энергия, m — масса внутри сферы радиуса r .

Воспользовавшись средними величинами, перепишем (10.1.4):

$$E = \bar{E}_1 M - \alpha_1 G \frac{M^2}{R}, \quad \alpha_1 = \text{const},$$

или, выражая R через $\bar{\rho}$, $\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3}$, находим

$$E = \bar{E}_1 M - \alpha_2 G M^{5/3} \bar{\rho}^{-1/3}, \quad \alpha_2 = \text{const}. \quad (10.1.5)$$

Уравнение состояния идеального газа можно записать в виде

$$E_1 = K(S) \rho^{\gamma-1} + L(X),$$

где $K(S)$ зависит от энтропии газа и его химического состава; $L(X)$ — от химического состава, а γ — показатель адиабаты: $\gamma = \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_{S=\text{const}}$, P — давление. Напомним, что для идеального одноатомного нерелятивистского газа $\gamma = 5/3$. В теории звезд часто вместо γ используют так называемый индекс политропы n : $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$.

Окончательно (10.1.5) можно записать в виде

$$E = C_1 M \bar{\rho}^{\gamma-1} + C_2 M - C_3 M^{5/3} \bar{\rho}^{-1/3}, \quad (10.1.6)$$

C_1 , C_2 и C_3 — постоянные при фиксированной энтропии. Аддитивная постоянная в энергии при решении вариационной задачи, очевидно, несущественна.

Если $\gamma < 4/3$, то на кривой E , как функции $\bar{\rho}$, имеется минимум. Он отвечает положению устойчивого равновесия звезды.

Если $\gamma < 4/3$, то кривая $E(\bar{\rho})$ не может иметь минимума и соответственно звезда не имеет устойчивого равновесного состояния. В этом случае на кривой есть максимум, отвечающий неустойчивому равновесию.

Наконец, в случае $\gamma = 4/3$ и $C_1 = C_3$ энергия звезды вовсе не зависит от средней плотности, т. е. имеет место безразличное равновесие звезды при любой плотности. Заметим, что безразличное равновесие имеет место только по отношению к сжа-

тию и расширению звезды в целом, т. е. по отношению к подобному изменению всей звезды; можно показать, что звезда устойчива по отношению к деформации распределения плотности в ней.

Найдем зависимость плотности равновесной звезды от массы. Для этого приравняем нулю производную от E по $\bar{\rho}$:

$$\left. \frac{dE}{d\bar{\rho}} \right|_{\substack{M=\text{const}, \\ S=\text{const}}} = 0.$$

Отсюда найдем:

$$M = \text{const} \bar{\rho}^{\left(\gamma - \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{2}}, \quad (10.1.7)$$

Из полученной формулы видно, что знак $\left. \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial M} \right|_{S=\text{const}}$ для равновесных конфигураций совпадает со знаком разности $(\gamma - 4/3)$.

Сформулируем результат: когда звезда устойчива, то $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial M} > 0$, а когда неустойчива, то $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial M} < 0$. При вычислении

$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial M}$ подразумевается сравнение двух моделей звезды из вещества с одним и тем же уравнением состояния и одинаковой энтропией, но с различными массами отличающимися на δM .

Этот критерий естествен: в устойчивом состоянии добавление массы вызывает сжатие и увеличение давления, компенсирующего возросшую силу тяготения. Заметим, что анализ точного, не усредненного уравнения равновесия приводит к критерию устойчивости $\frac{\partial \rho_c}{\partial M} > 0$, где ρ_c — центральная плотность звезды (см. Я. Б. Зельдович (1963а)).

Процесс теплоотвода и излучения энергии звездой в окружающее пространство определяется условиями диффузии излучения из недр наружу*). Поток энергии наружу L зависит от распределения T и непрозрачности вещества звезды

$$L = 4\pi r^2 D \frac{dE}{dr}, \quad (10.1.8)$$

где D — коэффициент диффузии, E — плотность световой энергии $E = \sigma T^4$.

Не может ли звезда потерять устойчивость благодаря сильной зависимости процессов энерговыделения при ядерных реак-

*) При некоторых условиях поток энергии переносится не излучением, а путем конвекции, но это не меняет существа дела.

циях от температуры? Эта зависимость для небольших интервалов T выражается соотношением

$$A_{\text{яд}} = A_0 \rho T^\nu, \quad (10.1.9)$$

A_0 и ν — постоянные. Для протон-протонной реакции, например, $\nu=4,5$ в интервале температур $(0,9—1,3) \cdot 10^7$ °К, для углеродного цикла $\nu=20$ при $T = (1,2—1,6) \cdot 10^7$ °К.

Плотность световой энергии, входящая в выражение (10.1.8), пропорциональна $E \sim T^4$. Обычно величина ν в (10.1.9) больше четырех $\nu > 4$ и, следовательно, энерговыделение резко зависит от T , чем теплоотвод. Казалось бы, случайное малое превышение энерговыделения над процессом излучения энергии звездой в окружающее пространство приведет к повышению T , а значит, и к резкому увеличению $A_{\text{яд}}$: возмущение будет развиваться. Произойдет явление, аналогичное тепловому взрыву в химических системах. В действительности дело обстоит иначе. Мы уже неоднократно подчеркивали, что гидродинамические процессы в звезде идут гораздо быстрее тепловых. Поэтому увеличение энерговыделения приведет к отклонению от равновесия: внутреннее давление превзойдет силы тяготения. Это заставит звезду расширяться; уменьшится ρ . Подставим в (10.1.3) уравнение состояния $P = \frac{R}{\mu} T \cdot \rho$ и найдем T (здесь R — газовая постоянная):

$$\bar{T} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} \frac{\bar{\mu}}{R} GM^{2/3} \rho^{-1/3}. \quad (10.1.10)$$

Мы видим, что уменьшение ρ приведет к уменьшению T^*), а значит, и $A_{\text{яд}}$; следовательно, возмущение развиваться не будет.

Уменьшение энерговыделения от равновесного приведет к обратному процессу, и равновесие вновь восстановится. Таким образом, звезда регулирует мощность источников ядерной энергии, приводя их в соответствие с излучением энергии с поверхности.

Превышение энерговыделения над теплоотводом приводит, как мы видим, к уменьшению температуры звезды. В этом смысле можно говорить об отрицательной теплоемкости звезды. Эта теплоемкость отличается от теплоемкости при постоянном давлении или постоянном объеме, которые обычно используются

*) В массивных звездах давление определяется главным образом давлением излучения и $P = \frac{\sigma}{3} T^4$. Очевидно, и в этом случае уменьшение ρ сопровождается уменьшением T .

в физике. В данном случае теплоемкость определяется при условии равновесия звезды под действием гравитации*).

Можно и иначе сформулировать это утверждение. Помножим уравнение равновесия (10.1.2) на $4\pi r^3 dr$, возьмем интеграл по dr по всему радиусу звезды и в левой части равенства произведем интегрирование по частям. В результате получим

$$\int_0^R 3P4\pi r^2 dr = \int_0^R \rho \frac{GM(r)}{r} 4\pi r^2 dr, \quad (10.1.11)$$

где R — радиус звезды. Если воспользоваться теперь уравнением состояния идеального газа, то в левом интеграле (10.1.11) можно заменить: $3P = 2E_T$. Теперь интеграл в правой части — гравитационная энергия, взятая с обратным знаком:

$$2E_T = -U. \quad (10.1.12)$$

Это соотношение является теоремой вириала для обычных звезд. Теперь общая энергия запишется в виде

$$E = E_T + U = -E_T. \quad (10.1.13)$$

Последнее выражение означает, что сообщение звезде энергии уменьшает ее тепловую энергию и, наоборот, излучение энергии приводит к увеличению тепловой энергии и температуры.

В стационарном состоянии в звезде выделение ядерной энергии в точности компенсирует потери энергии излучением. Однако уменьшение концентрации ядерного горючего приводит к нарушению баланса; потери энергии, хотя и незначительные, превышают выделение энергии. Это ведет к повышению температуры, которая устанавливается так, чтобы обеспечить скорость выделения ядерной энергии при уменьшенной концентрации ядерного горючего или при переходе на сжигание другого топлива (например, с H на He), требующего для горения более высокой температуры. В этом заключается медленная эволюция звезды с постепенным истощением запасов ядерной энергии.

Заметим, что в соответствии с отрицательной теплоемкостью звезды как целого постепенное увеличение температуры сопровождается уменьшением энтропии. В самом деле, запишем уравнение состояния один раз через температуру, другой—

*) Оговоримся здесь же, что все сказанное относится лишь к обычным звездам. В конце звездной эволюции в состоянии так называемого белого карлика звезда может иметь и положительную теплоемкость (см. § 1 гл. 11). В этом случае в давлении газа существенную роль играют вырожденные электроны.

через энтропию и, наконец, в третий раз выразим p через M и ρ , учитывая гравитацию (10.1.3); заменив R через M и ρ , будем иметь соответственно:

$$P = \text{const } T\rho, \quad (10.1.14)$$

$$P = \text{const } e^{C_1 S} \rho^{5/3}, \quad (10.1.15)$$

$$P = \text{const } \rho^{4/3}. \quad (10.1.16)$$

Из (10.1.14) и (10.1.16) имеем

$$T = \text{const } \rho^{1/3}, \quad (10.1.17)$$

а из (10.1.15) и (10.1.16)

$$e^{C_1 S} = \text{const } \rho^{-1/3}. \quad (10.1.18)$$

Таким образом, из (10.1.17) и (10.1.18) видно, что увеличение плотности приводит к увеличению T и к уменьшению S .

Сделаем в заключение еще следующее замечание. Гидродинамическое время t_H меньше теплового t_T примерно на двенадцать порядков. Однако тепловое время t_T всего в ~ 300 раз меньше ядерного t_N . Последнее время определяет медленную эволюцию. Ввиду относительно малого различия этих времен в некоторые периоды жизни звезды условия тепловой стационарности могут нарушаться. Это действительно имеет место, например, при переходе с горения водорода на горение гелия, когда резко меняется структура звезды. В этом параграфе мы обрисовали только общую картину и основные закономерности. Ряд исключений, могущих привести к неустойчивости звезды, будет разобран далее.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 1

Покажем, что в ньютоновской теории условие экстремума полной энергии звезды (при неизменном химическом составе и сохранении энтропии в каждом элементе) есть условие гидростатического равновесия. Полная энергия звезды при условии отсутствия макроскопических движений записывается в виде

$$E = \int_0^M E_1(S, \rho) dm - \int_0^M \frac{Gm dm}{r}, \quad (10.1.1\pi)$$

где $m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr$ — масса внутри сферы радиуса r .

Воспользуемся термодинамическим тождеством

$$P = - \left(\frac{\partial E_1}{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)} \right)_{S=\text{const}}, \quad (10.1.2\pi)$$

где P — давление, и вычислим первую вариацию полной энергии:

$$\delta E = + \int_0^M \frac{P}{\rho^2} \delta \rho \, dm + G \int_0^M \frac{m \, dm}{r^2} \delta r. \quad (10.1.3\text{п})$$

Преобразуем первый интеграл в (10.1.3п):

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{P}{\rho^2} \delta \rho \, dm &= - \int_0^M P \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \, dm = - \int_0^M P \delta \left(4\pi r^2 \frac{dr}{dm} \right) \, dm = \\ &= - \int_0^M 8\pi P \frac{dr}{dm} r \delta r \, dm - \int_0^M 4\pi P r^2 \delta \left(\frac{dr}{dm} \right) \, dm = \\ &= - \int_0^M 8\pi P \frac{dr}{dm} r \delta r \, dm + \int_0^M 4\pi \frac{d}{dm} (P r^2) \delta r \, dm = \\ &= \int_0^M 4\pi r^2 \frac{dP}{dm} \delta r \, dm = \int_0^M \frac{dP}{\rho \, dr} \delta r \, dm. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (10.1.3п) и приравнявая $\delta E = 0$, находим

$$\frac{dP}{dr} + \frac{\rho G m}{r^2} = 0,$$

т. е. уравнение гидростатического равновесия. Таким образом, действительно, условие экстремума энергии есть просто условие гидростатического равновесия.

Запишем теперь выражение для полной энергии звезды, не предполагая равенства нулю скоростей движения вещества звезды:

$$E = \int_0^M \left[E_1(S, \rho) - \frac{Gm}{r} + \frac{u^2}{2} \right] dm,$$

где u — скорость элемента массы. Очевидно, что найденное выше состояние, при котором имеется экстремум энергии, будет устойчивым, если экстремум — минимум. Действительно, из него не может возникнуть никакое другое состояние, ни с $u=0$, ни тем более с $u^2 > 0$.

Следовательно, исследование устойчивости сводится к нахождению условий, при которых $\delta^2 E > 0$. Ограничимся состоянием покоя, $u=0$.

В выражении для второй вариации коэффициент при $(\delta r')^2$, где $r' = \frac{dr(m)}{dm}$, пропорционален $\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial E_1}{\partial \rho} = \frac{\partial P}{\partial \rho}$. Поэтому необходимым условием устойчивости является $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$. иначе, взяв малое, но высокочастотное (т. е. часто колеблющееся) δr так, что $(\delta r)^2$ мало, а $(\delta r')^2$ велико, можно было бы получить $\delta^2 E < 0$.

Физический смысл этого условия очевиден: вещество с $\frac{\partial P}{\partial \rho} < 0$ неустойчиво в малом при данном давлении, безотносительно к гравитации.

В учебниках вариационного исчисления (например, Гельфанд, Фомин (1961)) доказывается, что при выполнении $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$ необходимым и достаточным условием определенного знака второй вариации $\delta^2 E$ является непересечение соседних экстремалей, т. е. решений уравнений, получающихся из условия $\delta E = 0$.

Переводя эту теорему на язык рассматриваемой задачи, получаем следующее условие устойчивости звезды. Пусть $r_0(m)$ есть решение, отвечающее полной массе M_0 ; при этом на краю звезды, т. е. при $m = M_0$, должно быть выполнено естественное условие $P = 0$. Пусть $r_1(m)$ есть решение, отвечающее другой массе M_1 , близкой к M_0 . Тогда решение устойчиво, если при всех m

$$\frac{r_1(m) - r_0(m)}{M_1 - M_0} < 0. \quad (10.1.4\text{п})$$

Следовательно, для устойчивости нужно, чтобы при увеличении массы ($M_1 - M_0 = \Delta > 0$), т. е. при добавлении массы Δ снаружи, каждый внутренний элемент массы приблизился к центру ($\Delta r = r_1 - r_0 < 0$).

Такое условие является весьма естественным и его можно рассматривать как некое обобщение условия $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$. Объем звезды и каждой его части должен уменьшаться при наложении внешнего давления. Вместе с тем важно отметить, что это условие получено не интуитивно, а является точным математическим утверждением, полное формальное доказательство которого дано, например, в указанном выше учебнике.

При интегрировании уравнения равновесия удобно задаться плотностью в центре. Тогда в результате интегрирования получается зависимость $M(\rho_c)$. Так как при малых m

$$r(m) = \left(\frac{3m}{4\pi\rho_c} \right)^{1/3}, \quad (10.1.5\text{п})$$

то легко убедиться, что условие (10.1.4п) будет удовлетворено лишь при $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$.

Таким образом, дано строгое доказательство того, что решения, расположенные на спадающей ветви кривой $M(\rho_c)$ там, где $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$, являются неустойчивыми относительно малых возмущений. Этот результат был получен выше в основном тексте параграфа весьма грубым способом, и его точное подтверждение является аргументом в пользу качественной правильности грубого рассмотрения. Вместе с тем надо отметить, что выполнение $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$ является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным для устойчивости.

В части звезды вещество может иметь $\gamma < 4/3$, и звезда останется устойчивой, должно быть лишь $\gamma > 0$. Как найти эффективное среднее γ , которое позволило бы судить об устойчивости решения? Построение пары кривых $r_0(m)$ и $r_1(m)$ для близких ρ_{c0} и ρ_{c1} , которым соответствуют близкие M_0 и M_1 , позволяет всегда вполне однозначно проверить устойчивость по выполнению (10.1.4п) при всех m и, таким образом, дает точное, исчерпывающее и практически удобное решение вопроса. Другой способ доказательства того, что максимум кривой $M(\rho_c)$ играет роль границы устойчивости, дан в конце § 7 гл. 10.

§ 2. Общие задачи теории равновесия звезд

Будем по-прежнему характеризовать вещество звезды средней плотностью и средней температурой $\bar{\rho}$, \bar{T} . Химический состав вещества считаем заданным — установившимся в ходе ядерных реакций на предыдущих этапах эволюции. Если реакции (в определенных условиях) идут быстро, считаем состав равновесным (с соотношением количества протонов, нейтронов и различных ядер, соответствующим динамическому равновесию при заданной плотности и температуре).

Таким образом, мы имеем дело с тремя величинами, например, M , ρ , T (знаки средних в этом параграфе опускаем), между которыми устанавливается одно соотношение условием механического равновесия звезды (10.1.3). Так, например, при данных M и ρ можно найти такую температуру T (при этом $T = T(M, \rho)$), которая обеспечивает равновесие. Одна связь между тремя величинами означает, что в плоскости ρ , M (рис. 34) каждая точка описывает определенное решение, каждой точке соответствует своя температура. Очевидно, однако, что в плоскости ρ , M есть и определенные ограничения. Наименьшей температуре $T = 0$ соответствует определенное холодное давление $P = P(\rho, 0)$, и чтобы создать такое давление, нужна конечная масса $M(\rho, 0)$. Ниже этой линии решений не существует. Своеобразный ход линии $T = 0$ объясняется различным равновесным составом вещества в разных областях плотности — см. гл. 6 и § 4, 5 гл. 10.

Далее мы знаем (см. гл. 3), что из-за эффектов ОТО статические решения заведомо не существуют при радиусе тела, близком к шварцшильдовскому $r_g = 2GM/c^2$. Отсюда получаем

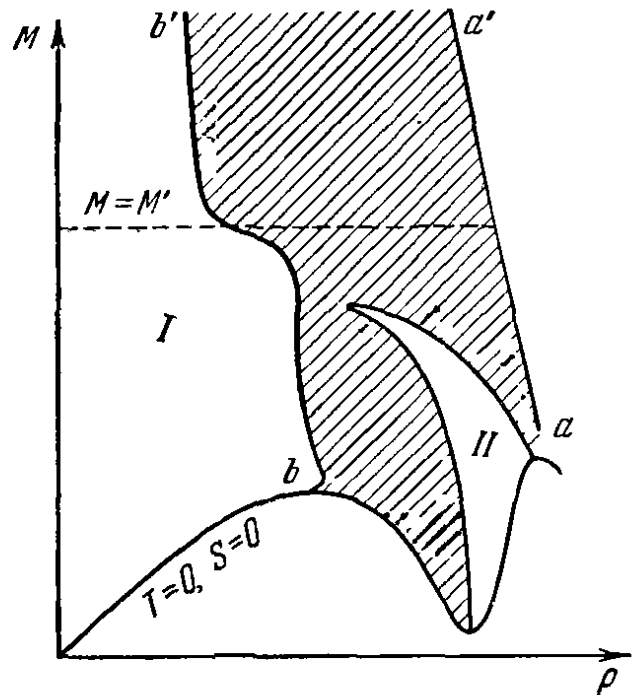


Рис. 34. Диаграмма ρ , M для звездных конфигураций (не в масштабе) $T = 0$, $S = 0$ — линия холодных звезд. Ниже этой линии равновесных решений не существует, a , a' — граница равновесных конфигураций, определяемая ОТО. Правее этой линии равновесных решений не существует. Заштрихована область неустойчивых равновесных конфигураций. I и II — области устойчивых равновесных конфигураций. Горизонталь $M = M'$ отделяет нижнюю область, где преобладает давление плазмы, от верхней, где преобладает давление излучения.

ограничение $\rho < \frac{M}{4\pi \cdot 3} r_g^3$, $\rho < 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}$, $M < 10^8 M_\odot \rho^{-1/2}$. Эта линия также показана на рис. 34 (линия aa').

Итак, решения существуют только внутри области, ограниченной осью ординат и двумя линиями, которые пересекаются *) в районе $\rho \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ г/см}^3$, $M \approx M_\odot$. Внутри этой области, на некотором расстоянии от ограничивающих линий можно: а) пользоваться ньютоновской теорией тяготения, поскольку точка лежит левее линии, определяемой ОТО, и б) не учитывать давление вырожденного газа, поскольку точка лежит выше линии $T=0$. Из а) следует, что по порядку величины давление можно вычислить по формуле (10.1.3). Запишем это выражение в виде

$$P = k_1 G M^{2/3} \rho^{4/3}. \quad (10.2.1)$$

Безразмерный коэффициент k_1 зависит от способа усреднения и приближенно может быть принят равным $k_1 = 0,4$ (подробнее см. § 4 гл. 10).

В соответствии с п. б) рассматриваем идеальный газ, учитывая также давление равновесного излучения:

$$P = \frac{RT\rho}{\mu} + \frac{\sigma T^4}{3}. \quad (10.2.2)$$

Условие равновесия дает

$$\frac{RT\rho}{\mu} + \frac{\sigma T^4}{3} = k_1 G M^{2/3} \rho^{4/3}, \quad (10.2.3)$$

$$\frac{R}{\mu} \left(\frac{T}{\rho^{1/3}}\right) + \frac{\sigma}{3} \left(\frac{T}{\rho^{1/3}}\right)^4 = k_1 G M^{2/3}. \quad (10.2.4)$$

Получается замечательный результат, принадлежащий Эддингтону: масса M связана однозначно с параметром $T/\rho^{1/3}$. Но от этого же параметра зависит отношение давления излучения к давлению плазмы (при постоянных μ — молекулярном весе и σ — коэффициенте в выражении $E = \sigma T^4$). Приравняем эти два давления,

$$\frac{RT\rho}{\mu} = \frac{\sigma T^4}{3},$$

и найдем соответствующую массу звезды:

$$M' = \left[\frac{2}{k_1 G} \frac{R}{\mu} \frac{T}{\rho^{1/3}} \right]^{3/2} \approx \frac{50 M_\odot}{\mu^2},$$

где μ — доля массы протона, приходящаяся на одну свободную

*) В точной теории, конечно, линия статического решения с $T=0$ и линия границы статических решений не могут иметь общих точек, но эта точность сейчас несущественна.

частицу. Для водорода $\mu = 1/2$, $M' = 200M_{\odot}$; для железа $\mu = 2$, $M' = 12M_{\odot}$.

В плоскости ρ , M можно провести горизонтальную линию $M = M'$, отделяющую нижнюю часть, где преобладает давление плазмы — идеального газа из электронов и ядер, от верхней области $M > M'$, где преобладает давление излучения. В этих областях закономерности различны, например, по-разному идут изотермы (линий $T = \text{const}$) и адиабаты (линий постоянной энтропии $S = \text{const}$).

Следующий важнейший момент связан с устойчивостью механического равновесия. Отнюдь не всякое решение, соответствующее точке в допустимой области плоскости ρ , M , является устойчивым. Как было показано в § 2 гл. 10, на кривой $M = M(\rho, S = \text{const})$ устойчивы отрезки с положительной производной, $\left. \frac{\partial M}{\partial \rho} \right|_S > 0$, и неустойчивы те части кривой, где $\left. \frac{\partial M}{\partial \rho} \right|_S < 0$. Поскольку при $T = 0$ также и $S = 0$, легко определим, что на нижней кривой чередуются две устойчивые и две неустойчивые области. При повышении температуры (а следовательно, и M при фиксированном ρ) вторая устойчивая область II вскоре исчезает (см. рис. 34).

В области, где вырождение не играет роли, но $M < M'$, равновесие идеального одноатомного газа устойчиво вплоть до такой температуры, при которой наступают ядерные реакции, поглощающие энергию. Наоборот, при $M > M'$ газ, давление которого в основном определяется излучением, имеет малый запас устойчивости. Даже малые поправки на ОТО, а также рождение пар e^+ , e^- нарушает устойчивость равновесия. Этим объясняется резкий изгиб границы области устойчивости вблизи горизонтали $M = M'$. В целом (не в масштабе) расположение областей показано на рис. 34.

Область неустойчивых решений заштрихована. Обоснованию всей этой картины и расчету границ областей посвящены следующие ниже параграфы.

Ясно, что неустойчивые решения не реализуются в природе. В устойчивом решении малое возмущение вызывает колебания вокруг этого устойчивого решения (затухающие вследствие диссипации энергии, если нет процессов, возбуждающих колебания). Неустойчивое решение отличается тем, что малые возмущения экспоненциально (поскольку теория линейна) нарастают с течением времени. При этом малое сжатие вызывает увеличение силы тяжести, превышающее увеличение давления, и сжатие нарастает. Но точно так же малое расширение вызывает уменьшение силы тяжести и дальнейшее экспоненциальное нарастание расширения.

Однако в ходе эволюции звезда не попадает сразу в глубь области неустойчивости. Очевидно, что звезда возникает как устойчивый объект, и эволюция начинается в области устойчивости. Прежде чем попасть в область неустойчивости, звезда должна пересечь границу этих областей. Можно показать (см. об этом далее), что на границе устойчивости линейной теории недостаточно, и всегда возникает именно катастрофическое сжатие, а не расширение, которое вернуло бы звезду в устойчивое состояние.

Сделаем еще одно существенное замечание. Вдали от границы потери устойчивости, как мы видели в § 1 гл. 10, скорость изменения энтропии звезды много меньше, чем скорость установления гидродинамического равновесия. На границе потери устойчивости эти скорости сравниваются, поэтому в области устойчивости при подходе к ее границе надо, строго говоря, применять уравнения гидродинамики для расчета эволюции (конечно, лишь в непосредственной близости к границе).

Уже одного взгляда на рис. 34 достаточно, чтобы почувствовать, какое значение имеет для теории эволюции звезды понятие механической неустойчивости. Перейдем теперь к более детальному описанию нарисованной выше картины.

§ 3. Энергетический подход к теории равновесия звезды, состоящей из вещества с γ , близким к $4/3$

Исследование зависимости энергии звезды от одного параметра (средней или центральной плотности, или же от радиуса), проведенное в предыдущем параграфе, является грубо приближенным, иллюстративным приемом, ибо в действительности надо рассматривать энергию не как функцию одного параметра, а как функционал, $F[\rho(m)]$. Однако есть весьма важный случай, когда энергетический подход с однопараметрической зависимостью энергии становится асимптотически точным. Это случай вещества, показатель адиабаты которого близок к $\gamma = 4/3$ (индекс политропы $n \cong 3$). Случай этот важен потому, что, как мы видели выше, именно значение $\gamma = 4/3$ является критическим при переходе от устойчивости к неустойчивости. Имеются конкретные примеры, когда уравнение состояния вещества в звездах имеет показатель адиабаты, близкий к $4/3$. Одним из таких примеров являются белые карлики. Нас в дальнейшем будут интересовать именно параметры критических состояний. Поэтому случай $(\gamma - 4/3) \ll 1$ будет исследован особенно подробно, а решение ньютоновского уравнения равновесия для состояния с $\gamma = 4/3$ будет рассматриваться в качестве нулевого приближения.

Для вещества с $\gamma = \text{const}$ по всей звезде ньютоновское уравнение равновесия было проинтегрировано в фундаментальной работе Эмдена (1907). Основные выводы этой работы изложены, например, в книге В. А. Крата (1950). Для каждого $\gamma = \text{const}$ имеется вполне определенная форма распределения плотности в звезде, т. е. определенная зависимость безразмерной плотности (отнесенной к центральной плотности) от безразмерной массы m/M

$$\rho = \rho_c \psi \left(\frac{m}{M} \right).$$

Нас будет интересовать ψ для $\gamma = 4/3$ ($n=3$). Эта функция изображена на рис. 35. Отклонения термодинамического уравнения состояния от соответствующего $n=3$ (т. е. от $P=b(S)\rho^{4/3}$) можно рассматривать как малые поправки.

Сделаем еще одно важное замечание. Эффекты общей теории относительности становятся определяющими, когда гравитационный потенциал ϕ становится порядка c^2 . Иными словами, для этого необходимо, чтобы размер тела R был сравним с r_g . Казалось бы, во всех случаях, когда $R \gg r_g$, эффекты ОТО не могут качественно повлиять на строение небесного тела и его эволюцию. Однако для звезды с $(\gamma - 4/3) \ll 1$, находящейся на границе устойчивого равновесия, это не так. В этом случае достаточно даже малой поправки на ОТО, чтобы нарушить устойчивость равновесия.

По замечанию С. А. Каплайна (1949b) (см. также Каплан, Лупанов (1965); Фаулер (1964a, b); Чандрасекар (1964a, b, 1965); Зельдович, Новиков (1965)) в этом случае уже малые эффекты ОТО приводят к качественным изменениям картины; поэтому эффекты ОТО также можно рассматривать как поправки к ньютоновской теории с $n=3$, взятой в качестве нулевого приближения. Все поправки как на отклонение уравнения состояния, так и на ОТО, вычисляются по этому распределению и поэтому оказываются функциями одного параметра — центральной плотности ρ_c .

Поправки в уравнении состояния и поправки, связанные с ОТО порядка $\alpha = \Delta E_1/E_1 \ll 1$, в принципе вызывают изменение

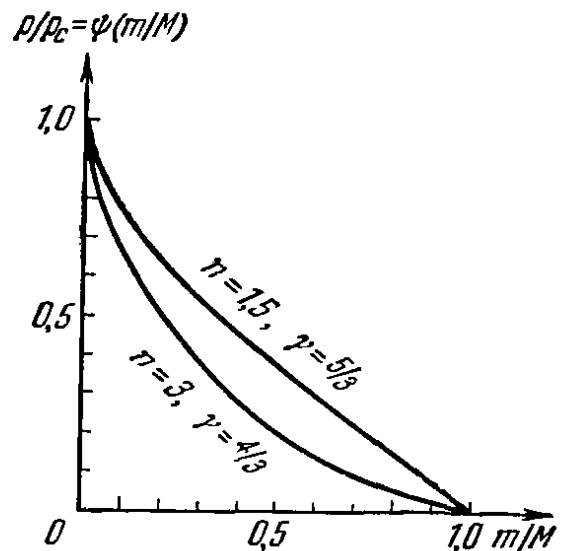


Рис. 35. Функция Эмдена $\rho/\rho_c = \psi(m/M)$ для индекса политропы $n=3$ ($\gamma=4/3$); для сравнения нанесена кривая $n=1,5$ ($\gamma=5/3$).

Асимптотика кривых: $\frac{d\rho}{dm} \rightarrow \infty$

при $\frac{m}{M} \rightarrow 1$.

самой функции ψ того же порядка α ; однако вследствие экстремальных свойств ψ , как решения нулевого приближения, изменение ψ порядка α вызывает изменение энергии порядка α^2 , так как первая вариационная производная полной энергии по функции ψ равна нулю.

Поэтому вычисление поправок с помощью невозмущенной эмденовской функции распределения ψ дает в точности первый (порядка α) член разложения энергии по степеням α .

В этом смысле и можно говорить об асимптотически точной (с ошибкой $\sim \alpha^2$) теории равновесия звезд с $(\gamma - 4/3) \sim \alpha$.

Чем дальше отходить от критического состояния $\gamma = 4/3$, тем количественно менее точными становятся найденные выражения. Однако качественно все выводы однопараметрической теории (с нулевым приближением $\gamma = 4/3$) остаются справедливыми, да и количественные оценки меняются не очень сильно. В качестве иллюстрации на рис. 35 дана функция Эмдена ψ для $\gamma = 5/3$ (уравнение состояния идеального невырожденного одноатомного газа), которая не слишком отличается от ψ для $\gamma = 4/3$.

Как уже подчеркивалось, для наших целей особенно важны критические состояния, а для состояний, далеких от критического, вполне достаточно приближенных оценок. По этой причине в дальнейшем используется однопараметрический метод.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 3

ВЫВОД ТЕОРЕМЫ ВИРИАЛА И ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ С ПОМОЩЬЮ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

Ниже с помощью вариационного принципа будут получены два полезных соотношения:

1) между полной энергией звезды и ее гравитационной энергией (теорема вириала) и

2) между радиусом звезды и ее гравитационной энергией.

Эти соотношения относятся к звезде, состоящей из вещества с политро-

пическим уравнением состояния $P = A\rho^{1+\frac{1}{n}}$; из этого уравнения состояния следует, что энергия единицы массы $E_1 = nA\rho^{1/n} = nR/\rho$ (за нуль принята энергия вещества, охлажденного путем адиабатического расширения до нулевой плотности). Для первого соотношения несущественно, является ли $A = A(S)$ постоянной по звезде, для второго соотношения постоянство A необходимо. Оба соотношения хорошо известны в классической теории равновесия звезд (см. формулы (10.1.11) — (10.1.13)), где они выводятся из дифференциального уравнения равновесия. Вывод этих соотношений из вариационного принципа (ВП) полезен как упражнение на применение ВП, а также и потому, что смысл соотношений предстает в новом свете.

Итак, записываем полную энергию звезды в виде

$$E = \int E_1(m) dm - G \int \frac{m dm}{r} = W + U,$$

где m — масса, расположенная внутри данного слоя, а интегрирование ведется от $m=0$ (центр звезды) до $m=M$ (наружная поверхность, M — полная масса звезды). Смысл обозначений: W — внутренняя энергия всего вещества, U — гравитационная энергия. При этом

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr.$$

Распределение плотности полностью определено, если задана функция $r(m)$, т. е. задано расстояние от центра сферы, заключающей массу вещества m . В терминах гидродинамики r есть эйлерова координата, m — разновидность лагранжевой координаты частицы. Зная $r(m)$, найдем

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2} \left(\frac{dr}{dm} \right)^{-1}.$$

Удельная энергия вещества зависит от плотности.

Согласно вариационному принципу в состоянии равновесия E имеет минимум*) при данной массе M . Следовательно, при любом изменении $r(m)$ первая производная E равна нулю.

Рассмотрим гомологическое преобразование, т. е. подобное $r(m) = ar_0(m)$ расширение ($a > 1$) или сжатие ($a < 1$) звезды, и найдем

$$\frac{dE}{da} \Big|_{a=1} = \int \frac{dE_1}{d\rho} (-3\rho) dm + G \int \frac{m dm}{r_0} = 0.$$

При $E_1 = A_1 \rho^{1/n}$ получим

$$\begin{aligned} \frac{dE}{da} \Big|_{a=1} &= -\frac{3}{n} W - U = 0; \quad W = -\frac{n}{3} U, \\ E = W + U &= \frac{3-n}{3} U. \end{aligned}$$

При произвольном уравнении состояния

$$\frac{dE_1}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{dE_1}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \frac{P}{\rho^2},$$

$$\int \frac{dE_1}{d\rho} (-3\rho) dm = -3 \int P \frac{dm}{\rho} = -3 \int P dV$$

и мы получаем

$$U = -3 \int P dV.$$

Теперь рассмотрим звезды, в которых $E_1 = nA\rho^{1/n}$ и A постоянно. Из размерности очевидно, что распределение плотности в таких звездах при различной массе подобно (распределение может зависеть только от безразмерной величины n ; из A и G нельзя построить безразмерной комбинации). Поэтому

$$E = ManA\rho_c^{1/n} - Gb \frac{M^2}{\left(\frac{M}{\rho_c}\right)^{1/3}} = \alpha M\rho_c^{1/n} - \beta M^{5/3} \rho_c^{1/3}.$$

*) Минимум соответствует устойчивому равновесию. Для дальнейшего достаточно, чтобы E было экстремально.

Из условия равновесия находим

$$\frac{dE}{d\rho_c} = \frac{1}{n} \alpha M \rho_c^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{3} \beta M^{\frac{5}{3}} \rho_c^{\frac{1}{3}-1} = 0,$$

$$\rho_c = \left(\frac{n}{3} \frac{\beta}{\alpha} M^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3n}{3-n}} = \gamma M^{\frac{2n}{3-n}}.$$

Заметим, что при $n < 3$, т. е. для устойчивого равновесия, с ростом M всегда увеличивается плотность в центре ρ_c . Для радиуса звезды имеем $R \sim \left(\frac{M}{\rho} \right)^{1/3} \sim M^{\frac{3(1-n)}{3-n}}$. Следовательно, при $1 < n < 3$ радиус уменьшается с увеличением массы, для $n=1$, $P=A\rho^2$ радиус не зависит от массы, только для $n < 1$ радиус растет.

Подставляем выражение ρ_c в формулу для E :

$$E = \delta \cdot M^{\frac{5-n}{3-n}}.$$

Из предыдущей теоремы вириала мы знаем, что

$$W = -\frac{n}{3-n} E, \quad U = \frac{3}{3-n} E;$$

при этом очевидно, что $E < 0$ и $\delta < 0$.

Теперь рассмотрим два способа увеличения массы звезды: 1) от равновесной конфигурации с массой M перейдем также к равновесной конфигурации с массой $M+dM$. Очевидно, что

$$E(M+dM) - E(M) = dE = \frac{dE}{dM} dM = \frac{5-n}{3-n} \frac{E}{M} dM;$$

2) к равновесной конфигурации с массой M прибавим массу dM , поместив ее на поверхности звезды, где давление равно нулю. Внутренняя энергия прибавленной массы равна нулю (так как $P=0$), а гравитационная энергия, очевидно, будет $-\frac{GM}{R} dM$. Следовательно,

$$dE = -\frac{GM}{R} dM.$$

Теперь в силу вариационного принципа утверждаем, что оба выражения dE совпадают: во втором способе мы получили распределение плотности, отличающееся от равновесного при массе $M+dM$, так как прибавка лежит на поверхности. Однако в силу того, что равновесное распределение экстремально, отклонение от равновесного распределения может вызвать изменение в E лишь второго порядка малости, т. е. пропорциональное $(dM)^2$ в данном случае, когда добавка массы dM мала.

Итак (используя также выражение для U), получим

$$\frac{5-n}{3-n} \frac{E}{M} = -\frac{GM}{R}, \quad U = \frac{3}{3-n} E = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}.$$

Заметим, что последнее соотношение остается справедливым и при $n=3$, тогда как в предыдущем появляется неопределенность. Из приведенного выражения немедленно следует, что решение уравнения равновесия при $n=5$

является вырожденным, $R \rightarrow \infty$. Практического значения это не имеет, так как уже при $n > 3$ формальные решения уравнения равновесия, удовлетворяющие всем условиям, оказываются неустойчивыми.

Наконец, ясно, что в случае изэнтропического решения с произвольным управлением состояния, а также и при замене ньютоновской теории на ОТО остается в силе связь между производной энергии по числу частиц N и гравитационным потенциалом на поверхности звезды (см. § 8 гл. 10). Однако в силу того, что $E(M)$ или $E(N)$ не имеет теперь простого аналитического выражения, такие простые изящные формулы из этой связи не получаются.

§ 4. Теория холодных белых карликов

а. *Ньютоновская теория.* Рассмотрим теперь состояние звезды в самом конце эволюции, когда ядерные реакции уже полностью прошли и звезда остыла ($S=0$). Рассчитаем массу холодной звезды как функцию центральной плотности. Перепишем формулу равновесия (10.1.3) в виде

$$M = \frac{b \bar{P}^{3/2}}{G^{3/2} \bar{\rho}^2}, \quad (10.4.1)$$

где численное значение безразмерной константы b зависит от способа усреднения плотности (и связанного с ней давления) по звезде. Удобнее переписать (10.4.1) через центральные значения плотности и температуры:

$$M = \frac{b_1 P_c^{3/2}}{G^{3/2} \rho_c^2}. \quad (10.4.2)$$

Если уравнение состояния вещества во всей звезде определяется выражением $P = A \rho^\gamma$, $A = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, то b_1 можно вычислить, воспользовавшись функцией Эмдена (см. § 3 гл. 10). Для $\gamma = 5/3$ имеем $b_1 = 3,0$, для $\gamma = 4/3$, $b_1 = 4,55$.

При $\rho \ll 10^6 \text{ г/см}^3$ справедливо уравнение состояния для вещества с давлением, определяемым нерелятивистским вырожденным электронным газом (см. § 2 гл. 6) и $\gamma = 5/3$. Подставляя это уравнение состояния в (10.4.2) и используя $b_1 = 3,0$, находим

$$M = 2,8 \cdot 10^{-3} \mu_e^{-5/2} \rho_c^{1/2} M_\odot.$$

Напомним, что μ_e — доля массы нуклона, приходящаяся на один электрон.

С увеличением ρ газ электронов постепенно становится релятивистским. Не будем пока учитывать нейтронизации вещества (см. гл. 6) и эффекты ОТО. Тогда при $\rho_c \gg 10^6 \text{ г/см}^3$ вместо уравнения состояния невырожденного электронного газа

надо использовать уравнение состояния для вещества, давление которого определяется ультрарелятивистскими вырожденными электронами, а плотность — атомными ядрами (см. гл. 6):

$$P = 1,23 \cdot 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}. \quad (10.4.3)$$

При этом атомные ядра еще не вырождены и в целом $P \ll \ll \rho c^2$ так, что применима ньютоновская теория. Подставляя это выражение в (10.4.1), используя $b_1 = 4,55$, получим

$$M_{\text{кр}} = \frac{5,75 M_{\odot}}{\mu_e^2}.$$

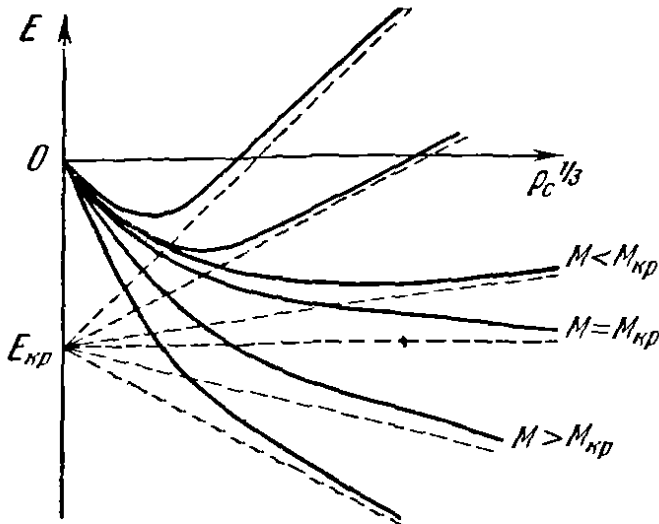


Рис. 36. Энергетические кривые для звезды из холодного идеального газа с давлением вырожденных электронов без учета ОТО и нейтронизации вещества.

$\rho_c^{1/3}$, тогда при больших ρ_c линии становятся прямыми. При $M > M_{\text{кр}}$ нет равновесных решений, удовлетворяющих условию $\frac{\partial E}{\partial \rho_c} = 0$. При $M < M_{\text{кр}}$ есть одно решение. При $M \rightarrow M_{\text{кр}}$ соответствующее равновесное значение $\rho_c \rightarrow \infty$, так как кривая $E(\rho_c)$ при $M = M_{\text{кр}}$ имеет асимптотой горизонталь. Энергия звезды при этом стремится к значению $E_{\text{кр}}$, равному $-m_e c^2$ в расчете на один электрон (вывод см. в приложении 1)*). Это составляет $-\frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e} \text{ эрг/г}$, где μ_e — атомный вес на один электрон: $\mu_e = A/Z$.

Однако в действительности есть две причины, которые при больших плотностях $\rho \approx 10^9 \div 10^{10} \text{ г/см}^3$ изменяют нарисованную выше картину. Это процессы нейтронизации вещества и влияние эффектов ОТО. Мы начнем с рассмотрения эффектов ОТО.

*) Существование конечной энергии звезды $E_{\text{кр}}$ при $\rho_c \rightarrow \infty$ было отмечено Эмин-Заде (1959) и Саведовым (1963).

Таким образом, для холодного вещества, находящегося в равновесии, в ньютоновской теории существует верхний предел масс (чандрасекаровский предел), равный $\frac{5,75}{\mu_e^2} M_{\odot}$ и до-

стигаемый в пределе при $\rho = \infty$ (когда γ точно равно $4/3$ по всей звезде). Общая картина в энергетическом подходе изображена на рис. 36. Удобно на оси абсцисс откладывать

б. Влияние эффектов ОТО. Белый карлик при большой плотности имеет очень малый запас устойчивости ($\gamma - \frac{4}{3} \ll 1$). Поэтому, как уже отмечалось в § 3, достаточно даже небольших поправок на ОТО, чтобы нарушить устойчивость, когда радиус звезды много больше шварцшильдовского. Найдем то критическое значение центральной плотности, при котором происходит потеря устойчивости за счет ОТО. Введение поправки на ОТО требует внимательного рассмотрения самого определения «поправки при данном распределении плотности», поскольку нужно учитывать и неевклидовость пространства и различие между плотностью массы покоя и плотностью, включающей энергию, деленную на c^2 .

Довольно длинные вычисления (см. приложение II) приводят к следующему виду поправки в энергию звезды, связанной с эффектами ОТО:

$$\Delta E_{\text{ОТО}} = -0,93 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3}. \quad (10.4.4)$$

По порядку величины $\Delta E_{\text{ОТО}}$ равна произведению гравитационной энергии звезды $\sim (-GM^2/R)$ на отношение ее гравитационного радиуса к фактическому радиусу:

$$\Delta E_{\text{ОТО}} \approx \left(-\frac{GM^2}{R}\right) \left(\frac{r_g}{R}\right). \quad (10.4.5)$$

С учетом этой поправки кривые приобретают вид, показанный на рис. 37. Точки экстремумов E , т. е. статические решения, удовлетворяющие уравнениям равновесия, отмечены жирными вертикальными черточками. На кривой, соответствующей $M''_{\text{кр}}$, максимум и минимум сливаются и дают перегиб при $\rho_c = \rho_c''$ (двойная черточка). Для ρ_c'' получается следующее выражение:

$$\rho_c'' = 3,75 \frac{m_p \mu_e}{m_e} (\rho_0 \mu_e), \quad (10.4.6)$$

где m_p — масса протона, $\mu_e = A/Z$ — атомный вес на один электрон, m_e — масса электрона, так что $m_p \mu_e / m_e$ есть отношение полной массы вещества к массе покоя электронов. Величина $\rho_0 \mu_e$

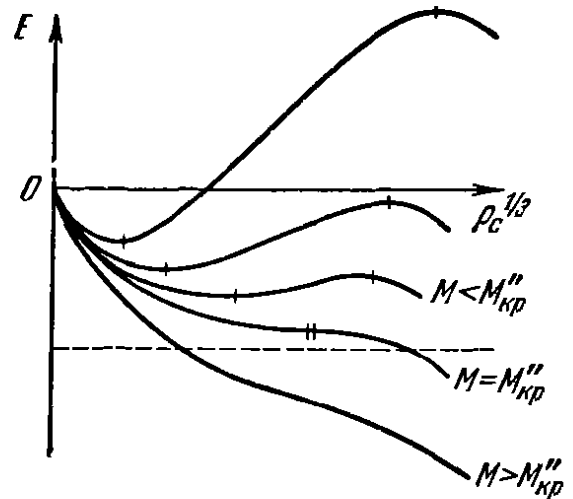


Рис. 37. Изменение энергетических кривых рис. 36 за счет эффектов ОТО или за счет нейтронизации вещества. Пунктиром показана линия $E = E_{\text{кр}}$, отмеченная на рис. 36.

есть плотность, при которой импульс электронов на границе Ферми достигает значения $m_e c$, т. е. происходит переход от нерелятивистского к релятивистскому электронному газу; численно $\rho_0 = 0,985 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$. Таким образом, при $\mu_e = 56/26 = 2,2$ (для железа) $\rho_c'' = 3,3 \cdot 10^{10}$, $E_F = 25m_e c^2 = 12,5 \text{ Мэв}$, соответствующий

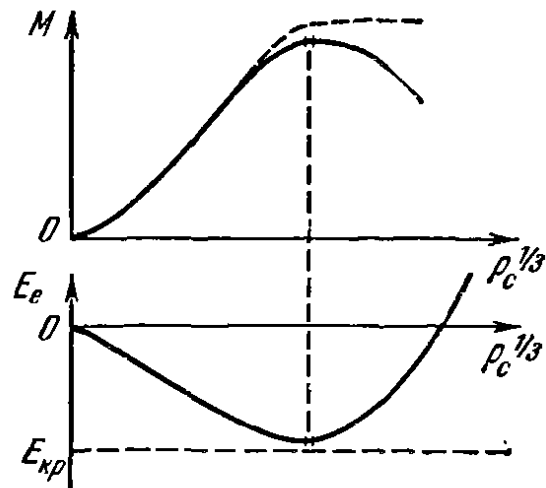


Рис. 38. Зависимость энергии холодной равновесной звезды и ее массы от центральной плотности.

Пунктиром в верхней части рисунка показан ход кривой $M = M(\rho_c)$ при учете только давления вырожденного электронного газа без учета нейтронизации вещества и эффектов ОТО (кривая Чандрасекара). При $\rho_c \rightarrow \infty$ для этой кривой масса стремится к чандрасекаровскому пределу. Этому пределу соответствует энергия, показанная пунктиром на нижнем рисунке.

Максимум $M(\rho_c)$ достигается при том же $\rho_c = \rho_c''$, при котором имеет место перегиб $M(\rho_c'') = M''_{кр}$. Максимум разделяет области устойчивости и неустойчивости.

Чандрасекар в недавних работах придает принципиальное значение существованию максимальной ρ_c'' и соответствующего минимального $R'' \sim 1000 \text{ км}$ белого карлика; он считает этот вывод единственным и однозначным подтверждением ОТО вне области слабых полей. Надо отметить, однако, что паллиативная теория с ньютоновским тяготением в плоском пространстве, но с учетом веса энергии, привела бы качественно к тому же результату, отличающемуся незначительно и количественно. Тот факт, что энергия имеет вес, доказан Этвешем и Дикке.

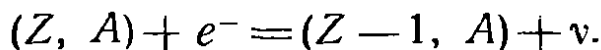
радиус звезды $R \approx 1000 \text{ км}$ (тогда как шварцшильдовский гравитационный радиус звезды $3,6 \text{ км}$), т. е. потеря устойчивости происходит при $R \gg r_g$.

На рис. 38 изображено геометрическое место экстремумов, т. е. энергия равновесных конфигураций в зависимости от плотности. На этом рисунке различные точки кривой соответствуют различным массам звезды с различным числом нуклонов. Минимум E_e (e — equilibrium) совпадает с горизонтальным перегибом $E(\rho_c, M)$.

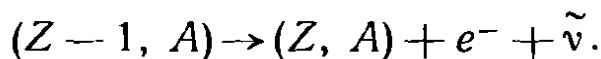
На том же рис. 38 в верхней его части построена кривая массы звезды; по оси ординат отложена масса, для которой равновесие достигается при значении центральной плотности, отложенном на абсциссе. В соответствии с тем, что на рис. 37 при одном значении M кривая может иметь два экстремума, кривая $M(\rho_c)$ проходит через максимум, благодаря чему горизонталь $M = \text{const}$ пересекает ее дважды.

С другой стороны, что более важно, еще до достижения ρ_c'' возникает процесс нейтронизации — превращения ядер под действием быстрых нейтронов, находящихся в импульсном пространстве на краю ферми-распределения (см. § 5 гл. 6). Поэтому и без учета ОТО есть другая причина, ограничивающая увеличение ρ_c и уменьшение R при подходе к критической массе.

в. *Влияние нейтронизации вещества.* Помимо эффектов ОТО, причиной, ограничивающей максимальную плотность холодных белых карликов, является начинающийся при некоторой плотности обратный β -процесс между стабильными ядрами и электронами, находящимися на краю ферми-распределения (см. § 5 гл. 6):



Нейтрино свободно уходят из звезды. Изолированное ядро $(Z - 1, A)$ неустойчиво, оно испытывает β -распад:



Однако, как подробно рассмотрено в § 5 гл. 6, в звезде при рассматриваемой плотности этот процесс идти не может, так как ядра погружены в вырожденный электронный газ и все ячейки фазового пространства, соответствующие импульсу рождающегося электрона, уже заняты; электрон породиться не может.

Обратный β -процесс ведет к уменьшению общего числа электронов на грамм вещества и увеличению числа нейтронов в ядрах. Возможность образования нейтронных конфигураций была указана в работах Бааде и Цвикки (1934), Хунда (1936), Стерна (1933) и рассчитана Л. Д. Ландау (1938).

Как повлияет на строение звезды фазовый переход, связанный с нейтронизацией? При рассмотрении моделей холодных звезд со все большей центральной плотностью ρ_c , после достижения ρ_c критического значения начала нейтронизации в центре образуется ядрышко — сфера с веществом из ядер (Z_2, A_2) , в то время как вся остальная звезда состоит из ядер (Z_1, A_1) . Давление в ядре меньше, чем было бы, если бы не произошел фазовый переход. Таким образом, эффективная γ для звезды уменьшается из-за фазового перехода. Достаточно ли это уменьшение, чтобы сделать звезду неустойчивой? В работе Рамзая (1950) (в связи с теорией планет) показано, что на энергетических кривых при $\rho_c = \rho_{кр}$ сразу же появится излом, такой что нарушается устойчивость звезды при $\rho_{кр}$, если при фазовом переходе скачок плотности достаточно велик:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{A_2 Z_2}{A_1 Z_1} > 1.5.$$

Если же скачок меньше (что имеет место, например, для реакции $\text{Fe} \rightarrow \text{Cr}$), то с повышением плотности звезда еще обладает устойчивостью. Однако с повышением плотности ρ_c растет размер ядра с другой фазой, кроме того, должна произойти дальнейшая цепочка обратных β -процессов между электронами и ядрами, что неизбежно приведет к загибу энергетических кривых вниз, т. е. к потере устойчивости. См. Сендов (1967).

В таблице IX дается критическая плотность начала нейтронизации для ряда элементов и критические значения, определяемые эффектами ОТО и максимальной центральной плотностью звезды, состоящей целиком из данного химического элемента (формула (10.4.6)). Как правило, $\rho_{\text{нейтр}} < \rho_{\text{ото}}$.

Таблица IX

Сравнение критических плотностей, определяемых эффектами нейтронизации и эффектами ОТО для звезд из разных химических элементов

Элемент	Потенциал нейтронизации, Мэв	Критическая плотность нейтронизации, $\rho/10^9 \text{ г/см}^3$	Максимальная центральная плотность за счет ОТО, $\rho/10^9 \text{ г/см}^3$
${}_{26}\text{Fe}^{56} \rightarrow {}_{25}\text{Mn}^{56}$	3,7	1,15	31,3
${}_{16}\text{S}^{32} \rightarrow {}_{15}\text{P}^{32}$	1,7	0,145	27
${}_{14}\text{Si}^{28} \rightarrow {}_{13}\text{Al}^{28}$	4,6	1,92	27
${}_{12}\text{Mg}^{24} \rightarrow {}_{11}\text{Na}^{24}$	5,5	3,15	27
${}_{10}\text{Ne}^{20} \rightarrow {}_9\text{F}^{20}$	7,03	6,2	27
${}_8\text{O}^{16} \rightarrow {}_7\text{N}^{16}$	10,4	19	27
${}_6\text{C}^{12} \rightarrow {}_5\text{B}^{12}$	13,37	39	27
${}_2\text{He}^4 \rightarrow {}_1\text{H}^3 + {}_0\text{n}^1$	20,6	132	27
${}_2\text{He}^3 \rightarrow {}_1\text{H}^3$	0,018	$2,8 \cdot 10^{-5}$	15,2

Начало нейтронизации в центре звезды, как мы видели, еще не означает потерю устойчивости, которая наступает при несколько больших плотностях. Тем не менее, устойчивость из-за нейтронизации теряется, по-видимому, при плотностях, лишь немногим превышающих начальное значение, данное в табл. IX. Точно рассчитать это довольно сложно из-за того, что нужно сразу рассматривать несколько реакций. По-видимому, предел устойчивости белых карликов сильнее зависит от нейтронизации, а не от эффектов ОТО. Именно нейтронизация вызывает загиб кривых $E(\rho_c)$ вниз, и она же является причиной перехода от рис. 36 к рис. 37. Исключения представляют легкие ядра и особенно He^4 . Однако легкие ядра в звездах при большой плотности существовать не будут. Это связано с тем, что подобные

плотности достигаются только на конечных стадиях эволюции, когда легкие ядра в процессе термоядерной реакции, идущей на более ранних этапах эволюции, уже превратились в тяжелые. По расчетам Эпика (1957) (см. Хаяши (1966)) белые карлики с $M < 0,5 M_{\odot}$ должны состоять главным образом из элементов среднего атомного веса ($A \approx 24$).

Неопределенность точного значения $\rho_{кр}$, а также химического состава мало влияет на максимальное значение M_{max} , соответствующее $\rho_{кр}$, ибо кривая $M = M(\rho_c)$ ньютоновской теории, построенная без всяких поправок, при значениях $\rho \approx 10^9 \div 10^{10} \text{ г/см}^3$ уже выходят на свое асимптотическое значение, равное чандрасекаровскому пределу.

Максимальная масса согласно работам Уилера (1962); Хамада и Сальпетера (1961); Г. С. Саакяна, Ю. Л. Вартаняна (1964) равна примерно $1,2 M_{\odot}$ (рис. 39). Этот результат получен путем численного интегрирования

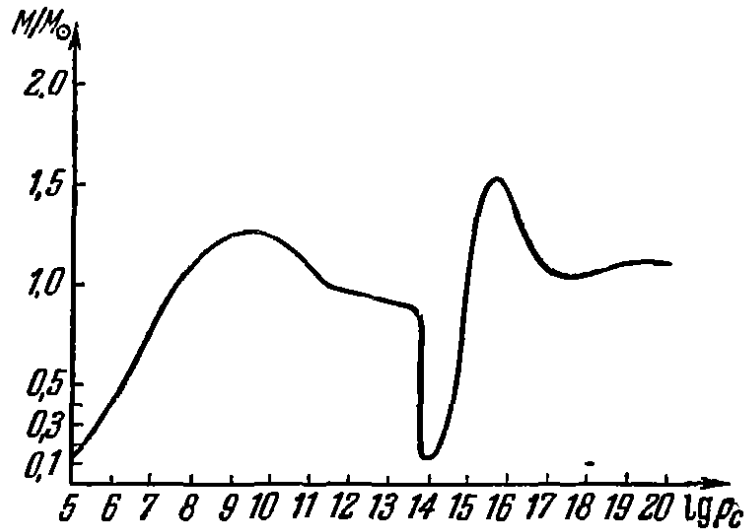


Рис. 39. Зависимость массы холодной звезды от центральной плотности с учетом взаимодействия барионов по данным Саакяна и Вартаняна.

уравнения равновесия (10.1.2), с учетом изменения уравнения состояния при переходе от плотных недр звезды к менее плотной ее поверхности. До сих пор мы не учитывали вращение звезды. Вращение несущественно меняет критическую массу и плотность белого карлика; см. Крат, 1950.

На ниспадающей ветви $M = M(\rho_c)$ равновесные решения, соответствующие максимумам энергетических кривых, неустойчивы. Проследим за дальнейшим изменением M с повышением ρ_c .

В гл. 6 показано, что с повышением плотности в веществе появляются свободные нейтроны. При $\rho > 10^{12} \text{ г/см}^3$ давление (так же как и плотность) в основном определяется вырожденным нейтронным газом. Если бы нейтроны не взаимодействовали между собой, то этот газ был бы идеальным и, пока газ еще нерелятивистский, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$ (и всегда $\gamma > 4/3$). Однако известно, что между нейтронами существуют ядерные силы притяжения, и хотя эти силы недостаточны для образования ядер, состоящих из нейтронов, все же они вносят отрицательный вклад в энергию и γ по-прежнему меньше $4/3$.

Равновесные состояния неустойчивы и кривая $M = M(\rho)$ продолжает идти вниз (см. рис. 39).

На малых расстояниях между барионами силы притяжения должны смениться силами отталкивания, которые вносят положительный вклад в давление и поэтому при $\rho \sim 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$, эффективная для всей звезды γ вновь становится более $4/3$.

Таким образом, минимального значения масса M достигает при $\rho_c \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$. Можно оценить это M_{\min} , найдя давление при $\rho_c = 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ по формуле (6.6.1) и подставив это значение в (10.4.1) с $b \approx 3$:

$$M_{\min} \approx 0,05 \cdot M_{\odot}.$$

Напоминаем, что это только порядковая оценка, ибо в действительности звезда не может целиком состоять из нейтронов. В наружных областях давление недостаточно для существования стабильных нейтронов и внешняя оболочка состоит из ядер и электронов. За деталями расчетов отсылаем к работе Г. С. Саакяна и Ю. Л. Вартаняна (1964).

Сделаем замечание о равновесных решениях с положительной энергией звезды. На рис. 37 они соответствуют максимумам в области $E > 0$. Их появление связано с тем, что учет нейтронизации вещества привел к появлению экстремума (максимума) там, где его раньше не было, но энергия, конечно, и без поправки была положительной. Такие решения, очевидно, неустойчивы и энергетически возможно полное рассеивание вещества, находившегося в состоянии звезды с положительной энергией, в пространство.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Выведем значение энергии звезды, давление в которой определяется релятивистски вырожденным электронным газом при $\rho \rightarrow \infty$.

Выпишем формулу (6.2.11) для энергии:

$$E_e = \bar{E} - E_0 = m_e c^2 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/3} - 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \right], \quad \rho_0 = \mu_e \cdot 10^6.$$

Переходя к энергии на грамм вещества, получаем выражение

$$E_1 = \frac{E_e}{m_p \mu_e} = \frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/3} - 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \right].$$

После подстановки этого выражения в уравнение равновесия (см. приложение к § 9 гл. 10) и переходя к пределу при $\rho \rightarrow \infty$, $\gamma = 4/3$, получаем, что последнее слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю, первое сокращается со слагаемым гравитационной энергии звезды, остаток дает для энергии звезды на единицу массы:

$$E_2 = \frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e} \text{ эрг/г.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Поправки на ОТО. Дадим вначале выражения поправки в энергии данной произвольной конфигурации вещества, не соответствующей, вообще говоря, равновесию. Вещество считаем в данный момент покоящимся, т. е. мгновенная скорость равна нулю, однако мгновенное ускорение, вообще говоря, не равно нулю, поскольку нет равновесия.

Следует учитывать зависимость плотности массы от энергии. Плотность массы покоя обозначим ρ_0 , плотность, включающую энергию, ρ , $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{E_1}{c^2}\right)$, где E_1 удельная энергия (сверх массы покоя) на единицу массы покоя.

Следует учитывать неевклидовость пространства (см. § 3 гл. 3):

$$dV = e^{\lambda/2} 4\pi r^2 dr, \quad V = 4\pi \int_0^r e^{\lambda/2} r^2 dr > \frac{4}{3} \pi r^3,$$

где под r понимается «координатный» радиус такой, что длина большого круга есть $2\pi r$, поверхность сферы $4\pi r^2$. Инвариантной характеристикой конфигурации, занятой данным общим числом барионов, является функция $\rho_0(V)$, где V — текущий объем. Равновесие соответствует экстремуму наблюдаемой массы звезды

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr$$

при данной массе покоя (т. е. при данном числе барионов)

$$M_0 = \int_0^R \rho_0(V) dV$$

и при данной энтропии, которой определяется зависимость

$$E_1 = E_1(S, \rho_0).$$

Отсчитывая энергию от массы покоя звезды, получаем

$$E = c^2 (M - M_0) = c^2 \int_0^R \left(\rho e^{-\frac{\lambda}{2}} - \rho_0 \right) dV.$$

Это выражение необходимо сравнить с ньютоновским

$$E_H = \int E_1 \rho_0 dV - G \int \frac{m' dm'}{r'},$$

где m' — текущая «ньютоновская» масса (вычисленная без поправок на зависимость массы от энергии), r' — «ньютоновский» или евклидов радиус

$$dm' = \rho_0 dV; \quad m' = \int_0^V \rho_0 dV; \quad r' = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V}.$$

Поправкой на ОТО называем разность $\Delta E = E - E_N$ и вычисляем первый исчезающий член в разложении по степеням G . Очевидно, что безразмерным параметром является

$$\frac{r_g}{R} \sim \frac{GM}{Rc^2} \sim GM^{2/3} \rho_c^{1/3} c^{-2}.$$

Отношение $\frac{E_1^2}{c^2} \sim \frac{P}{\rho c^2}$ того же порядка, что и r_g/R , члены первого порядка по G уже учтены в ньютоновском приближении.

Используем единственное соотношение, не требующее равновесия:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm}{rc^2}, \quad e^{-\frac{\lambda}{2}} = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{Gm}{rc^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Gm}{rc^2}\right)^2.$$

С иужий точностью получим

$$\Delta E = \int dV \left[-E_1 \rho_0 \frac{Gm}{c^2 r} - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{G^2 m^2}{c^2 r^2} + \rho_0 G \left(\frac{m'}{r'} - \frac{m}{r} \right) \right], \quad (10.4.1п)$$

$$\frac{m'}{r'} - \frac{m}{r} = \frac{m' - m}{r'} - \frac{m(r' - r)}{rr'}, \quad (10.4.2п)$$

$$m' - m = -\frac{1}{c^2} \int E_1 \rho_0 dV + \frac{G}{c^2} \int \frac{\rho_0 m}{r} dV, \quad (10.4.3п)$$

$$r' - r = \frac{G}{r^2 c^2} \int mr dr. \quad (10.4.4п)$$

Используя эти соотношения, окончательно получим поправку в виде суммы пяти интегралов, в которых можно везде отождествлять плотность, объем, радиус с соответствующими ньютоново-евклидовыми величинами, а ошибка от этого будет высшего порядка малости:

$$\Delta E = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

$$I_1 = -\frac{G}{c^2} \int E_1 \frac{m dm}{r}, \quad I_2 = -\frac{1}{2} \frac{G^2}{c^2} \int \frac{m^2 dm}{r^2},$$

$$I_3 = -\frac{G}{c^2} \int \left(\int E_1 dm \right) \frac{1}{r} dm, \quad I_4 = +\frac{G^2}{c^2} \int \left(\int \frac{m dm}{r} \right) \frac{dm}{r},$$

$$I_5 = -\frac{G^5}{c^2} \int \left(\int mr dr \right) \frac{m dm}{r^4}.$$

Интегралы берутся по всей массе звезды, а внутренние интегралы в I_3 , I_4 и I_5 от центра до текущего m или r . Они расположены в том порядке, который естественно следует из формул (10.4.1п)–(10.4.4п). Это выражение для ΔE существенно упрощается, применительно к равновесному распределению газа с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$, т. е. при учете

$$E_1 = \frac{3P}{\rho}, \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}.$$

В этом случае, после нескольких интегрирований по частям, получим $I_3 + I_4 = -2/3 I_1 + 2I_2$, $I_5 = 1/3 I_1$ и окончательно $\Delta E = 2/3 I_1 + 3I_2$. Это выражение в точ-

ности совпадает со взятой с обратным знаком поправкой Фаулера (1964), полученной им в теории сверхмассивных звезд

$$\Delta E = -\Delta E_e.$$

Используя теперь функцию Эмдена с $n=3$ для вычисления интегралов, получаем окончательно

$$\Delta E_{\text{OTO}} = -0,93 \frac{G^2 M^{7/3} \rho_c^{2/3}}{c^2}.$$

§ 5. Нейтронные звезды

При высоких плотностях порядка ядерных между барионами возникают мощные силы отталкивания, которые ведут к тому, что кривые $E(\rho_c, M)$ загибаются вверх (рис. 40). На кривых с M больше $M_{\min} = 0,05 M_{\odot}$ появляются вторичные минимумы, которые отвечают устойчивым звездным конфигурациям. Такие звезды обычно называют нейтронными, или гиперонными. Соответствующая кривая $M = M(\rho_c)$ равновесных звезд показана на рис. 39. Кривые $E(\rho_c, M)$, имеющие вторичные минимумы, ограничены сверху кривой с минимальной массой $M_{\min} = 0,05 M_{\odot}$. Для меньших масс равновесных конфигураций при большой плотности не существует.

Расчеты с приближенным уравнением состояния показывают, что для малых масс вторичные минимумы лежат в области положительной энергии (см. работу Г. С. Бисноватого-Когана и Я. Б. Зельдовича (1966)). Они соответствуют устойчивым состояниям. В предыдущем параграфе уже обращалось внимание на то, что равновесные состояния (неустойчивые) с положительной энергией возникают для звезд из неидеального газа практически без эффектов общей теории относительности, и в этом нет ничего странного и необычного. Здесь мы видим, что также практически без всякого вмешательства ОТО могут возникнуть и устойчивые относительно малых возмущений метастабильные состояния с положительной энергией.

С дальнейшим ростом плотности определяющими уже становятся эффекты ОТО, которые снова загибают кривые $E(\rho_c, M)$ вниз (рис. 41), что ведет, как уже показано в § 4 гл. 10, для

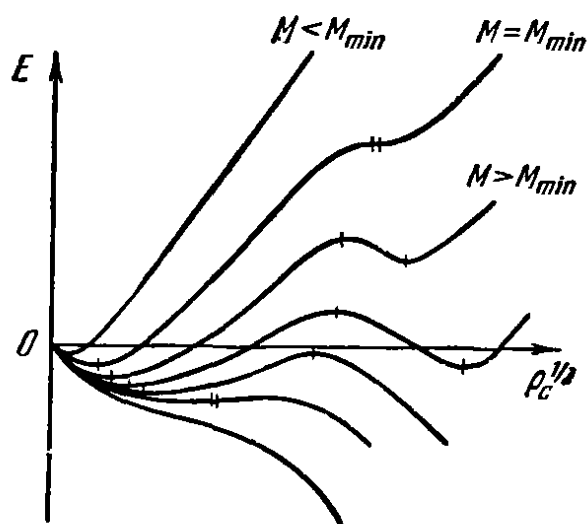


Рис. 40. Энергетические кривые для холодной звезды, построенные с учетом упругости ядерной жидкости.

меньших плотностей к появлению перегиба, а затем максимума на кривых $E(\rho_c, M)$ и соответственно к появлению вторичного максимума на кривой $M=M(\rho_c)$. Остановимся несколько подробнее на причинах появления вторичного максимума на кривой $M=M(\rho_c)$. Первая причина вскользь упомянута в конце п. «б» и кратко выражается словами «энергия весит». В случае статики законы сохранения в ОТО являются уравнениями равновесия. Уравнение равновесия для сферического поля имеет вид

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{dv}{dr} (P + \rho c^2), \tag{10.5.1}$$

где метрика записывается в виде, указанном в § 3 гл. 3, ρ — плотность массы, P — давление. В приближении слабого поля $v/2 = \varphi/c^2$, где φ — ньютоновский потенциал. Учитывая, что в этом случае $\rho c^2 \gg P$, получаем формулу равновесия ньютоновской теории:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}.$$

Из выражения (10.5.1) видно, что в уравнение равновесия входит плотность массы ρ и давление P .

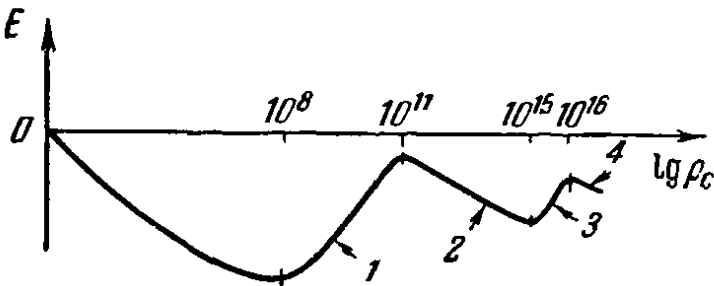
При больших плотностях главный вклад в плотность энергии (а следовательно, и в плотность массы) вносит уже не энергия покоя

Рис. 41. Типичная энергетическая кривая для шара фиксированной массы. Изменение хода кривой при разных плотностях ρ_c определяется упругостью вырожденных электронов (1), нейтронизацией вещества (2), упругостью ядерной жидкости (3), эффектами ОТО (4).

частиц, а энергия их движения и взаимодействия. Обозначим плотность барионов через n ; показателем адиабаты γ_1 назовем $\frac{d \ln P}{d \ln n}$. Определенная таким образом γ_1 для вырожденного газа всегда больше $4/3$ и, в принципе, для отталкивающихся частиц может достигнуть значения $\gamma_1=2$ (Я. Б. Зельдович (1961)), как это подробно показано в § 12 гл. 6.

Однако в уравнение равновесия входит не n , а плотность массы ρ и давление P . В силу отмеченного выше обстоятельства асимптотический вид уравнения состояния имеет вид $P \sim \rho$, поэтому эффективная $\gamma_2 = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ становится меньше $4/3$ и в пределе $\gamma_2 \rightarrow 1$.

На рис. 42 представлены графики γ_1 и γ_2 для идеального газа нейтронов. Смена $\gamma_2 > 4/3$ на $\gamma_2 < 4/3$, как показано в предыдущих параграфах, ведет к появлению максимума $M(\rho_c)$.



Таким образом, учет «веса энергии» уже в теории с ньютоновским законом тяготения в плоском евклидовом пространстве приводит к появлению максимума $M(\rho_c)$ (см. работы Г. С. Саакяна (1962) и О. Х. Гусейнова (1965)).

Другая причина состоит в том, что эйнштейновской теории при больших ρ меняется закон тяготения и пространство перестает быть евклидовым, о чем подробно говорилось в § 2 и 3 гл. 3.

Оба рассмотренных эффекта одного порядка и действуют в одну сторону. Численно, как малые поправки, они рассмотрены в предыдущем параграфе (приложение II).

Первые численные расчеты строения сверхплотных звезд были проделаны в классической работе Оппенгеймера и Волкова (1939) с использованием уравнения состояния идеального ферми-газа (вырожденный нейтронный газ). Данные их расчетов приведены на рис. 43 (кривая для M ; о кривых M_0 и M_1 см. § 6). $M_{\max} = 0,72M_{\odot}$.

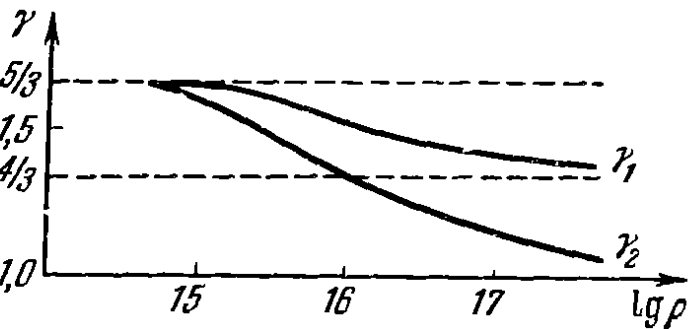


Рис. 42. Зависимость $\gamma_1 = \frac{d \ln P}{d \ln n}$ и $\gamma_2 = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ от плотности ρ для идеального холодного газа нейтронов.

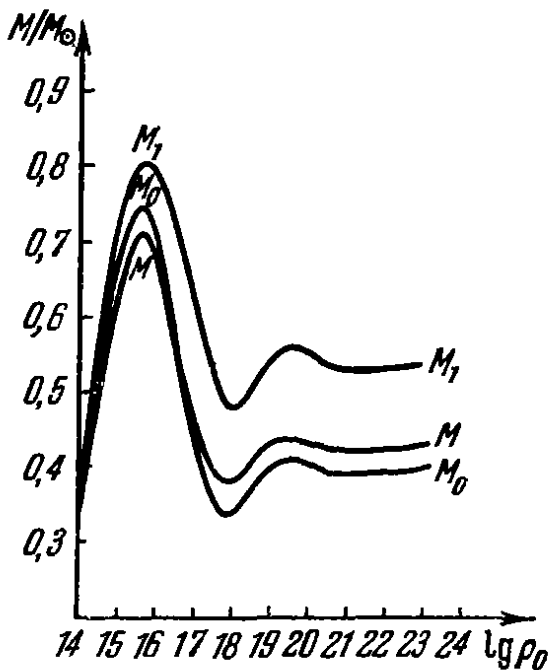


Рис. 43. M , M_0 , M_1 как функции ρ_c для холодного идеального ферми-газа нейтронов.

Однако уравнение состояния идеального газа при подобных плотностях является только грубым приближением (см. гл. 6). Работы Камерона (1959), Саакяна и Вартаняна (1964) с уравнением состояния реального газа дают значение

$$M_{\max} = (1,6 \text{ :- } 2) M_{\odot}.$$

На рис. 39 приведена кривая $M = M(\rho)$ по данным Саакяна и Вартаняна (1964): она охватывает область плотностей, отвечающих белым карликам, и область барионных звезд (см. также недавнюю работу Инмана (1965)).

В расчетах этих авторов учтено изменение уравнения состояния при переходе от плотных недр звезды к ее оболочке.

Любопытно, что в области больших плотностей за максимумом, где уже не могут находиться реальные равновесные холодные звезды, полная масса равновесной звезды, как впервые показали Н. А. Дмитриев и С. А. Холин (1963) испытывает периодическую зависимость от ρ_c , когда $\rho_c \rightarrow \infty$ (см. рис. 43). Позже (и независимо) эту работу повторили другие. Подробнее на этом мы здесь не останавливаемся, отсылая интересующихся к оригинальной работе и книге Гаррисона, Торна, Вакано, Уилера (1965).

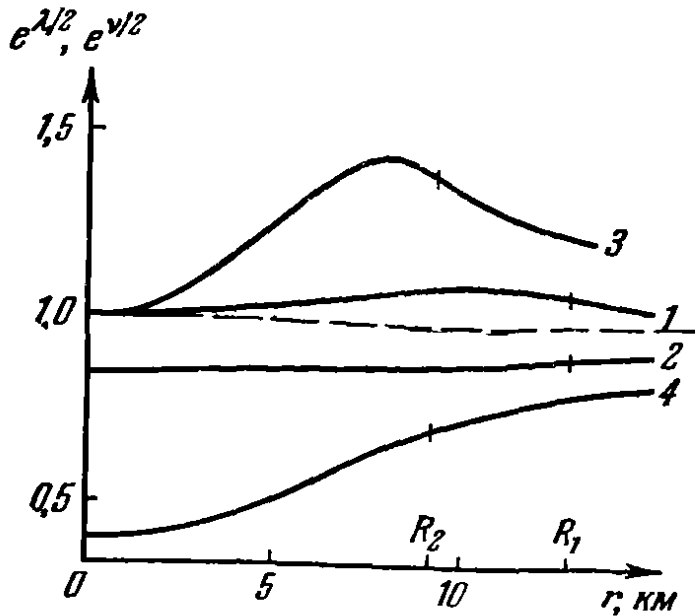


Рис. 44. Зависимость $e^{\lambda/2}$ и $e^{\nu/2}$ от r для звезд с $M_1 = 0,64 M_\odot$ и $M_2 = 1,55 M_\odot$; 1 — $e^{\lambda/2}$, 2 — $e^{\nu/2}$, 3 — $e^{\lambda/2}$, 4 — $e^{\nu/2}$. Радиусы R_1 и R_2 соответствуют поверхности звезд.

Будем называть максимум массы для звезд при $\rho \approx 10^{15} \text{ г/см}^3$ *OB*-максимумом (Оппенгеймер, Волков) M_{max}^{OB} , в отличие от чандрасекаровского максимума, имеющего место при ρ порядка 10^9 г/см^3 . На поверхности звезды с $M = M_{\text{max}}^{OB}$, e^ν принимает минимальное возможное для поверхности звезд значение. Минимальное значение $e_{\text{min}}^{\nu/2} \approx 0,7$. Следовательно, максимальное,

гравитационное красное смещение, которое можно в принципе наблюдать в спектре звезды, есть

гравитационное красное смещение, которое можно в принципе наблюдать в спектре звезды, есть

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_\nu = e^{-\frac{\nu}{2}} \approx 1,4. \quad (10.5.2)$$

Источники нейтрино расположены в центре звезды. Гравитационное красное смещение для нейтрино определяется значением e^ν в центре. Это значение у рассматриваемой звезды $e_{\text{min}}^{\nu/2} \approx 0,4$. Следовательно, для нейтрино максимальное гравитационное изменение частоты

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_\nu = e^{-\frac{\nu}{2}} \approx 2,5. \quad (10.5.3)$$

На рис. 44 для двух звезд с $\rho_c = 5, 5 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ и $3,6 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3$ и с массами соответственно $0,64 M_\odot$ и $M_{\text{max}}^{OB} = 1,55 M_\odot$ изображены графики $e^{\nu/2}$ и $e^{\lambda/2}$. График $e^{\lambda/2}$ характеризует отклонение геометрии пространства от евклидовой вблизи звезды и внутри

ее. Координатный радиус для этих звезд $R = r_{\text{пов}} = \sqrt{s/4\pi}$ (где s — площадь поверхности звезды) равен соответственно 13 км и 9,3 см. Расстояние от центра

$$\tilde{R} = \int_0^{r_{\text{пов}}} e^{\lambda/2} dr$$

равно соответственно 13,8 и 11,5 км. (Данные Саакяна и Варта-
няна (1964)).

Величина $e^{\nu/2}$, как уже отмечалось, аналогична ньютоновскому потенциалу. Она непосредственно показывает замедление темпа течения времени по сравнению со временем на бесконечности. В отличие от $e^{\lambda/2}$, значение $e^{\nu/2}$ не стремится к единице в центре звезды.

Разумеется, это связано с условием нормировки: мы выбирали временную координату t так, чтобы она на бесконечности все время совпадала с показаниями часов наблюдателя; поэтому $(e^{\nu/2})_{\infty} = 1$, а $e^{\nu/2}$ в центре звезды во столько раз меньше $(e^{\nu/2})_{\infty}$, во сколько раз темп течения времени в центре звезды меньше, чем на бесконечности.

§ 6. Дефект массы

Запишем выражение полной энергии звезды E для того случая, когда плотности малы, и применима теория Ньютона

$$E = E_0 + W + U.$$

Мы включили в это выражение $E_0 = N \cdot mc^2$ энергию покоя нуклонов, составляющих звезду; W — энергия движения и взаимодействия нуклонов, U — потенциальная энергия взаимного тяготения. Последнее слагаемое отрицательно. Обозначим $E_0 + W = E_I$; в релятивистской области имеем соответственно:

$$E = Mc^2 = 4\pi c^2 \int_0^R \rho r^2 dr, \quad (10.6.1)$$

$$E_0 = M_0 c^2 = c^2 \int_V mn dV = Nmc^2, \quad (10.6.2)$$

$$E_I = M_1 c^2 = c^2 \int_V \rho dV, \quad (10.6.3)$$

где элемент объема $dV = 4\pi e^{\lambda/2} r^2 dr$.

На рис. 43 приведены графики M , M_0 и M_1 как функции от ρ_c . Вычисления сделаны для случая идеального вырожденного нейтронного газа.

Напомним, что плотность массы ρ , измеренная локально, включает не только массу покоя, но и внутреннюю энергию движения нуклонов и энергию взаимодействия (кроме гравитационного!) частиц в 1 см^3 . Полная масса звезды M не равна сумме масс элементов ее объема M_1 и так как $e^{\lambda/2} \gg 1$, то

$$M < M_1.$$

Разность $\Delta_1 M = M_1 - M$ назовем полным гравитационным дефектом массы. Происхождение $\Delta_1 M$ очевидно: объединяя элементы массы $dm = \rho dV$ (уже имеющие заданную плотность ρ) в звезду, мы должны учесть энергию гравитационного взаимодействия между этими элементами.

Эта энергия связи, не учитываемая в (10.6.3), в отличие от (10.6.1), и соответствующая ей масса — отрицательны, поэтому $\Delta_1 M > 0$. В ньютоновском приближении $c^2 \Delta_1 M = -\Omega$. Отношение (в общем случае, а не только в ньютоновском приближении)

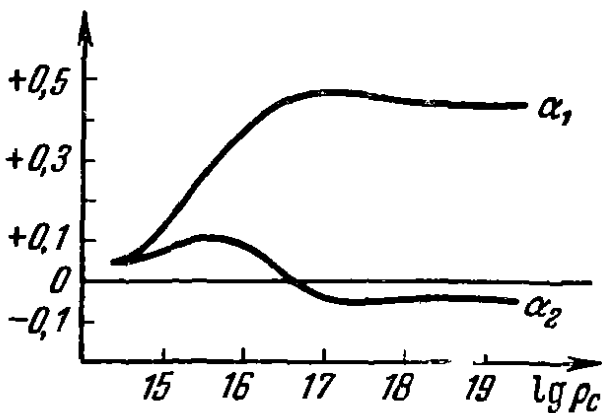


Рис. 45. Зависимость $\alpha_1 = \frac{\Delta_1 M}{M}$ и $\alpha_2 = \frac{\Delta_2 M}{M_0}$ от плотности ρ_c в центре звезды.

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1 M}{M}$$

называют коэффициентом гравитационной упаковки. Он характеризует отношение гравитационной энергии к полной.

На рис. 45 приведена зависимость α_1 от ρ_c для звезд, состоящих из реального газа, согласно работе Саакяна и Вартапяна (1964). Для малых ρ_c значение α_1 мало и стремится к нулю при $\rho_c \rightarrow 0$. Для наиболее плотных конфигураций $\alpha_1 \approx 0,5$.

Разность $\Delta_2 M = M_0 - M = Nm - M$ носит название *неполного* или просто *дефекта массы*. Энергия, соответствующая $\Delta_2 M$, есть как раз та энергия, которая выделяется при образовании из первоначально разреженного диффузного вещества плотной звезды. Из физики этого процесса ясно, что для устойчивой стационарной звезды, возникшей из диффузного вещества *) $\Delta_2 M > 0$.

*) Здесь мы рассматриваем дефект массы только для статических конфигураций. Если отказаться от требования статичности, то полная масса M заданного числа нуклонов в принципе может быть сколько угодно мала (см. § 7 гл. 11). В частности, M для замкнутой космологической модели равна нулю (см. далее гл. 16).

В ньютоновском приближении $c^2\Delta_2 M = -(W + U)$. Отношение (в общем случае, а не только в ньютоновском приближении)

$$\alpha_2 = \frac{\Delta_2 M}{M_0}$$

показывает полную долю энергии, выделившейся при образовании звезды. График $\alpha_2(\rho_c)$, вычисленный для звезд из реального газа по данным Саакяна и Вартаняна (1964), приведен на рис. 45. Для больших плотностей α_2 становится отрицательным. Об этом см. § 7 гл. 10.

Гравитационный дефект массы иногда неправильно называют экранировкой тяготения. Такое название не отражает суть дела, потому что рассматриваемое явление совсем не похоже на действие экрана. Действительно, соединяя, например, две частицы, мы получаем массу системы меньше суммы масс частиц; но, во-первых, это ослабление тяготения не имеет какой-либо направленности (что должно быть, если вторая частица являлась бы действительно экраном), во-вторых, любые силы связи обладают тем же свойством уменьшать суммарную массу частиц и гравитация в этом отношении не исключение. Действительно, масса дейтона меньше суммы масс протона и нейтрона, но мы, конечно, не станем на этом основании говорить, что, скажем, нейтрон гравитационно экранирует протон.

При соединении частиц в связанную систему энергия, равная дефекту массы, высвечивается в виде квантов либо нейтрино, либо гравитационных волн и т. п. Далекий наблюдатель обнаружит дефект массы — уменьшение массы не в момент соединения частиц, а после того как высвеченная энергия пройдет мимо него (рис. 46). До этого момента любые трансформации энергии никак не сказываются на измеряемой наблюдателем массе звезды (разумеется, это прямое следствие закона сохранения энергии).

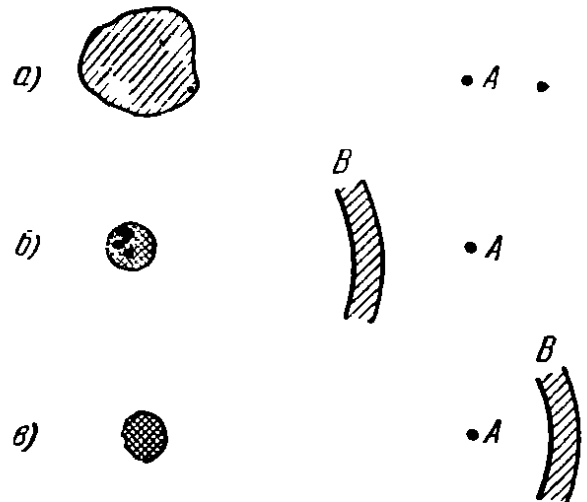


Рис. 46. Изменение массы вещества, измеряемой наблюдателем в A при образовании плотной звезды.

- а) Диффузное вещество до сжатия в звезду.
 б) Вещество сжалось; высвеченная энергия (область B) еще не прошла наблюдателя; последний не обнаруживает уменьшения массы тела.
 в) Волна прошла наблюдателя. Он отмечает уменьшение массы тела на ΔM .

§ 7. Устойчивость нейтронных звезд

Устойчивое равновесие означает минимум энергии звезды при данной энтропии и числе частиц. Изложенная в § 3 гл. 10 теория устойчивости, в которой энергия рассматривалась как функция одного параметра ρ_c , является асимптотически точной только в области применимости ньютоновской теории, когда $\gamma \rightarrow 4/3$ и поправки на ОТО малы. Вариационный принцип в ОТО подробно рассмотрен в работах Чандрасекара (1964а, б; 1965) и Гаррисона, Торна, Вакано и Уилера (1965). Мы здесь приведем другое доказательство (Зельдович (1963а)), справедливое и в релятивистской области, и в ньютоновской.

Прежде всего рассмотрим, как меняется масса равновесной звезды при добавлении к ней одной частицы, приносимой на радиус r из бесконечности, где ее энергия равнялась mc^2 . Иными словами, найдем $\frac{dM}{dN}$. Энергия такой частицы, свободно падающей в поле тяготения по радиусу r , достигнет величины *)

$$E = mc^2 e^{-\frac{v(r)}{2}}. \quad (10.7.1)$$

Разность $E(r) - \mu(r)$, где $\mu(r)$ — химический потенциал частиц холодной звезды, высвечивается, например, γ -квантами. Вследствие потери энергии γ -квантов из-за гравитационного красного смещения (см. § 4 гл. 3) на бесконечность уходит энергия

$$\Delta E = (E - \mu) e^{v/2}. \quad (10.7.2)$$

С другой стороны, из уравнения равновесия следует для холодной звезды (Зельдович (1962); Саакян, Вартамян (1964))

$$\mu(r) e^{\frac{v(r)}{2}} = \text{const} = mc^2 e^{\frac{v(R)}{2}}. \quad (10.7.3)$$

Из (10.7.2) — (10.7.3) следует

$$\frac{dM}{dN} = m e^{\frac{v(R)}{2}} = \text{const}.$$

Изменение M не зависит от того, в какое место равновесной звезды добавлена частица. Заметим, что в силу (10.7.2) и (10.7.3) всегда:

$$\frac{dM}{dN} < m. \quad (10.7.4)$$

*) Энергия измеряется локальным наблюдателем и не включает потенциальную энергию частицы в поле тяготения. Полная энергия частицы, разумеется, не меняется при падении (излучение гравитационных волн не учитывается, так как она стремится к нулю при $m/M \rightarrow 0$, т. е. при рассмотрении пробной частицы малой массы).

Независимость $\frac{dM}{dN}$ от места, в которое добавлена частица, означает, что если мы зададим возмущение распределения частиц $\delta n(r)$, не меняя их полного числа, т. е. так, что $\delta N = 0$, то в первом порядке и $\delta M = 0$, т. е. $\left. \frac{\delta M}{\delta n} \right|_{N=\text{const}} = 0$. Это как раз означает, что состояние равновесия соответствует экстремуму массы, т. е. экстремуму полной энергии системы. Если этот экстремум является минимумом, то это означает устойчивость состояния. Рассмотрим участок кривой $M = M(\rho_c)$, близкий к экстремуму $M_{\text{экс}}$ (см. рис. 43). Из выражения (10.7.4) следует, что при том же значении $\rho_c = \rho_{\text{кр}}$, при котором имеет место экстремум $M(\rho_c)$, достигается экстремум $N(\rho_c)$ (экстремум кривой $M_0(\rho_c)$ на рис. 43).

Следовательно, слева и справа от $\rho_{\text{кр}}$ можно выбрать две различные стационарные звездные модели с разными ρ_{c_1} и ρ_{c_2} , но с одинаковым N . Тогда решение для одной из этих моделей можно представить как возмущенное решение другой модели:

$$\rho_2(r) = \rho_1(r) + \delta\rho. \quad (10.7.5)$$

В самом общем случае решение для малых возмущений можно разложить в ряд по собственным функциям линеаризованной задачи. В этом ряду зависимость i -й гармоники от времени дается выражением

$$\delta\rho_i = \varphi_i(r) e^{\omega_i t}. \quad (10.7.6)$$

Для нашего частного возмущения $\delta\rho$, переводящего стационарное решение ρ_1 в стационарное же решение ρ_2 , естественно, $\delta\rho$ не зависит от времени, следовательно, $\omega_1 = 0$ *).

Таким образом, в экстремуме кривой $M(\rho_c)$

$$\omega_1 = \omega_1^2 = 0.$$

Очевидно, случай с $\omega_1^2 = 0$ лежит на границе между $\omega_1^2 < 0$, где ω_1 — мнимое, и $\omega_1^2 > 0$, где ω_1 вещественно. Если все $\omega_i^2 < 0$, то решение устойчиво, появление положительного ω_i^2 означает возникновение неустойчивости. Эти соображения одинаково применимы как для модели звезды, построенной с учетом ОТО, так и для нерелятивистского случая. Подчеркнем, что мы пока везде рассматривали только малые возмущения.

Рассмотрим теперь устойчивость холодных звезд. В работе Я. Б. Зельдовича (1963а), исходя из принципа максимума

*) Метод, которым мы здесь воспользовались, систематически развивался в работе Г. И. Баренблатта и Я. Б. Зельдовича (1958).

энтропии для устойчивой звезды, показано, что в нерелятивистской области точным критерием устойчивости является непересечение функций распределения плотности по звезде для двух звезд близкой массы (см. приложение к § 1 этой главы). Отсюда следует, что на участке кривой $M(\rho_c)$, где $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$, все равновесные модели заведомо неустойчивы. В области «белых карликов» ($\rho_c < 10^{10} \text{ г/см}^3$) $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$, и, как хорошо известно, звезды устойчивы (см. § 4 гл. 10). Здесь все $\omega_i^2 < 0$. Переход через чандрасекаровский максимум означает потерю устойчивости звезды по отношению к сжатию в целом (см. § 1 гл. 10), т. е. в первой гармонике; здесь ω_1^2 становится положительным. Заметим, что все остальные $\omega_i^2 < 0$ и звезда обладает конечной упругостью по отношению к изменению формы и распределению плотности вещества. В минимуме $M(\rho_c)$ при $\rho_c \approx 10^{14} \text{ г/см}^3$ устойчивость звезды восстанавливается; здесь ω_1^2 опять меняет знак, и интуитивно ясно, что по-прежнему все $\omega_i^2 < 0$. В максимуме «ОВ» ω_1^2 снова становится положительной. Как показал анализ Дмитриева и Холина (1963), а затем Гаррисона, Торна, Вакано, Уилера (1965), вскоре за «ОВ»-максимумом при переходе к моделям звезд со все большим ρ_c функции распределения плотности по массе звезды для звезд близкой массы начинают много раз пересекаться. Аналогично ньютоновской теории, это должно означать неустойчивость. При этом не только ω_1^2 , но и более высокие гармоники становятся положительными. Поэтому, хотя при $\rho_c \rightarrow \infty$ мы проходим через неограниченное число максимумов и минимумов, где знаки некоторых гармоник должны меняться, все равно всегда в решении имеются $\omega_i^2 > 0$ и решения неустойчивы. Таким образом, за ОВ-максимумом все решения неустойчивы. Более строгое доказательство изложенным выше утверждениям можно найти в книге Гаррисона, Торна, Вакано, Уилера (1965).

§ 8. О решениях с положительной энергией

В этом параграфе мы снова возвращаемся к вопросу о положительной энергии равновесной звезды. В релятивистской теории, где масса и энергия звезды есть только разное выражение одного и того же свойства, положительность энергии означает, что $\Delta_2 M < 0$.

Для устойчивых звезд, возникших из диффузного вещества, гравитационный дефект массы $\Delta_2 M > 0$. Однако в общем случае нельзя заранее высказать определенного утверждения о знаке

$\Delta_2 M = 4\pi \int_0^R (mne^{\lambda/2} - \rho)r^2 dr$ в равновесной конфигурации,

ибо, с одной стороны, $nm < \rho$, благодаря энергии движения и взаимодействия нуклонов, с другой стороны, $e^{\lambda/2} \geq 1$. Вопрос о знаке $\Delta_2 M$ должен решаться конкретным расчетом моделей звезд.

Модели с отрицательным $\Delta_2 M$ заведомо не могут возникнуть путем конденсации диффузного вещества. В принципе это не исключает возможность осуществления такого состояния за счет выделения ядерной энергии: энергетически возможно осуществление состояния, энергия которого меньше энергии разреженного водорода, но больше энергии разреженных, разлетевшихся на бесконечность паров железа. В таком состоянии тело, очевидно, неустойчиво в том смысле, что оно может взорваться и целиком разлететься. Однако чтобы судить о возможности существования такого тела, необходимо исследовать его устойчивость относительно малых возмущений.

Образование тела с положительной энергией в ходе эволюции звезды представляется мало вероятным и искусственным, но тело в неустойчивом состоянии относительно малых возмущений следует считать вообще неспособным к существованию.

Интерес к состоянию с положительной энергией, притом в сугубо релятивистской области, при плотности во много раз больше ядерной, в последнее время Г. С. Саакян (1965) связал с концепцией В. А. Амбарцумяна (1960), согласно которой эволюция идет от сверхплотного состояния к диффузному; состояния с положительной энергией способны взрываться и переходить из плотного состояния в диффузное. Необходимо подчеркнуть, однако, что равновесные состояния с положительной энергией существуют лишь с массой не более $2-3 M_\odot$ и не имеют отношения к грандиозным взрывам ядер галактик и сверхзвезд. Мы подробно останавливаемся на этом вопросе только потому, что он часто обсуждается в литературе.

Рассмотрим зависимость массы звезды M от числа нуклонов в ней. Во-первых, ясно, что эта кривая выходит из нуля:

$N=0, M=0$. Кроме того, в § 7 гл. 10 показано, что $\frac{dM}{dN} < m$.

Отсюда на первый взгляд следует, что всегда $M < N \cdot m$ и $\Delta_2 M > 0$. Однако это не так

Кривые $M(\rho_c)$ и $N(\rho_c)$ проходят через максимум при одном и том же $\rho_{кр}$, а $\frac{dM}{dN}$ везде конечна и не имеет особенностей (см. § 7 гл. 10). Отсюда следует, что зависимость M от N будет иметь точку возврата, соответствующую общему максимуму

M и N . Эта зависимость изображена на рис. 47 по данным Г. С. Саакяна и Ю. Л. Вартаняна (1964) для сверхплотных конфигураций*). Везде на кривой $\frac{dM}{dN} < m$, но имеется участок, где $Nm > M$ и $\Delta_2 M < 0$. Разумеется, эти конфигурации неустойчивы и малые возмущения заставляют звезду сжиматься или расширяться. При разлете массы звезды вещество будет иметь на бесконечности отличную от нуля кинетическую энергию.

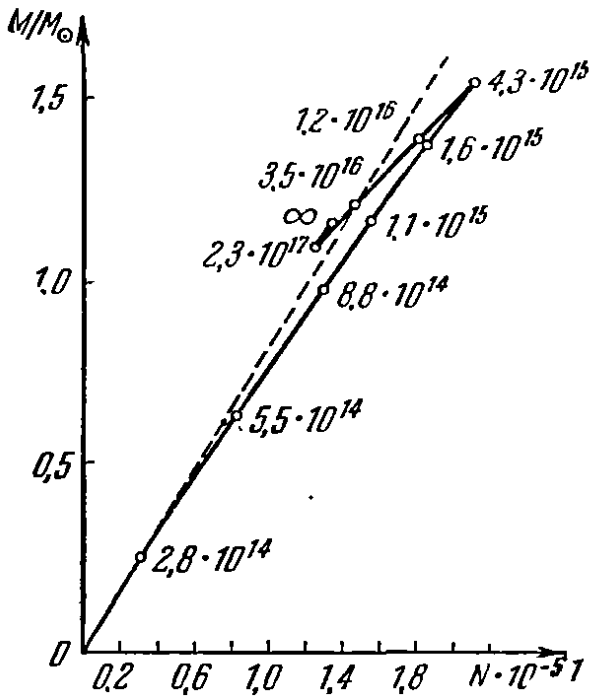


Рис. 47. Зависимость массы холодной звезды от полного числа барионов N .

Рядом с кружочками указана плотность звезды в центре. Пунктирная линия — $M = Nm_H$.

рис. 43 кривые M_\odot и M для идеального газа пересекаются, т. е. и в этом случае $\Delta_2 M < 0$ при $\rho_c \geq 5 \cdot 10^{16}$.

Методический интерес представляет тот факт, что для идеального газа $\Delta_2 M < 0$ возможно только в релятивистской теории, но не в ньютоновском приближении. Действительно, в ньютоновской теории для звезды из нерелятивистского максвелловского или ферми-газа справедлива теорема вириала

$$W = -\frac{1}{2} U. \quad (10.8.1)$$

*) В соответствии с замечанием, сделанным в § 5 гл. 10, кривые $M(\rho_c)$ и $N(\rho_c)$ имеют неограниченное число максимумов; при $\rho_c \rightarrow \infty$ амплитуда M и N затухает; соответствующее число точек возврата имеется на кривой $M = M(N)$. На рис. 47 видна еще точка возврата $2,3 \cdot 10^{17}$, следующие из-за мелкости масштаба не показаны.

Физическая причина того, что $\Delta_2 M < 0$, состоит в следующем. При очень большой плотности энергия движения и отталкивания барионов существенно больше их энергии покоя $\rho > mn$. Поэтому, несмотря на то, что учет отрицательной энергии гравитационного поля несколько снижает это различие, все же

$$\Delta_2 M = \int_V (mn - \rho e^{-\lambda/2}) dV < 0.$$

Учет отрицательной энергии поля описывается $e^{-\lambda/2}$. На рис. 47 видно существование решений с $\Delta_2 M < 0$ для уравнений состояния реального газа. Это видно также на кривой α_2 рис. 45. На

С другой стороны, в ньютоновском приближении (см. § 18)

$$c^2 \Delta_2 M = -(W + U).$$

Следовательно,

$$c^2 \Delta_2 M = -\frac{1}{2} U > 0. \quad (10.8.2)$$

В релятивистской теории теорема вириала уже неприменима и там возможны неустойчивые решения с $\Delta_2 M < 0$. Предположение о том, что конфигурация состоит из газа, частицы которого сталкиваются, необязательно. В изотермической конфигурации можно «выключить» столкновения*), и свойства конфигурации, состоящей из идеального газа, в целом сохраняются. Действительно, при столкновениях происходил только обмен импульсами и энергиями частиц. В каждой точке после «выключения» столкновений среднее распределение частиц по импульсам не изменится. Каждая частица теперь совершает финитное движение в общем поле тяготения всех остальных частиц. Полная энергия каждой отдельной частицы в поле остальных (сохраняющаяся при движении на орбите) меньше mc^2 , в соответствии с чем частица не может уйти на бесконечность**).

Если рассматриваемое состояние получено после «выключения» столкновений из стационарного решения для холодного идеального ферми-газа с $\Delta_2 M < 0$, то, следовательно, и здесь будет $\Delta_2 M < 0$. Таким образом, хотя полная энергия каждой частицы меньше mc^2 , полная энергия всей системы больше $N \cdot mc^2$. Качественно возможность этого легко понять, если вспомнить, что в ньютоновской теории энергия одной частицы $E_i = mc^2 + W_i + U_i$. Однако энергия всей системы составляет

$$E = N \left(mc^2 + \overline{W}_i + \frac{1}{2} \overline{U}_i \right).$$

Существенным здесь является коэффициент $1/2$ во втором члене, необходимый для того, чтобы не учесть дважды каждое попарное взаимодействие. Так как $U_i < 0$, то

$$E = \sum_i E_i - \frac{1}{2} \sum_i U_i > \sum_i E_i.$$

*) При этом длина пробега и теплопроводность станут бесконечными; заметим, что в ОТО при этом постоянно по звезде не локально измеренная температура T , а произведение $T \sqrt{g_{00}}$. Вырожденный ферми-газ соответствует $T=0$. Подробно ситуация рассмотрена в работе Я. Б. Зельдовича и М. А. Подурца (1965).

**) Строго говоря, изотермическая модель звезды имеет атмосферу бесконечной протяженности, в ней происходит истечение газа. В этой модели будут испаряться частицы с энергией, превышающей mc^2 . Подробнее об этом см. в § 19 гл. II.

Поэтому и возможно одновременно $E_i < mc^2$, а $E > N - mc^2$. Конечно, для этого необходимо нарушение теоремы вириала (10.8.1), написанной в виде, справедливом для максвелловского газа, ибо ее выполнение приводит к неравенству (10.8.2). Еще раз подчеркнем, что вывод о возможности $\Delta_2 M < 0$ лишь в релятивистской, но не в ньютоновской теории справедлив только для идеального газа. В случае нарушения идеальности, как мы неоднократно отмечали ранее, равновесие с положительной полной энергией и, следовательно, с $\Delta_2 M < 0$ возможно и в нерелятивистской теории.

§ 9. Равновесие сверхмассивной звезды

а. *Вводные замечания.* После рассмотрения равновесия холодных звезд малой массы перейдем к прямо противоположному случаю — равновесию сверхмассивных горячих звезд.

Первой попыткой объяснения квазаров была попытка представить их как сверхмассивные звезды с $M \sim 10^5 \div 10^9 M_\odot$ (Хойл, Фаулер (1963а, б)), применяя к ним все обычные для теории звезд понятия и приближения. Теория подобных гипотетических звезд имеет, очевидно, и самостоятельный интерес.

В первых работах не учитывались вращение и турбулентность. В последнее время эта теория с учетом макроскопических движений вещества вновь применяется для объяснения квазаров (Фаулер (1966); Рохбург (1965); Озерной (1966); Лейзер (1965); Пахольчик (1965); Ананд (1965); Бардин и Ананд (1966), Бисноватый-Коган, Зельдович, Новиков (1967)).

Напомним коротко, что звезда в обычном состоянии находится в гидродинамическом равновесии, выделение ядерной энергии (если оно имеется) идет медленно и не входит в условие гидродинамического равновесия. Энергия из центральных областей просачивается к поверхности и излучается в окружающее пространство. Первоначально звезда состоит, главным образом, из водорода. Это звезда «на главной последовательности» диаграммы Гершпрунга — Рассела. По мере выгорания водорода параметры звезды медленно меняются. Предельным случаем является звезда, полностью исчерпавшая свои запасы энергии и состоящая почти целиком из железа. Однако мы увидим ниже, что для звезд с $M \geq 5 \cdot 10^5 M_\odot$ ядерные реакции вообще оказываются несущественными при отсутствии вращения и турбулентных движений.

В равновесной звезде с массой больше $100 M_\odot$ энергия столь велика, что давление и внутренняя энергия в основном опреде-

ляются излучением, а давление и энергия плазмы *) относительно малы, что отмечалось еще Эддингтоном (1926) (см. § 2 этой главы). Эта особенность и обуславливает различие в строении и эволюции сверхмассивной звезды по сравнению с обычной звездой, в которой определяющей является энергия плазмы, а вклад излучения относительно невелик.

Для чистого излучения показатель адиабаты $\gamma = 4/3$ (критическое значение для равновесия звезды (см. § 1 гл. 10)). В силу этого в массивных звездах показатель адиабаты мало отличается от $4/3$ и поэтому, так же как в теории белых карликов (см. § 4 гл. 10), нужно быть аккуратным в рассмотрении отклонений γ от $4/3$. Отклонение γ от $4/3$ связано с тем, что в давление вносит вклад плазма, а при больших температурах — рождение пар e^+ , e^- и диссоциация железа $Fe \rightarrow 13\alpha + 4p$. Именно благодаря влиянию плазмы $\gamma > 4/3$ и звезда может находиться в устойчивом гидродинамическом равновесии **). Точно так же как в теории белых карликов, при массе, приближающейся к критической, существен был учет малых эффектов ОТО, нарушающих устойчивость звезды, в теории сверхбольших звезд необходим учет этих эффектов, несмотря на то, что гравитационный потенциал мал, $\phi \ll c^2$. Плазма вносит положительный вклад в энергию звезды, а пары e^+ , e^- и эффекты ОТО — отрицательный.

Теория больших звезд (без учета пар e^+ , e^-) развита в работах Фаулера (1964а, б), а затем независимо другим методом в работе Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова (1965) (с учетом пар e^+ , e^-). Сравнение двух методов дается в приложении к этому параграфу. Роль e^+ , e^- рассматривал также Сато (1966).

Будем действовать методом последовательных приближений. Сначала найдем равновесие звезды, пользуясь ньютоновской теорией и учитывая в энергии только излучение, пренебрегая всеми поправками. Затем учтем последовательно влияние плазмы, рождение пар и ОТО. Процессы диссоциации железа, нейтронизация вещества для равновесной стадии сверхмассивной звезды оказываются несущественными. Влияние вращения на равновесие рассмотрено в следующем параграфе.

б. Равновесие звезды с $\gamma = 4/3$. Полная энергия звезды E записывается в виде

$$E = \int_V E_{10} \rho dV - G \int_V \frac{m\rho}{r} dV. \quad (10.9.1)$$

*) Под энергией плазмы здесь подразумевается энергия ядер и электронов. Давление плазмы есть давление, создаваемое этими частицами.

***) Об особом виде неустойчивости равновесия больших звезд, связанном с изотермическими возмущениями, см. § 11 гл. 11.

Первое слагаемое — внутренняя энергия, второе — гравитационная энергия. E_1 — внутренняя энергия на единицу массы,

m — масса внутри сферы радиуса r , $m = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr$.

В качестве нулевого приближения учитываем только энергию света (однако весом света по сравнению с весом плазмы, конечно, пренебрегаем). Удельная внутренняя энергия E_1 на единицу массы, удельная энтропия на единицу массы и давление записываются в виде

$$E_1 = \frac{\sigma T^4}{\rho}; \quad S = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^3}{\rho}; \quad P = \frac{1}{3} \sigma T^4 = b \rho^{4/3}, \quad (10.9.2)$$

где

$$\sigma = 7,7 \cdot 10^{-15} \text{ эрг/см}^3 \text{ град}^4; \quad b = \left(\frac{3}{256\sigma} \right)^{1/3} S^{4/3}.$$

Отсюда выражаем E_1 через ρ и S :

$$E_1 = 3^{4/3} 4^{-4/3} \sigma^{-1/3} S^{4/3} \rho^{1/3} = 3b\rho^{1/3}. \quad (10.9.3)$$

Если известно распределение вещества в звезде $\rho = \rho(r)$, то, подставляя выражение (10.9.3) в (10.9.1) и интегрируя, получим

$$E = k_1 b M \rho_c^{1/3} - k_2 G M^{5/3} \rho_c^{1/3}, \quad (10.9.4)$$

где ρ_c — центральная плотность, а константы k_1 и k_2 зависят от распределения вещества в звезде (см. приложение I). В нашем случае зависимость давления от плотности при постоянной S *) имеет вид политропы $P \sim \rho^{4/3}$ с индексом политропы $n = 1/\gamma - 1 = 3$. Воспользовавшись распределением плотности для политропы с $n=3$ (см. § 4 гл. 10), получаем численные значения констант $k_1 = 1,75$, $k_2 = 0,638$. Равновесие звезды определяется экстремумом E при постоянной массе (точнее, при постоянном числе нуклонов) и постоянной энтропии S . Единственной величиной, которая варьирует в (10.9.4), является ρ_c , но условие равновесия, т. е. условие экстремума E : $\frac{dE}{d\rho_c} = 0$, выполняется лишь при

$$k_1 b M - k_2 G M^{5/3} = 0. \quad (10.9.5)$$

Равновесие при этом безразличное; оно не зависит от ρ_c .

Подчеркиваем, что безразличие равновесия имеет место только по отношению к сжатию и расширению звезды в целом,

*) Конечно, S может, вообще говоря, и не быть постоянной по звезде. Заметим, что S может только возрастать к поверхности, иначе возникает конвекция, выравнивающая S . Качественно непостоянство S по веществу не меняет результат, но для определенности мы считаем $S = \text{const}$ по веществу. В больших звездах, вероятно, есть конвекция, выравнивающая S .

т. е. по отношению изменения всей звезды с сохранением подобия. Но звезда устойчива по отношению к деформации распределения плотности в ней.

Для звезды в равновесии из формулы (10.9.5) находим

$$b_{eq} = \frac{k_2}{k_1} GM^{2/3} = 0,364GM^{2/3}, \quad (10.9.6)$$

а из определения b_{eq} (см. формулу (10.9.5)) соответствующее единственное значение равновесной для данной массы энтропии (измеренной в эргах на градус):

$$S_{eq} = 7,85 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2}. \quad (10.9.7)$$

В этом приближении полная энергия звезды тождественно равна нулю, а плотность и температура в любой точке связаны соотношением

$$T \text{ }^\circ\text{K} = 1,97 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/6} \rho_c^{1/3}. \quad (10.9.8)$$

Если энтропия не равна равновесной, то из общего выражения для энергии (10.9.4) при $|S - S_{eq}| < S_{eq}$ получаем

$$E = 2,3 \cdot 10^{40} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{7/6} (S - S_{eq}) \rho_c^{1/3}.$$

При $S > S_{eq}$ энергия монотонно растет с ρ_c , а при $S < S_{eq}$ монотонно падает (рис. 48).

в. *Влияние плазмы.* Теперь учтем изменение в уравнении состояния, связанное с энергией и давлением ядер и электронов плазмы. При данной температуре учет плазмы увеличивает внутреннюю энергию. В самом деле, теперь вместо (10.9.2) для E_1 мы должны писать:

$$E_1 = \frac{\sigma T^4}{\rho} + \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} T,$$

где второй член справа — энергия плазмы, μ — молекулярный вес. Однако при данной энтропии учет плазмы уменьшает энергию. Качественно это ясно уже из общего принципа: состояние термодинамического равновесия отвечает максимуму энтропии при данной энергии или, что то же, минимуму энергии при данной энтропии. Нулевое приближение, когда не учитывается энергия плазмы, соответствует состоянию, в котором есть излучение и холодная плазма с нулевой энергией. Переход к полностью равновесному состоянию при данной энтропии, согласно общему принципу, может только уменьшить энергию. Численно

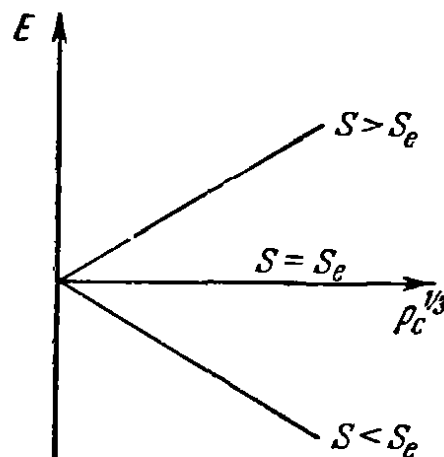


Рис. 48. Энергия E звезды с фиксированной энтропией как функция центральной плотности $\rho_c^{1/3}$. Давление и тепловая энергия определяются излучением.

поправка за счет плазмы во внутреннюю энергию вещества может быть вычислена из условия термодинамического равновесия. При постоянной энтропии она выражается следующим образом:

$$\Delta E_{1, \text{пл}} = -3,85 \cdot 10^{12} \frac{S^{1/3}}{A} \rho^{1/3} \left(\ln \frac{aS^{1/2}}{\rho^{1/2}} + Z \ln \frac{bS^{1,2}}{\rho^{1/2}} \right), \quad (10.9.9)$$

где $a = 8,63 \cdot 10^3 gA^{5/2}$, $b = 2,18 \cdot 10^{-1} \frac{A}{Z}$, A — атомный вес, Z — заряд ядра, g — статистический вес ядра.

Это выражение справедливо в той области, где поправки на плазму в выражение для энергии и энтропии малы, и, кроме того, плазма является невырожденным идеальным газом. В условиях равновесной звезды с массой $10^4 \div 10^8 \frac{M}{M_{\odot}}$ эти ограничения выполняются с достаточной точностью*).

Теперь можно вычислить энергию всей звезды с учетом влияния плазмы. Как уже отмечалось в § 4 гл. 10, поправка на уравнение состояния порядка $\alpha = \Delta E_1/E \ll 1$ меняет не только энергию в данной частице, но вызывает изменение распределения вещества в звезде того же порядка α , и это изменение при расчете энергии надо учитывать. Однако вследствие экстремальных свойств функции распределения, это изменение распределения вещества вызывает изменение полной энергии звезды порядка α^2 . Поэтому для вычисления поправки в полную энергию звезды порядка α надо проинтегрировать ΔE_1 по распределению нулевого приближения (по невозмущенной эмденовской функции) и это дает точно первый (порядка α) член разложения энергии по степеням α .

Интегрируя (10.9.9) по распределению плотности в звезде нулевого приближения, получаем поправку $\Delta E_{\text{пл}}$ в энергию звезды:

$$\Delta E_{\text{пл}} = -\rho_c^{1/3} \{a_1 - b_1 [1,176 \ln \rho_c - 1,615]\}, \quad (10.9.10)$$

$$a_1 = 4,5 \cdot 10^{45} S^{1/3} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) A^{-1} \left\{ \ln (8,6 \cdot 10^3 gA^{5/2} S^{1/2}) + \right. \\ \left. + Z \ln \left(2,2 \cdot 10^{-1} S^{1/2} \frac{A}{Z} \right) \right\},$$

$$b_1 = 1,925 \cdot 10^{45} S^{1/3} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) A^{-1} (1 + Z);$$

*) Приведем для справки, не останавливаясь на вычислениях, поправку первого порядка в энтропию за счет водородной плазмы: $\Delta S_{\text{пл}} = 8,3 \times 10^7 (15,5 + 2 \ln T^{3/2} - 2 \ln \rho)$ (температура в $^{\circ}\text{K}$, плотность в $\text{г}/\text{см}^3$). Для равновесной водородной звезды это дает $\Delta S_{\text{пл}}/S \approx 60 (M/M_{\odot})^{-1/2}$, в то время как для давления имеем $\Delta P_{\text{пл}}/P \approx 8,6 (M/M_{\odot})^{-1/2}$. Так как аддитивная постоянная в энтропии не существенна, то можно развить более сложный способ с ошибкой порядка $(\Delta P/P)^2$. Здесь мы этого делать не будем.

это выражение, разумеется, справедливо также только при указанных выше ограничениях.

Для различных значений энтропии теперь получим вместо рис. 48 серию кривых E , показанных на рис. 49. Все кривые относятся к одному значению массы, а энтропия играет роль параметра. На кривых теперь имеются минимумы. Эти минимумы соответствуют равновесному состоянию звезды и отмечены черточками. Пунктирная линия есть геометрическое место

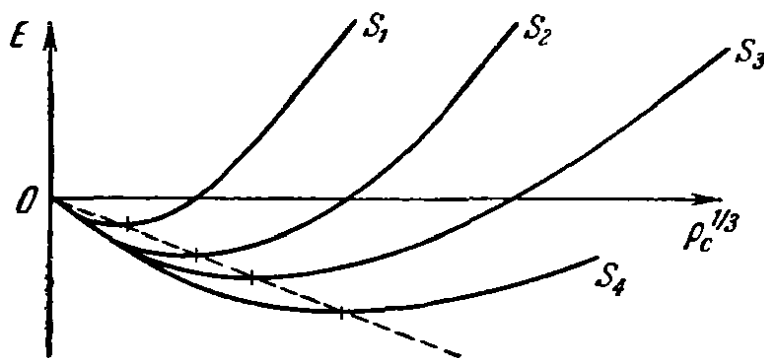


Рис. 49. Энергия E звезды с учетом вклада плазмы (электронов и ядер) в давление. $S_1 > S_2 > S_3 > S_4$. Минимум кривых соответствует положению равновесия звезды с данной энтропией. Пунктирная прямая — геометрическое место положений равновесия.

минимумов $E_{eq}(\rho_c)$. В координатах рис. 49 кривые $E(\rho_c)$ получаются одна из другой преобразованием подобия, а пунктирная линия оказывается прямой и (в соответствии с известным выводом из теории вириала)

$$E_{eq} = -\frac{3}{2} \frac{R\bar{T}}{\bar{\mu}} M,$$

т. е. энергия звезды равна тепловой энергии плазмы, взятой с обратным знаком. Численно, учитывая, что $\bar{T}/T_c \approx 0,6$, получим

$$E_{eq} = -5 \cdot 10^{41} \bar{T} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \frac{1}{\bar{\mu}} = -3 \cdot 10^{41} T_c \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \frac{1}{\bar{\mu}}.$$

Подставляя выражение T_c из (10.9.8), получим

$$E_{eq} = -5,9 \cdot 10^{48} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{7/6} \rho_c^{1/3} \frac{1}{\bar{\mu}}.$$

г. *Учет рождения пар e^+ , e^- .* При температурах порядка $5 \cdot 10^8$ °К ($kT/m_e c^2 \approx 0,1$) в равновесии имеется уже заметное число электронно-позитронных пар. При данной температуре рождение пар увеличивает энергию вещества, но, как отмечено выше, из общих принципов термодинамики следует, что при данной энтропии рождение пар уменьшает энергию.

Мы убедимся ниже, что появление пар приводит к неустойчивости массивной звезды при температуре, которая (в энергетических единицах) в 10—15 раз меньше энергии одной пары $2m_e c^2$. (Для справок: $2m_e c^2 = 1,02$ Мэв, $\theta = 2m_e c^2/k = 11,9 \cdot 10^9$ °К.) При $T \sim 10^9$ число позитронов во всей звезде не больше нескольких процентов числа электронов, и даже в центре звезды $n_+ < 0,25n_-$. Поэтому воспользуемся асимптотическими формулами (см. § 9 гл. 8, формула (8.3.9)), относящимися к нерелятивистскому невырожденному газу:

$$n_+ n_- = \frac{4 (2\pi m_e kT)^3}{(2\pi\hbar)^6} e^{-\frac{2m_e c^2}{kT}}; \quad (10.9.11)$$

считаем $n_+ \ll n_-$, $n_- = n_{-0} = \rho/\mu_e m_p$, $n_+/n_- = n_+ n_- / n_{-0}^2$, где n_{-0} — есть число электронов в веществе (плазме) данной плотности без учета образования пар. Подставляя числа, запишем

$$\frac{n_+}{n_-} = 1,1 \cdot 10^{14} \mu_e^2 \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 e^{-\frac{\theta}{T}};$$

характерная θ дана выше.

С помощью нулевого приближения (см. (10.9.8)) выразим плотность через массу звезды и температуру. Численно

$$\frac{n_+}{n_-} = \frac{\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \mu_e^2}{430} \left(\frac{T}{\theta}\right)^{-3} e^{-\frac{\theta}{T}}.$$

В эту формулу можно подставить локальную температуру и получить локальное значение n_+/n_- . В частности, формула, конечно, справедлива и для центра, где $T = T_c$.

Для усреднения по звезде любой величины x , быстро меняющейся в зависимости от температуры (или плотности), существует удобная формула:

$$\bar{x} = x_c \cdot 3,2 \left(\frac{d \ln x}{d \ln T}\right)_c^{-3/2}.$$

Вывод этой формулы основан на том, что вблизи центра температура (а также плотность) имеет максимум вида

$$T = T_c (1 - ar^2),$$

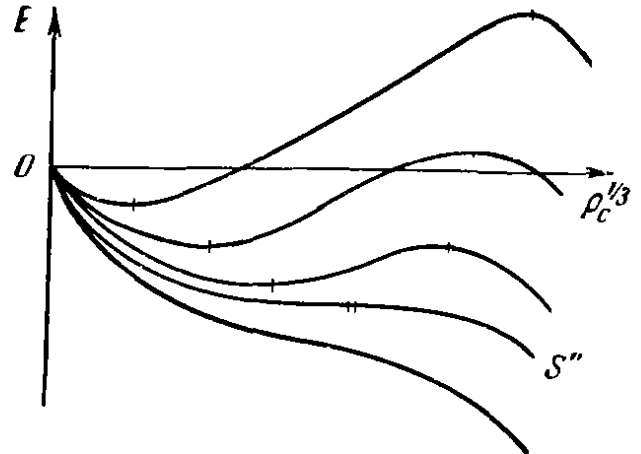
область, в которой x меняется в e раз, — это та область, в которой T меняется на $\frac{T_c}{d \ln x / d \ln T}$. Масса в этой области пропорциональна r^3 ; отсюда следует вид формулы. При определении коэффициентов использовано распределение Эмдена. Воспользовавшись приведенной формулой, найдем в интересующем нас случае:

$$\overline{\left(\frac{n_+}{n_-}\right)} = \left(\frac{n_+}{n_-}\right)_c \cdot 3,2 \left(\frac{\theta}{T_c} - 3\right)^{-3/2} \approx \left(\frac{n_+}{n_-}\right)_c \cdot 3,2 \left(\frac{T_c}{\theta}\right)^{3/2}.$$

Обратимся к термодинамической стороне дела. Дополнительная энергия, возникающая при данной температуре в связи с рождением пар, равна $2m_e c^2 n_+$ в единице объема или $\Delta E_1|_T = \frac{2m_e c^2 n_+}{\rho}$ на единицу массы. При этом мы последовательно пренебрегаем членами порядка T/θ — в данном случае кинетической энергией позитронов по сравнению с их массой покоя; это автоматически означает и пренебрежение их давлением.

Изменение энергии при данной энтропии связано с изменением энергии при данной температуре соотношением

$$\begin{aligned} \Delta E_1|_S &= -T \frac{d \Delta E_1|_T}{dT} = \\ &= -\frac{T}{\theta} \Delta E_1|_T = -\frac{kT n_+}{\rho}. \end{aligned}$$



Запишем энергию всей этой звезды при данной энтропии. Вместо $E(S, \rho_c)$ технически удобно перейти к $E(S, T_c)$. Выражая ρ через T по формуле (10.9.8) нулевого приближения, получим сначала для среднего значения \bar{T} :

Рис. 50. Изменение энергетических кривых рис. 49 при учете рождения пар e^+, e^- (для $M < 10^4 M_\odot$) или эффектов ОТО (для $M > 10^4 M_\odot$).

$$E = A(S - S_{eq}) \bar{T} + \frac{3}{2} \frac{R\bar{T}}{\mu} M(B + \ln \bar{T}) - kTN_+, \quad (10.9.12)$$

где N_+ — полное число позитронов в звезде. Удобно записать это выражение так:

$$\begin{aligned} E &= A'(S - S_{eq}) T_c + DT_c \left(\ln T_c - \frac{2}{3} \frac{\mu}{\mu_e} \frac{n_+}{n_-} + B' \right) = \\ &= A'(S - S_{eq}) T_c + DT_c \left[\ln T_c - \frac{2}{3} \mu \mu_e \frac{M/M_\odot}{430} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{T}{\theta} \right)^{-3/2} e^{-\frac{\theta}{T}} \cdot 3,2 \left(\frac{T}{\theta} \right)^{3/2} + B' \right]. \quad (10.9.13) \end{aligned}$$

Для железа $\mu \approx \mu_e \approx 2$

$$E = A'(S - S_{eq}) T_c + DT_c \left[\ln T_c - \frac{M/M_\odot}{50} \left(\frac{T_c}{\theta} \right)^{-3/2} e^{-\frac{\theta}{T_c}} + B' \right].$$

Вклад пар в энергию, отрицательный по знаку, резко возрастает по абсолютной величине с ростом температуры. При учете пар кривые рис. 49 перестраиваются и получается картина рис. 50.

На изэнтропических кривых, кроме минимумов, появились теперь еще максимумы, они, так же как и минимумы, отмечены

вертикальной черточкой. На кривой, соответствующей некоторой энтропии, которую мы назовем критической $S_{кр}$, максимумы и минимумы сливаются, давая точку горизонтального перегиба (отмечена двумя черточками). При $S < S_{кр}$ (для фиксированной массы) нет вообще экстремума $E(\rho_c)$, т. е. нет состояния равновесия. Равновесие, соответствующее максимумам кривых, неустойчиво.

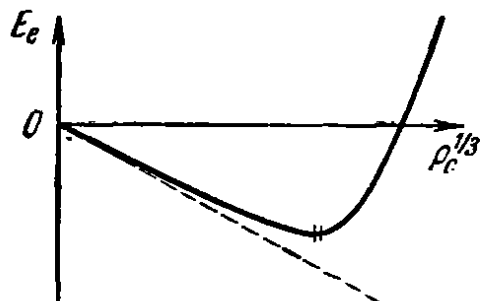


Рис. 51. Энергия E_e равновесной звезды. Пунктиром нанесена энергия равновесной звезды с учетом излучения и плазмы, но без учета рождения пар и ОТО.

Геометрическое место экстремумов $E(\rho_c, S)$, т. е. кривая равновесной энергии $E_e(\rho_c)$, изображено на рис. 51. Минимум этой кривой соответствует горизонтальному перегибу на рис. 50, ниспадающая ветвь E_e отвечает устойчивому равновесию, восходящая — неустойчивому. На восходящей ветви есть область, где $E_e > 0$. Напомним, что эти состояния, отвечающие максимуму изэнтропных кривых, появились благодаря отрицательной поправке в энергии. Эта поправка вызвала появление экстремума там, где раньше его не было, но сама энергия, разумеется, без поправки была положительна.

Критическое состояние, как уже отмечалось, достигается тогда, когда

$$\frac{\partial E}{\partial \rho_c} = \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_c^2} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial E}{\partial T_c} = \frac{\partial^2 E}{\partial T_c^2} = 0.$$

Запишем сразу условие с $\frac{\partial^2 E}{\partial T_c^2}$, так как условию с первой производной всегда можно удовлетворить, подбирая соответствующее S . Из условия $\frac{\partial^2 E}{\partial T_c^2}$ выпадут все константы A'_1, S_e, D, B' .

Таблица X

Параметры критического состояния, обусловленного влиянием пар e^+, e^- для звезд из железа

M/M_\odot	300	3000	6000	M/M_\odot	300	3000	6000
$T_c \cdot 10^{-9}$	1,2	0,92	0,87	$e^{-\theta, T_c}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-7}$
ρ_c	10 000	1,600	800	$\overline{n_+/n_-}$	0,022	0,013	0,011
θ/T_c	10	13	14	$(n_+/n_-)_c$	0,22	0,18	0,18

Получим условие

$$1 - \frac{M/M_{\odot}}{50} \left(\frac{T_c}{\theta}\right)^{-7/2} e^{-\frac{\theta}{T_c}} = 0. \quad (10.9.14)$$

Приводим таблицу параметров критического состояния для трех типичных звезд (состав — железо) (табл. X).

Оценки, приведенные выше, подтверждают справедливость сделанных предположений, $T_c/\theta \ll 1$, $n_+/n_c < 1$.

Для водородной звезды с $\mu = 1/2$, $\mu_e = 1$ данные собраны в табл. XI.

При одинаковой температуре остальные величины (помимо T_c и ρ_c) не зависят от состава (ср. предыдущую таблицу). Крайние массы ($6000 M_{\odot}$ для железа, $24,000 M_{\odot}$ для водорода, в среднем $\sim 10^4 M_{\odot}$) представляют собой тот предел, где существенно сказываются эффекты ОТО, к рассмотрению которых мы переходим ниже.

Таблица XI

Параметры критического состояния, обусловленного влиянием пар e^+ , e^- для звезды из водорода

M/M_{\odot}	2400	24,000
$T_c \cdot 10^{-9}$	1.2	0.92
ρ_c	3600	550

Отметим также, что поправки в уравнении состояния связанных с диссоциацией ядер, например, $Fe^{56} \rightarrow 13\alpha + 4n$, требуют, как правило, более высокой температуры по сравнению с рождением пар, и в теории равновесия сверхмассивных звезд эти процессы несущественны, точно так же как и процессы нейтронизации вещества.

Поправка в энергии горячей звезды большой массы, связанная с эффектами ОТО, выражается той же формулой, что и в случае белых карликов $\Delta E_{\text{ото}} = -0,93 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3}$. Знак этой поправки и характер ее влияния на общую картину такой же, как для пар e^+ , e^- . Таким образом, есть две причины, обуславливающие переход от рис. 49 к рис. 50. Практически в зависимости от массы звезды играет роль только одна из причин: при массе меньше $10^4 M_{\odot}$ — только пары, при массе больше $10^5 M_{\odot}$ — только ОТО. Такое резкое разделение есть следствие резкой зависимости равновесного количества пар от температуры. В равновесных звездах с массой больше $10^4 M_{\odot}$ при увеличении плотности эффекты ОТО меняют ход изэнтропных кривых задолго до достижения температуры, достаточной для интенсивного рождения пар e^+ , e^- .

Таким образом, для звезд с $M > 10^4 M_{\odot}$ переход от рис. 49 к рис. 50 обусловлен эффектами ОТО. Снова обратимся к кривой E_e на рис. 51. Для звезд с $M > 10^4 M_{\odot}$ появление на ней

минимума и восходящей ветви связано с эффектами ОТО. Наличие области, где $E_e > 0$, здесь также обязано ОТО. Но еще раз подчеркнем (см. § 4 гл. 10), что положительные энергии в равновесном состоянии не обязательно связаны с ОТО, они могут возникать и по другим причинам.

Наиболее характерным для данной массы является критическое состояние, соответствующее минимуму E_e , отмеченное двумя черточками на рис. 51. Оно соответствует последнему равновесному состоянию в ряду с убывающей энтропией. В этом

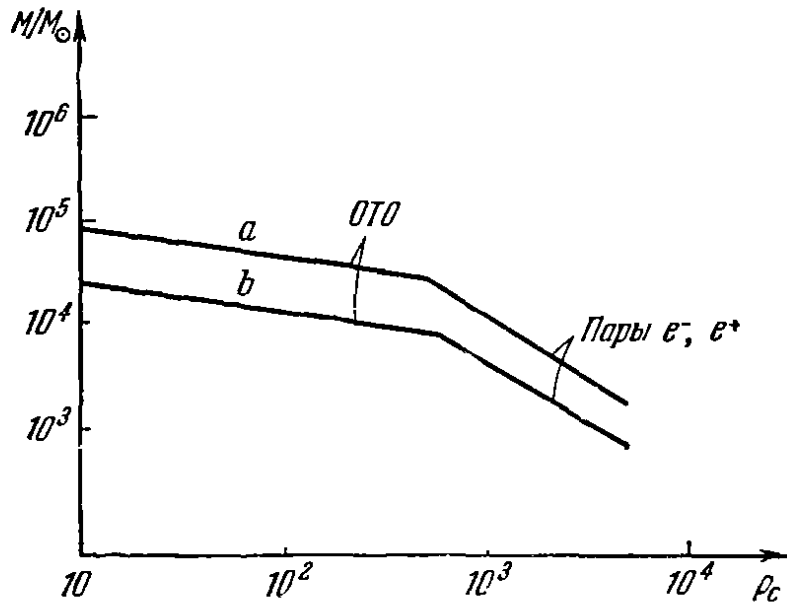


Рис. 52. Линии критических состояний массивных звезд:

a — для звезд из водорода, b — для звезд из железа.

состоянии звезда обладает минимальной возможной в равновесии энергией при данной массе и максимально возможной температуре и плотности.

Для $M/M_\odot > 10^5$ критическое состояние определяется эффектами общей теории относительности. В этом случае для критического состояния справедливы формулы (см. Фаулер, 1964):

$$\rho_c'' = 2,43 \cdot 10^{17} \frac{1}{\mu^3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-7/2} \text{ г/см}^3, \quad (10.9.15)$$

$$T_c'' = 1,23 \cdot 10^{13} \frac{1}{\mu} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1} \text{ }^\circ\text{К}, \quad (10.9.16)$$

$$E'' = -0,93 \cdot 10^{54} \frac{1}{\mu^2} \text{ эрг}. \quad (10.9.17)$$

Энергия E'' критического состояния не зависит от массы. Сравнивая эти выражения с критическими значениями для пар, находим, что влияние обоих эффектов становится одинаковым

при $M \approx 8 \cdot 10^3$ для железа и при $M \approx 3 \cdot 10^4$ для водорода. Линия критических состояний на диаграмме $M - \rho_c$ дана на рис. 52.

Критические состояния сверхмассивных звезд, равно как и весь процесс эволюции такой звезды, существенно зависят от вращения звезды. Влияние вращения будет рассмотрено в следующей главе.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Общие соотношения энергетического подхода и сравнение с методом Фаулера, 1964.

Ньютоновская теория. Решение Эмдена с $n=3$ запишем с помощью безразмерной функции отношения «текущей массы» m к полной M :

$$\rho = \rho_c \psi \left(\frac{m}{M} \right) = \rho_c \psi(z), \quad m = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr, \quad M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr, \quad z = \frac{m}{M}.$$

Рассмотрим сначала формулы для фиксированной энтропии, например, для $S=0$. В этом разделе будем писать кратко $E_1(\rho)$ вместо $E_1(\rho, S)$ и $\left(\frac{d}{d\rho}\right)$ вместо $\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)_S$. Задание $E_1(\rho)$ определяет давление

$$P = - \frac{dE_1}{dV} = \rho^2 \frac{dE_1}{d\rho};$$

Запишем *)

$$E_1 = A\rho^{1/3}, \quad P = \frac{1}{3} A\rho^{4/3}. \quad (10.9.1\text{п})$$

Подставим это E_1 в общее выражение для энергии звезды:

$$E = \int E_1 dm - G \int \frac{m dm}{r}, \quad (10.9.2\text{п})$$

и воспользуемся эмденовским распределением.

Получим

$$E = \int A(\rho_c \psi)^{1/3} dm - G \int \frac{m dm}{\left[\frac{M}{\rho_c} \xi \right]^{1/3}}, \quad (10.9.3\text{п})$$

$$\xi = \frac{3}{4\pi} \int_0^z \psi^{-1}(z) dz \quad (10.9.4\text{п})$$

и, переходя к безразмерной переменной интегрирования z ,

$$E = \alpha A \rho_c^{1/3} M - \beta G M^{5/3} \rho_c^{1/3}, \quad (10.9.5\text{п})$$

*) Аддитивная постоянная в энергии не существенна для задачи о равновесии, так как важна производная от энергии. Ее надо ввести и учесть, если нас будет интересовать абсолютное значение E .

где α и β — безразмерные числа:

$$\alpha = \int_0^1 \psi^{1/3}(z) dz, \quad \beta = \int_0^1 \xi^{-1/3}(z) z dz. \quad (10.9.6п)$$

Находим равновесную массу M_{e0} (значок e — equilibrium — равновесие, значок 0 — без поправок):

$$\frac{dE}{d\rho_c^{1/3}} = \alpha AM - \beta GM^{5/3} = 0, \quad M_{e0} = \left(\frac{\alpha A}{\beta G} \right)^{3/2}. \quad (10.9.7п)$$

Для массы, близкой к равновесной $M = M_e + \mu$, находим, разлагая в ряд,

$$E = -\frac{2}{3} \alpha A \mu \rho_c^{1/3} = -\frac{2}{3} \beta G M_e^{2/3} \mu \rho_c^{1/3} = -k \mu \rho_c^{1/3}, \quad (10.9.8п)$$

где через k обозначена $\frac{2}{3} \beta G M_e^{2/3}$. Вводим произвольную малую поправку в уравнение состояния

$$E_1 = A \rho^{1/3} + f(\rho), \quad P = \frac{1}{3} A \rho^{4/3} + \rho^2 f'(\rho), \quad (10.9.9п)$$

$$\Delta E_1 = f(\rho), \quad \Delta P = \rho^2 f'(\rho).$$

Соответствующая поправка в энергии звезды

$$\Delta E = \int_0^M f(\rho) dm = \int_0^M f(\rho_c \psi(z)) dm. \quad (10.9.10п)$$

Считаем поправку малой, а также малым $\mu = M - M_e$. Поправку вычисляем при $M = M_{e0}$ и складываем ее с изменением энергии из-за отклонения M от M_e ; получаем (постоянная k определена формулой (10.9.8п))

$$E = -k \mu \rho_c^{1/3} + \int_0^{M_{e0}} f \left[\rho_c \psi \left(\frac{m}{M_e} \right) \right] dm. \quad (10.9.11п)$$

Находим условие равновесия:

$$\frac{dE}{d\rho_c} = 0 = -\frac{1}{3} k \mu \rho_c^{-2/3} + \int_0^{M_{e0}} f' \left[\rho_c \psi \left(\frac{m}{M_e} \right) \right] \psi \left(\frac{m}{M_e} \right) dm. \quad (10.9.12п)$$

Интеграл в первой части (10.9.12п) можно записать так (см. определения в начале приложения):

$$\int f' \psi dm = \frac{1}{\rho_c} \int f' \rho_c \psi dm = \frac{1}{\rho_c} \int f' \rho dm = \frac{1}{\rho_c} \int \frac{\Delta P}{\rho} dm. \quad (10.9.13п)$$

Из формул (10.9.12п) и (10.9.13п) находим μ_e :

$$\mu_e = \frac{3}{k} \rho_c^{-1/3} \int \frac{\Delta P}{\rho} dm; \quad M_e = M_{e0} + \mu_e \quad (10.9.14п)$$

и выражение для равновесной энергии, подставляя (10.9.14п) в (10.9.11п) и обозначая $1/\rho = V$:

$$E_e = -3 \int \frac{\Delta P}{\rho} dm + \int f dm = \int_0^{M_{e0}} (\Delta E_1 - 3V \Delta P) dm. \quad (10.9.15п)$$

Энергия и давление нулевого приближения удовлетворяют соотношению

$$E_{1,0} - 3VP_0 = 0. \quad (10.9.16п)$$

Следовательно, к выражению под интегралом можно прибавить (10.9.16п); получим

$$E_e = \int_0^{M_{e0}} (E_1 - 3VP) dm. \quad (10.9.17п)$$

Наконец, введем, следуя Фаулеру, безразмерную величину

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{E_1}{3PV} = \frac{E_1 \rho}{3P}, \quad E_1 - 3VP = \frac{\tilde{\varepsilon} - 1}{\tilde{\varepsilon}} E_1 = (\tilde{\varepsilon} - 1) E_1 \quad (10.9.18п)$$

(последнее равенство следует из того, что предполагается $\tilde{\varepsilon} - 1 \ll 1$, и вся теория строится в первом порядке по $\tilde{\varepsilon} - 1$):

$$\begin{aligned} E_e &= \int (\tilde{\varepsilon} - 1) E_1 dm = (\tilde{\varepsilon} - 1) \int E_1 dm = \\ &= (\tilde{\varepsilon} - 1) \int E_{1,0} dm = (\tilde{\varepsilon} - 1) \int \frac{Gm dm}{r}. \end{aligned} \quad (10.9.19п)$$

Это выражение совпадает с выражением Фаулера. Воспроизведем его вывод:

$$E = \int E_1 dm - \int \frac{Gm dm}{r}. \quad (10.9.20п)$$

Преобразуем первый интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \int E_1 dm &= \int E_1 \rho dV = - \int V d(E_1 \rho) = -3 \int V d(\tilde{\varepsilon} P) = \\ &= 4\pi \int r^3 \tilde{\varepsilon} dP - 4\pi \int r^3 P d\tilde{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (10.9.21п)$$

В первый интеграл Фаулер подставляет выражение dP из уравнения равновесия

$$dP = -\rho \frac{Gm}{r^2} dr = -\frac{Gm dm}{4\pi r^4}; \quad (10.9.22п)$$

вторым интегралом Фаулер пренебрегает; окончательно получается выражение

$$E = \int \tilde{\varepsilon} \frac{Gm dm}{r} - \int \frac{Gm dm}{r} = \int (\tilde{\varepsilon} - 1) \frac{Gm dm}{r} = (\tilde{\varepsilon} - 1) \int \frac{Gm dm}{r}. \quad (10.9.23п)$$

При $\tilde{\epsilon} = \text{const}$ выражение совпадает с нашим, однако при $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(m)$ пренебрежение $4\pi \int r^3 P d\tilde{\epsilon}$ дает ошибку порядка рассматриваемого эффекта, в результате в ответе Фаулера усреднение $\tilde{\epsilon}$ происходит по неправильному закону, с весом $m dm/r$ вместо веса $E_1 dm \sim P dV$. Более существенно, однако, что Фаулер ограничивается рассмотрением $E_e(\rho_c)$, тогда как полное понимание равновесия, его устойчивости и других свойств требует знания всей функции двух или трех переменных $E(M, \rho_c)$ при $S=0$ или $E(S, M, \rho_c)$ вблизи равновесия.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Общие соотношения между E_e и E . Общим свойством задачи является тот факт, что в нулевом приближении энергия пропорциональна $\rho_c^{1/3}$, причем коэффициент обращается в нуль для состояния безразличного равновесия. Таким образом, общая постановка задачи такова: для холодной звезды при $S=0$ энергия записывается в виде ($\mu = M - M_e$):

$$E = -k\mu\rho_c^{1/3} + \Phi(\rho_c), \quad (10.9.24\text{п})$$

где Φ учитывает отношение от нулевого приближения. Для горячей звезды $M = \text{const}$, $s = S - S_e$

$$E = bs\rho_c^{1/3} + \Phi(\rho_c). \quad (10.9.25\text{п})$$

Требуется найти равновесие с учетом поправочной функции Φ . Функция Φ при учете одних только поправок на уравнение состояния дается выражением

$$\Phi(\rho_c) = \int (E_1 - 3PV) dm = \int (\tilde{\epsilon} - 1) E_1 dm, \quad (10.9.26\text{п})$$

причем интегрирование производится по эмденовской кривой $n=3$ нулевого приближения, для $M = M_e$ или $S = S_e$ с единственным свободным параметром ρ_c , от которого и зависит полная энергия. С учетом поправки на ОТО для Φ имеем

$$\Phi(\rho_c) = \int (E_1 - 3PV) dm = -0,93 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3} = \Phi_0(\rho_c) - \text{const} \rho_c^{2/3}; \quad (10.9.27\text{п})$$

с учетом ОТО изменился только вид функции Φ , но не меняется характер уравнений (10.9.25п). В формуле (10.9.27п) Φ_0 есть величина, вычисленная по (10.9.26п) без учета ОТО; смысл Φ виден из самой формулы (10.9.27п). Постановка задачи заключается в следующем: дано уравнение (для определенности (10.9.25)) $E(s, \rho_c)$. Требуется найти $E_e(\rho_c)$ из условия равновесия и найти границу существования равновесных конфигураций. Удобно ввести $x = \rho_c^{1/3}$ в качестве переменной. Получим *)

$$\left. \begin{aligned} E &= bsx + \Phi(x), \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 0 = bs + \Phi'(x), \quad s_e = -\frac{\Phi'}{b}, \\ E_e(x) &= -x\Phi'(x) + \Phi(x) = -x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi}{x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.9.28\text{п})$$

*) Любопытно, что поправка на ОТО пропорциональна $\rho_c^{2/3} \sim x^2$ и отрицательна при данной конфигурации: $\Delta E = -nx^2$; отсюда $\Delta E_e = -x\Phi' + \Phi = +nx^2$; поправка на ОТО в равновесной энергии ΔE_e положительна, равна по величине и противоположна по знаку поправке в энергии данной конфигурации ΔE :

$$\Delta E = -\Delta E_e.$$

Условие границы существования решений — горизонтальный перегиб:

$$\frac{\partial E}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0, \quad (10.9.29\text{п})$$

$$b s_{\text{кр}} + \varphi'(x_{\text{кр}}) = 0 \quad (10.9.30\text{п})$$

$$\varphi''(x_{\text{кр}}) = 0. \quad (10.9.31\text{п})$$

При этом (10.9.31п) позволяет найти $x_{\text{кр}}$, т. е. критическую плотность, а после этого (10.9.30п) дает значение энтропии на критической кривой (или критическое значение массы μ в аналогичной задаче с фиксированной энтропией и переменной массой). Заметим, что

$$\frac{dE_e}{dx} = -x\varphi''(x) - \varphi'(x) + \varphi'(x) = -x\varphi''(x) = -x \left. \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right|_s.$$

Следовательно, условие горизонтального перегиба на кривой $E(x, s)$ при $s = \text{const}$ совпадает с условием минимума кривой равновесных состояний

$$E_e(x) = E(x, s_e(x)).$$

Устойчивость данного равновесного состояния зависит, очевидно, от знака $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ в точке, где $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$. Из формулы следует, что на спадающей ветви кривой $E_e(x)$ решения устойчивы $\frac{\partial E_e}{\partial x} < 0$, $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} > 0$, утверждение, сделанное выше (в тексте параграфа), доказано формально.

§ 10. Критические состояния звезд средней массы

Рассмотрим теперь звезды, имеющие массу, промежуточную между $1,2 M_{\odot}$ и $10^3 M_{\odot}$, и найдем критические состояния для таких звезд. Мы переходим, таким образом, к расчету линии bb' на рис. 34. Соображения о факторах, приводящих к неустойчивости, высказывались, например, в работах Хойла и Фаулера (1960, 1965); Фаулера и Хойла (1964); Зельдовича (1963а). Конкретные численные значения при упрощающих предположениях о химическом составе найдены в работах Г. С. Бисноватого-Когана (1966) и Г. С. Бисноватого-Когана и Я. М. Каждана (1966); ниже излагаются результаты этих работ.

Звезда с массой больше предела белых карликов может находиться в равновесии только при температуре, отличной от нуля*), и потеря устойчивости достигается при $T \neq 0$.

Начнем с исследования звезд, масса которых немного превышает предел массы холодных белых карликов. Для таких

*) Для нахождения критического состояния звезд с $M > M_{\text{чандр}}$, разумеется, мы рассматриваем звезды с ρ_c того же порядка, что у белых карликов, и считаем, что плотность меньше ядерной. Как мы видели (см. § 5 гл. 10), при ядерной плотности в равновесии могут быть холодные звезды с $M \leq 2 M_{\odot}$.

звезд температуры вблизи критического состояния еще настолько малы, что основной вклад в энергию и давление дают вырожденные электроны, причем вырождение это вследствие большой плотности релятивистское. Рассмотрим, как малые поправки, вклад в энергию за счет ненулевой температуры электронов за счет отличия вырождения от чисто релятивистского вырождения, вклад в энергию за счет невырожденных ядер, а также эффектов ОТО

Теплопроводность вырожденных электронов чрезвычайно велика, поэтому будем считать звезду изотермической*). Так как давление в основном определяется вырожденными электронами и мало зависит от T , $\gamma \approx 4/3$, то распределение вещества в звезде принимаем эмденовским с $n=3$. Как уже не раз подчеркивалось, благодаря экстремальным свойствам функции распределения результат слабо чувствителен к виду этой функции. Используем теперь общие соотношения энергетического подхода, полученные в приложении к § 9 этой главы.

Запишем полную энергию звезды:

$$E = M \int_0^1 E_1(\rho, T) dz - 0,639GM^{5/3}\rho_c^{1/3} - 0,93 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3} \quad (10.10.1)$$

здесь $z = m/M$; первое слагаемое — энергия плазмы, второе — ньютоновская гравитационная энергия для политропы с $n=3$, третье — поправка за счет ОТО. Изменение энергии звезды за счет нейтронизации пока не учитываем.

С помощью общих термодинамических выражений для энергии и энтропии (см. раздел II) можно получить следующие выражения вблизи ультрарелятивистского вырождения электронов:

$$E_1 = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \frac{\hbar c \rho^{1/3}}{(\mu_e m_p)^{4/3}} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{m_e^2 c^3}{\hbar (\mu_e m_p)^{2/3} \rho^{1/3}} + \\ + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{(kT)^2}{\hbar c (\mu_e m_p)^{2/3} \rho^{1/3}} + \frac{3}{2} \frac{kT}{Am_p}, \quad (10.10.2)$$

$$S = \pi \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{kT}{\hbar c (\mu_e m_p)^{2/3} \rho^{1/3}} + \\ + \frac{k}{Am_p} \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[\left(\frac{kT Am_p}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \frac{g Am_p}{\rho} \right] \right\}. \quad (10.10.3)$$

Здесь ρ — плотность массы барионов, A — атомный вес ядра g — статистический вес ядра. Массой электронов пренебрегаем

*) Разумеется, исключая узкий поверхностный слой, который в энергетическом балансе несуществен.

Отличие полной массы от массы покоя учитывается в (10.10.1) в поправке на ОТО (см. приложение к § 4 гл. 10) и не входит в (10.10.2) и (10.10.3).

Написанные выражения справедливы при температурах меньше температуры вырождения электронов и плотностях, больших плотности релятивистского вырождения (см. раздел II). Для железной звезды эти условия дают:

$$T < 5 \cdot 10^7 \rho^{1/3} \text{ }^\circ\text{K}, \quad (10.10.4)$$

$$\rho > 2,2 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3. \quad (10.10.5)$$

Условия равновесия звезды получим, приравнявая нулю производную полной энергии (10.10.1) по $\rho_c^{1/3}$ при постоянной в каждом элементе вещества энтропии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \rho_c^{1/3}} &= 3\rho_c^{-4/3} \int_0^1 P(\rho T) \frac{dx}{\varphi(x)} - \\ &- 0,639GM^{5/3} - \\ &- 1,86 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{1/3} = 0. \quad (10.10.6) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $-\left(\frac{\partial E_1}{\partial \rho}\right)_S = P$, $\varphi(x)$ — функция Эмдена для $\gamma = 4/3$. Используя теперь выражения (10.10.2) и (10.10.3)

для термодинамических функций, получаем серию равновесных состояний звезды данной массы, в которой ρ_c является параметром (рис. 53).

В последовательности равновесных состояний есть критическая точка, отделяющая устойчивые состояния от неустойчивых. Для нахождения этого критического состояния нужно к условию (10.10.6) добавить условие равенства нулю второй производной E по $\rho_c^{1/3}$:

$$\frac{\partial^2 E}{(\partial \rho_c^{1/3})^2} = 9\rho_c^{-5/3} \int_0^1 \left(\gamma - \frac{4}{3}\right) P(\rho, T) \frac{dx}{\varphi(x)} - 1,86 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} = 0. \quad (10.10.7)$$

Еще раз подчеркнем, что мы не учитываем пока нейтронизацию, под интегралом (10.10.7) всегда $\gamma > 4/3$, и потеря устойчивости

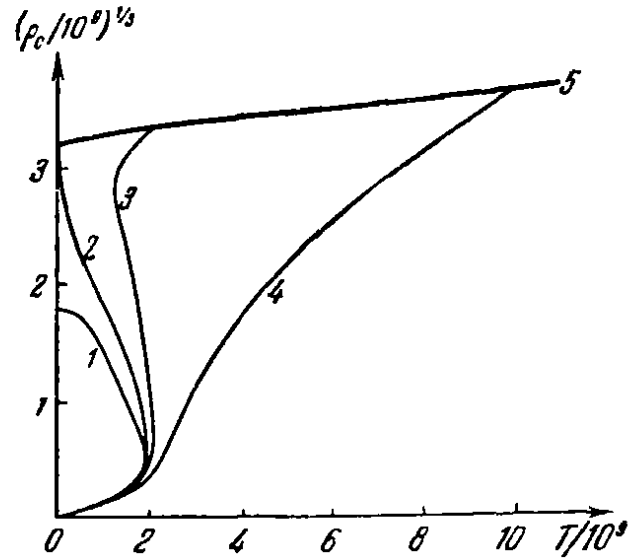


Рис. 53. Последовательности устойчивых равновесных состояний $M = \text{const}$ и кривая критических состояний звезд средней массы.

1 — $M = 1,19 M_\odot < M_{\text{чандр}}$;

2 — $M = 1,2, M_\odot = M_{\text{чандр}}$;

3 — $M = 1,23 M_\odot > M_{\text{чандр}}$;

4 — $M = 1,36 M_\odot > M_{\text{чандр}}$;

5 — критические состояния потери устойчивости.

происходит за счет малых эффектов ОТО (последнее слагаемое в (10.10.7)).

Кривая критических состояний изображена на диаграмме $\rho_c - T_c$ (см. рис. 53). Выше этой кривой нет устойчивых состояний. На рис. 54 изображены кривые $M = (M(\rho_c))_{T=\text{const}}$ (такие кривые без учета ОТО были рассчитаны Баглин (1965); об устойчивости см. ее работу (1966)) и нанесена кривая потери устойчивости. Линии $M = \text{const}$ есть линии эволюции звезды без потери массы. При $M < M_{\text{чандр}}$ линия эволюции заканчивается при $T=0$ и не доходит до кривой потери устойчивости. При $M > M_{\text{чандр}}$ медленная эволюция заканчивается потерей устойчивости.

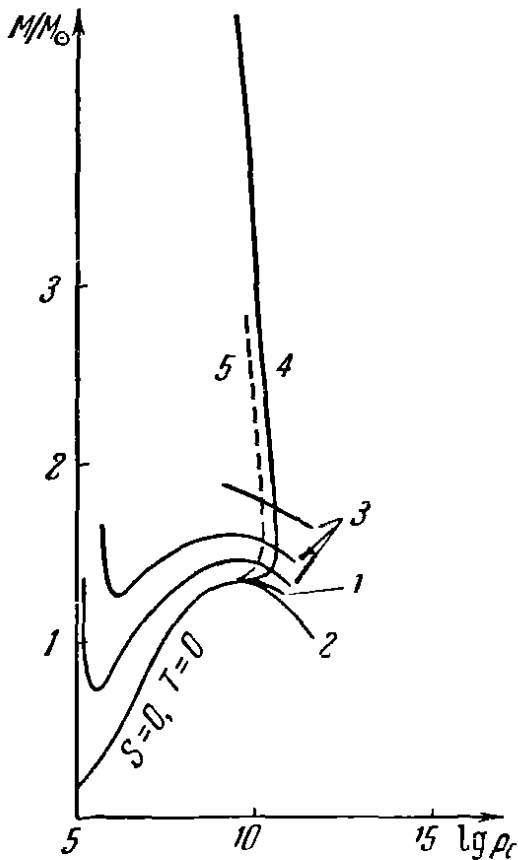


Рис. 54. Изотермы и линия критических состояний на диаграмме $\rho_c - M$.

1 — $S=0, T=0$ без учета нейтронизации, но с учетом ОТО; 2 — $S=0, T=0$ с учетом нейтронизации и ОТО; 3 — изотермы (схематично); 4 — линия критических состояний без учета нейтронизации, но с учетом ОТО; 5 — линия критических состояний с учетом нейтронизации и ОТО.

рис. 54 идет вправо почти горизонтально. При $T > 10^9$ °К основную роль в температурной добавке играют уже электроны, критическая масса быстро увеличивается, а кривая потери устойчивости идет вверх и влево.

До сих пор мы не учитывали нейтронизацию. Между тем для звезды из железа *) при небольшом превышении массы

*) Ядерный синтез при $T \approx 3 \cdot 10^9$ и $\rho \approx 10^9$ г/см³ моментально приводит к выгоранию всего ядерного горючего.

Следует обратить внимание на то, что максимумы кривых постоянной температуры не являются критическими точками. Действительно, уже неоднократно подчеркивалось, что критерием устойчивости является $\left. \frac{\partial M}{\partial \rho_c} \right|_{S=\text{const}}$, а не $\left. \frac{\partial M}{\partial \rho_c} \right|_{T=\text{const}}$. Оказывается, что потеря устойчивости наступает правее максимума кривых $T=\text{const}$.

При малых температурах ($T < 10^9$ °К) основной вклад в поправку для энергии дают невырожденные ядра. Для ядер $\gamma = 5/3$ и они оказывают стабилизирующее действие, хотя и мало влияют на критическую массу. В результате критическая плотность увеличивается и кривая потери устойчивости на

над критической именно нейтронизация должна вызывать неустойчивость, ибо, как показано в § 4 гл. 10, при $T=0$, $S=0$ нейтронизация железа начинается при плотностях на полтора порядка меньше критической за счет ОТО. Расчеты потери устойчивости горячих белых карликов за счет нейтронизации пока не сделаны. Они требуют учета ядерных процессов, идущих при отличной от нуля температуре.

Качественно кривая потери устойчивости должна сохранить свой вид, но сместиться влево примерно так, как это изображено на рис. 54 пунктиром.

Обратимся теперь к интервалу масс $5M_{\odot} < M < 10^3 M_{\odot}$. Для таких звезд центральные температуры вблизи критического состояния настолько велики, что эффекты температуры уже не могут рассматриваться как малые поправки в энергию. На всем протяжении эволюции соотношение между ρ и T таково, что вырождение электронного газа не наступает. Однако вступает в игру новый фактор — диссоциация железа на α -частицы, p и n (см. гл. 8), а для больших масс $M \approx 10^3 M_{\odot}$ и рождение пар e^+ и e^- . Эффекты ОТО по-прежнему считаются малыми.

В работе Г. С. Бисноватого-Когана и Я. М. Каждана решение уравнений (10.10.6) и (10.10.7) проведено путем численного интегрирования с использованием уравнения состояния В. С. Имшенника и Д. К. Надежина (см. гл. 7 и § 4 гл. 8). В этих расчетах звезды считались изэнтропическими, так как электроны уже невырождены и их теплопроводность невелика.

Результаты расчетов приведены в таблицах XII и XIII и на рис. 55.

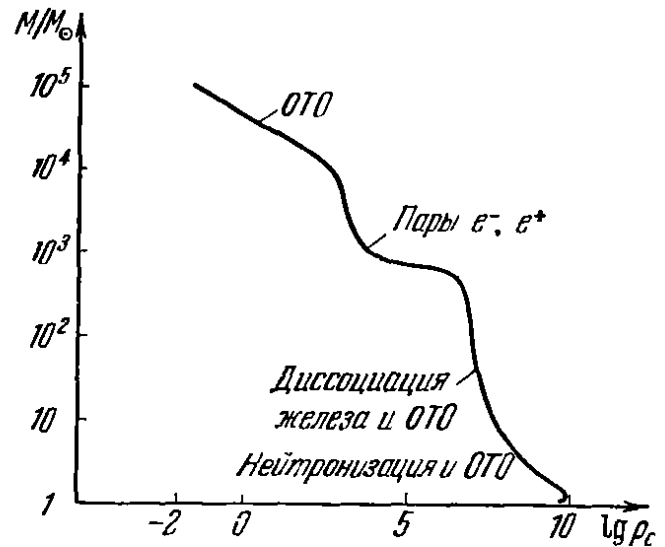


Рис. 55. Кривая потери устойчивости железных звезд; на отдельных участках указана причина потери устойчивости.

Таблица XII

Значение ρ_c , T_c и S в точке потери устойчивости звездами разных масс

M/M_{\odot}	$\rho_c/10^7 \text{ г/см}^3$	$T_c/10^9$	$S/10^9 \text{ эрг/г.град}$	M/M_{\odot}	$\rho_c/10^7 \text{ г/см}^3$	$T_c/10^9$	$S/10^9 \text{ эрг/г.град}$
5	10,2	6,72	0,205	100	0,94	6,38	0,99
10	4,2	6,40	0,316	500	0,31	5,99	2,13
50	1,0	5,96	0,682	1000	0,00063	1,12	2,76

В таблице XIII дана полная энергия звезды $E_{кр}$ в критическом состоянии и энергия на единицу массы $\frac{E_{кр}}{M}$.

Таблица XIII

Полная энергия звезды в критическом состоянии и энергия на единицу массы

M/M_{\odot}	1,2	5	10	10^5
$\frac{E_{кр}}{10^{50}}$ эрг	-4,74	-13,4	-18,8	-37
$(E_{кр}/M), 10^{17}$ эрг/г	-2,0	-1,3	-0,94	-0,018

На рис. 55 приведена зависимость центральной плотности звезды из железа в критическом состоянии от массы для всего интервала $1,2M_{\odot} < M < 10^5 M_{\odot}$.

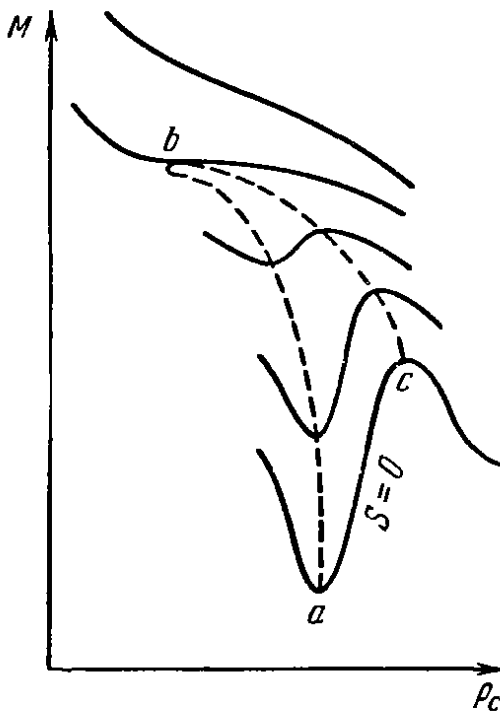


Рис. 56. Область устойчивости нейтронных звезд.

Сплошные линии — изэнтропы. ab — геометрическое место минимумов, bc — геометрическое место максимумов.

Для масс, близких к $1,2M_{\odot}$, потеря устойчивости происходит за счет нейтронизации вещества, некоторую роль играют эффекты ОТО. При $5M_{\odot} < M < 500M_{\odot}$ критическое состояние обусловлено распадом железа на He^4 , p и n и эффектами ОТО. С ростом массы роль ОТО уменьшается. При массе несколько меньшей, чем $10^3 M_{\odot}$, потеря устойчивости происходит уже за счет пар e^+ , e^- , так как давление в этих звездах обусловлено в основном давлением света. При меньших массах роль света в давлении мала, поэтому и рождение пар не приводит к критическому состоянию. Когда для критического состояния существенным становится рождение пар e^+ , e^- резко уменьшается $\rho_{кр}$. Наконец при $M \geq 10^{14} M_{\odot}$ критическое состояние вновь определяется эффектами ОТО (см. § 9).

Для больших масс, как показали расчеты, невозможны устойчивые равновесные состояния при большой плотности $\rho > \rho_{кр}$, как это имело место для холодной звезды в нейтронном

состоянии. Эффекты ОТО приводят к неустойчивости, несмотря на то, что в горячей плазме при больших T_c возможны $\gamma > 4/3$.

Следовательно, кривая $M(\rho_c)|_{S=\text{const}}$ для больших горячих масс имеет один максимум, а не два, как для холодных звезд*). Исчезновение второго максимума с ростом энтропии происходит путем слияния его с минимумом. При некоторой энтропии S_0 второй максимум и минимум исчезают, схематически это показано на рис. 56. Точка слияния второго максимума с минимумом найдена в работе Г. С. Бисноватого-Когана (1967а). Она лежит при $M = 70M_\odot$ $\rho_c \approx 2 \cdot 10^{10}$ г/см³.

Итак, мы выполнили задачу, поставленную в § 3: определили границы возможных устойчивых в целом равновесных состояний звезд на диаграмме масса — плотность**).

*) Осцилляции кривой $M(\rho_c)|_{S=0}$ за вторым максимумом несущественны (см. § 7 гл. 10).

**) О специфических видах неустойчивости, дающих добавочные ограничения, см. в последующих параграфах.

ГЛАВА 11

ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД И ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Эволюция звезды с массой, меньшей «ОВ» предела

Теперь можно приступить к анализу эволюции звезды. Мы не будем здесь подробно останавливаться на всех этапах эволюции, отсылая читателя к монографиям, указанным во введении к данному разделу. Напомним общую ситуацию и сделаем несколько замечаний, необходимых для дальнейшего изложения.

Согласно современным представлениям звезды образуются из первоначально разреженной среды путем гравитационной конденсации диффузной материи, состоящей главным образом из водорода. Звезда эволюционирует (сжимается) по мере высвечивания энергии. Можно сказать, что в фазе сжатия звезда светит за счет гравитационной энергии. На этот источник энергии звезд указывал еще Кельвин. Температуры еще низки, и выделение ядерной энергии пренебрежимо мало. Звезда находится в гидростатическом равновесии (см. § 1 гл. 10) без внутренних источников энергии. Продолжительность этой фазы относительно невелика и составляет

$$\tau \approx 5 \cdot 10^7 \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 \text{ лет.}$$

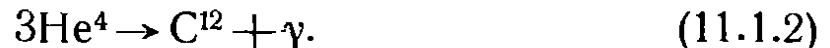
При излучении звездной энергии и сжатии звезды, в соответствии с отрицательной теплоемкостью, увеличивается температура, которая, наконец, повышается в недрах звезды настолько, что начинают идти ядерные реакции превращения водорода в гелий. Звезда при этом находится на главной последовательности диаграммы Герцшпрунга — Рессела (температура — светимость). В. А. Амбарцумян (Научные труды, том 2, стр. 179, 1960) с сотрудниками рассматривают другой возможный эволюционный путь звезды до начала ядерных реакций (до прихода на главную последовательность), а именно, возникновение протозвезд не из диффузного вещества, а из сверхплотных *D*-тел, природа которых пока не известна. Это не меняет

дальнейшего эволюционного пути звезды, который определяется массой, энтропией и начальным (на главной последовательности) химическим составом, а также моментом вращения и магнитным полем звезды. С началом ядерных реакций звезда находится в состоянии гидродинамического и теплового равновесия. Это самый длительный период активной жизни звезды. Его продолжительность определяется запасами водорода в ядре (только там температура достаточно высока для ядерных реакций) и скоростью переработки водорода в гелий. Очевидно, что этот период τ пропорционален M/L , где L — светимость звезды. Расчеты дают, что масса ядра, где выгорает водород, порядка $0,1 M$, откуда следует

$$\tau \approx 10^{10} \frac{L_{\odot}}{L} \frac{M}{M_{\odot}} \text{ лет.} \quad (11.1.1)$$

Неоднородность химического состава, вызванная выгоранием водорода в центре, ведет к перестройке структуры звезды; ее внешняя оболочка распухает, а ядро сжимается.

В достаточно массивных звездах ($M > M_{\odot}$ и $M \sim M_{\odot}$) температура в ядре поднимается настолько, что начинают идти реакции тройного столкновения α -частиц с образованием C^{12} :



Детальный расчет дальнейшей эволюции крайне затруднителен; с одной стороны, внутреннее строение звезды становится очень сложным: появляются источники энергии в сферических слоях, окружающих ядро, сложная структура зон лучистого и конвективного переноса энергии; с другой стороны, и это особенно важно, становится возможным проявление различного рода неустойчивостей. Об этих неустойчивостях и об их значении подробно говорится в § 5 этой главы.

Возможно, звезда на этом этапе может эффективно терять свою массу как медленным стационарным истечением с поверхности (см. об этом § 5 гл. 11 и § 7 гл. 12), так и путем взрывов. Взрыв может привести к разрушению и всей звезды. Сейчас мы не будем рассматривать эти процессы и вернемся к ним далее, в § 5 этой главы.

Предположим, что после всех изменений на последних стадиях звезда имеет массу M . Как уже отмечалось, в соответствии с отрицательной теплоемкостью, истощение запасов ядерного горючего, если таковое еще имеется, и излучение энергии приводят к сжатию звезды, увеличению ее температуры.

Звезда по равновесным состояниям (минимумам энергетических кривых) будет перемещаться на диаграмме $M - \rho$ (рис. 57)

слева направо по горизонтальной линии ($M = \text{const}$). Рассмотрим сначала эволюцию звезд с $M < 1,2 M_{\odot}$ (M_1 на рис. 57). Сжатие будет продолжаться до тех пор, пока в основной массе газа не наступит вырождение электронов. После этого сжатие резко замедлится, так как давление слабо зависит от температуры, и за всю последующую эволюцию давление P

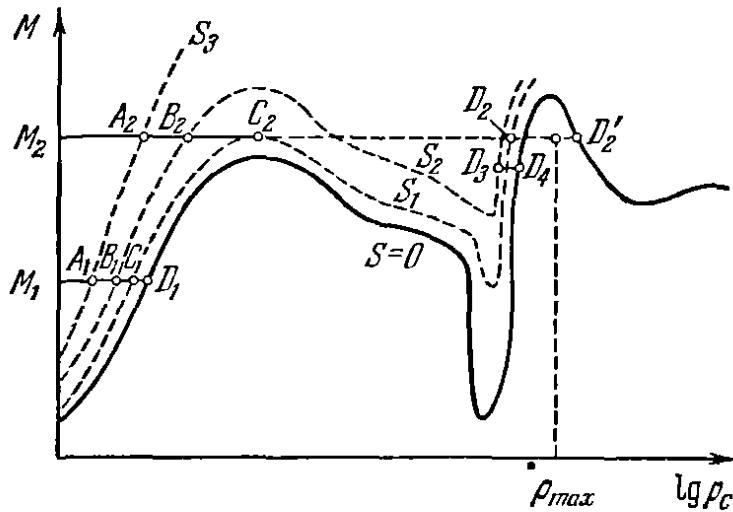


Рис. 57. Схема эволюции звезд M_1 и M_2 с массой меньше, чем предел «ОВ». Пунктиры — изэнтропы.

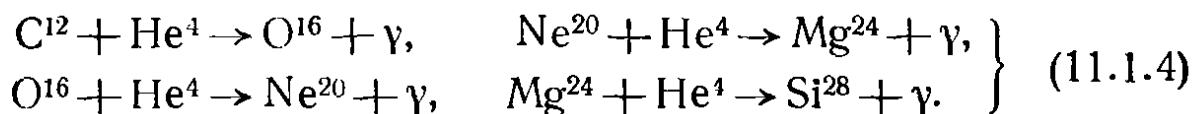
уменьшится примерно в два раза, а звезда достигнет точки D_1 . До начала вырождения газа электронов при сжатии звезды ее температура увеличивается, ее теплоемкость при этом отрицательна. После наступления вырождения электронов при продолжающемся, хотя и замедленном, сжатии звезда, излучая, остывает; ее температура, пройдя через максимум, падает. Теплоемкость звезды теперь уже положительна. Последовательность равновесных состояний звезды с $M = 1,19 M_{\odot}$ состояний на диаграмме $\rho_c \rightarrow T_c$ при подходе к точке D_1 дана на рис. 53 (кривая 1). В соответствии с положительной теплоемкостью звезды в этой стадии с увеличением ρ_c в ходе остывания и сжатия ее температура T_c уменьшается. Максимум температуры по порядку величины соответствует энергии вырождения электронов в конечном состоянии D_1 . Для звезд с массой $\approx M_{\odot}$ максимум T_c составляет $\approx 10^9$ °К. В дальнейшем при остывании всякие термоядерные реакции с эффективным выделением энергии прекращаются, вырождение электронов становится все более сильным. Эта последняя стадия жизни звезд носит название стадии белых карликов. Белые карлики медленно остывают, излучая главным образом за счет тепловой энергии атомных ядер, находящихся еще в невырожденном состоянии. Процесс остывания длится миллиарды лет (см. Шварцшильд (1958), Шацман (1958), Местель (1965)). Как мы видим, в течение всей эволюции звезда на диаграмме M, ρ медленно перемещается слева направо, стремясь к кривой, соответствующей $T=0$ ($S=0$).

Окончательный химический состав белых карликов зависит от тех ядерных реакций, которые протекали на стадии их сжатия и разогрева, а возможность протекания тех или иных реакций в свою очередь зависит от температуры. Во всех звездах

с $M \gtrsim 0,3 M_{\odot}$ в процессе эволюции заведомо достигались температуры гораздо выше $T=10^7$, при которой уже начинается ядерная реакция превращения Н в He^4 . Рассчитаем максимальную температуру, которая достигается в звезде массы M . Мы уже говорили, что эта температура по порядку величины равна температуре вырождения газа электронов в конечном состоянии звезды: $T_{\max} \approx T$ вырождения и пропорциональна $\sim \rho^{2/3}$. Используя уравнения состояния и усредненное уравнение равновесия звезды, легко получить, что $T_{\max} \sim \mu^2 M^{4/3}$. Численные расчеты Эпика 1957 дают для T_{\max} в центре звезды

$$\lg T_c = 8,6 + 2 \lg \mu + \frac{4}{3} \lg \frac{M}{M_{\odot}}. \quad (11.1.3)$$

По оценке Эпика температура, близкая к максимальной, сохраняется в течение $\sim 10^{14}$ сек. Отсюда можно оценить, как ядерные реакции гелия с C^{12} и другими элементами изменят химический состав звезды. Если $T > 3 \cdot 10^8$ °К, то процесс тройного столкновения α -частиц (11.1.2) приводит к образованию C^{12} . Одновременно с этой реакцией идут следующие:



По расчетам Эпика белые карлики с $M > 0,5 M_{\odot}$ должны состоять главным образом из Mg^{24} ; более тяжелые ядра не образуются благодаря тому, что исчерпывается весь гелий. В звездах с массой около $(0,4 \div 0,45) M_{\odot}$ в центральных частях значительная доля гелия еще испытывает подобное превращение, но при $M < 0,4 M_{\odot}$ белый карлик в основном должен состоять из гелия*). Новые расчеты см. Такарада, Сато, Хаяши (1966).

*) Время эволюции звезд с $M < 0,3 M_{\odot}$ согласно (11.1.1) больше возраста Метагалактики. Чем меньше M , тем меньше максимальная возможная температура. Поэтому в звездах с достаточно малой M температура в будущем (когда их эволюция пойдет достаточно далеко) может обеспечить протекание ядерных реакций, останавливающихся только на He^3 . Казалось бы, эти звезды в конце эволюции (при $s=0$) должны состоять из He^3 . Но, как отмечено в § 4 гл. 10, энергия электронов, необходимая для нейтронизации He^3 , очень мала и составляет всего 18 кэв. Поэтому в ходе эволюции звезды He^3 будет превращаться в тритий Т, а последний уже путем обычной термической реакции превратится в He^4 . Таким образом, эти звезды в конце эволюции будут состоять из He^4 . Но при массе $M < 0,1 M_{\odot}$ и при начальном химическом составе Н и He вырождение электронов наступит раньше, чем температура в ходе медленного сжатия поднимется достаточно высоко для протекания каких бы то ни было ядерных реакций. Такие звезды светят за счет гравитационной энергии и в конце эволюции будут иметь тот же химический состав, что и в начале эволюции, т. е. в основном Н.

Проследим теперь последние этапы эволюции звезды с массой $1,6 = M_{\odot} \geq M \geq 1,2 M_{\odot}$. В ходе падения энтропии такая звезда также медленно продвигается слева направо по квазиравновесным состояниям от A_2 к C_2 вдоль линии $M_2 = \text{const}$ на рис. 57. В § 10 гл. 10 отмечалось, что при $M > 1,2 M_{\odot}$ потеря устойчивости звезды наступает правее максимума кривых $M(\rho_c) |_{T=\text{const}}$ (см. рис. 54). Значит, в ходе эволюции на последних стадиях достигается минимум температуры, после чего звезда вновь имеет отрицательную теплоемкость, и температура при сжатии перед потерей устойчивости вновь увеличивается. Последовательность равновесных состояний такой звезды дана на диаграмме $\rho_c - T_c$ на рис. 53 (кривые 3, 4). После достижения критической точки C_2 (см. рис. 57) наступает потеря устойчивости и происходит катастрофическое сжатие со скоростью порядка скорости свободного падения

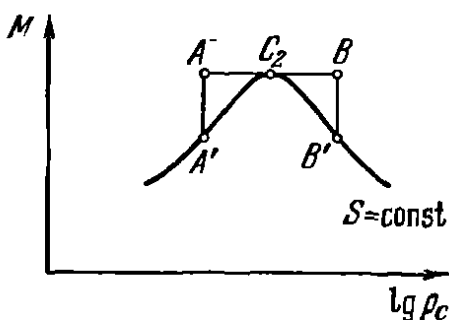


Рис. 58. Звезда в точке «срыва» C_2 .

Отклонение от равновесия влево (точка A) вызывает появление силы, возвращающей звезду в C_2 . Отклонение вправо (B) вызывает «срыв» — гидродинамическое сжатие звезды.

В самом деле, пусть звезда находится в точке «срыва» в максимуме изэнтропии на диаграмме $M - \rho_c$ (рис. 58). Возмущения, сдвигающие звезду вправо или влево (точки A и B на рис. 58), выводят ее из равновесия. В обоих случаях равновесные конфигурации, соответствующие возмущенной плотности, лежат ниже и имеют меньшую массу (точки A' и B'). Это значит, что сила тяготения в A и B превышает силу давления и заставляет звезду сжиматься, увеличивать плотность. Но если из состояния A сжатие возвращает звезду к равновесию C_2 , то из B оно уводит звезду все дальше от равновесия, начинается коллапс. Скорость, с которой начинается коллапс в самой точке срыва, определяется скоростью медленной эволюции звезды, т. е. скоростью, с которой она подходит к критической точке C_2 , и продолжая свое движение, выходит из этой точки вправо*). Однако после сколько-нибудь заметного отхода от состояния равновесия силы тяготения уже на конечную величину превышают силы давления, и ускорение сжатия составляет конечную долю ускорения свободного падения. Таким образом, очень быстро после «срыва» звезда сжимается практически с ускоре-

*) Как отмечалось в § 2 гл. 10, уже при подходе к C_2 вблизи этого состояния, строго говоря, надо рассматривать динамику процесса, так как скорость потери энтропии не мала по сравнению с гидродинамической скоростью.

нием свободного падения. Это, конечно, является самым первым грубым приближением.

Необходимо особенно подчеркнуть, что после достижения состояния C_2 скорость дальнейшего сжатия никак не зависит от скорости тех процессов, которые в ходе медленной эволюции подвели звезду к критическому состоянию.

Здесь надо отметить следующее существенное обстоятельство. Рассматривая возникновение неустойчивости звезды и ее гидродинамическое сжатие, мы предполагаем, что процессы, вызывающие неустойчивость, т. е. приводящие к $\gamma < 4/3$, идут за время много меньшее гидродинамического t_H (времени свободного падения, см. § 1 гл. 10). По отношению к таким процессам вещество все время находится в состоянии равновесия. Эти процессы протекают почти адиабатически, а следовательно, с постоянной энтропией. Примером подобного процесса является рождение пар при высокой температуре. Однако, как будет показано в § 8 гл. 11, нейтронизация вещества, которая, как мы видели, приводит к неустойчивости при низких температурах, протекает за время, сравнимое с t_H . В этом случае нейтронизация будет отставать от равновесия в данных условиях. Это эквивалентно появлению эффективной вязкости, приводящей к увеличению энтропии. Детализация картины требует совместного рассмотрения гидродинамики и процесса нейтронизации (см. об этом § 11).

Кроме того, мы грубо характеризовали вещество звезды средней плотностью и средним давлением. Ясно, что при этом невозможно учесть появление в ходе быстрого сжатия ударных волн, вызывающих увеличение энтропии с «гидродинамической» скоростью, т. е. за время порядка t_H . Невозможно также учесть ядерную детонацию*), поглощение нейтрино в оболочке и сброс части массы. Возможно разрушение всей звезды ядерным взрывом. Учет этих явлений требует конкретного расчета нестационарных процессов в звезде. Несколько более подробно мы остановимся на этом в § 5 и Дополнении IV. Там же будет приведена литература. Здесь же предположим, что в ходе гидродинамического сжатия если и происходит ядерный взрыв, то он разрушает не всю звезду, а только выбрасывает часть оболочки.

После «срыва» звезды в точке C_2 плотность растет (горизонтальный пунктир на рис. 57) с гидродинамической скоростью (т. е. с характерным временем t_H) и звезда достигает нового устойчивого состояния в точке D_2 . Так как «срыв» произошел

*) Хотя в центре звезды ядерное горючее сгорело, оно могло сохраниться в оболочке.

при конечных значениях энтропии и, кроме того, энтропия росла в ходе сжатия, то точка D_2 лежит не на предельной линии $S=0$, а левее ее. По инерции сжатие будет продолжаться дальше. Если кинетическая энергия сжатия достаточно велика, то звезда может «пробить» энергетический барьер, выйти к точке D'_2 , после которой будет продолжаться неограниченное сжатие. Если же энергия сжатия недостаточна для прохождения через барьер, то после достижения некоторой максимальной плотности ρ_{\max} ($\rho_2 < \rho_{\max} < \rho_3$) звезда будет совершать затухающие колебания вокруг D_2 (в первом приближении).

Затухание вызывается описанными выше процессами роста энтропии и излучением энергии (в виде света с поверхности и нейтрино изнутри); кроме того, звезда сбрасывает часть массы. В результате с изэнтропы, отвечающей моменту срыва, звезда переходит на более высокую изэнтропу (с S_1 на S_2). Если потери массы заметны, то, кроме того, понижается положение звезды на диаграмме $M - \rho_c$ и звезда приходит в точке D_3 в состояние равновесия. Далее, с потерей энергии на излучение (см. § 2) звезда медленно приходит к $S=0$ (D_4) по серии равновесных состояний.

Состояние звезды на интервале $D_3 - D_4$ обычно называют *нейтронным* или *барионным* состоянием. Здесь невольно возникает следующий вопрос. Эволюция звезды начинается с водорода, с протонов; в результате термоядерных реакций протоны объединялись в сложные ядра, при этом излучалась огромная энергия порядка $0,01 Mc^2$. В конце эволюции в стадии барионной звезды мы снова приходим к веществу, состоящему из отдельных барионов (причем масса покоя нейтрона даже больше массы H). Откуда же взялась энергия, потерянная на излучение в процессе эволюции? Ответ очевиден: тяготение создало большую плотность; это привело к нейтронизации вещества и заставило сложные ядра рассыпаться на отдельные барионы; следовательно, именно энергия тяготения в конечном состоянии компенсирует ту энергию, которая ушла вместе с излучением в окружающее пространство.

Идеи Кельвина и Гельмгольца о том, что звезды светят за счет энергии тяготения, оказались неприменимы для продолжительной стадии ядерных реакций в звезде. За счет этих реакций светит звезда. Однако в заключительной фазе эволюции звезды энергия тяготения ломает ядерные связи и в конце концов тяготение оказывается ответственным за всю излученную энергию. В этом смысле идеи великих физиков прошлого оказываются правильными.

Вопросы эволюции звезд с $M > 1,6M_{\odot}$ содержат качественные отличия, рассматриваемые ниже в § 3.

§ 2. Физика нейтронных звезд

Нейтронная звезда в положении D_3 на рис. 57 находится в квазиравновесном состоянии. Теории таких звезд (они до сих пор не открыты; см. введение) посвящено большое количество работ последнего времени. Современное состояние вопроса дано в обзоре Дж. Уилера (1966), там же имеется подробная библиография.

Как уже отмечалось, нейтронное ядро звезды окружено оболочкой, состоящей из ядер и вырожденных электронов; самые поверхностные слои состоят из обычной плазмы. Сразу после образования (после коллапса) нейтронная звезда будет сильно нагрета. Однако, какие бы процессы не привели звезду в положение D_3 , звезда, как указал Чиу, 1964, не может длительно иметь температуру больше нескольких миллиардов градусов, ибо в противном случае интенсивное рождение пар ($\nu, \bar{\nu}$), моментально покидающих звезду, все равно быстро охладило бы ее. Во всех внутренних частях звезды, в которых имеется газ вырожденных частиц, теплопроводность чрезвычайно высока, так как определяется вырожденными электронами. Поэтому ядро нейтронной звезды изотермично, и только в самой внешней оболочке имеется градиент температуры. Строение внешней оболочки нетрудно рассчитать, так как

Таблица XIV

Сравнение излучения Солнца и нейтронной звезды
с $R = 10$ км и $T_e = 10^6$ °К (по Уилеру (1966))

	I нейтронная звезда	II Солнце	Отношение I/II
Радиус	10^6 см	$7 \cdot 10^{10}$ см	$1,4 \cdot 10^{-5}$
Площадь поверхности . .	$1,3 \cdot 10^{13}$ см ²	$6,4 \cdot 10^{22}$ см ²	$2 \cdot 10^{-10}$
Температура поверхности	10^6 °К	5790 °К	$1,7 \cdot 10^2$
Положение максимума распределения энергии в спектре (в шкале частот)	40 Å	4600 Å	$8,7 \cdot 10^{-3}$
Светимость	$7 \cdot 10^{32}$ эрг/сек	$4 \cdot 10^{33}$ эрг/сек	0,175
Абсолютная болометри- ческая величина	$6^m,5$	$4^m,6$	$\Delta m = 1^m,9$
Доля энергии, излучаемая в интервале 3000—10 000 Å	$5,4 \cdot 10^{-6}$	0,68	$8 \cdot 10^{-6}$
Светимость в интервале 3000—10 000 Å	$3,8 \cdot 10^{27}$ эрг/сек	$2,7 \cdot 10^{33}$ эрг/сек	$1,4 \cdot 10^{-6}$

радиус и масса нейтронной конфигурации уже известны, а определенной температурой недр можно задаться. В результате можно определить поверхностную температуру звезды и ее светимость.

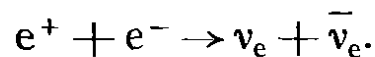
Поверхностная эффективная температура составляет примерно 10^{-2} от центральной температуры (см., например, Бакал и Вольф (1965а, б)). Если $T_c \approx 10^8$ °К, то $T_e \approx 10^6$ °К.

Время остывания нейтронной звезды после образования зависит от запаса тепловой энергии и процессов ее потери. Согласно данным Бакала и Вольфа (1965) запас тепловой энергии определяется выражением

$$E_T = 5 \cdot 10^{47} \left(\frac{T_c}{10^9} \right)^2 \left(\frac{\rho}{3,7 \cdot 10^{14}} \right)^{-2/3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ эрг.} \quad (11.2.1)$$

Эта величина подсчитана без учета возможной сверхтекучести нейтронного вещества звезды. На такую возможность указали В. Л. Гинзбург и Д. А. Киржниц (1964). Если вещество звезды в существенной доле массы действительно окажется сверхтекучим, то приведенная оценка E_T сильно уменьшится, как и оценка времени остывания, приводимая ниже.

Охлаждение нейтронной звезды происходит путем излучения нейтрино из центральных частей, где велика температура, и фотонного охлаждения с поверхности. При очень больших внутренних температурах наиболее важным процессом, приводящим к рождению нейтрино, является, как уже отмечалось, аннигиляция пар e^+ , e^- :



Однако как раз в условиях нейтронной звезды этот процесс подавлен в силу высокой ферми-энергии электронов — порядка $20 Mэв$. При более умеренной температуре нейтрино рождаются в основном в реакциях



Изменение температуры звезды T_e с течением времени за счет испускания нейтрино и фотонного охлаждения показано на рис. 59 *). При высоких температурах $T_e > 2 \cdot 10^6$ звезда остывает в основном за счет нейтринного излучения; начиная с $T_e \approx 2 \cdot 10^6$ преобладает фотонное охлаждение с поверхности. Из рис. 59 видно, что поверхностная температура $T_e \approx 2 \cdot 10^6$ °К сохраняется у звезды в течение 10^4 лет. Период существования температуры большей чем $2 \cdot 10^6$ °К значительно меньше.

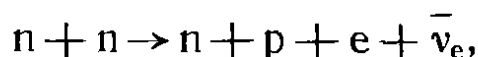
*) Рисунок дает эффективное время охлаждения (существенного уменьшения температуры) при данной температуре.

Бакал и Вольф (1965а, б) указали на возможность охлаждения звезды за счет рождения нейтрино при взаимодействии пионов с нейтронами ($\pi - n$ -процесс). Если бы такой процесс протекал в нейтронной звезде, то она охладилась бы за сутки. Однако, по-видимому, в устойчивых нейтронных звездах плотность еще не столь велика, чтобы в веществе в равновесии находились π -мезоны, и указанный процесс охлаждения не имеет места.

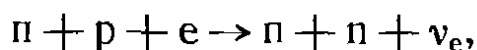
Большой интерес представляет исследование радиальных пульсаций нейтронных звезд вокруг положения D_3 на рис. 57 (Хойл и др. (1964), Камерон (1965), Финци (1965), Торн (1967)). Сделаем оценку. Собственная частота колебаний однородной звезды (из соображений размерности) равна $\omega^2 = GM/R^3$. Частота ω составляет для нейтронных звезд около 10^4 сек^{-1} . Отсюда находим энергию колебаний

$$E_{\text{кол}} = \frac{(R\omega)^2}{2} M \left(\frac{\delta R}{R} \right)^2 \approx \\ \approx 10^{53} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{\delta R}{R} \right)^2 \text{ эрг,}$$

где $\delta R/R$ — относительная амплитуда колебаний. Диссипация этой энергии связана со следующими процессами: 1) с эффективной вязкостью, которая обусловлена тем, что ядерные процессы, связанные со слабыми взаимодействиями, идут медленно по сравнению со скоростью пульсаций звезды; 2) с рассеянием энергии в ударных волнах, выходящих на поверхность звезды. Рассмотрим первый процесс: при большой плотности вещества в равновесии должно быть больше протонов и электронов, чем при малой плотности. При сжатии звезды идут реакции:



нейтрино уходят из звезды. При расширении:



нейтрино снова уходят. Отставание выравнивания состава вещества по сравнению с равновесным, обусловленное медленностью слабых взаимодействий, приводит к необратимым

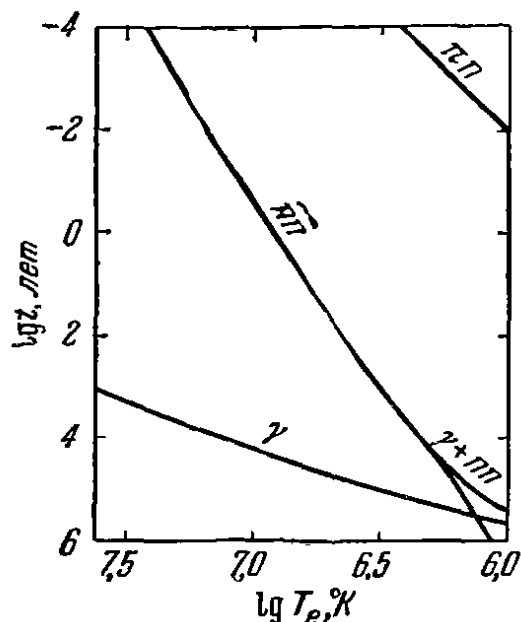


Рис. 59. Охлаждение нейтронной звезды согласно Бакалу и Вольфу (1965).

По оси ординат отложено время существенного уменьшения эффективной поверхностной температуры (при данной температуре) за счет различных процессов.

потерям энергии. Финци (1965) дает следующую оценку потери энергии при средней плотности звезды $\rho = 6 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$:

$$\frac{dE_{\text{кол}}}{dt} \approx 10^{52} \left(\frac{\delta R}{R} \right)^8 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ эрг/сек.}$$

Например, при амплитуде $\left(\frac{\delta R}{R} \right) \approx 0,01$ в колебаниях будет запасено $E_{\text{кол}} \approx 10^{49} \text{ эрг}$ и $\frac{dE_{\text{кол}}}{dt} \approx 10^{36} \text{ эрг/сек}$. Если бы не было других источников затухания колебаний, то $t_{\text{зат}} \approx 3 \cdot 10^5$ лет. Учет структуры звезды может изменить эти оценки.

Второй процесс диссипации — выход ударных волн на поверхность, выброс массы и разогревание поверхностных слоев — пока не изучен. Неизвестно, как быстро он приведет к затуханию колебаний, переводя их энергию в энергию излучения и в энергию выброшенного вещества.

Об излучении электромагнитных волн вследствие изменения магнитного момента звезды при пульсациях и об излучении гравитационных волн (если звезда вращается и поэтому сплюснута) см § 6 гл. 12.

Обратимся теперь к вопросу о тех свойствах нейтронных звезд, которые позволили бы их открыть. Несмотря на то, что светимость нейтронных звезд при $T_e \approx 10^6 \text{ К}$ порядка солнечной светимости, их нельзя обнаружить в обычные телескопы; это было отмечено Амбарцумяном и Саакяном (1963). Действительно, как видно из табл. XIV светимость этих звезд в диапазоне 3000—10 000 Å составляет миллионную долю солнечной светимости, а основную часть энергии звезда излучает в виде мягких рентгеновских лучей. Разумеется, «невидимость» нейтронных звезд связана с их крошечными размерами. Можно пытаться обнаружить нейтронные звезды по их рентгеновскому излучению. Может быть, некоторые из открытых недавно галактических источников рентгеновского излучения могут оказаться нейтронными звездами на стадии эволюции вскоре после их образования. Подробно об этом см. § 7 гл. 12.

Нейтронные звезды сравнительно быстро остывают и перестают излучать энергию. Однако так будет только в том случае, если звезда находится в вакууме. Нейтронная звезда представляет собой глубокую потенциальную яму тяготения, вызывающую аккрецию — захват и падение вещества на звезду. Гравитационный потенциал у поверхности звезды составляет $\approx 0,2 c^2$. Внешнее вещество, падая в этом поле, разгоняется до скорости, около половины световой. Сталкиваясь с поверхностью, падающее вещество выделяет энергию порядка $0,2 mc^2$, где m — падающая масса. Как будет показано ниже, скорость роста

массы при аккреции по порядку величины составляет $\frac{dM}{dt} \approx \frac{2\pi G^2 M^2 \rho_\infty}{v^3}$, где ρ_∞ — плотность окружающего вещества, v — скорость движения на бесконечности частиц вещества относительно звезды. Если принять $\rho_\infty = 10^{-24}$ г/см³, $v = 10^6$ см/сек, то $\frac{dM}{dt} \approx 2 \cdot 10^{12}$ г/сек и светимость нейтронной звезды за счет аккреции $L \approx 4 \cdot 10^{32}$ эрг/сек. Эффективная поверхностная температура при этом несколько менее миллиона градусов и максимум излучения лежит у ~ 50 Å. Время существенного увеличения массы звезды $t \approx 10^{21}$ сек, что гораздо больше возраста Метагалактики.

Таким образом, мы видим, что нейтронная звезда за счет аккреции межзвездного вещества может существовать практически неограниченно долгое время как источник мягкого рентгеновского излучения со светимостью, сравнимой с солнечной. Конечно, если звезда будет погружена в облако, гораздо более плотное, чем межзвездная материя (это как раз должно иметь место, если нейтронная звезда возникает после взрыва сверхновой), ее светимость резко возрастает. Подробнее об аккреции см. § 1—5 гл. 12, о возможности обнаружения нейтронных звезд — § 7 гл. 12.

§ 3. Эволюция звезды с массой, большей «ОВ» предела

Рассмотрим теперь последние стадии эволюции звезды с массой больше предела ОВ для сверхплотных конфигураций ($M \gtrsim 1,6 M_\odot$). Качественное отличие этого случая от предыдущих заключается в том, что для столь больших масс нет равновесной конфигурации с $S=0$ (и $T=0$). Это означает, что остывшая массивная звезда не может прийти в равновесное состояние без потери существенной части массы. С другой стороны, мы не знаем, существуют ли процессы, которые с необходимостью приводят к потере в ходе эволюции существенной доли массы, достаточной для того, чтобы прийти в конце концов в состояние равновесия с $S=0$. О возможности таких процессов см. § 5 гл. 11. Если массивная звезда не теряет значительную часть своей массы, то заключительная часть эволюции таких звезд будет существенно нестационарной.

Проследим последние этапы этой эволюции. К границе устойчивости звезда медленно подходит по квазиравновесным состояниям. На границе звезда теряет устойчивость и сжимается с гидродинамической скоростью. В дальнейшем, если звезда в результате ядерного взрыва не теряет большую часть своей массы (см. § 5 гл. 11), то сжатие никогда не может закончиться

равновесным состоянием. Таких состояний нет. Через время порядка $t_H = 1/\sqrt{6\pi G\rho}$ звезда сожмется настолько, что гравитационный потенциал у ее поверхности станет порядка c^2 и начнут проявляться эффекты общей теории относительности. Начиная с этого момента, звезда вступает в фазу релятивистского сжатия — коллапса. Об этой релятивистской стадии речь будет идти далее (см. ниже § 6).

Прежде чем обращаться к релятивистскому коллапсу, рассмотрим несколько более подробно процессы, вносящие дополнительные ограничения и могущие в определенных условиях изменить нарисованную выше схематическую картину эволюции обычных звезд.

§ 4. Нестабильность массивных звезд с ядерными источниками энергии

В этом параграфе мы рассмотрим специфический вид неустойчивости звезды, приводящий к существованию верхнего предела массы обычных звезд.

Еще в 1941 г. Леду показал, что достаточно массивные звезды с ядерным источником энергии будут неустойчивы относительно раскачки колебаний. В работе М. Шварцшильда и Р. Харма (1959) вычисления проделаны на основе новых моделей внутреннего строения массивных звезд, полученных численным расчетом. Механизм пульсационной неустойчивости заключается в следующем. Звезда, находясь в устойчивом равновесии, обладает собственной частотой колебаний $\omega^2 = GM/R^3$. Допустим, что такие колебания возбуждены. Существуют механизмы раскачки колебаний и механизмы затухания колебаний. Раскачивающим механизмом является изменение выделения ядерной энергии в центре звезды. Вследствие сильной зависимости выделения энергии от температуры основное выделение энергии происходит при максимальном сжатии. Звезда получает как бы импульс, и увеличивает амплитуду колебаний. При максимальном расширении скорость ядерных реакций замедлена, что способствует «разгону» колебаний на фазе сжатия.

Затухание колебаний происходит вследствие нарушения стационарности теплового потока в звезде. Как можно показать, это нарушение вызывает появление силы, тормозящей колебания.

Скорость изменения энергии колебаний L_1 можно записать в виде

$$L_1 = L_2 - L_3,$$

где L_2 — скорость увеличения энергии колебаний за счет ядерных реакций, L_3 — скорость потери энергии колебаний. Если

$L_1 > 0$, то колебания возрастают, и звезда неустойчива. Если $L_1 < 0$, то звезда устойчива относительно пульсаций.

Шварцшильд и Харм провели расчеты для звезд, состоящих из 75% Н и 22% He в интервале масс от $M = 218 M_\odot$ до $M = 28 M_\odot$. Результаты их расчетов для звезд главной последовательности приведены в табл. XV.

Таблица XV

Пульсационная неустойчивость
массивных звезд

M/M_\odot	218,3	121,1	62,7	28,2
$\lg \frac{L}{L_\odot}$	6,64	6,24	5,76	5,04
$(\delta R/R)_c$	0,632	0,583	0,312	0,392
$t_{\text{лет}}$	930	1 800	44 000	-1 400

Здесь первая строка — масса звезды, вторая — общая светимость, третья — амплитуда колебания в центре, если на поверхности принять $\delta R/R = 1$, четвертая — время увеличения колебаний в e раз, знак (—) означает, что колебания затухают.

Для звезд небольшой массы на главной последовательности амплитуда колебаний в центре по отношению к амплитуде колебаний на поверхности мала; соответственно слагаемое L_2 мало по сравнению с L_3 , а L_1 отрицательно — звезда устойчива. Для больших масс $(\delta R/R)_c$ вдвое больше, чем у малых и L_1 положительно — звезда неустойчива.

Критическое значение массы, больше которой звезды неустойчивы, около $60 M_\odot$. Это значение зависит от химического состава $M_{\text{кр}} \sim \mu^{-2}$. Приведенные значения носят, конечно, приближенный характер и значение $M_{\text{кр}} = 60 M_\odot$ неточно. Но, по видимому, можно утверждать, что звезды с $M > 100 M_\odot$ и с ядерными источниками энергии пульсационно неустойчивы. Если они образуются из первоначально разреженного газа (см. § 1 гл. 11), то существуют только в течении кельвиновского периода сжатия,

$$t = 5 \cdot 10^7 \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \text{ лет,}$$

а затем с началом горения водорода начинают пульсировать и интенсивно выбрасывать вещество. Заметим, что верхний предел масс известных звезд близок к $M_{\text{кр}} \approx 60 M_\odot$.

Другой вид неустойчивости массивных звезд, не связанный с ядерными источниками энергии, будет разобран нами ниже, в § 11 этой главы.

§ 5. Устойчивость эволюции звезды

Астрономические наблюдения показывают наличие большого качественного разнообразия в мире звезд. Это разнообразие касается, например, химического и изотопного состава звезд: наблюдаются звезды, в которых содержание редких земель в 1000 раз больше среднего, звезды с отношением $C^{13} : C^{12} \approx 1$ (вместо 0,01 на Земле); известна, наконец, одна звезда с $He^3 : He^4 = 4$ (вместо обычного отношения 10^{-7}). Есть и другие аномалии, некоторые звезды имеют аномально большие магнитные поля. Есть звезды, периодически меняющие свой блеск (цефеиды), звезды, регулярно вспыхивающие, наконец, звезды, испытывающие катастрофические взрывы (сверхновые). Известный пример вспышки сверхновой — это взрыв, давший начало Крабовидной туманности.

Очень грубо можно считать, что все недавно образовавшиеся молодые звезды, состоящие примерно из 70% водорода, 29% гелия и 1% более тяжелых элементов, как правило, похожи друг на друга. Все свойства таких звезд полностью определяются массой; эти звезды образуют однопараметрическое семейство. На диаграмме спектр — светимость они образуют «главную последовательность» Герцшпрунга — Рассела. Понятие молодости звезды в свою очередь зависит от скорости расходования горючего: звезда с $M \sim M_{\odot}$ достигает среднего возраста через $5 \cdot 10^9$ лет, звезда с массой $30 M_{\odot}$ исчерпывает водород и старится за $6 \cdot 10^6$ лет. Следует заметить, что звезда, почти полностью исчерпавшая водород, в центре еще не сильно отличается по внешним параметрам от совсем молодой и лишь затем начинает сравнительно быстро меняться.

Именно для периода эволюции после исчерпания водорода характерно разнообразие наблюдаемых свойств и поведения звезды. Вопросы, возникающие в связи с этой стадией эволюции, не полностью разъяснены и, по-видимому, не связаны специально с релятивистскими эффектами. Поэтому мы остановимся на них только очень кратко.

Какие параметры могут создавать разнообразие свойств звезд, если полагать, что все звезды первоначально конденсируются из газа примерно одинакового состава? Ведь все звезды проходят на главной последовательности летическую стадию*);

*) Это новообразованное слово (Бирд (1964)) происходит от названия мифологической реки Леты, отделяющей царство живых от царства мертвых. Лета — река забвения.

звезда «забывает» об асимметрии, турбулентности и температуре облака исходного газа, из которого она конденсировалась.

Что же «запоминает» звезда, от чего может зависеть дальнейшее ее развитие? Выше упоминалась основная характеристика звезды — масса. В период горения водорода, при положении звезды на главной последовательности, потеря массы пренебрежима, масса сохраняется. Вторая сохраняющаяся величина — момент вращения звезды. По-видимому, магнитные свойства тоже следует рассматривать как врожденное свойство звезды, как инвариант. Впрочем, здесь положение отнюдь не очевидно: до сих пор не выяснено, в какой мере магнитное поле звезды является результатом усиления магнитного поля межзвездной среды при конденсации звезды. Другая возможность — появления магнитных полей как результата конвективных движений в ней (динамо-эффект) (С. И. Брагинский (1964)) (ср. теорему Бэйчелора о магнитном поле в турбулентной проводящей жидкости). Наконец, на судьбу звезды может существенно влиять наличие близкой соседней звезды, с которой она образует тесную двойную систему (Д. Я. Мартынов (1965), Киппенхан, Вейгерт (1967); Пачинский (1966)). Об этом часто забывают теоретики, между тем среди определенных классов звезд двойные весьма распространены; есть предположение, что все «новые» являются двойными. Напомним в этой связи соображения о возрасте двух компонент Сириуса (см. далее § 7 гл. 12), напомним также ограничения, налагаемые на параметры двойных звезд излучением гравитационных волн (В. Б. Брагинский (1965)).

Перейдем теперь от перечисления параметров, характеризующих звезду и определяющих условия ее эволюции к выяснению тех глубоких внутренних причин, которые могут вызвать ту или иную неустойчивость звезды. По-видимому, в целом все перечисленные факторы — вращение, магнитное поле, наличие второй компоненты — являются малым возмущением по сравнению с силой тяготения, зависящей от полной массы. Поэтому эти факторы существенно влияют на устойчивость звезды лишь в периоды, когда запас устойчивости мал. Часто (но не точно) говорят, что быстрое поглощение тепла может быть причиной катастрофического сжатия*) и рассматривают испускание нейтрино наравне с такими процессами, потребляющими энергию, как диссоциация железа $Fe_{26}^{56} = 14He^4 + 4n$ или рождение пар $e^+ + e^-$. В действительности испускание нейтрино есть фактор, вызывающий изменение энтропии. Скорость испускания нейтрино

*) Для этого сжатия есть особый термин, имплозия: *implosion* «взрыв внутрь», в отличие от *explosion* «взрыв во вне» с выбросом вещества.

входит в $\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\rho T} \frac{du_\nu}{dt}$. При наличии стабильных решений, зависящих от S как параметра, скорость изменения энтропии определяет скорость эволюции. Скорость сжатия всегда меньше скорости света. Пока не наступило гравитационное самозамыкание, нейтрино успевают покинуть звезду. Испускание нейтрино есть существенно неравновесный процесс, и в этом его резкое отличие от рождения пар e^+ , e^- или диссоциации железа.

В горячем веществе время установления равновесия e^+ , e^- пар ничтожно по всем масштабам; например, при $T_9=6$ это время порядка 10^{-18} сек. Следовательно, в каждый момент и в каждой точке пары находятся в полном равновесии, их количество не определяется скоростью процесса. Тепло, затраченное на образование пар, не исчезло: стоит веществу расшириться, а температуре понизиться, как число пар уменьшится; следуя равновесию, затраченное тепло выделится обратно. Равновесное рождение пар не является фактором, меняющим энтропию. Рождение пар меняет вид $P=P(\rho, S)$, т. е. меняет зависимость давления от плотности при данной энтропии. То же относится и к диссоциации железа и гелия.

В результате в определенной области температуры и плотности достигается $\gamma = \left. \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right|_S \leq \frac{4}{3}$ и теряется устойчивость.

Суть дела, конечно, заключается в том, что с учетом затраты энергии покоя e^+ и e^- или затраты энергии на преодоление ядерных сил отношение дополнительного давления новых частиц к плотности энергии оказывается малым, меньше $1/3$. Однако описание этого обстоятельства введением специальных величин $\frac{dQ}{dT}$ (Q — плотность тепловой энергии) представляется печальным следствием недооценки термодинамических методов, недооценки той ясности и простоты, которые достигаются при пользовании энтропией.

В плоскости ρ, T можно провести линию, на которой $\gamma = 4/3$ (см. рис. 33, а). Эта линия отделяет область устойчивости от области неустойчивости. В самых грубых предположениях о структуре звезды можно провести линии $P(\rho, T) = aM^{2/3}\rho^{4/3} = \text{const } \rho^{4/3}$, соответствующие эволюции звезды при среднем гидростатическом равновесии. Пересечение такой линии с линией $\gamma = 4/3$ означает потерю устойчивости звездой данной массы.

Например, по расчетам Имшенника и Надежина (1965) для звезды с $M=20M_\odot$ $\gamma = 4/3$ достигается при $\rho \approx 6 \cdot 10^6$ г/см³, $T_9 \approx 4,8$. Однако в ходе дальнейшего адиабатического сжатия после области $\gamma < 4/3$ линия $S = \text{const}$ пересекает вторую линию $\gamma = 4/3$ и снова попадает в область устойчивости. Причиной яв-

ляется образование большого числа нерелятивистских частиц при диссоциации железа $Fe \rightarrow \alpha + p \rightarrow p + n$ (см. сноску на стр. 193).

Таким образом, после быстрого нестационарного сжатия могла бы наступить остановка в новом состоянии равновесия, если бы большая часть массы звезды оказалась в области $\gamma > 4/3$, а эффекты ОТО были бы недостаточно сильны. В процессе остановки возникают ударные волны, которые, распространяясь к поверхности атмосферы звезды, передают энергию все меньшей массе и срывают самый наружный слой. Таков схематический механизм вспышки сверхновой, рассмотренный в работах Надежина и Франк-Каменецкого (1962; 1964a, b; 1965), Имшенника и Надежина (1964; 1965). Эти авторы подробно изучили гидродинамику процесса установления нового равновесия и сброса оболочки волной, не останавливаясь на причинах, вызвавших исходный срыв со старого равновесия. Внешние свойства в рассчитанной ими картине в общем согласуются с наблюдениями.

Выход ударной волны на поверхность, сброс оболочки или даже разлет всей звезды могут быть обусловлены вторым важнейшим фактором, меняющим ход эволюции и много лет пропагандируемым Хойлом и Фаулером (1960, 1965) (см. также Фаулер и Хойл (1964); этот фактор связан с неравномерностью химического состава звезды. При отсутствии конвективного перемешивания в момент, когда в центре звезды достигнуто полное термодинамическое равновесие, вещество вблизи центра полностью превратилось в железо, в прилегающем слое содержится кислород и углерод, дальше — гелий и, наконец, во внешнем слое остается несгоревший водород.

Превращение водорода в гелий связано со слабым взаимодействием (ввиду того, что половина протонов должна превратиться в нейтроны) и никогда не может стать быстрым; поэтому не будем учитывать энергию водорода. Но и без водорода энергия превращения более тяжелых ядер больше отрицательной энергии звезды как целого. Это значит, что запас ядерной энергии, например, реакции $2O^{16} \rightarrow S^{32}$, вместе с тепловой энергией звезды достаточен для преодоления тяготения и разбрасывания всей звезды на бесконечность. Процессы $3He^4 \rightarrow C^{12}$, $2C^{12} \rightarrow Mg^{24}$, $2O^{16} \rightarrow S^{32}$ не требуют превращения протонов в нейтроны, они идут за счет сильного взаимодействия (ядерных сил).

При достаточно высокой температуре, которая ослабит действие кулоновского отталкивания ядер, эти процессы могут идти за время меньше времени свободного падения, т. е. идти как взрывные. Фаулер и Хойл (1964) развили схему взрыва,

вызванного имплозией: ударная волна, проходя через соответствующие слои, вызывает в них ядерные реакции с выделением тепла. Другими словами, ударная волна превращается в детонационную волну. Все лежащие выше слои сбрасываются с гигантскими скоростями. Но не нужно думать, что при выделении достаточного количества ядерной энергии железное ядро уцелеет. Если даже первоначально оно сожмется вследствие повышения давления при начале ядерной реакции в оболочке, то затем, лишенное наружного давления улетевшей оболочки, ядро также расширится и разлетится.

Нужно помнить, что энтропия материала ядра соответствовала равновесию ядра при данном ρ_c только при условии, что оно находится под давлением выше лежащих слоев звезды. Однако эта энтропия значительно больше равновесной S для меньшей массы, остающейся после сброса оболочки. Разумеется, если коллапс зашел далеко, то внешняя оболочка может быть сброшена, а ядро будет продолжать коллапсировать (см. работу Колгейта и Уайта (1966)). Итак, звезда в каждый момент своей эволюции почти до полного исчерпания горючего «сидит на пороховой бочке», поскольку содержит запас горючего, достаточный для самоубийства.

В последнее время появились конкретные машинные расчеты взрыва сверхновой (Колгейт и Уайт (1966); Арнет (1966, 1967); Имшенник и Надежин (1967)). По-видимому, существенную роль во вспышке сверхновой играет излучение нейтрино из центральных областей и поглощение их в оболочке. Подробнее см. Дополнение IV.

Является ли имплозия единственным механизмом, способным взорвать звезду? Насколько устойчиво в отношении теплового взрыва состояние, вполне устойчивое в гидродинамическом отношении?

При рассмотрении общего хода эволюции тепловая устойчивость связывалась с отрицательной теплоемкостью звезды как целого. Есть две причины, которые в определенных условиях создают тепловую неустойчивость.

1. Отрицательная теплоемкость характерна для невырожденной плазмы в собственном поле тяготения. При высокой плотности и не слишком высокой температуре, когда имеет место существенное вырождение электронов, теплоемкость звезды становится положительной, о чем говорилось в § 10 гл. 10 и § 1 гл. 11 (см. рис. 53). В ходе уменьшения энтропии у звезды с $M = M_\odot$ температура сначала растет, а потом убывает. При низкой температуре (по сравнению с температурой вырождения электронов при данной плотности) получается белый карлик. Убывание температуры с убыванием энтропии означает поло-

жительную теплоемкость. Это обстоятельство приводило к резкой остановке ядерной реакции, к застыванию состава белого карлика. Падение температуры уменьшает скорость реакции; отставание реакции от теплопотерь создает условия падения энтропии, при положительной теплоемкости это ведет к снижению температуры. Следовательно, это не ведет к взрыву.

2. Рассмотрим другое обстоятельство. Отрицательная теплоемкость есть понятие, относящееся к звезде как целому, результат перестройки плотности всей звезды при повсеместном изменении ее энтропии. Каждый отдельный малый слой вещества в звезде имеет положительную теплоемкость, равную c_p : каждый слой находится при постоянном давлении окружающего вещества. Поэтому в принципе возможен тепловой взрыв отдельного слоя. Этот процесс затруднен вследствие того, что данный слой находится в тепловом контакте с выше и ниже лежащим веществом. С другой стороны, если взять слой слишком толстый, то увеличение энтропии в нем уже будет сопровождаться заметным уменьшением давления — теплоемкость увеличивается и в пределе, переходя через $c = \pm \infty$, теплоемкость становится отрицательной.

При достаточно сильной температурной зависимости реакции, идущей в тонком слое между выгоревшим ядром и оболочкой, возможно существование таких тепловых возмущений, относительно которых стационарный режим неустойчив. Такой тип неустойчивости был рассмотрен в работе Гуревича и Лебединского (1955); независимо этот тип неустойчивости был открыт при численном расчете эволюции звезды с $M = 10M_{\odot}$ Шварцшильдом и Хармом (1965) и проанализирован ими. Процесс взрыва с нарастанием энтропии в слое затруднен при наличии конвекции. Само возрастание энтропии в слое создает условия для конвективного перемешивания. Возможно, что тепловые взрывы, развитие которых обрывается усилением конвекции, играет роль при многократных вспышках некоторых звезд.

Аномальный состав атмосферы звезд указывает на смешение вещества, никогда не горевшего в звездах (водород, частично, вероятно, гелий), с веществом, побывавшим в недрах звезды и содержащим тяжелые ядра (Хойл, Фаулер, 1965). Эти ядра могут возникнуть лишь путем присоединения нейтронов к ядрам середины таблицы, т. е. требуют столь высокой температуры, при которой водород не может выжить. Наконец, есть особенности состава ($\text{He}^3 : \text{He}^4 > 1$), которые, по мнению ряда авторов (Сарджент, Югаку, 1961; Фаулер, Бербиджи, Хойль, 1965; Ривс, 1965; Валерштейн, 1962; Новиков, Сюняев, 1967) указывают на сильнейшее облучение вещества частицами с энергией во много $Mэв$,

т. е. частицами типа космических лучей, не находящимися в термическом равновесии.

Изложенное никак не претендует на исчерпывающее описание нестационарных явлений. Однако мы надеемся, что даже такой краткий обзор дает читателю представление о характере возможной будущей теории, которая сейчас интенсивно развивается в разных научных центрах, и может быть привлечет новых математиков и физиков к ее разработке.

§ 6. Релятивистский коллапс

Вернемся теперь к вопросу, которым заканчивается § 4, к вопросу о релятивистской стадии катастрофического сжатия (коллапса) звезды. Коллапс протекает практически со скоростью свободного падения, так как силы тяготения на конечную (не малую) величину превышают силы давления. Вблизи сферы Шварцшильда, как показано в § 2 гл. 3, сила тяготения стремится к бесконечности, в то время как давление остается конечным. Таким образом, при анализе приближения поверхности звезды к поверхности Шварцшильда в первом приближении давлением можно пренебречь. Эти соображения подтверждаются конкретным численным расчетом релятивистского сжатия звезды, выполненным М. А. Подурцом (1964а).

Будем рассматривать поверхность коллапсирующей звезды. В процессе сжатия масса M не меняется, и поэтому при $P=0$ частица на поверхности просто падает под действием тяготения массы M . Следовательно, чтобы выяснить характер коллапса, достаточно рассмотреть свободное падение пробной частицы в поле массы M . Как было показано в § 4 гл. 3, внешний наблюдатель видит, что падающая частица приближается к гравитационному радиусу по закону

$$r = r_g + (r_1 - r_g) e^{-\frac{c(t_* - t_*^1)}{2r_g}}, \quad (11.6.1)$$

а яркость падающего источника ослабевает по закону

$$I = \text{const} e^{-\frac{2c}{r_g}(t_* - t_*^1)}. \quad (11.6.2)$$

Следовательно, поверхность коллапсирующей звезды приближается к r_g по закону (11.6.1) в течение бесконечно долгого времени для внешнего наблюдателя.

Формула (11.6.2) изменения яркости непосредственно применима только к центральной точке видимого диска сжимающейся звезды. Для всего диска выводы сделать гораздо слож-

нее, так как необходимо рассматривать лучи, движущиеся под большим углом к радиусу, а пути таких лучей вблизи звезды весьма сложны. Анализ этого вопроса показывает (Подурец, (1964b), Амес, Торн (1967)), что для светимости всей звезды L имеет место формула, аналогичная (11.6.2), но с несколько иным показателем экспоненты

$$L = \text{const } e^{-\frac{2c}{3\sqrt{3}r_g}(t_* - t_*^1)}, \quad (11.6.3)$$

где r_g — гравитационный радиус звезды. Любое излучение может покинуть звезду только в случае, если оно пересекает поверхность звезды до момента достижения ею сферы Шварцшильда (гравитационное самозамыкание).

Для каждой точки с лагранжевой координатой r_* существует момент собственного времени $\tau(r_*)$, в который из этой точки выходит излучение, покидающее звезду последним. Кривую $\tau(r_*)$ можно назвать линией «последнего вдоха». Очевидно, это есть нулевая мировая геодезическая, пересекающая поверхность звезды в тот момент, когда последняя пересекает сферу Шварцшильда.

Рассмотрим простейший случай сжатия однородного пылевого шара массы M с параболической скоростью. Этот случай замечателен тем, что однородное вещество в ходе сжатия остается однородным, а сама плотность зависит от времени по закону $\rho = 1/6\pi G(\tau_0 - \tau)^2$, где τ_0 — момент, когда весь шар сжимается в точку. Выражение $\rho(\tau)$ не зависит от начального радиуса шара. В этом случае уравнение линии «последнего вдоха» есть

$$\tau^{1/3} - \tau_1^{1/3} \left(\frac{r_g}{r_1} \right)^{1/2} = \frac{r_1}{3\tau_1^{2/3}} (R - 1),$$

где r_1 — радиус в момент τ_1 , R — безразмерная лагранжева координата, для поверхности шара $R=1$; $c=1$.

Выше, при анализе изменения яркости сжимающейся звезды рассматривались источники, расположенные на поверхности. Ясно, что источники нейтрино будут в центре сжимающейся звезды. Мощность источников нейтрино нетрудно рассчитать, зная закон сжатия; затем можно определить закон затухания нейтринного излучения (он оказывается аналогичен (11.6.3)), и общую потерю массы звезды в ходе сжатия за счет нейтринного излучения (Зельдович (1962e); Зельдович и Подурец (1964); Фаулер (1964)). В этих расчетах, очевидно, существенно понятие линии «последнего вдоха». Подробно эти вопросы разбираются в § 8, 9. Здесь отметим, что эти потери оказываются малыми.

Самозамыкание приводит к тому, что масса коллапсирующей звезды не может сильно уменьшаться за счет излучения энергии и большая часть гравитационной энергии не излучается в виде света или нейтрино, а превращается в кинетическую энергию сжимающегося тела. Итак, мы можем сделать следующие выводы. Далекий наблюдатель видит, что катастрофически коллапсирующая звезда, когда ее размеры еще много больше r_g , сжимается с гидродинамической скоростью, т. е. очень быстро. При $(R - r_g) \sim r_g$ звезда продолжает стремительно сжиматься, за конечное собственное время достигает r_g и продолжает сжиматься дальше; но для внешнего наблюдателя благодаря указанным эффектам ее видимое сжатие резко замедляется, и ее радиус стремится к r_g по закону (11.6.1). Средняя плотность звезды стремится при этом к

$$\rho_{\max} = 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \quad (11.6.4)$$

Светимость звезды резко падает, несмотря на то, что фотоны продолжают рождаться в звезде почти в одном и том же темпе (в действительности даже в возрастающем темпе). Благодаря гравитационному красному смещению и другим указанным в § 5 гл. 3 эффектам, светимость падает по закону (11.6.1). Характерное время затухания порядка r_g/c и равно для $M=2M_{\odot}$ $2 \cdot 10^{-5}$ сек. Звезда превращается в «застывшую» для внешнего наблюдателя звезду. Как показано в § 5 гл. 4, коллапс вращающегося шара для далекого наблюдателя качественно протекает так же, как и невращающегося. Учет давления вещества не меняет вывода. Здесь также характерно гравитационное самозамыкание и стремление к предельной картине «застывшей» звезды, как это описано выше. Подчеркнем, что в пределе при $t \rightarrow \infty$ наблюдатель видит застывшую звезду невращающейся, но во внешнем поле гравитации члены, обязанные моменту K , сохраняются и неизменно проявляются.

Итак, несмотря на то, что гравитационное поле вращающейся звезды отличается от поля Шварцшильда, ее коллапс качественно протекает так же, как и у невращающейся. Звезда асимптотически подходит к «застывшему» состоянию и до «застывания» успевает совершить конечное число оборотов. Внешний наблюдатель никогда не узнает, что случилось со звездой, когда ее радиус стал меньше гравитационного.

Хотя после гравитационного самозамыкания никакое излучение от звезды уже не уходит, однако, звезда, конечно, не «исчезает» бесследно из нашего мира. При коллапсе не меняется ее масса M и ее статическое гравитационное поле. Такая «потухшая» звезда взаимодействует с окружающими телами своим

полем тяготения (чрезвычайно сильным вблизи ее гравитационного радиуса).

Мы нашли конечное состояние звезды с массой больше критической $M > M_{\max}^{OB}$. Это состояние, катастрофически нестационарное для самой звезды, является «стационарным» в указанном выше смысле для внешнего наблюдателя. Так разрешается «парадокс больших масс», возникший благодаря работам Оппенгеймера и его сотрудников (1939) и обсуждающийся в литературе (см. работы Уилера и сотрудников (1960, 1965) и обзор Чиу (1964)). На первый взгляд этот парадокс кажется весьма неприятным. Действительно, остывающая звезда с массой $M > M_{\max}^{OB}$ после потери устойчивости неограниченно сжимается (никакого предела сжатия нет!). А что дальше? Уилеру эти трудности кажутся настолько существенными, что он предполагает (Уилер (1962)), что в большой массе «лишняя» часть нуклонов аннигилирует при сжатии, превращаясь в излучение, покидающее звезду, так что масса всегда оказывается меньше критической. Это предположение является отказом от фундаментального закона физики — закона сохранения барионного заряда, причем для больших масс критическая плотность, при которой должна происходить аннигиляция, весьма умеренна. Например, при $M = 10^8 M_{\odot}$ по формуле (11.6.4) имеем $\rho_{\text{кр}} = 2 \text{ г/см}^3$. Невелики также и температуры, достигаемые при сжатии до критических размеров. При этих ничем не примечательных условиях заведомо не может происходить ничего такого, что не наблюдается в земных лабораториях, ничего фантастического. Необычно большими являются потенциал и поле тяготения, но согласно принципу эквивалентности само поле тяготения локально не меняет законов, управляющих физическими процессами.

С нашей точки зрения никакого парадокса для внешнего наблюдателя нет. Для такого наблюдателя коллапс «останавливается» при $R \rightarrow r_g$, и нет необходимости в изобретении фантастических нарушений надежно установленных законов физики. Конечно, есть вопрос о том, что будет с веществом, ушедшим под r_g не с точки зрения внешнего наблюдателя, а с «его собственной» точки зрения (т. е. с точки зрения сопутствующего наблюдателя). Этот вопрос мы подробно обсудили в § 6 гл. 4.

§ 7. Метастабильность любого равновесного состояния

Отвлечемся несколько в сторону от проблемы коллапса и сделаем два замечания принципиального характера.

Для звезд, состоящих из холодного ферми-газа, имеющих число нуклонов $N < N_{\max}$, отвечающее «ОВ» максимуму, всегда

существует одно или несколько статических решений. Среди них есть решение с наименьшей полной энергией. Оно устойчиво к малым возмущениям. Значит ли это, что нельзя так перегруппировать нуклоны (не изменяя их числа!), чтобы получившаяся конфигурация (заведомо нестатическая) имела полную энергию (а значит, и массу M) меньше исходной? Ниже мы покажем, что такой вывод был бы неверен, что минимум энергии, отвечающий стационарному состоянию, есть только локальный минимум (Я. Б. Зельдович (1962b)).

Сжимая массу внешним давлением, можно в принципе подвести ее размеры так близко к гравитационному радиусу*), что силы тяготения (стремящиеся при этом к бесконечности) превысят силы давления (возрастающие не быстрее ρ) и заставят ее дальше сжиматься без действия внешних сил — коллапсировать. Из сказанного, казалось бы, следует вывод, что коллапс малой массы хотя и возможен, но отделен от состояния равновесия гигантским энергетическим барьером. Мы покажем, что и этом вывод неверен, что энергетический барьер в данном случае может быть сделан как угодно малым по абсолютной величине.

Начнем с доказательства последнего утверждения. Чем меньше исходная масса, тем, естественно, меньше надо затратить энергии, чтобы, сжав ее до $R \sim r_g$, заставить коллапсировать. Заметим, что плотность, до которой предварительно надо сжать вещество, с уменьшением массы возрастает:

$$\rho \approx 2 \cdot 10^{16} (M_{\odot}/M)^2.$$

На сжатие тратится работа, и это увеличивает массу. В пределе малых масс при сжатии до больших плотностей практически вся масса создается работой, и высота барьера $M \sim r_g$.

Пусть имеется холодная конфигурация в равновесии. Сожмем ее малую центральную часть, заставляя эту часть коллапсировать. Тогда слои, лежащие на границе с коллапсирующим ядром, потеряют опору изнутри и начнут проваливаться к центру, вовлекая в это падение все более наружные слои. Внутренние слои, согласно свойству релятивистского коллапса, будут вечно падать по часам внешнего наблюдателя, никогда не обретая опоры снизу. Следовательно, не остановятся и внешние слои. Таким образом, вся звезда будет вовлечена в сжатие, т. е. будет коллапсировать. Чем меньше область первоначально сжатого ядра, тем меньше нужно затратить энергии для того, чтобы заставить всю звезду сжиматься из устойчивого состояния.

*) Так как при сжатии мы сообщаем энергию, масса вещества возрастает.

Итак, мы доказали, что энергетический барьер, отделяющий коллапс от равновесия, бесконечно мал *); но возмущения, переводящие звезду в коллапс, отнюдь не малы, сжатие ядра до начала его коллапса тем больше, чем меньше необходимая энергия. Например, можно заставить звезду, масса которой равна массе Солнца, коллапсировать, сжав в ее центре ядро с массой, равной массе Земли. Но чтобы заставить такое ядро коллапсировать, его надо сжать до плотности

$$\rho \approx 2 \cdot 10^6 \left(\frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}} \right)^2 \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$$

Естественно, что подобные «флуктуации» ни термодинамически, ни квантово возникнуть не могут. Очевидно также, что в линеаризованной теории малых возмущений, рассмотренной выше в гл. 10, мы подобной возможности перехода в коллапс обнаружить не могли.

Покажем теперь, что всегда можно так сложить заданное число нуклонов N , что полная их энергия будет как угодно мала, т. е. масса M , измеренная внешним наблюдателем, будет сколь угодно малой. Для краткости будем считать, что холодная звезда состоит из идеального ферми-газа. Пусть задано число барионов N . Будем укладывать их достаточно плотно, так что справедливо выражение для ультрарелятивистского газа:

$$\rho = \frac{3}{4} \hbar (3\pi^2)^{1/3} \frac{1}{2} n^{4/3}. \quad (11.7.1)$$

Для M и N имеем формулы для покоящейся материи (см. § 3, гл. 3):

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr, \quad (11.7.2)$$

$$N = 4\pi \int_0^R n(r) e^{\lambda/2} r^2 dr. \quad (11.7.3)$$

) Теория тяготения Эйнштейна — неквантовая теория. Поэтому можно, исходя из соображений размерности, указать границу ее применимости (Уилер (1962)) (см. гл. 2). Из постоянных $\hbar G$ и c^3 можно получить величину размерности длины $L^ = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}$.

В меньших масштабах существенными должны стать квантовые флуктуации метрики. Следовательно, масса, имеющая гравитационный радиус $r_g = L^*$ — это наименьшая масса, которую мы еще можем сжать до размеров r_g , не обращаясь к квантовой теории. Она равна $m = 10^{-8} \text{ г}$, что соответствует энергии 10^{16} эрг . Эта величина определяет нижнюю границу рассматриваемого барьера, если эта граница зависит от квантовых эффектов. В книге Гаррисона, Торна, Вакано и Уилера (1965) возможный нижний предел массы определяется из соображений, что r_g должно быть больше комптоновской длины волны (электрона или нуклона). По-видимому, такое ограничение не необходимо.

Зададим распределение:

$$\rho = \frac{a}{r^2}, \quad r < R \quad \text{и} \quad \rho = 0, \quad r > R, \quad (11.7.4)$$

где a — произвольная константа. Используя формулы (11.7.1) — (11.7.4), получаем $\lambda = \text{const}$ при $r < R$ и

$$M = \text{const} N^{2/3} a^{1/2} \left(1 - \frac{8\pi G}{c^2} a\right)^{1/3}. \quad (11.7.5)$$

Распределение (11.7.4) имеет особенности: $\rho \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$; ρ разрывно при $r = R$. Легко убедиться, что всегда можно так сгладить особенности, что соотношение (11.7.5) изменится сколь угодно мало. В таком распределении нигде нет особенностей ни в метрике, ни в плотности.

Из выражения (11.7.5) следует, что при любом заданном N масса $M \rightarrow 0$, если $a \rightarrow c^2/8\pi G^2$, что и требовалось доказать. Разумеется, полученная конфигурация нестатическая, ведь ее масса близка к нулю и заведомо меньше статической при данном N . Сложенные таким образом нуклоны в начальный момент покоятся, но ускорение отлично от нуля, и они будут коллапсировать.

Мы видим, что в принципе можно было бы создать машину, которая приводит к конфигурации с дефектом массы сколь угодно близким к M_0 . Таким образом, в этой машине из вещества выделяется энергия, почти равная $M_0 c^2$, что несравненно больше ядерной энергии $0,01 M_0 c^2$.

Конечно, создание такой машины для работы с массами много меньше M_{max}^{OB} невозможная задача, так как пришлось бы сжимать вещество до фантастических плотностей.

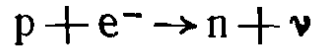
Для массы, близкой к пределу ОВ, соответствующие плотности отнюдь не фантастичны, и переход в коллапс возможен, например, при проходе по инерции через устойчивое состояние в ходе гидродинамического сжатия звезды с $M \approx 1,5 M_{\odot}$, «сорвавшейся» в районе чандрасекаровского максимума.

§ 8. Испускание нейтрино при коллапсе остывшей звезды

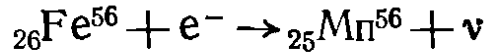
Вернемся к рассмотрению катастрофического сжатия. Звезда с массой, лишь немногим превышающей чандрасекаровский предел, теряет устойчивость и начинает коллапсировать, когда она практически остыла. В ходе гидродинамического сжатия такой звезды вырожденные электроны с ферми-энергией выше определенного порога вступают в обратный β -процесс с ядрами атомов. Происходит нейтронизация вещества.

Если сжимать вещество достаточно медленно, то для каждого сорта ядер существует своя критическая плотность веще-

ства, при которой происходит нейтронизация. Эта плотность соответствует ферми-энергии электронов, равной порогу реакции нейтронизации. Напомним (см. § 5 гл. 5), что нейтронизация протонов



происходит при плотности $1,6 \cdot 10^7 \text{ г/см}^3$ (порог реакции $E - m_e c^2 = 0,78 \text{ Мэв}$); нейтронизация железа



происходит при $6 \cdot 10^8 \text{ г/см}^3$ (порог реакции $3,7 \text{ Мэв}$); см. Камерон (1959с), Сальпетер (1961).

При медленном сжатии близость ферми-энергии электронов к порогу реакции означает, что образующиеся нейтрино уносят мало энергии.

Реакция нейтронизации связана со слабым взаимодействием и относительно медленная. При быстром сжатии нейтронизация отстает от равновесия при данной плотности. Это значит, что процесс будет происходить в основном при плотности значительно выше пороговой, при большей ферми-энергии электронов. Избыток энергии электронов будет уноситься нейтрино. Следовательно, это и есть механизм образования нейтрино большой энергии.

В работах Зельдовича и Гусейнова (1965а, б) сделаны грубые оценки энергии нейтрино. Предполагалось, что плотность меняется по тому же закону, что и при свободном падении однородного вещества

$$\rho = \frac{1}{6\pi G (t_0 - t)^2}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{3\pi G (t_0 - t)^3} = \rho^{3/2} \cdot 2 \cdot \sqrt{6\pi G} = \frac{\rho^{3/2}}{450}. \quad (11.8.1)$$

Ферми-импульс и энергия электронов выражается через плотность ρ и число нуклонов μ_e на один электрон:

$$P_F = m_e c \left(\frac{\rho}{\mu_e 10^6} \right)^{1/3}, \quad E_F = m_e c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{P_F}{m_e c} \right)^2} \approx m_e c^2 \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{1/3}. \quad (11.8.2)$$

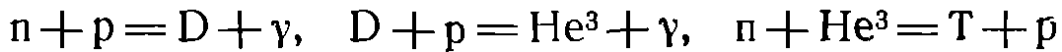
Обозначим через x долю ядер, уцелевших к данному моменту.

Вероятность нейтронизации зависит от свойств исходного и конечного ядра Z_1 и Z_2 (от матричного элемента M_{12}). В обычных лабораторных условиях (без вырожденных электронов) Z_1 стабильно, Z_2 — бета-радиоактивно. Вероятность распада и позволяет найти M_{21} , а по квантовой механике $|M_{12}| \equiv |M_{21}|$. Удобно выразить вероятность процесса нейтронизации Z_1 вырожденными электронами прямо через τ — время полураспада радиоактивного Z_2 и через известную функцию f энергии распада Q .

При $E_F \gg Q$ получим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{5} x \frac{\left(\frac{E_F}{m_e c^2}\right)^5 \ln 2}{f\tau}. \quad (11.8.3)$$

Для разрешенных переходов, например, $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$, $f\tau = 800$ сек. Выписанных выше уравнений достаточно для полного решения задачи. Простейший пример нейтронизации холодного водорода *) приводит к выводу, что $x = 0,5$ будет достигнуто при $E_F \approx 7 \div 8$ Мэв, что значительно превышает порог (1,25 Мэв, включая энергию покоя). Значит, в этом процессе нейтрино уносят энергию 5—7 Мэв. Превращение протона в нейтрон в среде, состоящей из протонов, вызовет цепочку ядерных реакций, заканчивающейся образованием He^4 :



или



Образование одного ядра He^4 из четырех протонов и двух электронов сопровождается выделением 26 Мэв, однако почти половина этой энергии уносится двумя энергичными нейтрино. Нейтронизация водорода в ходе свободного падения происходит в основном при плотности $5 \cdot 10^9$ г/см³, хотя пороговая плотность составляет всего $1,6 \cdot 10^7$ г/см³.

Более трудную проблему представляет нейтронизация гелия при катастрофическом сжатии (свободном падении). У гелия весьма высок порог реакции $e^- + \text{He}^4 = T + n + \nu - Q$ ($Q = 21$ Мэв). К тому же, поскольку не существует связанного состояния H^4 (т. е. $p + 3n$) (см. обзор: Базь, Гольданский, Зельдович (1965)), то в правой части уравнения реакции стоят три частицы. Вероятность реакции зависит также от энергии, которую уносит нейтрон. Понятно, что экспериментальных данных об обратном процессе $n + T = \text{He}^4 + e^- + \bar{\nu}$ нет, так как вероятность слабого взаимодействия налету (со свободным нейтроном) ничтожна. Поэтому для оценки матричного элемента в работе Зельдовича и Гусейнова (1965b) использован изученный на опыте захват отрицательного мю-мезона μ^- : $\mu^- + \text{He}^4 = T + n + \nu_\mu$. Для μ^- на нижней орбите вероятность 370 сек⁻¹.

Предполагая, что матричный элемент не зависит от энергии нейтрона, найдем

$$\frac{dx}{dt} = -x \cdot 660 \cdot y^2 (y - 1)^{3/2},$$

*) Конечно, коллапсирующая звезда не может состоять из водорода (он выгорел). Расчет носит методический характер и показывает только общую картину процесса.

где

$$y = \frac{E_F}{Q} = \frac{1}{45} \left(\frac{\rho}{\mu_e 10^6} \right)^{1/3}. \quad (11.8.4)$$

Интегрирование уравнения для x вместе с законом свободного падения приводит к выводу, что реакция проходит при $E_F \sim 45 \text{ Мэв}$ и при плотности $\sim 10^{12} \text{ г/см}^3$.

За трудной реакцией нейтронизации гелия следует гораздо более легкая, с меньшим порогом ($\sim 10 \text{ Мэв}$) реакция



Таким образом, при коллапсе образуются за счет нейтронизации нейтрино с энергией до $30\text{--}40 \text{ Мэв}$. Грубые оценки показывают, что средний космический поток таких нейтрино может достигать 0,01 потока энергичных солнечных нейтрино от распада $B^8 \rightarrow Be^8 + e^- + \nu$ с граничной энергией 14 Мэв . Так как вероятность регистрации нейтрино возрастает с увеличением их энергии, то не исключена возможность экспериментального обнаружения космических энергичных нейтрино, происхождение которых связано с коллапсом и нейтронизацией вещества. В этой связи особенно интересны проекты опытов, в которых можно будет определить энергию и направление нейтрино (см. Рейнес и Вуд (1965)).

Остается сделать два замечания. Расчеты сделаны для плотности свободно сжимающегося вещества. Градиент давления замедляет сжатие центрального ядра. С другой стороны, при падении вещества, находящегося в периферической части, плотность нарастает вначале медленнее, а затем быстрее, чем по формуле для свободного падения. При этом мы сравниваем производную $d\rho/dt$ при данном ρ . Заметим, что сравнение в одинаковый момент времени не имеет смысла. Таким образом, закон изменения плотности, лежащий в основе расчетов, нельзя считать завышенным; отклонения возможны в обе стороны.

Не повлияет ли гравитационное самозамыкание звезды на возможность регистрации нейтрино? Мы видели, что самозамыкание происходит при средней плотности $2 \cdot 10^{16} (M/M_\odot)^{-2}$. В действительности плотность должна определяться вблизи линии «последнего вздоха» (см. § 6 гл. 11). Максимальная плотность в центре звезды на этой линии несколько меньше этой величины. В простом примере сжатия однородной звезды без давления $\rho_c = [2 \cdot 10^{16} (M/M_\odot)^{-2}] / 2,55$. Нейтронизация гелия происходит при $\rho \approx 10^{12} \text{ г/см}^3$. Следовательно, для подавляющего большинства звезд с $M < 50 M_\odot$ нейтрино будут выходить, испытывая лишь небольшое красное смещение. К тому же у звезд большой массы мы имеем дело с горячей плазмой, к рассмотрению которой мы и переходим.

§ 9. Испускание нейтрино горячей плазмой при коллапсе массивных звезд

Если масса звезды существенно превышает чандрасекаровский предел, то звезда теряет устойчивость и начинает коллапсировать, когда ее энтропия S еще достаточно велика *). В ходе сжатия такой звезды достигаются температуры $T \approx 10^9$ °К и выше. При подобной температуре в равновесии имеются электронно-позитронные пары. Согласно современной теории с определенной вероятностью должен идти процесс



Эта реакция может явиться мощным источником нейтринного излучения при коллапсе горячей звезды.

Сколько энергии в виде нейтрино может излучить коллапсирующая звезда? Соответствующие расчеты были проделаны Майклом (1964), Зельдовичем (1963d), Фаулером (1964), Зельдовичем и Подурцем (1964), Чиу (1964), Зельдовичем и Новиковым (1965). В приложении к этому параграфу приведены подробные вычисления из работы Зельдовича и Новикова (1965). Расчеты показывают, что количество энергии, унесенное нейтрино, заведомо не может быть большим. Дело в том, что для масс $M > 10^4 M_\odot$ гравитационное самозамыкание происходит прежде, чем температура поднимется достаточно высоко, чтобы нейтрино унесло значительную долю массы звезды. Приближенная формула для потери массы такова:

$$\frac{\Delta M}{M} \approx 5 \cdot 10^2 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-3/2}; \quad (11.9.2)$$

формула справедлива для масс

$$10^4 < (M/M_\odot) < 10^6.$$

Температура в момент самозамыкания: $T_9 \approx 4 \cdot 10^3 (M/M_\odot)^{-1/2}$. В этом выражении учтено, что излучение лимитируется линией «последнего вздоха». Для больших масс потери нейтрино еще меньше, чем по формуле (11.9.2). Для $M \leq 2 \cdot 10^2 M_\odot$ самозамыкание наступает после того, как уменьшение энтропии сжимающейся звезды за счет излучения нейтрино приостанавливает дальнейший рост мощности излучения в ходе сжатия. Высвеченная энергия оказывается также небольшой. Соответствующая приближенная формула

$$\frac{\Delta M}{M} \approx 8 \cdot 10^{-17} S_0^{6/7}.$$

*) Для связности изложения мы рассматриваем здесь излучение нейтрино при коллапсе также и очень массивных звезд $M > 10^4 M_\odot$, эволюция которых рассмотрена ниже (см. ниже § 11).

Здесь S_0 — удельная энтропия вещества звезды в момент начала коллапса в единицах $\text{эрг}/(10^9 \text{ град}) \cdot \text{г}$.

Последняя формула особенно ненадежна, так как в области малых масс надо учитывать энергию плазмы и вырождение электронов. Кроме того, существенными становятся процессы рождения нейтрино в других реакциях помимо (11.9.1).

Таблица XVI

Приближенные оценки потерь массы звезд за счет излучения нейтрино при коллапсе

M/M_\odot	10	100	10^3	10^4	10^5	10^6	10^8
$\Delta M/M$	0.05	0.1	10^{-3}	$4 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}	$3 \cdot 10^{-7}$	10^{-14}

В действительности табл. XVI дает, конечно, очень грубое приближение к истине. Подведем итоги:

1. Потеря массы за счет излучения нейтрино при коллапсе всегда составляет малую долю массы звезды и не может быть причиной резкого ослабления тяготения ядра и срыва внешней оболочки давлением, ранее уравновешивавшим тяготение (механизм Майкла (1964), несостоятельность которого показана в работе Зельдовича (1963d)). Даже для ядра звезды потеря массы $< 20\%$. О поглощении нейтрино оболочкой см. Дополнение IV.

2. При коллапсе звезд малой массы $M \leq 3M_\odot$ рождаются нейтрино с энергией 30—40 Мэв в ходе нейтронизации, потеря массы примерно до 1%.

3. При коллапсе звезд с $100 M_\odot \geq M \geq 3 M_\odot$ рождаются нейтрино и антинейтрино с широким спектром со средней энергией порядка 30—50 Мэв, потеря массы до $\sim 5\%$.

4. Общая метагалактическая плотность нейтрино и антинейтрино, родившихся при коллапсе, никак не более $\sim 5\%$ средней в Метагалактике плотности сколлапсировавших звезд.

Таким образом, регистрация энергичных нейтрино может оказаться способом обнаружения сферически-симметричного «беззвучного» коллапса звезд. (См. также Дополнение IV).

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 9

Процесс нейтронизации, описанный в § 8, является прямым следствием экспериментально изученного взаимодействия, связанного с превращением протонов в нейтроны и обратно. Современная теория с большой вероятностью предсказала возможность излучения нейтрино-антинейтринных пар

при любом изменении пульса электрона, при перескоке электрона с одной орбиты на другую и, наконец, при аннигиляции электрона и позитрона (хотя все эти процессы в лабораториях не наблюдались)

$$e^- = e^{-*} + \nu + \bar{\nu}, \quad e^- + e^+ = \nu + \bar{\nu}.$$

На астрофизические следствия этого процесса указал Б. М. Поитекорво (1959). Первые расчеты были произведены Гандельманом и Пинаевым (1964) для излучения электроном, пролетающим около ядра $e^- + Z = e^{-*} + Z + \nu + \bar{\nu}$. Однако существенными для астрофизики становятся нейтринные процессы лишь при температуре порядка $5 \cdot 10^8$ и выше, где включается аннигиляция $e^+ + e^-$ (Чиу (1961b), 1964); Масевич, Коток, Длужневская, Мазани (1965)) и урка-процесс с электронами и позитронами типа: $e^+ + p = p + \nu$, $e^- + p = p + \bar{\nu}$ (Пинаев, 1963a, b). Излучение $\nu\mu$ пренебрежимо мало по сравнению с ν_e при $T < 2 \cdot 10^{11}$.

В связи с вопросами эволюции и взрывов звезд и квазаров важно рассмотреть вопрос о скорости нейтринных потерь. При нерелятивистских электронах и позитронах скорость потери энергии равна

$$\frac{du}{dt} = 2,8 \cdot 10^{-40} n_+ n_- \frac{\partial p_2}{\text{сек} \cdot \text{см}^3},$$

где n_- и n_+ — концентрации электронов и позитронов, в 1 см^3 .

В свою очередь при нерелятивистской температуре (т. е. при $kT < m_e c^2$) и при такой плотности, когда газ невырожден, уравнение термодинамического равновесия дает (см. § 9 гл. 10)

$$n_+ n_- = \frac{4 (2\pi m_e kT)^3}{(2\pi\hbar)^6} e^{-\frac{2m_e c^2}{kT}}, \quad \frac{p_F^2}{2m_e} < kT < m_e c^2.$$

Неравенство справа дает область применимости формулы для $n_+ n_-$; m_e — масса электрона. Подставляя числа и выражая дальше температуру в единицах 10^9 градусов (T_9), получим

$$n_+ n_- = 1,7 \cdot 10^{58} T e^{-\frac{11,9}{T}}; \quad \frac{du}{dt} = 4,8 \cdot 10^{18} T^3 e^{-\frac{11,9}{T}} \text{ эрг/сек} \cdot \text{см}^3,$$

$$3 \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{2/3} < T < 6 \quad (\text{везде } T \equiv T_9).$$

В области высокой температуры $T > m_e c^2$ число пар $e^+ e^-$ растет пропорционально T^3 , как и число квантов; оно становится значительно больше числа первоначально взятых (нейтрализующих ядра) электронов. Произведение $n_+ n_-$ растет как T^6 , сечение аннигиляции растет как T^2 . Спектр рождающихся нейтрино и антинейтрино имеет приблизительно вид

$$E^6 e^{-\frac{12E}{T}} dE, \quad (E \text{ в Мэв}),$$

так что средняя энергия порядка $0,5 T \text{ Мэв}$ (в шесть раз больше энергии kT *).

*) Для сравнения заметим, что спектр равновесного фотонного излучения имеет максимум при $\hbar\omega = 4kT$. Еще выше максимум для фермионов. По этой причине везде ниже, где формально мы пишем, например, условие $kT > m_e c^2$ и т. п., в действительности достаточно более мягкого условия $2kT > m_e c^2$. Так, для применения ультрарелятивистских формул достаточно $T = T_9 > 3$. Спектр вылетающих нейтрино вообще не является равновесным до тех пор, пока вещество остается прозрачным для нейтрино. Так как взаимодействие растет с ростом энергии, то излучаемый спектр жестче равновесного.

В этой ситуации

$$n_+ = n_- = 1,6 \cdot 10^{28} T^3 \text{ см}^{-3}, \quad u_{\text{пар}} = 1,75 \cdot \sigma T^4 = 1,3 \cdot 10^{22} T^4 \text{ эрг/см}^3, \\ \frac{du_{\nu}}{dt} = 4,3 \cdot 10^{15} T^9 \text{ эрг/сек} \cdot \text{см}^3, \quad T > 6, \quad \frac{T}{6} > \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{1/3}. \quad (11.9.1\text{п})$$

Фактически, как отмечают Фаулер и Хойл (1964), последняя формула удовлетворительна, начиная с $T > 3$ (завышение на 50%, быстро уменьшающееся до 10% при $T=6$).

Можно рекомендовать промежуточную интерполяционную формулу

$$\frac{du_{\nu}}{dt} = 10^{14} T^{12,5} \text{ эрг/сек} \cdot \text{см}^3, \quad 1 < T < 3,$$

удовлетворительно заполняющую интервал, в котором плохи обе теоретические, асимптотически правильные формулы.

Наконец, в релятивистски вырожденном газе химический потенциал электронов *) дается выражением $\mu_- = m_e c^2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \cdot 10^6 \right)^{1/3}$, а концентрация позитронов:

$$T < 6, \quad \frac{\mu_-}{m_e c^2} > 1, \quad n_+ = 1,3 \cdot 10^{29} T^{3/2} e^{-\left(6 + \frac{\mu_-}{m_e c^2}\right)/T}, \\ T > 6, \quad \frac{\mu_-}{m_e c^2} > \frac{T}{6}, \quad n_+ = 1,5 \cdot 10^{28} T^3 e^{-6 \left(1 + \frac{\mu_-}{m_e c^2}\right)/T}.$$

Для потерь энергии приближенно получим

$$\frac{du_{\nu}}{dt} \approx 10^{-40} n_+ n_- \left(\frac{\mu_-}{m_e c^2} \right)^2, \quad T < 6, \\ \frac{du_{\nu}}{dt} \approx 3 \cdot 10^{-40} n_+ n_- \left(\frac{\mu_-}{m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{T}{6} \right), \quad T > 6,$$

так что окончательно в последнем случае

$$\frac{du_{\nu}}{dt} = 5 \cdot 10^{17} T^4 \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{5/3} e^{-6 \left[\left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{1/3} + 1 \right] / T}, \quad 6 < T < 6 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \cdot 10^{-6} \right)^{1/3}.$$

Выражения потери энергии урка-процессом (в котором участвуют р, n или ядра) см. в работах Пинаева (1963а, б). В рассматриваемом случае (больших звезд) оно мало, но для малых масс может оказаться существенным.

Рассмотрим потери энергии в ходе свободного падения и сжатия вещества с заданным начальным значением удельной энтропии S_0 . Пусть начальное состояние таково, что энергия излучения и пар преобладает над энергией первоначальной плазмы. Будем сразу писать выражения для $T > 6$, когда пары e^+ , e^- составляют равноправное слагаемое плотности энергии:

$$u = u_{\text{пар}} + u_{\text{изл}} = 2,75 \sigma \cdot T^4 = 2,1 \cdot 10^{22} T^4, \\ S = 2,8 \cdot 10^{22} \frac{T^3}{\rho} \quad (\text{в единицах эрг/г} \cdot 10^9 \text{ град}).$$

*) Не путать с μ_e в скобке — молекулярным весом на один электрон.

Уравнение изменения энтропии (используя (11.9.1)) запишется в виде

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\rho T} \frac{du_v}{dt} = -\frac{1}{\rho} 4,3 \cdot 10^{15} T^8.$$

Остается выразить температуру через энтропию и плотность:

$$T = \left(\frac{\rho S}{2,8 \cdot 10^{22}} \right)^{1/3}.$$

Окончательно получим

$$\frac{dS}{dt} = -3,6 \cdot 10^{-45} \rho^{5/3} S^{8/3}.$$

Если задана плотность в зависимости от времени $\rho(t)$, например, по закону свободного падения, то, выражая dt через $d\rho$:

$$dt = 450 \rho^{-3/2} d\rho,$$

немедленно получим простое, легко решаемое уравнение:

$$\frac{dS}{d\rho} = -1,6 \cdot 10^{-42} \rho^{1/6} S^{8/3}.$$

Астрономы, не привыкшие пользоваться энтропией, должны обратить внимание на то, как упрощается вывод уравнения по сравнению с обычной процедурой, когда рассматривают энергию и работу сил давления, которая в уравнении энтропии не входит!

Интегрируя с начальными условиями

$$\rho=0, S=S_0,$$

находим

$$S = [S_0^{-5/3} + 1,6 \cdot 10^{-42} \rho^{7/6}]^{-3/5}. \quad (11.9.2п)$$

Зная $S(\rho)$, легко написать интеграл, дающий полную потерю энергии Δ одного грамма вещества при сжатии от $\rho=0$ до заданной плотности ρ . Для этого в $\int \frac{1}{\rho} \frac{du_v}{dt} dt$ выразим все величины S , T , $\frac{du_v}{dt}$, dt через ρ и $d\rho$.

Если бы мы не учитывали уменьшения энтропии в ходе сжатия, то получили бы

$$\Delta = k_1 \int_0^\rho \frac{T^9}{\rho} dt = k_2 S_0^3 \int_0^\rho \frac{\rho^3}{\rho} \rho^{-3/2} d\rho \equiv \frac{2}{3} k_2 S_0^3 \rho^{3/2},$$

$$k_2 = 8,8 \cdot 10^{-50}, \quad (11.9.3п)$$

т. е. интеграл, расходящийся при верхнем пределе $\rho \rightarrow \infty$; при стремлении $\rho \rightarrow \infty$ потери неограниченно возрастали бы.

Однако, подставляя выражение S из (11.9.2п), получим сходящийся интеграл:

$$\Delta = 8,8 \cdot 10^{-50} \int_0^\infty [S_0^{-5/3} + 1,6 \cdot 10^{-42} \rho^{7/6}]^{-9/5} \rho^{1/2} d\rho.$$

Простые вычисления дают *)

$$\Delta = 7 \cdot 10^4 S_0^{6/7}. \quad (11.9.4п)$$

Запишем это выражение через некоторое эффективное ρ^* в том же виде, что и (11.9.3п):

$$\Delta = \frac{2}{3} k_2 S_0^3 \rho^{*3/2}.$$

Отсюда, подставляя Δ из (11.9.4п), находим ρ^* :

$$\rho^* = 1,64 (1,6 \cdot 10^{-42} S_0^{5/3})^{-6/7}.$$

Очевидно, величина ρ^* характеризует ту плотность, при которой уменьшение энтропии эффективно приостанавливает потерю энергии **).

Имеется и другое ограничение излучения, связанное с гравитационным самозамыканием. Оно происходит при средней плотности порядка $\rho_g \approx 2 \cdot 10^{16} (M/M_\odot)^{-2}$.

Проследим теперь весь процесс: массивная звезда теряет устойчивость в критическом состоянии, параметры которого даны в § 9 гл. 10. При этом температура (при $M > 10^4 M_\odot$)

$$T = 0,02 \cdot \rho^{1/3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/6} \quad (T \equiv T_9).$$

Соответствующее выражение энтропии (в стадии без пар!):

$$S = \frac{4}{3} \sigma \frac{T^3}{\rho} = 0,97 \cdot 10^{22} \frac{T^3}{\rho} = 8 \cdot 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{\text{эрг}}{10^9 \text{ град} \cdot \text{г}} \right).$$

Рождение пар само является причиной уменьшения γ до величины, меньшей $4/3$, т. е. причиной начала катастрофического падения. Критические параметры при этом для $M < 10^4 M_\odot$ см. в табл. XIII.

Сжатие происходит адиабатически, т. е. с постоянной энтропией; ситуация, когда пары становятся равноправным участником равновесия, достигается раньше, чем нейтрино успеют заметно уменьшить энтропию. Таким образом, в ходе сжатия в области $0,5 < T < 3$ происходит переход на формулы

$$u = 2,75 \sigma T^4, \quad S = 2,8 \cdot 10^{22} \frac{T^3}{\rho},$$

откуда получим $T = 0,014 (M/M_\odot)^{1/6} \rho^{1/3}$.

При адиабатическом (без потерь) сжатии до плотности, соответствующей гравитационному самозамыканию $\rho_g = 1,8 \cdot 10^{16} (M/M_\odot)^{-2}$ получается важный физический вывод: энергия фотонов и пар единицы объема составляет 0,24 энергии покоя ρc^2 . В этом состоянии $T = 4000 (M/M_\odot)^{-1/2}$.

Отдать больше, чем есть в наличии — невозможно. Применительно к излучению нейтрино это означает, что полная излученная энергия никак не может превысить $0,24 M c^2$.

*) Безразмерный интеграл имеет следующее значение:

$$\int_0^\infty (1 + z^{7/6})^{-9/5} z^{1/2} dz = 1,4.$$

**) Существенно увеличиться потеря энергии может лишь в том случае, если возникнет ударная волна с мгновенным сжатием (см. Дополнение IV).

В действительности же интегрирование уравнения потерь приводит к гораздо меньшим значениям (см. табл. XVII). Если масса звезды велика, $M > 10^4 M_{\odot}$, то излучение нейтрино ограничивается гравитационным замыканием в режиме практически постоянной энтропии. Для $M > 10^6$ температура такова, что рождение пар становится экспоненциально малым. Кроме того, надо учесть, что в действительности излучение нейтрино лимитируется линией «последнего вздоха». Вследствие резкой зависимости $\frac{du_{\nu}}{dt}$ от ρ , этот фактор дает гораздо большее изменение потери массы, чем кажется на первый взгляд. В работе Зельдовича и Подурца (1964) показано, что для грубого учета этого обстоятельства величину потери энергии звездой, следующую из приведенных выше формул, надо умножить на $7 \cdot 10^{-3}$.

Таблица XVII

Потери массы звездами при коллапсе за счет излучения нейтрино и характерные параметры звезды в момент эффективного прекращения излучения нейтрино

M/M_{\odot}	10	100	10^3	10^6	10^8	10^9	10^8
$\Delta M/M$	0,05	0,1	10^{-3}	$4 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}	$3 \cdot 10^{-7}$	10^{-14}
T_9	85	70	50	36	11	3,6	0,5
ρ^*	$1,6 \cdot 10^{11}$	$2,5 \cdot 10^{10}$					
ρ_g			$5 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^4$	2

При $M < 200 M_{\odot}$ уменьшение энтропии вследствие самого излучения нейтрино ограничивает общую потерю энергии раньше, чем происходит релятивистское самозамыкание; переход от одной области к другой весьма размытый.

При этом для эффективной плотности и температуры, при которой потеря достигла $\Delta/2$, имеют место выражения

$$\rho^* \approx 8 \cdot 10^{11} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-5/7}, \quad T \approx 100 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/14}.$$

Вся таблица XVII представляет собой чрезвычайно грубое приближение. В области малых масс $M < 100 M_{\odot}$ необходимо учитывать энергию плазмы и вырождение электронов. Все процессы, в том числе и гравитационное замыкание, нужно рассматривать на фоне истинного гидродинамического решения, зависящего как от времени, так и от координат. Наконец, для больших плотностей более существенными могут оказаться другие процессы излучения нейтрино. (см. Дополнение IV).

§ 10. Ранние фазы эволюции сверхмассивной звезды

Обратимся теперь к вопросам эволюции сверхмассивной звезды. Сделаем прежде всего несколько замечаний о возможности ее возникновения. Рассмотрим процесс гравитационной конденсации разреженного облака газа в сверхмассивную звезду. Процесс гравитационной конденсации весьма сложен.

Детали его зависят от возможного наличия внешнего давления нагретых газов, от механизмов нагрева и охлаждения вещества, от развития флуктуаций в процессе сжатия, от наличия магнитного поля и вращения и т. п. Расчет, кроме того, требует знания конкретных астрофизических условий, в которых протекает гравитационная конденсация.

Несмотря на многочисленные работы (см. обзоры Каплан, Пикельнер (1963), Бербиджи (1962)), процесс образования обычных звезд из диффузной среды до сих пор представляется неясным, так же как и процесс образования галактик (см. по этому поводу работы Каплана и Пикельнера (1963), Озерного (1967а) и Бирда (1964)). Тем более мы не можем конкретизировать условия возможного возникновения сверхмассивных звезд. Однако некоторые принципиальные соображения здесь можно высказать. Для того чтобы поддерживать в равновесии массу газа, энтропия сверхмассивной звезды должна быть достаточно велика (см. § 9 гл. 10). В ходе сжатия первоначально разреженного газа в звезду, его энтропия за счет излучения энергии может только уменьшаться. Выделение ядерной энергии до достижения равновесного состояния не происходит из-за низкой температуры. Следовательно, если мы предположим, что в ходе сжатия отсутствуют процессы роста энтропии за счет перевода энергии макроскопических движений в тепло, то энтропия газа в начальном состоянии должна быть не меньше энтропии в конечном состоянии.

Энтропия начального состояния складывается только из энтропии газа (нейтральный водород), а ролью излучения можно пренебречь*). Энтропия газа из нейтрального водорода, рассчитанная на единицу массы, дается выражением

$$S_H = 8,3 \cdot 10^8 \left[-5,6 + \ln \frac{T^{3/2}}{\rho} \right]. \quad (11.10.1)$$

Приравнивая это значение к значению энтропии на единицу массы в звезде (см. § 9 гл. 10), получаем критическое значение начальной температуры, необходимое (при данной начальной плотности) для образования равновесной звезды

$$T_{кр}^0 = \left(\frac{\rho}{10^{-24}} \right)^{2/3} \cdot 10^{0,27 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/2} - 14,4}. \quad (11.10.2)$$

Здесь $T_{кр}^0$ — требуемая минимальная начальная температура газа, выраженная в градусах, ρ — начальная плотность в $г/см^3$.

*) В ходе сжатия это излучение уходит из звезды, так как в начале сжатия облако прозрачно.

Приводим значение критической температуры для двух значений начальной плотности, $\rho_1 = 10^{-24} \text{ г/см}^3$ и $\rho_2 = 10^{-29} \text{ г/см}^3$, характерных для межзвездных и метagalактических условий соответственно.

Таким образом, звезды с массой $M/M_\odot \geq 10^4$ без перехода энергии макроскопического движения газа в тепло возникнуть не могут. Следовательно, для возникновения таких «звезд»

Таблица XVIII

Минимальная начальная температура, требуемая для образования звезды (без роста энтропии), из среды данной плотности

$\rho \text{ г/см}^3$	M/M_\odot		
	10^3	$3 \cdot 10^3$	10^6
10^{-24}	$10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}$	$3 \text{ }^\circ\text{K}$	$5 \cdot 10^{12} \text{ }^\circ\text{K}$
10^{-29}	$5 \cdot 10^{-10} \text{ }^\circ\text{K}$	$10^{-3} \text{ }^\circ\text{K}$	$2 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$

не могут. Следовательно, для возникновения таких «звезд» существенно наличие турбулентности в процессе гравитационной конденсации с последующим образованием ударных волн, вызывающих увеличение энтропии. О возможных процессах образования сверхмассивных объектов (квазаров) см. гл. 13.

С другой стороны, если $M \leq 10^3 M_\odot$, то темп сжатия определяется уменьшением энтропии при излучении энергии.

В целом, процесс конденсации обычных звезд идет с отдачей тепла и уменьшением энтропии.

§ 11. Эволюция сверхмассивной звезды (без турбулентности и вращения)

а) *Общие замечания.* Равновесная устойчивая звезда при заданном химическом составе и заданной энтропии находится в минимуме кривой энергии $E(\rho, S)$ (см. § 9 гл. 10). Равновесная энергия отрицательна. Если в звезде не исчерпаны запасы ядерной энергии, то эта энергия несравненно больше абсолютной величины равновесной энергии E . В самом деле, запас ядерной энергии на грамм вещества порядка $q \approx 10^{19} \text{ эрг/г}$, а во всей звезде *)

$$E_{\text{яд}} \approx 10^{19} M c^2 = 10^{52} \frac{M}{M_\odot} \text{ эрг},$$

что для рассматриваемых масс $10^4 \div 10^9 M_\odot$ много больше характерной равновесной энергии в критической точке потери устойчивости (§ 9 гл. 10) $E'' = -3,56 \cdot 10^{54} \text{ эрг}$.

Если бы ядерная энергия выделялась мгновенно, то вещество звезды разлетелось бы. Однако звезда обладает механиз-

*) Для оценки $E_{\text{яд}}$ учитывается масса всей звезды, а не только ядра, где высокая температура. Это связано с тем, что в массивных звездах, вероятно, существует конвекция, которая вызывает перемешивание вещества.

мом саморегулировки своих источников энергии. При образовании из разреженного вещества она сжимается до тех пор, пока выделение ядерной энергии вблизи центра не уравновесит излучение с поверхности. Этим определяется ее T_c , и следовательно, положение изображающей точки на E_e на рис. 51. Если бы не было причин, вызывающих неустойчивость равновесия в таком состоянии, то звезда медленно сжигала бы свое ядерное топливо. Однако звезды, в которых главную роль играет давление излучения, могут быть подвержены изотермической неустойчивости (см. ниже), которая развивается за время порядка тепловой релаксации звезды. Развивается ли такая неустойчивость в действительности и к чему она ведет, не совсем ясно. Наконец, если температура мала для протекания ядерных реакций, то эволюция звезды (без потери массы) заключается в том, что звезда постепенно уменьшает энтропию и энергию в ходе излучения света. При этом изображающая точка движется вниз по кривой E_e . Достижение минимума этой кривой соответствует переходу к состояниям, в которых уравнения гидростатического равновесия не имеют решений. Происходит катастрофическое сжатие со скоростью, определяемой уравнениями гидродинамики. Вращение, как показано в § 12—18 гл. 11, существенно влияет на положение равновесия. Эволюция с учетом вращения разобрана в § 18 гл. 11.

Рассмотрим сначала скорость и время равновесной эволюции без вращения за счет остывания звезды без ядерных источников энергии, затем посмотрим, какие изменения даст учет ядерных источников энергии и изотермической неустойчивости, и в заключение параграфа обратимся к стадии катастрофического сжатия.

б) *Условие светового равновесия.* Это условие рассмотрено в классической книге Эддингтона (1926). В сверхмассивной звезде сила тяготения уравновешена световым давлением. Рассмотрим силы, действующие в поверхностных слоях звезды. В сильно ионизованной плазме комптоновское рассеяние на электронах является основным процессом, обуславливающим непрозрачность вещества. Рассчитаем силу светового давления, действующую на один изолированный электрон. Эта сила, очевидно, равна

$$F_e = -\frac{1}{n_e} \frac{dP}{dr} = -\frac{1}{3n_e} \frac{d\varepsilon}{dr}, \quad (11.11.1)$$

где n_e — концентрация плазмы, ε — плотность лучистой энергии. В среде, оптическая толщина которой больше единицы, поток излучения q равен

$$q = -D \frac{d\varepsilon}{dr}, \quad (11.11.2)$$

а коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \frac{c}{n_e \sigma_e}, \quad (11.11.3)$$

где σ_e — сечение рассеяния; $\sigma_e = 6,7 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$. Сечение не зависит от частоты квантов до тех пор, пока

$$\hbar\omega \ll m_e c^2.$$

Подставляя (11.11.3) и (11.11.2) в (11.11.1), находим

$$F_e = \frac{\sigma_e q}{c}. \quad (11.11.4)$$

Заметим, что выражение (11.11.4) не зависит от предположения о большой оптической толщине. Действительно, средняя по времени сила, действующая на один электрон, при потоке излучения q равна (11.11.4) независимо от распределения квантов излучения по углам. Такая же сила действует на изолированный электрон в поле излучения точечного источника. В силу электронейтральности плазмы на один электрон приходится масса μ/α , $\alpha = 6 \cdot 10^{23}$. В равновесии сила лучистого давления на один электрон F_e равна силе притяжения массы, приходящейся на один электрон:

$$\frac{GM_\mu}{ar^2} = \frac{\sigma_e q}{c}. \quad (11.11.5)$$

Отсюда, выражая q через светимость L : $q = L/2\pi r^2$ и подставляя численные константы, получаем окончательно для водородной плазмы

$$L = 1,3 \cdot 10^{38} \frac{M}{M_\odot} \text{ эрг/сек}, \quad \frac{L}{L_\odot} = 3 \cdot 10^4 \frac{M}{M_\odot}, \quad \frac{L}{M} = 3 \cdot 10^4 \frac{L_\odot}{M_\odot}. \quad (11.11.6)$$

Подчеркнем, что формула (11.11.6) дает верхний предел светимости любой стационарной звезды (не обязательно сверхмассивной): большой поток излучения вызовет сбрасывание поверхностных слоев.

В рассматриваемых звездах, в которых давление определяется излучением, выражение (11.11.7) есть не только верхний предел, но и реальная светимость. Отвлекаясь несколько в сторону, заметим, что в таких звездах условие равновесия (11.11.5) должно соблюдаться не только у поверхности, но и по всей звезде. Следовательно, должно быть справедливо равенство

$$L_r = 1,3 \cdot 10^{38} \frac{M_r}{M_\odot} \text{ эрг/сек}, \quad (11.11.7)$$

где M_r — масса внутри сферы радиуса r и L_r — полный поток света через эту сферу.

Ясно, что ядерные источники энергии (если они есть) расположены вблизи центра, и поток света не может по всей звезде нарастать пропорционально массе по уравнению (11.11.7). На первый взгляд кажется, что звезда с лучистым давлением и центральным источником вообще не может существовать. Но дело в том, что центральный источник вызовет конвекцию в звезде, ибо и без этого источника звезда находится на грани конвективной неустойчивости. Конвективный перенос энергии обеспечивает необходимый поток тепла в сверхмассивной звезде. Чтобы ни обуславливало перенос энергии внутри звезды, у самой поверхности перенос должен осуществляться лучистой теплопроводностью, ибо во внешнее пространство поток энергии уходит с поверхности в виде лучей света, поэтому соотношение (11.11.6) остается справедливым для полной светимости.

в) *Время остывания до критического состояния.* Вернемся к звезде без ядерных источников энергии. Как видно из формулы (10.9.16), у звезды с $M > 10^5 M_{\odot}$ даже в критическом состоянии температура в центре недостаточно велика, чтобы вызвать нейтринное излучение. Поэтому охлаждение звезды определяется фотонной светимостью (11.11.6). Эта светимость определяет темп эволюции—скорость продвижения по кривой E_e .

Когда вещество звезды находилось в рассеянном состоянии, его энергия была равна нулю. Чтобы дойти до критического состояния, надо высветить энергию $-E'' = 3,56 \cdot 10^{54}$ эрг (см. конец § 9 гл. 10). Таким образом, время эволюции дается формулой

$$t = -\frac{E''}{L} = 2,4 \cdot 10^8 \mu^{-2} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-1} \text{ лет.} \quad (11.11.8)$$

Мы уже подчеркивали (см. § 9 гл. 10), что $|E''|$ много меньше тепловой энергии звезды. Поэтому $t_{\text{эвол}}$ много меньше времени тепловой релаксации $t_{\text{охлажд}} = Q/L$.

Очевидно, звезду можно рассматривать как квазиравновесную только в том случае, когда время эволюции до $E''_{\text{кр}}$ существенно превышает характерное время гидродинамических процессов (см. § 1 гл. 10). Это последнее время по порядку величины есть

$$t_{\text{гидр}} = \sqrt{\frac{1}{6\pi G \bar{\rho}}} \approx \frac{10^3}{\sqrt{\bar{\rho}}} \text{ сек.} \quad (11.11.9)$$

Подставляя $\bar{\rho} = \rho_c/54$ (выражение, справедливое для политропы с $n=3$) и вместо ρ_c выражение ρ_c'' (10.9.15), находим

$$t_{\text{гидр}} = 5 \cdot 10^{-5} \mu^{3/2} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{7/4}. \quad (11.11.10)$$

Сравнивая (11.11.10) и (11.11.8), видим, что времена $t_{\text{эвол}}$ и $t_{\text{гидр}}$ сравниваются при $M \approx 10^8 M_{\odot}$. Равновесных невращающихся звезд такой и большей массы заведомо быть не может.

г) *Ядерные источники энергии.* Мы уже отмечали выше, что звезда будет квазиравновесно сжиматься до тех пор, пока вблизи центра температура не поднимется достаточно высоко для того, чтобы выделение ядерной энергии компенсировало излучение с поверхности. В табл. XIX приведено эффективное выделение энергии в сек на грамм вещества звезды $\tilde{A}_{\text{яд}} = \left(\int A_{\text{яд}} dM \right) / M \approx \approx 0,1 (A_{\text{яд}})_c$, рассчитанное для критического состояния.

Таблица XIX

Эффективная мощность выделения ядерной энергии на грамм вещества звезды

эрг/г·сек	M/M_{\odot}		
	10^6	$5 \cdot 10^5$	10^6
\tilde{A}_{pp}	$2 \cdot 10^2$	$6 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4}$
\tilde{A}_{CN}	$2 \cdot 10^{14}$	$6 \cdot 10^4$	0,1
L/M	$6 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$

Данные для углеродно-азотного цикла даны в обычном предположении, что процентное содержание в веществе углерода + азота составляет около 0,5%. Из табл. XIX видно, что в этих предположениях протон-протонной реакцией можно полностью пренебречь для той области, где $E_{\text{яд}}$ сравнима с потерей энергии звездой за счет излучения, рассчитанной на грамм вещества L/M . Для L использована формула (11.11.6).

Итак, $\tilde{E}_{\text{яд}}$ и L/M сравниваются при $M \approx 5 \cdot 10^5 M_{\odot}$. Значит, при $M > 5 \cdot 10^5 M_{\odot}$ температура даже в критическом состоянии еще недостаточно высока, чтобы выделение ядерной энергии компенсировало излучение, и звезда могла длительно существовать в равновесии за счет ядерной энергии. Таким образом, для звезд с $M > 5 \cdot 10^5 M_{\odot}$ во все время равновесной эволюции ядерные источники энергии несущественны. Эволюция таких звезд после их возникновения определяется процессом остывания, описанным в предыдущем пункте.

Для звезд с $M < 5 \cdot 10^5 M_{\odot}$ еще до достижения критического состояния выделение ядерной энергии становится существенным. Если бы не было причин, приводящих к неустойчивости такой звезды, она могла бы существовать в равновесии, пока не исчерпала бы весь запас ядерной энергии. Этот запас составляет примерно $E_{\text{яд}} \approx 10^{52} M/M_{\odot}$ эрг (см. начало параграфа).

Отсюда время ядерной эволюции порядка $E_{\text{яд}}/L \approx 10^6$ лет. Однако, для таких звезд возможна в принципе изотермическая неустойчивость, к которой мы переходим.

д) *Устойчивость сверхмассивной звезды.* Вся изложенная выше теория основана на рассмотрении устойчивости звезды относительно общего адиабатического расширения или сжатия. Для этого процесса критическим является показатель адиабаты $\gamma = 4/3$, характерный для вещества с преобладанием давления излучения.

Линеаризованная задача о малых возмущениях имеет, очевидно, целый спектр решений; это значит, что существует множество различных возмущений, экспоненциально зависящих от времени с различными показателями:

$$\delta\rho = \sum (\delta\rho)_i; \quad (\delta\rho)_i = \varphi_i(\mathbf{r}) e^{\omega_i t}; \quad \mathbf{u}_i = \boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{r}) e^{\omega_i t}.$$

Экспоненциальная зависимость от времени следует из того, что невозмущенное состояние не зависит от времени, а следовательно, в уравнение для возмущений входит только dt , но не само t , так что при прибавлении к t константы решение должно переходить снова в решение; с другой стороны, в линеаризованной задаче при умножении решения на константу оно остается решением; именно этим свойством обладает экспонента,

$$e^{\omega(t+c)} = e^{\omega c} e^{\omega t} = c_1 e^{\omega t}.$$

Более того, в уравнения, в которых нет члена, описывающего вязкость, входит только ω_i^2 . Общее расширение или сжатие представляет собой «основной тон» — колебание без узлов, с $\varphi_0(\mathbf{r})$, имеющим везде один знак. Все остальные виды возмущения ортогональны к нему, значит, $\varphi_i(\mathbf{r})$ с $i \neq 0$ имеет разный знак в разных областях*) и, следовательно, имеют узловые поверхности $\varphi_i(\mathbf{r}) = 0$. Соответствующие $\omega_i^2 < \omega_0^2$ вещественны. Поэтому если доказана устойчивость звезды относительно общего расширения или сжатия, $\omega_0^2 < 0$, то можно быть уверенным в устойчивости звезды относительно любых других адиабатических деформаций. Иначе можно получить этот результат следующим образом. Начнем с рассмотрения устойчивости неограниченной однородной среды. Вместе с Джинсом совершим некорректность: допустим, что это состояние может быть стационарным**).

*) Нужно пользоваться лагранжевыми координатами, а не эйлеровыми, иначе возникает тривиальное решение, связанное со сдвигом звезды как целого, $\varphi_1 = a \operatorname{grad} \rho_0$, с узловой поверхностью и с $\omega_1^2 = 0$.

**). См. в связи с этим, например, Боннор (1957). Эта некорректность не меняет оценки длины волны неустойчивости, что для нас сейчас существенно.

В пределах весьма длинных волн возмущения зависят от времени гармонически с $\omega^2 = 4\pi G\rho_0$, $\omega = \pm\sqrt{4\pi G\rho_0}$. Для коротких волн нарастанию возмущений препятствует градиент давления, поскольку увеличение плотности сопровождается повышением давления. Соответственно

$$\omega^2 = 4\pi G\rho - k^2 a^2,$$

где a — скорость звука, k — волновой вектор возмущения $\varphi(\rho) \sim e^{i k r}$; в пределе при $k^2 a^2 \gg 4\pi G\rho_0$ уравнение описывает распространение звука. Неустойчивы и нарастают только возмущения с $k^2 < \frac{1}{a} \sqrt{4\pi G\rho}$ или, иначе говоря, с длиной волны больше критического значения

$$\lambda > \lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{4\pi G\rho}}.$$

Диаметр звезды, находящейся в равновесном состоянии, как раз порядка критической «джинсовской» длины волны $\lambda_{\text{кр}}$. Это и значит, что в пределах звезды нельзя разместить возмущения, которые бы нарастали. Звезда, находящаяся в равновесии, всегда устойчива относительно распада на много мелких частей. (см также Чиу (1961a), Handb. d. Phys., 51, 1958).

Специфика больших звезд связана с тем, что давление плазмы составляет малую долю светового давления:

$$\frac{P_{\text{пл}}}{P_{\text{изл}}} \approx 8,6 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1/2}.$$

Л. Э. Гуревич (1954) и А. И. Лебединский (1954) поставили вопрос об устойчивости большой звезды относительно изотермических возмущений плотности. При изотермическом перемещении вещества только плазменная часть давления возрастает пропорционально плотности, а световая часть $P_r \approx \frac{1}{3}\sigma T^4$ остается неизменной. Следовательно, возвращающаяся сила, противодействующая нарастанию возмущений, гораздо меньше, чем при адиабатическом сжатии. Иначе можно сказать, что изотермическая скорость звука a_t гораздо меньше адиабатической, соответственно меньше и критическая джинсовская длина волны для изотермических возмущений.

Путем нарастания изотермических возмущений в принципе массивная звезда может распасться на совокупность отдельных

звезд *). В этом видели, в частности, причину несуществования звезд с $M > 100M_{\odot}$. О том, может ли развиваться изотермическая неустойчивость в звезде и к чему она ведет, будет сказано в конце раздела. Сейчас просто рассмотрим эту неустойчивость. При изотермическом движении плазмы относительно однородного поля электромагнитных волн имеет место трение плазмы о поле излучения. Важно, что в результате изотермические возмущения нарастают значительно медленнее адиабатических.

Выразим трение плазмы об излучение через привычные для астрофизика величины коэффициента лучистой теплопроводности и сечения взаимодействия с излучением.

С помощью (11.11.4) силу можно связать с потоком энергии

$$F = \frac{\sigma_c q}{c}.$$

Этим выражением мы пользовались при рассмотрении «светового равновесия». Теперь, применяя его к плазме, движущейся относительно заданного распределения лучистой энергии, запишем поток энергии относительно вещества через скорость вещества относительно (покоящегося) излучения. Очевидно, $q = -v E_{\text{изл.}}$, где $E_{\text{изл.}}$ — плотность энергии света.

Следовательно, закон трения **)

$$F = -nv.$$

Сила пропорциональна скорости и плотности лучистой энергии; коэффициент трения для краткости называем n .

Теперь составим уравнения для возмущений:

$$\delta\rho = r e^{ikx + \omega t}, \quad v_x = v e^{ikx + \omega t}, \quad \delta\phi = \psi e^{ikx + \omega t},$$

где $\delta\rho$ — возмущение плотности, $\delta\phi$ — возмущение гравитационного потенциала, скорость в невозмущенном состоянии равна нулю; в возмущенном состоянии скорость направлена по оси x . Уравнение Пуассона дает

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \rightarrow -k^2\psi = 4\pi G r.$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\text{div } \rho v \rightarrow \omega r = -ikv\rho_0.$$

*) Полная энергия массивной звезды весьма мала по абсолютной величине, так как показатель адиабаты близок к $4/3$. Отсюда иногда делали вывод, что энергетически возможен распад одной звезды с данной массой M и $E \equiv 0$, на две звезды с массой $M/2$ и $E \equiv 0$ и т. д. В действительности при той энтропии S , при которой звезда с массой M находится в равновесии и имеет $E \equiv 0$, равновесие звезд меньшей массы невозможно.

***) В звезде сила, связанная с потоком энергии L , уравновешена силой тяжести.

Уравнение движения (с учетом лучистого трения!):

$$\frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dx} = -\text{grad } \varphi + F \rightarrow \omega v = -ik\psi - nv.$$

Отсюда получим характеристическое уравнение для ω :

$$\omega^2 + n\omega - 4\pi G\rho_0 = 0.$$

Наконец, отсюда при $n > \sqrt{4\pi G\rho_0}$ получим приближенно

$$\omega_1 = \frac{4\pi G\rho}{n}; \quad \omega_2 = -n, \quad \text{где } n = \frac{\sigma_e}{m_p c} E_{\text{изл.}}$$

Ответ не зависит от k , что естественно, поскольку рассматривают возмущения плазмы (без излучения) в масштабе много больше $\lambda_{\text{крит}}|_{T=\text{const}}$, т. е. пренебрегая градиентом газового давления (поле излучения вообще не меняется). Независимость ω_1 от k означает, что время диффузии света из всей звезды также порядка $1/\omega_1$.

Таким образом, время возрастания возмущения в e раз, $\tau_1 = 1/\omega_1$, по порядку величины равно времени, за которое свет мог бы продиффундировать наружу через плазму звезды; эта формула справедлива лишь в том случае, если время τ_1 значительно больше гравитационного времени сжатия звезды при свободном падении:

$$t_{\text{гидр.}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}.$$

В действительности мы знаем, что энергия звезды равна кинетической энергии плазмы, взятой со значком минус. Следовательно, если ядерные реакции не поддерживают температуру звезды, то ее коллапс как целого начнется задолго до того, как будет потеряна заметная доля лучистой энергии (напомним, что рассматривается массивная звезда, в которой лучистая энергия много больше энергии плазмы). В этом случае изотермическая неустойчивость заведомо не успеет проявиться.

Для звезд с $M \approx 10^5 M_\odot$ ядерные реакции, как мы видели в п. г), существенны. Запас ядерной энергии такой звезды и тепловой энергии сравнимы, $\tau_1 \approx t_{\text{эв}}$ будет проявляться.

Детальная картина развития изотермической неустойчивости требует конкретного анализа. Пока можно сказать лишь, что разбиение будет идти на сгустки с $M/M_\odot \approx 100$, ибо в равновесной звезде такой массы давление излучения и плазмы одного порядка. Когда подобная бунчировка начнет возникать, плазма в местах с пониженной плотностью под действием светового давления приобретает ускорение и подымается кверху, сгустки

опускаются вниз. Развивается ли такая неустойчивость и к чему это поведет, неясно. Возможно, что конвекция, имеющаяся в сверхмассивных звездах с ядерными источниками энергии, препятствует развитию изотермической неустойчивости.

е) *Катастрофическое сжатие*. После начала катастрофического сжатия энергию можно считать практически постоянной, если нет ядерных реакций. Отвод энергии не успевает заметно уменьшить энтропию (отвод энергии нейтрино и спектр нейтрино при этом см. выше, § 9 гл. 11).

Заметим, что рост энтропии при данной энергии за счет ударных волн, вязкости и т. п. не может остановить сжатия после достижения критического состояния. Действительно, как видно из рис. 60, состояние с критической энергией E'' и увеличенной энтропией S обязательно лежит на той

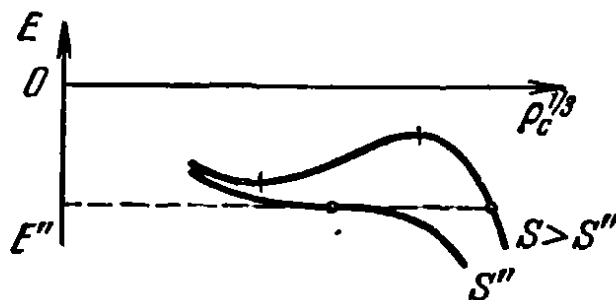


Рис. 60. Увеличение энтропии звезды в процессе возникновения ударных волн при коллапсе переводит изображающую точку на ниспадающую ветвь изэнтропы $S > S''$, т. е. не может остановить коллапса.

ветви кривой $E(\rho_c, S)$, на которой идет неудержимое сжатие. Точно так же выброс части массы не может остановить сжатие основной части звезды, когда звезда сжимается после прохождения критического состояния. Действительно, если учесть, что выброшенная масса должна обладать положительной энергией (иначе она не могла бы преодолеть гравитационное поле звезды и уйти на бесконечность), то выброс массы только уменьшает (отрицательную) энергию оставшейся звезды; поэтому за счет выброса массы из критического состояния в состояние устойчивого равновесия перейти нельзя.

Сжатие может быть остановлено лишь по следующим причинам.

Во-первых, за счет быстрых при высокой температуре экзотермических ядерных реакций. При этом легко может произойти такое выделение тепла, которое заставит вещество звезды целиком разлететься (см. Бисноватый-Коган (1967с)). Однако если ядерные реакции на равновесной стадии превратили почти все вещество звезды в железо, то этот путь заведомо исключен, так как вся возможная ядерная энергия уже выделилась.

Во-вторых, сжатие может быть остановлено, когда γ станет больше $4/3$ при больших ρ .

Однако, как мы видели в § 10 гл. 10, устойчивые состояния при больших плотностях (область abc на рис. 56) возможны лишь для $M < 70_{\odot}$.

§ 12. Вращение и истечение. Общие соотношения

Теории вращающихся массивных звезд в последнее время уделяется значительное внимание (Джеймс (1964); Роксбург (1965); Дарней, Роксбург (1965); Монаган, Роксбург (1965); Фаулер (1966); Озерной (1966); Бисноватый-Коган, Зельдович, Новиков (1967))^{*}).

Очевидная причина интереса заключается в следующем. В массивных ($M/M_{\odot} > 10^4$) звездах давление света превосходит давление плазмы, показатель адиабаты близок к критическому значению $\gamma = 4/3$, и достаточно малых поправок на ОТО (общую теорию относительности), чтобы нарушить устойчивость.

Вращение звезды как целого представляет собой нерелятивистское движение и в этом смысле подобно движению электронов и ядер в плазме; вклад вращения в устойчивость звезды такой же, как и газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$. Однако с тепловым движением плазмы находится в равновесии свет, давление которого с ростом температуры растет быстрее, чем давление плазмы. Между тем с вращательным движением связана сохраняющаяся величина — момент количества движения; поэтому вращение звезды как целого («твердотельное вращение») не превращается в другие формы энергии. В этом состоит также отличие вращательного движения от других форм макроскопического движения — от турбулентности, быстро затухающей в условиях звезды.

До недавнего времени все расчеты невращающихся звезд проводились в статическом приближении. Процессы быстрого сжатия и взрыва, в которых ускорения частиц — порядка ускорения силы тяжести, количественно рассматриваются лишь в последние годы с помощью быстродействующих счетных машин.

В случае вращающейся звезды также естественно было начать с рассмотрения равновесных конфигураций. Дополнительно делается предположение, что выравнивание угловых скоростей является быстрым процессом, т. е. что велика вязкость за счет участия турбулентного и магнитного механизма переноса импульса.

Известно, что равновесные, вращающиеся как целое конфигурации существуют лишь в узкой области параметров, и среднее по звезде влияние вращения на интегральные характеристики в этой области параметров невелико.

^{*}) Пионерская работа принадлежит Чандрасекару (1933).

Чтобы убедиться в этом, рассматриваем конфигурацию невращающейся звезды и находим ту угловую скорость, при которой на экваторе центробежная сила уравнивает силу тяготения. Тогда кинетическая энергия вращения частицы, находящейся на экваторе, равна половине ее гравитационной энергии,

$$\begin{aligned}\omega^2 R &= \frac{GM}{R^2}, \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{\omega^2 R^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{GM}{R}.\end{aligned}\tag{11.12.1}$$

Но при рассмотрении средних по звезде величин нужно учесть распределение вещества по звезде. Как известно, в отсутствие вращения при показателе адиабаты $\gamma = 4/3$ это распределение очень неравномерно. Плотность в центре в 54 раза больше средней, $\rho_c/\bar{\rho} = 54$.

Другим показателем неравномерности распределения вещества является величина гравитационной энергии U .

Очевидно,

$$U = -\frac{1}{2} G \int_M \int_M \frac{dm_1 dm_2}{r_{12}} = -\frac{1}{2} GM^2 \overline{\left(\frac{1}{r_{12}}\right)}.$$

Но для равновесной политропической конфигурации, как известно,

$$U = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}; \quad U_{n=3} = -\frac{3}{2} \frac{GM^2}{R}.$$

Следовательно, при $n=3$, $\overline{(1/r_{12})} = 3 \frac{1}{R}$, т. е. среднее расстояние между всеми парами частиц в три раза меньше радиуса. Для равномерного распределения плотности, т. е. для несжимаемой жидкости, $\overline{(1/r_{12})} = 1,2 \frac{1}{R}$.

Наконец, еще одной характеристикой распределения вещества является средний квадрат расстояния от центра, который входит в выражение момента инерции:

$$I = \frac{2}{3} M \bar{r}^2, \quad \bar{r}^2 = \frac{1}{M} \int_M r^2 dm = \frac{1}{M} \int_V \rho r^2 dV = \frac{4\pi}{M} \int_0^R \rho r^4 dr.$$

Для интересующего нас решения $\bar{r}^2 = 0,11R^2$. Малость коэффициента 0,11 как раз указывает на то, что большая часть массы

сосредоточена близко от центра; для равномерного распределения отношение $\overline{r^2}/R^2 = 3/5 = 0,6$.

С помощью этих коэффициентов находим отношение кинетической энергии вращения к гравитационной энергии для всей звезды (v — скорость на экваторе)

$$E_{\text{кин}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{2}{3} \frac{Mv^2}{2} \frac{\overline{r^2}}{R^2} = \frac{1}{3} 0,11 \frac{GM^2}{R},$$

$$|U| = \frac{3}{2} \frac{GM^2}{R}, \quad \frac{E_{\text{кин}}}{|U|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,11}{3/2} = 0,025 = \frac{1}{40}.$$

Это малое отношение достигается в условиях, когда для частицы на экваторе $E_{\text{кин}}/|U| = 0,5$ и достигается условие отрыва (равенство центробежной силы и тяготения). В действительности, точное решение задачи показывает, что статическое решение становится невозможным еще раньше, т. е. при еще меньшем отношении средней кинетической энергии к средней гравитационной энергии (при $E_{\text{кин}}/|U| = 0,007$). Качественно это легко понять, так как кроме центробежной силы и тяготения на частицу действует еще градиент давления.

Очевидно, что еще до достижения условия (11.12.1) внешняя поверхность звезды деформируется, растягиваясь по экватору. В результате условие (11.12.1) нужно писать для нового радиуса R_1 , где $R_1 > R$.

Фигуру звезды и границу существования решения легко рассмотреть в модели Рошá. Эта модель предполагает следующее. Вращение не изменяет конфигурацию основной доли массы. Рассмотрим равновесие малой части массы, находящейся вдали от центра — в атмосфере звезды. Атмосфера находится в поле тяготения центральной массы, $\varphi_1 = -GM/r$. При фиксированной угловой скорости ω (вращение вокруг z) можно ввести центробежный потенциал

$$\varphi_2 = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$H + \varphi_1 + \varphi_2 = k, \quad (11.12.2)$$

где H — удельная энтальпия вещества, $dH = \rho dP$; для показателя адиабаты $\gamma = 4/3$ энтальпия равна $H = 4 \frac{P}{\rho}$. Предполагаем, что константа k в уравнении (11.12.2) не отличается от своего значения при отсутствии вращения.

На рис. 61 показан ход потенциала $\varphi_1 + \varphi_2$ вдоль оси z (пунктир) и вдоль радиуса, лежащего в плоскости экватора, например по оси x (сплошная линия).

В этой плоскости сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ имеет потенциальный барьер и максимум при $r_c = (GM/\omega^2)^{1/3}$, причем в этой точке $\varphi(r_c) = \varphi_c = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{3}{2} \frac{GM}{r_c}$. Очевидно, что уравнение (11.12.2) имеет разумное, ограниченное решение лишь при $k < \varphi_c$. Но в невращающейся звезде на границе $H(R) = 0$, $\varphi(R) = -GM/R$, откуда $k = -GM/R$. Отсюда находим $r_c = \frac{3}{2} R$.

Итак, наибольшее растяжение звезды по экватору возможно лишь в $3/2$ раза. Соответствующая угловая скорость оказывается меньше, чем найденная раньше, в 1,82 раза: из условия $r_c = \frac{3}{2} R = (GM/\omega^2)^{1/3}$ находим $\omega^2 (2/3)^{3/2} \sqrt{GM/R^3}$.

Отношение кинетической энергии вращения к гравитационной, найденное раньше, уменьшается в $1,5^3 = 3,4$ раза до *) 0,007.

Именно потому, что кинетическая энергия вращения всей звезды мала, вполне оправданы сделанные выше предположения о том, что вращение и вызванная им деформация звезды не изменяет заметно ни поля тяготения, ни характерной для всей звезды константы k .

Полезно подойти к задаче о вращении еще с одной, глобальной точки зрения. Равновесие вращающейся массы отвечает минимуму полной энергии вещества с данным уравнением состояния $[P(\rho), H(\rho)]$, с учетом энергии тяготения и с фиксированным полным моментом количества движения K . Условие постоянства момента при вариации полной энергии, очевидно, следует из того, что момент является сохраняющейся величиной. В следующем параграфе, исходя из этого принципа, мы найдем величины, характеризующие вращающуюся звезду: плотность вещества и форму.

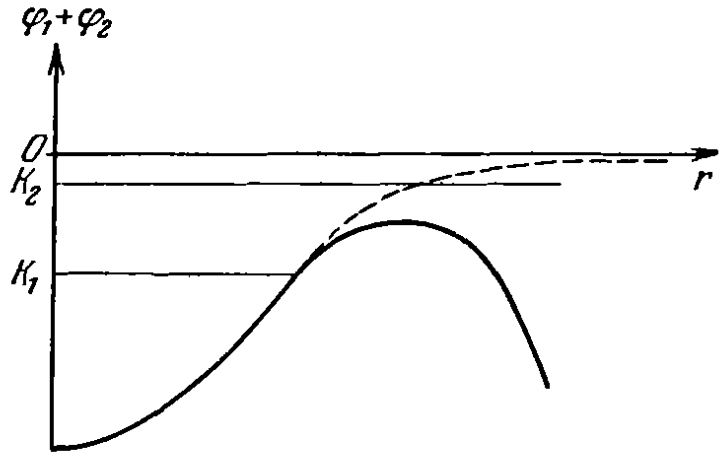


Рис. 61. Ход потенциала $\varphi_1 + \varphi_2$ вдоль радиуса, лежащего в плоскости экватора (сплошная линия), и радиуса вдоль оси z (пунктир). Горизонтальные линии K_1 и K_2 соответствуют различным значениям постоянной k в (11.12.2).

*) Интересно сравнить это значение с критическим отношением для шара равномерной плотности: $E_{кин}/U = 1/3$ почти в 50 раз больше! Известно, что в действительности тело, состоящее из несжимаемой жидкости, при вращении принимает форму эллипсоида вращения; однако эта форма становится неустойчивой и превращается в трехосный эллипсоид задолго до достижения условия истечения при $E_{кин}/U = 0,5$ (когда эллипсоид превращается в диск).

Но надо сразу оговориться, что минимум энергии, который мы ищем, не является абсолютным минимумом при фиксированных массе и моменте вращения. В самом деле, сравним звезду, вращающуюся как твердое тело, с конфигурацией, обладающей той же массой M и моментом K , состоящей из невращающейся звезды массы $M - m_1$ и малой массы m_1 , находящейся на большом расстоянии r_1 от центра в экваториальной плоскости и обращающейся вокруг звезды. Предположим, что эта малая масса при малой скорости обращения обладает тем же моментом K , что и вращающаяся звезда $K = m_1 r_1 v_1$. Кинетическая энергия этой массы равна $K^2 / 2m_1 r_1^2$. Взяв достаточно большое расстояние r_1 , можно при любом фиксированном малом m_1 и неизменном K сделать кинетическую энергию достаточно малой; при малом m_1 мала и потенциальная энергия массы m_1 . Таким образом, при данном моменте всегда можно осуществить конфигурацию, энергия которой как угодно близка к энергии невращающейся звезды с той же массой. Для этого надо малую часть массы удалить на большое расстояние. Если существует равновесное решение (A) для вращающейся звезды, то очевидно, его энергия больше энергии невращающейся звезды (B). С другой стороны, равновесное решение A , устойчивое относительно любых малых возмущений, очевидно, представляет собой минимум, но только локальный, так как энергия состояния B меньше A . В этом случае между состояниями A и B есть энергетический барьер*). Его существование очевидно из условий, что A есть минимум, но не абсолютный, так как B лежит ниже A .

Теперь становится ясно, что при определенных значениях параметров, конкретно, при большом моменте и малой энтропии — может оказаться, что энергетический барьер исчезает. Но в таком случае нет и минимума типа A . Это значит, что задача о равновесии вращающейся звезды с данными массой, энтропией и моментом не при всех значениях этих параметров имеет решение. Физически граница существования решения связана именно с тем, что наступает (например при плавном уменьшении энтропии) истечение газа.

Как уже было сказано, равновесные конфигурации рассматриваются в следующем параграфе. Процесс истечения в условиях, когда не существует равновесная конфигурация, мы рассмотрим в § 18 этой главы.

*) Если рассматривать один только параметр перехода от A к B , то энергетический барьер является максимумом. Однако с учетом того, что состояние сплошного тела характеризуется многими (бесконечным числом!) переменными и A является минимумом по отношению к любым изменениям, то между A и B есть путь в конфигурационном пространстве с минимальным подъемом, проходящий через перевал — седлообразную точку.

§ 13. Равновесие и форма вращающейся звезды. Ньютоновская теория

Следуя Гуревичу и Лебединскому, предположим, что плотность вещества постоянна на подобных эллипсоидах вращения. В невращающейся звезде поверхности постоянной плотности, очевидно, представляли собой сферы. Мы предполагаем теперь, что во вращающейся звезде эти сферы превращаются в эллипсоиды, причем с сохранением объема каждой сферы. В частности, сохраняется полный объем звезды, а также сохраняется и объем между соседними сферами. Это предположение удобно для расчетов. Точное рассмотрение задачи о структуре вращающихся политроп см. Харлей и Робертс (1965). Сделанное предположение достаточно для наших целей. В таком случае, при сравнении сферической и деформированной звезды с одинаковой центральной плотностью окажется, что распределение плотности как функции массы, заключенной внутри данного слоя, одинаково. Следовательно, при таком способе деформации полная внутренняя энергия всего газа строго одинакова и не изменяется. Поэтому для $\gamma = 4/3$, точно так же как и в сферической звезде, $E_{\text{внутр}} = 1,75 M b \rho_c^{1/3}$, b — коэффициент, входящий в выражения, где $P = b \rho^{1/3}$, $E = 3 b \rho^{1/3}$ (ср. § 9 гл. 10).

Гравитационная энергия при деформации, очевидно, по абсолютной величине уменьшается; в самом деле, ясно, что сжатие по оси z и сплющивание в плоскости xy при сохранении объема приводит к увеличению среднего расстояния между частицами.

Замечательное свойство гравитационного потенциала эллипсоида заключается в том, что внутри оболочки, границами которой являются два подобных эллипсоида, заполненной веществом постоянной плотности (при этом масса на единицу поверхности не постоянна!), гравитационный потенциал является постоянной величиной *).

В свою очередь из этого свойства следует, что закон изменения гравитационной энергии при деформации звезды описаным выше способом такой же, как и при эллипсоидальной деформации шара несжимаемой жидкости. Для доказательства

*) В этом легко убедиться, замечая, что внутри сплошного эллипсоида постоянной плотности потенциал имеет вид

$$\varphi = \varphi(0) + \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2, \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{\Delta \varphi}{2} = 2\pi G \rho.$$

Сами α , β , γ зависят только от отношения осей эллипсоида, но не от их абсолютной величины. От величины зависит лишь $\varphi(0)$. Рассматривая потенциал слоя как разность потенциалов внешнего φ_1 и внутреннего φ_2 эллипсоида, найдем $\varphi = \varphi_1(0) - \varphi_2(0)$; зависящие от координат члены сократились.

собираем звезду из подобных слоев постоянной плотности, начиная с наружного слоя. При этом каждый новый слой помещается в полость, в которой потенциал постоянный; гравитационная энергия меньше энергии недеформированной звезды во столько же раз, во сколько потенциал внутри эллипсоидального слоя меньше потенциала внутри шарового слоя при равной массе слоя и объеме полости. В точности те же рассуждения можно провести для жидкости с постоянной плотностью (выше для звезды плотность предполагалась постоянной в каждом слое, но менялась от одного слоя к другому). Гравитационная энергия изменится в одинаковом отношении, зависящем от степени сплюснутости эллипсоида. Будем характеризовать сплюснутость параметром λ — отношением диаметра по оси вращения к диаметру равновеликого шара $\lambda = \frac{c^*}{\sqrt[3]{a^*b^*c^*}}$, где $a^* = b^* > c^*$, так что $\lambda < 1$; $\lambda = (c^*/a^*)^{2/3}$.

Итак, гравитационная энергия

$$U = -0,64GM^{5/3}\rho_c^{1/3}g(\lambda).$$

Функцию $g(\lambda)$ можно найти, например, в учебнике Ландау и Лифшица (1962) (стр. 335). Переходя к нашим обозначениям, запишем эту функцию в виде

$$g(\lambda) = \lambda^{1/2} (1 - \lambda^3)^{-1/2} \arccos \lambda^{3/2}.$$

Очевидно, $g(1) = 1$; для λ , мало отличающегося от единицы, имеет место разложение, которым мы воспользуемся ниже:

$$g(\lambda) = 1 - \frac{(1 - \lambda)^2}{5}.$$

Наконец, найдем момент инерции и кинетическую энергию вращения. Момент инерции пропорционален квадрату расстояния по оси, перпендикулярной к оси вращения

$$I = \text{const } Ma^{*2}.$$

Сравнивая с моментом инерции равновеликого шара I_m , найдем

$$\frac{I}{I_m} = \frac{a^{*2}}{(a^*b^*c^*)^{2/3}} = \left(\frac{a^*}{c^*}\right)^{2/3} = \lambda^{-1};$$

соответственно, при данном моменте вращения K кинетическая энергия вращения сплюснутой звезды $E_{\text{кин}}$ меньше кинетической энергии шара $(E_{\text{кин}})_{\text{ш}}$

$$E_{\text{кин}} = (E_{\text{кин}})_{\text{ш}} \lambda < (E_{\text{кин}})_{\text{ш}}, \quad \text{так как } \lambda < 1.$$

Сплюсывание уменьшает кинетическую энергию при данном моменте. Это и значит, что кинетическая энергия вращения

играет роль потенциала центробежной силы, действующей в направлении сплющивания. Момент инерции и соответственно кинетическую энергию шарообразной звезды находим численным интегрированием эмденовского распределения плотности для политропы $\gamma = 4/3$ ($n=3$). Соответствующие безразмерные множители были выписаны в предыдущем параграфе. Окончательно,

$$E_{\text{кин}} = 1,25\lambda K^2 \rho_c^{2/3} M^{-5/3},$$

Собирая воедино все члены, получим выражение энергии

$$E = -k_2 GM^{5/3} \rho_c^{1/3} g(\lambda) + k_1 Mb \rho_c^{1/3} + k_3 \lambda K^2 M^{-5/3} \rho_c^{2/3},$$

$$k_1 = 1,75, \quad k_2 = 0,64, \quad k_3 = 1,25.$$

Обозначим через $b_0 = \frac{k_2}{k_1} GM^{2/3} = 0,364 GM^{2/3}$ значение b , при котором без вращения имеется безразличное равновесие, так что (см. § 2)

$$k_2 GM^{5/3} \rho_c^{1/3} = k_1 b_0 M \rho_c^{1/3},$$

и введем безразмерные величины $b/b_0 = h$ и $\tilde{r} = (\rho_c/\rho_0)^{1/3}$, где ρ_0 — характерная плотность, составленная из GM и K :

$$\rho_0 = \frac{G^3 M^{10}}{K^6}.$$

Выражение для энергии теперь переписется в виде

$$E = \frac{G^2 M^5}{K^2} \{k_2 \tilde{r} [h - g(\lambda)] + k_3 \lambda \tilde{r}^2\}.$$

Обозначим фигурную скобку через A . Множитель перед скобкой составлен из сохраняющихся заданных величин. Для нахождения экстремума E варьируются λ и \tilde{r} . Величина h определяется энтропией и также задана; в ходе эволюции звезды она медленно меняется. Условия равновесия (экстремума E) имеют вид $\frac{\partial A}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial \tilde{r}} = 0$. Из этих двух соотношений выражаем λ и \tilde{r} через h . Решение существует лишь при $h < 1$, что вполне естественно. Если $h > 1$, то энтропия столь велика, что уже без вращения данная масса неудержимо разлетается; ясно, что вращение неспособно изменить этот результат. При $h < 1$ без вращения газ неудержимо сжимается. В этом случае вращение останавливает сжатие. Уменьшение h сопровождается увеличением плотности и увеличением сплюснутости, характеризуемой величиной $1 - \lambda$. При любых $h < 1$ существует формальное решение задачи, в которой было задано, что поверхности постоянной плотности суть подобные эллипсоиды; при этом $h \rightarrow 0$ дает $\lambda \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$, т. е. решение, соответствующее

плоскому диску. Это решение, как известно, неустойчиво: диск разбивается на сгустки размером порядка толщины диска.

Если рассматривать уменьшение h , то при определенном h следует ожидать неустойчивость по отношению к превращению эллипсоида вращения в трехосный эллипсоид, как это имеет место для несжимаемой жидкости. В используемых нами выражениях зависимость гравитационной энергии и энергии вращения от формы выделена в множитель (факторизация), поэтому и в случае с любым показателем адиабаты неустойчивость возникает при том же λ , что и в несжимаемой жидкости. Однако, как мы сейчас увидим, решение теряет смысл задолго до этого момента, еще при малой сплюснутости, когда h близко к 1 и соответственно λ близко к 1.

Нетрудно найти полный набор решений, задавшись λ как параметром: из условия $\frac{\partial A}{\partial \lambda} = 0$ получим $\tilde{r} = \frac{k_2(-g'(\lambda))}{k_3}$ и подставляя в условие $\frac{\partial A}{\partial \tilde{r}} = 0$, найдем

$$h = g(\lambda) - \frac{2k_3}{k_2} \lambda \tilde{r} = g(\lambda) + 2\lambda g'(\lambda).$$

Построив соответствующие графики, легко найдем λ и \tilde{r} для любого заданного h . Однако из-за истечения такое решение, в котором вещество «принудительно» распределено с постоянной плотностью на поверхности подобных эллипсоидов, имеет смысл лишь при малой сплюснутости, т. е. при λ , мало отличающемся от единицы, чему в свою очередь соответствует и h , мало отличающееся от единицы. Подставляя разложение $g(\lambda)$ при $1 - \lambda \ll 1$, получим

$$h = 1 - \frac{(1-\lambda)^2}{5} - \frac{4}{5} \lambda (1-\lambda) = 1 - \frac{4}{5} (1-\lambda),$$

$$(1-\lambda) = \frac{5}{4} (1-h); \quad \tilde{r} \approx \frac{2}{5} \frac{k_2}{k_3} (1-\lambda) = \frac{1}{2} \frac{k_2}{k_3} (1-h) = 0,25 (1-h),$$

$$\rho_c = \frac{G^3 M^{10}}{(K^2)^3} \cdot 0,016 (1-h)^3, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{54} \rho_c.$$

Теперь определим условие, которое накладывает на допустимые значения λ и h истечение газа с экватора. В предыдущем параграфе было выяснено, что это условие для эмденовского шара соответствует $\tilde{z} = E_{\text{кин}}/|U| = 0,007$, с учетом деформации внешней поверхности звезды вместо $\tilde{z} = (E_{\text{кин}})_{\text{ш}}/|U| = 0,025$ для шарообразной звезды. Но при λ , близком к единице, в равновесии

$$\tilde{z} = \frac{k_3 \tilde{r}^2}{k_2 \tilde{r}} = \frac{k_3}{k_2} \tilde{r}. \quad \text{С учетом предыдущих формул,}$$

$$\frac{1}{2} \frac{k_2}{k_3} (1-h) = \tilde{r} = \frac{k_2}{k_3} \tilde{z}, \quad 1-h = 2\tilde{z}, \quad 1-\lambda = 2,5 \cdot \tilde{z}.$$

Таким образом, интервал значений энтропии h , в котором вращение звезды как целого поддерживает устойчивое равновесие, очень узок: от $h=1$ до $h=0,95$ в приближении шара или от 1 до 0,986 в более близкой к действительности модели Роша. Когда в ходе эволюции энтропия падает ниже 0,95 или 0,98 значения, отвечающего безразличному равновесию без вращения, начинается истечение. Теория истечения будет рассмотрена в § 18 этой главы.

Оставаясь в рамках статических решений и ньютоновской теории тяготения, констатируем, что абсолютная величина равновесной плотности ничем не ограничена. В самом деле, в выражении равновесной плотности

$$\rho_c = \frac{G^3 M^{10}}{K^6} 0,016 (1 - h)^3$$

множитель $(1 - h)^3$ ограничен и мал, но при малом K в принципе само ρ_c может быть большим! То же самое относится к энергии. Легко показать, в соответствии с теоремой вириала, что в равновесии $E = -E_{\text{кин}}$. Условие истечения ограничивает $E_{\text{кин}}/|U|$ малой величиной. Но если ничем не ограничено ρ_c при малых K , то не ограничено и значение $|U|$.

Очевидно, что мы снова имеем здесь дело с ситуацией, когда для качественно правильного ответа существенны уже малые поправки к закону тяготения, зависящие от ОТО. Действительно, как показано выше, вращение, обеспечивающее устойчивость равновесия звезды, вследствие ограничения истечением дает малые поправки во все выражения. Поэтому уже малые поправки на ОТО могут качественно изменить ситуацию. К изложению этого вопроса мы и переходим.

§ 14. Поправки на ОТО в теории вращающейся звезды

Указанный в заголовке вопрос анализируется снова энергетическим методом. Однако нельзя ограничиться первой поправкой, имеющей вид (см. § 4 гл. 10) $\Delta E_{\text{ото},1} = -0,93 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3}$, в силу того более или менее случайного обстоятельства, что зависимость ее от плотности такая же, как и энергии вращения (этого не было в случае сопоставления с поправками на плазму). Поэтому при определенном моменте получается вырождение, которого в действительности нет. Необходимо учесть, что за выписанным выше выражением для поправки в энергию за счет ОТО следуют дальнейшие члены, из которых сохраняем

$$\Delta E_{\text{ото},2} = -k_5 \frac{G^3 M^3 \rho_c}{c^4}.$$

Вычисление k_5 весьма затруднительно; это видно уже из того, сколько слагаемых входило в предыдущую более простую поправку. Из общих соображений — из того, что вблизи гравитационного радиуса и соответствующей этому размеру характерной плотности невозможны статические решения, — естественно следует, что $k_5 \approx 1$. В предыдущем параграфе было выяснено, что изменение гравитационной энергии вследствие деформации весьма мало,

$$1 > g(\lambda) > 1 - \frac{1}{5} \cdot 0,032^2 = 0,9998,$$

тем более можно пренебречь влиянием вращения на релятивистские поправки. Итак, полагая $\lambda=1$, исследуем выражение

$$E = -0,64GM^{5/3}\rho_c^{1/3}(1-h) + 1,25K^2M^{-5/3}\rho_c^{2/3} - \\ - 0,93\frac{G^2M^{7/3}}{c^2}\rho_c^{2/3} - k_5\frac{G^3M^3\rho_c}{c^4},$$

где h имеет тот же смысл, что и в § 13 гл. 11. Каждой фиксированной совокупности параметров M , h , K соответствует определенная кривая $E(\rho_c)$, минимумы которой представляют собой устойчивое равновесие. Эволюция в интересующей нас стадии (до начала истечения) заключается в уменьшении h при постоянных M и K . Она может закончиться исчезновением минимума (минимум сливается с максимумом; в этом состоянии на кривой $E(\rho_c)$ появляется точка горизонтального перегиба), что физически означает переход от медленной эволюции к коллапсу. Вся качественная сторона дела уже излагалась ранее, см. § 11 этой главы.

Ниже мы рассмотрим с помощью энергетического подхода, т. е. основываясь на выражении энергии звезды, полученном выше, вопросы равновесия, устойчивости и эволюции вращающейся звезды.

При рассмотрении этих вопросов мы столкнемся с двумя типами явлений: с истечением газа с экватора, зависящим от параметра \tilde{z} — отношения энергии вращения к гравитационной энергии*), и с гидродинамической неустойчивостью, ведущей к коллапсу. В принципе явление потери устойчивости и начала коллапса вращающейся звезды рассматривается тем же способом, что и для невращающейся. Однако наличие двух сохраняющихся величин, т. е. двух параметров (энтропии и момента

*) Условимся брать это отношение по модулю (сама гравитационная энергия отрицательна), для простоты берем отношение к ньютоновской гравитационной энергии, не учитывая в \tilde{z} поправки на ОТО.

вращения), характеризующих звезду данной массы, вызывает и характерное отличие.

В самом деле, в случае невращающейся звезды данной массы $E = E(\rho_c, S)$, рассматривая все состояния, в том числе неравновесные, мы заполним плоскость ρ_c, E ; через каждую точку в этой плоскости проходит одна кривая $E(\rho_c, S)$; каждой точке соответствует определенная энтропия S . Условия равновесия отбирают в плоскости линию. Эволюция идет вдоль этой линии и заканчивается в точке, в которой выполнены два условия $\frac{\partial E}{\partial \rho_c} = 0, \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_c^2} = 0$. В этой точке находится последнее воз-

можное равновесное состояние, находящееся на границе потери устойчивости (рис. 62).

Теперь сравним с описанной выше картиной ситуацию в случае вращающейся звезды

$$E = E(\rho_c, S, K).$$

Если не ограничиваться равновесными состояниями, то каждая точка в плоскости E, ρ_c может быть осуществлена бесчисленным числом способов: условие $E = E_0, \rho_c = \rho_{c,0}$ дает только одно уравнение для двух параметров, S, K . Добавляя условие равновесия $\frac{\partial E}{\partial \rho_c} = 0$, мы получим систему уравнений, имеющую в принципе решение для любой пары E, ρ_c . Таким образом, совокупность равновесных решений представляет собой плоскость (или часть плоскости), а не линию, как это было в случае невращающейся звезды.

Равенства, соответствующие границе начала истечения или границе начала коллапса, образуют линии в плоскости E, ρ_c .

Вопрос о том, к какой точке (и на какой из двух линий) звезда подойдет в ходе эволюции, определяется конкретными условиями эволюции.

Общая ситуация показана на рис. 63, где по оси ординат отложена энергия E . Вся интересующая нас область расположена ниже оси абсцисс, при $E < 0$. По оси абсцисс отложена величина $\tilde{x} = \rho_c^{1/3}$. Сплошная линия $OACB$ соответствует условию истечения вещества с экватора звезды, вращающейся с постоянной угловой скоростью как целое. При этом

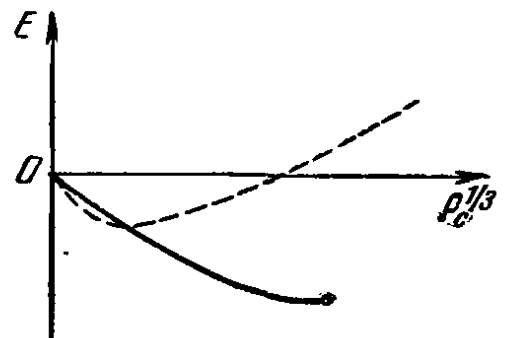


Рис. 62. Энергия невращающейся звезды E в зависимости от плотности ρ_c . Минимум пунктирной кривой соответствует положению равновесия звезды с данной энтропией. Сплошная линия — равновесные состояния с разной энтропией. Точка в конце кривой — конец устойчивых равновесных состояний.

рассматриваются, как уже было подчеркнуто выше, только состояния, соответствующие полному гидростатическому равновесию *).

Условие истечения соответствует постоянному отношению \tilde{z}_1 кинетической энергии вращения к гравитационной. Если задаться $\tilde{z} = \tilde{z}'_1 > \tilde{z}_1$, то в плоскости $E \div \rho_c$ получится аналогичная кривая $OA'C'B'$, причем область $OACB$ лежит целиком внутри $OA'C'B'$. Вне области $OACB$ происходит истечение; нет больше точных гидростатических решений, каждая точка вне

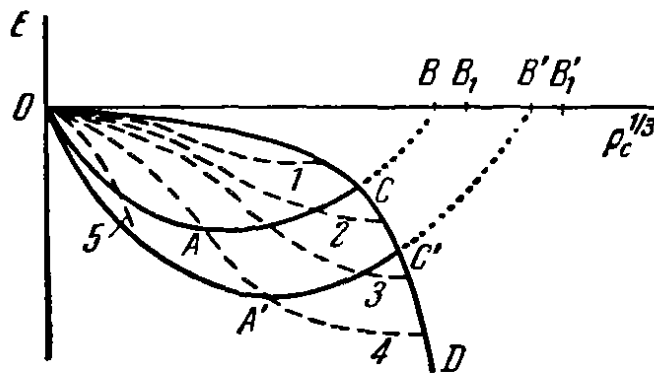


Рис. 63. Диаграмма $E \div \tilde{x} = \rho_c^{1/3}$ для равновесных состояний звезды данной массы, обладающей моментом вращения (обозначения в тексте).

Устойчивые состояния равновесия существуют лишь левее и ниже линии $OCC'D$. В области между осью абсцисс и $OCC'D$ вообще нет устойчивых решений, поэтому отрезки CB и $C'B'$ проведены здесь условно, пунктиром. Штрихами проведены линии, соответствующие постоянному моменту вращения. Эти линии оканчиваются в точках, лежащих на границе коллапса $OCC'D$. Каждая такая линия с определенным значением K подобна линии равновесных состояний в задаче о невращающейся звезде; она пересекает $OCC'D$ в точке, где линия с постоянным K становится горизонтальной.

Как было выяснено раньше, $\frac{\partial E_{eq}}{\partial \rho_c} = 0$ связано с условиями $\frac{\partial E}{\partial \rho_c} = 0$, $\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_c^2} = 0$ вдоль кривых $E(\rho_c, S, K)$, которые на рисунке не показаны.

Чем больше K , тем ниже лежит соответствующая линия; на рис. 63 они отмечены цифрами; $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$. До тех пор, пока не начинается истечение, момент вращения сохраняется. Эволюция в этом периоде происходит за счет падения энтро-

(ниже) $OACB$ соответствует приближенному решению, в котором равновесное ядро звезды питает поток газа, стационарно истекающего из экваториальной зоны. Постоянному значению $\tilde{z} = \tilde{z}'_1$ соответствует постоянное (и притом малое при $\tilde{z}'_1 - \tilde{z}_1 \ll 1$; см. ниже) отношение скорости потери массы к скорости установления гидростатического равновесия.

Линия $OCC'D$ соответствует условию начала коллапса.

*) Аналитический расчет кривых, данных на рис. 63, приведен в следующем параграфе.

пии, и точка, изображающая состояние звезды, перемещается вправо и вниз (E уменьшается, ρ_c растет) вдоль пунктирной линии.

Если момент вращения мал (K_1), то первым достигается условие коллапса. Коллапс идет быстро, со скоростью порядка скорости свободного падения. Во время коллапса обмен моментом вращения между различными слоями не успевает произойти. Каждая частица сохраняет вращательный момент, который она имела в начале коллапса. Поэтому в то время как основная масса газа (ядро) коллапсирует, вещество, находящееся во внешней части, в экваториальном поясе, останавливается около равновесной орбиты, соответствующей его удельному моменту вращения. Детальная теория этого процесса до настоящего времени не разработана.

Что происходит при большем моменте звезды K_2 , K_3 , K_4 или K_5 ? Из рис. 63 видно, что эволюция с сохранением момента приводит систему к состоянию, когда начинается истечение (в точку пересечения с линией $OACB$). При истечении происходит уменьшение момента, энергии и массы, — их уносит истекающий газ; уменьшение энергии продолжается и за счет излучения. Соотношение между изменением различных параметров зависит от конкретных предположений. Строго говоря, поскольку меняется также и масса, эволюция не может быть описана движением на рис. 63, относящемся к постоянной массе.

Однако изменение массы, как правило, невелико, и поэтому приближенно можно по-прежнему говорить о траектории в $E - \rho_c$ плоскости. При большом моменте (K_5) после достижения $OACB$ движение может происходить приблизительно вдоль границы истечения $OACB$ с переходом от одной пунктирной линии на другую до достижения минимума $OACB$ в точке A .

Однако если момент равен или меньше K_4 (соответствует линии «4», проходящей через минимум A кривой $OACB$), то эволюционная линия неизбежно удаляется от $OACB$ (так как эволюция не может идти с возрастанием энергии). В ходе эволюции возрастает скорость потери массы, происходит сжатие и позже достигается состояние, в котором теряется устойчивость и происходит коллапс.

Точная ситуация к моменту коллапса должна определяться численным интегрированием дифференциальных уравнений (см. об этом § 18 этой главы); однако два условия: 1) уменьшение энергии и 2) уменьшение момента в ходе эволюции существенно суживают область возможных состояний перед коллапсом. Перейдем теперь к расчету кривых, показанных на рис. 63.

§ 15. Приближенная теория равновесия

Обратимся к полуквантовому анализу равновесия вращающейся звезды, к нахождению кривых, изображенных на рис. 63, и, в частности, найдем значения энергии, плотности и температуры в характерных точках — в минимуме кривой истечения и в пересечении этой кривой с кривой коллапса. Для этого воспользуемся выражением энергии, записанным в следующем виде:

$$E = -\tilde{a}q\tilde{x} + \tilde{b}\tilde{x}^2 - \tilde{c}\tilde{x}^2 - \tilde{f}\tilde{x}^3, \quad (11.15.1)$$

где введены следующие обозначения: $\tilde{x} = \rho_c^{1/3}$; $-\tilde{a}\tilde{x} = -k_2GM^{5/3}\rho_c^{1/3}$ есть гравитационная энергия, $\tilde{a}(1-q)\tilde{x} = k_1Mb\rho_c^{1/3}$ есть внутренняя энергия вещества звезды; следовательно, $q = \left(1 - \frac{b}{b_0}\right) = 1 - h$ — безразмерная величина, зависящая от энтропии, равная нулю при энтропии S , соответствующей безразличному равновесию невращающейся звезды (S_0) и увеличивающаяся при уменьшении S . Вклад плазмы в энергию не учитывается; $\tilde{b}\tilde{x}^2 = k_3K^2M^{-5/3}\rho_c^{2/3}$ — энергия вращения. В соответствии с результатами § 13 гл. 11 изменение момента инерции вследствие деформации звезды не учитывается; $-\tilde{c}\tilde{x}^2 = -k_4G^2M^{7/3}c^{-2}\rho_c^{2/3}$ — первая поправка на ОТО (см. § 4 гл. 10), $-\tilde{f}\tilde{x}^3 = -k_5G^3M^3c^{-4}\rho_c$ — вторая поправка на ОТО, т. е. следующий член разложения по степеням $r_g/R \sim \rho_c^{1/3} \sim \tilde{x}$.

В работах Фаулера (1966), Роксбурга (1965) этот член не учитывался. Однако в случае звезды, стабилизированной вращением, когда первая поправка на ОТО $c\tilde{x}^2$ и энергия вращения $b\tilde{x}^2$ одинаково зависят от \tilde{x} , учет $\tilde{f}\tilde{x}^3$ необходим для того, чтобы хотя бы качественно правильно получить кривую потери устойчивости и начала коллапса.

Будем искать эту кривую. Ее уравнение получится из двух условий:

$$\frac{\partial E}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{a}q + 2(\tilde{b} - \tilde{c})\tilde{x} - 3\tilde{f}\tilde{x}^2 = 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \tilde{x}^2} = 2(\tilde{b} - \tilde{c}) - 6\tilde{f}\tilde{x} = 0.$$

Эти условия используем для того, чтобы выразить \tilde{b} и q через \tilde{x} . Величины \tilde{a} , \tilde{c} , \tilde{f} определяются массой звезды и считаются известными. Зная \tilde{b} и q , подставляем в (11.15.1) и находим уравнение $E(\tilde{x})$. Итак,

$$\tilde{b} = \tilde{c} + 3\tilde{f}\tilde{x}, \quad q = 3\tilde{f} \frac{\tilde{x}^2}{\tilde{a}}; \quad E = -\tilde{f}\tilde{x}^3.$$

Только благодаря второй поправке получено $E < 0$ на линии коллапса. Обратимся к линии начала истечения. Ее уравнение получим из условий истечения и равновесия

$$\frac{\tilde{b} \tilde{x}^2}{\tilde{a} \tilde{x}} = \tilde{z}, \quad \frac{\partial E}{\partial \tilde{x}} = 0.$$

В этом условии \tilde{z} — известный параметр, как мы знаем (см. § 12 этой главы, индекс 1 у z_1 опускаем), малый по сравнению с единицей. Получим

$$\tilde{b} = \frac{\tilde{a} \tilde{z}}{\tilde{x}}, \quad q = 2\tilde{z} - \frac{2\tilde{c} \tilde{x}}{\tilde{a}} - \frac{3\tilde{f} \tilde{x}^2}{\tilde{a}}, \quad E = -\tilde{a} \tilde{z} \tilde{x} + \tilde{c} \tilde{x}^2 + 2\tilde{f} \tilde{x}^3.$$

Уравнение линии $OACB$ в плоскости $E \div \tilde{x}$ получилось несложным — кубическая парабола. Не представляет труда и определение характерных точек кривой — минимума E (индекс A), пересечения с кривой коллапса (индекс C), значения \tilde{x} при $E=0$ (индекс B).

Мы не выписываем скучных точных выражений с квадратными корнями, а используем сразу условие $\tilde{z} \ll 1$. Получим

$$\tilde{x}_A = \frac{\tilde{a}}{2\tilde{c}} \tilde{z}, \quad E_A = -\frac{\tilde{a}^2}{4\tilde{c}} \tilde{z}^2$$

(так как $\tilde{x} \sim \tilde{z}$, то член $\tilde{f} \tilde{x}^3 \sim \tilde{z}^3$ и здесь может быть опущен),

$$\tilde{x}_C \cong \tilde{x}_B \cong \tilde{x}_{B'},$$

где $\tilde{x}_{B'}$ вычислено без учета второй поправки на ОТО, т. е. как бы при $\tilde{f}=0$, $\tilde{x}_{B'} = \tilde{a} \tilde{z} / \tilde{c}$. Поскольку $\tilde{x} \sim \tilde{z}$, то член с высшей степенью \tilde{x} есть одновременно и член с высшей степенью \tilde{z} . Его, однако, нужно учитывать там, где он остается единственным: $E_B=0$, но

$$E_C = -\tilde{f} \tilde{x}^3 = -\tilde{f} \tilde{x}_{B'}^3 = -\frac{\tilde{f} \tilde{a}^3}{\tilde{c}^3} \tilde{z}^3.$$

Подставляя выражения \tilde{a} , \tilde{c} , \tilde{f} , получим

$$E_A = \frac{(0,64GM^{5/3})^2 \tilde{z}^2}{4 \left(\frac{0,93GM^{7/3}}{c^2} \right)} = -0,11Mc^2 \tilde{z}^2, \quad E_C \approx 0,15Mc^2 \tilde{z}^3. \quad (11.15.2)$$

При вычислении E_C мы положили равным единице неизвестный численный коэффициент в выражении второй поправки на ОТО \tilde{f} . Наконец, найдем выражения линий эволюции с постоянным моментом вращения (штрихованные линии рис. 63), т. е. линии постоянного \tilde{b} , являющегося параметром. Эволюция вдоль

этих линий обусловлена падением энтропии, т. е. ростом q . Из условия равновесия $\frac{\partial E}{\partial \tilde{x}} = 0$ находим $\tilde{a}q = 2(\tilde{b} - \tilde{c})\tilde{x} - 3\tilde{f}\tilde{x}^2$ и, подставляя в выражения для энергии этот результат, получаем

$$E = -(\tilde{b} - \tilde{c})\tilde{x}^2 + 2\tilde{f}\tilde{x}^3.$$

Легко убедиться, что рост \tilde{x} с уменьшением энтропии (т. е. с увеличением q) продолжается как раз до пересечения линии эволюции с кривой коллапса. Такое совпадение не случайно: по достижении кривой коллапса нестационарное сжатие обязательно, ибо не существуют равновесные решения с моментом вращения и энтропией меньшими, чем на кривой коллапса.

§ 16. Вращающиеся массивные звезды, турбулентность и квазары

Теория вращающихся звезд с большой массой имеет самостоятельный интерес, поскольку необходимо теоретически обследовать всю область возможных значений параметров. Но она интересна и как возможная теория квазаров (см. гл. 13). С этой точки зрения наиболее важной величиной является та энергия, которую может выделить вращающаяся массивная звезда.

В свою очередь вопрос о количестве выделяемой энергии подразделяется на два:

1) выделение гравитационной энергии до коллапса, без учета ядерных реакций и

2) возможность выделения ядерной энергии при тех параметрах, которые обусловлены условиями истечения и коллапса.

На основании расчетов предыдущего параграфа легко дать ответ на эти вопросы, ограничиваясь конфигурациями до начала истечения, т. е. условием $z \leq 0,007$. Минимум энергии соответствует при этом

$$E_A = -\frac{\tilde{a}^2}{4\tilde{c}} \tilde{z}^2 = -\frac{0,64^2}{4 \cdot 0,93} (0,007)^2 Mc^2 = 5,5 \cdot 10^{-6} Mc^2 = 5 \cdot 10^{15} M.$$

Эта величина весьма мала по сравнению с ядерной энергией горения водорода, $\sim 6 \cdot 10^{-3} Mc^2$. Вспоминая выражение светимости звезды, в которой преобладает давление света

$$L \frac{\partial p_2}{\partial \tau} = 6 \cdot 10^4 M,$$

найдем время, в течение которого звезда могла бы светить за счет запаса энергии E_A :

$$\tau = \frac{|E_A|}{L} = 10^{11} \text{ сек} = 3 \cdot 10^3 \text{ лет.}$$

Обратимся к условиям выделения ядерной энергии. Максимальная плотность, совместимая с заданным $\tilde{z}=0,007$, достигается в точке С пересечения с кривой коллапса (см. рис. 63). Абсцисса этой точки мало отличается от B' , т. е. приблизительно

$$\tilde{x} = \rho_c^{1/3} = \frac{\tilde{a}}{2\tilde{c}} \tilde{z} = \frac{0,64GM^{5/3}c^2}{2 \cdot 0,93 \cdot G^2M^{7/3}} \tilde{z} = 0,34 \frac{c^2}{GM^{2/3}} \tilde{z},$$

$$\rho_c = \frac{0,04\tilde{z}^3c^6}{G^3M^2}.$$

Удобно сравнить это выражение с характерной плотностью ρ_g гравитационного самозамыкания массы M :

$$\rho_g = \frac{3M}{4\pi R_g^3} = \frac{3}{32\pi} \frac{c^6}{G^3M^2} = 0,03 \frac{c^6}{G^3M^2} = 1,8 \cdot 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}.$$

Найдем

$$\rho_c = 1,3\tilde{z}^3\rho_g.$$

При $\tilde{z}=0,007$, $(M/M_\odot) = 10^8$,

$$\rho_c = 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2} = 10^{-6} \frac{z}{\text{см}^3}.$$

Соответствующую температуру находим по формулам, справедливым и для невращающихся массивных звезд:

$$T_c = 2 \cdot 10^7 \rho_c^{1/3} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/6} = 5,5 \cdot 10^{12} \tilde{z} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/2}.$$

Снова подставляя $\tilde{z}=0,007$, $M/M_\odot=10^8$, получим $T_c=4 \cdot 10^6$.

Очевидно, что такая температура совершенно недостаточна для протекания ядерных реакций. По расчетам Фаулера для того, чтобы обеспечить за счет С—N-цикла нужную светимость, необходима температура не менее $6 \cdot 10^7$ °К (Фаулер (1966)).

Итак, вращающаяся масса газа может быть похожа на квазар лишь при \tilde{z} , во много раз превышающем порог условия истечения при твердотельном вращении.

В этой ситуации следует ожидать, что будет происходить истечение. Высказывались предположения, что \tilde{z} может увеличиться при дифференциальном вращении, если угловая скорость вращения внутренних слоев больше, чем у внешних слоев (атмосферы) звезды. В этом случае вязкость, турбулентное трение, а может быть, и магнитные силы будут выравнивать угловые скорости и истечение снова будет иметь место.

Однако не следует панически бояться истечения! Вполне вероятно, что действительно квазары находятся в режиме постепенной потери массы. В следующем параграфе будет дана

схема расчета истечения газа из вращающейся звезды в предположении, что твердотельность вращения поддерживается во время истечения. К сожалению, вопрос о передаче момента в настоящее время разработан недостаточно.

Перед тем как перейти к более конкретным расчетам, дадим полуколичественные оценки тех эффектов, которые можно ожидать.

Вернемся к рис. 63. Эволюция до пересечения линии $OACB$ протекает без потери массы и момента, т. е. по пунктирным линиям, за счет одной только потери энтропии. Что происходит после этого пересечения? Очевидно, за счет истечения уменьшаются момент и масса. За счет излучения уменьшается энтропия, если излучение не компенсируется выделением ядерной энергии.

Предположение о преобладании потери энергии над потерей момента в ходе эволюции уже после нарушения условия истечения, в сущности, означает пренебрежение истечением. При этом можно считать, что в ходе эволюции может возникнуть любое \tilde{z} , и получить, следовательно, ограничивая себя только линией коллапса, любое выделение энергии

$$E = -0,15Mc^2\tilde{z}^3,$$

любую плотность и температуру

$$\rho_c = 2,4 \cdot 10^{16} \tilde{z}^3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2, \quad T_c = 5,5 \cdot 10^{12} \tilde{z} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/2}.$$

Например, при $\tilde{z} = 0,1$ и при $(M/M_\odot) = 10^8$ найдем $T_c = 6 \cdot 10^7$, что уже достаточно для выделения ядерной энергии. Для того чтобы выделить за счет гравитации*) такое же количество энергии, как и за счет ядерных, понадобилось бы, независимо от массы, $\tilde{z} = 0,34$.

Ядерной энергии уже хватает для обеспечения энергетических потребностей квазара на $3 \cdot 10^6$ лет (при полном выгорании) или $3 \cdot 10^5$ лет (при 10% выгорании) — вполне достаточный срок для объяснения существования квазара.

Заметим, однако, что абсолютная светимость квазара 3С 273 равна 10^{47} эрг/сек, что дает массу ближе к $10^9 M_\odot$. При такой массе \tilde{z} , необходимое для протекания ядерной реакции, $\sim 0,3$ сближается с $\hat{z} = 0,34$, при котором выделение гравитационной энергии порядка ядерной. Однако ясно, что рассмотрение столь больших \tilde{z} (в 50 раз больше критического) является несовме-

*) Говоря о выделении гравитационной энергии, мы имеем в виду, конечно, разность собственно гравитационной энергии и внутренней энергии газа в состоянии равновесия, т. е. $|E|$, а не $|U|$.

стимым с предположением о пренебрежении скорости потери момента за счет истечения вещества по сравнению со скоростью потери энергии. При столь сильных отклонениях от условия начала истечения последнее будет велико, и пренебрегать им нельзя.

Обратимся к противоположному предельному случаю: пусть ведущим является процесс потери момента, который может, однако, сопровождаться и потерей энергии, уносимой истекающим веществом. Если момент велик, и пересечение линии $OACB$ происходит левее точки A , то в ходе потери момента изображающая точка скатывается в A . Из характерной точки A точка попадает в область истечения и движется где-то между линией $K = \text{const}$ (линия $A - \tilde{z}_2$) и $E = \text{const}$ (линия $A - \tilde{z}_1$) (рис. 64). При этом на линии коллапса $OC\tilde{z}_1\tilde{z}_2$ достигается значение \tilde{z} , лежащее в пределах *) $\tilde{z}_1 < \tilde{z} < \tilde{z}_2$.

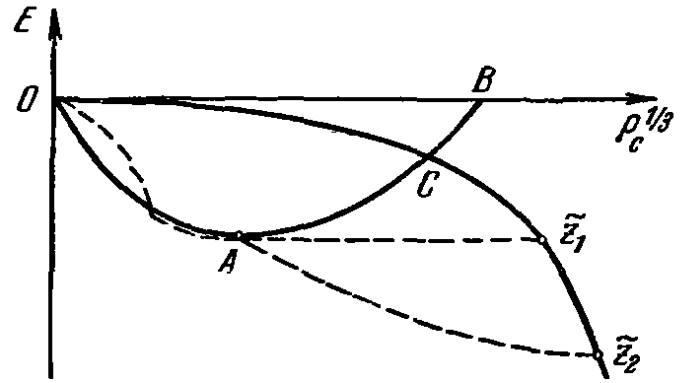


Рис. 64. Возможные пути эволюции звезды с потерей момента (обозначения в тексте).

Задаваясь $\tilde{z}_A = 0,007$, найдем \tilde{z}_1 из условия

$$0,15Mc^2\tilde{z}_1^3 = 0,11Mc^2\tilde{z}_A^2, \quad \tilde{z}_1 = 0,032.$$

Для нахождения \tilde{z}_2 нужно прежде найти момент вращения и зависящий от него коэффициент \tilde{b} в минимальной точке « A ».

С помощью формул предыдущего параграфа находим $\tilde{b} = 2\tilde{c} = 1,86 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2}$ и на линии коллапса

$$\tilde{x}_2 = \frac{\tilde{b} - \tilde{c}}{3\tilde{f}} = \frac{\tilde{c}}{3\tilde{f}}, \quad E_2 = -\frac{\tilde{c}^3}{27\tilde{f}^2} \cong -0,03Mc^2.$$

Следовательно, в рамках такой теории по самым грубым оценкам в режиме истечения может выделиться энергия, достаточная для длительного поддержания светимости квазара (больше 10^6 лет!). Однако грубых оценок недостаточно и необходим конкретный расчет эволюции. Результат такого расчета дан в § 18 этой главы. Особенностью рассматриваемой схемы является истечение вещества по экватору. Как известно, наблюдения квазаров (см. гл. 13), особенно 3С 273, показывают

*) Одно и то же обозначение употребляется для безразмерного параметра \tilde{z} и точки на рис. 64, что не должно вести к недоразумениям.

наличие характерной детали — струи релятивистской замагниченной плазмы, истекающей из компактного источника. Очевидно, полная теория квазаров сложнее схемы, изложенной выше. Схема интересна в основном с точки зрения энергетического баланса квазара.

Упомянем здесь еще одну схему, в которой вместо вращения рассматривается другой вид макроскопического движения — турбулентность.

§ 17. Турбулентность

Возможная роль турбулентности в теории квазаров (см. гл. 13) была рассмотрена Д. Лейзером (1965), Озерным (1966), Анандом (1965) и Пахольчиком (1965). Подробные оценки были сделаны Л. М. Озерным (1966а).

Предположим, что средняя скорость турбулентного движения составляет определенную долю n_* скорости звука $u = n_* a_{зв}$. Отсюда $u^2/2 = (n_*^2/2) a_{зв}^2$. Но при данном показателе адиабаты $4/3$ имеем $a_{зв}^2 = \frac{4}{3} \frac{P}{\rho} = \frac{4}{9} E_1$, где E_1 — удельная энергия. Следовательно, кинетическая энергия турбулентного движения всей звезды

$$\int \frac{u^2}{2} \rho dV = \frac{2n_*^2}{9} \int E_1 dM = \frac{2n_*^2}{9} h |U_g|,$$

так что ($h \cong 1$)

$$\tilde{z} = \frac{2}{9} n_*^2,$$

и, окончательно (см. формулу (11.15.2)):

$$E_A \cong -5 \cdot 10^{-3} n_*^4 Mc^2, \quad E_C = -3 \cdot 10^{-3} n_*^6 Mc^2$$

Результат, как видим, чрезвычайно чувствителен к предположениям о величине n_* .

Основным в этой схеме является вопрос о времени затухания турбулентности. Это время зависит от величины n_* . Кроме того, при прочих равных условиях время тем больше, чем больше масштаб турбулентности. По порядку величины турбулентная вязкость характеризуется коэффициентом переноса (аналогом молекулярного коэффициента, диффузии и кинематической вязкости), равным $\nu_t \cong u' l$, где u' — турбулентная скорость, l — масштаб турбулентности. Эта формула аналогична $\nu = D = \frac{1}{3} u \lambda$, где u — скорость молекул, λ — их свободная длина пробега.

В соответствии со значением ν_t , легко построить выражение объемной скорости диссипации энергии $\omega = \rho u'^3 l$ и времени диссипации $t \sim l^2/\nu_t \sim l/u'$. Существенно то, что, в отличие от задач молекулярной (ламинарной) вязкости или теплопроводности, нельзя взять $t = R^2/\nu$, где R — размер системы: в случае турбулентного движения масштаб неоднородности L , $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u}{L}$ по порядку величины совпадает с эффективной длиной пробега, $l \sim L$.

Затухание турбулентности происходит наиболее длительно для движений максимального масштаба. При этом энергия движений большого масштаба не прямо превращается в тепло, а сначала переходит в компоненты меньшего масштаба и т. д. Как известно, за счет этого создается спектр турбулентности, впервые найденный А. Н. Колмогоровым.

Постепенный процесс деградации энергии не меняет, однако, общего закона затухания. По порядку величины получим, приравнявая $n_* = 1$, $u' = a_{зв}$ (скорость звука) и выбирая максимальный масштаб, равный радиусу звезды R , $\tau = \frac{R}{a_{зв}}$, т. е. величину порядка характерного времени свободного падения. При $R = 10^{16}$ см и $M = 10^8 M_\odot$ получим масштаб $\tau = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 10^7 \cong 0,3$ года.

В выражении скорости диссипации может содержаться множитель порядка 0,1 для обычной турбулентности и 0,01 для магнитотурбулентных движений. Однако даже $100 \tau = 30$ годам является недопустимо малым промежутком времени для объяснения существования квазара. Время увеличится как n_*^{-1} , если взять $u \ll a_{зв}$, $n_* \ll 1$, однако как мы видим, в таком случае резко уменьшится и эффективность стабилизирующего влияния турбулентности.

С другой стороны, если $n_* \sim 1$ или $n_* > 1$, при сверхзвуковом движении в газе возникают ударные волны: движущиеся друг относительно друга массы газа не обтекают друг друга, а сталкиваются. Диссипация энергии при этом резко увеличивается. Нет сомнения, что $n_* \geq 1$ не может осуществиться.

Можно рассматривать общее вращение звезды как движение максимально возможного масштаба; в этом смысле теория вращающейся звезды непосредственно примыкает к теории турбулентной звезды, хотя вращение, конечно, не турбулентность.

С другой стороны, истечение газа при вращении звезды сопровождается перераспределением момента вращения между частицами, что связано с возбуждением турбулентности. По-видимому, будущая теория квазаров (если они действительно

являются сверхмассивными звездами с крупномасштабными движениями) будет учитывать оба эти явления, так же как и существенную роль магнитных полей в передаче момента и в стабилизации турбулентности.

Общей особенностью любого механизма стабилизации звезды является наличие макроскопического движения вещества с большими скоростями: по теореме вириала $E = -\tilde{T}$, где \tilde{T} — кинетическая энергия; учет поправок на ОТО нарушает теорему вириала и приводит к выводу $\tilde{T} > |E|$. Следовательно, при $E = -0,006 Mc^2$ (равном ядерной энергии)

$$\tilde{T} = M \frac{u^2}{2} > 0,006 Mc^2, \quad \sqrt{\overline{u^2}} > 0,1c.$$

Наблюдения спектральных линий, рождающихся на поверхности квазара, дают значительно меньшие скорости, $u \leq 0,01 c$. Было бы весьма важно найти способы выяснения скоростей движения основной массы квазара, скрытой от нас его оболочкой (атмосферой).

§ 18. Эволюция вращающейся звезды.

Скорость истечения

В предыдущей главе было показано, что истечение вещества за счет центробежной силы происходит при весьма малой кинетической энергии вращения звезды. Этот результат является следствием наличия у звезды протяженной атмосферы, плотность которой значительно меньше плотности звезды в центре.

Именно в такой ситуации можно построить эффективный приближенный метод расчета истечения вещества (Бисноватый-Коган, Зельдович, Новиков (1967)). Основой метода является то, что в каждый момент истекать может только малая часть вещества, расположенная вблизи экватора. Для самого истекающего вещества ускорение не мало, так как это вещество не находится в статическом равновесии: и в самом деле, ведь рассматривается ситуация, в которой точного статического решения нет.

Но истекает вещество малой плотности, поэтому скорость потери массы мала, а следовательно, для основной массы вещества условия меняются весьма медленно. Результативно истечение приводит к медленной эволюции звезды. Основная масса в каждый момент находится в состоянии, не отличающемся от равновесного.

Вблизи экватора устанавливается почти стационарный поток. В потоке каждая частица испытывает большие ускорения, сравнимые с центробежным ускорением, ускорением тяготения

и с ускорением, которое дал бы градиент давления. Состояние частицы меняется весьма быстро. Однако поток меняется лишь постольку, поскольку меняются граничные условия в области, питающей поток веществом, т. е. в основной массе эти условия меняются медленно. Именно медленное изменение всего потока (в эйлеровых координатах) и позволяет рассматривать его как стационарный. Критерий точности этого рассмотрения — малое отношение времени прохождения отдельной частицей критической области к времени существенного изменения потока как целого.

Задача заключается в том, чтобы сшить два решения — равновесное во внутренней области, где можно пренебречь ускорением в потоке по сравнению с ускорением тяготения, и стационарное с истечением в наружной области. Можно показать, что тот произвол, который, на первый взгляд, имеется в выборе места сшивки, никак не влияет на конечные результаты.

Перед тем как написать уравнения, сделаем определенные предположения, в которых будет вестись расчет.

1. Предположим, что вплоть до определенного расстояния от центра звезды частицы сохраняют постоянную угловую скорость. Очевидно, что для этого требуется механизм передачи момента, так как по мере удаления частицы от центра ее момент возрастает.

Таким механизмом может быть в принципе турбулентное трение. Однако турбулентность не может быть достаточно эффективной, когда скорость потока приближается к скорости звука или превосходит ее. С другой стороны, магнитные поля, вмороженные в истекающую плазму (по идее Шацмана (1959, 1962), а также Хойла и Бербиджа), могут обеспечить передачу момента на большие расстояния. Мы не учитываем других проявлений магнитного поля в истечении. Предположение, сделанное выше в целом, пуждается в дальнейшем исследовании.

2. Расчет дает не только скорость уменьшения массы звезды в результате истечения, но также и скорость уменьшения момента и энергии звезды. Момент и энергия, уносимые истекающим веществом (в отличие от самого количества вещества), весьма сильно зависят от того, на каком расстоянии прекращается обмен моментом количества движения между истекающим веществом и звездой. Не имея конкретной теории этого явления, будем вести расчет в нескольких вариантах, задаваясь различным расстоянием.

3. Третье предположение можно считать безобидным: в системе координат, вращающейся с угловой скоростью звезды, принимается, что движение направлено строго по радиусу. Отсутствие компоненты v_r равносильно сделанному выше предпо-

ложению о постоянной угловой скорости. Дополнительно предполагаем $v_\theta = 0$; это правдоподобно уже потому, что истечение происходит в узкой полосе угла θ вблизи экватора, $\mu = \cos \theta \ll 1$.

4. Если истечение происходит быстро по сравнению с потерей энергии излучением, то можно пренебрегать теплопроводностью в истекающем веществе.

Уравнения стационарного потока во вращающейся системе координат, со скоростью u , направленной по радиусу, в сделанных предположениях имеют простой вид:

1. Уравнение неразрывности

$$\rho u r^2 = A,$$

где A — константа, заранее неизвестная.

2. Уравнение энергии (уравнение Бернулли)

$$\frac{u^2}{2} + H + \varphi_1 + \varphi_2 = k,$$

где

$$\varphi_1 = \frac{GM}{r}, \quad \varphi_2 = -\frac{\omega^2 r^2 \mu^2}{2}, \quad \mu = \sin \theta.$$

3. Уравнение энтропии (в соответствии с четвертым предположением) $S = \text{const}$, откуда при $\gamma = 4/3$ следует $H = 4b\rho^{1/3}$.

В соответствии со сказанным в § 12 этой главы, константа в уравнении энергии равна $-GM/R$, где R есть радиус эмденовского политропического решения с центральной плотностью, найденной в предыдущем параграфе. Эта центральная плотность, как уже отмечалось, зависит от массы звезды, энтропии вещества и момента вращения. Общий характер решения определяется именно соотношением между k и максимумом $\varphi_1 + \varphi_2$.

Если $k < (\varphi_1 + \varphi_2)_{\text{max}}$, так что есть такое r , при котором $k = \varphi_1 + \varphi_2$, а следовательно, $u = 0$, $H = 0$, $\rho = 0$ — истечения нет, написанные выражения являются условиями для внешней поверхности звезды.

Однако если $k > (\varphi_1 + \varphi_2)_{\text{max}}$, то происходит истечение. Его теорию легко развить по аналогии с теорией аккреции. Намечтим основные черты решения, не останавливаясь на формальных доказательствах.

При том значении $r = r_m$, при котором достигает максимума сумма $\varphi_1 + \varphi_2$, находится критическая точка потока, происходит переход от дозвукового потока (при $r < r_m$) к сверхзвуковому (при $r > r_m$). Отсюда находим, замечая, что $H = 4P/\rho = 3a_{\text{зв}}^2 = 3u^2$, все характеристики потока:

$$\frac{u^2}{2} + H = 3,5u^2 = k - (\varphi_1 + \varphi_2)_{\text{max}}.$$

Плотность также выражается элементарно, поскольку при заданной энтропии $H = \text{const } \rho^{1/3}$. Наконец, находим поток, отнесенный к единице телесного угла, $\rho u r^2$ — величину, сохраняющуюся вдоль всего радиуса.

Поскольку центробежный потенциал зависит от угла, условие $k > (\varphi_1 + \varphi_2)_{\text{max}}$ осуществляется лишь в определенном поясе углов вблизи экватора.

Отмечая индексом «e» величины, относящиеся к экватору, получаем окончательно (с учетом ширины пояса)

$$\frac{dM}{dt} = \text{const} [k - (\varphi_1 + \varphi_2)_{\text{max}, e}]^4.$$

Квазистационарная теория, а также теория поправок на ОТО, развитая для статического (равновесного) случая, остается полностью применимой.

Высокий показатель степени при квадратной скобке приводит к тому, что даже при \tilde{z} , значительно превышающем критическое (начало истечения), скорость потери массы остается малой. Так, при $\tilde{z} = 0,025$ или $0,05$ время потери массы соответственно в $2 \cdot 10^3$ или $3 \cdot 10^2$ раз больше характерного гидродинамического времени (напомним, что $\tilde{z}_{\text{кр}} = 0,007$)

$$\tau = (6\pi G \rho)^{-1/2}.$$

Переход через скорость звука существен для свойств решения. Явления при $r > r_m$ уже не влияют на поток; в частности, для $\frac{dM}{dt}$ не существенно, насколько далеко после r_m сохраняется постоянство угловой скорости. От этого, однако, самым чувствительным образом зависит вращательный момент и энергия, уносимые истекающим газом. При $r < r_m$ в дозвуковом потоке из условия сохранения потока $\rho u r^2 = \text{const}$ следует, что u быстро уменьшается с уменьшением r . Это значит, что (за исключением небольшой области, примыкающей к критической поверхности) можно пренебречь $\frac{u^2}{2}$ по сравнению с H . Но условие $H + \varphi_1 + \varphi_2 = k$, получающееся после такого пренебрежения, есть не что иное, как условие гидростатического равновесия. Действительно, из термодинамики мы знаем, что при

$$S = \text{const}$$

получим

$$dH = v dP, \quad \text{grad } P = -\frac{1}{v} \text{grad} (\varphi_1 + \varphi_2) = -\rho \text{grad} (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Поэтому стационарный поток идеально сливается в дозвуковой области со статическим решением.

Намеченная выше схема дает возможность проследить за изменением массы, момента и энергии звезды в ходе эволюции на той стадии, когда наряду с излучением квантов происходит истечение вещества. Эффекты ОТО, рассмотренные выше, дадут возможность определить момент перехода к релятивистскому коллапсу.

Необходимым условием выполнения этой программы и последующего рассмотрения самого коллапса является анализ тангенциальных сил, осуществляющих передачу момента от центральных частей звезды истекающему веществу. Остается лишь добавить, что вся изложенная трактовка предложена недавно, и в настоящее время получены только первые результаты.

Приведем здесь данные численных расчетов. Для звезды с массой $M = 10^9 M_{\odot}$ и моментом $K = 10^{68} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$ время эволюции до начала истечения составляет всего 50 лет. Затем эволюция определяется совместным действием излучения энергии и потерей массы при истечении. В расчетах предполагалось, что магнитная связь истекающего вещества со звездой (магнитная связь поддерживает постоянство угловой скорости) обрывается на расстоянии *) $r_0 = \left(\frac{GM}{\omega^2} \sin \theta \right)^{1/3}$. Квазистатическая эволюция заканчивается, и релятивистский коллапс начинается, когда $T_{\text{центр}} = 3 \cdot 10^6 / \text{К}$, т. е. еще слишком мала для протекания ядерных реакций. Отношение массы в этот момент к начальной и углового момента к начальному есть соответственно $M/M_0 = 0,85$; $K/K_0 = 0,05$. Период медленной эволюции длится $\tau = 3 \times 10^4$ лет. В течение этого периода излучается 10^{59} эрг энергии.

§ 19. Равновесие и коллапс системы точечных масс, взаимодействующих только гравитационно

В ньютоновском приближении равновесие и эволюция системы точечных масс, взаимодействующих гравитационно, исчерпывающе рассмотрены в ряде работ. Скорость эволюции впервые была рассчитана Амбарцумяном (1938). Вслед за этим вопрос рассматривался во многих работах, см., например, Чандрасекар (1942, 1943), Гуревич (1954а), Огородников (1958), Мич и Боденхеймер (1963а, б). Наблюдаемые звездные системы нерелятивистские, но представляется интересным проследить за ходом их эволюции, вплоть до этапов, когда ньютоновское приближение не применимо и необходим учет ОТО. Начнем с анализа равновесия системы.

*) Заметим, что если r_0 мало, то истекающий газ не уходит на бесконечность, а остается на удаленных орбитах на постоянном расстоянии от звезды.

Проанализируем сначала идеализированную задачу. Рассмотрим сферически-симметричную равновесную систему частиц массы m , движущихся в общем, самосогласованном поле тяготения без столкновений, т. е. не будем учитывать относительно редких близких сближений звезд. Такая система моделирует шаровое звездное скопление или эллиптическую галактику типа E0.

Для рассматриваемой системы заданной массы существует верхний предел плотности (соответственно нижний предел радиуса), за которым равновесное решение невозможно (Зельдович (1964d); Зельдович, Подурец (1965)). В самом деле, в ОТО при заданной массе центрального тела для пробной частицы есть минимальный радиус круговой орбиты; см. § 7 гл. 3. Для устойчивой орбиты этот минимальный радиус $r_{\min} = 3r_g$. Следовательно, при размере системы меньше $\sim 3r_g$ периферийные частицы уже не могут двигаться по финитным траекториям, и равновесного решения нет. О существовании минимального размера системы из частиц, движущихся по круговым орбитам в общем поле тяготения говорил еще Эйнштейн.

В системе гравитирующих частиц столкновения на самом деле существуют как малая поправка и приводят к установлению максвелловского распределения по энергии (Чандрасекар, 1942, 1943).

В системе (почти) без столкновений теплопроводность (почти) бесконечна и распределение температуры по пространству соответствует термодинамическому равновесию в ОТО ($T = \text{const}$ в ньютоновской теории):

$$T = T_{\infty} \sqrt{g_{00}}.$$

Однако при максвелловском распределении задача о равновесии не имеет решения, ибо всегда есть частицы с большой энергией, могущие уйти на бесконечность. Поэтому равновесие носит приближенный характер (хотя эволюция идет медленно; см. далее). Равновесное состояние ищется с видоизмененной функцией распределения, типа максвелловской, но обрезанной при энергиях, близких к энергии покоящейся частицы на бесконечности, например, при

$$mc^2 - \frac{1}{2} T_{\infty}.$$

В результате интегрирования уравнений равновесия (Зельдович, Подурец (1965)) находятся параметры критического состояния, за которым равновесных решений не существует:

1. Дефект массы в критическом состоянии должен быть близок к максимальному:

$$\frac{\Delta M}{M} = 0,037.$$

Это соответствует температуре $(T_\infty) \approx 0,22 \text{ } mc^2$ *). При больших температурах равновесная эволюция заведомо невозможна. Устойчивость в действительности может теряться и раньше этого момента.

2. Масса и плотность в центре системы ρ_0 в критическом состоянии связаны соотношением:

$$(\rho_0)_{\text{кр}} \simeq 10^{16} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2.$$

Переходим теперь к эволюции. Система точечных масс, находящаяся в равновесии, будет медленно эволюционировать за счет факторов, исключенных при решении задачи о равновесии, но в действительности имеющих место.

Классическим фактором эволюции является существование «хвоста максвелловского распределения», обрезанного при решении уравнений равновесия. Частицы, приобретающие при редких столкновениях скорость больше параболической, будут испаряться из системы. Характерное время испарения (см. упомянутые выше работы):

$$\tau_e \simeq A \left(\frac{v^2}{Gm} \right)^2 v^{-1} n^{-1},$$

где v — средняя скорость частиц, n — их концентрация, A — численный коэффициент:

$$A = \frac{e^6}{10\pi} \simeq 10.$$

Другой фактор эволюции на нерелятивистских стадиях — образование двойных звезд — требует тройных тесных сближений (третья звезда отбирает энергию) и происходит редко по сравнению с испарением. Этим фактором можно пренебречь.

Испарение частиц приводит к увеличению температуры системы и плотности, приближая ее к критическому состоянию. Когда скорости v становятся сравнимыми с c , появляются типично релятивистские факторы эволюции; гравитационный захват в задаче двух тел (не требующий тройных столкновений) и излучение гравитационных волн.

Расчет показывает (см. Зельдович, 1964d), что скорость эволюции от испарения (e), захвата (c) и излучения волн тяготения (r) находятся в отношении

$$W_e : W_c : W_r = \frac{1}{40} : 16 \left(\frac{v}{c} \right)^2 : \frac{2}{45} \left(\frac{v}{c} \right)^5;$$

*) В работе Зельдовича и Подурца ошибочно говорится, что критическое состояние соответствует $(T_\infty)_{\text{max}} = 0,27 \text{ } mc^2$, а не близко к максимуму $\Delta M/M$; впрочем, это весьма мало влияет на выводы.

захват сравнивается с испарением при $v/c \approx 0,04$, гравитационное излучение никогда не играет заметной роли.

В предыдущем рассмотрении предполагалось, что эволюция идет по серии изотермических состояний системы. Фон Харнером (1963) проведен прямой численный расчет эволюции шаровой системы точечных масс, содержащий 25 частиц, первоначально распределенных случайным образом. Его расчет показал, что эволюция идет таким образом, что в центре образуется плотность гораздо бóльшая, чем для изотермического шара, и возникает заметное число двойных звезд. Однако есть основания полагать, что эти эффекты являются следствием малого числа звезд в системе и для системы из 10^4 или 10^9 звезд эволюция будет протекать по изотермическим состояниям. Вопрос нуждается в дальнейшем анализе.

После того как медленная эволюция подвела систему к критическому состоянию, начинается коллапс.

Как уже отмечалось, причиной катастрофического сжатия является отсутствие устойчивых финитных орбит при условии $r < 3r_g$. Срыв и падение одних частиц вызывает увеличение массы внутри орбит других частиц, которые сорвутся в свою очередь и т. д. Произойдет лавинообразное катастрофическое сжатие за характерное время, порядка времени обращения периферийных частиц.

Для катастрофы решающее значение имеет наличие квазиэллиптических орбит, т. е. орбит, у которых различно максимальное и минимальное расстояния частицы от центра.

В самом деле, представим себе систему, в которой все частицы движутся по круговым орбитам; плоскости орбит распределены хаотически, так что эта модель имеет сферически-симметричное распределение плотности. Пусть в результате столкновений отдельные частицы падают в центр, и масса внутри каждой сферы увеличивается. В результате этого какие-то орбиты с $r < r_1$ станут неустойчивы (§ 7 гл. 3) и соответствующие частицы по спиральям устремятся к центру; при этом, однако, масса, действующая на расстоянии $r > r_1$, не увеличится и лавинообразного нарастания возмущения не произойдет.

Если же частица, двигавшаяся между $r'_{\min} \leq r' \leq r'_{\max}$, «сорвалась», перешла на спиральное движение, то этот срыв повлияет на все частицы, для которых $r''_{\min} < r'_{\max}$; в свою очередь эти частицы повлияют на следующий слой частиц с $r'''_{\min} < r''_{\max}$ и т. д.

Эллиптические орбиты физически связывают между собой те слои, которые эти орбиты пересекают.

Заметим, что изотропное распределение частиц в фазовом пространстве $N=N(\eta)$ обязательно предусматривает наличие эллиптических орбит. Такое распределение дает закон Паскаля — изотропию давления. Компонента T_1^1 , ответственная за перенос импульса вдоль радиуса, зависит как раз от радиальных компонент импульса частиц. При круговом движении этих компонент нет. Значит, T_1^1 зависит именно от эллиптических траекторий. Наглядно вполне очевидно, что именно передача давления через элементы поверхности сферы, перпендикулярные к r , необходима для того, чтобы могло произойти катастрофическое сжатие, когда внутренняя часть системы не выдерживает веса внешней и сжимается под ее давлением.

Подобный расчет динамики катастрофического сжатия, т. е. коллапса системы частиц, весьма сложен. Задача труднее, чем нестационарная гидродинамическая задача, так как в задаче о частицах состояние вещества в каждой точке характеризуется не несколькими числами (плотность, давление, температура, скорость), а функцией вектора импульса.

В почти равновесном состоянии можно было в хорошем приближении считать функцию изотропной, т. е. зависящей только от величины, но не от направления импульса или, иными словами, от энергии.

В задаче о коллапсе изотропность заведомо нарушается. Конкретно следует ожидать интересных качественных особенностей. Происходит быстрое общее сжатие большей части массы. Однако частицы, которые в начальном, почти равновесном состоянии находились вблизи наружного края, на орбитах, близких к круговым, останутся не вовлеченными в это сжатие. После сжатия эти частицы создают облака, окружающие основную массу. Основная масса быстро сожмется до своего гравитационного радиуса, выход частиц и излучения при этом быстро асимптотически устремится к нулю (гравитационное самозамыкание). Частицы облака будут лишь постепенно, по законам медленной эволюции, падать на коллапсировавшую массу. Весьма желателен численный расчет такой модели.

Решение строго поставленной задачи об эволюции системы точечных масс, взаимодействующих только гравитационно, на реальный вопрос об эволюции системы звезд отвечает неполностью.

Средняя плотность системы в критическом состоянии соответствует среднему расстоянию между звездами порядка

$$r = 3r_g N^{2/3},$$

где r_g — гравитационный радиус звезды. Следовательно, при

большом N расстояние между звездами может быть достаточно большим, при этом, однако, чем больше N , тем больше время эволюции, что снижает интерес к большим N .

Однако, каким бы ни было N , столкновения между звездами, ведущие к эволюции системы, происходят со сближением до расстояний порядка Gm/v^2 . В релятивистской области при $v/c \sim 1$ расстояние сближения становится порядка гравитационного радиуса.

Значит, даже в том случае, если частицы представляют собой белые карлики или нейтронные звезды, размеры их таковы, что соударение нельзя рассматривать как соударение точечных масс. При реальных соударениях должно происходить мощное взаимодействие оболочек, выброс струй газа и много других явлений. Частично положение улучшается благодаря известному факту большой роли далеких соударений при кулоновском или ньютоновском взаимодействии. Эффективное расстояние взаимодействия порядка $\sim \frac{Gm}{v^2} \ln \frac{Rv^2}{4Gm}$, где R — радиус скопления.

По всей вероятности, соударения звезд в компактном, далеко проэволюционировавшем скоплении приведут его к превращению в облака газа, т. е. в сверхмассивную звезду, о которой подробно говорилось выше. Не является ли подобный процесс рождением квазара (см. гл. 13)? К этой проблеме мы вернемся в § 2 гл. 13 и в § 4 гл. 19.

ГЛАВА 12

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ОБЪЕКТОВ И СОПОСТАВЛЕНИЕ С НАБЛЮДЕНИЯМИ

§ 1. Аккреция газа нейтронными и застывшими звездами

Звезды в галактиках всегда окружены межзвездным газом и пылью. На определенных стадиях эволюции звезды выбрасывают вещество непрерывным потоком либо при катастрофических взрывах. Наконец, в состав галактики может входить и вещество, никогда не входившее в состав какой-либо звезды. Это вещество пришло в современное газообразное состояние в ходе космологического расширения первоначального почти однородного вещества, имевшего в прошлом большую плотность согласно решению Фридмана (см. раздел 4).

Таковы источники межзвездного вещества в галактике. Наблюдения показывают, что в спиральных рукавах нашей галактики средняя плотность межзвездного газа порядка 10^{-24} г/см³; в ядре галактики она может быть значительно больше.

Нейтронная звезда после того как она остыла, а также застывшая (коллапсирующая) звезда не могут выбрасывать вещество; очевидно, они способны только поглощать, т. е. затягивать в сферу своего действия окружающее их вещество. Этот процесс принято называть *аккрецией*.

Интерес к аккреции возникает потому, что в процессе аккреции постепенно растет масса звезды. В частности, белый карлик может перейти чандрасекаровский предел и скачком перейти в состояние нейтронной звезды. В свою очередь холодная нейтронная звезда может дойти до ОВ-предела и перескочить в состояние коллапсирующей звезды, которая затем застывает. Второй аспект аккреции связан с изменением скорости движения звезды относительно межзвездного газа. При этом скорость звезды меняется не только за счет импульса частиц, прилипающих к звезде, но и, главным образом, за счет обмена импульсом с частицами, пролетающими мимо звезды, т. е. и за счет упру-

гих столкновений частиц со звездой. Скорость звезды относительно газа в свою очередь влияет на темп аккреции.

Любопытное новое явление рассчитано А. Г. Дорошкевичем (1965b) в релятивистском случае: гравитационное поле вращающегося тела, как мы видели (см. § 3 гл. 4), отличается в ОТО от поля покоящегося тела равной массы. Вращающееся тело захватывает преимущественно те частицы, вращательный момент которых имеет знак, противоположный моменту самого тела. При аккреции частиц, изотропно распределенных в пространстве, за счет такой избирательности тело уменьшает свой момент вращения.

Главная побудительная причина изучения аккреции заключается в выделении энергии при аккреции. Частицы, падающие на поверхности нейтронной звезды, отдают до $0,2c^2 \div 0,3c^2$ энергии на грамм, т. е. во много раз больше, чем могли бы дать ядерные реакции. Частицы, падающие на застывшую звезду, разгоняются до скорости, приближающейся к световой. Возникает вопрос — какая доля их кинетической энергии может быть высвечена наружу? С явлением аккреции связана возможность наблюдения нейтронных и застывших звезд. Как показал недавно Камерон, даже при аккреции на белые карлики возможно возникновение рентгеновского излучения.

При количественных оценках надо иметь в виду, что нейтронные и застывшие звезды могут быть окружены газом значительно большей плотности, чем средняя межзвездная плотность: само образование этих звезд связано с катастрофическими явлениями, при которых часть массы могла быть сорвана с поверхности и образовала облако газа вокруг звезды. Выделение энергии при аккреции в свою очередь влияет на сам процесс за счет взаимодействия встречного светового потока с падающим веществом, т. е. по существу, за счет светового давления. При достаточной плотности межзвездного вещества это явление приводит к саморегулировке процесса.

Методически задачи аккреции можно рассматривать в двух предельных случаях: как движение отдельных частиц (атомов, молекул, пылинок) либо как движение сплошной среды. Очевидно, выбор приближения зависит от длины свободного пробега частиц. В зависимости от условий могут реализоваться оба случая. Мелкомасштабное магнитное поле в межзвездной плазме можно рассматривать усредненно, как слагаемое в энергии и давлении газа. Влияние общего магнитного поля звезды на аккрецию будет рассмотрено в § 6 гл. 12, посвященном электромагнитным явлениям.

В нерелятивистском приближении основные задачи аккреции были рассмотрены в конце сороковых годов. Это рассмотрение

остается достаточно хорошо применимым не только к белым карликам, но и к нейтронным звездам: при гравитационном потенциале $(0,2 \div 0,3)c^2$, когда радиус звезды в 3—4 раза больше шварцшильдовского радиуса r_g , поправки на ОТО могут достигать 20—30%. При наличии других неопределенностей (прежде всего в отношении плотности падающего газа) такие поправки незначительны. Однако в связи с вопросом о застывших звездах учет ОТО совершенно необходим для получения качественно правильных выводов. Для связности изложения мы начнем с напоминания общеизвестных вещей.

§ 2. Падение частиц на звезду

Рассмотрим частицы с массой m , скорость которых вдали от звезды одинакова и равна v_0 , а плотность n_0 . При этом скорость v_0 будем считать малой по сравнению с параболической скоростью v_n на поверхности звезды,

$$v_n = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad v_n \gg v_0. \quad (12.2.1)$$

Скорость частицы у поверхности, равную $\sqrt{v_n^2 + v_0^2}$, можно заменить на v_n , максимальный момент при этом равен $I = mv_n R$. Вдали от звезды, там, где движение частицы не возмущено звездой, момент выражается через прицельный параметр l :

$$I = mv_0 l. \quad (12.2.2)$$

Отсюда находим максимальное значение l_{\max} , при котором имеет место падение на звезду

$$l_{\max} = R \frac{v_n}{v_0}.$$

Поток частиц с $l < l_{\max}$ равен, очевидно, $j = nv_0 \pi l_{\max}^2$. Окончательно получим выражение скорости аккреции (M — масса звезды)

$$\frac{dM}{dt} = mnv_0 \pi R^2 v_0^{-2} \frac{2GM}{R} = 2\pi mn \frac{GMR}{v_0}. \quad (12.2.3)$$

Подставим $mn = \rho_0$, $r_g = 2GM/c^2$, получим

$$\frac{dM}{dt} = \rho_0 \pi r_g^2 c \frac{c}{v_0} \frac{R}{r_g}. \quad (12.2.4)$$

Любопытно сопоставить эту нерелятивистскую формулу с выражением для захвата частицы застывшей звездой. Как было по-

казано в § 9 гл. 3, критическое значение момента *) равно $2 mcr_g$. Соответственно получим

$$\frac{dM}{dt} = c\rho_0 4\pi r_g^2 \frac{c}{v_0}. \quad (12.2.5)$$

Следовательно, при $R/r_g < 4$ пользование нерелятивистской формулой уже незаконно, формула (12.2.5) представляет собой нижнюю границу; этой формулой можно пользоваться как для застывших, так и для нейтронных звезд. В удобных единицах ее можно переписать так:

$$\frac{d\left(\frac{M}{M_\odot}\right)}{d\left(\frac{t}{10^{10} \text{ лет}}\right)} = 10^{-12} \left(\frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3}\right) \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{v_0}{1 \text{ км/сек}}\right)^{-1}. \quad (12.2.6)$$

Отметим, что для частиц, строго покоящихся на бесконечности, нет разумного ответа; в самом деле, если в область, занятую покоящимися частицами, поместить внезапно массу, притягивающую их, то частицы начнут ускоренно двигаться по радиусам, и легко убедиться, что поток на поверхность будет возрастать с течением времени по закону

$$\frac{dM}{dt} = \frac{8}{3\pi} \rho_\infty GMt,$$

т. е. при $v_0 = 0$ нет постоянного стационарного потока.

Мы рассматривали поток частиц, движущихся со скоростью, одинаковой по величине и направлению. Очевидно, если при данном $|v_0|$ все направления скорости равновероятны, то $\frac{dM}{dt}$ не изменится; кроме того, можно будет утверждать, что поток равномерно распределен по поверхности звезды, что не имело места при одностороннем движении частиц на бесконечности. Наконец, если вдали от тела частицы имеют максвелловское распределение, то в формулу войдет

$$\left(\frac{1}{v_0}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{kT}{m}\right)^{-1/2} = \frac{\sqrt{\frac{10}{3\pi}}}{a_0} \approx \frac{1}{a_0},$$

где a_0 — скорость звука вдали от тела (коэффициент приводим для одноатомного газа).

*) В § 11 гл. 3 было рассмотрено влияние гравитационного излучения на захват в задаче двух тел. Здесь мы не учитываем гравитационное излучение, потому что массу захватываемых частиц m считаем пренебрежимо малой по сравнению с массой захватывающей звезды. Гравитационное излучение $\sim m^2$, тогда как энергия взаимодействия $\sim m$; эффекты излучения содержат множитель m/M .

§ 3. Гидродинамическое решение

Будем рассматривать межзвездную среду как газ с определенным показателем адиабаты γ и определенным состоянием на бесконечности ρ_0, P_0 ; скорость газа как целого вдали от тела стремится к нулю, средняя скорость отдельных молекул на бесконечности порядка $a_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$.

Выделим узкий конус с телесным углом $d\Omega$. Запишем закон сохранения вещества ($d\tilde{S}$ — поток в конусе $d\Omega$)

$$d\tilde{S} = \rho u r^2 d\Omega = \text{const}, \quad u = \frac{A}{\rho r^2}, \quad A = \frac{d\tilde{S}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{dM}{dt}$$

и закон Бернулли, выражающий сохранение энергии:

$$-\frac{GM}{r} + \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} = \text{const} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}.$$

Правая часть формулы следует из рассмотрения состояния при $r \rightarrow \infty$. Удобно вместо P и ρ воспользоваться в качестве переменной скоростью звука $a_{зв}$:

$$a_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}, \quad a_{зв} = a_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

В плоскости $a_{зв}u$ уравнение Бернулли при различных r дает семейство эллипсов:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} a_{зв}^2 = \frac{1}{\gamma-1} a_0^2 + \frac{bM}{r},$$

а уравнение неразрывности — семейство гипербол дробной степени

$$u = \frac{A}{\rho_0 r^2} \left(\frac{a_0}{a_{зв}}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}.$$

При этом гиперболы зависят еще от параметра A , заранее не известного. Это значит, что рассмотрение задачи само должно дать ответ на вопрос о том, чему равен поток вещества на поверхности, в данных условиях на бесконечности.

Можно показать*), что при наличии двух точек пересечения сплошной и пунктирной кривых нижняя точка пересечения соответствует дозвуковому режиму течения, а верхняя точка пересечения сверхзвуковому; см. рис. 65.

*) Дальнейшее изложение проводится в предположении $\gamma < 5/3$, что всегда осуществляется в случае одноатомного газа за счет ионизации; числа даны для $\gamma = 4/3$.

Касание пары кривых происходит обязательно на биссектрисе, $u = a_{зв}$, в режиме критического течения. Если же при данном выборе A при каких-то значениях r кривые не пересекаются, значит, это A выбрано слишком большим, и такой поток не реализуется. Анализ уравнений приводит к следующей картине: существует критическое значение $A_{кр}$. При $A > A_{кр}$ вообще нет решения. (Есть область r без пересечений.) При $A < A_{кр}$ при всех r есть два пересечения, на бесконечности течение всегда дозвуковое (в пределе $r = \infty$, $a_{зв} = a_0$, $u = 0$), поэтому оно остается дозвуковым везде.

Такое течение возможно лишь при наличии достаточно высокого давления P_n у поверхности звезды. В пределе при $A \rightarrow 0$ получим статическую картину, при которой межзвездный газ представляет собой продолжение атмосферы звезды.

При $A = A_{кр}$ возникает качественно новая ситуация. Касание имеет место при определенном $r = r_h$, а при всех остальных r , как $r > r_h$, так и $r < r_h$, кривые пересекаются дважды. Тогда вдали от звезды, в области $r > r_h$, осуществляется дозвуковое течение. В точке $r = r_h$ скорость равна скорости звука, а ближе к звезде поток сверхзвуковой. Такой режим осуществляется при давлении на поверхности звезды меньше определенного давления P_h , причем P_h близко к статическому давлению, поддерживающему межзвездный газ.

Итак, если только на поверхности звезды нет высокого давления, то устанавливается критическое втекание газа с максимально возможным расходом. Не останавливаясь на простых вычислениях, отметим, что в точке перехода через скорость звука

$$u = a_{зв} = a_0 \sqrt{\frac{2}{5 - 3\gamma}}$$

скорость течения и скорость звука порядка начальной скорости звука (на бесконечности). Переход этот совершается там, где гравитационный потенциал порядка a_0^2 :

$$\frac{GM}{r_k} = \frac{4}{5 - 3\gamma} a_0^2.$$

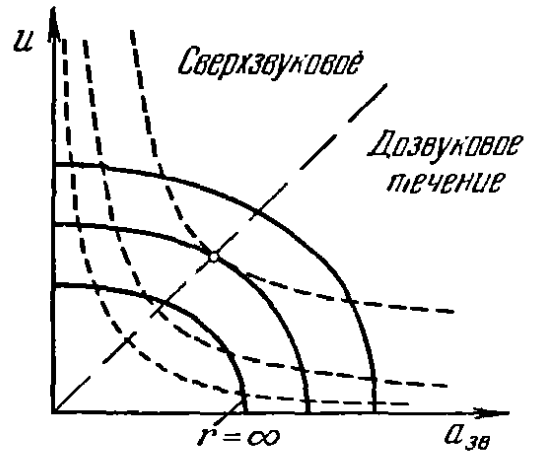


Рис. 65. Гидродинамическая аккреция.

$a_{зв}$ — скорость звука, u — скорость вещества. Сплошные линии — семейство эллипсов, получаемых из уравнения Бернулли (параметром является расстояние r); пунктир — семейство гипербол дробной степени, следующих из уравнения неразрывности.

Отсюда уже легко построить выражение для потока вещества:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= 4\pi r_k^2 u_k \rho_k = \delta(\gamma) \frac{G^2 M^2}{a_0^3} \rho_0, \\ \delta &= \pi \left(\frac{2}{5-3\gamma} \right)^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3.1)$$

Структура выражения потока (12.3.1) резко отличается от случая независимых частиц, рассмотренного в предыдущем параграфе. В выражение не входит радиус звезды. В частности, выражение остается справедливым и в том случае, когда мы имеем дело с застывшей звездой: это вполне естественно, поскольку «узким местом» (т. е. местом, определяющим пропускную способность потока) потока является сфера радиуса r_k , где достигается критическая скорость. (Конечно, чисто геометрическая площадь сферы только уменьшается при уменьшении радиуса, но при расчете потока нужно учесть еще изменение скорости и плотности, зависящее от поля тяготения.)

Выражение (12.3.1) можно записать в форме

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r_k^2 \rho_0 c \frac{\delta}{16\pi} \left(\frac{c}{a_0} \right)^3. \quad (12.3.2)$$

В этом виде его удобно сравнить с (12.2.5): для застывшей звезды поток газа больше потока независимых частиц в отношении $(c/v_0)^2$, где c — скорость света, v_0 — скорость частиц; по порядку величины скорость звука a_0 не отличается от скорости частиц v_0 . Газ отличается от независимых частиц тем, что в газе происходят частые столкновения атомов между собой; эти столкновения ограничивают возрастание тангенциальных скоростей атомов, зато увеличивается радиальная скорость, направленная к звезде.

Численная оценка дает

$$\frac{d\left(\frac{M}{M_\odot}\right)}{d\left(\frac{t}{10^{10} \text{ лет}}\right)} \simeq 0,1 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \frac{\rho_0}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \left(\frac{a_0}{1 \text{ км/сек}}\right)^{-3}, \quad (12.3.3)$$

поэтому эффект значителен даже в «обычных» условиях,

$$\frac{M}{M_\odot} = 1, \quad \rho_0 = 10^{-24} \text{ г/см}^3, \quad a_0 = 1 \text{ км/сек.}$$

Условие применимости гидродинамического рассмотрения требует, чтобы вблизи критического радиуса, т. е. на расстоя-

нии $r_k = GM/a_0^2$, длина пробега была бы меньше r_k . Для этого при сечении $\delta \sim 10^{-15} \text{ см}^2$ нужно $a_0 \sim 1 \text{ км/сек}$. Плотность $\rho_0 \sim 10^{-25} (M/M_\odot)^{-1}$. Следовательно, такое рассмотрение является вполне оправданным.

§ 4. Движение и выделение энергии в газодинамическом решении; эффекты ОТО

Выше мы определили закон аккреции при падении газа в поле тяготения звезды. Было выяснено, что поток газа определяется сферой, на которой происходит переход от дозвукового к сверхзвуковому течению. Как же происходит дальнейшее течение газа? Можно показать, что в сверхзвуковом течении давление газа не играет существенной роли. Каждый элемент газа движется приблизительно так же, как частица, свободно падающая вдоль радиуса в поле тяготения. Тогда в ньютоновской области скорость, очевидно, будет равна $u = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Зная скорость из уравнения неразрывности, легко найти плотность газа в зависимости от r :

$$\rho u r^2 = \rho_k a_k r_k^2 \simeq \rho_0 a_0 \left(\frac{GM}{a_0^2} \right)^2, \quad \rho \simeq \rho_0 \left(\frac{GM}{r a_0^2} \right)^{3/2} \sim r^{-3/2}.$$

Отсюда по закону адиабатического сжатия или с учетом радиационного охлаждения газа можно найти и его давление и скорость звука. При показателе политропы γ скорость звука $a_{зв} \sim \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \sim r^{-\frac{3(\gamma-1)}{4}} = r^{-n}$.

При $\gamma < 5/3$ показатель $n < 1/2$, скорость звука действительно растет медленнее скорости движения.

В случае аккреции газа нейтронной звездой газ у поверхности звезды останавливается ударной волной, его кинетическая энергия превращается в тепловую и тут же излучается наружу. Давление, достигаемое в ударной волне, равно ρu^2 . Подставляя типичные величины $\rho_0 = 10^{-24}$, $a_0 = 1 \text{ км/сек}$, $\gamma = 1,4$, $M = 1,5 M_\odot$, найдем около поверхности при $R = 3r_g = 15 \text{ км}$ значения $u = 2 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$, $\rho = 10^{-9} \text{ г/см}^3$; давление, останавливающее газ, $4 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2 = 0,4 \cdot 10^6 \text{ атм}$. Подробности см. в Дополнении V.

Детали этого процесса, спектр излучения, его влияние на движение газа пока не исследованы. Однако ясно, что общее выделение энергии на единицу массы падающей на поверхность нейтронной звезды фиксировано и равно $c^2 \frac{r_g}{2R}$, т. е. составляет $1,5 \cdot 10^{20} \text{ эрг/г}$ для случая $R = 3r_g$. Эта величина в 20 раз

больше всей ядерной энергии превращения водорода в железо.

Поток вещества $2 \cdot 10^{17} \text{ г/сек} = 3 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$ (при этом $\Delta M = 0,1 M_{\odot}$ накапливается за $3 \cdot 10^7$ лет) обеспечивает выделение энергии $3 \cdot 10^{37} \text{ эрг/сек} = 8000 L_{\odot}$. Такой поток излучения с поверхности нейтронной звезды соответствует эффективной температуре $1 \text{ кэВ} \cong 10^7 \text{ }^{\circ}\text{К}$, при которой максимум спектральной плотности приходится на мягкие рентгеновские лучи, с длиной волны около 3 \AA . Подробности см. в Дополнении V.

Совершенно иначе обстоит дело при аккреции газа застывшей звездой. Движение газа отражает связанные с ОТО известные особенности движения частицы в шварцшильдовском поле тяготения. Частицы доходят до r_g за конечное время; в системе координат, связанной с частицей, момент перехода через r_g никак не выделен. Если за рассматриваемой частицей следует другая и расстояние между ними где-то вдали от r_g было конечно, то оно останется конечным и в момент пересечения r_g . Для потока частиц, т. е. для газа, отсюда следует вывод: плотность в системе, движущейся с газом, остается конечной. По

порядку величины плотность равна $\rho_m = \rho_0 \frac{r_k^2}{r_g^2} \frac{a_0}{c}$. Выражая

ρ_m через a_0 , получим

$$\rho_m \cong \rho_0 \left(\frac{c}{a_0} \right)^3.$$

При $a_0 = 1/\text{км/сек}$, $\rho_0 = 10^{-24} \text{ г/см}^3$, найдем $\rho_m \sim 3 \cdot 10^{-8} \text{ г/см}^3$. С точки зрения покоящегося наблюдателя, находящегося вблизи r_g , скорость газа тем ближе к скорости света, чем ближе точка наблюдения к r_g . Плотность числа частиц и поток частиц образуют четыре-вектор. При лоренц-преобразовании от системы, движущейся с газом к покоящейся системе, плотность газа, измеренная в покоящейся системе, неограниченно растет при приближении к r_g , как $\rho_0 \sqrt{r_g/(R-r_g)}$ (точнее, так растет плотность массы покоя или плотность, как число частиц в единице объема). Наконец, с точки зрения далекого наблюдателя частица только асимптотически приближается к r_g за бесконечное время.

Далекий наблюдатель, как бы долго он ни наблюдал за стационарным потоком аккреции на застывшую звезду, считает, что ни одна из частиц, прошедших когда-то давно мимо него, не пересекла r_g . Следовательно, все они накапливаются в пространстве, прилегающем к r_g . В точном стационарном решении для потока газа общее число частиц, заключенных между двумя сферами $r=R_1$ и $r=R_2$, расходится, когда нижний предел

стремится к гравитационному радиусу $R \rightarrow r_g$:

$$V = 4\pi \int r^2 \sqrt{g_{11}} dr, \quad N = \text{const} \int \sqrt{\frac{r_g}{r-r_g}} r^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} dr.$$

В знаменателе под интегралом стоит $r - r_g$, интеграл расходится логарифмически. С точки зрения далекого наблюдателя, к стационарному потоку можно только асимптотически приближаться*). Емкость слоя, прилегающего к r_g в стационарном решении, бесконечна, и нужно бесконечное время, чтобы его заполнить.

Еще важнее, что при сверхзвуковом течении вещества по радиусу может излучиться наружу лишь весьма малая часть энергии. Кинетическая энергия поступательного движения сохраняется и не переходит в тепловую энергию. При упорядоченном падении по радиусам отдельные элементы газа не сталкиваются между собой, и ударные волны не возникают. В слое, прилегающем к гравитационному радиусу, скапливается вещество, обладающее огромной кинетической энергией**), которая, однако, не превращается в другие формы энергии. Только тепловая энергия газа, увеличивающаяся в ходе адиабатического сжатия, может быть высвечена. Однако этот источник энергии весьма мал по сравнению с энергией покоя (ρc^2) и кинетической энергией, поскольку в сверхзвуковом потоке плотность (в системе координат падающей вместе с газом) остается конечной.

Итак, сферически-симметричная аккреция газа в поле тяготения застывшей звезды, не приводит к эффективному выделению энергии, точно так же (и, в сущности, по той же причине), как и сферически-симметричный коллапс.

§ 5. Несимметричная аккреция в поле застывшей звезды

Из сказанного в предыдущем параграфе ясна необходимость рассмотрения столкновения падающих частиц между собой. В качестве самого простого примера можно рассмотреть неуп-

*) Время, необходимое для приближения к стационарному потоку с заданной точностью в данной точке пространства тем больше, чем ближе эта точка к r_g .

**) Как уже отмечалось, с точки зрения локального наблюдателя, скорость частиц $\rightarrow c$ при $r \rightarrow r_g$, так что энергия $E \rightarrow \infty$. Если бы около r_g находилось неподвижное тело, то при ударе частица выделила бы энергию $E \gg m_0 c^2$. Однако если эта энергия отводится наружу (например, квантами или нейтрино), то на пути к наблюдателю в силу гравитационного красного смещения энергия убывает и для далекого наблюдателя становится близкой к $m_0 c^2$ для частицы с массой покоя m_0 . Фактически энергия не выделяется потому, что нет неподвижного тела, о которое частица могла бы удариться.

ругое столкновение двух частиц, движущихся по гиперболическим орбитам (рис. 66). Кинетическая энергия их относительного движения в момент столкновения превращается в другие формы энергии, в свет, который излучается во все стороны. Часть света попадает внутрь шварцшильдской сферы застывшей звезды и безвозвратно теряется; остальная часть, преодолев гравитационное поле, уходит на бесконечность. Сами сталкивающиеся частицы, потеряв тангенциальную скорость, падают. Расчет показывает, что максимальный выход энергии наружу составляет до 10—20% энергии покоя (m_0c^2) падающих частиц.

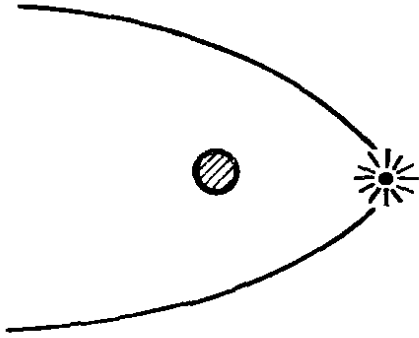


Рис. 66. Столкновение частиц с противоположными моментами в поле притягивающего центра.

Можно было бы развить подробную статистическую теорию движения частиц в поле тяготения. Рассмотрим случай движения без столкновений. Частицы, которые на бесконечности изотропно распределены по направлениям скорости и имеют энергию, заключенную между E и $E + dE$, образуют микроканонический ансамбль. По теореме Лиувилля, их плотность в фазовом пространстве везде постоянна. Но объем слоя в фазовом пространстве можно записать (используя $E = p^2/2m$, $p dp = m dE$) как $4\pi r^3 m dE$. Поскольку dE везде одинаково, плотность частиц в каждой точке пропорциональна импульсу p , т. е.

$$n = n_0 \frac{p}{p_0} = n_0 \sqrt{1 + \frac{GMm}{rE}}.$$

Если пренебречь отсосом частиц вследствие аккреции, то распределение частиц по скорости остается в каждой точке пространства изотропным. Таким образом, получается первое приближение для распределения частиц (без учета столкновений и аккреции); это приближение используется для расчета числа и энергии столкновений и для получения следующего приближения. Однако мы не будем развивать эту картину и обратимся к противоположному предельному случаю — к рассмотрению течения газа.

Итак, представим себе, что застывшая звезда погружена в газ, рассматриваемый как сплошная среда. Предположим, в отличие от предыдущего параграфа, что на бесконечности газ движется относительно звезды со скоростью u_0 . Рассмотрим предельный случай $u_0 \gg a_0$: при наличии упорядоченного движения (скорость u_0) учет собственного движения молекул газа уже не существен. Пренебрегая скоростью звука по сравнению

со скоростью u_0 , мы одновременно пренебрегаем и давлением. Но при отсутствии давления движение сплошной среды, по существу, не отличается от движения отдельных частиц: уравнения гидродинамики представляют собой просто иную запись уравнений механики частицы. В стационарной задаче линии тока представляют собой просто траектории частиц. Сальпетер (1964) дает следующую общую картину движения (рис. 67): газ течет слева направо, в поле тяготения линии тока искривляются, а скорость газа увеличивается по закону сохранения энергии (уравнение Бернулли).

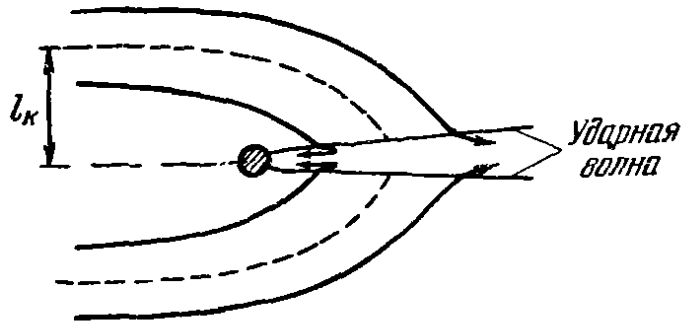


Рис. 67. Гидродинамическая картина аккреции. В ударной волне частицы теряют составляющую скорости, перпендикулярную к фронту. При прицельном расстоянии меньше l_k радиальная, составляющая скорости, меньше параболической и частица в конце концов падает к притягивающему центру.

В хвосте потока, примыкая к поверхности звезды (или к сфере Шварцшильда) расположена вытянутая поверхность ударной волны. Ударная волна заменяет столкновения пар частиц, описанные выше. Пересекая фронт ударной волны, газ теряет компоненту скорости, перпендикулярную к фронту. Компонента скорости, параллельная фронту, т. е. направленная по радиусу, остается без изменения.

Пользуясь законами Кеплера, можно найти критическую траекторию (пунктир) и критический прицельный параметр l_k . При $l > l_k$ скорость после сжатия ударной волной остается больше параболической, и вещество вытекает на бесконечность; при $l < l_k$ вещество после сжатия падает на звезду. Оказывается, что l_k и, соответственно, скорость аккреции зависит от скорости газа u_0 примерно так же, как в сферической задаче зависела от скорости звука a_0 (см. выше). Важное отличие от сферической задачи заключается в том, что в ударной волне происходит эффективная переработка кинетической энергии в тепло и свет.

Сальпетер приводит следующие оценки: тело, движущееся со сверхзвуковой скоростью относительно газа, замедляется за время, в течение которого аккреция мало меняет его массу. Следовательно, нужно рассматривать движение тела относительно газа со скоростью порядка скорости звука, т. е. порядка хаотической скорости молекул и облаков газа,

$$\frac{dM}{dt} \sim \alpha \frac{M^2 n}{u^3 \cdot 3 \cdot 10^{11}},$$

где u — скорость в км/сек, M — масса в единицах M_{\odot} , n — плотность межзвездного газа (атомов N в см^3), t — в годах, α — безразмерное число $0,1 < \alpha < 1$. Масса растет, обращаясь в бесконечность быстрее, чем за 10^{10} лет, если

$$M_0 > \left(\frac{u}{25}\right) \left(\frac{0,25}{\alpha n}\right) 2 \cdot 10^6.$$

Таким образом, сколлапсировавшие или очень плотные тела с массой $10^6 M_{\odot}$, т. е. более тяжелые, чем обычные шаровые скопления в нашей Галактике, должны при $n \sim 1$ вызвать катастрофический процесс аккреции, сопровождающийся большим выделением энергии.

Световое давление ограничивает выделение энергии, о чем речь пойдет ниже. Несимметричная картина движения приводит к тому, что и в поле тяготения застывшей звезды частицы сталкиваются и могут выделять энергию того же порядка, что и при столкновении с поверхностью нейтронной звезды. Нужно особенно отметить важное ограничение модели Сальпетера: в этой модели энергия выделяется в форме тепла и света: механизма, который привел бы к переработке гравитационной энергии падающего вещества в кинетическую энергию выброшенной струи, нет. В самом деле, согласно теореме Бернулли, в стационарном потоке закон сохранения энергии применим к каждой отдельной струйке, ограниченной линиями тока; в потоке с малой скоростью втекания на бесконечности никак не могут появиться струи, удаляющиеся от тела с большой скоростью. Возможным выводом является рассмотрение нестационарной ситуации: застывшая звезда, приближаясь к границе газового облака, вызовет движение газа, который, смыкаясь по другую сторону звезды, даст кумулятивный выброс струи. Однако более вероятно, что для получения реальной картины строения сверхзвезд необходим учет магнитных полей (см. § 13).

В заключение остановимся на вопросе о регулировке аккреции световым давлением.

Выше, в § 5, мы видели, что при определенном значении потока света, соответствующем $\frac{L}{M} = 3 \cdot 10^4 \frac{L_{\odot}}{M_{\odot}}$, световое давление уравнивает силу тяготения. Следовательно, в том случае, когда выделение энергии при аккреции превысит этот предел, аккреция приостановится. Эти соображения следует применить к аккреции на нейтронную звезду. Принимая ее массу равной M_{\odot} , найдем предельную светимость $L \sim 10^{38}$ эрг/сек. При светящейся поверхности, соответствующей радиусу 10 км, получим поток 10^{25} эрг/сек · см², что соответствует температуре

черного тела $2 \cdot 10^7 \text{ }^\circ\text{K} = 1,7 \text{ кэв}$. При вдвое меньшем потоке температура составляет $1,3 \text{ кэв}$. В обоих случаях температура достаточна для испускания рентгеновских лучей с энергией до $10\text{--}15 \text{ кэв}$ (длина волны порядка 1 \AA), регистрируемых аппаратурой, вынесенной за пределы атмосферы. Для того чтобы создать такой поток света, нужна скорость аккреции $2 \cdot 10^{17} \text{ г/сек} = 3 \cdot 10^{-9} M_\odot$ в год. Вблизи поверхности скорость падающего газа порядка $0,5 \text{ с}$, плотность его $\rho = 10^{-6} \text{ г/см}^3$, эффективная толщина поглощающего слоя $\sim \rho \cdot R \sim 1 \text{ г/см}^2$. Расчет по томсоновскому рассеянию показывает, что такой слой более чем на $1/2$ пропускает первичное рентгеновское излучение поверхности. При этом существенно, что вещество находится при температуре порядка 1 кэв под действием излучения и поэтому кислород, азот и углерод практически полностью ионизованы; поэтому поглощение рентгеновских лучей веществом резко уменьшается по сравнению с поглощением холодным веществом.

Наконец, остается оценить плотность газа (атомного водорода) на бесконечности, находящегося при температуре порядка 100° и обеспечивающего нужный поток вещества. Скорость звука порядка 1 км/сек , критический радиус порядка 10^{16} см , плотность порядка 10^{-21} г/см^3 .

В этой картине, которая могла бы объяснить рентгеновское излучение нейтронной звезды после исчерпывания тепловой энергии внутренних слоев, остаются неясные вопросы: устойчиво ли сферически-симметричное течение вещества навстречу потоку излучения? На каком расстоянии происходит ионизация газа? Нужно ли рассматривать аккрецию из газа с постоянной плотностью на бесконечности или из газа, образовавшегося при катастрофическом процессе превращения обычной звезды в нейтронную? В последнем случае само начальное распределение и начальная температура газа не произвольные, а определяются предыдущей стадией. В двойной системе роль источника газа может играть вторая звезда. Существенно, что условие светового равновесия регулирует выделение энергии как раз на уровне, при котором энергия выделяется в основном в виде рентгеновских лучей; этот результат зависит от соотношения между массой и радиусом нейтронной звезды и нечувствителен к другим обстоятельствам. Отметим, что скорость свободного падения на поверхность нейтронной звезды весьма велика. Энергия протонов порядка $200\text{--}300 \text{ Мэв}$! Поэтому излучение такой ударной волны может заметно отличаться от равновесного излучения (спектра черного тела) равной мощности. Эту задачу предстоит еще решить методами, аналогичными анализу структуры сильных ударных волн (Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер (1966)). См. Дополнение V.

Ситуация может осложняться магнитными полями, замороженными в газ, вступающий в процесс аккреции. Как справедливо отмечает Паркер (1965), любое сильное движение плазмы создает условия генерации космических лучей. Если бы магнитное поле менялось только за счет подобного сжатия, как $\rho^{2/3}$, то его роль оставалась бы малой. Однако запутывание силовых линий может усиливать поле. Таким образом, аккреция замагниченного газа может питать энергией релятивистские частицы, создающие синхротронное излучение. Этот круг вопросов находится в начальной стадии изучения.

§ 6. Магнитные и магнитогидродинамические явления

В. Л. Гинзбург (1964) первым обратил внимание на то, что коллапс звезды должен сопровождаться сильным увеличением ее магнитного поля. Впоследствии этому вопросу был посвящен целый ряд работ (см. далее). Рассматривая коллапс звезд и сверхбольших масс газа, нужно различать существенно разную топологию внешнего магнитного поля этих объектов (Кардашов (1964)). Согласно данным наблюдений и современным теориям происхождения звезд магнитное поле обычной звезды (скажем, Солнца) имеет квазидипольный характер. Топология такого поля изображена на рис. 68. Магнитные силовые линии замыкаются, в основном не уходя далеко от звезды. Иная картина внешнего поля для галактик и вообще метagalактических образований. Согласно современным представлениям (С. Б. Пикельнер (1965)) здесь силовые линии магнитного поля не замкнуты и уходят практически на бесконечность, связывая тело с окружающей средой и другими объектами.

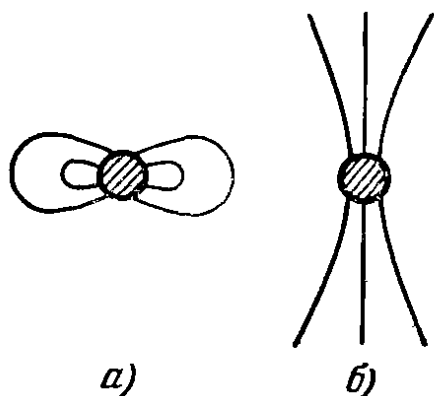


Рис. 68. Топология магнитного поля. а) Звезда, б) метagalактический объект.

В последнее время все большее распространение получает точка зрения, согласно которой это поле возникло не путем самовозбуждения в процессе образования и эволюции галактик, а сжатием первоначального метagalактического поля; существовавшего до возникновения галактик (см. § 5 гл. 21).

Магнитные процессы при коллапсе с учетом явлений в окружающей оболочке весьма сложны; они изучены, пожалуй, еще меньше, чем эффекты вращения. Поэтому мы ограничимся только самым общим рассмотрением вопроса. Начнем с коллапса обычных звезд. Из наблюдений известно, что у звезд на

поверхности могут быть поля напряженностью $\sim 10^4$ гс. Во всех случаях магнитная энергия много меньше гравитационной энергии звезды.

Проводимость вещества звезды весьма велика и для звезд типа Солнца составляет $\sigma_{\odot} = 10^{16}$ сек $^{-1}$. Поэтому время затухания поля (С. Б. Пикельнер (1961))

$$t_{\odot} \approx \frac{4\pi\sigma_{\odot}R_{\odot}^2}{c^2} \approx 7 \cdot 10^{17} \text{ сек} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ лет},$$

что много больше возраста Солнца ($\sim 5 \cdot 10^9$ лет). В процессе сжатия звезды любой массы это время всегда много больше характерного времени сжатия (В. Л. Гинзбург (1964)). Если звезда превращается в нейтронную, то ее проводимость возрастает во много раз и становится примерно на четыре порядка больше проводимости меди в обычных условиях (Д. А. Франк-Каменецкий (1963)). В этом случае время затухания поля для $R \approx 10^6$ см порядка миллиона лет.

Итак, всегда можно считать, что поле «вморожено» в вещество звезды. В этих условиях при сжатии $H \sim R^{-2}$ и магнитная энергия $E_{\text{маг}} \sim M^2 R^2 \sim R^{-1}$, т. е. меняется при сжатии так же, как и гравитационная энергия. Но у обычных звезд, как сказано выше, $E_{\text{маг}} \ll E_{\text{грав}}$, следовательно, на динамику коллапса звезды магнитное поле никак не влияет.

Как будет меняться магнитное поле во время релятивистского коллапса, когда звезда превращается в застывшую? Этот вопрос был исследован В. Л. Гинзбургом (1964) и В. Л. Гинзбургом и Л. М. Озерным (1964).

Выше подчеркивалось, что поле «вморожено» в вещество звезды, и при сжатии до размеров $\sim r_g$ должно достигать колоссальной величины $\sim 10^{10}$ гс для сопутствующего веществу наблюдателя. Иное поле будет при $R \rightarrow r_g$ для неподвижного наблюдателя. Чтобы найти это поле, Гинзбург и Озерной рассматривают сначала статическую задачу.

Будем мысленно уменьшать размеры гравитирующего намагниченного шара и исследовать его внешнее (дипольное) магнитное поле. Дипольный момент шара d в классической теории пропорционален R : $d = d_0 R / R_0$, где d_0 и R_0 соответственно начальный дипольный момент и радиус. Момент d стремится к нулю, если $R \rightarrow 0$. В. Л. Гинзбург (1964) показал, что в релятивистской теории при $R \rightarrow r_g$ закон изменения d следующий:

$$d = \frac{d_0 r_g}{R_0 \cdot 3 \ln \frac{r_g}{R - r_g}}.$$

Таким образом, $d \rightarrow 0$, когда $R \rightarrow r_g$.

Найдем теперь изменение со временем магнитного момента коллапсирующей звезды. У поверхности магнитное поле вычисляется так же, как и в стационарном случае. Зная зависимость R звезды от времени (см. § 6 гл. 11), находим окончательно при $t \rightarrow \infty$:

$$d = \frac{d_0 r_g^2}{3R_0 c t}.$$

Итак, магнитный момент для внешнего наблюдателя затухает по степенному закону. Чем можно объяснить затухание магнитного момента? Магнитный момент эффективно создается круговым движением тока. Вследствие затухания для внешнего наблюдателя всех процессов скорость вращения $v_\theta \rightarrow 0$; благодаря $v_\theta \rightarrow 0$ ток затухает $I \rightarrow 0$. Затухание тока и приводит к затуханию внешнего магнитного поля коллапсирующей звезды для шварцшильдовского наблюдателя.

Изменение магнитного поля при сжатии вызывает появление вихревого электрического поля. В ближней (неволновой) зоне это может привести к возникновению токнесущей оболочки в окружающей звезду плазме или (и) к возникновению магнитогидродинамических волн (Гинзбург, Озерной (1964)). Эти процессы еще совершенно не исследованы, и мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями относительно дальней волновой зоны (Новиков (1964а)). Характерное время и масштабы явления соответственно r_g/c и r_g . Поэтому волновая зона начинается с $L > r_g$. Пусть внешнее магнитное поле звезды содержит дипольный член и магнитный момент $d = \Phi R$, где $\Phi = \text{const}$. Оценим излучение внешнего магнитного поля. Можно сразу сказать, что излученная энергия будет порядка энергии магнитного поля, так как при $R \sim r_g$ скорость сжатия порядка c и нет параметра малости для количества излученной энергии. Сделаем более точный расчет. В процессе коллапса вещество падает почти свободно. Поэтому

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}, \quad \dot{R} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (12.6.1)$$

Полный поток излученной энергии равен

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2. \quad (12.6.2)$$

Подставляя (12.6.1) в (12.6.2), получаем

$$I = \frac{\Phi^2 c}{6r_g^2} \left(\frac{r_g}{R}\right)^4. \quad (12.6.3)$$

а полное количество излученной энергии при сжатии до размеров R

$$E = \frac{\Phi^2}{15r_g} \left(\frac{r_g}{R}\right)^{2,5}. \quad (12.6.4)$$

Если $\Phi \approx 3 \cdot 10^{21} \text{ (эрг} \cdot \text{см)}^{1/2}$, как это имеет место у Солнца, и $r_g \approx 3 \cdot 10^5 \text{ см}$, то

$$I = 5 \cdot 10^{41} \left(\frac{r_g}{R}\right)^{4,5} \text{ эрг/сек}, \quad (12.6.5)$$

$$E \simeq 3 \cdot 10^{36} \left(\frac{r_g}{R}\right)^{2,5} \text{ эрг}. \quad (12.6.6)$$

Излучение имеет вид однократного импульса продолжительностью $\sim r_g/c$ *). Расчет проводился для нерелятивистской теории, и формулы перестают быть справедливыми вблизи сферы Шварцшильда, но они дают правильный порядок оцениваемых величин.

Общее количество излученной энергии в этом случае невелико. Хойл, Нарликар и Уилер (1964) предположили, что интенсивное электромагнитное излучение может продолжаться долго, если вращающаяся звезда с магнитным полем, остывая и сжимаясь, придет в квазиравновесное состояние типа, скажем, плоского диска. Такая конфигурация с несферическим распределением масс, по предположению авторов, должна динамически осциллировать вокруг положения равновесия. Однако мы уже отмечали в предыдущей главе, что такая конфигурация неустойчива и разбивается на сгущения. Другим возможным вариантом осциллирующей системы может быть, например, вращение тела типа почти слившихся двойных звезд. По предположению Хойла, Нарликара и Уилера, размеры этой системы для $M \sim 5 M_\odot$ порядка 10^6 см , т. е. $\approx r_g$, характерная скорость, очевидно, немногим менее c ($\sim c/3$). Размеры звезды по сравнению с первоначальными уменьшились на пять порядков; следовательно, поле увеличилось на 10 порядков, и достигает $\sim 10^{10} \text{ гс}$ (при $H_0 \sim 1 \text{ гс}$), а переменная составляющая поля $\sim 10^9 \text{ гс}$. Отсюда поток электромагнитного излучения $\sim R^2 H^2 c \approx 3 \cdot 10^{40} \text{ эрг/сек}$. Хойл, Нарликар, Уилер считают, что поток энергии может длиться $10^3 \text{ лет} = 3 \cdot 10^{10} \text{ сек}$, и получают полную излученную энергию 10^{51} эрг .

Однако предполагать столь длительное существование осциллирующей системы нельзя. Дело в том, что наряду с электромагнитными волнами система будет излучать гравитационно.

*) Спад всплеска обусловлен релятивистским эффектом застывания всех процессов при $R \rightarrow r_g$; см. выше.

Это будет и в случае анизотропного сжатия тела при осцилляции и в случае вращения типа двойной звезды. Для порядковой оценки гравитационного излучения можно пользоваться формулами § 11 гл. 3, в которых полагаем $m \approx M$. При указанных параметрах системы находим длительность существования системы

$$\tau = \frac{5}{16} \frac{r_g}{c} \left(\frac{r}{r_g} \right)^4 \approx 10^{-5} \text{ сек.} \quad (12.6.7)$$

Очевидно, никакой разумный учет параметра малости за счет того или иного распределения масс в системе не изменит существенно этой величины. Для того чтобы система существовала 10^3 лет, необходимо, как следует из (12.6.7), чтобы $r/r_g \approx 10^4$. Но при таком выборе размеров системы напряженность магнитного поля будет не более 10 гс, и электромагнитное излучение ничтожно. Итак, общее количество излученной электромагнитной энергии невелико и по порядку величины определяется выражением (12.6.6). Мы увидим далее, что при сжатии масс порядка $10^5 \div 10^8 M_\odot$, а не масс порядка солнечной, как мы считали до сих пор, излученная энергия резко возрастает. До сих пор молчаливо предполагалось, что плазма, окружающая звезду, не мешает возникновению излучения. Частоты излучения низки, $\omega \sim c/r_g$, особенно для больших масс. Даже при ничтожной плотности плазмы собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m^2}} \approx 2 \cdot 10^{18} \sqrt{n_e} \frac{1}{\text{сек}}$$

много больше ω . Это, казалось бы, должно приводить к тому, что излучение не будет возникать вовсе. Однако для того, чтобы излучение не возникало, кроме указанного условия, нужно еще, чтобы максимально возможный ток $I_{\max} = n_e e c$ (где n_e — концентрация электронов, e — заряд электрона), возникающий в плазме при изменении магнитного поля в неволновой зоне, был в состоянии компенсировать это изменение. Найдем критическое значение плотности окружающей плазмы, при которой излучение уже не возникает (Новиков (1964а)). Из уравнений Максвелла получаем

$$\text{rot } H = \frac{4\pi I_{\max}}{c} = 4\pi n_e e. \quad (12.6.8)$$

Сделаем оценки по порядку величины. Рассмотрим характерный момент сжатия, когда $(R - r_g) \sim r_g$. Учитывая, что $\text{rot } H \sim H/r_g$ и $H \sim \Phi/r_g$, получаем из (12.6.8):

$$\Phi_{\text{крит}} \approx 4\pi n_e e r_g^3.$$

Следовательно, если выполняется неравенство

$$n_e < \frac{\Phi}{4\pi r_g^3}, \quad (12.6.9)$$

возникает волновая зона (начиная с расстояний $L > r_g$) даже при $c/r_g \ll \omega_0$. Подставляя в (12.6.9) $\Phi_0 \approx 3 \cdot 10^{21}$ и $r_{g\odot} \approx 3 \cdot 10^5$ см) находим

$$n_e < \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}. \quad (12.6.10)$$

Для сравнения укажем, что концентрация электронов в солнечной короне вблизи поверхности Солнца $\sim 10^8$ см⁻³.

Итак, при выполнении (12.6.10) излучение уходит от звезды в виде однократного импульса, поглощаясь плазмой, находящейся уже вдали от звезды в волновой зоне. Еще раз напомним, что полная энергия излучения в случае обычных звезд относительно невелика.

Кардашов (1964) обратил внимание на то, что при некоторых условиях вращательная энергия звезды может длительно «перекачиваться» в энергию магнитного поля. Звезда, сжавшись до размеров белого карлика или до нейтронной плотности, должна при этом вращаться еще не настолько быстро, чтобы сильное сплющивание основной массы привело к неустойчивости — возникновению сгущений или к образованию двойной звезды*). Процесс «перекачки» может осуществляться, например, следующим образом.

При вспышке сверхновой I типа в пространство выбрасываются внешние слои звезды, которые образуют вокруг нее туманность типа Крабовидной**). Эта оболочка связана со звездой магнитными силовыми линиями. Сжимающаяся звезда ускоряет свое вращение и закручивает силовые линии поля, отдавая энергию вращения магнитному полю в оболочке, и передавая оболочке также момент (механизм Шацмана, Хойла). Сделаем, следуя Кардашову (1964), грубые оценки. Пусть начальные параметры звезды

$$R_0 \approx 10^{11} \text{ см}, \quad M \approx M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad v_0 \approx 10^6 \text{ см/сек}$$

и $H_0 = 1$ гс. Вследствие условия вмерзнутости поток поля через поверхность звезды не меняется. Поэтому если бы напряженность внешнего поля не увеличивалась закручиванием, то напряженность H в оболочке со средним радиусом l была бы

*) Для этого необходимо, чтобы вращательная энергия была заметно меньше гравитационной.

**) Оболочка может возникнуть и иным путем, например, стационарным истечением вещества с поверхности и т. п.

$H \approx H_0 R_0^2 / l^2$. Если звезда сделала n оборотов после отделения оболочки, то

$$H = \left(\frac{H R_0^2}{l^2} \right) n. \quad (12.6.11)$$

Радиус звезды R , при котором начинается истечение вещества с экватора вследствие действия центробежной силы, равен $R \approx 10^8 \text{ см} \approx 3 \cdot 10^2 r_g$. Следовательно, один оборот звезда совершает за $\tau = \frac{2\pi R}{v_0} \cdot \frac{R}{R_0} \approx 0,6 \text{ сек}$. Применим эти оценки к гипотетической звезде в Крабовидной туманности, возникшей при вспышке сверхновой $t = 10^3$ лет назад. В этом случае число оборотов звезды $n \approx t/\tau = 5 \cdot 10^{10}$. Размер туманности $l \approx 2,5 \cdot 10^{18} \text{ см}$, поэтому $H = \frac{H_0 R_0^2}{l^2} n = 10^{-4} \text{ гс}$, что хорошо согласуется с оценками поля по наблюдаемому синхротронному излучению электронов туманности.

Усиление поля будет продолжаться до тех пор, пока магнитная энергия не станет порядка вращательной или же пока не нарушится магнитная связь звезды с оболочкой. Последнее может наступить либо при развитии неустойчивости процесса, либо вследствие затухания поля. Это время, по оценке Кардашова, составляет несколько тысяч лет.

Перейдем теперь к коллапсу больших масс газа. Гравитационное сжатие облаков с магнитным полем, по-видимому, приводило в прошлом к образованию различных форм галактик и радиогалактик. Это особенно подчеркивается в последнее время в работах Пиддингтона (1964) и Пикельнера (1965). Может быть, в некоторых условиях возможно возникновение сверхмассивных звезд (квазаров?).

В отличие от обычных звезд, здесь топология поля иная (см. рис. 68). Силовые линии связывают сжимающееся облако с окружающей средой. Магнитная энергия облака, вероятно, порядка вращательной уже в начале сжатия, и сжатие непрерывно сопровождается потерей вращательного момента. Сжатие вызывает появление «перетяжки» в магнитных силовых линиях*). Процессы, возникающие при этом, известны плохо, и мы приведем только самые грубые оценки. В межзвездных облаках существуют магнитные поля напряженностью $\sim 10^{-5} \text{ гс}$. Пусть первоначальное облако с $M = 10^8 M_\odot$ имеет $n \approx 10^4$ ячеек однородности поля с $H_1 \approx 10^{-5} \text{ гс}$. Тогда внешнее регулярное поле облака $H_0 \approx H_1 n^{-1/2} \approx 10^{-7} \text{ гс}$. После равновесной эволюции и коллапса при сжатии до r_g плотность облака меняется на

*) См. по этому поводу работы Местеля (1959).

~ 24 порядка (считая от первоначальной $\sim 10^{-24}$ г/см³ до 1 г/см³), поле возрастает на 16 порядков и достигнет $H \approx 10^9$ гс. Увеличение энергии поля сопровождается ростом энергии частиц, замороженных в поле.

Будет ли возникать излучение поля в процессе сжатия? Из критерия возникновения излучения (12.6.10), используя приведенное выше первоначальное значение $H_0 \approx 10^{-7}$ гс на поверхности облака, получаем

$$n_e < 10^4 \left(\frac{10^8}{M/M_\odot} \right)^{7/3} \text{ см}^{-3}. \quad (12.6.12)$$

Если, кроме того, учесть, что вероятнее предположить, что $H_0 \sim n^{-1/2} \sim M^{1/2}$, то показатель степени скобки в (12.6.12) возрастает до 3. Таким образом, критическое для возникновения излучения значение концентрации плазмы меняется от 10^4 см⁻³ для $M \approx 10^8 M_\odot$ до $\sim 10^{11} \div 10^{13}$ см⁻³ для $M \approx 10^5 M_\odot$.

Если плотность плазмы удовлетворяет критерию (12.6.12), то излучение возникает. Оценим по формулам (12.6.5) и (12.6.6) полный поток и количество излученной энергии для $M \approx 10^8 M_\odot$:

$$I = 10^{54} \left(\frac{r_g}{R} \right)^4 \text{ эрг/сек}, \quad E = 5 \cdot 10^{56} \left(\frac{r_g}{R} \right)^{2,5} \text{ эрг}.$$

Считая $H_0 \sim M^{-1/2}$, получаем $I \sim M^{-5/3}$, $E \sim M^{-2/3}$. При $H_0 = \text{const}$ имеем $I \sim M^{-2/3}$, $E \sim M^{1/3}$. Таким образом, электромагнитное излучение внешнего поля при коллапсе сверхбольших масс, в отличие от коллапса обычных звезд, выглядит весьма внушительно и, возможно, играет заметную роль в энергетике квазаров на стадии их коллапса.

§ 7. Сопоставление с наблюдениями

Дают ли астрономические наблюдения какие-либо указания о конечной судьбе массивных звезд, о существовании нейтронных и застывших звезд?

Если коллапс звезды приводит к ядерному взрыву, разрушающему всю или почти всю звезду, то такой взрыв, конечно, должен быть виден с огромного расстояния. Естественно отождествить подобную ядерную катастрофу со вспышками сверхновых звезд, наблюдаемых астрономами. При такой вспышке выделяется энергия порядка 10^{52} эрг или даже больше.

Правда, до сих пор не ясно, какая доля массы звезды выбрасывается при вспышках сверхновых I и II типов (подробнее см. обзор Бербиджей (1962) и монографию Шкловского (1966)).

Если предположить, что каждая звезда с массой больше $\sim 1,5 M_{\odot}$ кончает свою эволюцию вспышкой сверхновой и избегает, таким образом, релятивистского коллапса, то количество вспышек сверхновых за интервал времени Δt должно равняться числу массивных звезд, заканчивающих свою эволюцию за тот же интервал Δt . Оценим это последнее число (Хойл, Фаулер (1963), Цвикки (1958), Шварцшильд (1958), Новиков и Озерной (1964), Хойл, Фаулер, Бербиджи (1964)) и сделаем сравнение с наблюдениями.

Будем считать, что звезда в процессе эволюции не теряет существенно свою массу, или, во всяком случае, потери эти не столь велики, чтобы сделать массу тяжелой звезды меньше критической. Самым продолжительным периодом жизни звезды является стадия «главной последовательности», когда выгорает водород в центре звезды (см. § 1 гл. 11). Напомним, что время эволюции звезды в этой стадии (практически полное время равновесной эволюции):

$$t \approx 10^{10} \frac{L_{\odot} M}{L M_{\odot}} \text{ лет.}$$

Для ярких звезд главной последовательности выполняется приблизительное соотношение $L \sim M^3$, поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде

$$t \approx 10^{10} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 \text{ лет.} \quad (12.7.1)$$

Из наблюдений можно определить число dN звезд главной последовательности в единице объема пространства с массами в интервале $M, M+dM$. Если время жизни звезды t меньше времени существования Галактики ($\sim 10^{10}$ лет)*), то, поделив dN на t , получим усредненную за последние t лет частоту звездообразования, совпадающую в предположении стационарности процесса с частотой «умирания» звезд данной массы. Подобный расчет, проведенный Сальпетером (1955), дает

$$\frac{dN}{t} = 2 \cdot 10^{-12} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2,4} d \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \frac{\text{звезд}}{pc^3 \text{ год}}. \quad (12.7.2)$$

Звезды с массой больше критической $M > 1,6 \cdot M_{\odot}$ имеют время эволюции меньше возраста Галактики. Умножив (12.7.2) на объем Галактики $\sim 10^{13} pc^3$ и проинтегрировав по массе

*) Выводы мало меняются, если принять $t_{\text{гал}} \approx 5 \cdot 10^9$ лет.

$M > 1,6 M_{\odot}$, получаем число звезд в Галактике с массой больше критической, ежегодно заканчивающих свою равновесную эволюцию:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_{1,6}^{\infty} 20 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2,4} d \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \simeq 7 \frac{\text{звезд}}{\text{год}}. \quad (12.7.3)$$

Отсюда следует, что если бы каждая массивная звезда вспыхивала в конце концов как сверхновая, то каждый год в Галактике должно было бы вспыхивать несколько таких звезд. Это на три порядка больше наблюдаемого числа вспышек, даваемого Цвикки (1958) (одна сверхновая в 300 лет) из наблюдений сверхновых в других галактиках. Б. В. Кукаркин (1965) указал, что в спиральных галактиках типа S_c частота вспышек сверхновых, по-видимому, в 10—20 раз больше, чем это обычно принимается. Но противоречие, тем не менее, остается. Если все звезды с массой больше некоторой в конце эволюции дают вспышку сверхновой, то для того, чтобы дать частоту вспышек $\sim 0,01$ в год, эта критическая масса M_0 должна быть порядка $20 M_{\odot}$ (см. об этом Стотерс (1963)).

Итак, наблюдения говорят скорее против предположения о том, что в конце эволюции ядерный взрыв или какая-либо другая катастрофа препятствует превращению массивной звезды в застывшую. Другой аргумент для этого вывода дают белые карлики в составе двойных (см. об этом ниже). Нет ли других процессов, которые помешают превращению звезды в нейтронную или застывшую?

Может быть, звезда все же избавляется от излишка массы, но не всегда путем катастрофического взрыва, а в большинстве случаев стационарным истечением вещества с поверхности или небольшими дискретными выбросами массы на протяжении равновесной эволюции (гипотеза Фесенкова (1949), Масевич (1956)). Наблюдательные данные здесь весьма скудные (обзор дан у Бербиджей (1962)) и не позволяют дать окончательный ответ.

Заведомо есть звезды, у которых наблюдается интенсивное истечение массы с поверхности. К числу таких звезд принадлежат так называемые звезды W — R (Вольф — Райе). Однако это, как правило, очень массивные звезды ($M \sim 10 M_{\odot}$); с уменьшением массы сброс поверхностных слоев, как показывают наблюдения, ослабевает (Бербиджи (1962), С. В. Рублев (1964)). Поэтому неясно, уменьшается ли с течением времени их масса ниже критического предела.

Другой тип звезд, интенсивно теряющих массу, — это звезды типа Be, с яркими линиями в спектре. Они быстро вращаются.

Потеря их массы оценивается в $10^{-6} — 10^{-10} M_{\odot}$ в год. Эти оценки весьма неустойчивы *).

Сильное истечение вещества наблюдается у звезд типа Р Лебеда. Сам сверхгигант **) Р Лебеда теряет $10^{-5} M_{\odot}$ в год на истечение вещества из оболочки (данные Пэйфиела, приведенные в обзоре Бербиджей (1962)).

Следует отметить, что перечисленные звезды являются характерными членами звездных ассоциаций и, несомненно, молоды (см. монографию под ред. А. А. Михайлова (1962)). Совершенно не известно, какую долю массы теряют они за счет истечения вещества в течение дальнейшей эволюции. Кроме того, астрономы наблюдают уже немолодые звезды с массой больше критической, которые в дальнейшей эволюции, по-видимому, не проходят перечисленные выше стадии Ве и Р Лебеда, Вольф — Райе и не могут потерять массу указанным способом. Следовательно, данные о молодых звездах не имеют определяющего значения в решении вопроса быть или не быть «застывшей» звезде.

Как отмечал еще Шайн (1943), условия выброса вещества из звезд наиболее благоприятны в эволюционной стадии красных гигантов, когда размеры оболочки велики, и ускорение силы тяжести на поверхности звезды мало. Наблюдения показывают, что истечение вещества в этой стадии все же на 1,5 порядка ниже того, которое необходимо для существенного уменьшения массы звезды (Рублев (1964)). Наконец, для так называемых вспыхивающих звезд типа UV Ceti, которые выбрасывают вещество дискретно (вспышка происходит в среднем раз в 1,5 суток), наблюдения дают совершенно ничтожную величину (Гершберг, 1964)

$$\frac{dM}{dt} \approx 2 \cdot 10^{-12} M_{\odot} \text{ в год.}$$

Однако на хорошо изученном примере трех белых карликов (см. табл. XX, первые три звезды), входящих в состав двойных систем, можно показать, что при некоторых условиях звезда все же, по-видимому, освобождалась от излишка массы и превращалась в белого карлика.

Как уже давно отмечалось в литературе, в двух случаях из трех, когда такие двойные системы изучены детально (см. табл. XX, первые три звезды), масса компонента, не

*) Заметим, что потеря массы вследствие излучения света не имеет никакого отношения к вопросу. По существу, нас интересует потеря барионов, а не массы.

**) Напомним, что термины «гигант» и «сверхгигант» в астрономии употребляются для характеристики большой светимости звезды.

являющегося белым карликом, больше, и этот компонент является звездой главной последовательности, т. е. не проэволюционировал далеко. Но звезда эволюционирует тем быстрее, чем больше ее масса (см. формулу (12.6.1)).

Так как обе звезды образовались одновременно *) (вероятность захвата ничтожно мала) и менее массивная уже превратилась в белого карлика, то главный компонент должен был бы закончить эволюцию. Однако этого нет. Из этого делают вывод о том, что второй компонент имел раньше большую массу, эволюционировал быстрее, а затем эту массу потерял.

Возможно, здесь некоторую роль может играть двойственность системы, хотя взаимная удаленность компонент сейчас очень велика. Другим объяснением (кроме потери массы) может быть разновременное образование компонентов в скоплении, где они возникли (см. сноску).

В работе Ауэра и Вольфа (1965) проанализировано большое число белых карликов (табл. XX).

Таблица XX

Двойные звезды, один компонент которых является белым карликом

Звезда	Абсолютная визуальная величина	Спектр	Масса M/M_{\odot}	Период обращения, годы
{ Сириус А	1,4	A1V	2,28	} 49,9
{ Сириус В	11,4	A5	0,98	
{ Процион А	2,6	F5IV—V	1,76	} 40,6
{ Процион В	13,1	—	0,65	
{ O ² Эридаана В	10,9	B9	0,45	} 247,9
{ O ² Эридаана С	12,5	M4	0,21	
L 745—46	18,7	M	0,02	10 ³
W 485	13,9	M6	0,07	7 · 10 ⁵
—37° 6571	5,5	G6V	1,0	3 · 10 ³
LDS 678	12,5	dM5	0,10	3 · 10 ³
LDS 235	6,8	dK3	0,60	10 ⁵
L 1405—40	12,4	dM2e	0,10	6 · 10 ⁴
LDS 455	10,2	K—M	0,20	2 · 10 ⁴
W 672	11,9	sdM6	0,15	5 · 10 ³
LDS 683	8,8	sdM1	0,35	10 ⁵
LDS 749	7,2	sdK4	0,50	2 · 10 ⁵
L 1512—34	11,2	dM5	0,20	10 ⁵

За исключением первых трех звезд приводятся данные только для компонент, не являющихся белыми карликами. Периоды

*) Правда, есть основание думать, что процесс образования звезд в скоплениях растягивается на промежутки порядка времени эволюции массивных звезд (см., например, А. Г. Масевич, Э. В. Коток (1963)).

обращения первых трех пар известны из наблюдений; остальные вычислены в предположении, что суммарная масса компонент равна $1 M_{\odot}$, а проекция видимого расстояния между компонентами равна большой полуоси орбиты. Массы первых трех звезд определены из наблюдений орбитального движения, массы компонент (не белых карликов) остальных оценены по эмпирической зависимости масса — светимость.

Если в двойной системе происходит потеря массы за время много меньше периода обращения, то при выполнении неравенства (Хуанг (1963))

$$\frac{\Delta M}{M} > \frac{r}{2a},$$

где r — расстояние, на котором происходит потеря массы, a — большая полуось орбиты, M — суммарная масса, двойная система перестает существовать, так как скорости компонент превышают параболическую*). Для круговой орбиты это отношение равно $1/2$. Массивная звезда должна потерять большую часть своей массы, чтобы превратиться в белый карлик. Ауэр и Вольф (1965) отмечают, что если предполагать первоначальную массу звезды, ставшей белым карликом, больше $1,5 M_{\odot}$, конечную массу белого карлика $0,5 M_{\odot}$ и если звезда второй компоненты из табл. XX имеет массу меньше $0,5 M_{\odot}$, то потеря массы системой будет больше половины первоначальной массы. Следовательно, потеря массы должна протекать за время не меньшее, чем период обращения, т. е. за $\tau > 10^4$ лет. Разумеется, эти рассуждения не столь убедительны, как в случае первых трех звезд, так как массы компонент, не являющихся белыми карликами, меньше чандрасекаровского предела.

Ауэр и Вольф (1965) показали, что наблюдения белых карликов в звездном скоплении Гиады свидетельствует о том, что превращение массивной ($M > 2,5 M_{\odot}$) звезды главной последовательности в белый карлик за счет потери массы происходит в основном не за счет истечения с экватора при вращении сжимающейся звезды.

В работах Г. С. Бисноватого-Когана и Я. Б. Зельдовича (1966) предложен механизм медленного гидродинамического истечения массы из звезды на поздних стадиях эволюции. Бисноватый-Коган (1967 b) показал, что этот механизм может привести к существенной потере массы в ходе эволюции звезд с $M \geq 15 M_{\odot}$.

*) Таким механизмом Блау объясняет происхождение некоторых быстро летящих звезд.

Обеспечивает ли подобное истечение всегда *) превращение массивной звезды в белый карлик? Ответ на этот вопрос может дать только подробный расчет и, конечно, наблюдения. Ауэр и Вольф указывают на возможную причину реальности такой ситуации.

Если потеря массы продолжается до тех пор, пока идет горение гелия или углерода в звезде, то прекращение потерь произойдет, когда масса уменьшится до $M < 0,5 M_{\odot}$ и перестанут протекать указанные ядерные реакции (см. § 4 гл. 10). В таком случае истечение массы автоматически будет уменьшать массу звезды ниже критического предела и концом эволюции явится белый карлик.

Еще одним свидетельством возможности превращения массивной звезды в белого карлика является присутствие белых карликов в звездных скоплениях. Так, в Гиадах открыто 12 белых карликов (см. Эгген и Гринстейн (1965)), причем возраст скопления таков, что закончить эволюцию могли лишь звезды с $M > 2 M_{\odot}$.

Правда, как отмечает Лейтен (1952), если бы все звезды Гиад с $M > 2 M_{\odot}$ превратились в белые карлики, то их полное число в Гиадах должно было бы быть ~ 23 . Хотя список открытых белых карликов в Гиадах, безусловно, не полон, все же их число в скоплении, вероятно, меньше предсказанного. Полной ясности в данном вопросе нет.

По данным наблюдений внегалактической астрономии отношение массы галактик к их светимости M/L различно у галактик разного типа (см., например, обзор Вокулера (1962)). Оно меняется от 100 (в солнечных единицах $M_{\odot}/L_{\odot} = 0,5 \text{ г} \cdot \text{сек/эрг}$) для эллиптических галактик до 10 у спиральных, к которым относится и наша Галактика, и до одного для неправильных. Большое значение отношения M/L для эллиптических галактик, а также данные об их спектре, свидетельствуют об отсутствии в них заметного числа молодых ярких звезд и о большом количестве несветящейся или слабо светящейся материи.

В этих галактиках обычно мало межзвездного диффузного вещества. Кроме того, если в галактиках, так же как в скоплениях нашей Галактики, относительно мало белых карликов (см. выше), то все это вместе взятое говорит в пользу наличия в далеко проэволюционировавших эллиптических галактиках трудно наблюдаемых звезд — нейтронных и застывших.

Обнаружение галактических рентгеновских источников привело к мысли интерпретировать их как нейтронные звезды. Но

*) Во всяком случае для звезд с $M < 20 M_{\odot}$, для которых окончание эволюции вспышкой сверхновой неприемлемо из сравнения с наблюдениями (см. начало параграфа).

затем Фридман (1964, 1965), воспользовавшись покрытием источника в Крабовидной туманности Луной, измерил его поперечник. Он оказался $\sim 10^{18}$ см. Следовательно, это заведомо не звезда. Можно предполагать, что весь непрерывный спектр электромагнитного излучения Крабовидной туманности имеет единую природу и объясняется синхротронным излучением релятивистских электронов в магнитном поле. Еще до проведения измерений Фридмана гипотезу о магнитнотормозной природе рентгеновского излучения от Краба развивали В. Л. Гинзбург и С. И. Сыроватский (1964). Казалось, что этим были похоронены надежды астрономов на то, что они, наконец, нашли нейтронные звезды. Однако И. С. Шкловский (1965а) обратил внимание на совокупность следующих фактов. Как известно, Крабовидная туманность есть остаток взрыва сверхновой. От нее мы получаем рентгеновские лучи, видимый свет и радиоизлучение. Еще два рентгеновских источника отождествлены со слабыми звездочками — возможно остатками вспыхнувших звезд. Другие галактические рентгеновские источники не отождествлены. Это обстоятельство, наряду с указанием американских наблюдателей на большую крутизну рентгеновского спектра источника в созвездии Скорпиона, делает маловероятной гипотезу синхротронной природы их излучения. По мнению Шкловского, излучение имеет скорее тепловую природу и возникает на поверхности нейтронных звезд, как и думали прежде. По этой гипотезе источник в Крабе является в смысле природы излучения «досадным исключением» *).

Еще одной особенностью рентгеновских источников, которую подчеркивает Шкловский, является их видимая концентрация к галактической плоскости. Из этого факта следует, что мы их видим на значительных расстояниях порядка размеров Галактики. Иными словами, мы видим во всяком случае значительную часть всех рентгеновских источников, существующих сейчас в Галактике. Таких источников известно астрономам ~ 20 , поэтому общее их число не больше ~ 100 (может быть, 10^3).

Сравним это число с ожидаемым числом нейтронных звезд, которые можно одновременно видеть в Галактике. Количество нейтронных звезд N_n , возникающих ежегодно в Галактике (если их образованию не препятствовали ядерные взрывы или другие

*) Отметим здесь, что совокупность процессов в Крабовидной туманности является пока нерешенной загадкой (см. Шкловский (1966)). Большое значение имеет открытие в 1965 г. весьма малого радиоисточника в Крабовидной туманности ($\sim 0,1''$), который на волнах 10—12 м дает треть общего излучения туманности. Может быть, это излучение как-то связано с остатком сверхновой. О рентгеновском излучении при аккреции на белый карлик см. Дополнение V.

причины), подсчитывается аналогично тому, как и ожидаемое число вспышек сверхновых (см. начало параграфа). Только в данном случае надо оценить число звезд, заканчивающих эволюцию в интервале масс $1,2-1,6 M_{\odot}$. Расчет дает величину того же порядка, что и для сверхновых: несколько штук в год.

В § 2 гл. 11 отмечалось, что нейтронная звезда после образования имеет $T > 5 \cdot 10^6$ примерно 100 лет. Таким образом, одновременно в Галактике можно видеть около 100 нейтронных звезд в качестве источников рентгеновских лучей. Это примерно совпадает с приведенной выше оценкой, полученной из наблюдений. Конечно, оценки охлаждения нейтронной звезды сильно зависят от нейтринных процессов, данные о которых ненадежны (см. § 21 гл. 11). Кроме того, аккреция вещества на поверхность нейтронной звезды и даже белого карлика (Камерон) может в течение длительного времени поддерживать рентгеновское излучение.

Добавим еще следующее. Рентгеновский источник в Крабовидной туманности есть последствия вспышки сверхновой, происшедшей тысячу лет назад. Следовательно, после вспышки сверхновой на ее месте действует рентгеновский источник в течение по крайней мере 10^3 лет, т. е. в десять раз дольше, чем ожидается для нейтронной звезды без аккреции. Так как частота вспышек сверхновых примерно в сто раз меньше ожидаемой частоты образования нейтронных звезд, то среди видимых источников часть должны быть протяженные — типа Краба, а остальные — нейтронные звезды или белые карлики с аккрецией вещества. Итак, мы видим, что наблюдения говорят о возможности существования нейтронных звезд.

Нейтронная звезда после образования достаточно быстро остынет и перестанет излучать, если только она не погружена в плотную диффузную среду, аккреция которой на поверхность может поддерживать излучение. См. Дополнение V. Источником вещества может быть другая близкая нормальная звезда, если нейтронная звезда входит в состав двойной системы.

И нейтронные и застывшие звезды составляют совокупность трудно наблюдаемых невидимых звезд. Как можно их обнаружить?

Вдали от застывшей или нейтронной звезды при $r \gg r_g$ поле тяготения точно такое же, как и до коллапса во время нормальной эволюции. Следовательно, в динамике звездных систем невидимые звезды проявляются точно так же, как и обычно. Поэтому в принципе невидимые звезды можно обнаружить следующим образом. По движению видимых звезд вычисляется масса системы, например, шарового звездного скопления. Затем определяется масса всех видимых звезд, газа и пыли. Раз-

ность первой и второй величин дает массу невидимой компоненты скопления. Заметим, что сюда войдет не только масса невидимых звезд, но и масса других труднонаблюдаемых форм материи Вселенной: нейтрино, гравитационные волны. Эти виды материи не сконцентрированы специально в галактиках и равномерно заполняют Метагалактику. Разумеется, для относительно небольших систем (звездных скоплений, галактик) масса нейтрино и гравитонов, даже при наибольшей возможной их плотности во Вселенной (см. Зельдович, Смородинский (1961)), пренебрежимо мала по сравнению с вероятной массой невидимых звезд, следовательно, эта поправка незначительна.

Оценим, какую долю от массы видимых звезд Галактики могут составлять невидимые звезды, если бы их образованию не мешали катастрофы и если не учитывать возможность потери массы. Для оценки, очевидно, надо поделить суммарную массу звезд с $M > 1,2 M_{\odot}$, возникших за все время существования Галактики, на массу звезд с $M < 1,2 M_{\odot}$. При этой оценке, поступая аналогично расчету (12.7.3), приходится предполагать, что темп звездообразования оставался неизменным за все время существования Галактики. Кроме того, следует учесть, что минимальная масса звезды, которая успевает за время существования Галактики образоваться из диффузной среды путем гравитационного сжатия, около $0,1 M_{\odot}$. Впрочем, результат изменится (уменьшится) всего в три раза, если взять минимальную массу $0,01 M_{\odot}$. Таким образом, искомое отношение с учетом (12.7.2) есть:

$$\frac{M_{\text{невидим}}}{M_{\text{видим}}} = \frac{\int_{1,2}^{\infty} M^{-1,4} dM}{\int_{0,1}^{1,2} M^{-1,4} dM} = 0,6.$$

Итак, невидимая масса может составлять существенную долю видимой. К сожалению, точность определения масс звездных систем и их видимых компонент пока недостаточна для обнаружения невидимых звезд подобным способом.

В работе О. Х. Гусейнова и Я. Б. Зельдовича (1966) указано на возможность обнаружения невидимых звезд в том случае, когда они входят в состав двойной системы и вторая звезда пары является видимой звездой. Астрономам давно известны пары визуально двойных и спектрально-двойных звезд с одной невидимой звездой. Обычно невидимость компонента объясняется аномально большой светимостью другой звезды или слабостью линий в спектре компонента (в случае спектрально-

двойных звезд). Однако, допустим, по движению видимого компонента, по его спектру и светимости удастся определить массу каждой звезды, и масса невидимой окажется больше массы видимой. Если бы невидимая была обычной звездой, видимой на главной последовательности, то при большей массе и светимость должна была бы быть больше. При условии, что указанные определения будут надежны, останется объяснить невидимость массивной звезды тем, что она «застывшая». Несмотря на трудность подобного анализа, следует обратить на него внимание, ибо обнаружение хотя бы одной застывшей или нейтронной звезды имеет огромное принципиальное значение. Конечно, такое открытие имело бы решающую доказательную силу существования релятивистских (т. е. нейтронных или застывших) звезд, в отличие от любых теоретических, статистических или других косвенных соображений.

ГЛАВА 13

КВАЗАРЫ

§ 1. Наблюдательные свойства квазаров

Открытие квазаров (Маартин Шмидт (1963)) было основным фактором, вызвавшим в последние годы огромный интерес к вопросам релятивистской астрофизики. Истории открытия этих объектов, их изучению, теориям их строения было посвящено много оригинальных и обзорных работ. Мы не станем здесь подробно останавливаться на описании всех работ и перечислении предложенных теорий квазаров. Интересующихся отсылаем к переведенному на русский язык обзору Гринстейна (1963) с добавлениями Л. М. Озерного (1964), а также к переводному сборнику под редакцией Ю. П. Псковского (1965), к трудам симпозиума № 29 МАС, к ежегодным сборникам трудов «техасских» симпозиумов и к наиболее полному обзору Е. М. Бербидж (1967). Там же см. и список литературы.

Общепринятой или даже просто достаточно убедительной теории квазаров сейчас нет. Нам кажется, что постепенно все же вырисовываются контуры такой теории. Ниже мы очень коротко напомним экспериментальные данные о квазарах и остановимся на некоторых попытках объяснения их природы, которые, на наш взгляд, являются наиболее перспективными.

Квазары в оптическом диапазоне наблюдаются как точечные объекты малой яркости (ярчайший, он же и ближайший квазар 3C 273 $\sim 13^m$), иногда (для ближайших из них) с диффузным выбросом или ореолом. С этими оптическими объектами отождествляются радиоисточники малого углового размера (обычно секунда дуги и меньше). Число открытых квазаров по данным на январь 1967 г. около 150, примерно у 100 из них проведено отождествление спектров и найдены красные смещения.

С квазарами весьма сходны открытые Сэндиджем (1965) так называемые квазизвездные галактики, которые во всем подобны квазарам, за исключением того, что у них не имеется сильного радиоизлучения. Число квазизвездных галактик, по видимому, в десятки раз больше, чем число квазаров.

Спектры квазаров содержат (в эмиссии) наряду с обычными запрещенные линии высокоионизованных элементов. Линии имеют ширину 10—50 Å и более. У некоторых квазаров есть в поглощении узкие резонансные линии. Подробнее см. Дополнение VI.

Линии в спектрах показывают сильное красное смещение: у ЗС 273 $z = \Delta\lambda/\lambda = 0,158$, у других z больше. Уже известны восемь источников с $z > 2$. Это смещение не может быть гравитационным *) уже потому, что максимальное возможное гравитационное смещение на поверхности стационарной звезды (см. § 5 гл. 10) $z \approx 0,4$ (или $z < 0,62$, по Бонди). Следовательно, красное смещение вызвано удалением объектов с огромными скоростями. Объекты внутри Галактики не могут только удаляться от нас, да еще соблюдая статистическую зависимость между видимой величиной и красным смещением. Поэтому следует считать, что смещение вызвано космологическим расширением Метагалактики, и квазары удалены от нас на огромные расстояния, которые можно определить по красному смещению. Зная расстояние и наблюдаемый поток на Земле, можно определить полный поток энергии от квазара. Этот поток с учетом инфракрасного излучения (Лоу и Джонсон (1965)) оказывается порядка 10^{47} эрг/сек, что на два порядка больше потока энергии от ярчайших галактик.

Сделав предположение о примерной стационарности плазмы объекта под действием сил излучения и тяготения в области, где образуется непрерывный спектр (линии излучения образуются дальше от ядра во внешней оболочке), и применив соображения о световом равновесии (§ 9 гл. 10), получаем оценку нижней границы массы квазара. Для потока $L \approx 3 \cdot 10^{47}$ эрг/сек от квазара ЗС 273 это дает $M = 3 \cdot 10^9 M_{\odot}$ (Зельдович, Новиков (1964с)). Анализ физических условий в оболочке сверхзвезды можно найти в работе И. С. Шкловского (1964), работах Гринстейна и Шмидта (1964, 1965) и работе Бербиджей, Хойла и Линдса (1966).

*) В январе 1967 г. Хойлом и Фаулером (1967) предложена модель квазара, в которой авторы пытаются объяснить большие z гравитационным красным смещением. По их модели квазар является компактной галактикой из нейтронных или застывших звезд с $M \approx 10^{12} \div 10^{13} M_{\odot}$ и $R \sim 10^{18} \div 10^{19}$ см. Галактика прозрачна для света. В центре имеется газовое облако, дающее линии излучения. В центре Галактики гравитационный потенциал много больше, чем на поверхности. Он, по мнению авторов гипотезы, вызывает красное смещение линий и может давать $z > 2$. Мы не имеем здесь возможности остановиться подробно на критике этой гипотезы и заметим только, что если равновесная эволюция Галактики идет по серии изотермических состояний, то, по-видимому, и в центре потенциал не может быть столь высок (см. § 12 гл. 11).

Первым удивительным свойством квазаров оказалась переменность их оптической яркости, открытая одновременно советскими (Шаров и Ефремов (1963)) и американскими астрономами (Смит и Хоффлейт (1963)). Многие из специально исследованных на переменность квазаров оказались переменными. Яркость квазаров меняется более или менее периодически с периодом в несколько лет, а иногда наблюдаются резкие изменения яркости (примерно на 60%) за неделю (см. Шмидт (1966), Озерной и Чертопруд (1966)). Это означает, что линейные размеры излучающей поверхности не более световой недели (!). Наблюдения показали изменения потока не только в непрерывном спектре, но, возможно, и в линиях (Бербиджи (1966)).

Наконец, анализ непрерывного спектра (а также наличие радиоизлучения) говорит в пользу магнитотормозной природы излучения (литературу см. в упомянутых выше работах). Вторым, не менее удивительным свойством квазаров является радиопеременность (Шоломицкий (1965)). Хотя другие наблюдатели не подтвердили выводов Шоломицкого о переменности СТА-102, но обнаружили переменность других объектов. Изменение радиояркости обладает рядом интересных особенностей. В частности, на разных длинах волн интенсивность меняется по-разному, иногда с производными разных знаков.

Изменение радиояркости показывает, что не только видимое излучение, но и радиоизлучение испускается из весьма малой области. Это в свою очередь накладывает ограничения на возможность объяснения радиоизлучения магнитотормозным механизмом, ибо в сравнительно плотной плазме наблюдалось бы явление реабсорбции излучения (см. В. И. Слыш, 1963). Вероятным механизмом излучения здесь может быть когерентное плазменное излучение (В. Л. Гинзбург, Л. М. Озерной (1965b)). Еще одной примечательной особенностью квазаров является то, что они не встречаются в скоплениях галактик, в то время как подавляющее большинство галактик входят в скопления. Это тем более удивительно ввиду того, что так называемые сейфертовские галактики, ядра которых напоминают квазары в уменьшенном масштабе, входят в состав скоплений так же, как и обычные галактики. О других особенностях см. Дополнение VI.

§ 2. Теория квазаров

Понимание природы квазаров связано прежде всего с выяснением источника энергии огромной мощности. Астрономы надеются, что этот же или аналогичный источник обеспечивает полный запас энергии в мощных радиогалактиках типа Лебедя А (10^{60} эрг) и он же вызывает взрывы ядер не-

которых галактик, на что особенно указывает В. А. Амбарцумян (1964).

В гл. 10 и 11 показано, что квазар не может быть сверхмассивной звездой без макроскопических движений вещества с ядерным источником энергии, как это первоначально предполагали Хойл и Фаулер (1963). Это предположение породило термин «сверхзвезда» — одно из многочисленных непривившихся названий квазаров. Не оправдались пока и другие попытки использования ядерной энергетике (см. об этом в примечаниях Озерного к обзору Гринстейна). Выше уже отмечалось, что максимальный возможный выход ядерной энергии $\sim 8 \cdot 10^{-3} mc^2$, в то время как выход гравитационной энергии в принципе может быть $\sim mc^2$. В 1961 г. В. Л. Гинзбург предложил в качестве источника энергии радиогалактик гравитационное сжатие газа. См. также И. С. Шкловский (1962). Необходимо только найти подходящий механизм для перевода кинетической энергии сжимающейся массы в другие виды энергии. Ранее были рассмотрены некоторые подобные механизмы. В случае сферического или почти сферического сжатия, как мы видели, благодаря эффекту самозамыкания выход энергии не может быть существенным. Механизм гравитационного излучения (Фаулер (1964), Шкловский, Кардашов (1964), Зельдович, Новиков (1964b)) также не может быть достаточным ввиду того, что гравитационные волны практически не взаимодействуют с веществом. Поэтому волны тяготения могут рассматриваться только как канал оттока энергии от системы. Возможно выделение достаточной энергии при аккреции вещества. Но, вероятно, существенную роль в явлении квазара играют вращение, турбулентность, стабилизирующие объект, и магнитные и магнитогидродинамические процессы. Мы рассмотрим соответствующие гипотезы ниже.

Возможна еще следующая точка зрения: квазары — это компактные галактики в процессе возникновения (см., например, работу Филда (1964)) или, наоборот, компактные галактики в процессе умирания — коллапса. О новейшей гипотезе такого рода см. Дополнение VI. О возникновении квазаров и, в частности, о возможности их возникновения из звездных систем см. § 6 гл. 19; модельная задача эволюции звездной системы рассмотрена в последнем параграфе гл. 11.

До открытия первичного космического излучения, доказывающего горячую космологическую модель (раздел 4), И. Д. Новиковым (1964b) и Нееманом (1965) была предложена для объяснения квазаров, а также, предположительно, взрывов в ядрах галактик, модель задержавшихся в космологическом расширении ядер. Однако, как показано в работе Я. Б. Зельдо-

вича и И. Д. Новикова (1966b) в горячей модели такая гипотеза, по-видимому, невозможна (см. § 2 гл. 20).

Наконец, упомянем еще попытку Хойла и Дж. Бербиджа (1966) избежать многочисленных трудностей в объяснении природы квазаров. Они предположили, что эти объекты находятся в непосредственной близости от нашей Галактики, очень малы, слабо светят и разлетаются с субсветовыми скоростями, будучи выброшены каким-то взрывом из ядра (или ядер) одной (или нескольких) активных галактик (локальная гипотеза). Как было остроумно замечено на Бюраканском симпозиуме в 1966 г., с этой точки зрения мощные радиогалактики и сейфертовские галактики также должны иметь локальную природу, так как в них мы сталкиваемся с теми же трудностями. Критику локальной теории можно найти в работе Сетти и Волтера (1966).

Излучение радиоволн квазарами является наиболее убедительным доказательством наличия магнитных полей и электронов высокой энергии, движущихся в этих полях. Своеобразная форма светящихся струй, выброшенных из ядра, также свидетельствует о важной роли магнитного поля.

Большой цикл исследований равновесия и эволюции массивных звезд без учета магнитного поля и макроскопических движений, в сущности, привел к негативным результатам. Подытожим изложенные выше результаты: сферически-симметричная массивная звезда без вращения и турбулентности теряет устойчивость при весьма малой плотности и скромной температуре в момент, когда гравитационный потенциал еще мал и ядерная энергия не успела выделиться. За потерей устойчивости следует коллапс, при котором гравитационная энергия выделяется, превращаясь в тепловую и кинетическую энергию вещества, но все эти формы энергии не проявляются наружу и оказываются погребенными в гравитационном поле звезды после ее самозамыкания. Учет вращения меняет эти выводы и позволяет объяснить выделение наблюдаемой энергии.

Рассмотрение задач с асимметричным движением приводит к выводу, что в подобных процессах может иметь место выделение достаточных количеств энергии в виде теплового излучения и кинетической энергии струй. Однако для построения истинной картины надо учесть магнитогидродинамические эффекты, ибо нельзя игнорировать прямые данные наблюдений о магнитных полях. Поэтому мы начнем с анализа возможной роли магнитного поля.

В работе В. Л. Гинзбурга и Л. М. Озерного (1964) рассматривалось магнитное поле коллапсирующей звезды; поле усиливается в ходе сжатия в соответствии с условием вмерзлости («приклеенности», как иногда выражаются) силовых ли-

ний. При этом соотношение между магнитной и гравитационной энергией на релятивистской стадии не изменяется:

$$M \sim \frac{1}{R^2}, \quad W_m \sim M^2 R^3 \sim \frac{1}{R}.$$

Авторы упомянутой работы подчеркивают, что магнитная энергия составляет малую часть полной энергии звезды и не влияет на динамику сжатия основной массы газа. Учет эффектов ОТО приводит к тому (см. § 6, гл. 12), что гравитационное самозамыкание сопровождается втягиванием магнитного поля звезды, прижимающегося к поверхности Шварцшильда. Внешнее магнитное поле при этом исчезает. В плазме, окружающей звезду, могут возникать сложные магнитогидродинамические явления.

В работе Н. С. Кардашова (1964) рассматривается механизм усиления магнитного поля, связанный со сжатием вращающегося облака плазмы. Относительное движение частей облака сопровождается запутыванием силовых линий магнитного поля и усилением поля. Кардашов полагает, что энергия поля может сравняться по порядку величины с гравитационной энергией облака. Далее рассматривается образование магнитогидродинамических волн в плазме при быстром сжатии тела. Вопросы магнитогидродинамических явлений и, в частности, объяснение периодических изменений яркости в рамках магнитотормозной теории излучения рассматриваются в работах Л. М. Озерного (1965а, 1966b).

Логическим завершением этой линии развития является идея, наиболее четко сформулированная Д. Лайзером (1965) и рассматриваемая в работах Л. М. Озерного (1966а). Квазар рассматривается как тело, в котором тяготение уравновешено в основном хаотическим, турбулентным магнитным полем.

Хорошо известно, что максвелловский тензор магнитного поля соответствует расталкиванию в направлениях, перпендикулярных к полю и стягиванию вдоль поля. Следовательно, хаотическое поле, в котором равномерно представлены все направления, в среднем создает расталкивание, соответствующее среднему давлению, равному $1/3$ плотности энергии. Характерное соотношение $\bar{p} = \epsilon/3$ имеет место в среднем для стационарного электромагнитного поля во всех случаях: и для совокупности электромагнитных волн в пустоте, т. е. для фотонного газа, и для хаотического магнитного поля в плазме, поддерживаемого токами, текущими в плазме.

Прежде чем идти дальше в конкретизации такой модели, выясним общие соотношения между массой звезды и силой тока, создающего магнитное поле H , необходимое для равновесия.

По порядку величины $GM^2/R = H^2 R^3$, $H = M\sqrt{G}/R^2$. Ток находим по уравнению $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} = 4\pi n e \frac{v}{c}$, где e — заряд электрона в электростатических единицах, n — концентрация электронов, v — средняя скорость электронов, создающих ток. Подставляем $|\text{rot } \mathbf{H}| \sim H/r$, где r — характерный масштаб; запишем $M = N m_p = n R^3 m_p$, где N — полное число нуклонов в звезде, m_p — масса протона. Получим

$$v = c \sqrt{\frac{R}{r}} \sqrt{\frac{G m_p^2}{e^2}}.$$

Итак, в выражение для v вошло характерное отношение гравитационного взаимодействия двух протонов к их электростатическому взаимодействию:

$$\frac{G m_p^2}{e^2} = 10^{-36}, \quad v = 10^{-18} c \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Именно благодаря тому, что гравитационное взаимодействие ничтожно по сравнению с электростатическим, достаточно ничтожного упорядоченного движения частиц одного знака относительно частиц другого знака, чтобы возникло расталкивание, уравновешивающее тяготение (ср. расчет на стр. 130).

Модель объекта не полна в двух отношениях: 1) с помощью магнитного поля трудно уравновесить тяготения не только в среднем, но и локально, в каждой точке.

Магнитная сила, действующая на элемент объема плазмы, равная $[\mathbf{H} \times \mathbf{j}] \sim [\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{H}]$, не является потенциальной. Сила тяготения $\rho \text{ grad } \varphi$, строго говоря, потенциальна лишь в том случае, если $\rho = \text{const}$ или $\rho = \rho(\varphi)$. Не ясно, можно ли добиться точного равенства двух сил в каждой точке при произвольном распределении плотности.

2) Тело в целом находится в состоянии безразличного равновесия, если нет других факторов, кроме тяготения и магнитного поля, поскольку магнитное поле имеет показатель адиабаты $\gamma = 4/3$ (по отношению к сжатию тела с сохранением подобия).

Эти трудности разрешаются, если принять вслед за Лайзером и Озерным, что наряду с магнитным полем имеется макроскопическое движение вещества типа турбулентности, кинетическая энергия вещества порядка магнитной энергии.

Турбулентное движение происходит с нерелятивистской скоростью, показатель адиабаты его $5/3$. Поэтому тело в целом имеет показатель адиабаты, средний между $4/3$ и $5/3$, и находится

в устойчивом равновесии. Таким образом, здесь предполагается тот же механизм стабилизации звезды, что и в § 17 гл. 11.

По мере диссипации энергии происходит медленное сжатие тела. Если бы не было диссипации, то при сжатии кинетическая энергия возросла бы сильнее, чем магнитная. Нарушенное равновесие восстанавливается превращением кинетической энергии в магнитную за счет дальнейшего запутывания и растяжения силовых линий магнитного поля. Объемные токи, создающие магнитное поле, могут оказываться неустойчивыми относительно пинч-эффекта, т. е. в отдельных участках плазма может сжиматься вследствие притяжения параллельных токов. При этом возникают электрические поля, приводящие к ускорению отдельных групп заряженных частиц: такие явления наблюдались и на опыте при разрядах в разреженной плазме. Рассматриваемое тело оказывается мощным источником космических лучей, причем энергия, набираемая частицей, оказывается пропорциональной заряду частицы (частицы движутся с одинаковой скоростью в данном электрическом поле).

Наконец, когда в ходе сжатия включаются эффекты ОТО, происходит коллапс, который согласно Лайзеру сопровождается выбросом части массы. При выбросе магнитные линии выпрямляются, выброшенное вещество состоит из отдельных струй или волокон, в которых плазма накрепко соединена с замороженным в нее магнитным полем, вытянутым вдоль волокна.

Работа Лайзера носит в значительной мере описательный характер, количественных оценок там мало и они ненадежны. Это не умаляет ее значения: основные ее утверждения, большая роль магнитного поля в общем балансе энергии *) и медленная эволюция почти равновесного состояния, рождение релятивистских частиц хорошо согласуются с общей картиной явлений в квазарах. Подробные расчеты сделаны в работе Л. М. Озерного (1966а).

Остается невыясненным вопрос о темпе эволюции и о пространственном масштабе магнитотурбулентности. Напомним, что основная теорема Бэйчелора о равенстве магнитной и кинетической энергии в турбулентной, хорошо проводящей жидкости, до сих пор не доказана. Не ясно, как быстро будет затухать турбулентность. Вероятно, диссипация энергии весьма сильна. Если это так и диссипация энергии происходит за время, не превышающее более, чем на три, четыре порядка оценок § 17 гл. 11 для диссипации без магнитного поля, то предложенная модель не может иметь места. Возможно, что

*) Этот момент, как упоминалось, содержался и в работе Кардашова (1964).

наибольшая часть энергии заключена в турбулентности самого большого пространственного масштаба.

В таком случае возможен и другой подход — рассмотрение стационарных упорядоченных полей и упорядоченных движений в поле тяжести. Один вариант соответствует конвекции с подъемом по экватору и спусканием по полюсам. Данные наблюдений и в особенности организованные выбросы одной или двух струй и правильный период колебаний яркости говорят скорее в пользу такого приближения. Другой возможный вариант представляет собой осесимметричное решение с тороидальным магнитным полем и вращением вещества вокруг оси; равновесное состояние соответствует минимуму энергии при данном распределении удельного момента импульса и магнитного потока по веществу. В состоянии минимума энергии при соблюдении условия вмерзновенности магнитного потока и сохранении момента угловая скорость различных струй может быть различна. Однако тот факт, что энергия минимальна, означает подавление турбулентности магнитным полем в этой ситуации, что приведет к увеличению длительности такого состояния.

Авторам книги представляется, что наиболее реальна все же гипотеза физической природы квазара, в которой этот объект рассматривается как горячая сверхзвезда, стабилизированная от потери устойчивости в основном вращением, т. е. картина, описанная в §§ 13—16 и 18 гл. 11. (О другой возможности см. Дополнение VI.) В самом деле, турбулентность, вероятно, быстро затухает, переходя в тепловую энергию, т. е. нагревая плазму. Поэтому если турбулентность не возбуждается, то она исчезает и не может стабилизировать звезду. Неизвестны механизмы возбуждения крупномасштабной турбулентности помимо дифференциального вращения. Но в этом случае основная энергия будет заключена во вращательном движении. Таким образом, в основе такой гипотезы должна лежать модель сверхмассивной звезды, стабилизированной вращением. Разумеется, турбулентность и магнитное поле тоже могут играть существенную роль. Особенно они важны для правильного понимания внешних проявлений квазара, его наблюдаемых свойств, что неоднократно подчеркивалось выше. Конечно, сделанные наброски теории весьма предварительны.

Как может возникнуть квазар, почему в одних случаях в Метагалактике возникают квазары, в других — галактики? Некоторые соображения об этом см. в § 6 гл. 19.

Космология

ГЛАВА 14

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Общее состояние космологической проблемы

Теория расширяющейся Вселенной *) является одним из важнейших завоеваний науки XX века. Идея эволюции Вселенной встречала возражения, основанные на предвзятых концепциях, однако итогом работы наблюдателей и теоретиков явилось подтверждение общей картины, развитой А. А. Фридманом (1922, 1924). Недавнее открытие общего равновесного космического излучения с $T=3^\circ$, предсказанного в рамках данной теории, явилось новым подтверждением правильности и плодотворности замечательных идей советского математика. Теория Фридмана получается в результате сочетания уравнений общей теории относительности с вполне определенными начальными условиями. Уравнения ОТО совместимы с широким классом начальных условий — распределения плотности, состава, энтропии, скорости вещества, а также метрики пространства (g_{ik} , \dot{g}_{ik}) — на гиперповерхности $t=\text{const}$ или подобной ей. Однако если заданные начальные условия не являются сингулярными, то наряду с вычислением будущего системы законным является и вопрос о ее прошлом. До настоящего времени вопрос о начальных условиях, которые можно непротиворечиво продолжить в прошлое, не решен.

Выбор сингулярных начальных условий (бесконечная плотность) является естественным выходом. В этом случае можно надеяться, что в сингулярной точке квантовые эффекты или

*) Мы употребляем общепринятый в космологической литературе термин «Вселенная» или «Мир» для обозначения окружающего нас мегамира, не останавливаясь на философском анализе различных смыслов, который вкладывается в это понятие в физической, астрономической и философской литературе. Такой анализ, очевидно, лежит вне рамок этой книги. Везде в дальнейшем речь идет о конкретных физических свойствах окружающего нас мегамира и о физико-математических моделях его.

какие-то другие факторы, не работающие в обычных условиях, решат или снимут вопрос о том, что было до сингулярной точки. Конечно, вопрос о начальном состоянии не может серьезно решаться только на основе подобных эвристических соображений. Ответ должен быть дан на основе анализа данных наблюдения о распределении и движении всех видов материи и на основе дальнейшего развития фундаментальных принципов физической теории. Решение этой проблемы — важнейшая задача космологии (см. об этом Дополнение X).

Если ограничиться самым грубым приближением, то, вероятно, можно считать, что в больших масштабах, содержащих много скоплений галактик, вещество распределено однородно и движение его изотропно. На таком предположении и основана теория Фридмана, которая является теорией однородной изотропной Вселенной. Важнейшим выводом этой теории является вывод о нестатичности решения, о неизбежности сжатия или расширения вещества. Этот вывод естествен, ибо при условии однородности и изотропности нет силы, уравнивающей тяготение (если принять $\Lambda=0$; о Λ -члене см. Дополнение VI). Поэтому относительное ускорение любых двух точек вещества всегда отлично от нуля. Вскоре после создания теории Фридмана, Хабблом было открыто красное смещение в спектрах галактик, пропорциональное расстоянию и доказывающее расширение Метагалактики, а тем самым и подтверждающее теорию Фридмана.

Теория расширяющейся или, лучше сказать, эволюционирующей Вселенной не является застывшей, не развивающейся. За последние годы возник целый ряд вопросов, подлежащих разработке наряду с классическими, известными раньше.

Среди «старых» вопросов важнейшим является определение средней плотности вещества. Согласно теории Фридмана оказывается, что геометрические свойства Мира как целого и эволюция его со временем существенно зависят от средней плотности вещества при заданной скорости расширения. При плотности, меньшей некоторой, однородный Мир бесконечен и будет неограниченно расширяться (открытая модель); при плотности, большей критической, мир замкнут, его объем конечен и тяготение тормозит расширение столь сильно, что в конце концов расширение сменяется сжатием (закрытая модель). Поэтому определение средней плотности вещества укажет выбор между закрытой и открытой моделью, включая, таким образом, предсказание далекого будущего (неограниченное расширение или смена расширения сжатием).

Найти среднюю плотность вещества можно, с одной стороны, определяя одну за другой плотность различных форм материи.

К ним принадлежат звезды, невидимые звезды в галактиках; атомный, молекулярный и ионизованный водород в галактиках (общую плотность этих форм материи можно определить, найдя массу галактик); электромагнитное излучение, нейтрино и гравитационные волны, т. е. формы материи, равномерно распределенные в межгалактическом пространстве и в галактиках; наконец, особенно трудный для обнаружения межгалактический газ, состоящий в основном из ионизованного водорода и гелия *).

Другой подход заключается в прямом определении кривизны пространства с помощью счета объектов, расположенных на расстоянии порядка $c/H \approx 3000 \text{ Mpc}$ (H — постоянная Хаббла, $H \approx 100 \text{ км/сек Mpc}$), где уже можно ожидать эффекты кривизны.

Открытие квазаров и квазизвездных галактик, в 100 раз более ярких по сравнению с наиболее яркими галактиками, резко расширило область, доступную исследованию. Были открыты объекты с огромным красным смещением вплоть до $\Delta\lambda/\lambda_0 \approx 2$, так что в этой области в ближайшее время ожидается большой прогресс. Нельзя недооценивать, однако, трудности этой программы: статистика квазаров (как и любых других объектов) дает достоверные сведения о кривизне пространства только тогда, когда теоретические представления предсказывают их эволюционное поведение. Мы сравниваем плотность квазаров в нашей окрестности в настоящее время и плотность далеких квазаров в отдаленном прошлом. Красное смещение $z = \Delta\lambda/\lambda_0 = 2$, к примеру, означает, что средняя плотность барионов в момент излучения света, видимого нами сегодня, в 27 раз превышала сегодняшнюю. Есть ли реальные основания считать плотность квазаров прямо пропорциональной плотности барионов или считать, что их яркость в среднем одинакова? Нельзя дать обоснованный ответ на этот вопрос, не зная, как рождаются и эволюционируют квазары.

Вопрос о сингулярном состоянии в прошлом также относится к числу «старых» вопросов. Он лежит уже в области чисто теоретической. Было ли до расширения сжатие? Была ли сингулярность?

Необходимость сингулярного состояния подвергалась оживленному обсуждению в последние годы (см. по этому поводу работы А. Л. Зельманова (1959, 1962)). Лифшиц, Халатников и Судаков (1961) считают, что в самом общем случае произвольного начального состояния уравнения ОТО не приводят в

*) Буквально нейтрино и гравитационные волны еще труднее для обнаружения при интересующей нас возможной плотности; однако теоретические соображения об эволюции позволяют связать плотность нейтрино и гравитонов с плотностью электромагнитного излучения и плотностью звезд.

процессе движения к сингулярности — к истинной физической особенности. С этой точки зрения сингулярность не обязательна и в прошлом; авторы подчеркивают, однако, что сингулярное состояние в прошлом возможно, так как начальное состояние не обязано быть «самым общим», «случайным».

В упомянутых работах никак не отражена количественная сторона, т. е. не дана оценка величины максимальной плотности сжатия и тех гравитационных потенциалов, которые создаются при рассматриваемом движении. Между тем общепринятое мнение, что уравнения ОТО при некоторых условиях с неизбежностью приводят к сингулярности, отражает опыт точных расчетов сферически-симметричной задачи. При приближении гравитационного потенциала к c^2 (т. е. при приближении радиуса тела к шварцшильдовскому гравитационному радиусу) сила тяготения неограниченно возрастает. Никакое хаотическое движение и никакое отталкивание частиц друг от друга не способны в этих условиях противостоять тяготению. Ни при каком уравнении состояния нет статических решений с массой, превышающей определенное критическое значение.

Отсюда и возникает естественная мысль, что нет решений общей задачи (нестационарной, несферически-симметричной), свободных от сингулярности при большой массе, имеющей размеры меньше $r_g = 2GM/c^2$. Такие решения без сингулярностей представляли бы собой что-то похожее на колебания вокруг равновесного состояния (или подобны движению по гиперболической орбите в поле сил, допускающем стационарные, круговые орбиты). Но равновесных состояний как раз и нет при большой массе. Дорошкевич, Зельдович и Новиков (1965) показали (см. § 5 гл. 4), что малые отклонения от сферичности не препятствуют гравитационному самозамыканию тела, т. е. его асимптотическому (с точки зрения внешнего наблюдения) приближению к поверхности Шварцшильда. Значительно дальше пошел Пенроз (1965), формально доказывавший, что после пересечения поверхности Шварцшильда (с точки зрения наблюдателя, движущегося с частицами тела) неизбежно следует достижение сингулярного состояния или изменение топологии пространства времени. Выводы работ Пенроза, с одной стороны, и Лифшица, Судакова и Халатникова, с другой, противоречат друг другу, и вопрос пока остается открытым. Мы считаем, что найденное Лифшицем, Судаковым и Халатниковым общее решение вблизи физически регулярной точки не означает невозможности истинной особенности в общем случае, и, следовательно, справедливы выводы Пенроза.

Однако доказательство необходимости сингулярного состояния ни в какой мере не исчерпывает вопрос о характеристике

этого состояния. Даже если ограничиться однородными состояниями (т. е. такими, в которых судьба всех различных частиц строго одинакова), то решения Фридмана представляют собой лишь наиболее простой случай, отличающийся изотропностью — равноценностью всех направлений. Существует и более широкий класс решений, однородных, но анизотропных; эти решения исследованы Гекманом и Шюкинггом (1955, 1956), Шюкинггом и Гекманом (1958), Райчаудхури (1955), Гёделем (1949), Зельмановым (1959b), Петровым (1961, 1966), Грищуком (1967) и другими.

В частности, среди анизотропных решений имеются решения с существующим с самого начала магнитным полем; очевидно, что такое поле выделяет определенное направление и не совместимо с равноценностью всех направлений в решении Фридмана.

Исследования показали, что при выполнении определенных условий анизотропные решения с течением времени становятся изотропными, стремятся к решению Фридмана. Такой вариант анизотропного решения (в частности, и с магнитным полем) с уменьшающейся анизотропией не противоречит наблюдательным данным.

В принципе возможен и отказ от предположения об однородности в сингулярном состоянии. В частности, выдвигалось предположение, что расширение отдельных частей вещества задерживается и воспринимается внешним наблюдателем как вспышка квазара или ядра галактики. Такую гипотезу высказали Новиков (1964b) и Нееман (1965). Несмотря на интерес, который представляют такие попытки, их никак нельзя считать доказанными или единственно возможными объяснениями данных наблюдений. Сколько-нибудь общего рассмотрения физических следствий из всех возможных типов неоднородных сингулярных решений до настоящего времени нет. Анализ движения вещества вблизи сингулярного состояния дан в работах Лифшица и Халатникова (1961a, b). На первый взгляд, во всяком случае, произвол в неоднородных решениях пугающе велик. Поэтому ниже прежде всего будет рассматриваться именно однородное решение; далее будет намечен путь теоретического исследования возникновения неоднородностей на фоне эволюции решения, однородного в сингулярном состоянии. Анализ такого простейшего решения позволит выяснить многие особенности, прежде чем переходить к более сложным ситуациям.

Третий круг вопросов, разрабатываемых в рамках теории Фридмана (или, лучше сказать, в связи с теорией сингулярного состояния), связан с физической характеристикой вещества в сингулярном состоянии. Задание $\rho \rightarrow \infty$ не является исчер-

пывающим для характеристики состояния. Для конкретного рассмотрения эволюции нужно задать в начальном состоянии удельную (на один барион) энтропию и удельный лептонный заряд вещества.

Гамов (1946, 1949) первым выдвинул предположение о большой начальной энтропии вещества *). Это предположение получило краткое название «горячая модель Вселенной». Может быть, стоит здесь же отметить, что предположение о высокой температуре или, точнее, о большой энтропии вещества не имеет отношения к объяснению самого факта расширения Вселенной. В предположении однородности вещества однородное давление, не зависящее от пространственных координат, не создает силы. Расширение в горячей модели зависит от предположения о начальном распределении скорости в сингулярном состоянии точно так же, как и в любых других предположениях об энтропии и зарядах.

Вместе с Альфером и Германом (1948, 1950, 1953), Гамов исследовал ядерные реакции, протекающие в ходе расширения горячего вещества. Эти расчеты уточняли затем Ферми и Туркевич (работа осталась неопубликованной), Хайаши (1950), Смирнов (1964), Хойл и Тайлер (1964), Вагонер, Фаулер, Хойл (1966), Дорошкевич, Сюняев. Сопоставляя расчетный состав с данными о составе туманностей, Хойл и Тайлер отмечают хорошее согласие для содержания гелия. Это согласие имеет смысл только в том случае, если рассматриваемый газ не подвергался изменениям за счет выброса продуктов нуклеосинтеза в звездах. Судить об этом можно будет после определения количества более тяжелых элементов в газе; к тому же надо определить из теории эволюции звезд состав газа, выбрасываемого в ходе эволюции.

Согласно горячей модели на ранних этапах расширения температура вещества велика и плотность электромагнитного излучения в равновесии гораздо больше плотности обычного вещества. В ходе расширения температура падает как R^{-1} , где R — масштабный фактор, т. е. расстояние между любой фиксированной парой точек расширяющегося вещества. Плотность энергии излучения падает как R^{-4} , а плотность обычного вещества как R^{-3} . Удельная энтропия вещества есть сохраняющаяся величина.

В горячей модели теплоемкость излучения остается все время во много раз больше теплоемкости вещества вплоть до на-

*) При большой энтропии значение лептонного заряда (если его значение, отнесенное к одному бариону, порядка 1) не играет роли.

стоящего времени. Поэтому предсказываемое теорией равновесное излучение не может поглотиться веществом и должно сейчас наблюдаться. На возможность выбора между «горячей» и холодной моделью путем радионаблюдений на сантиметровых волнах было указано в работе Дорошкевича и Новикова (1964), которая, однако, осталась незамеченной наблюдателями.

Как уже упоминалось, в 1965 г. было открыто изотропное равновесное излучение («фон») с $T=3^\circ$ (Пензиас и Вилсон (1965)). Космологическое истолкование этих наблюдений было дано Дикке, Пиблсом, Роллом, Вилкинсоном (1965). Измерения теперь проведены радиометодами (данные на август 1967) на λ см 73; 41; 21,1; 20,7; 7,35; 3,2; 1,5; 0,95; 0,82. Изучение оптического спектра радикала циана (CN) также подтверждает наличие излучения с $T=3^\circ$ на длине волны $\lambda=0,26$ см. Любопытно, что как необъясненный парадокс измерения, относящийся к CN, был известен еще в сороковые годы (Мак-Келлар (1941)). Спектральная плотность излучения фона в сантиметровом диапазоне в 10^4 — 10^6 раз больше того, что можно ожидать от известных источников — звезд, радиогалактик, диффузной среды. Интегральная плотность энергии фона примерно в 100 раз больше интегральной плотности известных источников.

Открытие фона с $T=3^\circ$ К доказывает правильность горячей космологической модели. О степени надежности этих доказательств см. § 1 гл. 18.

Наконец, четвертый круг вопросов связан с проблемой образования в расширяющейся модели галактик, скоплений галактик, квазаров. Все эти вопросы находятся еще в зачаточном состоянии.

Важнейшей, интереснейшей проблемой современной космологии является проблема эпохи до начала наблюдаемого сейчас космологического расширения и связанная с ней проблема начальных условий для расширения. Что было раньше десяти миллиардов лет назад, когда началось расширение? Можно ли так ставить вопрос? Было ли вещество раньше, до состояния большой плотности, в разреженном состоянии, и если да, то каково это состояние? Чем объясняется высокое значение удельной энтропии Вселенной? Наконец, почему Вселенная зарядово несимметрична (есть только частицы, но не античастицы)? Все эти вопросы тесно переплетаются, и над их решением только начинают работать. О Λ -члене в уравнениях тяготения см. Дополнение II.

Нижеследующий материал представляет собой изложение как классических основ космологии, так и перечисленных выше новых и новейших проблем. В некоторой части (особенно в «классической» части) изложенный материал перекрывается

с многочисленными обзорами по космологии (см., например, Бонди (1961), Мак-Витти (1962), Зельдович (1965), Сэндидж — в сборнике под ред. Псковского (1965)). Это, очевидно, неизбежно. Особенно подробно обсуждаются вопросы, стоящие перед современной космологией, затронутые в этом введении.

Авторы не ставили своей целью дать здесь обзор и анализ всех данных наблюдений по космологии, отчасти имея в виду прекрасный сборник «Наблюдательные основы космологии», 1965 (ред. Псковский), отчасти потому, что это является самостоятельной проблемой, не вмещающейся в рамки данной книги. Обращение к данным наблюдений в изложении делается по мере необходимости и носит эпизодический характер.

ГЛАВА 15

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

§ 1. Локальный закон распределения скорости

Напомним «классические» основы космологии. Будем рассматривать однородную и изотропную космологическую модель. Ниже мы покажем, что если в некоторый момент распределение и движение материи однородно и изотропно, то это свойство сохранится и в течение всей эволюции. Кроме того, из свойства однородности следует, что достаточно проследить судьбу одного элемента объема вещества, ибо судьба всех остальных в точности такая же. Рассматриваемое решение является частным случаем сферически-симметричного решения, причем за центр можно выбрать любую точку. В § 13 гл. 3 показано, что в сферическом случае вещество вне любой сферы R_0 не создает гравитационного поля внутри этой сферы. Следовательно, если мы выделим достаточно малый шар R_0 , то поле тяготения, создаваемого его массой, будет слабо (внешние массы несущественны), скорости относительных движений также малы и можно пользоваться в этой области ньютоновской теорией, не обращаясь к ОТО.

Мы воспользуемся этим наглядным способом (Мак-Кри, Милн (1934)) для вывода формул эволюции модели. Разумеется, когда мы от локальных свойств перейдем к изучению геометрии больших областей, необходимо будет вернуться к ОТО.

Итак, пользуемся в малой области ньютоновской теорией, локально являющейся точной. Разумеется, те же формулы можно было бы получить прямо из уравнений ОТО, как это обычно и делается. Однако их смысл и ясность при таком способе вывода были бы не столь очевидны.

Движение вещества будем рассматривать в системе координат, выбранной так, что в начале координат (0) вещество покоится. В этой системе координат вещество, находящееся на некотором расстоянии от начала, движется. Пусть скорость

движения положительна, т. е. направлена от начала координат и пропорциональна расстоянию. В векторной форме такой закон распределения скорости записывается

$$\mathbf{u} = H\mathbf{r}, \quad (15.1.1)$$

причем $H > 0$. H называется «постоянная Хаббла». Название «постоянная» указывает на независимость H от величины и направления вектора \mathbf{r} ; однако H зависит от времени; эта зависимость будет подробно рассмотрена в § 2. Очевидно, что указанное распределение скоростей изотропно: для наблюдателя, находящегося в начале координат, никакое направление не является выделенным. В произвольной точке A , радиус-вектор которой \mathbf{r}_A , вещество движется со скоростью \mathbf{u}_A , и казалось бы, изотропия нарушена.

Перейдем в систему координат с началом в точке A , движущимся со скоростью \mathbf{u}_A , т. е. произведем перенос начала координат и галилеев переход к движущейся системе. Величины, измеренные в новой системе, отметим штрихом. Очевидно, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$. Тогда

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{u}_A = H\mathbf{r} - H\mathbf{r}_A = H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = H\mathbf{r}'. \quad (15.1.2)$$

Следовательно, в новой системе имеет место тот же закон распределения скоростей \mathbf{u}' в зависимости от \mathbf{r}' , что и в старой для зависимости \mathbf{u} от \mathbf{r} . Распределение скоростей (15.1.1) замечательно именно тем, что оно не выделяет никакой особой точки. Только такое распределение скоростей изотропно и однородно. Наблюдатель, движущийся вместе с веществом, в любой точке видит картину удаления от него всех окружающих его частиц.

Закон расширения (15.1.1) можно сформулировать, не пользуясь координатными системами, так *): расстояние между любой парой материальных точек A и B изменяется со временем по закону $\frac{dr_{AB}}{dt} = Hr_{AB}$, откуда

$$r_{AB}(t) = r_{AB}(t_0) \exp \int_{t_0}^t H(t) dt. \quad (15.1.3)$$

Рассмотрим закон изменения плотности. Возьмем шар, содержащий определенную массу M ; радиус его обозначим

*) В работе А. Л. Зельманова (1948) систематически рассматривается возможность характеризовать движение среды деформациями, т. е. по изменению расстояний между соседними частицами.

$R=R(t)$. Плотность вещества $\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$, откуда

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{3M}{\frac{4\pi}{3} R^4} \cdot \frac{dR}{dt}.$$

Подставим в последнюю формулу $\frac{dR}{dt} = u = HR$; получим

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho H. \quad (15.1.4)$$

То же уравнение более формально можно получить из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}).$$

Предположим, что ρ не зависит от координат, т. е. $\rho = \rho(t)$; подставим \mathbf{u} по формуле (15.1.1):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(H\mathbf{r}) = 3H,$$

откуда снова

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -3H\rho. \quad (15.1.4')$$

Итак, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ не зависит от координат. Следовательно, если в какой-то момент ρ не зависело от координат, то при законе расширения (15.1.1) во все последующие и предыдущие моменты ρ также не зависит от координат*), хотя и меняется с течением времени, $\rho = \rho(t)$. Таким образом, однородность, заданная в начальный момент, сохраняется всегда.

То же следует и для свойств изотропии. В самом деле, возьмем в выделенном шаре любую точку. В начальный момент относительные скорости для любой точки распределены изотропно. Далее, ускорения направлены к центру шара и при равномерном распределении вещества пропорциональны расстоянию от центра. Ускорения можно изображать просто радиусом-вектором, умноженным на одну и ту же константу. Но отсюда следует, что относительные ускорения для любой точки тоже изотропны — они будут изображаться векторами, соединяющими данную точку с любой другой. Итак, в начальный момент и скорости и ускорения изотропны. Следовательно, изотропны скорости и в следующий момент, т. е. всегда $\mathbf{u} = H\mathbf{r}$, хотя величина H и зависит от времени.

*) В частности, по этой причине $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$.

§ 2. Закон эволюции. Критическая плотность

Рассмотрим снова шар, содержащий массу M , и найдем ускорение частицы, находящейся на поверхности шара. На частицу действует сила притяжения со стороны M

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}. \quad (15.2.1)$$

Подставим в (15.2.1)

$$u = \frac{dR}{dt} = HR, \quad M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d(HR)}{dt} &= R \frac{dH}{dt} + H \frac{dR}{dt} = R \frac{dH}{dt} + RH^2 = -\frac{4\pi}{3} G\rho R, \\ \frac{dH}{dt} &= -H^2 - \frac{4\pi}{3} G\rho. \end{aligned} \quad (15.2.2)$$

Уравнения (15.1.4) и (15.2.2) образуют систему, полностью определяющую изменение со временем (и для прошлого, и для будущего) всех локальных свойств Вселенной. Как и следовало ожидать, в эти уравнения не входит радиус R произвольно выделенной массы M .

Для того чтобы представить наглядно общий характер решения, удобно и дальше пользоваться величинами R и M .

Уравнение движения (15.2.1) можно один раз проинтегрировать, умножая на $\frac{dR}{dt}$; получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = \text{const.} \quad (15.2.3)$$

Это уравнение имеет вид закона сохранения энергии: первый член слева — кинетическая энергия единицы массы, второй член слева (отрицательный) — его потенциальная энергия; константа справа — есть полная энергия.

Будем считать известным значение H_0 и ρ_0 в момент t_0 и зададимся R_0 ; при этом $M = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \rho_0$. Мы знаем также значение $\left(\frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0} = H_0 R_0$ в момент t_0 . Таким образом можно определить значение константы в правой части (15.2.3). Получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0}^2 - G \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_0 R_0^3}{R_0} = \frac{1}{2} H_0^2 R_0^2 - G \frac{4\pi \rho_0 R_0^2}{3}.$$

Итак, из (15.2.3) следует

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{G\rho_0 R_0^3}{R} - \frac{8\pi}{3} G R_0^3 \left(\rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G}\right). \quad (15.2.4)$$

Легко представить себе общий характер решения. В настоящее время $\frac{dR}{dt}$ положительно. Следовательно, в прошлом R было меньше, а значит, $\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3R}$ было больше, чем в настоящее время. Следовательно, в прошлом $\frac{dR}{dt}$ обязательно было больше, чем в настоящее время; был момент

$$R=0, \quad \frac{dR}{dt} = +\infty.$$

Предсказание для будущего зависит от знака скобки $(\rho_0 - 3H_0^2/8\pi G)$ во втором члене.

Обозначим

$$\frac{3}{8\pi} \frac{H_0^2}{G} = \rho_c. \quad (15.2.5)$$

Если $\rho_0 > \rho_c$, скобка положительна. Значит, по мере увеличения R будет достигнуто такое значение, когда вся правая часть

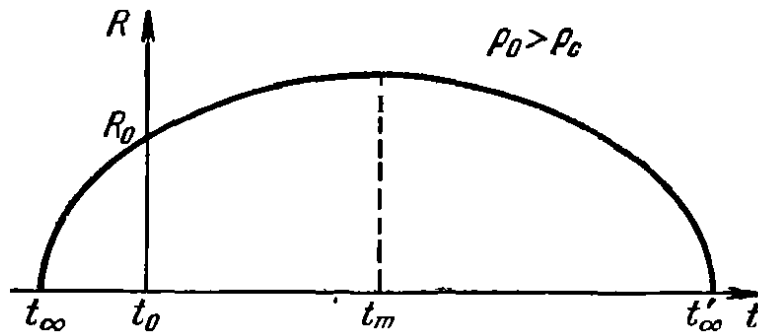


Рис. 69. Изменение со временем расстояния R между двумя точками, когда плотность ρ_0 больше, чем критическая плотность ρ_c . t_0 — сегодняшний момент, t_∞ и t'_∞ — моменты бесконечной плотности, t_m — момент максимального расширения.

обратится в нуль. В этот момент расширение прекратится и сменится сжатием (рис. 69).

Если $\rho_0 < \rho_c$, то расширение будет продолжаться неограниченно; в пределе при $t \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G R_0^2 (\rho_c - \rho_0)} = \text{const},$$

Соответствующая кривая показана на рис. 70. Как уже отмечалось, расстояние между любой парой объектов меняется пропорционально R , т. е. проходит через максимум в случае рис. 69 и неограниченно увеличивается в случае рис. 70.

Вероятное значение постоянной Хаббла по современным данным 100 км/сек Мпс . В абсолютных единицах $H_0 = 3 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$.

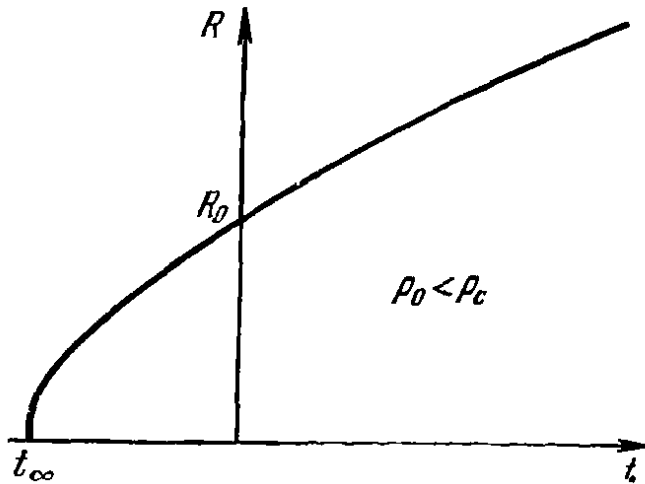


Рис. 70. Изменение со временем расстояния между двумя точками, когда плотность ρ_0 меньше, чем критическая плотность ρ_c .

Соответствующее значение критической плотности $\rho_c = 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$. По оценке Оорта, фактическое значение $\rho_0 \approx 5 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$. Эта оценка сделана в тех же предположениях о шкале расстояний, которые дали указанное выше значение H_0 , и относится только к массам галактик (не учитывается масса межгалактического вещества).

Из сопоставления следует, что $\rho_0/\rho_c \sim 1/30$, т. е. в действительности, вероятно, осуществляется случай рис. 70. Не исключено, однако, что в дей-

ствительности плотность вещества больше, в частности, за счет межгалактического ионизованного водорода или нейтрино *) или за счет коллапсировавших звезд.

Поэтому представляет интерес исследование решения при различных ρ_0 , в том числе при ρ_0 , существенно превышающих значение, данное Оортом.

§ 3. Продолжительность расширения

Найдем момент t_∞ в прошлом, когда $R=0$, т. е. когда плотность вещества была бесконечной. Если бы скорость расширения была постоянной и равной современному значению, то можно было бы написать

$$R_0 = \left(\frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0} (t_0 - t_\infty) = H_0 R_0 (t_0 - t_\infty). \quad (15.3.1)$$

Для «возраста» однородной модели Вселенной T , т. е. для времени, протекшего от t_∞ до настоящего момента t_0 , мы получили

*) Наиболее вероятное значение средней плотности нейтрино, $\rho = 10^{-34} \text{ г/см}^3$, следует из теории «горячей Вселенной». Но, конечно, только прямой эксперимент обладает полной доказательной силой.

бы (при $H_0 = 100$ км/сек Мпс)

$$T = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} = 3 \cdot 10^{17} \text{ сек} \cong 10^{10} \text{ лет.}$$

Как видно из уравнения (15.2.3) и рис. 69 и 70, в прошлом $\frac{dR}{dt}$ было больше, чем в настоящее время. В действительности, как нетрудно получить из формул предыдущего параграфа,

$$T = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} f\left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right) = \frac{1}{H_0} f(\Omega), \quad (15.3.2)$$

где мы обозначили $\Omega = \rho_0/\rho_c$. Аналитический вид функции $f(\Omega)$ дан в приложении. График f дан*) на рис. 71.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 3

Сокращение времени эволюции по сравнению с равномерным движением зависит от плотности. Характеризующая эту зависимость функция f такова, что $f \leq 1$, причем при $\rho_0 = 0$, $\Omega = 0$, $f(0) = 1$. В общем случае, при произвольном Ω функция f дается формулами, которые имеют различный вид при $\Omega > 1$ и при $\Omega < 1$. В первом случае

$$f = \frac{\Omega}{(\Omega - 1)^{3/2}} \left[\operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{\Omega - 1}{\Omega}} - \frac{1}{\Omega} \sqrt{\Omega - 1} \right]. \quad (15.3.1a)$$

При этом легко проверить, что при $\Omega \rightarrow 1$, $f \rightarrow 2/3$; при $\Omega \gg 1$ $f \rightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{\Omega}}$, так что $f \rightarrow 0$ при $\Omega \rightarrow \infty$. При малой плотности $\Omega < 1$

$$f = \frac{\Omega}{(1 - \Omega)^{3/2}} \left[-\operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1 - \Omega}{\Omega}} + \frac{1}{\Omega} \sqrt{-\Omega + 1} \right]. \quad (15.3.2a)$$

Эта формула, естественно, также дает в пределе $\Omega \rightarrow 1$, $f \rightarrow 2/3$, так что f (1) не зависит от того, с какой стороны мы подходим к $\Omega = 1$; f не терпит разрыва или излома, несмотря на различный аналитический вид (15.3.1) и (15.3.2). При $\Omega \ll 1$ асимптотически (см. ниже (15.4.8))

$$f = 1 - \frac{\Omega}{2} \cdot \ln \frac{1}{\Omega}, \quad f \rightarrow 1 \text{ при } \Omega \rightarrow 0. \quad (15.3.3a)$$

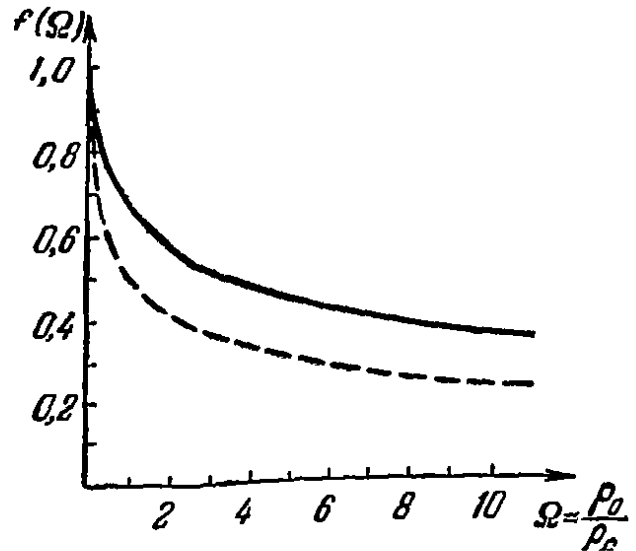


Рис. 71. Безразмерный возраст мира (отнесенный к обратной константе Хаббла $1/H$) как функция безразмерной плотности, отнесенной к критической плотности. Сплошная линия — мир, заполненный материей с уравнением состояния $P = 0$; пунктирная — мир, заполненный веществом с $P = \epsilon/3$.

*) Пунктиром показана кривая для случая, когда главную часть вещества составляют кванты и нейтрино; см. § 7.

В случае $\Omega > 1$ представляет интерес также время достижения максимума плотности $t_m - t_0$, а также время до полного сжатия $t'_\infty - t_0$ (см. рис. 69). Можно показать, что

$$t_m - t_0 = \frac{1}{H_0} f_m(\Omega), \quad (t'_\infty - t_0) = \frac{1}{H_0} f'(\Omega), \quad (15.3.4п)$$

где

$$f_m(\Omega) = \frac{\Omega}{(\Omega - 1)^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{\Omega - 1}}{\Omega} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{\Omega - 1}{\Omega}} \right]. \quad (15.3.5п)$$

Далее,

$$f'(\Omega) = f + 2f_m = \frac{\Omega}{(\Omega - 1)^{3/2}} \left[\pi + \frac{\sqrt{\Omega - 1}}{\Omega} - \arcsin \sqrt{\frac{\Omega - 1}{\Omega}} \right]. \quad (15.3.6п)$$

Функция f_m изображена на рис. 72. Плотность проходит через максимум и затем обращается в бесконечность лишь в случае $\Omega > 1$. Соответственно и

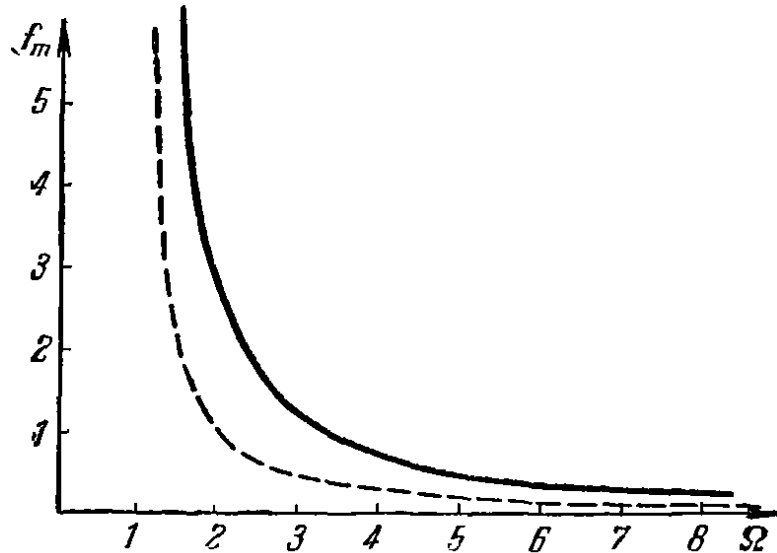


Рис. 72. Безразмерное время, необходимое для достижения максимума радиуса, как функция плотности. Сплошная линия — $P = 0$, пунктирная — $P = \epsilon$.

формулы (15.3.7) и (15.3.8) определены лишь для $\Omega > 1$: при Ω , приближающемся к единице, f_m и f' уходят в бесконечность пропорционально $1/(\Omega - 1)^{3/2}$.

§ 4. Два частных решения. Начальная стадия

Частное решение в случае $\rho_0 = \rho_c$ имеет особенно простой вид. Уравнение (15.2.4) в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{G\rho_0 R_0^3}{R}.$$

Решение этого уравнения с учетом (15.2.5) дает

$$R = R_0 \left(\frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} \right)^{2/3}, \quad (15.4.1)$$

$$t_0 - t_\infty = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}, \quad (15.4.2)$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G (t - t_\infty)^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{(t - t_\infty)^2}, \quad (15.4.3)$$

где время дано в *сек*, плотность в $г/см^3$. В уравнении (15.2.4) при $\rho_0 = \rho_c$ исчезает второй член. Но при любом $\rho_0 \neq \rho_c$ в настоящее время надо иметь в виду, что в прошлом, вблизи t_∞ , был период, когда R было достаточно мало, а следовательно, можно было пренебречь константой — вторым членом в (15.2.4) по сравнению с первым членом, пропорциональным $1/R$. Поэтому выражение плотности (15.4.3) является универсальным для начальной стадии, независимо от сегодняшнего отношения ρ_0/ρ_c .

Второй частный случай решения — случай исчезающе малой плотности, $\rho_0 \ll \rho_c$. В этом случае, пренебрегая членами с ρ_0 , получим

$$\frac{dR}{dt} = H_0 R_0 = \text{const.} \quad (15.4.4)$$

При этом

$$R = R_0 + H_0 R_0 (t - t_0). \quad (15.4.5)$$

В этом приближении

$$t_\infty = t_0 - \frac{1}{H_0}, \quad R = H_0 (t - t_\infty), \quad H = H(t) = \frac{1}{(t - t_\infty)} = \frac{H_0}{1 + H_0 (t - t_0)}, \quad (15.4.6)$$

и для плотности найдем

$$\rho(t) = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3} = \rho_0 \left(\frac{t_0 - t_\infty}{t - t_\infty} \right)^3. \quad (15.4.6a)$$

Сравним плотность в прошлом, $\rho(t)$ при $t < t_0$, с критической плотностью в прошлом $\rho'_c(t)$, т. е. с величиной *)

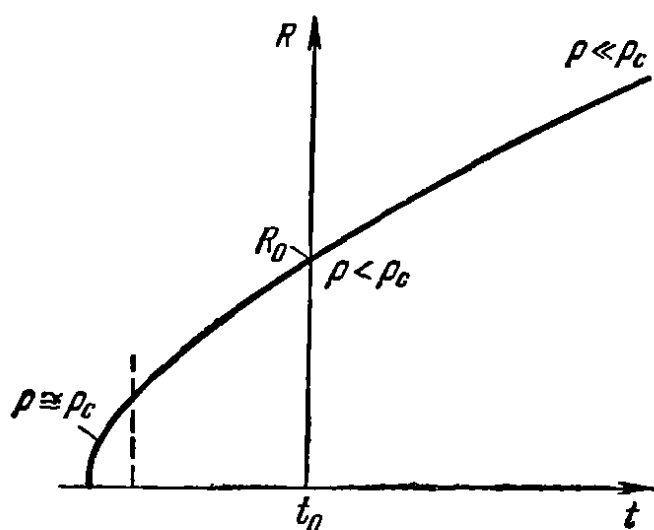
$$\rho'_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} = \rho_c \frac{H^2}{H_0^2} = \rho_c \left(\frac{t_0 - t_\infty}{t - t_\infty} \right)^2.$$

При малых $t - t_\infty \ll t_0 - t_\infty$ плотность $\rho(t)$ растет быстрее, чем $\rho'_c(t)$. Поэтому при любом малом (но конечном) сегодняшнем

*) Раньше под ρ_c мы везде понимали сегодняшнее значение, вычисленное по H_0 в момент $t = t_0$; то же относится и к дальнейшему тексту.

ρ_0 в прошлом был период, когда плотность была близка к критической плотности ρ'_c , вычисленной по мгновенному значению $H=H(t)$.

В целом решение состоит из двух частей (см. рис. 73):



$$\rho = \frac{1}{6\pi G (t - t_\infty)^2} \quad \text{при } \rho > \frac{\rho_c^3}{\rho_0^2},$$

$$t - t_\infty < \frac{2\Omega}{3H_0}, \quad (15.4.7a)$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{t_0 - t_\infty}{t - t_\infty} \right)^3 \quad \text{при } \rho < \frac{\rho_c^3}{\rho_0^2},$$

$$t - t_\infty > \frac{2\Omega}{3H_0}, \quad (15.4.7b)$$

Рис. 73. Расширение при плотности меньше критической. Левее пунктирной линии интервал времени, когда плотность близка к критической; с течением времени в ходе расширения плотность становится много меньше критической, в будущем $\rho \ll \rho_c$.

а t_∞ в этом случае дается выражением

$$t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} \left(1 - \frac{1}{2} \Omega \ln \frac{1}{\Omega} \right). \quad (15.4.8)$$

Напомним, что в (15.4.7) и (15.4.8) под ρ_c подразумевается величина, вычисленная по формуле (15.2.5) по сегодняшнему значению постоянной Хаббла, $H_0 = H(t_0)$; соответственно и $\Omega = \rho_0 / \rho_c = 8\pi\rho_0 / 3H_0^2 G$ вычислено по сегодняшним H_0 и ρ_0 .

§ 5. Влияние давления на закон расширения.

Качественные соображения

В предыдущих параграфах рассматривалось движение вещества, давлением которого можно было пренебречь. Таким веществом является, например, газ при невысокой температуре, или пыль, равномерно распределенная в пространстве. Совокупность галактик также можно рассматривать как «пыль». Нельзя исключить, однако, наличие во Вселенной нейтрино и квантов, движущихся со скоростью света, т. е. частиц с нулевой массой покоя.

Для всякого вещества плотность ρ (г/см³) может быть связана с плотностью энергии ϵ (эрг/см³) релятивистским соотношением

$$\rho = \frac{\epsilon}{c^2}. \quad (15.5.1)$$

Но для «обычного вещества» давлением можно пренебречь по сравнению с ϵ . Для нейтрино и квантов давление сравнимо с ϵ :

$$P = \frac{1}{3} \epsilon = \frac{1}{3} \rho c^2. \quad (15.5.2)$$

Влияние давления на закон расширения Вселенной интересно в связи с началом эволюции. В настоящее время имеется некоторая плотность нейтрино и квантов, которые появились не в небесных телах, а были с начала расширения (подробнее см. гл. 18). Отсюда следует, что в прошлом на ранних этапах расширения плотность нейтрино и квантов была заведомо значительно больше плотности обычного вещества*). В самом деле, рассмотрим некий объем, содержащий определенное количество обычного вещества и определенную плотность энергии нейтрино и квантов. В ходе расширения плотность обычного вещества уменьшается обратно пропорционально увеличению объема, V^{-1} , т. е. как R^{-3} . Между тем плотность энергии нейтрино и квантов убывает быстрее, как $V^{-4/3}$, т. е. R^{-4} , как раз вследствие того, что нейтрино и кванты имеют давление и при расширении совершают работу над соседними элементами: $d(\epsilon V) = -P dV$. Это закон адиабатического расширения газа частиц без массы покоя. При этом температура и энергия нейтрино и квантов меняется как $V^{-1/3} = R^{-1}$. Если в релятивистском газе пренебречь столкновениями, то это не меняет выводов. Кванты и нейтрино летят теперь по прямой и из одного места приходят в другое, к удаляющемуся веществу, а значит, по отношению к этому веществу уменьшают энергию — испытывают красное смещение («охлаждаются»). (См. ниже гл. 17, § 1).

Обратимся к закону расширения в модели однородной Вселенной. Можно ли говорить о том, что высокое давление является причиной расширения Вселенной, что сильно сжатое вещество расширяется по той же причине, по которой разлетаются газы высокого давления, образующиеся при детонации заряда взрывчатого вещества?

*) Однако и в том случае, если плотность нейтрино и квантов была бы пренебрежимо мала, а температура равна нулю, учет давления все равно был бы необходим в начале эволюции, когда плотность барионов была весьма велика (от $\rho = \infty$ до плотности атомных ядер, порядка $\rho \approx 10^{14}$ г/см³). При такой высокой плотности, как показано в гл. 6, даже обычное вещество, состоящее из нейтронов, протонов и электронов, имеет давление порядка $\epsilon = \rho c^2$. Высокое давление при большой плотности обусловлено двумя причинами. Нейтроны, протоны и электроны подчиняются статистике Ферми; поэтому при большой плотности их средняя скорость даже при равной нулю температуре приближается к скорости света. Следовательно, без учета взаимодействия давление асимптотически приближается к $P = \epsilon/3$, оставаясь меньше этой величины. Кроме того, отталкивание нуклонов на близком расстоянии в принципе может привести к $P = \epsilon$.

Нет, такая точка зрения совершенно неправильна. Качественное различие заключается в том, что заряд взрывчатого вещества окружен воздухом при атмосферном давлении. Расширение вызывается разностью давления газов (продуктов взрыва) и окружающего их воздуха. Но когда мы рассматриваем давление в однородной Вселенной, то предполагается, что давление распределено строго однородно! Следовательно, между различными частицами в один и тот же момент нет разности давления, следовательно, нет и силы, которая могла бы повлиять на расширение и, тем более, быть причиной расширения. Влияние давления на закон расширения представляет собой более тонкий, релятивистский эффект, и притом, как будет показано ниже, эффект другого знака! Дело в том, что при наличии давления изменение объема, занятого определенной совокупностью частиц, сопровождается изменением энергии, заключенной в этом объеме: при расширении вещество совершает работу и энергия его уменьшается *).

Но в теории относительности масса тела не есть сумма масс покоя частиц, составляющих тело, а зависит также от их взаимодействия. Когда частицы притягиваются, это проявляется как дефект массы. В данном случае, при высоком давлении, которое определяется отталкиванием частиц или их движением, масса совокупности частиц больше суммы их масс покоя.

В предыдущих параграфах мы рассматривали расширение, полагая, что масса M данной совокупности частиц постоянна. С учетом работы сжатия следует, что масса была больше тогда, когда велика была плотность, значит, было больше действие силы тяжести, направленное в сторону замедления расширения. Высокое давление не ускоряло, а замедляло расширение Вселенной!

§ 6. Уравнения движения с учетом давления

С учетом давления, как показал Толмен (1930) (см. (3.3.5)), в ОТО ускорение притяжения **) для покоящегося вещества равно

$$g = -\frac{4\pi R^3}{3R^2} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) = -\frac{4\pi G}{3c^2} R(\epsilon + 3P). \quad (15.6.1)$$

В малом объеме скорость расширения мала, ее влиянием можно пренебречь, и это выражение справедливо.

*) Еще раз подчеркнем, что эта работа не идет на увеличение кинетической энергии расширяющегося вещества, так как градиента давления нет, т. е. нет разгоняющей силы.

**) Измеренное локальным наблюдателем по его времени.

Мак-Кри (1951) использовал приведенное выражение для того, чтобы элементарно, пользуясь ньютоновской механикой и теорией тяготения (с заменой ρ на $\rho + 3P/c^2$), получить закон изменения плотности и расстояний при давлении, сравнимом с плотностью энергии. Ниже воспроизведены его результаты. Рассмотрим снова шар радиуса R , внутри которого (так же как и во вне) все величины постоянны.

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2} R(\epsilon + 3P). \quad (15.6.2)$$

(Это уравнение приведено также у Паули (1958).) Общее число сохраняющихся частиц (нуклонов) N внутри данного шара постоянно. Поэтому плотность сохраняющихся частиц

$$n = \frac{N}{\frac{4\pi}{3} R^3} \quad (15.6.3)$$

зависит от радиуса, как и прежде.

Однако зависимость плотности энергии *) от радиуса сложнее. Она удовлетворяет уравнению

$$dE = d\left(\frac{4\pi}{3} R^3 \epsilon\right) = -P dV = -P 4\pi R^2 dR. \quad (15.6.4)$$

Замечательно, что совокупность уравнений (15.6.2) и (15.6.4) допускает интеграл механической (кинетической и потенциальной) энергии очень простого и наглядного вида.

Умножим (15.6.2) на $\frac{dR}{dt}$:

$$\frac{d^2R}{dt^2} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\frac{G}{c^2} \left[\frac{4\pi}{3} R \epsilon \frac{dR}{dt} + 4\pi R P \frac{dR}{dt} \right].$$

Пользуясь (15.6.4), преобразуем выражение в скобках **)

$$\frac{4\pi}{3} \epsilon R \frac{dR}{dt} + 4\pi P R \frac{dR}{dt} = -\frac{4\pi}{3} \frac{d}{dt} (\epsilon R^2).$$

Окончательно получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - G \frac{1}{R} \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\epsilon}{c^2}\right) = \text{const.} \quad (15.6.5)$$

*) В плотность энергии включается и энергия, соответствующая массе покоя частиц.

***) Так как $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \frac{4\pi}{3} R^3 \epsilon\right) = \frac{1}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \epsilon\right) + \frac{4\pi}{3} R^3 \epsilon \frac{d}{dt} \frac{1}{R}$.

Таким образом, при учете связи между давлением и энергией оказывается, что в выражение потенциальной энергии входит $\rho = \epsilon/c^2$, тогда как в выражение ускорения входит $\rho + 3P/c^2$. Для определения константы в правой части (15.6.5) нужно подставить значения величин в настоящий момент, выражая $\frac{dR}{dt} = H_0 R$. Результат получается в точности такой же, как и раньше: знак константы зависит от соотношения фактической плотности $\rho_0 = \epsilon_0/c^2$ в настоящее время и критической плотности (15.2.5) $\rho_c = 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ при $H_0 = 100 \text{ км/сек Мпс}$.

Заметим, однако, что если большая часть вещества состоит из частиц, движущихся со скоростью света и $P = \epsilon/3$, то при равной плотности ускорение вдвое больше, так как тогда

$$\frac{\epsilon + 3P}{c^2} = \frac{2\epsilon}{c^2} = 2\rho.$$

Для справки отметим, что критическая плотность $2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ соответствует равновесному планковскому излучению с температурой 30° К или ферми-распределению нейтрино (ферми-газ при 0° К) с граничной энергией $7,5 \cdot 10^{-3} \text{ эв}$ (при этом их плотность равна 10^6 нейтрино в 1 см^3).

Данные о фактической плотности электромагнитного излучения и нейтрино во Вселенной будут рассмотрены позже.

§ 7. Время расширения при наличии давления

Принимая плотность обычного вещества малой, предположим, что плотность нейтрино и квантов значительно больше. Тогда легко проинтегрировать уравнения, полагая $P = \epsilon/3$. Приведем результаты для возраста Вселенной:

$$t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega + 1}},$$

где $\Omega = \rho_0/\rho_c$; выражение справедливо как при $\Omega > 1$, так и при $\Omega < 1$. Функция $f = 1/(1 + \sqrt{\Omega})$, относящаяся к случаю $P = \epsilon/3$, нанесена пунктиром на рис. 71.

Этот результат дает возможность получить грубую, но надежную оценку верхней границы возможной плотности нейтрино (Перес (1960), Смородинский и Понтекорво (1961), Вейнберг (1962), Зельдович и Смородинский (1961)).

В самом деле, так как возраст Земли, Солнечной системы и химических элементов порядка $(4 \div 5) \cdot 10^9$ лет, то следует считать, что $t_0 - t_\infty$ во всяком случае больше этой величины. Подставляя $1/H_0 \approx 10^{10}$ лет, получим отсюда $\Omega < 4$, т. е. $\rho < 8 \cdot 10^{-29}$. Соответствующая температура $\approx 45^\circ \text{ К}$, а граничная энергия ней-

трино 0,01 эв. Следует подчеркнуть, что нейтрино с такой энергией (и в таком количестве) совершенно невозможно обнаружить ядерно-физическими методами, тогда как гравитационное действие этих нейтрино в космическом масштабе оказывается большим! По существу, в цитированных работах осуществлена идея, высказанная еще А. Эйнштейном (1950): любые формы материи и энергии могут быть обнаружены по их гравитационному действию, независимо от специфических свойств рассматриваемых видов материи.

Выпишем также формулы, относящиеся к будущему модели Вселенной, заполненной нейтрино или квантами (хотя этот случай и не реализуется в действительности):

при $\Omega < 1$ будет иметь место неограниченное расширение;

при $\Omega > 1$ расширение сменится сжатием через время (см. рис. 72)

$$t_m - t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{\Omega - 1},$$

и это сжатие закончится достижением бесконечной плотности через время

$$t'_\infty - t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega - 1}}.$$

§ 8. Начальная стадия при наличии давления

С учетом закона адиабатического сжатия нейтрино и света $\epsilon \sim V^{-4/3}$, т. е. $\epsilon = k/R^4$, где k — константа, получим уравнение изменения радиуса шара, содержащего данное количество сохраняющихся частиц

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{G}{R^2} - \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{c^2} \frac{2k}{R^4}, \quad (15.8.1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{G}{R} - \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{c^2} \frac{k}{R^4} = \text{const}. \quad (15.8.2)$$

В начале эволюции, вблизи момента t_∞ , когда плотность была бесконечна, $R=0$, можно пренебречь константой во втором уравнении. Решение имеет вид

$$R = \sqrt[4]{\frac{32\pi}{3} \frac{Gk}{c^2}} \sqrt{(t - t_\infty)}; \quad \epsilon = \frac{3c^2}{32\pi G (t - t_\infty)^2},$$

$$\rho \frac{2}{\text{см}^3} = \frac{\epsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi G (t - t_\infty)^2} = \frac{4,5 \cdot 10^6}{(t - t_\infty)^2}. \quad (15.8.3)$$

Выражение плотности отличается только численным множителем ($\sim 0,5$) от выражения плотности в случае $P=0$. При этом, однако, плотность сохраняющихся частиц нуклонов

$$n = \frac{\text{const}}{R^3} = \text{const} (t - t_\infty)^{-3/2}. \quad (15.8.4)$$

При $t \rightarrow t_\infty$, стремящемся к нулю, n растет слабее, чем ρ , отношение $n/\rho \rightarrow 0$.

Заметим, что плотность нейтрино и квантов, т. е. число частиц в единице объема, в этом решении также $\sim R^{-3} \sim (t - t_\infty)^{-3/2}$. Но температура и средняя энергия одного кванта и средняя энергия одного нейтрино пропорциональны $1/\sqrt{t - t_\infty}$. Отсюда и получается, что плотность массовая ($г/см^3$), пропорциональная произведению числа частиц в единице объема на энергию одной частицы, пропорциональна

$$(t - t_\infty)^{-3/2} (t - t_\infty)^{-1/2} = (t - t_\infty)^{-2}.$$

Рассмотрим, наконец, случай холодного нуклонного газа в предположении предельно жесткого уравнения состояния, т. е. сильного отталкивания нуклонов. В этом случае

$$P = \varepsilon = \rho c^2 = An^2, \quad (15.8.5)$$

где n — концентрация нуклонов ($1/см^3$). Для оценки константы можно предположить, что зависящая от взаимодействия плотность сравнивается с плотностью массы покоя $\rho_0 = nm_0$ (m_0 — масса нуклона) при ρ_0 порядка $100\rho_{яд}$.

$$\rho = nm_0 = \frac{An^2}{c^2} = 10^{16} \text{ г/см}^3 \quad (15.8.6)$$

при $nm_0 = 10^{16} \text{ г/см}^3$, откуда $A = 2,5 \cdot 10^{-43}$.

Тем же способом, что и выше, найдем при таком уравнении состояния

$$\rho = \frac{1}{24\pi G (t - t_\infty)^2} = \frac{2 \cdot 10^6}{(t - t_\infty)^2} \frac{г}{см^3}, \quad \varepsilon = P = \rho c^2. \quad (15.8.7)$$

При этом $R \sim (t - t_\infty)^{-1/3}$, а плотность нуклонов

$$n \cong \frac{2,5 \cdot 10^{34}}{(t - t_\infty)}, \quad \rho_0 = nm_0 = \frac{4 \cdot 10^{10}}{t - t_\infty}.$$

Это решение относится (в холодной модели) к периоду не дольше нескольких микросекунд $t - t_\infty < 3 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$ (из условия $\rho > 100\rho_{яд}$).

ГЛАВА 16

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ МОДЕЛИ МИРА

§ 1. Геометрическая структура модели Вселенной как целого

Геометрические свойства пространства зависят от наличия вещества, его плотности и движения (см. § 4 и 8 гл. 15). Более того, от плотности и скорости вещества зависит сама топология или, иначе говоря, структура пространства однородной Вселенной как целого. Выпишем формулу (18.14) для гауссовой кривизны 3-мерного пространства:

$$C_G = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{1}{9} D^2. \quad (16.1.1)$$

В нашем решении имеется полная изотропия по всем направлениям, поэтому и риманова кривизна 3-мерного пространства во всех направлениях одинакова и совпадает с гауссовой (16.1.1). Более того, вследствие однородности кривизна в один и тот же момент одинакова для всех точек пространства. В случае изотропной деформации $D = 3 \frac{\dot{R}}{R} = 3H$, и подставляя в (16.1.1),

$$C_G = \frac{8\pi G\rho}{3} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2, \quad (16.1.2)$$

из (16.1.2) видно, что знак кривизны определяется тем же критерием для плотности, что и в § 3 гл. 15: если $\rho > \rho_c$ (см. (15.2.5)), то кривизна положительна: $C_G > 0$, $a = 1/\sqrt{C_G}$, если $\rho < \rho_c$, то кривизна отрицательна: $C_G < 0$, a — мнимо.

Величина и знак кривизны одинаковы во всех точках пространства в один и тот же момент. Кроме того, так как в ходе эволюции все время сохраняется неравенство $\rho > \rho'_c$, или $\rho < \rho'_c$ (ρ'_c обозначает текущее значение ρ_c), то сохраняется и знак кривизны. Из дифференциальной геометрии известно, что многообразие постоянной отрицательной кривизны продолжимо неограниченно. Следовательно, если плотность вещества меньше

критической $\rho < \rho_c$, т. е. $\rho < 2 \cdot 10^{-29}$ г/см³, то модель однородной Вселенной бесконечна. Это значит, что топологически модель Вселенной подобна бесконечному евклидову пространству.

Однако если $\rho > \rho_c$, то кривизна положительна, а трехмерное пространство оказывается замкнутым и конечным (но безграничным!). Все наши наглядные представления основаны на повседневном опыте и относятся к евклидову трехмерному пространству. Поэтому наглядно представить себе замкнутую Вселенную невозможно; можно лишь изучать математически ее свойства, сравнивать результаты расчетов с опытом и наблюдениями и пояснять их с помощью аналогий и моделей, являющихся неполными. Итак, каковы свойства замкнутой Вселенной? Возьмем какую-либо точку в качестве начала координат. Построим вокруг нее сферу, т. е. рассмотрим совокупность частиц, равноудаленных от той, которая находится в начале координат. Определим такие величины, как длина экватора сферы и площадь поверхности сферы. При этом нужно иметь в виду нестационарность модели Вселенной. Длина экватора и площадь сферы, ограничивающей данную совокупность частиц, зависят от того, в какой момент мы их измерим. Условимся все величины измерять в тот момент, когда собственное время частиц одинаково.

Собственное время отсчитываем от момента бесконечной плотности по часам, которые движутся вместе с частицей. Здесь мы рассматриваем только движение частиц, соответствующее всеобщему расширению, т. е. не учитываем отклонения скорости отдельных галактик от той скорости, которая в данной точке должна быть в однородной расширяющейся Вселенной.

Важнейший вывод теории (формулы см. далее) заключается в следующем: при $\rho > \rho_c$, т. е. в случае замкнутого мира, длина экватора и площадь сферы вначале возрастают, но потом проходят максимум и затем уменьшаются до нуля по мере того, как мы переходим ко все более удаленным сферам. Понятия ближе — дальше вполне однозначны, как и понятия внутри — снаружи: более далекая сфера включает в себя не только все то вещество, которое находится в более близкой сфере, но и еще вещество, находящееся между сферами.

Сфера более удаленная, содержащая больше вещества и имеющая больший объем, в то же время имеет меньший экватор и меньшую поверхность. Это непривычно, не похоже на евклидову геометрию, но все это является следствием кривизны пространства. Однако такая непривычная ситуация логически не противоречива.

Общеизвестной аналогией является замкнутое, кривое двумерное пространство — поверхность обычного трехмерного шара.

Возьмем северный полюс за центр. Аналогами сфер на поверхности шара являются окружности, т. е. параллели. Длина окружности вначале растет по мере удаления от северного полюса, но затем на экваторе достигается максимум и далее длина окружности уменьшается; между тем площадь, охваченная окружностью, монотонно растет. Наконец, при приближении окружности к южному полюсу площадь, охваченная ею, становится равной $4\pi r^2$, а длина стремится к нулю.

Заметим, что в случае замкнутого мира сфера разделяет все пространство на две части, каждая из которых конечна. Объемом, заключенным внутри сферы, мы условимся всегда называть ту часть, которая включает в себя начало координат. В двумерной аналогии поверхностью, ограниченной параллелью (т. е. линией, все точки которой находятся на равном расстоянии от северного полюса), называем поверхность части шара, лежащей севернее параллели и включающей в себя северный полюс. При таком определении стягивание параллели к южному полюсу сопровождается стремлением к $4\pi r^2$ площади поверхности, ограниченной этой параллелью.

Вернемся к трехмерному замкнутому пространству, которым является однородная Вселенная в том случае, если $\rho_0 > \rho_c$. Обращение в нуль длины экватора и поверхности сферы, описанной вокруг начала координат при достаточном от центра увеличении ее радиуса, т. е. удалении ее от центра, как раз и означает, что рассматриваемое трехмерное пространство является замкнутым *).

Выпишем теперь соответствующие формулы. В двумерной аналогии на поверхности шара сетка меридианов и параллелей является аналогом полярной системы координат на плоскости. В полярной системе на плоскости квадрат малого расстояния записывается в виде

$$dl^2 = (dr^2 + r^2 d\theta^2) a^2, \quad (16.1.3)$$

где a — масштаб, а r — безразмерное расстояние от центра. На поверхности шара

$$dl^2 = (dr^2 + \sin^2 r d\theta^2) a^2, \quad (16.1.4)$$

*) Отметим возможность еще одной топологической разновидности 3-мерного пространства постоянной положительной кривизны, так называемого эллиптического пространства. Если на сфере — двумерной аналогии сферического замкнутого мира, отождествить диаметрально противоположные точки, то получится двумерная аналогия эллиптического пространства. В трехмерной сфере так же отождествляются диаметрально противоположные точки для получения эллиптического пространства. Такое отождествление в некотором смысле аналогично построению замкнутого плоского пространства путем отождествления противоположных граней куба. Подобных построений мы касаться не будем. О физических ограничениях на топологию см. Дополнение VII.

где a — естественный масштаб — радиус шара. Выражение (16.1.4) отличается от (16.1.3) только заменой r^2 на $\sin^2 r$ перед квадратом дифференциала угловой части. Точно так же в трехмерном пространстве постоянной положительной кривизны квадрат малого расстояния в сферической системе координат отличается от соответствующего выражения в плоском евклидовом пространстве заменой r^2 на $\sin^2 r$ перед угловой частью дифференциала:

$$dl^2 = [dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] a^2. \quad (16.1.5)$$

Здесь a — радиус кривизны трехмерного пространства. Из (16.1.5) следует, что площадь сферы радиуса r , описанной вокруг центра, есть

$$s(r) = 4\pi a^2 \sin^2 r, \quad (16.1.6)$$

а длина экватора сферы:

$$l_{\text{экр}} = 2\pi \sin r. \quad (16.1.7)$$

Из выражения (16.1.6) видно, что s достигает максимума $s_{\text{max}} = 4\pi a^2$ при $r = \pi/2$ и снова уменьшается до нуля при $r = \pi$.

Объем, охваченный сферой радиуса r ,

$$V = \int_0^r s(r) \cdot a dr = 4\pi a^3 \int_0^r \sin^2 r dr = 4\pi a^3 \left[\frac{1}{2} r - \frac{1}{4} \sin 2r \right]. \quad (16.1.8)$$

Объем с ростом r , естественно, монотонно возрастает. При $r = \pi$ получаем объем всего замкнутого мира:

$$V_{\text{мира}} = 2\pi^2 a^3.$$

Соответственно, зная среднюю плотность нуклонов в единице объема $n \frac{1}{\text{см}^3}$, можно найти общее число нуклонов во всей модели мира: $N_{\text{полн}} = n V_{\text{мира}}$. С помощью формулы (16.1.2) запишем выражение для радиуса кривизны a :

$$a = \frac{1}{\sqrt{C_G}} = \frac{c}{H} \frac{1}{\sqrt{\Omega - 1}}. \quad (16.1.9)$$

Напомним, что в этом разделе везде обозначено $\Omega = \rho/\rho_c = 8\pi G\rho/3H^2$. Выражение (16.1.9) относится только к $\Omega > 1$. При Ω , близком к единице, радиус весьма велик и стремится к бесконечности при плотности, приближающейся сверху к критическому условию замкнутости, $\Omega \rightarrow 1$.

Рассмотрим обычное вещество, $\rho_0 = n m_0$, где m_0 — масса нуклона, n — их плотность. При данном значении H_0 оказывается, что общее число нуклонов N во Вселенной тем меньше, чем

больше их плотность! В самом деле, при $n \gg \rho_c/m$, $\Omega \gg 1$, $a \sim 1/\sqrt{n}$ объем пропорционален $V_{\text{мира}} \sim a^3 \sim n^{-3/2}$, а следовательно, общее число $N_{\text{полн}} = nV_{\text{мира}} \sim n^{-1/2}$.

При уменьшении n общее число N возрастает вначале как $n^{-1/2}$, а затем еще быстрее, так как при приближении n к $n_c = \rho_c/m_0$, $N \rightarrow \infty$.

Теперь вспомним, что решение для рассматриваемой модели не является статическим. Зависимость расстояния между любой парой точек вещества от времени $R=R(t)$ рассмотрена в предыдущих параграфах. Очевидно, зависимость радиуса кривизны a от времени точно такая же, как и R , так как $R = \text{const} \cdot a$.

Следовательно, для закрытой модели с течением времени a растёт, достигает максимума, а затем убывает до нуля, как показано на рис. 69.

Выпишем в заключение выражение для квадрата интервала замкнутого мира. Пространственная часть интервала нами уже выписана выше; см. (16.1.5). Смешанные компоненты g_{0i} всегда могут быть устранены, так как вращение вещества отсутствует (см. § 6 гл. 1). Наконец, g_{00} не может зависеть от пространственных координат, так как это означало бы наличие силы, чего в изотропной модели нет; зависимость g_{00} от времени устраняется выбором собственного времени. Итак,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (16.1.10)$$

§ 2. Полузамкнутые миры и физическая интерпретация метрики Крускала

Замкнутый мир обладает рядом замечательных свойств. Для их уяснения полезно рассмотреть случай, когда однородное распределение вещества на некотором расстоянии от начала координат обрывается и дальше идет вакуум, т. е. рассмотреть изолированное тело.

Для замкнутого мира есть момент наибольшего расширения, когда деформация на мгновение равна нулю и вещество мгновенно покоится. Будем рассматривать этот момент t_m и для простоты ограничимся случаем пылевидного вещества без давления $P=0$. Напомним (см. § 13 гл. 1), что эволюция шара произвольного радиуса R_0 и все его свойства никак не зависят от наличия или отсутствия окружающего вещества, которое не влияет гравитационно на вещество внутри R_0 .

Рассмотрим шар, представляющий часть замкнутого мира, и будем считать, что все внешнее вещество (вне радиуса R_0) отсутствует, т. е. это шар в пустом пространстве. Вдали от шара поле слабо и на бесконечности пространство евклидово. Вблизи

шара искривление пространства зависит от силы гравитационного поля. При фиксированной плотности сила поля зависит от размера шара. Пока радиус R_0 шара мал, кривизна пространства в нем не проявляется,

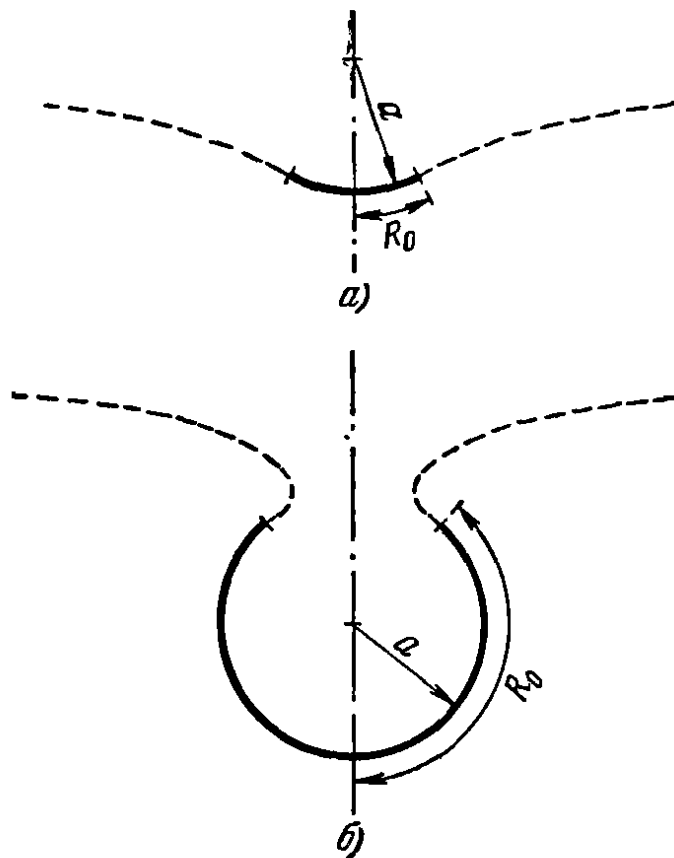


Рис. 74. Вращение кривых вокруг вертикальной линии даст изображение двумерного аналога искривленного пространства для изолированного тела. Эти же поверхности являются пространственными поверхностями $\theta = \pi/2$ в искривленном пространстве.

а) радиус шара R_0 много меньше радиуса кривизны пространства a , создаваемого веществом шара плотности ρ , $R_0 \ll a = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}}$; б) полузамкнутый мир

$$R_0 > \frac{\pi}{2} a.$$

1963, 1964d), Гаррисон, Торн, Вакано, Уилер (1965))? Что представляет собой полузамкнутый мир для внешнего наблюдателя?

Здесь нам придется вернуться к рассмотрению метрики Крускала (см. § 14 гл. 3). Действительно, в вакууме поле сферично и обязано быть полем Шварцшильда (см. § 2 гл. 3), а полная структура такого поля дается метрикой Крускала.

Будем рассматривать частицу на поверхности шара. Зафиксируем для некоторого момента t_0 плотность и постоянную Хаб-

ста в нем не проявляется, так как $a = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}} \gg R_0$ (см. рис. 74). Но если увеличивать радиус шара, то влияние кривизны на структуру шара растет. Как мы видели в предыдущем параграфе, поверхность шара $s = 4\pi a^2 \sin^2 r_0$, объем $V = 4\pi a^3 \left[\frac{1}{2} r_0 - \frac{1}{4} \sin 2r_0 \right]$; здесь $R_0 = ar_0$.

Наконец, после увеличения радиуса до значений, больших $R_0 = a \frac{\pi}{2}$, в геометрии внутренности шара появится характерная особенность, свойственная замкнутому миру: уменьшение площади сфер с их удалением, если они лежат за максимальной «экваториальной сферой» $R_0 = a \frac{\pi}{2}$; отличие

такого шара от замкнутого мира только в отсутствии полной замкнутости. Каковы свойства пространства вне такого шара, получившего название «полузамкнутого мира» (Зельдович (1962с), Новиков (1962b,

1963, 1964d), Гаррисон, Торн, Вакано, Уилер (1965))?

бла для шара, представляющего часть замкнутого мира, и будем менять только радиус шара в этот момент и, следовательно, его массу. Чем больше масса, тем больше гравитационный радиус тела. В приложении показано, что $\tilde{r}_g = a_{\max} \sin^3 r$, в то время как радиус \tilde{r}_{\max} максимального расширения поверхности шара (определенный как $\sqrt{s_{\max}/4\pi}$) есть, очевидно, $\tilde{r}_{\max} = a_{\max} \sin r$. Следовательно, отношение $\tilde{r}_g/\tilde{r}_{\max} = \sin^2 r$ увеличивается по мере того, как в начальном условии задается шар все большего размера. Пока $r < \pi/2$, полузамкнутости мира еще нет. В ходе эволюции поверхность шара заканчивает свое расширение и начинает вновь сжиматься все ближе к гравитационному радиусу: $\tilde{r}_g/\tilde{r}_{\max} = \sin^2 r$ (рис. 75). Эволюция шара протекает для внешнего наблюдателя следующим образом. Шар расширяется от бесконечной плотности и $R_0 = 0$ (точка *a*), выходит из-под своего гравитационного радиуса (в точке *b*), достигает максимальных размеров $R_{0\max} = \tilde{r}_{\max}$ (в точке *c*), снова сжимается и за конечное собственное время достигает гравитационного радиуса (*d*), а затем и $R_0 = 0$ (*e*). Для внешнего наблюдателя подход к *d* растягивается, как мы видели в § 12 гл. 3, на бесконечное время.

Если выбрать размеры шара так, что $r = \pi/2$, то его энергии хватает как раз настолько, чтобы расшириться до $\tilde{r}_{\max} = \tilde{r}_g$ и снова сжаться (линия 2 на рис. 75). Наконец, при $r > \pi/2$ поверхность шара (полузамкнутого мира) уже никогда не выходит из-под сферы Шварцшильда к внешнему наблюдателю. Поверхность шара выходит из T_+ области, из-под сферы Шварцшильда, но не к внешнему наблюдателю в правую R -область, а левее горловины (линия 3 на рис. 75), в левую R -область,

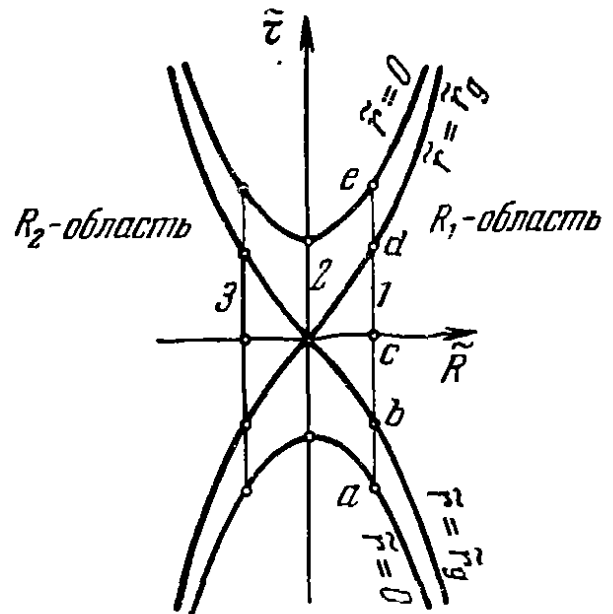


Рис. 75. Движение границ трех различных шаров в пространстве — времени Крускала.

1 — энергии вещества шара достаточно, чтобы его поверхность вышла из-под \tilde{r}_g , достигла максимального размера (*c*) и затем снова сжалась;

2 — энергия вещества шара как раз такая, что в момент максимального расширения его поверхность совпадает с поверхностью Шварцшильда;

3 — энергии шара недостаточно для выхода из-под \tilde{r}_g к внешнему наблюдателю в R_1 -области (полузамкнутый мир).

Во всех случаях метрика Крускала применима только справа до границы шара, слева от границы справедлива метрика однородной космологической модели.

достигает наибольшего размера \tilde{r}_{\max} и вновь сжимается. Вне полузамкнутого мира в вакууме метрика является метрикой Крускала (§ 14 гл. 3) с горловиной. В решении Крускала в пустом (везде) пространстве, как показано в § 14 гл. 3, есть две R -области, евклидовы на бесконечности, соединенные через горловину. В решении, сшитом с веществом, создающим поле, второй бесконечной R -области нет (рис. 76). Есть только небольшой кусок второй R -области, возникающий на небольшое время

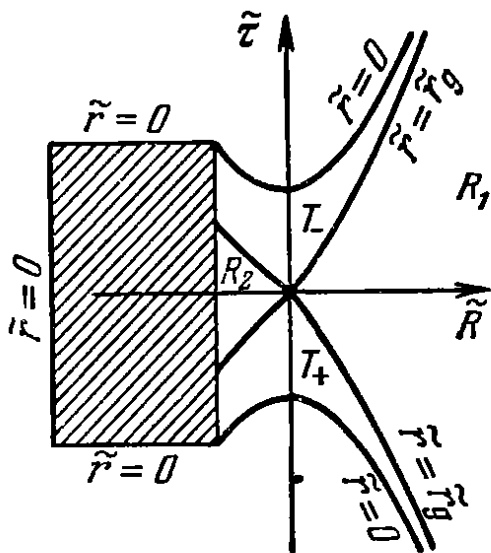


Рис. 76. Пространство — время полузамкнутого мира. Заштрихована область вещества шара.

вблизи максимального расширения шара. Никакого парадокса с двумя евклидовыми бесконечностями (см. § 14 гл. 3) в полном решении с веществом, как видим, нет. Внутри вещества метрика совпадает с метрикой фридмановской модели мира. Таково полное решение.

Полузамкнутое распределение вещества из пыли не может возникнуть из разреженного вещества, не бывшего полузамкнутым. Точно так же невозможно превращение полузамкнутого мира в обыкновенное распределение.

Из полузамкнутого мира внешний наблюдатель может получить информацию только о ранних стадиях расширения, когда поверхность шара находится еще в T_+ области. Этот вывод непосредственно следует из рассмотренной в § 14 гл. 3 возможности обмена информацией между различными областями метрики Крускала.

Имеют ли полузамкнутые миры какое-либо отношение к реальности? Мы не знаем пока таких объектов. Но независимо от реальности их существования, рассмотрение свойств полузамкнутых миров имеет большой методический интерес. Особенно интересны внешние гравитационные проявления полузамкнутого мира.

Имеют ли полузамкнутые миры какое-либо отношение к реальности? Мы не знаем пока таких объектов. Но независимо от реальности их существования, рассмотрение свойств полузамкнутых миров имеет большой методический интерес. Особенно интересны внешние гравитационные проявления полузамкнутого мира.

Будем в момент максимального расширения t_m рассматривать всё большие по размерам шары одной и той же плотности. Какова масса таких шаров? Масса статической (хотя бы только на момент) конфигурации m меньше суммы масс M слагающих ее частиц из-за гравитационного дефекта масс (см. § 6 гл. 10). Гравитационная масса m может быть измерена далеким наблюдателем по полю тяготения этой массы.

Гравитационная масса m может быть выражена следующим образом:

$$m = \frac{c^2 \tilde{r}_g}{2G} = \frac{c^2 a_{\max} \sin^3 r}{2G} = \frac{4}{3} \pi \rho a_{\max}^3 \sin^3 r. \quad (16.2.1)$$

Между тем, по определению, сумма масс покоя M дается формулой

$$M = \rho V = 4\pi a^3 \rho \left[\frac{1}{2} r - \frac{1}{4} \sin 2r \right]. \quad (16.2.2)$$

При малых размерах шара ($r \ll 1$) обе массы, естественно, совпадают, так как гравитационный дефект мал:

$$M = m = \frac{4}{3} \pi a_{\max}^3 r^3 \rho.$$

С ростом r сумма масс слагающих частиц M растет как объем V , а гравитационная масса m растет медленнее из-за дефекта масс. Величина m достигает максимума при $r = \pi/2$:

$$m_{\max} = \frac{4}{3} \pi a_{\max}^3 \rho = \frac{2}{3\pi} M.$$

С дальнейшим ростом r масса m уменьшается. Добавление нового слоя вещества дает добавочный гравитационный дефект больше, чем собственная масса этого слоя. При $r \rightarrow \pi$ $m \rightarrow 0$. Таким образом, при стремлении конфигурации к замкнутости масса стремится к нулю. Кратко можно сказать, что масса замкнутого мира равна нулю*). В таком мире гравитационный дефект равен самой собственной массе $M = \rho V_{\text{пол}} = 2\pi^2 a_{\max}^3 \rho$.

В замкнутом мире полный электрический заряд равен нулю. Отличный от нуля полный заряд был бы возможен лишь в том случае, если бы были неверны уравнения Максвелла. Заряд является источником электрического поля. В евклидовом пространстве силовые линии электрического поля выходят из заряда либо стекают к заряду противоположного знака, либо уходят на бесконечность. В замкнутом мире нет бесконечности.

Зададимся произвольным распределением электрического поля \mathbf{E} в замкнутом мире; найдем соответствующую плотность заряда ρ_e по уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e.$$

Всегда окажется, что полный заряд равен нулю,

$$Z = \int \rho_e dV = 0,$$

*) Иной подход к определению массы замкнутого мира с тем же результатом $m=0$ см. Ландау и Лифшиц (1962) (стр. 382).

так как если нет бесконечности, то силовые линии, начинающиеся на одном заряде, обязательно кончаются на другом заряде противоположного знака, нейтрализующем первый.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 2

Выведем формулы для полужамкнутого мира. Воспользуемся решением Толмена (см. § 13 гл. 3).

Интервал запишем в виде

$$ds^2 = a^2 [d\tau^2 - e^\lambda (dr)^2 - \tilde{r}^2 (\tau, r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (16.2.1п)$$

где a — масштаб, а все величины в скобке безразмерны. Решение Толмена имеет вид (обозначения см. § 13 гл. 3)

$$e^\lambda = \frac{(\tilde{r}')^2}{1+f(r)}, \quad \tau + \Phi(r) = \frac{1}{f(r)} \sqrt{f(r)\tilde{r}^2 + F(r)\tilde{r}} + \\ + \frac{F(r)}{[-f(r)]^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{-f(r)\tilde{r}}{F(r)}}, \quad a^2 \frac{8\pi G}{c^2} \rho = \frac{F'(r)}{\tilde{r}'\tilde{r}^2}. \quad (16.2.2п)$$

Пусть область, заполненная веществом (при $r < r_0$), является частью замкнутой модели. Тогда, переходя от выражения интервала (16.1.10) и (16.2.1) к (16.2.1п), получим

$$f(r) = -\sin^2 r, \quad F(r) = \sin^3 r, \quad \Phi = \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq r \leq r_0.$$

$$a = a(t)_{\max}, \quad \text{где} \quad a_{\max} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_{\min}}}.$$

Если $\pi/2 < r_0 < \pi$, то вещество представляет собой полужамкнутый мир. Для того чтобы сшить это решение с метрикой Крускала (§ 14 гл. 3) для вакуума, надо при $r > r_0$ положить

$$\left. \begin{aligned} f &= -[(r+c_1)^2 + c_2]^{-1} \sin^6 r_0, \\ F &= \sin^3 r_0, \quad \Phi = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{(r+c_1)^2 + c_2}{\sin^4 r_0} \right\}^{3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (16.2.3п)$$

где $c_2 = \sin^6 r_0$, а c_1 очевидным образом выражается через r_0 из условия непрерывности функций при $r = r_0$.

В § 14 гл. 3 мы видели, что $\tilde{F} = \tilde{r}_g$. Переходя в (16.2.3п) к размерным величинам, получаем окончательно: $r_g = a_{\max} \sin^3 r_0$, где r_0 — граница шара. Последнее выражение приведено в тексте параграфа.

§ 3. Метрика открытого мира

В предыдущем параграфе были рассмотрены свойства замкнутого мира; мир замкнут в том случае, если он однороден (так что, в частности, его плотность и постоянная Хаббла везде одинаковы в один и тот же момент времени), и если $\rho_0 >$

$> 3H_0^2/8\pi G$. Однако современные данные о плотности ($\rho_0 \approx \approx 5 \cdot 10^{-31}$, $3H_0^2/8\pi G = \rho_c = 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$) показывают, что, по-видимому, в действительности имеет место обратное неравенство, $\rho_0 < 3H_0^2/8\pi G$. В этом случае мир, как говорят, «открыт», т. е. качественно, топологически не отличается от обычного евклидова трехмерного пространства. В частности, по-прежнему полагая, что Вселенная однородна, мы приходим к выводу о бесконечном общем количестве галактик, звезд, нуклонов во Вселенной.

Вместе с тем при $\rho_0 < \rho_c$ имеет место определенное отличие метрики, т. е. количественных геометрических свойств физического пространства от евклидовых. Из формулы (16.1.1) следует, что кривизна c_G отрицательна. Поэтому в сопутствующем пространстве сумма углов треугольника меньше π ; длина экватора и площадь сферы больше соответствующих евклидовых выражений. Выражение для метрики открытого мира отличается от (16.1.10) заменой $\sin r$ на $\text{sh } r$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [dr^2 + \text{sh } r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Мы остановимся на рассмотрении двух случаев,

$$\rho_0 \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \rho_0 = \rho_c.$$

Предельный случай малой плотности $\rho_0 \ll 3H_0^2/8\pi G$ отличается особенной простотой. С той точностью, с которой можно считать $\rho_0 = 0$, можно пренебречь силами тяготения. Как уже отмечалось, в прошлом в таком мире обязательно был период, когда силой тяжести нельзя было пренебречь (см. § 4 гл. 15). Мы, однако, не будем сейчас рассматривать этот период. Вернемся к периоду, когда $\rho \ll \rho_c$ и силы тяготения пренебрежимо малы.

Всю картину движения можно представить себе совершенно элементарно следующим образом: в плоском евклидовом пространстве в начальный момент $t=0$ из начала координат вылетает совокупность частиц, движущихся со всеми возможными скоростями \mathbf{u} ; разумеется, скорости эти не превышают скорости света, $|\mathbf{u}| \leq c$. Массой частиц пренебрегаем, поэтому последовательно пренебрегаем и искривлением пространства, которое могло бы быть вызвано частицами. Следовательно, движение происходит в плоском (евклидовом) пространстве. Такую модель мы уже рассматривали в § 4 гл. 1. Сопутствующее пространство этой системы, как показано в § 4 гл. 1, имеет отрицательную кривизну. На рис. 77 показано сечение пространства в «лабораторных» координатах τ — x . В этих координатах скорости частиц меньше c , так что все траектории — прямые, и лежат внутри угла (рис. 77), образованного прямыми $x = \pm c\tau$.

Итак, $x = u\tau$, $u < c$, длина окружности, проведенной через данную точку x с центром в $x = 0$, равна $2\pi x$. Собственное время t частицы, движущейся со скоростью u , выражается известной формулой специальной теории относительности:

$$t = \tau \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (16.3.1)$$

Совокупность точек, в которых находятся частицы через одинаковое собственное время $t = \text{const}$ (см. рис. 77), дается выражением

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}};$$

$$x = u\tau = t \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (16.3.2)$$

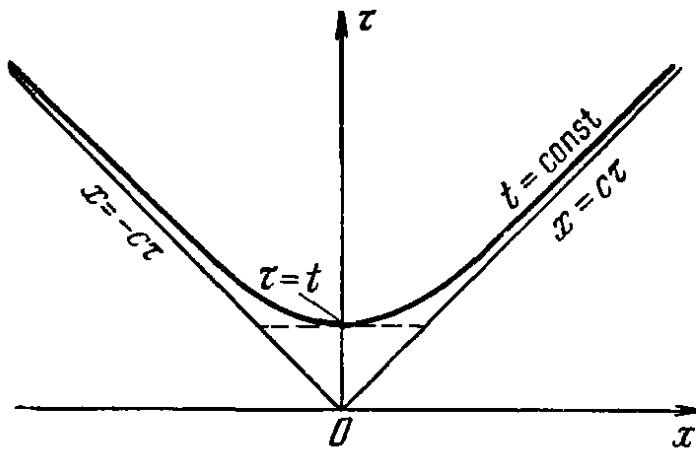


Рис. 77. Линия постоянного собственного времени $t = \text{const}$ модели Милна в «лабораторной» системе координат. Пунктир — линия постоянного лабораторного времени $\tau = \text{const}$.

Это — уравнение гиперболы. В самом деле, чтобы построить линию $t = \text{const}$ в координатах рис. 77, мы должны задаться t и τ и найти сначала u , а затем, зная u , выразить x через t и τ . Получим

$$u = c \sqrt{1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}, \quad x = \frac{c\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^2}}. \quad (16.3.3)$$

При фиксированном значении t зависимость x от τ представляет собой гиперболу, асимптотами которой являются линии $x = \pm c\tau$ (см. рис. 77). Итак, если назвать «скоростью» u' путь*), пройденный за единицу собственного времени

$$u' = \frac{x}{t} = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (16.3.4)$$

получим величину, которая может быть и больше c . Таким образом, разрешается парадокс, связанный с вопросом о том, могут ли быть в решении Фридмана частицы со скоростями, большими скорости света. Ответ заключается в том, что такие скорости получаются при пользовании расстоянием, измеренным в лабо-

*) «Путь» при этом определяем по лабораторной системе координат или как длину окружности, деленную на 2π .

раторной системе отсчета и собственным временем частицы, т. е. это не есть скорость перемещения частицы.

Для вычисления реальной скорости надо и расстояния и время измерить в одной и той же системе отсчета. При этом всегда $u \leq c$. Известно из лабораторных опытов, что мезон (пион) с временем жизни $2 \cdot 10^{-8}$ сек может пройти до распада чуть значительно больше, чем $2 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ см} = 6 \cdot 10^2 \text{ см}$, когда его скорость близка к скорости света. Определяя трехмерное пространство из условия одинаковости собственного времени t во фридманском решении, т. е. сопутствующее пространство, мы получили пространство, отличающееся от трехмерного «лабораторного» пространства $\tau = \text{const}$. При плотности $\rho \rightarrow 0$ весь четырехмерный мир в целом (пространство—время) в пределе является плоским, четырехмерная кривизна его равна нулю, мир евклидов или, точнее, псевдоевклидов, в силу особой роли времени (пространство Минковского, $s^2 = \tau^2 - x^2 - y^2 - z^2$). Но его трехмерное сечение поверхностью $t = \text{const}$ не плоское.

А. Л. Зельманов (1959а) подчеркивает, что пространственное сечение совокупности мировых линий внутри светового конуса $x = \pm c\tau$ на рис. 77, отвечающее постоянному лабораторному времени $\tau = \text{const}$, является конечным (пунктир на рис. 77); пространственная координата x ограничена значениями $-c\tau \leq x \leq c\tau$. Отсюда делается вывод, что само утверждение о конечности или бесконечности пространства не является инвариантным, ответ зависит от того, как выбрано «время» и «пространство».

Рассмотрим реальный случай, когда плотность ρ_0 хотя и мала, но конечна. В сечении $\tau = \text{const}$ вблизи границы ($x = c\tau$) находятся частицы, собственное время которых мало; см. (16.3.1). Поэтому плотность у края возрастает. Можно показать, что в сечении $\tau = \text{const}$ плотность равна $\frac{\rho_0}{1 - \left(\frac{x}{c\tau}\right)^2}$. Следовательно,

даже при малом ρ_0 в сечении $\tau = \text{const}$ есть область, где нельзя пренебречь плотностью вещества, нельзя пренебречь искривлением пространства, вызванным гравитационным полем вещества. При малом, но конечном ρ_0 ввести «лабораторное время» τ во всем пространстве нельзя, парадокс с конечностью пространства исчезает.

Если же поставить вопрос об общем числе N сохраняющихся частиц во Вселенной, то и с самого начала нет никаких парадоксов: величина N является инвариантом в ОТО. Выше уже говорилось, что в замкнутом мире число N конечно; мы приводили конкретную формулу для $N_{\text{полн}}$. При $\rho_0 < \rho_c$ в открытом мире N бесконечно и этот вывод не зависит от способа подсчета.

В сечении $t = \text{const}$ плотность $n = n_0$ постоянна, объем пространственного сечения бесконечен, $N = \infty$. Но и при рассмотрении сечения $\tau = \text{const}$ (при $\rho_0 \ll \rho_c$) $N = \int n dV = \infty$ за счет того, что плотность частиц у края $n = \frac{n_0}{1 - \left(\frac{x}{c\tau}\right)^2}$ неограниченно растет, интегрирование по конечному объему $V = \frac{4\pi}{3} (c\tau)^3$ дает бесконечное N .

В заключение историческое замечание. Описанное выше решение называют моделью Милна. Действительно, Милн (1935, 1948) впервые ввел в рассмотрение совокупность частиц, одновременно вылетающих из одной точки со всеми возможными скоростями.

Эта модель есть предельный случай фридмановского решения при $\rho_0 \ll \rho_c$. Между тем Милн пытался придать своей модели некий особый смысл, пытался построить теорию, изменяя физические законы. Эта часть работы Милна представляет в настоящее время только исторический интерес.

§ 4. Случай критической плотности

Остановимся вкратце на случае

$$\rho = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (16.4.1)$$

Если это соотношение имеет место в определенный момент, то уравнения движения обеспечивают выполнение $\rho = \rho'_c$ в любой другой момент времени, как в прошлом, так и в будущем (при этом также и при давлении, отличном от нуля).

При $\rho = \rho_c$ метрика мира особенно проста именно во фридмановских координатах, трехмерное сечение $t = \text{const}$ (t — собственное время) является евклидовым.

В простейшем случае, при $P = 0$, мы уже знаем, что при $\rho = \rho_c$ расстояние между каждой парой точек растет пропорционально $t^{2/3}$, $a = a_1 t^{2/3}$.

Константа a_1 зависит от выбора масштаба сопутствующей системы координат. В самом деле, при любом a_1 можно найти такой момент t_1 , когда $a_1 t_1^{2/3} \equiv 1$, $a_1 = t_1^{-2/3}$.

Значит, сопутствующая координата r выбрана так, чтобы именно в момент t_1 она совпадала с обычными, выраженными в сантиметрах пространственными координатами. Поскольку выбор момента t_1 произволен, то произвольна и константа a_1 .

Только после выбора t_1 и a_1 определяется масштаб координаты r .

В случае $\rho = \rho_c$ все расчеты упрощаются. Как уже отмечалось, в начале эволюции отличие плотности от критической всегда мало. Поэтому в пределе, когда плотность велика, всегда можно производить расчеты с использованием закономерностей плоского мира.

Как понять тот факт, что мир является плоским при вполне определенной, отличной от нуля плотности вещества? Все четырехмерное многообразие, пространство — время, отнюдь не плоское. В случае $\rho = \rho_c$ плоскими являются лишь определенные трехмерные сечения пространства — времени, в данном случае — сечения, отвечающие одинаковому собственному времени совокупности удаляющихся друг от друга частиц.

Для того чтобы пояснить это, введем «лабораторную» систему отсчета; она определяется следующим видом интервала (положим $c = 1$)

$$ds^2 = g_{00} d\tau^2 - g_{11} dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

В этой системе коэффициент при угловой части не зависит от времени, т. е. длина окружности с радиусом (координатным) R все время постоянна. Лабораторное время τ и радиус R легко выражаются через фридмановские (сопутствующие) t и r .

Обозначая $a_1 r t^{-1/3} = \frac{R}{t} = z_*$, найдем

$$\left. \begin{aligned} R &= a_1 r t^{2/3} = t z_*; & \tau &= t \left(1 + \frac{2}{9} z_*^2\right)^{3/2}, \\ g_{00} &= \left(1 + \frac{2}{9} z_*^2\right)^{-1} \left(1 - \frac{4}{9} z_*^2\right)^{-1}; & g_{11} &= \left(1 - \frac{4}{9} z_*^2\right)^{-1}. \end{aligned} \right\} (16.4.2)$$

Так как $g_{11} > 1$ ($g_{11} = 1$ при $R = 0$), то радиус, определенный как расстояние точки от центра $\check{R} = \int_0^R \sqrt{g_{11}} dR$, больше радиуса

R , определенного как длина окружности, деленная на 2π . Следовательно, после введения лабораторного времени τ , соответствующее ему трехмерное пространство оказывается кривым, причем кривизна его положительна (сумма углов треугольника больше π , длина окружности меньше 2π).

Утверждение, что трехмерный мир является плоским при $\rho = \rho_c$, носило условный характер и было связано со специальным выбором сопутствующей системы координат и собственного времени.

Заметим, что g_{00} и g_{11} обращаются в бесконечность при $z_* = \frac{3}{2}$, т. е. при $a_1 r t^{-1/3} = \frac{3}{2}$; в координатах R и τ условие обращения g_{00} и g_{11} в бесконечность есть $R = \tau \sqrt{2/3}$ *).

Таким образом, с помощью «лабораторных», так называемых шварцшильдовских координат можно однозначно описать лишь определенный участок вокруг точки, выбранной в качестве начала координат.

Об этом мы говорили в § 1 гл. 3. Области, в которых можно ввести «лабораторные» системы названы R -областями. Следовательно, в расширяющемся мире с $\rho = \rho_c$ границей R и T областей (см. § 1 гл. 3) является мировая линия (в координатах r, t):

$$t = \left(\frac{2}{3} a_1 r \right)^3.$$

За этой границей лежит T -область (см. Новиков (1962с)).

*) При $R=0$ $g_{00}=g_{11}=1$, (напомним, что мы считаем $c=1$) при $R \rightarrow \tau \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$g_{00} \sim g_{11} \sim \left(1 - \frac{R}{\tau} \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^{-1/2}.$$

ГЛАВА 17

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА И НЕЙТРИНО; МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ НАБЛЮДЕНИЯМИ

§ 1. Красное смещение и уменьшение импульса

Красное смещение света в расширяющейся Вселенной является результатом эффекта Доплера. Пусть квант испущен в момент t_1 в точке r_1 с частотой ω_1 и к моменту t_2 пришел в близкую точку r_2 . Изменение его частоты дается формулой

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_1 \frac{u_{21}}{c}, \quad (17.1.1)$$

где u_{21} есть скорость движения вещества в точке 2 относительно вещества в точке 1. Формула справедлива для случая, когда скорость движения вещества направлена по линии r_{21} , соединяющей точки 1 и 2, т. е. по линии распространения кванта. Так как r_{21} мало, то и u_{21} мало, $u_{21}/c \ll 1$. В хаббловском распределении скорости $u_{21} = Hr_{21}$ так, что

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{1}{c} Hr_{21} \omega_1.$$

Это выражение является асимптотически точным в пределе малого, r_{21} , так как все поправки — учет кривизны пространства и релятивистские поправки к простой формуле (17.1.1), оказываются порядка $\left(\frac{u}{c}\right)^2$, т. е. более высокого порядка в r_{21} . Поэтому в дифференциальном виде имеем точное равенство

$$d\omega = -\frac{1}{c} H\omega dr. \quad (17.1.2)$$

Не существенно, был ли квант с частотой ω_1 испущен в точке r_1 или он пришел в эту точку откуда-то издалека и имеет частоту ω_1 в точке r_1 . (Важно только то, что ω_1 измерено в системе, движущейся вместе с веществом, находящимся в r_1 , а ω_2 — аналогично в точке 2 в соответствующей системе.) Равенство

(17.1.2) можно рассматривать как дифференциальное уравнение, с помощью которого шаг за шагом можно проследить за изменением частоты кванта, в частности, и в том случае, когда пройденный им путь и изменение частоты отнюдь не малы. Запишем $\frac{1}{c} dr = dt$ и $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{d \ln a}{dt}$.

В последней формуле a есть радиус мира, но с тем же успехом можно написать

$$H = \frac{1}{r_{12}} \frac{dr_{12}}{dt},$$

где r_{12} — расстояние между двумя фиксированными частицами, пропорциональное $a(t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} d\omega = -\omega \frac{d \ln a}{dt} dt, \quad \ln \omega + \ln a = \text{const}; \quad a\omega = \text{const}, \\ \omega = \omega_0 \frac{a_0}{a}. \end{aligned} \quad (17.1.3)$$

Таким образом, частота изменяется обратно пропорционально радиусу.

Совершенно аналогично можно рассмотреть движение материального тела. Под его скоростью w будем понимать скорость движения относительно среднего хаббловского движения вещества в той точке пространства, в которой находится тело в данный момент. Для простоты рассмотрим нерелятивистское движение $w \ll c$. Тогда по закону сложения скоростей

$$w_2 = w_1 - u_{21} = w_1 - Hr_{21}, \quad w_2 - w_1 = dw = -H dr.$$

Подставим $dr = w dt$, $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$, получим

$$dw = -\frac{1}{a} \frac{da}{dt} w dt$$

и снова

$$w = \frac{\text{const}}{a}. \quad (17.1.4)$$

В нерелятивистском случае количество движения тела $p = mw$, так что

$$p \sim \frac{1}{a}.$$

В общем случае, когда w сравнимо со скоростью света, применяя релятивистский закон сложения скоростей, можно убедиться, что закон $p \sim 1/a$ остается в силе, хотя теперь $p = \frac{m_0 w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$ и скорость w уже не будет обратно пропорциональна a .

Красное смещение квантов, очевидно, также согласуется с законом изменения количества движения: для кванта $p = \hbar\omega/c$. Длина волны кванта $\lambda = 2\pi c/\omega = 2\pi\hbar/p$. Также выражается через p и квантовомеханическая (дебройлевская) длина волны любого тела. Таким образом, оба закона — закон красного смещения для квантов и закон изменения количества движения произвольного тела можно совместно сформулировать так: в расширяющейся однородной модели Вселенной все длины волн меняются пропорционально изменению всех расстояний, т. е. пропорционально радиусу мира. Полезна следующая аналогия. Представим себе случай замкнутого мира; пусть в нем находится одна стоячая электромагнитная волна. Мир мы рассматриваем в данном случае как полый резонатор, в котором возбуждено определенное колебание (определенная гармоника), например, с n узлами.

При расширении мира номер гармоники и число узлов остается неизменным: естественно поэтому, что длина волны растет пропорционально радиусу шара. Такая трактовка неоднократно отмечалась раньше; см., например, Уилер (1958, 1960).

Рассматривая изменение частоты при последовательном прохождении малых отрезков пути (dr), мы могли не учитывать гравитационное изменение частоты, которое здесь порядка $(dr)^2$. После интегрирования получен точный результат для немалых отрезков. При непосредственном вычислении изменения частоты на конечном пути r_{12} гравитационное изменение частоты нужно было бы, очевидно, учесть; см. § 4 этой главы.

§ 2. Наблюдаемые величины и горизонт

Сопоставление выводов теории расширяющейся Вселенной с данными наблюдений является трудной, практически не разрешенной и в настоящее время проблемой.

При изучении космологических вопросов мы имеем дело с расстояниями, на которых уже сказывается кривизна пространства. Интерес к большим расстояниям в особенности возрос после открытия квазаров с большими красными смещениями. Поэтому нельзя пользоваться евклидовой геометрией с ее наглядными привычными представлениями*). Само понятие «расстояния» не имеет определенного однозначного смысла. Необходима предварительная математическая работа для получения соотношений между наблюдаемыми величинами**). Во все

*) Ниже, в § 4 гл. 17 будет специально рассмотрен вопрос о пределах применимости евклидова приближения.

**) Эта принципиальная постановка особенно подчеркнута в известных обзорах Мак-Витти (1959a, 1962a, b).

формулы теории входят постоянная Хаббла и плотность материи. Постоянная Хаббла может считаться известной с точностью хотя бы $\pm 50\%$. Плотность материи может находиться в пределах $3 \cdot 10^{-31} \div 10^{-28}$ (ср. § 7 гл. 15) за счет возможных больших количеств трудно наблюдаемых форм материи. Поэтому в ряде работ приводятся соотношения между наблюдаемыми величинами при различных предположениях о ρ и H . Ниже будет приведена сводка соответствующих формул и кривых. В принципе сравнение формул, зависящих от плотности как параметра, с наблюдениями, должно привести к определению плотности. Однако от далеких источников мы наблюдаем свет, испущенный давно, т. е. испущенный объектами, находящимися на более ранней стадии развития по сравнению с близкими объектами. Поэтому обработка наблюдений зависит от предположений об эволюционном эффекте и до сих пор выводы остаются очень неопределенными.

Начнем с качественных особенностей наблюдаемой картины. Предполагается, что был момент, когда $\rho = \infty$, $a = 0$, и условимся этот момент обозначать $t = 0$. Ясно, что нельзя увидеть свет, испущенный ранее, уже потому, что при приближении к этому моменту оптическая толща, $\int \sigma dx$, где σ — коэффициент поглощения света — расходится.

Можно определить, какая частица должна испустить свет в момент $t = 0$, чтобы он был принят нами сегодня, в момент $t = T$. Совокупность этих частиц образует сферу с центром в точке наблюдения. Эту сферу можно назвать горизонтом. Если правильны представления о том, что было $\rho = \infty$, то принципиально можно получить информацию лишь о веществе, находящемся внутри горизонта (подробнее см. гл. 20).

Найдем уравнение горизонта. Распространение света подчиняется условию $ds = 0$. Начало координат помещаем в точку наблюдения. Принимаемые лучи движутся к началу координат. Интервал дается выражением (угловая часть опущена)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dr^2,$$

значит, для луча, распространяющегося по радиусу,

$$a(t) dr = -c dt.$$

Знак минус стоит потому, что рассматривается луч, распространяющийся от периферии к центру. Иногда координаты вводятся иначе: $r' = \sin r$ для $\rho > \rho_c$ и $r' = \text{sh } r$ для $\rho < \rho_c$; тогда $dr =$

$= (dr/dr') dr' = \varphi(r') dr'$. Все приводимые ниже наблюдательные результаты, естественно, не зависят от переменных, используемых в промежуточных выкладках. Выражения $a(t)$ и $\varphi(r')$ зависят от постоянной Хаббла и плотности.

Выражения имеют разный вид при $\rho_0 > \rho_c$ и $\rho_0 < \rho_c$. Введем снова $\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi\rho_0 G}{3H_0^2}$.

Получим

$$\Omega > 1, \quad a(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega - 1}}, \quad \varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - r'^2}},$$

$$\Omega < 1, \quad a(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega}}, \quad \varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}},$$

$\Omega = 1$, $a(t_0) = b_1$ — произвольно, $\varphi(r) = 1$ (см. § 4 гл. 16). Функции $a(t)$ к тому же различны в зависимости от уравнения состояния. При $P=0$ она легко получается интегрированием уравнений § 2 гл. 15 и удобно записывается в параметрическом виде (см., например, Ландау и Лифшиц (1962)) *)

$$\Omega > 1, \quad a = a_m (1 - \cos \eta), \quad t = \frac{a_m}{c} (\eta - \sin \eta), \quad \Omega = \frac{2}{1 + \cos \eta},$$

$$\Omega < 1, \quad a = a_m (\operatorname{ch} \eta - 1), \quad t = \frac{a_m}{c} (\operatorname{sh} \eta - \eta), \quad \Omega = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \eta}.$$

Последнее уравнение позволяет, задавшись ρ_0 и H_0 , найти сегодняшнее Ω и отсюда a_m и η_0 (**), причем безразмерное η_0 зависит только от безразмерного $\Omega = \rho_0/\rho_c$. Мы изменили обозначения: вместо a_0 пишем a_m , чтобы не путать с $a(t_0)$. При $P = \varepsilon/3$ соответственно

$$\Omega > 1, \quad a = a'_m \sin \eta, \quad t = \frac{a'_m}{c} (1 - \cos \eta), \quad \Omega = \frac{1}{\cos^2 \eta},$$

$$\Omega < 1, \quad a = a'_m \operatorname{sh} \eta, \quad t = \frac{a'_m}{c} (\operatorname{ch} \eta - 1), \quad \Omega = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta}.$$

Наконец, особенно простые формулы имеют место при

$$\Omega = 1, \quad P = 0 \quad a(t) = b_1 t^{2/3}, \quad P = \frac{\varepsilon}{3} \quad a(t) = b_1 t^{1/2}.$$

*) Здесь в формулах, в отличие от принятых обозначений, Ω не константа, а переменная. Она обозначает отношение ρ/ρ_c для любого t .

***) Величину η_0 находим из $\Omega = \Omega(\eta)$; для нахождения a_m выражаем $H_0 = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ через η и a_m .

Сопутствующая координата горизонта r'_0 определяется условием

$$\int_0^{r'} \varphi(r') dr' = c \int_0^T \frac{dT}{a(t)}.$$

Возраст T выражается через H и ρ ; см. § 3 и 7 гл. 15.

Отметим, что при малых t радиус $a(t) \rightarrow 0$, но так ($a \sim t^{1/2}$ или $a \sim t^{2/3}$), что интеграл сходится. Найдем

$$R_0 = a(T) r'_0.$$

Величина R_0 есть деленная на 2π длина экватора сферы, на которой сегодня находятся частицы горизонта.

Далее найдем

$$V_0 = a^3(T) 4\pi \int_0^{r'_0} \varphi(r') r'^2 dr',$$

$$M_0 = \rho_0 V_0, \quad N_0 = n_0 V_0.$$

V_0 — это сегодняшней объем, заключенный внутри горизонта, M_0 — сумма масс частиц вещества в объеме V_0 , N_0 есть полное число нуклонов в объеме V_0 (n_0 — их плотность)*).

Общий вид ответа удобно записать, выделяя размерные множители

$$R_0 = \frac{c}{H_0} l(\Omega);$$

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 g(\Omega);$$

$$M_0 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 \rho_0 g(\Omega);$$

$$N_0 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 n_0 g(\Omega).$$

Функции g для двух уравнений состояния ($P=0$, g_1) и ($P = \frac{\epsilon}{3}$, g_2) представлены на графике рис. 78. Для справок ниже приводим формулы; следует предупредить читателя, что формулы громоздки и вычисления по ним сложны.

*) В случае $P \neq 0$ имеют смысл лишь формулы для V и N , но не для M , так как масса в сопутствующем элементе объема меняется в ходе расширения.

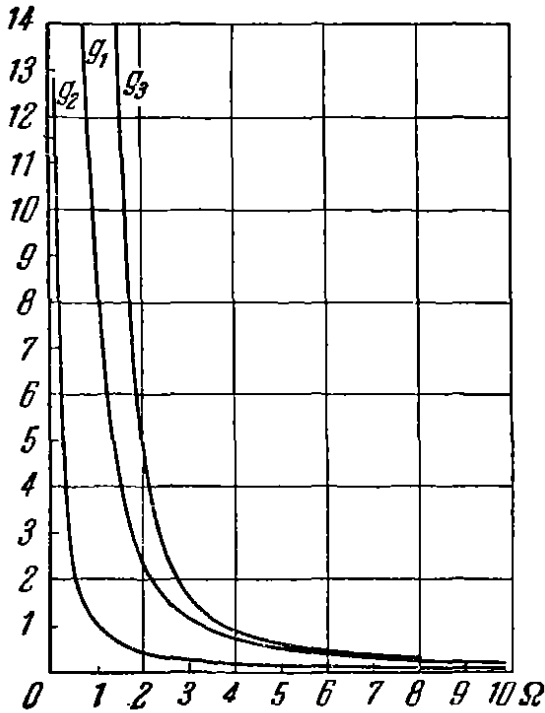


Рис. 78. Безразмерный объем и число частиц, заключенные в области, доступной для наблюдения (внутри горизонта). Кривая g_1 для $P=0$ и кривая g_2 для $P = \epsilon/3$ как функции безразмерной плотности Ω . Для сравнения приведена кривая g_3 полного объема и числа частиц замкнутого мира (определенная только для $\Omega > 1$), $P=0$.

Безразмерные функции $l(\Omega)$ и $g(\Omega)$ имеют вид, зависящий от уравнения состояния вещества:

$$P=0, \quad l=l_1(\Omega)=\frac{2}{\Omega},$$

$$\Omega < 1, \quad g_1(\Omega) = \frac{3}{2(1-\Omega)^{3/2}} \left[\left(\frac{2}{\Omega} - 1 \right) \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(\frac{1}{\Omega} - 1 \right)} - \operatorname{arsh} \sqrt{-\frac{4}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)} \right],$$

$$\Omega = 1, \quad g_1(\Omega) = 8,$$

$$1 \leq \Omega \leq 2, \quad g_1(\Omega) = \frac{3}{2(\Omega-1)^{3/2}} \left[\arcsin \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)} - \left(\frac{2}{\Omega} - 1 \right) \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)} \right],$$

$$\Omega \geq 2, \quad g_1(\Omega) = \frac{3}{2(\Omega-1)^{3/2}} \left[\pi - \arcsin \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)} + \left(1 - \frac{2}{\Omega} \right) \sqrt{\frac{4}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)} \right].$$

В случае

$$P = \frac{\varepsilon}{3}; \quad l = l_2 = \frac{1}{\sqrt{\Omega}},$$

$$\Omega < 1, \quad g_2 = \frac{3}{2(1-\Omega)^{3/2}} \left[\frac{\sqrt{1-\Omega}}{\Omega} - \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1}{\Omega} - 1} \right],$$

$$\Omega = 1, \quad g_2 = 1,$$

$$\Omega > 1, \quad g_2 = \frac{3}{2(\Omega-1)^{3/2}} \left[\arcsin \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega}} - \frac{1}{\Omega} \sqrt{1-\Omega} \right].$$

Наконец, приводим асимптотику

$$\Omega \gg 1, \quad g_1 = \frac{3\pi}{2} \Omega^{-3/2}, \quad g_2 = \frac{3\pi}{4} \Omega^{-3/2},$$

$$\Omega \ll 1, \quad g_1 = \frac{6}{\Omega^2}, \quad g_2 = \frac{3}{2\Omega}.$$

Следует особенно обратить внимание на непрерывность кривых при критическом значении плотности, т. е. при $\Omega=1$. При $\Omega=1$ происходит качественный скачок — изменение однородной Вселенной от бесконечной (открытой) модели при $\Omega \leq 1$ к закрытой модели при $\Omega > 1$.

При $\Omega < 1$ общий объем V , масса M , число частиц N бесконечны, при $\Omega > 1$ величины V , M , N конечны. Однако в обоих случаях доступная наблюдению часть Вселенной конечна и в

этом смысле различие между открытой и замкнутой Вселенной оказывается меньше, чем можно было ожидать *).

Таким образом, если плотность велика, то Вселенная замкнута, и в случае $P=0$ мы в принципе можем наблюдать почти все вещество Вселенной, а в случае $P=\epsilon/3$ — только половину вещества.

Можно ли в замкнутом мире наблюдать один и тот же объект с двух сторон? Пользуясь аналогией с земным шаром, вопрос можно поставить так: можно ли, находясь на Северном полюсе, наблюдать одну и ту же радиостанцию, например Московскую, один раз по ближайшему лучу, второй раз — по лучу, который обошел по дуге большого круга через Южный полюс и пришел к наблюдателю на Северном полюсе.

На земном шаре с помощью длинных радиоволн, огибающих земную поверхность, это возможно. Во Вселенной, находящейся в стадии расширения, это невозможно: слишком мало времени проходит с момента $t=0$, $\rho=\infty$. Луч, испущенный в этот момент или позже, не успеет дойти до наблюдателя к сегодняшнему моменту по длинному пути. Это может стать возможным, если $\Omega > 1$ и $P=0$ — через несколько миллиардов лет, когда расширение сменится сжатием и наши потомки будут говорить о (хаббловском) синем смещении.

Подчеркнем, что речь идет о принципиальной возможности, ограниченной не сегодняшним уровнем экспериментальной техники, а конечной скоростью распространения света; никакая нейтринная астрономия не расширит горизонта **).

Следовательно, сами утверждения о конечности или бесконечности мира принципиально связаны с экстраполяцией известной нам ситуации в нашей окрестности на области не только далекие, но и ненаблюдаемые сейчас.

Конечно, само понятие «принципиального» горизонта наблюдаемости имеет место только потому, что в моделях есть момент $\rho=\infty$ и за конечное время от этого момента свет от далеких областей не успевает дойти до наблюдателя. Если было бы возможно, например, неограниченное осциллирование модели (повторяющиеся сжатия и расширения), то никакого принципиаль-

*) Общее число нуклонов в замкнутой Вселенной, $N_{\text{пол}}$ (относящееся к $\Omega > 1$), также можно выразить в безразмерном виде, $N_{\text{пол}} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{c}{H_0}\right)^3 n_0 g_3(\Omega)$:

при этом $g_3 = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{(\Omega - 1)^{3/2}}$; функция g_3 также показана на рис. 78. Заме-

тим, что при $\Omega \gg 1$ $g_1 \rightarrow g_3$, $g_2 \rightarrow g_3/2$.

**) Горизонт сам постепенно расширяется с течением времени, по мере уменьшения H и увеличения T . Однако для заметного увеличения R_0 , H_0 , V_0 потребуется время порядка T — миллиарды лет!

ного горизонта, очевидно, не было бы, а возможность получения информации от далеких объектов ограничивалась бы проникающей способностью излучения при прохождении через вещество.

О возможности подхода к исследованию проблемы вб эпохе до момента $\rho = \infty$ см. далее, гл. 20.

§ 3. Графики и формулы для наблюдаемых величин

Для характеристики красного смещения введем величину

$$\Delta = 1 - \frac{\omega_{\text{прин}}}{\omega_{\text{исп}}} = \frac{\omega_{\text{исп}} - \omega_{\text{прин}}}{\omega_{\text{исп}}}. \quad (17.3.1)$$

Эта величина отличается от часто применяемой z :

$$z = \frac{\lambda_{\text{прин}} - \lambda_{\text{исп}}}{\lambda_{\text{исп}}} \quad (17.3.2)$$

(ω — частота, λ — длина волны света). Очевидно,

$$z = \frac{\Delta}{1 - \Delta}, \quad \Delta = \frac{z}{1 + z}. \quad (17.3.3)$$

Преимущество Δ связано с конечной областью изменения, от $\Delta = 0$ (вблизи точки наблюдения) до $\Delta = 1$ на горизонте. $\Delta \rightarrow 1$ соответствует тому, что частота наблюдаемого света стремится к нулю, $\Delta = 1$ есть предел возможности наблюдения. Переменная z меняется от нуля до ∞ , что затрудняет построение графиков *).

Рассмотрим угол θ , под которым виден объект данного линейного размера l . В евклидовой геометрии

$$\theta = \frac{l}{R}; \quad R = \frac{l}{\theta}, \quad (17.3.4)$$

где R — расстояние до объекта. В кривом мире назовем, по определению, угловым расстоянием и обозначим R_1 величину $\frac{l}{\theta}$. Длина окружности с центром в точке наблюдения, на которой в момент испускания света находится рассматриваемый объект, равна $2\pi R_1$. Сопоставляя с выражением интервала, найдем $R_1 = a(t_1) r'_2$, где r'_2 — сопутствующая координата объекта (см. стр. 430). Момент t_1 испускания света задается условием, чтобы в точку наблюдения (на Землю) свет пришел сегодня. Следовательно вблизи горизонта $t_1 \rightarrow 0$, $a(t_1) \rightarrow 0$, а значит, и $R_1 \rightarrow 0$, угол θ неограниченно возрастает.

Отсюда следует, что угол θ для объекта с данным l проходит через минимум. Наличие минимума θ и максимума R_1

*) Переменная, аналогичная Δ , введена Мак-Витти (1962с) и обозначена Y . Связь Y и Δ дается соотношением $Y + \Delta = 1$.

является общим свойством расширяющейся Вселенной, справедливым и для открытой и для закрытой модели. Кривые зависимости R_1 от Δ для ряда случаев приведены у Уилера (1958, 1960), однако лишь для замкнутого мира. Новый подход к физической интерпретации этого минимума будет изложен в связи с расчетом углов в неоднородной Вселенной (§ 7).

Для сравнительно близких объектов, при $\Delta \ll 1$, геометрия евклидова. Доплер-эффект можно рассматривать нерелятивистским образом $\Delta\omega = -\frac{u}{c}\omega$, изменение расстояния за время прохождения света мало. Значит, в пределе при малых Δ

$$u = c \frac{\Delta\omega}{\omega} = c \Delta = HR_1, \quad R_1 = \frac{c}{H} \Delta. \quad (17.3.5)$$

Выразим ответ для любых расстояний с помощью функции безразмерного углового расстояния:

$$R_1 = \frac{c}{H_0} \psi(\Delta). \quad (17.3.6)$$

Можно показать, что функция ψ зависит не только от самой величины Δ , но и от отношения $\Omega = \rho_0/\rho_c$ сегодняшней плотности ρ_0 к сегодняшней критической плотности $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$. Вид ψ различен при $P=0$ и $P=\varepsilon/3$. Общими свойствами функций являются

$$\psi(\Delta \rightarrow 0, \Omega) \equiv \Delta; \quad \psi(\Delta = 1, \Omega \neq 0) = 0. \quad (17.3.7)$$

На рис. 79 и 80 приведены кривые $\psi(\Delta, \Omega)$ для $\Omega=0, 1/10, 1/3, 1, 3, 10$. На рис. 79 даны кривые для $P=0$, на рис. 80 для $P=\varepsilon/3$. Пунктирная кривая представляет собой геометрическое место максимумов ψ . Следует особенно обратить внимание на предельный случай $\Omega=0$: чем меньше Ω , тем дальше находится максимум, при Δ , более близком к единице. В пределе при $\Omega=0$, т. е. для модели Милна, функция ψ имеет простой вид:

$$\psi(\Delta; 0) = \Delta \left(1 - \frac{\Delta}{2} \right). \quad (17.3.8)$$

Кривые для $\Omega=0$ на двух графиках $P=0; P=\varepsilon/3$ естественно совпадают. При $\Omega=0$ функция не имеет максимума или, точнее, максимум оказывается на краю интервала определения функции, при $\Delta=1$.

При большой плотности, $\Omega \gg 1$, максимум ψ приходится на $\Delta = 0,25$, $\psi = \frac{3\sqrt{3}}{8} \Omega^{-1/2} = \frac{0,65}{\sqrt{\Omega}}$ (в случае $P=0$) или $\Delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,29$; $\psi = \frac{1}{2\sqrt{\Omega}}$ (в случае $P=\varepsilon/3$).

Для справок приводим формулы:

$$P=0, \quad \psi = \frac{2(1-\Delta)}{\Omega^2} [2(\Omega-1)\Delta + (\Omega-2) \times \\ \times (\sqrt{1 + (\Omega-2)\Delta - (\Omega-1)\Delta^2} - 1)], \quad (17.3.9)$$

$$P = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \psi = \frac{(1-\Delta)}{\Omega} [\sqrt{1 + 2(\Omega-1)\Delta - (\Omega-1)\Delta^2} - 1 + \Delta]. \quad (17.3.10)$$

Разложение при малых Δ будет рассмотрено отдельно, в § 4 этой главы.

Наблюдаемая светимость объекта, для которого известны размеры, яркость и спектр, а также красное смещение, полностью определяются функцией $\psi(\Delta, \Omega)$. Удобно расчленить вопрос о светимости на вопрос о яркости и об угловых размерах.

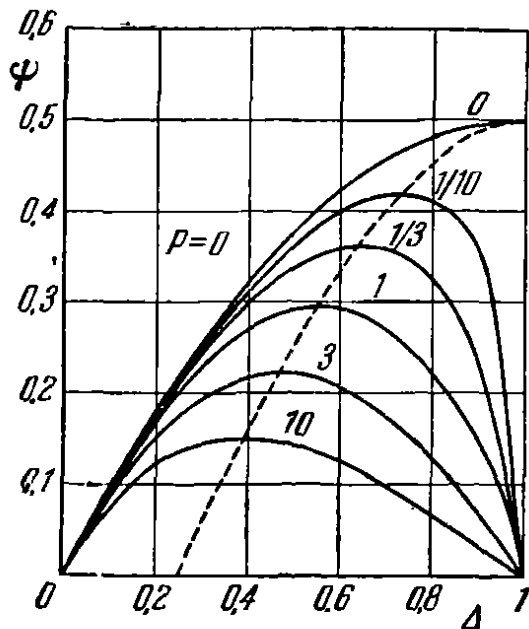


Рис. 79. Безразмерное расстояние ψ (измеренное по видимому угловому диаметру объекта с фиксированным линейным размером) в зависимости от красного смещения Δ при разных значениях безразмерной плотности Ω (значения Ω даются цифрами над кривыми) и при $P=0$.

Пунктирная линия — геометрическое место максимумов кривых.

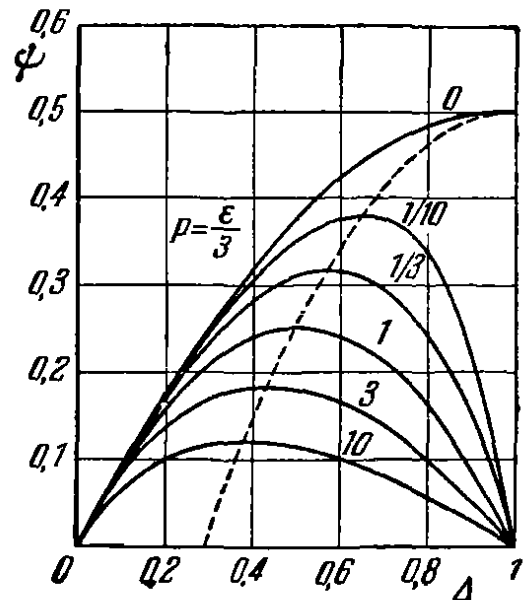


Рис. 80. Безразмерное расстояние ψ (измеренное по видимому угловому диаметру объекта с фиксированным линейным размером) в зависимости от красного смещения Δ при разных Ω и при $P = \varepsilon/3$.

Мерой яркости является количество световой энергии, проходящей к наблюдателю, на единицу площади приемника, нормального лучу, отнесенное к телесному углу, $I = d^2E/d\Omega ds$. В силу изотропии Вселенной элемент телесного угла обычным образом выражается в сферических угловых координатах,

$dE = \sin \theta d\varphi d\theta$. Наряду с интегральной по спектру яркостью можно ввести спектральную $dE = F(\omega) d\omega dE ds$.

Из оптики известно, что в плоском пространстве яркость не зависит ни от расстояния, ни от преломления лучей, если только нет поглощения света.

Для расширяющейся Вселенной есть аналогичная теорема: яркость не зависит ни от чего, кроме красного смещения Δ , в частности, не зависит от кривизны пространства, плотности вещества и т. п. (предполагается, что на пути луча нет поглощения или рассеяния света).

Излучение черного тела, соответствующее абсолютной температуре $T_{\text{исп}}$, преобразуется в излучение черного тела с температурой $T_{\text{набл}} = (1 - \Delta) T_{\text{исп}}$.

Формула Планка имеет вид

$$F(\omega, T) = \text{const } \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega = \text{const } \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}. \quad (17.3.11)$$

Полный поток излучения в элементе телесного угла

$$I = \int_0^\infty F(\omega, T) d\omega = \text{const } T^4, \quad (17.3.12)$$

следовательно, при красном смещении I преобразуется по закону

$$I = I_0 (1 - \Delta)^4. \quad (17.3.13)$$

Спектр произвольного вида, характеризуемый спектральной функцией $F(\omega)$, преобразуется по следующему закону:

$$F(\omega_{\text{набл}}) d\omega_{\text{набл}} = (1 - \Delta)^4 F(\omega_{\text{исп}}) d\omega_{\text{исп}} = (1 - \Delta)^3 F\left(\frac{\omega_{\text{набл}}}{1 - \Delta}\right) d\omega_{\text{набл}};$$

при этом

$$\omega_{\text{набл}} = (1 - \Delta) \omega_{\text{исп}}, \quad d\omega_{\text{набл}} = (1 - \Delta) d\omega_{\text{исп}}, \quad (17.3.14)$$

так что интегральная (болومترическая) яркость всегда убывает, как $(1 - \Delta)^4$, независимо от формы спектра источника.

Дифференциальный закон изменения спектральной яркости для данной фиксированной частоты зависит от вида спектра испускания. Формула для произвольного спектра испускания приведена выше. В частном случае степенного спектра испускания

$$F(\omega_{\text{исп}}) d\omega_{\text{исп}} = A \omega_{\text{исп}}^n d\omega_{\text{исп}} \quad (17.3.15)$$

наблюдаемый спектр, подвергшийся красному смещению, имеет также степенной вид:

$$F(\omega_{\text{набл}}) d\omega_{\text{набл}} = (1 - \Delta)^{3-n} \omega_{\text{набл}}^n d\omega_{\text{набл}}. \quad (17.3.16)$$

Выяснив закон изменения яркости, т. е. потока света в единице телесного угла, обратимся к вопросу о полном количестве света, попадающем к наблюдателю от данного небесного тела.

Далекая звезда не разрешается по угловым размерам. Измеряется не яркость ее поверхности, а поток энергии от всей звезды, приходящийся на единицу поверхности в точке наблюдения.

В области, где применима евклидова геометрия, телесный угол, под которым виден источник, равен отношению проекции площади источника к квадрату расстояния

$$\Xi = \frac{s}{R^2}. \quad (17.3.17)$$

В расширяющейся Вселенной мы должны подставить R_1 вместо R , так что

$$\Xi = \frac{s}{\left(\frac{c}{H} \psi\right)^2}. \quad (17.3.18)$$

Полное количество света, приходящееся на 1 см^2 поверхности у наблюдателя, выражается через поток энергии звезды L :

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi \left(\frac{c}{H}\right)^2} \frac{(1-\Delta)^4}{\psi^2}. \quad (17.3.19)$$

Можно определить «болометрическое расстояние» D как расстояние, на котором в евклидовом пространстве неподвижный объект дал бы равный поток энергии наблюдателю.

Из сравнения

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi D^2} = \frac{L(1-\Delta)^4}{4\pi \left(\frac{c}{H}\right)^2 \psi^2} \quad (17.3.20)$$

находим

$$D = \frac{c}{H} \frac{\psi(\Delta, \Omega)}{(1-\Delta)^2}. \quad (17.3.21)$$

При малых Δ имеем $\psi(\Delta, \Omega) \approx \Delta$ и поэтому

$$D = \frac{c}{H} \Delta = R_1,$$

т. е., естественно, все различные определения расстояния совпадают. При Δ , сравнимых с 1, знаменатель $(1-\Delta)^2$ играет большую роль. С ростом Δ величина D монотонно растет и не имеет максимума, в отличие от R_1 . Во всех вариантах ($P=0$, $P=e/3$, любое Ω) при $\Delta \rightarrow 1$ $D \rightarrow \infty$. Это значит, что красное смещение существенно уменьшает поток энергии далеких звезд.

Для практических наблюдений важен поток энергии в части спектра, воспринимаемой фотопластинкой или другим приемником излучения. Теория спектральных поправок, учитывающих чувствительность приемника, основана на формуле (17.3.14) и хорошо разработана (Мак-Витти (1959; 1962a, b, c)); мы не будем ее здесь приводить.

В выражении (17.3.12) \tilde{E}_1 есть энергия, принимаемая в единицу собственного времени наблюдателя, L есть поток энергии

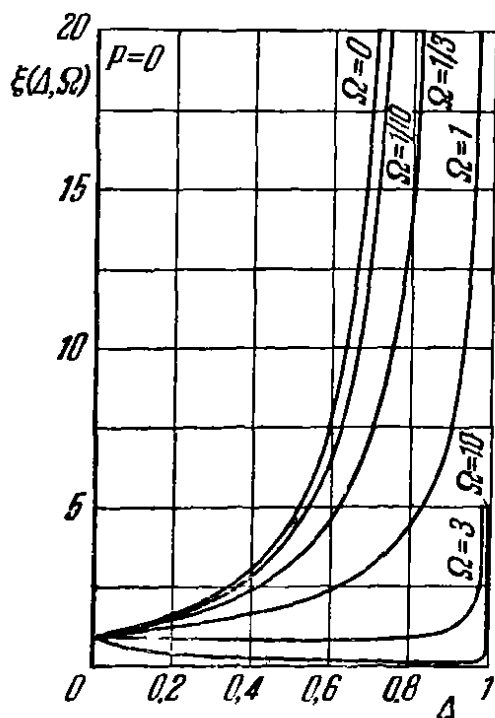


Рис. 81. Безразмерная поправка $\xi(\Delta, \Omega)$ для количества материи в слое с данным красным смещением как функция Δ для разных Ω и $P=0$.

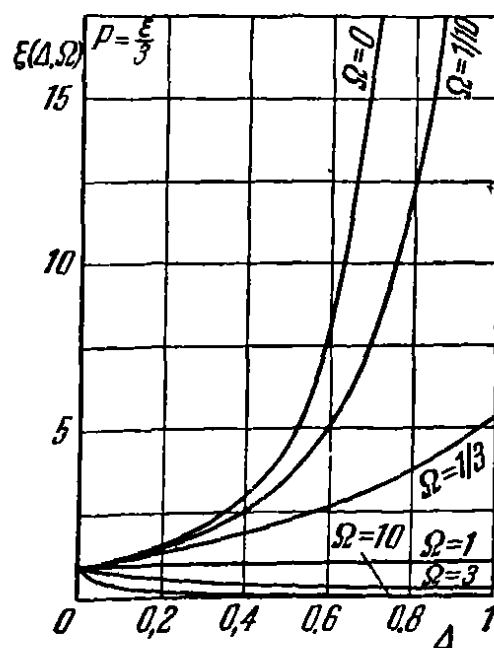


Рис. 82. Безразмерная поправка $\xi(\Delta, \Omega)$ для количества материи в слое с данным красным смещением как функция Δ для разных Ω и $P = \xi/3$.

звезды за единицу ее собственного времени. Здесь, как и выше, фактически учтено преобразование времени: если на звезде между двумя явлениями (например, двумя вспышками) проходит время τ , то наблюдатель воспримет световые сигналы об этих явлениях с бóльшим интервалом, $\tau_{\text{набл}} = \tau/1 - \Delta$.

Наконец, нам остается обсудить еще один тип наблюдений, связанных с количеством вещества*), заключенным в слое с красным смещением между Δ и $\Delta + d\Delta$. Начнем опять с классической картины: в евклидовой статической Вселенной, очевидно,

$$dM = \rho_0 4\pi R^2 dR, \quad (17.3.22)$$

*) Такой тип наблюдений рассмотрен также Ван Албада.

или, если говорить о числе частиц (например, нуклонов)

$$dN = n_0 4\pi R^2 dR. \quad (17.3.23)$$

Подставим вместо R его выражение через Δ . При малых Δ , $R = \frac{c}{H} \Delta$ получим

$$dN = n_0 \frac{4\pi c^3}{H_0^3} \Delta^2 d\Delta \quad (17.3.24)$$

и аналогично для dM .

Введем теперь функцию $\xi(\Delta, \Omega)$, «исправляющую» классическую формулу: в действительности в расширяющейся искривленной Вселенной

$$dN = n_0 \frac{4\pi c^3}{H_0^3} \xi(\Delta, \Omega) \Delta^2 d\Delta. \quad (17.3.25)$$

Эта функция приводится также для двух случаев: $P=0$ (рис. 81) и $P=\epsilon/3$ (рис. 82). Функция ξ меняется в широких

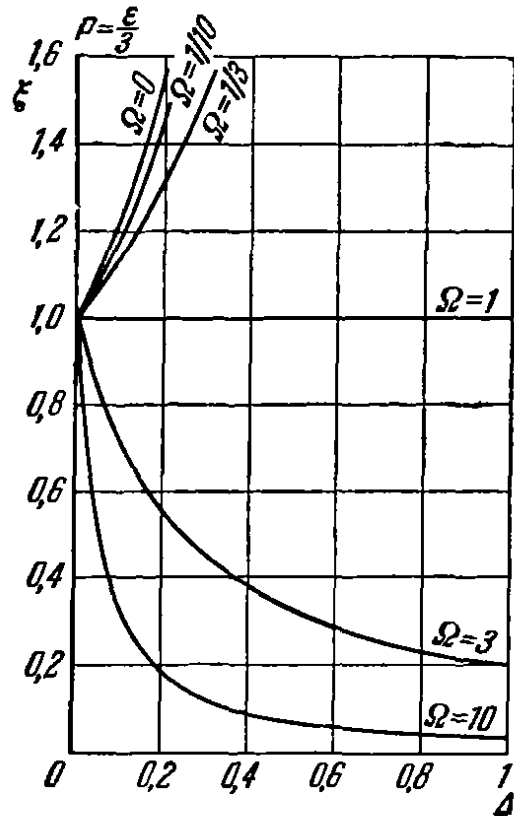
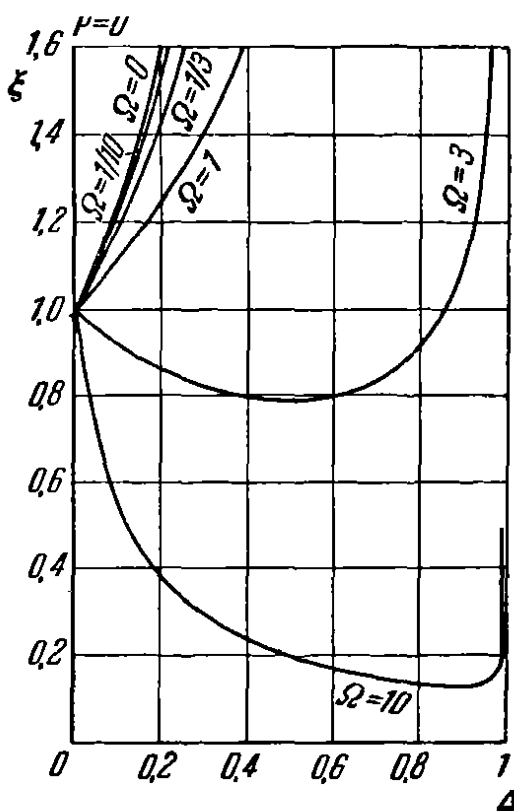


Рис. 83. То же самое, что на рис 81, но в увеличенном масштабе.

Рис. 84. То же самое, что на рис. 82, но в увеличенном масштабе.

пределах, поэтому для каждого случая приводится отдельно график, выполненный в большом масштабе (рис. 83 и 84), на котором удобно считывать значения ξ при малых $\Delta \ll 1$. По смыслу поправки ясно, что при $\Delta \rightarrow 0$ тождественно имеем $\xi \rightarrow 1$

при любых Ω . При малых Ω кривые ξ достигают значений, во много раз превышающих единицу.

Кривые даны для $\Omega=0$; $1/10$; $1/3$; 1 ; 3 ; 10 . При $\Omega=0$ (модель Милна) имеет место простая формула

$$\xi = \frac{(2 - \Delta)^2}{4(1 - \Delta)^3}. \quad (17.3.26)$$

При $P=0$, $\Delta \rightarrow 1$; $\xi \rightarrow \infty$ при любых Ω , как видно из приведенных рисунков. Резкая зависимость ξ от Ω , возможно, будет полезна для наблюдательного определения основной величины Ω . (См. по этому поводу § 9 и 10 этой главы.) Через функцию ξ выражается также распределение объектов по наблюдаемой величине, которым мы займемся ниже, в § 5.

При практическом применении формулы (17.3.25) часто делается предположение, что число наблюдаемых объектов определенного типа, например, число галактик в данном слое, пропорционально общему числу нуклонов в этом слое. В случае $P=0$ можно сказать проще, что число галактик пропорционально общей массе вещества в данном слое.

Случай $P = \epsilon/3 = \rho c^2/3$ соответствует предположению, что в общей плотности ρ главную часть составляют кванты и нейтрино, а плотность обычного вещества, из которого состоят звезды, составляет малую долю ρ . Эта доля к тому же переменная, так как в ходе расширения происходит изменение энергии квантов и нейтрино; поэтому по закону адиабатического расширения вещества с $P = \rho c^2/3$ плотность нуклонов

$$n = \text{const } \rho^{3/4}. \quad (17.3.27)$$

В этом случае естественно предположение, что плотность галактик и т. п. объектов пропорциональна именно n , а не ρ . Поправочная функция ξ дается именно для dN и n , а не для dM и ρ .

Для справок приводим общие формулы, к сожалению, весьма громоздкие и неудобные, а также некоторые частные случаи.

Первый случай: $P=0$

$$\xi = \frac{4[2(\Omega - 1)\Delta + (\Omega - 2)(k - 1)]^2}{\Omega^4 \Delta^2 k}, \quad (17.3.28)$$

где $k = \sqrt{1 + (\Omega - 2)\Delta - (\Omega - 1)\Delta^2}$.

Асимптотика:

$$\begin{aligned} \Delta \ll 1, \quad \xi &= 1 + \Delta(2 - \Omega), \\ 1 - \Delta \ll 1, \quad \xi &= \frac{4}{\Omega^{5/2} \sqrt{1 - \Delta}}. \end{aligned} \quad (17.3.29)$$

Выражение для частного случая $\Omega=0$ см. (17.3.26). Выражение для $\Omega=1$:

$$\xi = \frac{4(2-\Delta-2\sqrt{1-\Delta})}{\Delta^2\sqrt{1-\Delta}}. \quad (17.3.30)$$

Во втором случае: $P = \frac{\varepsilon}{3}$

$$\xi = \frac{1}{\Delta^2\Omega^2\sqrt{\Omega-(\Omega-1)(1-\Delta)^2}} \left\{1-\Delta-\sqrt{\Omega-(\Omega-1)(1-\Delta)^2}\right\}^2, \quad (17.3.31)$$

асимптотика

$$\Delta \ll 1, \quad \xi = 1 + \Delta(2-2\Omega). \quad (17.3.32)$$

$$1-\Delta \ll 1, \quad \xi = \frac{1}{\Omega^{3/2}}. \quad (17.3.33)$$

Частный случай $\Omega=1, \xi=1$ (тождественно при всех Δ).

Функция ξ , характеризующая распределение вещества по слоям, просто связана с функцией $g(x)$ (см. выше § 2 гл. 17), дающей общее количество вещества внутри горизонта:

$$g(\Omega) = 3 \int_0^1 \xi(\Delta, \Omega) \Delta^2 d\Delta. \quad (17.3.34)$$

При $P=0, \xi \rightarrow \infty$ если $\Delta \rightarrow 1$, но так, что интеграл сходится, за исключением случая, когда $\Omega=0$.

Отметим, наконец, еще удобную формулу, которая связывает dt и красное смещение (для $P=0$):

$$H_0 dt = \frac{dz}{(1+z)^2\sqrt{1+\Omega z}} = \sqrt{\frac{1-\Delta}{1+(\Omega-1)\Delta}} d\Delta. \quad (17.3.35)$$

Хотя сама величина dt и не является наблюдаемой, но она входит в выражения для таких наблюдаемых величин, как оптическая толща, полное излучение из слоя с Δ , меняющимся в заданных пределах, и т. п.

§4. Первое приближение и евклидово пространство.

Параметр ускорения

Выше мы систематически сравнивали результаты с простейшей классической картиной евклидовой Вселенной, в которой есть единственное, элементарное понятие расстояния R , количество получаемого наблюдателем света от неподвижного источника убывает как R^{-2} , а объем растет как R^3 и т. д., и общая плотность вещества никак не влияет ни на структуру пространства, ни на наблюдаемые зависимости.

Точные формулы, относящиеся к теории расширяющейся Вселенной, зависят как от плотности материи, так и от ее уравнения состояния; в частности, выше давались формулы для $P=0$ и $P=\epsilon/3$.

Ясно, что при экспериментальном исследовании, в первую очередь, и с большей точностью, будут получены данные в более близких к нам областях. Естественно при их обработке разложить теоретические формулы в ряд по возрастающим степеням Δ . В этом ряду первый член обязательно должен совпадать с классической картиной, а следующие члены представляют собой поправки к этой картине.

Но поправки, зависящие от кривизны пространства, пропорциональны квадрату расстояния. Эти поправки должны быть пропорциональны плотности, а чтобы получить безразмерную величину, нужно взять комбинацию $G\rho R^2/c^2$. Расстояние пропорционально красному смещению, следовательно, указанные поправки порядка Δ^2 . Отсюда следует вывод, что формулы, в которых поправки учтены, включая только члены первого порядка по Δ , могут быть систематически получены без учета кривизны пространства.

Рассмотрим картину движения в евклидовом пространстве и лабораторном времени, пользуясь ньютоновской теорией тяготения*). Систему координат выбираем так, что наблюдатель находится в начале координат и покоится. За нуль времени берем сегодняшний момент (момент наблюдения), а не так, как выше, где принималось $t=0$ в момент сингулярности $\rho=\infty$. Рассматриваем случай $P=0$.

При $t=0$ имеем заданную, постоянную во всем пространстве плотность вещества ρ_0 и хаббловское поле скоростей $u=H_0R$.

Напишем гидродинамические уравнения неразрывности и движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\operatorname{div} \rho \mathbf{u} = -3H_0\rho, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{G \frac{4\pi}{3} \rho R^3}{R^2} \end{aligned} \right\} \quad (17.4.1)$$

и найдем первые члены разложения решения в ряд по малому t :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 - 3H_0t\rho_0, \\ u &= H_0R - H_0^2Rt - \frac{4\pi}{3} G\rho_0Rt. \end{aligned} \right\} \quad (17.4.2)$$

*) Различие между собственным временем и лабораторным временем тоже порядка Δ^2 , следовательно, в рассматриваемом приближении его можно не принимать во внимание, точно так же как и кривизну пространства.

Вспоминая определение $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ и $\Omega = \rho_0/\rho_c$, последнюю формулу перепишем так:

$$u = H_0 R - H_0^2 \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right) R t. \quad (17.4.3)$$

Рассмотрим распространение света и красное смещение. Уравнение луча, приходящего в начало координат в момент $t=0$, есть

$$R = -ct, \quad (17.4.4)$$

где R — расстояние тела от начала координат в момент испускания (в этот момент, очевидно, $t < 0$).

Частота в лабораторной системе света ω , испущенного частицей, движущейся со скоростью u , дается формулой

$$1 - \Delta' = \frac{\omega'}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{u}{c}}}. \quad (17.4.5)$$

Мы строим формулы, включающие поправки порядка Δ , но не более высокие. Поэтому и выражение Δ' разлагаем в ряд и оставляем только

$$1 - \Delta' = 1 - \frac{u}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c}\right)^2; \quad \Delta' = \frac{u}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c}\right)^2. \quad (17.4.6)$$

Теперь необходимо еще учесть изменение частоты света при его движении в поле тяжести от точки испускания R до начала координат:

$$\omega - \omega' = \frac{\Phi(R) - \Phi(0)}{c^2} \omega', \quad (17.4.7)$$

где Φ — ньютоновский гравитационный потенциал.

Из уравнения Пуассона

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho G \quad (17.4.8)$$

и из сферической симметрии задачи находим

$$\Phi = \text{const} + \frac{2\pi}{3} G\rho R^2. \quad (17.4.9)$$

В нашем приближении заменим ρ на ρ_0 , ω' на ω_0 и найдем

$$\left. \begin{aligned} \omega - \omega_0 &= \frac{2\pi}{3c^2} G\rho_0 R^2 \omega_0, \\ \Delta &= \frac{u}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c}\right)^2 - \frac{2\pi}{3c^2} G\rho_0 R^2. \end{aligned} \right\} \quad (17.4.10)$$

Подставим сюда выражение скорости (17.4.3) и выразим момент испускания через R . Подставляя затем выражение $\rho_0 = \Omega \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, получим окончательно в нужном приближении (опуская члены порядка R^3 и выше):

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{H_0}{c}R + \frac{H_0^2}{c^2} \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right) R^2 - \frac{1}{2} \frac{H_0^2 R^2}{c^2} - \frac{H_0^2}{c^2} \frac{\Omega}{4} R^2 = \\ &= \frac{H_0}{c}R + \frac{H_0^2}{c^2} R^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega}{4}\right). \end{aligned} \quad (17.4.11)$$

Не теряя точности, решим это уравнение

$$R = \frac{c}{H_0} \left[\Delta - \left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega}{4}\right) \Delta^2 \right] \quad (17.4.12)$$

и соответственно для момента испускания света, который придет в точку наблюдения (начало координат) в момент ($t=0$) с данным красным смещением,

$$t = -\frac{1}{H_0} \left[\Delta - \left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega}{4}\right) \Delta^2 \right]. \quad (17.4.13)$$

Напомним, что R есть расстояние источника именно в момент t испускания света, который принят в момент $t=0$ с красным смещением Δ наблюдателем, находящимся в начале координат.

Выражение R , выведенное выше, совпадает с первыми двумя членами разложения в ряд по степеням Δ общей формулы (17.3.9).

В нашем приближении евклидовой геометрии расстояние имеет единственный смысл. В этой геометрии очевидным образом находим угловой размер источника, абсолютный размер которого равен l . Угловое расстояние это и есть R , так что

$$\Theta = \frac{l}{R} = \frac{lH_0}{c} \frac{1}{\Delta} \left[1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega}{4}\right) \Delta \right]. \quad (17.4.14)$$

Поправка к элементарной формуле $\Theta = \frac{lH_0}{c\Delta}$, $R = \frac{c}{H_0}\Delta$ связана только с поправками к линейной зависимости между расстоянием в момент испускания света и красным смещением.

Отступая от астрономической традиции, будем пользоваться не «звездной величиной» объекта (логарифмом потока), а непосредственно полным потоком энергии звезды L и количеством энергии, принимаемым на 1 см^2 поверхности в точке наблюдения \tilde{E}_1 (см. предыдущий § 3, формулу (17.3.19)). При этом аб-

солютная величина $M = -2,5 \lg_{10} L + \text{const}$; видимая величина *)

$$m = -2,5 \lg_{10} \tilde{E}_1 + \text{const}.$$

Как было показано выше,

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi D^2} = \frac{L(1-\Delta)^4}{4\pi R^2},$$

откуда, разлагая в ряд и оставляя члены первого порядка по Δ , найдем

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi \left(\frac{c}{H_0}\right)^2} \frac{1}{\Delta^2} \left[1 - \left(3 - \frac{\Omega}{2}\right)\Delta\right], \quad (17.4.15)$$

$$D = \frac{R}{(1-\Delta)^2} = \frac{c}{H_0} \Delta \left[1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{\Omega}{4}\right)\Delta\right]. \quad (17.4.16)$$

Найдем выражение массы, заключенной внутри сферы радиуса R в момент испускания света. Подставляя t из (17.4.13) в (17.4.2), найдем

$$\rho = \rho_0(1 + 3\Delta), \quad M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left(\frac{c}{H_0} \Delta\right)^3 \left[1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\Omega\right)\Delta\right]. \quad (17.4.17)$$

Теперь легко найти производную

$$\frac{dM}{d\Delta} = 4\pi\rho_0 \left(\frac{c}{H_0} \Delta\right)^2 [1 + (2 - \Omega)\Delta] \frac{c}{H_0}. \quad (17.4.18)$$

Величина в квадратных скобках есть функция $\xi(\Delta, \Omega)$ предыдущего параграфа или, точнее, первые два члена разложения в ряд Тейлора

$$\xi = 1 + (2 - \Omega)\Delta. \quad (17.4.19)$$

Эти формулы дают все сведения, необходимые для обработки наблюдений при не слишком больших Δ ($\Delta < 0,3$). В этом параграфе выше рассматривался только случай пренебрежимого давления, $P=0$. В случае произвольного давления гравитационное поле и ускорение силы тяжести зависит от комбинации $\rho + \frac{3P}{c^2}$, тогда как выражение критической плотности не

*) Видимая величина связана с абсолютной величиной выражением

$$\tilde{E}_1 = \text{const} \frac{L}{R^2} (1 - \Delta)^v,$$

где v равно 4 для болометрической величины (при любом виде спектра!). См. § 3, формулу (17.3.14).

изменяется *). Поэтому при $P \neq 0$ надо везде подставить вместо Ω величину

$$\Omega' = \Omega \left(1 + \frac{3P}{\rho c^2} \right). \quad (17.4.20)$$

В частности, $\Omega' = 2\Omega$ при $P = \frac{1}{3} \rho c^2$. (Если $\Lambda \neq 0$, $\Omega' = \Omega \left(1 + \frac{\Lambda c^2}{4\pi G \rho} \right)$.)

Соответственно и обработка наблюдений первично дает именно величину Ω' : в сущности, мы изменяем ускорение силы тяжести. Если $1 < \Omega' < 2$, то для Вселенной, заполненной обычным веществом, $P = 0$, $\Omega = \Omega' > 1$, и мир замкнут. Но для Вселенной, заполненной в основном квантами и нейтрино, в этом случае $\Omega = \frac{1}{2} \Omega' < 1$ и Вселенная открыта. В ряде книг и обзоров расширяющаяся Вселенная характеризуется двумя параметрами:

$$\frac{\dot{r}_{ab}}{r_{ab}} = h_1, \quad \frac{\ddot{r}_{ab}}{r_{ab}} = h_2. \quad (17.4.21)$$

Так как расстояние между любой парой объектов пропорционально радиусу мира $a(t)$, то формулы (17.4.21) эквивалентны формулам

$$\frac{\dot{a}}{a} = h_1, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = h_2. \quad (17.4.22)$$

Формулы (17.4.21) даже предпочтительны, так как в них используются локально определенные величины r_{ab} , тогда как радиус мира a имеет простой смысл для замкнутого мира и менее нагляден для открытого (гиперболической модели). Для плоской модели (при $\Omega = 1$) см. § 4 гл. 16, $a \rightarrow \infty$. Но тем не менее h_1 и h_2 имеют и в случае плоского мира вполне определенные значения.

Константа h_1 есть не что иное, как постоянная Хаббла, $h_1 = H_0$. Величина h_2 зависит от плотности:

$$h_2 = -\frac{4\pi}{3} G \rho \left(1 + \frac{3P}{\rho c^2} \right). \quad (17.4.23)$$

Вместо h_2 иногда вводят безразмерный коэффициент ускорения, который можно выразить через Ω :

$$q = -\frac{h_2}{h_1^2} = \frac{1}{2} \Omega \left(1 + \frac{3P}{\rho c^2} \right) = \frac{\Omega'}{2}. \quad (17.4.24)$$

*) Легко проверить, что формулы, которые получаются при замене Ω на $\Omega' = 2\Omega$ в (17.4.12), (17.4.15), (17.4.16), (17.4.19), совпадают с первыми членами разложения в ряд (17.3.10) и (17.3.31); см. (17.3.32).

Итак, в случае $P=0$ критическое значение $q=1/2$ отделяет замкнутый мир (при $q>1/2$) от открытого ($0<q<1/2$). В случае $P=\varepsilon/3$ критическое значение $q=1$. Вывод из рассуждений данного параграфа заключается в том, что формулы, линейные в q и содержащие поправки порядка Δ (но не Δ^2), не содержат эффектов кривизны пространства и могут быть последовательно выведены в евклидовом пространстве с помощью ньютоновской теории тяготения (с учетом гравитационного изменения частоты кванта и точной формулы доплер-эффекта).

§ 5. Распределение по видимым величинам

В классическом случае, без учета кривизны пространства, влияния красного смещения на яркость и эволюционного эффекта, получаются общеизвестные, четкие зависимости для распределения объектов данного типа по видимой величине.

Рассмотрим объекты с абсолютной светимостью L . Плотность таких объектов обозначим n . Количество света, получаемое наблюдателем от каждого объекта,

$$\tilde{E}_1 = \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (17.5.1)$$

так что

$$r = \sqrt{\frac{4\pi L}{\tilde{E}_1}}. \quad (17.5.2)$$

Число объектов внутри шара радиуса r , дающих световой поток больше \tilde{E}_1 , равно

$$N = \frac{4\pi}{3} r^3 n = \text{const } n L^{3/2} \tilde{E}_1^{-3/2}. \quad (17.5.3)$$

Соответственный дифференциальный закон

$$dN = \text{const } \tilde{E}_1^{-5/2} d\tilde{E}_1. \quad (17.5.4)$$

Пользуясь «величиной» $m = \text{const} - 2,51 g_{10} \tilde{E}_1$, найдем

$$dN = \text{const } 10^{0,6m} dm. \quad (17.5.5)$$

Хорошо известно, что при наличии объектов разных типов этот закон не изменяется. Для дальнейшего полезно воспроизвести элементарное доказательство. В самом деле, пусть в элементе объема имеется определенное распределение объектов по абсолютной величине

$$dn = n_0 W(L) dL. \quad (17.5.6)$$

Распределение нормировано на единицу, $\int_0^{\infty} W(L) dL = 1$, так что $W(L) dL$ есть доля объектов с данным L , а общая их плотность

равна n_0 . Для каждой группы объектов светимостью между L и $L+dL$ получим

$$d_2 N = \text{const } W(L) L^{3/2} \tilde{E}_1^{-5/2} dL d\tilde{E}_1. \quad (17.5.7)$$

Знак d_2 означает, что справа стоят два дифференциала $dL d\tilde{E}_1$.

Интегрирование по dL можно выполнить отдельно; получим

$$dN = A \tilde{E}_1^{-5/2} d\tilde{E}_1, \quad (17.5.8)$$

где

$$A = \text{const } n_0 \int_0^{\infty} L^{3/2} W(L) dL. \quad (17.5.9)$$

Таким образом, закон распределения по видимой величине, $\frac{dN}{d\tilde{E}_1}$, не изменился, только вместо плотности объектов n_0 вошла величина A , определенным образом взвешенная по распределению $W(L)$. Это взвешивание несколько отличается от того выражения, которое дает полное количество света, испускаемое единицей объема *).

В расширяющейся Вселенной для объектов данной абсолютной величины получается более сложный закон, так как видимая и абсолютная величина и число объектов в данной сфере связаны сложными, не степенными зависимостями. При больших расстояниях велико и время распространения света от момента испускания до наблюдения. Поэтому надо учесть и эволюционный эффект, т. е. изменение распределения объектов по абсолютной величине со временем. Общие формулы чрезвычайно громоздки и необозримы. Приведем лишь формулу второго приближения, которая может быть получена, как это описано выше, из рассмотрения ускоренного движения объектов в плоском пространстве. В соответствии со сказанным выше, ограничимся везде поправками первого порядка по Δ . Распределение объектов по светимости характеризуем функцией

$$dn = n_1(t) W(L, t) dL. \quad (17.5.10)$$

Здесь t отсчитывается от сегодняшнего дня, так что в момент испускания

$$t = -\frac{R}{c},$$

n_1 — общая плотность всех объектов. Предполагая, что объекты (галактики) не возникают и не уничтожаются, примем, что

$$n_1 = n_0(1 - 3Ht). \quad (17.5.11)$$

*) Последнее равно, очевидно, $n_0 \int L W(L) dL$.

При этом учет эволюционного эффекта полностью связан с зависимостью W от времени. Наконец, видимая величина связана с абсолютным выражением, учитывающим влияние красного смещения

$$\tilde{E}_1 = \text{const } L \frac{(1 - \Delta)^4}{R^2}. \quad (17.5.12)$$

Четвертая степень $(1 - \Delta)$ получается при рассмотрении болометрической величины; в общем случае войдет $(1 - \Delta)^\nu$ (где $\nu = 3 - n$) для спектрального участка, где $F \sim \omega^n d\omega$ (см. выше)*. Выразив R через Δ , получим

$$\tilde{E}_1 = aL \frac{(1 - \Delta)^\nu}{\Delta^2 \left[1 - \Delta \left(1 + \frac{\Omega'}{2} \right) \right]}. \quad (17.5.13)$$

Поскольку весь расчет ведется с точностью до поправок порядка Δ ,

$$\tilde{E}_1 = aL \frac{1}{\Delta^2} \left[1 + \left(1 + \frac{\Omega'}{2} - \nu \right) \Delta \right], \quad (17.5.14)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{aL}{\tilde{E}_1}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Omega'}{4} - \frac{\nu}{2} \right) \sqrt{\frac{aL}{\tilde{E}_1}} \right]. \quad (17.5.15)$$

Запишем $d_2 N$ — число объектов, расположенных в слое с красным смещением от Δ до $\Delta + d\Delta$, дающих поток света от E_1 до $E_1 + dE_1$. Используем выражение (17.4.18):

$$d_2 N = \text{const } n_0 \Delta^2 [1 + \Delta(2 - \Omega')] W(L, t) \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{E}_1} \right)_\Delta d\Delta d\tilde{E}_1. \quad (17.5.16)$$

Считая Δ , а значит, и $t = -\Delta/H$, малым, разложим $W(L, t)$ в ряд:

$$W(L, t) = W(L, 0) - \frac{\Delta}{H} \dot{W}(L, 0), \quad \dot{W} = \frac{dW}{dt}. \quad (17.5.17)$$

Имея выражение Δ через L и E_1 , заменим $d\Delta$ на $\frac{d\Delta}{dL}$ и проведем интегрирование по dL при постоянном E_1 . В результате получим

$$dN = \text{const } \tilde{E}_1^{-5/2} d\tilde{E}_1 \left\{ \int_0^\infty W(L, 0) L^{3/2} dL + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a}{\tilde{E}_1}} \left[(4 - 2\nu) \int_0^\infty W(L, 0) L^2 dL - \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \dot{W}(L, 0) L^2 dL \right] \right\}. \quad (17.5.18)$$

*) Применяя формулу Планка, найдем, что для узкой спектральной полосы с $\hbar\omega/kT > 3$ с хорошей точностью $n = 3 - \hbar\omega/kT$, $\nu = \hbar\omega/kT$, где $\hbar\omega$ — энергия кванта, k — постоянная Больцмана.

Изучение близких галактик позволяет найти $W(L, 0)$. Величина ν может быть найдена из распределения интенсивностей в спектре источника и спектральной чувствительности регистрирующего прибора. Если теоретически определить изменение со временем функции W , т. е. ее производную, то $\left. \frac{\partial W(L, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{W}(L, 0)$.

Отметим два преобразования последней формулы. Мы уже раньше предполагали, что эволюционный эффект, т. е. изменение со временем функции $W(L, t)$ зависит не от рождения или исчезновения новых объектов, а исключительно от изменения их абсолютной величины.

Пусть абсолютная величина отдельного объекта в зависимости от времени подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{dL}{dt} = f(L, t) = k(L, t)L. \quad (17.5.19)$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial L} W f. \quad (17.5.20)$$

Это уравнение выражает закон сохранения объектов, движущихся со скоростью f вдоль оси L .

Подставим выражение $\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial t}$ в интеграл в формуле (17.5.18); интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^{\infty} \dot{W} L^2 dL = 2 \int_0^{\infty} L f(L, 0) W(L, 0) dL. \quad (17.5.21)$$

Далее легко написать выражение dN для частного случая одинаковых, синхронно эволюционирующих объектов, когда

$$W(L, t) = \delta(L - L_0(t)), \quad \frac{dL_0}{dt} = f_0 = kL_0. \quad (17.5.22)$$

Найдем

$$dN = \text{const} \cdot \tilde{E}_1^{-5/2} d\tilde{E}_1 L^{3/2} \left[1 + \sqrt{\frac{aL_0}{\tilde{E}_1}} \left(4 - 2\nu - \frac{2k}{H_0} \right) \right]. \quad (17.5.23)$$

Здесь $k = \frac{d \ln L_0}{dt}$ — величина, характеризующая эволюцию объектов, по всей вероятности отрицательна, как это следует из наблюдений. Константа k имеет размерность сек^{-1} , такую же, как и постоянная Хаббла H_0 . Константа a имеет размерность обратного квадрата расстояния, $a = H_0^2 / 4\pi c^2$, корень в (17.5.23) можно переписать

$$\sqrt{\frac{aL_0}{\tilde{E}_1}} = \sqrt{\frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_1}}, \quad (17.5.24)$$

где \bar{E}_0 — это поток, который дал бы в точке наблюдения покоящийся источник L_0 , находящийся на характерном расстоянии c/H_0 от приемника в евклидовом пространстве. Общую формулу (17.5.18) можно привести к аналогичному виду.

Определим средневзвешенные по распределению величины \bar{L} и \bar{k} с помощью формул:

$$\sqrt{\bar{L}} = \frac{\int_0^{\infty} W(L, 0) L^2 dL}{\int_0^{\infty} W(L, 0) L^{3/2} dL}, \quad (17.5.25)$$

$$\bar{k} = \frac{\int_0^{\infty} W(L, 0) W(L, 0) L^2 dL}{\int_0^{\infty} W(L, 0) L^2 dL} = \frac{\int W \frac{dL}{dt} L dL}{\int W L^2 dL}.$$

Определим далее \bar{E}_0 как поток от источника мощностью \bar{L} на расстоянии c/H_0 в евклидовом пространстве $\bar{E}_0 = \frac{\bar{L}}{4\pi \left(\frac{c}{H_0}\right)^2}$.

Получим

$$dN = \text{const } \tilde{E}_1^{-5/2} d\tilde{E}_1 \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\bar{E}_0}{\tilde{E}_1}} \left(4 - 2\nu - \frac{2\bar{k}}{H_0} \right) \right\}. \quad (17.5.26)$$

В этом виде и надо формулу сравнивать с наблюдениями.

Практически надо взять величину

$$\varphi = \frac{dN}{\tilde{E}_1^{-5/2} d\tilde{E}_1}, \quad \varphi = \varphi_0 \left(1 + S \sqrt{\frac{\bar{E}_0}{\tilde{E}_1}} \right) \quad (17.5.27)$$

и откладывать ее на графике в зависимости от $1/\sqrt{\tilde{E}_1}$ для того, чтобы определить коэффициент

$$S = 4 - 2\nu - \frac{2\bar{k}}{H_0}.$$

Наблюдатели зачастую искали эмпирическую зависимость вида

$$dN = \text{const } \tilde{E}_1^{-5/2-\mu} d\tilde{E}_1 = \text{const } d(\tilde{E}_1^{-3/2-\mu}),$$

т. е. пытались учесть отступления от закона $3/2$ изменением показателя степени. Мак-Витти (1959b) показал, что должно быть $\mu=0$, и действительно, формулы (17.5.26) и (17.5.27) показывают, что показатель степени \tilde{E}_1 измениться не может. При боль-

ших E_1 , т. е. на близких расстояниях, всегда показатель равен $3/2$. Поправка носит характер разложения по степеням $1/\sqrt{E_1}$, т. е. величины, пропорциональной расстоянию. Выражения (17.5.26) и (17.5.27) (о значении v см. примечание на стр. 451) могут быть полезны для обработки наблюдений.

Важнейшее качественное следствие проделанных расчетов заключается в том, что найденный выше первый член разложения по Δ не содержит плотности Ω' (соответствующая формула (137) и следующие формулы в обзоре Зельдовича (1965) ошибочны).

Таким образом, исследования $N(E_1)$ функции распределения объектов, по видимой величине относящихся к близким объектам, могут быть полезны для характеристики эволюции объектов в недалеком прошлом и для проверки основного предположения об однородном (хотя бы в среднем) распределении вещества в пространстве.

Зная закон эволюции и используя d^2N по $dE_1 \cdot d\Delta$, мы можем найти и Ω' . Случай больших Δ см. в §§ 9 и 10.

§ 6. Далекие объекты и общая плотность излучения

Общая задача о распределении по видимой звездной величине всех принципиально наблюдаемых объектов (а не сравнительно близких, как в предыдущем параграфе) может быть разрешена с помощью функций $R(\Delta)$ и $\xi(\Delta)$, рассмотренных выше. Необходимой предпосылкой является теория эволюции звезд и галактик. Пусть задано распределение объектов по количеству испускаемого света и по температуре в зависимости от времени:

$$d^2N = W(L, T, t) dL dt. \quad (17.6.1)$$

Тогда количество объектов, содержащихся в слое, в котором красное смещение лежит в пределах между Δ и $\Delta + d\Delta$, пропорционально $\xi(\Delta)\Delta^2 d\Delta$. Земному наблюдателю представляется, что объект имеет температуру

$$T' = (1 - \Delta) T,$$

где T — истинная температура объекта. Наконец, количество света, получаемое наблюдателем, пропорционально $1/R^2$. Момент испускания t также однозначно связан с величиной Δ .

Предполагается, что постоянная Хаббла известна. Все функции $t(\Delta)$, $R(\Delta)$, $\xi(\Delta)$ зависят также от параметра Ω , отношения фактической плотности вещества к критической плотности,

а также от давления P . Выше графики были построены в двух предположениях:

$$P=0 \quad \text{и} \quad P=\frac{\rho c^2}{3}.$$

Мы не будем выписывать соответствующие громоздкие интегралы. Подробнее о распределении по видимой звездной величине далеких объектов см. §§ 9 и 10. Важное значение имеет другая задача: далекие объекты, в том числе и такие, которые не разрешаются телескопом, дают свой вклад в общий фон межгалактической плотности излучения. Средняя плотность излучения от источников в межгалактическом пространстве определяется главным образом далекими объектами. Расчет спектра средней плотности излучения от всех известных источников особенно важен в горячей модели, так как это есть тот фон, на котором надо наблюдать реликтовое излучение самой модели. Для одной длины волны расчет общей средней плотности излучения от источников в Метагалактике проделал Мак-Витти (1962с) (см. также Витроу и Яллоп (1964)).

А. Г. Дорошкевич и И. Д. Новиков (1964) проделали расчеты всего спектра межгалактического излучения от известных источников в различных вариантах (рис. 85). Для сравнения на рис. 85а приведен спектр излучения, который получился бы от таких же источников в центре островной стационарной Вселенной радиусом $c/4H$ (кривая 1).

В расчетах предполагалось, что звезды делятся на два типа, с температурой поверхности 5000 и 10 000° К и что вклад обоих типов в общий поток излучения одинаков для настоящего момента. Кривая 2 вычислена для $\Omega=0,03$, $P=0$ без учета эволюционного эффекта (считалось, что галактики возникли при $z=9$), кривая 3 — в предположении, что световой поток звезд с температурой 10 000° К убывает с течением времени по закону

$(a/a_0)^{0,645} e^{-6,5 \frac{a}{a_0}}$, где a — расстояние между двумя объектами в расширяющейся Вселенной или пропорциональная ей величина радиуса кривизны мира, который раньше был меньше*). Об эволюции галактик см. Партридж, Пиблс (1967а, б). Резкий подъем кривой в левой части рис. 85 при малых частотах получается за счет радиоизлучения галактик. Как известно, радиоизлучение зависит от движения быстрых электронов в магнитном поле, интенсивность такого излучения во много раз превышает

*) Сделанные предположения об эволюции соответствуют современным представлениям о том, что сразу после образования галактик в них было много молодых горячих звезд, которые быстро эволюционировали. Звезды с поверхностной температурой $\sim 5000^\circ \text{К}$ эволюционируют очень медленно.

излучение при температуре поверхности звезды в этой спектральной области и иначе зависит от частоты. В расчетах было учтено радиоизлучение только «нормальных» галактик. Кривые построены в логарифмическом масштабе.

Кривая 1 отличается от планковского спектра не только потому, что рассматриваются две температуры; главное отличие заключается в абсолютной интенсивности!

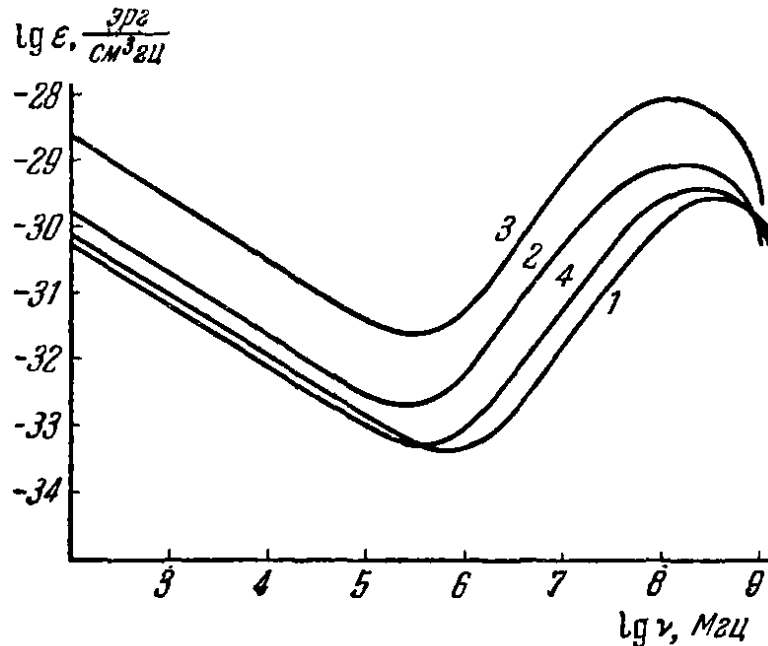


Рис. 85а. Спектр электромагнитного излучения во Вселенной.

Кривая 1: островная Вселенная с $R = \frac{c}{4H}$;
 кривая 2: расширяющаяся Вселенная $P = 0$, $\Omega = 0,03$, в которой светимость галактик не меняется; кривая 3: расширяющаяся Вселенная $P = 0$, $\Omega = 0,03$, в которой учтена эволюция светимости галактик;
 кривая 4: квазистационарная Вселенная (формула (17.6.13)).

В термодинамическом равновесии при определенной температуре внутри черного тела должна быть вполне определенная плотность энергии и определенный поток. Наблюдатель внутри черного тела в любом направлении, в любом элементе телесного угла видит поверхность данной температуры, с данной яркостью. Между тем наблюдатель в центре островной модели Вселенной с радиусом $c/4H$, для которого построена кривая 1, видит поверхность с температурой 5000° лишь в доле $d_1 = 4\pi \cdot 0,25 \cdot 10^{-14}$ телесного угла и поверхность с $T = 10\,000^\circ$ в доле $d_2 = 4\pi \cdot 1,65 \cdot 10^{-16}$ телесного угла. Такая малая доля зависит от малой плотности галактики и малой плотности звезд в галактиках; эта доля прямо пропорциональна радиусу модели Все-

ленной при тех предположениях однородной плотности и стационарности, которые были сделаны при расчете кривой 1. Величина $d/4\pi$ носит название коэффициента диллюции («разбавления»).

Как видно из рис. 85а «фиолетовой части спектра», кривые 2 и 3 лежат ниже кривой 1; вследствие красного смещения

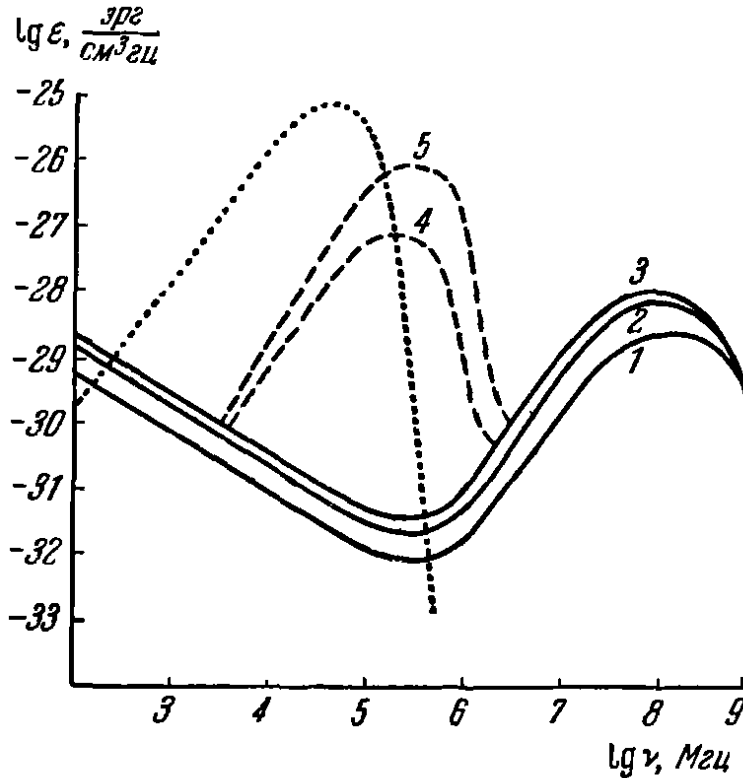


Рис. 856. Зависимость спектра электромагнитного излучения во Вселенной от параметров космологической модели: 1 $P = \epsilon/3$, $\Omega = 1$; 2 $P = 0$, $\Omega = 1$; 3 $P = 0$, $\Omega = 0,03$.

Пунктиром показано излучение пыли ($\bar{\rho} = 5 \cdot 10^{-34}$ г/см³) в двух предположениях о температуре пыли; 4, $T = 5^\circ$ К; 5, $T = 10^\circ$ К. Точечная кривая — реликтовое излучение горячей модели при $T = 1^\circ$ К.

эффективно вносят вклад в эту часть спектра только близкие объекты.

Зато в инфракрасной части спектра кривые 2 и 3 идут значительно выше кривой 1; в эту часть спектра вносят существенный вклад галактики с большим красным смещением — вплоть до такого Δ_1 , при котором максимум смещенной планковской кривой попадает в рассматриваемую часть спектра. При стремлении Δ_1 к единице коэффициент диллюции неограниченно возрастает за счет уменьшения $R(\Delta)$ в любой модели (реально Δ ограничено временем рождения галактик).

Предсказания относительно спектра зависят от модели: на рис. 856 показаны кривые, построенные в одинаковых пред-

положениях об эволюционном эффекте, но в различных предположениях о плотности вещества. Мощность излучения единицы объема считалась прежней и изменение сегодняшнего значения плотности в расчетах происходит за счет несветящейся материи, которая влияет только на закон расширения Вселенной. Для упрощения расчетов предполагалось, что эволюция светимости галактик с течением времени определяется одной и той же функцией от a/a_0 . Момент возникновения галактик зависит от плотности вещества, которая есть функция a/a_0 . Однако дальнейшая эволюция светимости протекает в собственном времени t . Зависимость a от t в разных моделях разная и поэтому, по существу, предполагается несколько различный темп эволюции галактик в разных моделях. Это обстоятельство не сказывается существенно на результатах.

Теми же авторами позже был проделан расчет спектра в предположении о наличии межгалактической пыли (или пыли, сосредоточенной в галактиках, которая заведомо есть), которая поглощает свет звезд и переизлучает его в длинноволновой области. Соответствующий спектр приведен на рис. 85б в двух предположениях о температуре межгалактических пылинок. Температура пылинок зависит от их свойств. Еще раз подчеркнем, что мы говорим о среднем излучении в Метагалактике. При наблюдении на Земле этого фона надо исключить влияние звезд нашей Галактики и межзвездного вещества.

Наконец, здесь не учтено излучение горячего межгалактического газа с $T \approx 10^6$ °К, существование которого в настоящее время можно предполагать (см. Гинзбург, Озерной (1965)). Подробнее о межгалактическом газе и, в частности, о его излучении см. Дополнение VIII.

До сих пор при рассмотрении плотности излучения в Метагалактике мы не учитывали реликтовое излучение горячей космологической модели (см. гл. 18). Согласно этой модели сейчас в метагалактическом пространстве должно присутствовать равновесное изотропное излучение с температурой, зависящей от предположений о параметрах горячей модели и заключенных в пределах от долей градуса до десятка градусов. На рис. 85б нанесен спектр равновесного излучения с $T = 1^\circ$ К. В области сантиметровых волн плотность равновесного излучения с $T \approx 1^\circ$ К на много порядков больше ожидаемого излучения от всех известных источников. В работе Дорошкевича и Новикова (1964) был приведен рисунок, аналогичный 85, и было указано, что наблюдения радиоизлучения на сантиметровых волнах могут дать выбор между горячей и холодной моделью. Независимо от этой работы излучение горячей Вселенной было открыто Пензиасом и Вилсоном в 1965 г. Его температура оказалась

$T=3^\circ\text{К}$. Дикке, Пиблс, Ролл, Вилкинсон (1965) дали космологическое объяснение измерениям Пензиаса и Вилсона как доказательство горячей модели.

На рис. 86 нанесен суммарный спектр и космологического излучения с $T=3^\circ\text{К}$ и всех известных источников излучения. Там же нанесены результаты измерений.

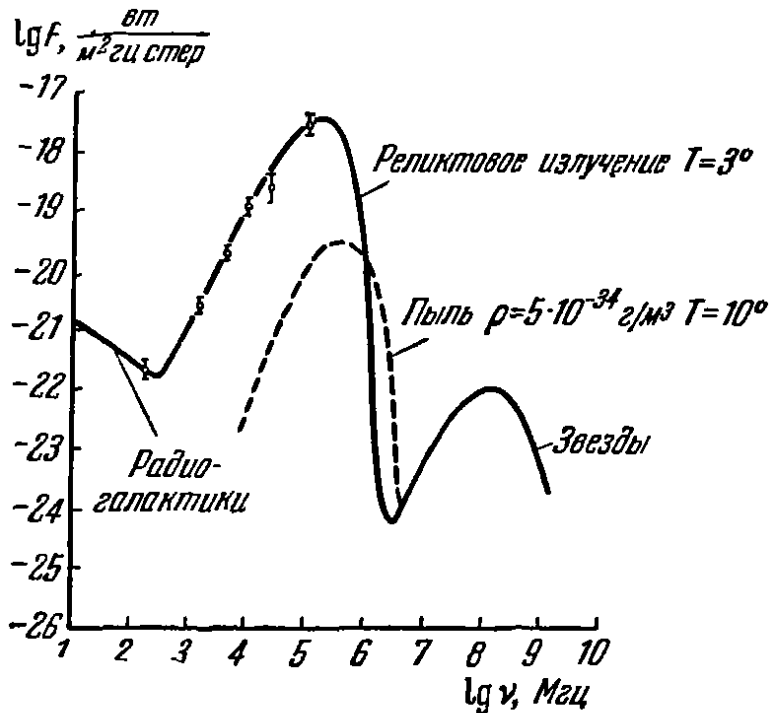


Рис. 86. Общий спектр среднего излучения в Метагалактике от отдельных источников и реликтовое излучение горячей модели. Точками отмечены данные измерений.

По данным, сообщенным в конце января 1967 г. на симпозиуме в Нью-Йорке, из наблюдений следует, что реликтовое излучение изотропно с точностью по крайней мере до нескольких процентов. (См. Дополнение X.) Измерения интенсивности космологического излучения были проведены на разных длинах волн и дали следующие результаты (сводка у Велча и др. (1967)):

λ см	21,1	20,7	7,35	3,2	1,5
T °К	$3,2 \pm 1$	$2,8 \pm 0,6$	$3,3 \pm 1$	$3 \pm 0,5$	$2,0^{+0,8}_{-0,7}$

Кроме того, как указывалось выше, наблюдения межзвездного радикала CN указывают, что на $\lambda=0,254$ см температура порядка 3°К и не ниже $2,8^\circ\text{К}$. (См. Дополнение X.)

Вернемся к излучению от источников. Интегральная плотность излучения от известных источников без учета реликтового излучения в Метагалактике слабо зависит от выбранной космологической модели и предположений об эволюции галактик. Для островной статической Вселенной ($R=c/4H$) она соответствует плотности равновесного излучения с $T=0,77^\circ\text{K}$; для модели $\Omega=0,03$, $P=0$ без изменения свечения галактик с течением времени $T=0,91^\circ\text{K}$; для той же модели с учетом эволюции галактик $T\approx 1,5^\circ\text{K}$. Наконец для модели $\Omega=1$, $P=0$ с учетом эволюции галактик $T\approx 1,1^\circ\text{K}$.

К вопросу о плотности излучения от отдельных источников можно подойти совсем иначе, не рассматривая распространение света от них к наблюдателю. В однородной и изотропной Вселенной излучение также должно быть в среднем однородным и изотропным. Следовательно, его можно характеризовать функцией φ двух переменных — частоты ω и времени t . Число квантов в данном интервале частоты $d\omega$ в единице объема

$$dn = \varphi(\omega, t) d\omega, \quad (17.6.2)$$

соответственно плотность энергии, приходящаяся на $d\omega$,

$$d\tilde{E}_1 = \hbar\omega dn = \hbar\omega\varphi(\omega, t) d\omega = \xi(\omega, t) d\omega. \quad (17.6.3)$$

В изотропном поле излучения обмен квантами между соседними объемами, очевидно, ничего не меняет, поскольку их спектр и плотность в любом месте одинаковы. Следовательно, возможен локальный подход к вычислению функции φ . Для начала отвлечемся от испускания и поглощения света. В ходе хаббловского расширения плотность квантов убывает, как и плотность любых других частиц, обратно пропорционально кубу всех расстояний; это дало $\frac{d\rho}{dt} = -3H\rho$ для плотности частиц (см. § 4 гл. 17). На это накладывается изменение частоты каждой данной группы квантов

$$\frac{d\omega}{dt} = -H\omega. \quad (17.6.4)$$

Можно сказать, что в конфигурационном пространстве по оси частот движутся кванты с указанной выше скоростью (17.6.4).

Поток квантов равен $\varphi \frac{d\omega}{dt}$.

Уравнение неразрывности дает с учетом пространственного расширения и движения квантов по оси частот

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -3H\varphi - \frac{\partial}{\partial\omega} \left(\varphi \frac{d\omega}{dt} \right). \quad (17.6.5)$$

Выражая $\frac{d\omega}{dt}$ по (17.6.4) и добавляя вклад источников $I(\omega, t)$, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -2H\varphi + H\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + I(\omega, t). \quad (17.6.6)$$

Уравнение для спектральной плотности ($\xi(\omega, t)$) (см. формулу (17.6.3)) получим отсюда элементарной выкладкой

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -3H\xi + H\omega \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + F(\omega, t) = -4H\xi + H\frac{\partial}{\partial \omega} \xi\omega + F(\omega, t). \quad (17.6.7)$$

Здесь $I(\omega, t)$ и $F(\omega, t) = \hbar\omega I(\omega, t)$ есть число квантов и энергия этих квантов, испускаемых звездами, находящимися в единице объема, за единицу времени и в интервале частоты $d\omega$. По существу, ясно, что уравнение в частных производных (17.6.7) и метод сложения света, приходящего из разных слоев, — равноценны и эквивалентны. Локальный подход, т. е. уравнение (17.6.7), полезен для выяснения общих свойств решения. Так, например, сразу видно, что рассеяние света (без поглощения и без изменения частоты) никак не влияет на спектр — изотропное поле излучения после рассеяния остается изотропным.

Для общей плотности энергии ϵ получим, интегрируя (17.6.7) по ω , уравнение

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -4H\epsilon(t) + Q(t), \quad (17.6.8)$$

где

$$\epsilon = \int_0^{\infty} \xi(\omega, t) d\omega, \quad Q = \int_0^{\infty} F(\omega, t) d\omega.$$

В формуле (17.6.7) видно, что к данному решению уравнения с источниками света всегда можно прибавить решение однородного уравнения (без источников). Таким образом, решением является, в частности, планковское распределение

$$\xi(\omega, t) = \text{const} \frac{\omega^3 d\omega}{\hbar\omega e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \quad (17.6.9)$$

с температурой T , зависящей от времени по закону

$$\frac{dT}{dt} = -HT. \quad (17.6.10)$$

Это утверждение легко проверить подстановкой в (17.6.7) $F=0$. Такой планковский спектр, полностью равновесный, т. е. с коэффициентом диллюции, равным 1, и с $T_{\text{пл}}=3^\circ$, наблюдается в настоящее время как следствие высокой температуры вещества на ранних этапах расширения. Грубую оценку плотности

энергии одних источников без учета излучения горячей модели можно получить из уравнения (17.6.8), полагая, что решение является квазистационарным, т. е. пренебрегая членом с $\frac{\partial}{\partial t}$.

Получим

$$-4H\varepsilon + Q = 0, \quad \varepsilon = \frac{Q}{4H}. \quad (17.6.11)$$

Аналогично в уравнении для спектральной плотности самое грубое приближение состоит в вычеркивании $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial \omega}(\xi\omega)$. Получим

$$\xi = \frac{F}{4H}. \quad (17.6.12)$$

Формула (17.6.12) представляет собой кривую 1 на рис. 85а, полученную из рассмотрения стационарного шара радиусом $c/4H$, равномерно заполненного галактиками!

Этой кривой соответствует плотность (17.6.11). Можно уточнить спектр: пренебрегая $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, но оставляя член $\frac{\partial}{\partial \omega}(\xi\omega)$, получим

$$\xi(\omega, t) = \frac{1}{H} \omega^3 \int_{\omega}^{\infty} \frac{F(\omega', t)}{\omega'} d\omega'. \quad (17.6.13)$$

На рис. 85а показан спектр (17.6.13), и результат точного расчета для определенного Ω .

В стационарном приближении легко также построить решения при наличии в межгалактическом пространстве пыли, поглощающей свет звезд, нагревающейся при этом и испускающей свой тепловой спектр. Здесь, однако, мы на этом не останавливаемся.

Линейное дифференциальное уравнение для плотности излучения

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -4H(t)\varepsilon + Q(t)$$

может быть решено точно. Ответ можно записать в виде квадратуры (определенного интеграла) при заданной функции $Q(t)$. При этом функция $Q(t)$ сама войдет в ответ линейно, что отвечает физическому смыслу задачи: плотность излучения в данный момент t_0 является суммой вкладов $Q(\tau)d\tau$ излучения за каждый малый интервал времени от τ до $\tau+d\tau$, где $\tau < t$; каждый такой вклад преобразуется в ходе расширения от момента τ до момента t_0 .

Если выделить таким образом вклад источника Q за время от t_1 до t_0 , то нужно еще добавить вклад плотности энергии, которая уже имелась в момент t_1 .

Легко проверить, что выражение

$$\varepsilon(t_0) = \int_{t_1}^{t_0} Q(\tau) \exp\left(-4 \int_{\tau}^{t_0} H(\theta) d\theta\right) d\tau + \varepsilon(t_1) \exp\left(-4 \int_{t_1}^{t_0} H(\theta) d\theta\right),$$

соответствующее этим идеям, действительно точно удовлетворяет уравнению. Для четкости переменные интегрирования и пределы обозначены разными буквами (t_0, t_1, τ, θ).

Экспоненты с интегралами имеют очень простой смысл. Так как

$$H(t) = \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt},$$

где a есть радиус мира, значит,

$$\int_{\tau}^{t_0} H(\theta) d\theta = \ln \frac{a(t_0)}{a(\tau)}; \quad \exp\left(-4 \int_{\tau}^{t_0} H(\theta) d\theta\right) = \left[\frac{a(\tau)}{a(t_0)}\right]^4.$$

Плотность энергии, испущенной в момент τ , за время от τ до t_0 падает в отношении четвертой степени радиуса или как $V^{-4/3}$, где V — объем, в полном соответствии с термодинамикой излучения! Отношение радиусов связано с величиной красного смещения

$$\frac{a(\tau)}{a(t_0)} = 1 - \Delta(\tau) = \frac{1}{1 + z(\tau)}.$$

Удобно перейти к Δ или z в качестве переменной интегрирования. При этом воспользуемся выражением (17.3.35), связывающим дифференциалы dt и $d\Delta$ или dz . Получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \int_0^{\Delta_1} Q(\Delta) (1 - \Delta)^4 \sqrt{\frac{1 - \Delta}{1 - \Delta\Omega}} d\Delta + \varepsilon_1 (1 - \Delta_1)^4 = \\ &= \int_0^{z_1} Q(z) (1 + z)^{-4} \frac{1}{(1 + z)^2 \sqrt{1 + \Omega z}} dz + \varepsilon_1 (1 + z_1)^{-4}. \end{aligned}$$

Напомним, что Q есть мгновенная мощность излучения в единице физического пространства. Если же ввести мощность излучения, отнесенную к единице массы q , то нужно будет учесть, что $Q = q\rho$,

$$\rho = \rho_0 (1 + z)^3 = \rho_0 (1 - \Delta)^{-3}, \quad Q = q\rho_0 (1 + z)^3 = q\rho_0 (1 - \Delta)^{-3}.$$

Иногда вводят еще Q_s — мощность излучения, отнесенную к единице сопутствующего пространства, причем определяют эту единицу так, чтобы она к настоящему времени t_0 совпадала с физической единицей объема 1 см^3 .

Очевидно, что $Q_s = Q(1+z)^{-3} = Q(1-\Delta)^3$. Соответственно

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \int Q_s(\Delta)(1-\Delta) \sqrt{\frac{1-\Delta}{1-\Delta\Omega}} d\Delta + \varepsilon_1(1-\Delta_1)^4 = \\ &= \int_0^{z_1} Q_s(z)(1+z)^{-1} \frac{1}{(1+z)^{-2} \sqrt{1+\Omega z}} dz + \varepsilon_1(1+z_1)^{-4}. \end{aligned}$$

Предположение о том, что Q , Q_s , q зависят непосредственно именно от z или Δ , а не от t , и выражаются простыми формулами как функции z или Δ , является вполне естественным, так как z и Δ прямо связаны с плотностью *). Так, например, в наиболее простом предположении об отсутствии эволюции предполагают $q = \text{const}$:

$$Q_s = \text{const}, \quad Q \sim (1+z)^3 \sim (1-\Delta)^{-3}.$$

В этом случае интеграл сходится, даже если распространить его до горизонта ($\Delta=0$, $z=\infty$). Именно это имеют в виду, когда говорят, что в теории расширяющейся Вселенной нет фотометрического парадокса (см., например, Ландау и Лифшиц (1962)).

Рассмотрим другой пример. Пусть Метагалактика заполнена ионизованной плазмой. Ее излучение $Q \sim n^2 T^{1/2}$, где T — температура. При постоянной температуре $Q \sim (1+z)^6 \sim (1-\Delta)^{-6}$ интеграл расходится у горизонта *).

В горячей модели Вселенной как раз и предполагается, что на ранней, дозвездной стадии вещество находится в состоянии полностью ионизованной однородно распределенной плазмы. При этом конечная плотность излучения получается, очевидно, за счет того, что при высокой плотности имеет место термодинамическое равновесие между плазмой и излучением. Это значит, что излучение уравновешено поглощением света, которое не учитывалось выше. Вклад от этой ранней стадии как раз и представляет собой планковский спектр, соответствующий 3° К .

Рассеяние, как уже отмечалось, не играет роли, если при рассеянии не меняется частота и энергия света.

Учет изменения частоты («комptonизация») см. гл. 18 и работы А. С. Компанейца (1956) и Веймана (1965).

*) Если учесть рост температуры с ростом плотности, расходимость только усилится. В области высоких температур, где $\rho \sim \varepsilon/3$, меняется выражение dt через dz или $d\Delta$, что, однако, не меняет все приводимые ниже выводы.

Для спектральной плотности $F(\omega, t)$ имеет место уравнение в частных производных, написанное выше (17.6.7). Это уравнение также можно решить аналогичным методом, переходя к Δ или z в качестве переменной. В формальной теории закон изменения частоты в ходе красного смещения дает уравнение характеристик уравнения в частных производных.

Решение будет приведено ниже, в § 10 этой главы, в связи с конкретным анализом спектра в области радиочастот.

В § 10 показано, как с помощью $\frac{dt}{dz}$ удобно может быть записана оптимальная оптическая толща для рассеяния света.

§ 7. Наблюдаемые величины во Вселенной, однородной лишь в среднем

В данном параграфе рассматривается влияние неоднородности Вселенной на угловой размер и видимую величину далеких объектов. В однородной Вселенной эти величины даются полученными выше формулами в зависимости от расстояния или, точнее, от красного смещения.

Оказывается, что для применимости этих формул нужно, чтобы однородность удовлетворяла требованиям более строгим, чем те, которые должны быть выполнены для справедливости закона расширения однородной модели.

Изложение в данном параграфе основано на нескольких советских работах [Зельдович (1964b), Дашевский, Зельдович (1964), Дашевский, Слыш (1965)]. Во время симпозиума в Бюракане американские астрономы сообщили, что аналогичное замечание сделал физик Р. Фейнман.

Напомним замечательный факт: угол, под которым виден далекий объект с увеличением расстояния, проходит через минимум; при приближении к горизонту угол неограниченно возрастает (см. § 3 гл. 17). Наглядно объяснить этот факт можно, рассматривая гравитационное фокусирующее действие на свет вещества, находящегося внутри конуса лучей, сходящихся в точку наблюдения O , и опирающегося на объект в AB (рис. 87). Речь идет об искривлении лучей того же происхождения, что и знаменитое отклонение лучей на $1,75''$ около

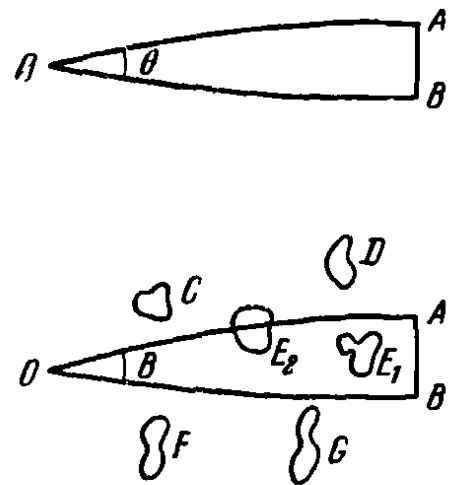


Рис. 87. Схема измерения углового размера θ объекта AB в однородной Вселенной (вверху) и во Вселенной, состоящей из отдельных скоплений материи (внизу).

диска Солнца. Непосредственно видно, что искривление лучей OA и OB увеличивает угол между лучами в точке O при данном размере AB . При этом рассматривается действие вещества, внутри конуса, которое отклоняет луч AO вниз (по ходу луча, справа налево), а луч BO — вверх. Вещество, находящееся снаружи конуса OAB при наличии осевой симметрии, не влияет на угол θ , как бы много его ни было*).

Из приведенной концепции следует условие применимости формул для угла, относящихся к однородной Вселенной: нужно, чтобы плотность внутри конуса не отличалась от средней плотности. Если большая часть плотности зависит от нейтрино, межгалактического газа и пыли, то это условие выполнено и формулы применимы. Но рассмотрим противоположный случай: предположим, что все вещество сконцентрировано в отдельных галактиках (рис. 87). Тогда либо в конус попадает галактика типа E_1 или E_2 целиком или частично, или в конусе нет ни одной галактики. Заметим, что в действительности мы наблюдаем чаще именно такие объекты AB , которые не закрыты по лучу зрения другими галактиками.

Все эффекты интересуют нас для далеких объектов; внутри сферы с центром в O , на которой лежит AB , находится огромное число галактик и отклонение этого числа от среднего ничтожно; однако если объект AB мал, то объем конуса OAB мал и соответственно велика вероятность того, что плотность в конусе окажется отличной от средней, и в частности, что конус окажется пустым.

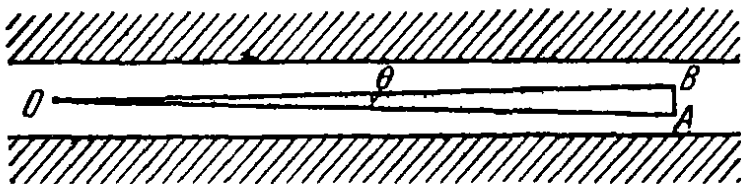


Рис. 88. Схема, поясняющая расчет углового размера объекта во Вселенной, однородной лишь в среднем. В незаштрихованной области плотность вещества равна нулю.

татель следующим приемом (Зельдович (1964b)). Пространство, заполненное веществом с плотностью $\rho = \bar{\rho}(t)$ вне цилиндра (рис. 88) и пустое $\rho = 0$ внутри цилиндра можно представить как однородную Вселенную, на которую наложено возмущение $\delta\rho = -\bar{\rho}(t)$ внутри цилиндра. Для однородной Вселенной задача распространения лучей решена точно, с учетом нестационарности Вселенной.

Угол в случае пустого конуса удалось рассчитать

удалось рассчитать

* Неоднородное распределение вещества вне конуса лучей также влияет на наблюдаемую величину. Расчеты эффекта проделаны Пенроузом (1966), Бертоtti (1966), Ганном (1967) (см. в конце списка литературы).

Возмущенная область мала, поэтому в ней применимо ньютоновское приближение для гравитационного потенциала; поскольку мал угол θ , то радиус цилиндра мал по сравнению с длиной OA , и локально поле обладает цилиндрической симметрией. Для применимости теории возмущений нужно, чтобы угол поворота луча $\Delta\theta = \theta' - \theta$ был мал абсолютно, $\Delta\theta \ll 1$, но не обязательно мал по сравнению с углом θ в однородной Вселенной. Отсылая за деталями расчета к цитированной выше статье, приводим результат для случая критической плотности*), т. е. $\rho = \rho_c$, $\Omega = 1$. Угол в зависимости от красного смещения в полностью однородной Вселенной дается выражением (см. § 3 гл. 17)

$$\theta = \frac{lH}{c} [2(1 - \Delta)(1 - \sqrt{1 - \Delta})]^{-1} = \frac{lH}{cf(\Delta)}. \quad (17.7.1)$$

В случае пустого конуса оказывается

$$\theta' = \frac{lH}{c} \left[\frac{2}{5} (1 - (1 - \Delta)^{5/2}) \right]^{-1} = \frac{lH}{cf_1(\Delta)}. \quad (17.7.2)$$

Кривые показаны на рис. 89; на этом же рисунке дана для сравнения кривая функции f_0 , соответствующая полностью однородной модели с $\rho = 0$ везде и внутри конуса лучей и вне (модель Милна). Кривая f_1 не имеет максимума. Это подтверждает качественные соображения о физической причине минимума угла θ в полностью однородной Вселенной.

С другой стороны (в случае вещества, сосредоточенного в галактиках), кривую θ следует рассматривать как среднюю: для одних объектов — с пустым конусом — угол дается кривой θ' . Для других объектов, в конусе которых есть галактики ($E_{1,2}$ (рис. 87)), угол гораздо больше θ вследствие того, что E_1 и E_2 действуют как гравитационные линзы, согласно Цвикки (1959); см. также Климов (1963).

В действительности между галактиками имеется материя. По-видимому, в основном это межгалактический газ. Плотность

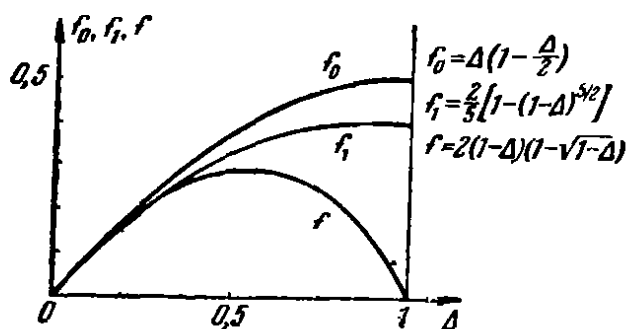


Рис. 89. Безразмерное расстояние, измеренное по угловым размерам объекта с известным диаметром, как функция красного смещения Δ : f_0 — для пустого мира; f — для однородной Вселенной со средней плотностью $\Omega = 1$; f_1 — для неоднородной Вселенной со средней плотностью $\Omega = 1$, но с плотностью, равной нулю в конусе лучей от объекта к наблюдателю.

*) Случай $\Omega > 1$ и $\Omega < 1$ рассчитан в работе Дашевского и Зельдовича (1964).

его предположительно оценивается в $10^{-29} \div 10^{-32} \text{ г/см}^3$. Вероятно, газ распределен более или менее равномерно. Если это так, то этот газ всегда будет попадать в конус лучей. Тем же методом, что и выше, легко получить формулы для данного случая (Дашевский и Слыш (1965)). Пусть плотность ρ^* межгалактической среды, распределенная равномерно, составляет долю γ всей плотности ρ , так что $\rho^* = \gamma\rho$. Давление пренебрежимо, $P=0$; $\Omega=1$.

Тогда, как показывают вычисления,

$$\tilde{f} = \frac{2}{k} (1 - \Delta)^{\frac{5-k}{4}} \left[1 - (1 - \Delta)^{\frac{k}{2}} \right]; \quad k = \sqrt{25 - 24\gamma}.$$

Это выражение имеет максимум при любых $\gamma \neq 0$, и на горизонте обращается в нуль. Максимум расположен тем ближе к горизонту, чем меньшая доля вещества входит в равномерно распределенную межгалактическую среду.

Заметим, наконец, что все сказанное относится также к вычислению количества света, получаемого наблюдателем от далекого объекта. Количество света равно произведению яркости на телесный угол. Яркость объекта определяется его свойствами и красным смещением, а телесный угол пропорционален θ^2 . Поэтому в выражение видимой величины входит в случае объекта с пустым конусом поправочный множитель $(\theta'/\theta)^2$. Такая поправка нужна и в том случае, если сами θ и θ' так малы, что не разрешаются телескопом.

§ 8. Исследование неоднородности распределения галактик

Существование отдельных галактик, внутри которых средняя плотность вещества порядка 10^{-25} г/см^3 , представляет собой весьма сильное нарушение однородности, поскольку средняя по всей изученной области Вселенной плотность на четыре-пять порядков меньше.

Далее отмечается положительная корреляция галактик между собой: вероятность встретить вторую галактику около данной (первой) больше, чем средняя вероятность нахождения галактики в единице объема. Отсюда возникает представление о следующей структурной единице — скоплении галактик (коротко, скоплении).

Предполагается, что такая иерархия структур заканчивается тогда, когда найдены структуры, распределенные чисто статистически, без какой-либо корреляции. Согласно работе Цвикки и Рудницкого (1963) статистическая однородность достигается, когда линейные размеры области превышают 40 *Mpc*.

Этой идеологии соответствует такая процедура: делим пространство на отдельные объемы V и производим подсчет числа галактик в каждом объеме; затем находим среднее отклонение

$$\delta N = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_1^k (N_k - \bar{N})^2}.$$

Здесь \bar{N} есть среднее число галактик в объеме V , $\bar{N} = nV$, где n — плотность галактик, k — число рассмотренных объемов.

Изучаем зависимость δN от V или, что то же, от пропорциональной V величины \bar{N} . Предположим, что галактики распределены совершенно случайно; в этом случае при данном \bar{N} вероятность найти в объеме V то или иное число галактик N дается формулой Пуассона *)

$$\omega(N) = \bar{N}^N \frac{e^{-\bar{N}}}{N!}.$$

При этом

$$\delta \bar{N} = \sqrt{\bar{N}}.$$

Если галактики объединены в скопления, то $\delta \bar{N}$ больше, чем $\sqrt{\bar{N}}$.

Пусть число галактик в скоплении равно g . При объеме больше собственного объема скопления легко найти, что

$$\delta N = \sqrt{g \bar{N}}.$$

Казалось бы, закон $\delta N \sim \sqrt{\bar{N}}$ есть общий предельный закон, отношение $(\delta N / \sqrt{\bar{N}})^2$ дает число галактик в наивысшей структурной единице; это отношение может либо стремиться к постоянной величине, либо неограниченно расти в том случае, если иерархия скоплений неограничена. Неограниченный рост $\delta N / \sqrt{\bar{N}}$ означает, что δN пропорционально не $\sqrt{\bar{N}}$, а какой-то другой функции \bar{N} , растущей быстрее, чем $\sqrt{\bar{N}}$.

Это затянувшееся описание обычных взглядов приведено здесь только для того, чтобы резче, контрастнее указать на другую возможность: δN может расти медленнее, чем $\sqrt{\bar{N}}$, может даже уменьшаться при больших \bar{N} . Такое поведение связано с механизмом образования галактик и скоплений галактик из однородной фридмановской Вселенной.

*) Условливаются, что $0! = 1! = 1$.

В хорошо известном обзоре по статистике скоплений Нейман и Скотт (1959) подняли следующий вопрос: каких статистических закономерностей следует ожидать как следствие определенных предположений относительно природы рассматриваемых систем, т. е. начальных состояний и дальнейшей эволюции?

Ниже делается попытка ответить на этот вопрос. Начнем с самых грубых аргументов. Представим себе однородное вещество, которое собирается в отдельные сгустки. Образование сгустка сопровождается захватом вещества из окружающей его области. Значит, уменьшается вероятность образования другого сгустка рядом с первым — для него уже нехватает материала. Между сгустками можно ожидать отрицательной корреляции, эквивалентной отталкиванию. Флуктуация числа сгустков в большем объеме может быть меньше, чем в случае статистически независимых сгустков. Отвлечемся от дисперсии массы сгустков *).

Если все вещество, находящееся в данном объеме, превращается в сгустки, то флуктуации числа сгустков будут происходить лишь за счет вещества, которое в ходе образования сгустков пересекает границы рассматриваемого объема.

Нет никаких оснований к тому, чтобы при этом получалась зависимость $\sqrt{\bar{N}}$, характерная для статистически независимых объектов. Зависимость $\sqrt{\bar{N}}$ получается в том случае, если, по выражению Эйнштейна (правда, относящемуся к другому вопросу), «Бог бросает кости» каждый раз, когда решает, поместить ли галактику в данный куб в пространстве, не считаясь с расходом материала.

Улам (цитируем по Нейману и Скотт (1959)) рассматривал поведение системы тел под действием гравитации, расположенных в начальный момент статистически. Такая постановка вопроса так же нелогична, и единственное отличие заключается в том, что непоследовательность сдвинута в прошлое.

Какой закон дисперсии можно ожидать при механизме образования сгустков под действием гравитационной неустойчивости из первоначально однородной среды?

Рассмотрим одну из возможностей. Предположим, что асимптотический закон фурье-компонент величины $\delta\rho$ имеет вид

$$|(\delta\rho)_k| \sim k^2$$

при малых k .

*) По замечанию А. Г. Дорошкевича, этот фактор может быть существенным. Тогда для дальнейшего придется подсчитывать не число, а суммарную массу сгустков в данном объеме.

Отдельный сгусток при разложении в интеграл Фурье даст

$$|(\delta\rho)_{kl}| = \text{const.}$$

Если сгустки расположены статистически независимо, то квадраты фурье-компонент их складываются. Следовательно, для совокупности сгустков

$$|(\delta\rho)_k| = \sqrt{\sum_l |(\delta\rho)_{kl}|^2} = \text{const.} \quad (17.8.1)$$

Индекс k , как и раньше, характеризует волновой вектор, индекс i соответствует номеру сгустка.

Асимптотика $(\delta\rho)_k \sim k^2$, а не const при малых k , как раз и означает, что $(\delta\rho)_k$ меньше, чем по формуле (17.8.1), т. е. что сгустки расположены в среднем на больших расстояниях более упорядоченно, чем при статистически независимом распределении.

Выявление такой упорядоченности путем обработки наблюдений имело бы первостепенное значение как веский аргумент в пользу происхождения современного распределения вещества во Вселенной из однородного состояния.

Непосредственно вычислять фурье-компоненты распределения галактик по небосводу, по-видимому, неудобно. Поэтому вернемся к определению из наблюдательных данных дисперсий δN числа N галактик в объеме V . Поставим такую задачу: найти δN и зависимость δN от \bar{N} , если распределение галактик характеризуется определенной зависимостью фурье-компонент *) от волнового вектора. Для этого, по предложению Н. А. Дмитриева, введем взвешивающую функцию $\varphi(x)$: эта функция должна отбирать то вещество, которое находится внутри рассматриваемого объема V . Если $\varphi(x) = 1$ для x внутри V и $\varphi(x) = 0$ для x вне V , то

$$\int_0^\infty \rho(x) \varphi(x) dV = \int_V \rho(x) dV = V\rho = mN,$$

где m — масса одной галактики, N — число галактик в объеме V . Перемножение с φ и последовательное интегрирование по всему бесконечному объему выделяет вещество внутри V . По свойствам фурье-интегралов, если

$$\rho(x) = \int \rho_k e^{ikx} d^3k,$$

$$\varphi(x) = \int \varphi_k e^{ikx} d^3k,$$

*) Переход от рассмотрения отдельных галактик или сгустков к функции плотности от координат $\rho(x)$ тривиален. Сгусток в точке x_i соответствует $\rho(x) = M_i \delta(x - x_i)$.

то

$$\int \rho(x) \varphi(x) d^3x = \int \rho_k \varphi_k d^3k.$$

Строго говоря, должно быть $\rho_k \varphi_{-k}$, но мы принимаем, что ρ_k и φ_k зависят только от $|k|$.

С помощью фурье-компонент можно выразить

$$(N - \bar{N})^2 = \bar{N}^2 - (\bar{N})^2.$$

В естественных предположениях получим

$$(\delta N)^2 = \int_{k \neq 0} |\rho_k|^2 |\varphi_k|^2 d^3k. \quad (17.8.2)$$

Общий характер фурье-компонент взвешивающей функции должен быть таким:

$$\varphi_k = V, \quad k < \frac{1}{l}, \quad \varphi_k \rightarrow 0, \quad k > \frac{1}{l},$$

где l — линейный размер объема V , т. е. $l \sim V^{1/3}$. Отсюда получим: для статистически независимых объектов, при $(\rho)_k = \text{const}$

$$(\delta N)^2 = \int_0^{V^{-1/3}} V^2 4\pi k^2 dk = V, \quad \delta N \sim \sqrt{V} \sim \sqrt{\bar{N}}.$$

При $(\delta \rho)_k = \text{const } k^2$

$$(\delta N)^2 = \int_0^{V^{-1/3}} V^2 k^4 4\pi k^2 dk \sim V^{-1/3}, \quad \delta N \sim V^{-1/6} \sim \bar{N}^{-1/6}. \quad (17.8.3)$$

Итак, действительно закон убывания фурье-компонент длинных волн $(\rho)_k \sim k^2 \sim \lambda^{-2}$ привел к закону дисперсии, совершенно непохожему на закон для независимых объектов. Мы получили закон $\delta N \sim \bar{N}^{-1/6}$ вместо $\delta N \sim \sqrt{\bar{N}}$; в больших объемах при больших \bar{N} распределение гораздо более однородно!

При выводе формулы было существенно быстрое убывание фурье-компонент взвешивающей функции φ_k при $k > 1/l$.

Оказывается, что если бы мы взяли $\varphi(x)$ в виде разрывной функции ($\varphi=1$ внутри V , $\varphi=0$ вне V), то при $k > 1/l$, $\varphi_k \sim 1/k^2$ и уже главный вклад в интеграл (17.8.2) дает область $k > 1/l$.

При этом $\delta N \sim \bar{N}^{1/3}$; дело в том, что если поступить примитивно и взять объем V с резкой границей, то флуктуации числа N определяются именно случайностями расположения галактик слева или справа от границы. В самом деле, число галактик около границы пропорционально поверхности, т. е. $l^2 \sim V^{2/3} \sim \bar{N}^{2/3}$, δN есть корень из этого числа.

Значит, такой способ подсчета не позволяет выявить ожидаемой степени однородности распределения галактик, $\delta N \sim \bar{N}^{-1/6}$.

Для того чтобы φ_k убывало достаточно быстро, можно взять, например,

$$\varphi(x) = \exp \left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{l^2} \right\}, \quad (17.8.4)$$

где x_0 — центр рассматриваемого объема. Тогда φ_k экспоненциально убывает при больших k , $\varphi_k \approx l^3 \exp(-k^2 l^2)$ и результат (17.8.3) справедлив.

Таким образом, предлагается считать галактики в окрестности избранной точки x_0 , приписывая каждой галактике «вес» (17.8.4), зависящий от ее расстояния от x_0 , плавно меняющийся от единицы вблизи x_0 до нуля при расстоянии, значительно большем l . Такой способ не вносит элементов случайности, связанных с проведением резкой границы и в принципе позволяет выявить закон стремления к однородности в больших масштабах лучше, чем в принятых методах.

Здесь сформулирована лишь идея способа. В его реализации возникает много вопросов: мы знаем угловые координаты гораздо точнее, чем расстояния; однородность относится к массе вещества, а не к числу галактик, масса галактик различна; возможно искажающее влияние межгалактического поглощения света и поглощения света в нашей Галактике. Поэтому практическая реализация нового способа является трудной, но вместе с тем и важной задачей: цель данного параграфа заключается в постановке этой задачи.

§ 9. О возможности определения космологической модели по наблюдениям далеких объектов

В формулы, связывающие абсолютную мощность источника и принимаемый на Земле поток, входят величины H и Ω , определяющие космологическую модель. Эти же величины входят в выражение для числа далеких источников с данным красным смещением и (или) с данным принимаемым потоком; в это выражение входит, очевидно, множителем плотность источников в единице объема сопутствующего пространства. При больших z существенно сказывается неевклидовость пространства, следовательно, влияние Ω на результаты велико. Если значительная часть вещества представляет собой полностью ионизованный газ, велико также влияние рассеяния электромагнитных волн на свободных электронах.

Можно ли на основе наблюдений получить сведения о космологических величинах?

Очевидно, это возможно, если известна абсолютная мощность источника или если известна плотность источников. В ряде работ рассчитаны зависимости, на основе которых это можно сделать; см. предыдущие параграфы этой главы. Однако наиболее трудная часть вопроса заключается как раз в том, чтобы получить необходимые исходные данные об источниках. Звезды главной последовательности представляют собой тот единственный тип источников, для которых физическая теория дает вполне определенные выводы о связи спектра и абсолютной мощности. Примером звезд, для которых эмпирически установлена определенная связь между периодом и мощностью, являются цефеиды. Но относительно квазаров или радиогалактик — объектов, наблюдаемых на наибольших расстояниях, надежных методов определения абсолютной мощности нет.

Можно ли определить космологическую модель при наличии эволюции источников? Ниже мы покажем, что при отсутствии теории эволюции это принципиально невозможно. Любая модель, т. е. любые значения H и Ω , совместимы с любыми наблюдательными данными по статистике источников, если никак не ограничивать закон эволюции источников. Следовательно, никакие данные по статистике сами по себе (без эволюции) не позволяют определить H и Ω . Поскольку H можно считать известным с точностью порядка $\pm 25\%$, практически речь идет об определении Ω . В оценке Ω неопределенность достигает более сотни ($5 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3 < \rho_0 < 5 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$, $0,01 < \Omega < 5$). Учет рассеяния света электронами ничего не меняет. Всякое утверждение, относящееся к величине Ω , полученное обработкой статистических данных и сопоставлением их с формулами релятивистской космологии в действительности, явно или неявно, основано на тех или иных предположениях, касающихся эволюции; достоверность получаемых значений Ω не больше достоверности эволюционных предположений.

Рассмотрим вопрос в самом общем виде. Пусть $\rho(P, t)$ есть функция плотности источников; число источников с мощностью между P и $P+dP$ в единице сопутствующего объема дается выражением $dn = \rho(P, t)dP$. Релятивистская космология дает нам, во-первых, связь между t и z , т. е. $t = t(z, \Omega)$ и, во-вторых, связь между принимаемым потоком и мощностью

$$S = P\varphi(z, \Omega) \quad \text{или} \quad P = S \cdot \varphi^{-1} = S\psi(z, \Omega).$$

Влияние электронного рассеяния заключено в функциях φ и ψ : если без рассеяния $\varphi = \varphi_0(z, \Omega)$, то с учетом рассеяния $\varphi = \varphi_0 e^{-\tau}$, где τ — оптическая толща. В-третьих, известен сопутствующий объем, приходящийся на слой, в котором красное

смещение меняется от z до $z+dz$ и на один стерадиан телесного угла

$$dV = \chi(z, \Omega) dz.$$

Рассмотрим теперь число наблюдаемых объектов в одном стерадиане, для которых поток лежит между S и $S+dS$, а красное смещение между z и $dz+z$. Их мощность, очевидно, лежит в пределах *) между $P=S\psi$ и $P+dP=(S+dS)\psi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} d^2N &= N''(S, z) dS dz = \rho(S\psi, t) \psi dS \chi dz = \\ &= \rho[S\psi(z, \Omega), t(z, \Omega)] \psi(z, \Omega) \chi(\Omega, z) dS dz. \end{aligned}$$

Итак, для любой функции $N''(S, z)$, полученной из наблюдений при любом значении Ω , можно построить соответствующую эволюционную функцию

$$\rho(P, t) = \frac{N''[P\psi(z, \Omega), t(z, \Omega)]}{\psi[z(t), \Omega] \chi[z(t), \Omega]}.$$

Наблюдения неидентифицированных оптически радиисточников (для них z неизвестно) дают распределение их по величине потока, т. е. функцию $N'(S)$:

$$dN = N'(S) dS = dS \int_0^{\infty} N''(S, z) dz.$$

Очевидно, что такие менее полные наблюдения тем более не дают оснований для определения Ω . Статистические наблюдения дают сведения об эволюции радиисточников (см. § 10), но не о космологии в узком смысле этого слова.

Если принять, что эволюционного эффекта нет, т. е. положить $\rho = \rho(P)$ (не зависит от t), то получаются определенные функции $N''(S, z, \Omega)$ и $N'(S, \Omega)$, зависящие только от Ω . Вид функции $\rho(P)$ можно получить исследованием близких объектов.

На раннем этапе развития космологии была надежда, что таким способом можно найти, хотя бы приближенно, величину Ω . В действительности наблюдаемая $N'(S)$ оказалась несовместимой с функцией $\rho(P)$, не зависящей от времени ни при каких предположениях об Ω ($0 < \Omega < \infty$).

Делались попытки задать форму эволюционной зависимости в каком-либо особо простом виде, например,

$$\rho(P, t) = \rho_0(P) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\beta_1} \quad \text{или} \quad \rho[P, t(z)] = \rho_0(P) (1+z)^\beta.$$

*) Строго говоря, данному интервалу $dS dz$ отвечает в плоскости P, z не прямоугольник, а параллелограмм: при $z=z_0$ P меняется от $S\psi(z_0)$ до $(S+dS)\psi(z_0)$ при $z=z_0+dz_0$, P меняется от $S\psi(z_0)+S\psi'(z_0)dz_0$ до $S\psi(z_0)+S\psi'(z_0)dz_0+\psi(z_0)dS$. Однако площадь этого параллелограмма не отличается от площади прямоугольника и равна $\psi dS dz$; это и использовано в выражении интеграла.

Общая плотность материи в единице физического (не сопутствующего!) объема пропорциональна $\rho_m \sim (1+z)^3$. Значит, указанное предположение о радиогалактиках означает, что их плотность в единице физического объема равна

$$\rho_{\text{rh}} = \rho(1+z)^3 \sim (1+z)^{3+\beta} \sim \rho_m^{1+\frac{\beta}{3}}.$$

При этом предполагается, что вид распределения их по мощности остается неизменным.

Делались попытки представить, кроме того, и $\rho(P)$ простейшими зависимостями по наблюдениям ближайших источников. После этого по наблюдаемой интегральной кривой $N(S)$ определялись параметры, характеризующие эволюцию, а резкий завал этой кривой для малых S (см. след. параграф) объяснялся рассеянием света на электронах межгалактической плазмы и определялась, таким образом, концентрация электронов, а следовательно, и Ω . Однако надо подчеркнуть иллюзорность такого подхода: форма кривой $N(S)$ и, в частности, ее завал при малых S может быть обусловлен не влиянием Ω (через электронное рассеяние), а отклонением эволюционной кривой от простого степенного хода $(1+z)^\beta$, изменением распределения источников по мощности с течением времени *) и т. п. причинами. При отсутствии полной теории, из которой следовала бы степенная зависимость $(1+z)^\beta$, нет никаких оснований считать ее универсальной **).

§ 10. Эволюция радиисточников

Как показано в предыдущем параграфе, данные наблюдений дают сведения о законе эволюции радиисточников. Эти сведения неполны, поскольку интерпретация этих данных зависит от предположений, относящихся к космологии (значения H , Ω). Имея это в виду, приведем результаты одной из последних работ этого направления, работы Лонгэйра (1966).

Лонгэйр принимает для расчетов модель плоского мира, т. е. случай критической плотности, $\Omega=1$. При этом $(1+z) \sim t^{-2/3}$. Удовлетворительное согласие с наблюдениями вплоть до $S \cong \cong 0,4 \cdot 10^{-26}$ вт/м² гц стер дали два варианта. В варианте, обозначенном Лонгэйром b , предполагается, что источники с абсолютной величиной ***) $M_r > -29,5$ (т. е. сравнительно слабые), не

*) При этом $\rho(P, t)$ нельзя больше представить как произведение двух функций $\rho(P)f(t)$ или $\rho(P)f(z)$.

**) Сэндиждем используются галактики, для которых можно дать хотя бы грубые оценки эволюции оптической светимости.

***) Радиосветимость M_r определяется формулой $M_r = 33,95 - 2,5 \log_{10} P_{178}$, где P_{178} — мощность вт/стер·гц на частоте 178 Мгц (длина волны 1,7 м).

эволюционируют, а более мощные $M_r < -29,5$ эволюционируют так, что мощность их растет пропорционально $t^{2,2}$, т. е. пропорционально $(1+z)^{3,3}$. Этот закон относится к области $z < 3$. При $z > 3$ предполагается, что никаких источников нет.

Второй вариант, обозначенный d , предполагает, что плотность источников с $M_r < -33$ в прошлом была больше, пропорционально $\sim t^{-3,8} \sim (1+z)^{5,7}$. Плотность (на единицу сопутствующего объема) и мощность более слабых источников $M_r > -33$ была неизменной. При $z > 4$ источников нет.

Эти два варианта, как выяснилось позже, хорошо описывают также и результаты, относящиеся к источникам вплоть до еще меньших потоков $S = 0,06 \cdot 10^{-26}$.

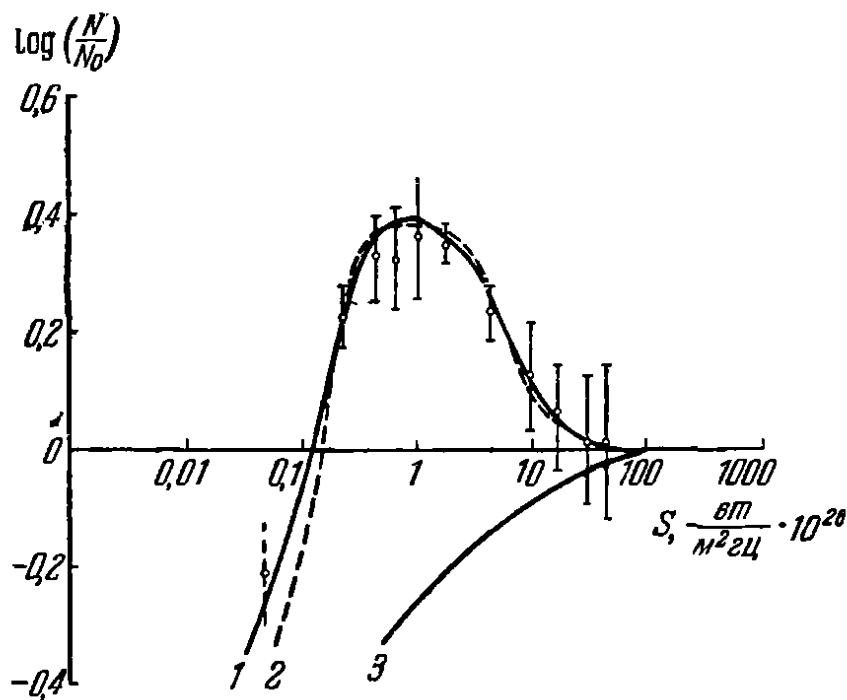


Рис. 90. Отношение числа источников N с потоком меньше данного к величине $N_0 = AS^{-3/2}$. Кривая 1 в предположении (b) об эволюции источников (см. текст), кривая 2 в предположении (d) об эволюции, кривая 3 без учета эволюции.

По оси абсцисс отложен поток на частоте 178 Мгц в единицах 10^{-26} вт/м² гц.

На графике, приведенном на рис. 90, показана кривая зависимости отношения $N(S)$ к $N_0 = AS^{-3/2}$ в зависимости от S . Кривая дана в логарифмическом масштабе. Закон $N_0 \sim S^{-3/2}$ соответствует плоскому пространству, без учета эволюции и красного смещения, константа A выбрана в соответствии с числом близких источников; поэтому для больших S отношение $N/N_0 \rightarrow 1$. Для сравнения приведена кривая 3 без учета эволюции — эта кривая целиком лежит под осью абсцисс. Подъем кривой в

области $10 < S < 1$ обусловлен эволюционным эффектом — возрастанием числа источников или их мощности. Спад кривой при $S < 1$ требует для своего описания эволюционного эффекта противоположного знака — отсутствия или резкого уменьшения числа радиогалактик при $z > 1$ или $z > 4$. Крайняя левая точка получена Г. Б. Шоломицким по данным работы Кендердина, Райла и Пооля (1966) и в работе Лонгэйра не была учтена; тем не менее, она отлично легла на кривую.

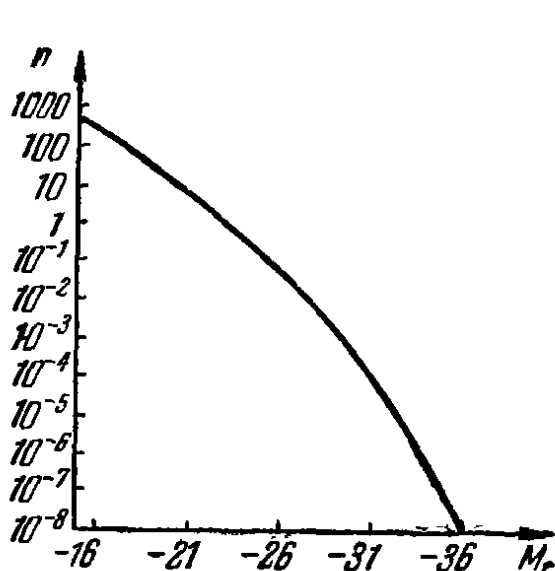


Рис. 91. Распределение по мощности радиосточников, находящихся в области с $z < 0,01$. По вертикали отложено количество источников с $z < 0,01$, приходящихся на стерадиан, имеющих абсолютную радиояркость от M_r до $M_r + 0,5$.

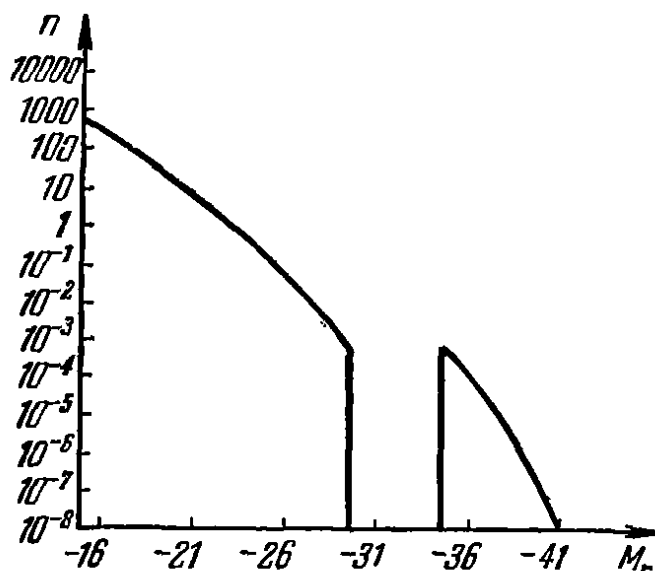


Рис. 92. Эволюция радиосточников в варианте (b). На рис. представлена кривая плотности радиосточников, какой она должна быть на момент, соответствующий $z = 3$. Эволюционируют только радиосточники с $M_r < -29,5$. Плотность дана на объем сопутствующего пространства, который в настоящее время совпадает с объемом, используемым для получения n на рис. 91.

На графике, приведенном на рис. 91, представлено распределение по мощности радиосточников, находящихся вблизи нас в области с $z < 0,01$. Для них эволюционный эффект мал.

Эволюционные предположения Лонгэйра соответствуют своеобразной деформации кривой для разных z : в варианте b при $z = 3$ кривая приведена на рис. 92, в варианте d при $z = 4$ вид кривой приведен на рис. 93. Кривая существенно меняет свою форму!

Особенно надо подчеркнуть «отрезание» при $z = 3$ или 4. Предполагается, следовательно, что при $z > 3$ или 4, т. е. раньше определенного момента ($t < 5 \cdot 10^8$ лет), радиогалактик не было. Эта оценка момента начала массового рождения радиогалактик совпадает с оценками, полученными из других соображений.

Одна такая оценка основана на соотношении между размерами скоплений (диаметр порядка $D=3 \text{ Mpc}$) и средним расстоянием между ними порядка $l=10 \text{ Mpc}$, где-то при $z \sim 3,5$ (по формуле $(1+z)^3 = x^3 / \frac{\pi}{6} D^3$ скопления соприкасались, заполняли все пространство, а следовательно именно при этом z произошло их обособление друг от друга (Цвикки дает значение $z=4,25$). Другая оценка связана с рассмотрением теплового баланса газа до образования галактик (см. § 6 гл. 19).

На первый взгляд представляется неестественным резкое изменение самой формы кривой $\rho(P)$ в прошлом по сравнению с плавной кривой в настоящее время: появление разрыва или горба на рис. 92 и 93. Это означает, что современные радиисточники состоят из двух групп; по Лонгэйру, с данными наблюдений совместно предположение, что мощная эволюционирующая группа представляет собой квазары.

Необъясненным остается только тот факт, что в настоящее время две группы источников дают плавную кривую $\rho(P)$ без изломов или разрывов.

Насколько однозначной является картина эволюции, предложенная Лонгэйром? Если предположить, что эволюционируют все источники, т. е. вся кривая $\rho(P)$ смещается вправо или вверх без изменения формы, нельзя получить резкий завал $N(S)/N_0(S)$ при малых S . Его нельзя получить ни за счет выбора z , выше которого нет источников, ни за счет учета рассеяния.

В самом деле, если при увеличении чувствительности приемной аппаратуры (т. е. при уменьшении S) мы не видим более далеких источников (потому что их нет за пределами определенного z или они скрыты пеленой рассеяния), то зато видим новые более слабые источники. Лишь при немонотонной кривой вида рис. 92 или 93 можно добиться того, чтобы прекращался быстрый рост $N(S)$.

Лонгэйр не учитывает рассеяния света электронами. Предполагая, что ионизованный газ составляет долю ξ средней

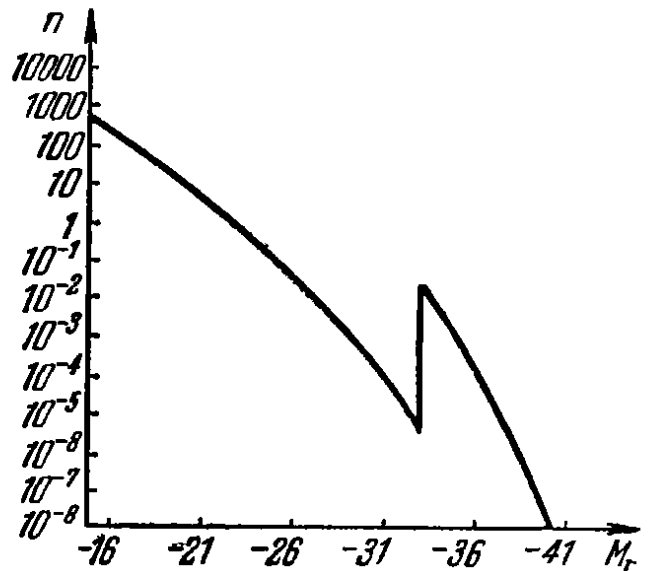


Рис. 93. Эволюция радиисточников в варианте (d). Кривая $n = n(M_r)$ на момент $z = 4$. Меняется число источников с $M_r < -33$. Плотность отложена в тех же единицах, что и на рис. 92.

плотности и принимая $\mu_e = 1,16$, получим следующую формулу для оптической толщи рассеяния:

$$\tau = 0,06\xi \left(\frac{H}{100} \right) \Omega \int_0^z \frac{(1+z) dz}{\sqrt{1+\Omega z}}.$$

При $H = 100$ км/сек $\Omega = 1$, $\xi = 1$; отсюда следует, что

$$\tau = 0,06 \frac{2}{3} [(1+z)^{3/2} - 1], \quad \tau = 1 \quad \text{при} \quad z = 8.$$

В условиях Лонгэйра $\tau < 0,4$ на границе образования источников (при $z = 4$). Следовательно, достаточно предположить дополнительное изменение мощности источников в 1,5 раза, чтобы компенсировать влияние рассеяния. Напомним, что эволюционное изменение мощности по Лонгэйру составляет $(1+z)^{3,3}$, т. е. при $z = 3$ достигает 100 раз!

Особенно интересны данные о суммарной интенсивности радиоизлучения на частоте 178 Мгц. Измерения показывают, что эффективная температура равна 80° (в направлении на полюс галактики); из них предполагается, что на внегалактические источники приходится $28 \pm 8^\circ$ или, по более поздним данным, $23 \pm \pm 5^\circ$. Отсюда следует еще вычесть 3° реликтового излучения. На все, в том числе и неразрешенные источники излучения, приходится от 15 до 30° . Важная особенность суммарного излучения состоит в том, что на него не влияет рассеяние, способное изменить лишь направление, но не частоту и интенсивность излучения.

Обозначим общую радиомощность единицы сопутствующего объема P_1 , $P_1 = 4\pi \int P_\rho(P) dP$. С учетом эволюционного эффекта $P_1 = P_1(t)$; удобнее, зная связь t и z , перейти к $P_1 = P_1(z)$. Светимость в единице физического объема равна $(1+z)^3 P_1(z)$. Для степенного спектра $P_1 \sim \nu^{-\alpha}$ закон изменения плотности энергии на данной частоте в ходе расширения $\epsilon_\nu \sim (1+z)^{-3-\alpha}$.

Используя зависимость (17.3.35)

$$dt = \frac{1}{H} \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega z}},$$

получим для плотности излучения в настоящее время выражение

$$\begin{aligned} \epsilon_\nu &= \frac{1}{H} \int P_1(z) (1+z)^3 (1+z)^{-3-\alpha} \frac{dz}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega z}} = \\ &= \frac{1}{H} \int P_1(z) (1+z)^{-\alpha-2} \frac{dz}{\sqrt{1+\Omega z}}. \end{aligned}$$

Удобно от плотности излучения перейти к эффективной температуре. Для радиочастот ($h\nu \ll kT$) эти величины связаны формулой Рэлея — Джинса

$$\epsilon_\nu = 8\pi kT \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{c} \text{ эрг/см}^3 \text{ ц.}$$

Итак, общий вид формулы

$$T = A \int P_1(z)(1+z)^{-\alpha-2} \frac{dz}{\sqrt{1+\Omega z}}.$$

Если выделить эволюционный фактор, т. е. записать $P_1 = P_0 f(z)$, где P_0 — радиомощность в настоящее время, последнее выражение приобретает вид

$$T = 16^\circ \int f(z)(1+z)^{-2-\alpha} \frac{dz}{\sqrt{1+\Omega z}}.$$

Предположим степенной закон эволюции от некоторого z до $z=0$; положим далее $\Omega=1$. Для $f=(1+z)^3$, $\alpha=1$ найдем $T = 16^\circ \cdot 2(\sqrt{1+z} - 1)$; при $z=4$ было бы $T=40^\circ$.

Если же взять более крутой рост $f(z) \sim (1+z)^{4,5}$, который необходим для описания роста $N(S)$, то $T=16, \frac{1}{2}[(1+z)^2 - 1] = 190^\circ$ при $z=4$. Предположение об общей эволюции всех источников, и сильных и слабых, резко противоречит измеренной температуре.

Любопытно оценить вклад в температуру, который дают только идентифицированные источники. Принято характеризовать их функцией $N(S)$ — числом источников в одном стерадиане, у которых поток превышает S . Число источников с потоком в интервале от S до $S+dS$ равно $n(S) = -\frac{dN}{dS} dS$, следовательно, полный поток

$$g = \int_S^\infty S \left(\frac{dN}{dS} \right) dS = \int_S^\infty N dS + SN(S).$$

В широком интервале от $S=0,3 \cdot 10^{-26}$ вт/м²ц до $S \cong 30 \cdot 10^{-26}$ (где N порядка единицы) наблюдательные данные описываются степенной формулой

$$N = 1,6 \cdot 10^3 \cdot S^{-1,7}$$

(S в единицах 10^{-26} вт/м²ц).

При таком показателе g определяется нижним пределом интегрирования, т. е. в основном зависит от многочисленных слабых источников. Поток оказывается равным

$$g = 4 \cdot 10^3 S^{-0,7} \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{гц} \cdot \text{стер.}$$

В этих единицах поток, выраженный через эффективную температуру (все для $\nu = 178 \text{ Мгц}$), равен

$$g = 960T \cdot 10^{-26} \text{ вт/м}^2 \cdot \text{гц} \cdot \text{стер.}$$

Вследствие того, что при $S < 0,3$ рост $N(S)$ резко замедляется, все источники с $S > 0,3$ дают согласно Лонгэйру $T \sim 10^\circ$; более поздние данные до $S = 0,03$ незначительно увеличивают это значение. Однако если бы замедление роста $N(S)$ было связано с рассеянием, то источники, которые без рассеяния давали бы поток $S > 0,03$, дали бы $T = 44^\circ$, что выходит за допустимый предел.

Следовательно, если в принципе замедленный рост $N(S)$ можно описать как влияние рассеяния, то наблюдаемую температуру описать нельзя, не предполагая, что где-то при $z > 4$ или соответственно $S < 0,03$ источников нет.

Непосредственно наблюдения дают картину, внешне напоминающую островную Вселенную с нашей галактикой в центре. При удалении от центра плотность источников вначале нарастет, но затем, на определенном расстоянии, резко падает. Однако вся совокупность теоретических взглядов заставляет нас эту кажущуюся пространственную неоднородность истолковывать как эволюционный эффект в пространственно однородном мире.

Все расчеты Лонгэйра сделаны в предположении $\Omega = 1$, $H = 100 \text{ км/сек Мпс}$. Насколько они чувствительны к этим предположениям?

Приведенный последним расчет связи между T и $N(S)$ вообще не зависит от указанных предположений. Определение $\rho(P)$ было основано на счете идентифицированных источников с $z < 0,01$, для которых известен поток S . Пересчет этой величины b на плотность на единицу объема выражается через $\rho_{100}(P)$ (где ρ_{100} рассчитано для случая $H = 100 \text{ км/сек Мпс}$)

$$\rho(P) dP = \frac{100}{H} \rho_{100} \left[P \left(\frac{H}{100} \right)^2 \right] dP.$$

От Ω пересчет не зависит.

Однако вид эволюционных кривых $f(z)$ не зависит от H , но зависит от Ω . Иначе говоря, данная функция $f(z)$ дает одинаковый результат при любом H , но для получения одних и тех же наблюдательных результатов при различных Ω нужно менять закон эволюции.

Чтобы выяснить, как велики эти изменения, можно сравнить данные для $\Omega = 1/3$, $\Omega = 1$ и $\Omega = 3$ при $z = 4$. Легко вычислить величины $\frac{dt}{dz}$; D^2 ; $D^2 \frac{dt}{dz}$; τ ; e^τ на момент $z = 4$. Оказывается, что изменения при переходе от одной модели к другой отнюдь не малы, достигая одного порядка. Однако их надо сравнивать с предполагаемыми эволюционными эффектами. Согласно Лонгэйру эволюционные эффекты, как показано выше, составляют в разных вариантах от двух до четырех порядков. По сравнению с такой эволюцией изменения при переходе от одной модели к другой малы; малое изменение показателей эволюции, не меняющее качественной картины, позволяет согласовать наблюдения с любой космологической моделью.

Вывод: наблюдения свидетельствуют об эволюции радиоисточников, но пределы, в которых лежит Ω , т. е. космологическая модель, должны определяться не подсчетами радиоисточников, а прямым измерением компонент, из которых складывается плотность вещества Вселенной. Изученные компоненты (скажем, материя, входящая в галактики, имеющая $\bar{\rho} \sim \sim 5 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$) дают нижний предел плотности, так как всегда можно предположить наличие трудно наблюдаемых форм материи (нейтрино, сколлапсировавшие объекты вне галактик). Верхний предел $\bar{\rho}$ определяется из условия, что время расширения Метагалактики не меньше возраста Земли.

ГОРЯЧАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ФИЗИКА РАННИХ ЭТАПОВ РАСШИРЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ

§ 1. Гипотезы о состоянии вещества в начальной стадии расширения (общее введение)

Естественно начать исследование физики процессов в расширяющейся модели Вселенной с простейшего случая, а именно, будем предполагать, что начальная стадия расширения Вселенной в точности соответствовала решению Фридмана, и что плотность материи была в прошлом чрезвычайно велика. Решение Фридмана, продолженное в прошлое, формально дает состояние бесконечной плотности. Вопрос о том, позволяют ли отклонения от решения Фридмана избежать вывода о состоянии бесконечной плотности в космологическом решении, до сих пор не решен окончательно (см. гл. 20). Но если в прошлом плотность вещества с большой точностью была однородной (а соображения в пользу этого будут даны также в гл. 20) и, кроме того, движение изотропно (о возможности отклонений от изотропии и о следствиях этого см. гл. 21), то решение Фридмана применимо вплоть до огромных плотностей, когда мы наконец сталкиваемся с ситуацией, заведомо не описываемой ОТО. Как уже отмечалось в § 6 гл. 4, такая ситуация наступает из-за квантовых эффектов при критической плотности $\rho \approx 10^{93} \text{ г/см}^3$, что несравненно больше ядерной (см. Дополнение I).

Итак, будем считать, что решение Фридмана продолжимо в прошлое до плотностей много больше $\rho_{\text{яд}} \approx 10^{14} \text{ г/см}^3$. Посмотрим, какие следствия вытекают из такого предположения и сравним их с наблюдательными данными. Можно предположить, что наблюдаемая в настоящее время неоднородность плотности — существование галактик, звезд и другие отклонения от решения Фридмана, — возникли вследствие неустойчивости однородного решения и не противоречат однородности Вселенной на ранней стадии (об этом сказано подробно в следующей главе).

Закон изменения плотности в зависимости от времени был изучен раньше; этот закон слабо зависит от вида уравнения состояния. Но, кроме механической стороны дела, есть физические вопросы, касающиеся состава и температуры вещества.

Прежде всего возникает общий вопрос: можно ли вообще что-либо сказать о процессе, в ходе которого плотность вещества проходит через любые, сколько угодно большие значения? В настоящее время сколько-нибудь надежные данные есть лишь о состоянии вещества при плотности не намного выше ядерной (см. раздел II). На помощь приходят два соображения:

1. Для механики процесса нужно знать лишь уравнение состояния вещества, т. е. связь между давлением, энергией и плотностью частиц. Релятивистское условие, согласно которому скорость звука не должна превышать скорость света, существенно ограничивает зависимость давления от плотности условием

$$P \leq \rho c^2.$$

2. Мы ничего не знаем конкретно о состоянии вещества при плотности, например, 10^{30} или 10^{60} г/см³, но предполагаем (см. гл. 6, § 1), что действуют без всяких исключений самые общие законы физики: законы сохранения, относящиеся к элементарным частицам (сохранение барионов, электрического заряда, лептонных чисел), и законы термодинамики (I и II начало). Заметим, что если бы барионы не сохранялись при плотности больше ядерной, то с малой, но конечной вероятностью они не сохранялись бы и в земных условиях в атомных ядрах. Такой процесс искали, но не обнаружили*).

К этим принципиальным положениям добавляется одно практическое, конкретное предположение: при сверхвысоких плотностях все процессы установления равновесия идут весьма быстро по сравнению со скоростью изменения плотности. Следовательно, в ходе расширения вещество в каждый момент находится в состоянии, весьма близком к равновесию, и расширение на этой стадии происходит с сохранением энтропии.

К моменту, когда будет достигнута плотность порядка ядерной (в 10 или 100 раз больше), вещество находится в состоянии равновесия, соответствующем его энтропии и другим сохраняющимся величинам. Состояние равновесия тем и замечательно, что оно единственное (при данных значениях сохраняющихся величин) и не зависит от предыдущей истории вещества**).

*) Известно, что в условиях ядра барионы сохраняются с огромной точностью: период полураспада не меньше 10^{24} лет.

**) По сходному поводу на принципиальную простоту равновесия при сложности процессов установления равновесия обращал внимание Уилер (1958, стр. 138).

Состояние равновесия при плотности 10^{14} или 10^{15} г/см³ может быть вычислено по современной теории (см. гл. 6). Наше полное незнание свойств вещества при плотности, например, 10^{30} г/см³ (где могут играть роль и неизвестные нам частицы!), не мешает расчету равновесия при 10^{15} г/см³, нужно только задаться значением энтропии и числом лептонов, отнесенными к одному бариону.

До 1948 г. в литературе имелись туманные формулировки, согласно которым в сверхплотном состоянии вся Вселенная представляла собой одно «ядро» или одну нейтронную «каплю».

Впервые в работах Гамова, Альфера и Германа (ссылки см. в гл. 14) был подробно разработан «горячий» вариант начальной стадии: авторы предполагали, что на начальной стадии температура была весьма высока и плотность нуклонов составляла ничтожную долю плотности излучения (т. е. деленной на c^2 энергии излучения).

Цель авторов заключалась в том, чтобы, рассматривая ядерные реакции, получить наблюдаемое в настоящее время соотношение между количеством различных химических элементов и изотопов.

Напомним, что в 1948 г. предполагали, что время, протекшее с момента сингулярности, $\sim 1/H \sim 2 \cdot 10^9$ лет (в соответствии с завышенным $H \sim 500$ км/сек Мпс). Сравнивая это время с возрастом Земли — порядка $4 \cdot 10^9$ лет, авторы предполагали, что даже Земля с ее содержанием железа, свинца, урана сконденсировалась из первичного вещества.

В настоящее время оценка величины H уменьшилась и $1/H$ возросло до $10 \cdot 10^9$ лет; с другой стороны, теория нуклеогенезиса в звездах успешно объясняет основные законы распространности элементов в предположении, что звезды образовались из чистого водорода или водорода и гелия (см., например, Аллер (1961)), и поэтому необходимость объяснения происхождения всех элементов (в том числе и тяжелых!) на ранней стадии отпала.

В настоящее время необходимо только, чтобы теория не приводила к выводам о химическом составе, противоречащим наблюдениям. Вернемся к рассмотрению процессов на ранней стадии.

В процессе расширения температура падает (сохраняющейся величиной является удельная энтропия; см. § 5 гл. 8), но все же и к настоящему моменту должно остаться электромагнитное излучение с температурой в разных вариантах теории от долей градусов до $20\text{—}30^\circ$ К. Как уже неоднократно отмечалось, эксперимент дает $T=3^\circ$ К. Из уравнений механики и из известного сейчас соотношения между квантами и атомами

можно найти температуру и состав в зависимости от времени (будем отсчитывать время t от момента $\rho = \infty$ во фридмановском решении). Так, например, в момент $t = 1$ сек температура была около 1 мегавольта, т. е. 10^{10} градусов, плотность $\rho \approx 10^6$ г/см³. Кроме квантов, в равновесии было почти столько же пар электронов и позитронов. При этом ядра не могли существовать, существовали протоны и нейтроны в почти одинаковом числе; столкновения с электронами и позитронами приводили к взаимным превращениям протонов и нейтронов.

По мере расширения исчезли позитроны. Часть нейтронов распалась, остальные нейтроны соединились с протонами и в конечном счете дали состав: $\sim 70\%$ водорода и $\sim 30\%$ гелия. От этого периода должны остаться также нейтрино и антинейтрино, в количестве, примерно равном количеству квантов и с той же средней энергией, соответствующей сегодня нескольким градусам, т. е. около 10^{-3} эв.

Еще более парадоксальные выводы следуют из горячей модели для более ранних моментов и более высоких температур. Из теории следует, что был период (когда $T \geq 10^{13}$ °К), когда было много нуклонов и антинуклонов; с этой точки зрения сегодняшние нуклоны представляют собой результат малого избытка нуклонов над антинуклонами в той ранней стадии.

Если существуют еще более тяжелые частицы — кварки, то и они должны были находиться в заметном количестве в равновесии, и можно рассчитать, что к сегодняшнему моменту должно уцелеть до $10^{-9} \div 10^{-10}$ кварков на один атом; это больше, чем средняя концентрация золота — $10^{-12} \div 10^{-13}$ и радия 10^{-18} .

Несколько лет назад считалось, что содержание гелия в веществе, не подвергшемся переработке в звездах, значительно меньше 30%, и это представлялось существенным противоречием горячей модели*). В этот период была сформулирована гипотеза о возможной «холодной модели» (Зельдович (1963d)).

В этой модели предполагалось, что вещество состоит из протонов, электронов и нейтрино в соотношении 1:1:1; энтропия равна нулю. Равное число электронов и протонов необходимо из условия электронейтральности вещества.

*) Впрочем, и в последнее время появляются работы, в которых указывается на малое первоначальное содержание гелия в звездах первого поколения. Так, в работе Сарджента и Сирла (1966) отмечается, что звезды II типа населения (старые звезды) содержат в 100 раз меньше He, чем звезды I типа. Для того чтобы согласовать эти наблюдения с теорией горячей Вселенной, рассматриваются различные механизмы, способные уменьшать концентрацию гелия в фотосфере после образования звезды (Камерон, Труран (1967); Сарджент, Сирл (1966), Новиков, Сюняев (1967)).

При большой плотности электроны, в соответствии с принципом Паули и статистикой Ферми, даже при нулевой температуре имеют высокую энергию (до 300 Мэв при ядерной плотности $2 \cdot 10^{14}$ г/см³). По этой причине, как указал Ландау, при большой плотности вещества в звездах происходит процесс превращения протонов в нейтроны



причем нейтрино (ν) покидают звезду.

Смысл предполагаемого в «холодной модели» варианта состава дозвездного вещества, состоящего из электронов, протонов и нейтрино, заключается в том, что нейтрино также подчиняются статистике Ферми и принципу Паули. При наличии нейтрино процесс превращения протонов в нейтроны не идет, так как уже заняты те состояния, в которые энергетически могло бы попасть нейтрино по реакции (18.1.1).

Таким образом, нейтрино как бы стабилизируют протоны. Холодный вариант приводит к выводу, что при расширении до нормальной плотности порядка 1 г/см³ и ниже, вещество оказывается состоящим из чистого водорода, который и является исходным сырьем для ядерных реакций и нуклеогенезиса в звездах первого поколения.

Открытие реликтового излучения, предсказанного горячей моделью, заставляет отказаться от холодной модели, в которой нет «первичного» излучения.

Насколько надежно открытие фонового излучения доказывает горячую модель? Не может ли это излучение возникнуть в каких-то процессах в расширяющемся веществе или в небесных телах, а не существовать с самого начала космологического расширения? Интегральная плотность равновесного излучения (фона) $\epsilon_r = 6 \cdot 10^{-13}$ эрг/см³ почти в 100 раз больше, чем интегральная плотность излучения известных источников (звезды галактик, радиогалактик, квазары), подсчитанная с учетом их вероятной эволюции в прошлом. Излучение фона с большой точностью изотропно.

Если разделить плотность энергии $\epsilon_r = 6 \cdot 10^{-13}$ на плотность материи $5 \cdot 10^{-31}$ г/см³ (средняя плотность вещества, входящего в состав галактик по данным Оорта), то получим $\sim 10^{18}$ эрг/г. Таким образом, горение $\approx 20\%$ всего водорода даст достаточно энергии, чтобы наполнить пространство излучением $\sim 3^\circ$. Однако мы знаем, что горение ядерного топлива в звездах дает спектр, очень далекий от трехградусного равновесного излучения, которое наблюдается. Если горение имело место в далеком прошлом, то испущенное звездами высокотемпературное излучение из-за космологического расширения может превра-

таться в низкотемпературное излучение, но в течение расширения энергия уменьшается $\varepsilon_r = \varepsilon_0 (\rho/\rho_0)^{1/3}$, и требуется выделение энергии в прошлом больше разумного предела.

Наблюдаемый сейчас фон можно пытаться объяснить выделением в прошлом энергии в празвездах только при очень невероятном соединении многих предположений. Так, надо предполагать высокую современную среднюю плотность вещества $\rho \geq 2 \cdot 10^{-29}$ г/см³. Надо к тому же сделать предположение о выделении практически всей ядерной энергии всего вещества, излученной в гипотетических «празвездах» за короткий период в прошлом ($t = 3 \cdot 10^6$ лет), о поглощении, а затем переизлучении света пылью, которая составляет не менее 10^{-5} всего вещества по весу. Подробности см. в работе Зельдовича и Новикова (1967). Указанную возможность объяснения фона можно считать невероятной. Для окончательного доказательства однозначности интерпретации фона нужны исследования межгалактической среды.

Если наблюдения покажут, что плотность межгалактического вещества невелика, $\rho < 10^{-29}$ г/см³, то это будет означать невозможность «пылевого» объяснения фонового излучения. Кроме того, если наблюдения покажут, что в межгалактическом пространстве мало пыли, а в метагалактическом газе нет тяжелых элементов, то это также будет доказательством горячей космологической модели.

Решающим экспериментом было бы измерение фона нейтрино, который согласно горячей модели должен иметь $T = 2^\circ$ (см. далее). Однако этот «эксперимент века» лежит пока далеко за рамками возможного. Кроме того, как недавно было показано Дорошкевичем, Зельдовичем, Новиковым (1967a, b), в случае анизотропной деформации на ранней стадии космологического расширения сегодняшний спектр реликтовых нейтрино может сильно отличаться от равновесного с $T = 2^\circ$. Подробнее см. об этом в гл. 21.

При выделении ядерной энергии в «празвездах» образующиеся нейтрино имели бы, очевидно, неравновесный спектр, и их «термализация» невозможна, так как вещество для них прозрачно. Их плотность должна быть порядка плотности нуклонов, а современная энергия — сотые доли $Mэв$ *).

В дальнейшем мы будем считать справедливой горячую модель.

*) Определение числа нейтрино позволило бы оценить выделившуюся энергию, а определение сегодняшней энергии нейтрино дало бы момент в прошлом, когда выделение энергии произошло, и показало бы, возможно ли таким образом объяснить фон.

В нижеследующих параграфах этой главы более подробно описываются процессы, происходящие на ранних стадиях расширения горячей модели, схематично обрисованные в этом параграфе.

§ 2. Космологическое расширение высокотемпературной плазмы и установление равновесия

В горячей модели на ранней стадии плотность нуклонов мала по сравнению с плотностью квантов и других частиц с массой покоя, равной нулю. Электронно-позитронных пар много лишь тогда, когда температура больше массы покоя, $kT > m_e c^2$ ($T > 5 \cdot 10^9$ °К). Если выполнено это неравенство, то можно электроны и позитроны рассматривать как релятивистские частицы. То же относится и к более тяжелым частицам при соответственно еще более высокой температуре. Следовательно, с большой точностью имеет место соотношение

$$P = \frac{1}{3} \epsilon = \frac{1}{3} \rho c^2$$

(P — давление, ϵ — плотность энергии, ρ — плотность в $г/см^3$).

Для такого уравнения состояния закон расширения на ранних этапах выведен в § 8 гл. 15. Он имеет вид

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{t^2} \text{ г/см}^3, \quad (18.2.1)$$

$$\epsilon = \rho c^2 = \frac{4 \cdot 10^{26}}{t^2} \text{ эрг/см}^3. \quad (18.2.2)$$

Если бы газ состоял только из квантов электромагнитного поля, то мы имели бы

$$\epsilon_r = \sigma T^4, \quad \text{где} \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7,57 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{ град}^4}.$$

С учетом того, что в равновесии есть различные сорта частиц, запишем

$$\epsilon = \rho c^2 = \kappa \sigma T^4,$$

где κ — безразмерный коэффициент больше единицы. Получим

$$(kT)^4 = \frac{1}{\kappa} \frac{45}{32\pi^3} \frac{\hbar^3 c^5}{G t^2},$$

$$T (\text{°К}) = t^{-1/2} \kappa^{-1/4} \cdot 1,5 \cdot 10^{10}; \quad t (\text{сек}) = \frac{2,25 \cdot 10^{20}}{T^2 \kappa^{1/2}}, \quad (18.2.3)$$

$$T (\text{МэВ}) = t^{-1/2} \kappa^{-1/4} \cdot 1,3; \quad t (\text{сек}) = \frac{1,7}{T_{\text{МэВ}}^2 \kappa^{1/2}}. \quad (18.2.4)$$

Наконец, для плотности всех сортов частиц получим, принимая во внимание, что средняя энергия частицы равна $4kT$,

$$n = \frac{\varepsilon}{4kT} = t^{-3/2} \kappa^{1/4} \cdot 0,012 \left(\frac{c}{\hbar G} \right)^{3/4} = t^{-3/2} \kappa^{1/4} \cdot 4,7 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}. \quad (18.2.5)$$

Не подлежит сомнению, что при высоких температурах число пар e^+ , e^- не отличается от равновесного. В самом деле, рассмотрим для примера момент, когда $T = 1 \text{ Мэв}$, $t = 1 \text{ сек}$, $n_{e^+} \approx n_{e^-} \approx 10^{31} \text{ см}^{-3}$. Сечение аннигиляции порядка 10^{-24} см^2 , скорость частиц порядка скорости света; следовательно, время установления равновесия порядка

$$\tau = \frac{1}{\sigma_1 n c} = 10^{-17} \text{ сек.}$$

Итак, τ ничтожно мало по сравнению с t . Полное равновесие $e^+ + e^- \rightleftharpoons 2\gamma$ обеспечено. Точно так же обстоит дело и с установлением равновесия мюонных пар μ^+ , μ^- , а также мезонов и барионов всех сортов при соответствующих более высоких температурах.

В ходе расширения вещества процесс установления равновесия может стать слишком медленным по сравнению со скоростью расширения только в двух случаях:

а) при слабом взаимодействии, когда сечение реакции во много раз меньше 10^{-24} см^2 . Сюда относится вопрос о нейтрино и гравитонах;

б) для частиц с отличной от нуля массой покоя при низкой температуре, когда равновесная концентрация становится малой в том случае, если рождение или исчезновение частиц поодиночке невозможно, т. е. если аннигиляция этих частиц возможна только при попарном их столкновении (а рождение частиц происходит только парами). Сюда относится вопрос об остатке античастиц — антипротонов и позитронов и вопрос о возможной концентрации кварков.

Рассмотрим эти вопросы по очереди.

Рождение электронных нейтрино и антинейтрино идет в основном по реакции $e^- + e^+ = \nu_e + \bar{\nu}_e$. Ее сечение для релятивистских электронов и позитронов определяется формулой

$$\sigma_\nu \approx \frac{g^2 E^2}{\hbar^4 c^4},$$

где g — константа слабого взаимодействия $\approx 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$. Подставим вместо E по порядку величины kT и, используя зависимость (18.2.3) для $T = T(t)$, получим зависимость времени

установления равновесия τ от космологического времени t :

$$\tau = \frac{1}{\sigma_\nu n c} = \frac{G^{5/4} \hbar^{13/4}}{g^2 c^{1/4}} t^{5/2}.$$

Когда τ становится больше t , нейтрино становятся свободными, их взаимодействие с другими частицами и между собой прекращается. Приравнявая $\tau=t$, находим этот момент $t \approx 10$ сек. Эта оценка, сделанная с помощью выражений, в которых опущены численные безразмерные множители, весьма груба; она приведена лишь с той целью, чтобы показать, как входят в искомое выражение константы G , g и другие.

Для более точной оценки можно выписать точные выражения. Мы воспользуемся выражением скорости перекачки энергии из e^+ , e^- в ν , $\bar{\nu}$, вычисленным Чиу (см. § 9 гл. 11; в двух формулах ниже T в $^\circ\text{K}$),

$$W = 4,6 \cdot 10^{-66} T^9 \text{ эрг/сек} \cdot \text{см}^3, \quad T > 3 \cdot 10^9,$$

и сравним его с равновесной плотностью энергии ν и $\bar{\nu}$

$$\epsilon = 6,8 \cdot 10^{-15} T^4 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3},$$

откуда время установления равновесной плотности (T в Мэв)

$$\tau = \frac{\epsilon}{W} = \frac{1,5 \cdot 10^{51}}{T^5} = \frac{7}{T^5} \text{ (сек)}.$$

Используем связь T и t :

$$t = \frac{1,7}{T_{\text{Мэв}}^2 \kappa^{1/2}};$$

приравнявая $t=\tau$, найдем (при $\kappa=4,5$)

$$T = 2 \text{ Мэв} = 4 \cdot m_e c^2, \quad t = 0,2 \text{ сек}.$$

Существенно, что равновесие между $\nu\bar{\nu}$ и e^+e^- поддерживается лишь в тот период, когда $T > m_e c^2$.

Известно, что существуют два типа нейтрино: электронные ν_e и мюонные ν_μ . Проведенный расчет относился к электронным нейтрино.

Мюонные нейтрино рождаются в реакциях

$$\mu^+ + \mu^- = \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu; \quad \mu^+ = e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e, \quad \mu^- = e^- + \nu_\mu + \nu_e.$$

Время жизни мюона $2 \cdot 10^{-6}$ сек. Отсюда следует, что время установления равновесия равно приблизительно $2 \cdot 10^{-6}$ сек, когда $T > m_\mu c^2$ и мюонов много; если же $T < m_\mu c^2$ и число мюо-

нов уменьшается, то соответственно увеличивается время установления равновесия мюонных нейтрино:

$$\tau = 2 \cdot 10^{-6} e^{\frac{m_\mu c^2}{T}} \approx 2 \cdot 10^{-6} e^{\frac{107}{T_{\text{Мэв}}}}.$$

Сопоставляя с выражением $T(t)$, найдем из условия $t = \tau$,

$$T = 12 \text{ Мэв}, \quad t = 0,01 \text{ сек}, \quad e^{-\frac{m_\mu c^2}{T}} \approx 10^{-4}.$$

Итак, есть период полного термодинамического равновесия всех типов частиц, включая оба сорта нейтрино и антинейтрино. При этом $m_\mu c^2 > T_1 > m_e c^2$, а значит, равновесные плотности энергии находятся в соотношении (в момент $T = T_1$)

$$\varepsilon_\gamma : \varepsilon_{e^\pm} : \varepsilon_{\nu_e, \bar{\nu}_e} : \varepsilon_{\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu} : \varepsilon_{\mu^\pm} = 1 \cdot \varepsilon_1 : \frac{7}{4} \varepsilon_1 : \frac{7}{8} \varepsilon_1 : \frac{7}{8} \varepsilon_1 : 0,$$

где $\varepsilon_1 = \sigma T_1^4$.

Эти соотношения можно найти, например, в книге Ландау и Лифшица (1964). Всех остальных частиц практически нет (о гравитонах речь пойдет ниже). Плотность барионов в этот момент обозначим ρ_1 . Раньше этого периода в равновесии находятся все типы частиц; при более высокой температуре добавляются еще сильно взаимодействующие мезоны, барион-антибарионные пары. Равновесие между сильно взаимодействующими частицами, электромагнитными квантами и заряженными лептонами устанавливается практически мгновенно. Следовательно, выше T_1 есть полное равновесие, ниже T_1 нейтрино (как ν_e , так и ν_μ) расширяются, не взаимодействуя с другими видами частиц, и как бы отключаются от квантов и электронов.

Замечательно, что после отключения энергия нейтрино мало отличается от равновесной. Докажем это.

Пусть вещество является смесью нейтрино и квантов, не взаимодействующих между собой. Уравнение состояния квантов

$$P_\gamma = \frac{\varepsilon}{3} = \rho_\gamma \frac{c^2}{3}.$$

Рассмотрим некий объем V , расширяющийся подобно общему расширению Вселенной, $V \sim a^3$. Уравнение энергии квантов в этом объеме

$$dE_\gamma = d(\varepsilon_\gamma V) = -P_\gamma dV = -\frac{\varepsilon_\gamma}{3} dV. \quad (18.2.6)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\varepsilon_\gamma \sim V^{-4/3} \sim a^{-4}$$

— результат, известный из термодинамики лучистой энергии.

Для нейтрино может возникнуть сомнение: применимы ли понятие энергии внутри некоего объема и понятие давления, если нейтрино свободно, без столкновений проходят через объем и пересекают поверхность, его ограничивающую? Будем следить за отдельным нейтрино. Как и у всякой частицы, импульс его, измеренный в сопутствующей системе в той точке, в которой он в данный момент находится, уменьшается обратно пропорционально a (см. § 2 гл. 19),

$$P_\nu = \frac{E_\nu}{c} = \frac{\text{const}}{a}. \quad (18.2.7)$$

Общее число нейтрино в элементе сопутствующего объема сохраняется, поскольку они ни с чем не взаимодействуют и, следовательно, их концентрация убывает:

$$n_\nu = \frac{\text{const}}{a^3}. \quad (18.2.8)$$

Отсюда плотность энергии нейтрино *)

$$\epsilon_\nu = n_\nu E_\nu = \frac{\text{const}}{a^4}. \quad (18.2.9)$$

Таким образом, закон убывания плотности энергии релятивистских частиц одинаков для взаимодействующих частиц с малым пробегом и для невзаимодействующих частиц.

Рассмотрение красного смещения отдельных частиц эквивалентно термодинамическому рассмотрению адиабатического расширения.

Теперь учтем тот факт, что уже после отключения от нейтрино кванты продолжают взаимодействовать с электронами и позитронами.

Нетрудно найти удельную энтропию в момент $T = T_1$ отдельно для нейтрино и отдельно для совокупности γ и пар:

$$S_\gamma + S_{e^+e^-} = \frac{4}{3} \frac{\sigma T_1^3 + \frac{7}{4} \sigma T_1^3}{\rho_1}; \quad S_{(\nu_e \bar{\nu}_e)} = S_{(\nu_\mu \bar{\nu}_\mu)} = \frac{4}{3} \frac{7}{8} \frac{\sigma T_1^3}{\rho_1}.$$

В ходе расширения отдельно сохраняется часть энтропии, зависящая от нейтрино, и часть, зависящая от γ и e^+ , e^- . Однако между собой γ и e^\pm находятся в равновесии и обмениваются энергией и энтропией. Обозначим индексом «0» сегодняшнюю ситуацию.

*) Для краткости мы говорим об энергии нейтрино, имея в виду сумму энергии нейтрино и антинейтрино.

Получим, учитывая, что пар e^\pm при низкой температуре уже нет:

$$S_0(\gamma) = S_1(\gamma) + S_1(e^+e^-) = \frac{4}{3} \frac{\sigma T_{0\gamma}^3}{\rho_0} = \frac{4}{3} \frac{11}{4} \frac{aT_1^3}{\rho_1},$$

$$S_0(\nu_e \bar{\nu}_e) = S_0(\nu_\mu \bar{\nu}_\mu) = \frac{4}{3} \frac{7}{8} \frac{\sigma T_{0\nu}^3}{\rho_0} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8} \frac{\sigma T_1^3}{\rho_1}.$$

Здесь $T_{0\gamma}$ и есть сегодняшняя температура 3°K , ρ_0 — предположительно 10^{-29} г/см^3 . Независимо от численного значения ρ_0 , из приведенных выше равенств следует

$$T_{0\nu} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{0\gamma} = 0,7 \cdot 3^\circ = 2^\circ,$$

$$\varepsilon_0(\nu_e \bar{\nu}_e) = \varepsilon_0(\nu_\mu \bar{\nu}_\mu) = \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \varepsilon_0(\gamma) = 0,35 \varepsilon_0(\gamma).$$

Качественный факт близости плотности энергии нейтрино и квантов в горячей модели отмечен Зельдовичем (1963b, d). Пиблс (1966) дал точное выражение для соотношения между температурами нейтрино и электромагнитного излучения

$$T_{0\nu} \approx \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{0\gamma}.$$

Экспериментальное обнаружение планковского спектра нейтрино представляло бы огромный интерес. Если подтвердилось бы соотношение $T_{0\nu} : T_{0\gamma}$, то было бы получено доказательство правильности наших представлений о самых ранних стадиях расширения ($T \approx 10^{10}$ градусов, $\rho_r \approx 10^5 \text{ г/см}^3$). В принципе, по замечанию А. Д. Сахарова, эксперимент мог бы быть основан на том, что планковский спектр нейтрино меняет вид спектра электронов β -распада вблизи максимальной энергии. Однако, как отметил Б. М. Понтекорво, аналогичное изменение вызывает наличие у нейтрино малой массы покоя. Опыт дает $m_\nu < 100 \text{ эв}$; космический фон содержит нейтрино с энергией порядка $5 \cdot 10^{-4} \text{ эв}$. Для их обнаружения нужно повысить точность опыта в 10^6 раз! *). Как будет показано в гл. 21, в случае анизотропии деформации на ранней стадии сегодняшняя энергия нейтрино может быть гораздо выше.

*) Любопытная ситуация возникает для мюонных нейтрино. Методы физики элементарных частиц позволяют определить их массу покоя лишь с очень малой точностью, $m < 2 \text{ Мэв}/c^2$. Однако из космологических соображений, из того факта, что в настоящее время должна сохраниться плотность мюонных нейтрино порядка 200 штук/см^3 и из максимально допустимой плотности всех видов вещества, в Метагалактике можно получить значительно лучшую оценку $m < 500 \text{ эв}/c^2$ (С. С. Герштейн и Я. Б. Зельдович (1966)).

Выше мы видели, что сравнительно ранний отрыв нейтрино от других частиц (прекращение взаимодействия) при изотропном космологическом расширении уменьшает энергию нейтрино по отношению к квантам света, поскольку на ранних стадиях

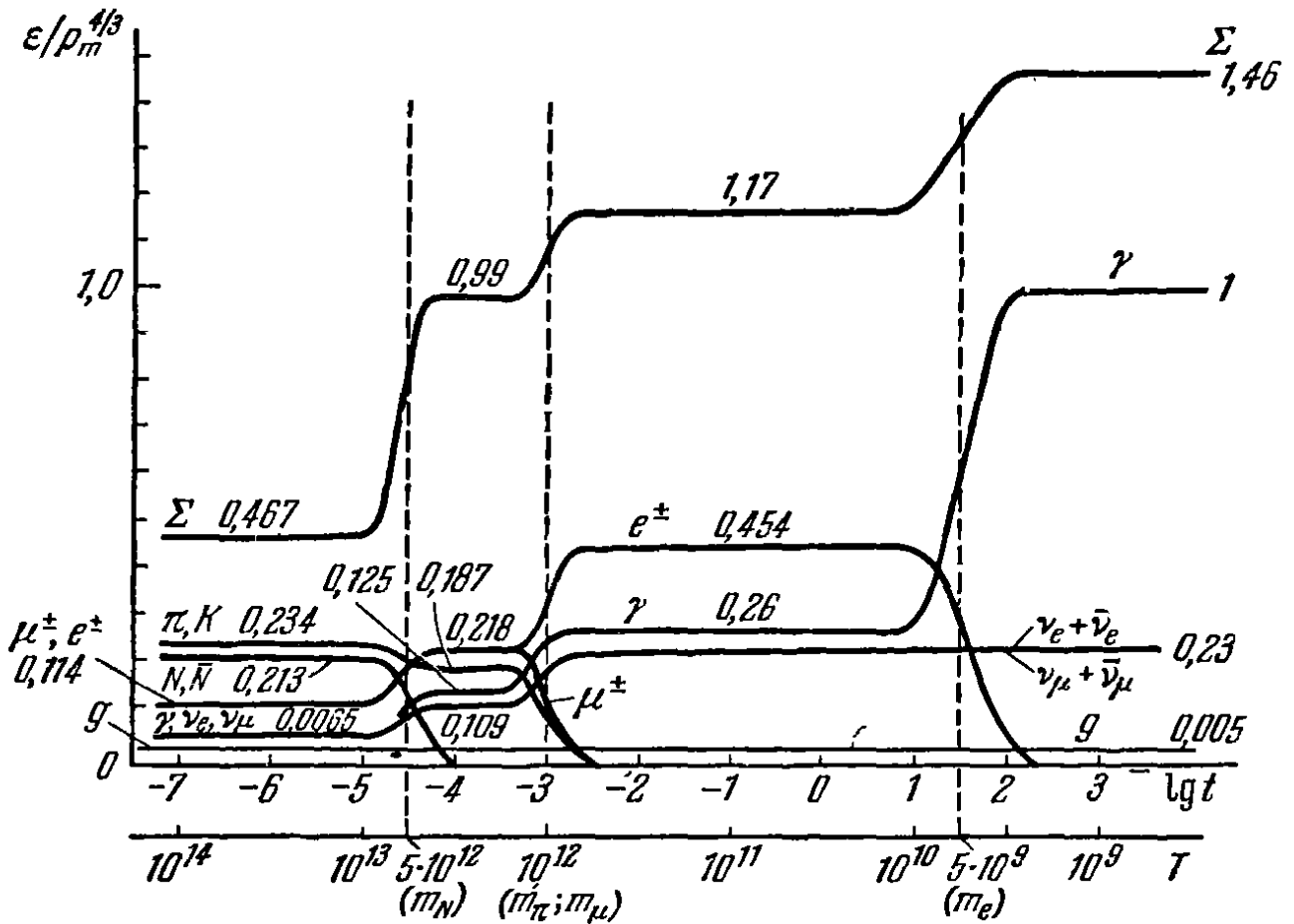


Рис. 94. Изменение $\epsilon/\rho_m^{4/3}$ для разных сортов частиц в расширяющейся горячей модели; ϵ — плотность энергии, $\rho_m = m_{\text{нукл}}n$, где $m_{\text{нукл}}$ — масса покоя нуклона, n — концентрация избытка нуклонов. N и \bar{N} условно включают четыре вида барионов и четыре вида антибарионов; за единицу принято $\epsilon_\gamma/\rho_m^{4/3}$ в настоящее время. Σ — сумма для всех частиц.

энергия была распределена между большим числом сортов частиц.

Это рассуждение придает большую стабильность всей теоретической картине: если существуют какие-то неизвестные нам типы частиц, взаимодействующие с известными частицами еще слабее, чем нейтрино, то они отрываются еще раньше, а следовательно, вносят вклад в общую плотность энергии существенно меньше, чем нейтрино. В частности, по этой причине малую роль играют гравитоны.

Неизвестные, сильно взаимодействующие частицы, очевидно, можно себе представить лишь в области больших масс — иначе они уже были бы открыты! Частным случаем таких неизвестных гипотетических частиц являются кварки.

Такие тяжелые сильно взаимодействующие частицы меняют соотношение между T и ϵ при $T > mc^2$, но к моменту, когда достигается $T = T_1$, они вымирают и никакого влияния на все дальнейшее не оказывают.

Частицы, способные к самопроизвольному распаду, после снижения температуры (т. е. когда прекращается их образование) исчезают по экспоненциальному закону в функции времени, и наблюдение реликтовых частиц такого рода невозможно.

Иначе обстоит дело в случае частиц, стабильных в вакууме и исчезающих только при взаимодействии с другими частицами. К таким относятся антипротоны \bar{p} , позитроны e^+ и, если кварки существуют, какой-то один сорт кварков (см. в конце главы оценку их концентрации).

В предположении однородности начального распределения вещества везде имеется избыток нуклонов и электронов; в этих условиях остаточная концентрация \bar{p} и e^+ оказывается ничтожной, значительно меньше той, которая генерируется в настоящее время в космических лучах. Метод вычислений см. ниже в § 5; там же см. о гипотезе полностью зарядово-симметричного мира. Общая картина изменения относительного содержания частиц в расширяющейся модели показана на рис. 94.

§ 3. Рождение гравитонов на ранних стадиях расширения горячей модели

В настоящее время нет последовательной квантовой теории гравитации. Квантовые теории электромагнитного поля, электронов и других полей и частиц строятся до тех пор, пока не рассматривается тяготение, нет влияния частиц и полей на само пространство и время; в частности, координаты x , t могут рассматриваться как числа, а не как операторы.

В теории тяготения метрика пространства зависит от наличия полей и частиц. Теорию слабых гравитационных полей можно рассматривать как теорию тензорного поля малых добавок h_{ik} к метрическим коэффициентам g_{ik}^0 пространства Минковского (см. § 11 гл. 1).

К этим добавкам, рассматривая их в плоском пространстве, можно применять обычные методы теории поля; при этом получается, в частности, теория гравитационных волн, а квантование поля в этой теории приводит к понятию кванта гравитационных волн — гравитона. Как и в случае кулоновского поля, квантование никак не влияет на статическое гравитационное взаимодействие.

Встречающаяся иногда формулировка «тяготение осуществляется обменом гравитонами» ничего не означает и способна ввести неспециалиста в заблуждение: введение гравитонов не вызывает никаких изменений в картине гравитационного взаимодействия макроскопических тел (см. § 3 гл. 2).

Описание гравитационного излучения двойных звезд и других макроскопических тел с помощью понятия гравитонов также не нужно; оно не нужно так же как квантовое описание работы радиостанции: когда гравитонов много, они имеют одинаковую частоту и когерентны по фазе — мы вправе говорить о классическом поле.

С отдельными гравитонами мы имеем дело на уровне атомов и частиц *). Вероятность испускания гравитонов весьма мала не только по сравнению с испусканием электромагнитного кванта, но и по сравнению с испусканием пары $\nu\bar{\nu}$. Это было отмечено в примечании к первой статье об испускании пар $\nu\bar{\nu}$ (Гандельман и Пинаев (1959)). Поэтому для звезд испускание высокочастотных «тепловых» гравитонов пренебрежимо мало.

Как обстоит дело с излучением гравитонов на самой ранней стадии горячей Вселенной? Расчет, подобный тому, который был проведен выше для нейтрино, показывает, что установление равновесия требует плотности, лежащей на границе применимости неквантовой теории тяготения в механике модели расширяющейся Вселенной. Как показано в § 2 гл. 2, эта граница определяется плотностью ρ_g , составленной из мировых констант G , c , \hbar : $\rho_g = 10^{93} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ соответствующие величины для длины, массы и времени

$$l_g = \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} \approx 1,7 \cdot 10^{-33} \text{ см}; \quad m_g = 2 \cdot 10^{-5} \text{ г};$$

$$t_g = \frac{l_g}{c} \approx 0,6 \cdot 10^{-43} \text{ сек.}$$

В классической теории расширения эта плотность достигается в момент, когда $t = t_g$. В самом деле, общая формула зависимости ρ от t такова:

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}, \quad \text{откуда} \quad t_1 \approx 6,5 \left(\frac{\rho_g}{G} \right)^{1/2} = 6,5 t_g.$$

Существующая теория неприменима к более раннему периоду. Если возможен переход от сжатия к расширению, то можно предполагать, что максимальная достигаемая плотность будет порядка ρ_g .

*) Отметим не относящиеся прямо к теме весьма интересные работы о возможности когерентного испускания и детектирования гравитационных волн: Пустовойт и Герценштейн (1962), Копвилем и Нагибаров (1965).

Удобство пользования «гравитационными» единицами измерения длины, массы и всех других величин заключается в том, что во всех расчетах и формулах следует положить $G = h = c = 1$.

Итак, рассмотрим рождение гравитонов, пользуясь этими единицами и начиная интегрирование от $\rho = 1$, $t = 6,5$. Напомним, что в этих единицах масса покоя протона пренебрежимо мала: $m_p = 10^{-19}$.

Выражение плотности электромагнитного излучения

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4 = 0,65 \cdot T^4$$

(плотность массы и плотность энергии совпадают, поскольку $c = 1$). Очевидно, что T здесь в энергетических единицах; одна энергетическая единица соответствует $kT_g = m_g c^2$, $T_g = 1,3 \cdot 10^{32}$ градусов. Равновесная плотность гравитонов равна ρ_γ . За счет наличия частиц разных сортов, которые все при этих условиях являются ультрарелятивистскими *),

$$\rho = \kappa \cdot 0,65 T^4 = \frac{3}{G 32 \pi t^2} = a t^{-2}; \quad \rho_i = \frac{\rho}{\kappa}; \quad n_i = \frac{\rho}{\kappa 4 T},$$

где κ может быть **) порядка 20 или 50. Индекс относится к отдельным сортам частиц.

Ю. С. Владимиров (1963) рассматривал рождение гравитонов при аннигиляции ***)). Очевидно, что при высокой температуре именно этот процесс должен доминировать над тормозным излучением гравитонов, подобно тому как для нейтрино доминирует $e^- + e^+ = \nu_e + \bar{\nu}_e$. Однако гравитон не заряжен и поэтому возможно рождение не только пар, но и одиночных гравитонов

$$A + \bar{A} = 2g \quad \text{и} \quad A + \bar{A} = g + B,$$

где B должно быть также нейтрально.

Второй процесс содержит малую величину G в менее высокой степени. Принимая, что B есть электромагнитный квант,

*) Некоторые авторы (в частности, М. А. Марков (1966)) предполагают, что существуют элементарные частицы с массой порядка m_g — максимоны, и ставят вопрос, не являются ли кварки такими частицами.

**) Хагедорн (1965) рассматривает возбужденные состояния нуклонов и мезонов как статистически независимые частицы, и при этом приходит к выводу, что с ростом T , κ неограниченно растет. Отсюда следует, что асимптотически рост T замедляется. Автор полагает, что максимальная температура T порядка 150 Мэв. Эти соображения развиты им в связи с теорией столкновения космических лучей максимальной энергии (см. гл. 8). Из других соображений, рассматривая гравитационное взаимодействие частиц между собой, к существованию максимума температуры, однако гораздо большего порядка T_g , приходит А. Д. Сахаров (1966).

***) Там же см. ссылки на предыдущие работы по теории рождения гравитонов.

для ультрарелятивистских заряженных A и \bar{A} Владимиров находит

$$\sigma^* = \frac{e^2}{\hbar c} l_g^2.$$

Однако если заменить квант сильно взаимодействующей частицей и взять A и \bar{A} также сильно взаимодействующими, то можно ожидать

$$\sigma^* = l_g^2,$$

т. е. $\sigma^* \sim 1$ для ультрарелятивистских сильно взаимодействующих частиц в гравитационных единицах площади. Если же средняя энергия частиц приближается к 1 (т. е. к m_g), то и сечение испускания двух гравитонов должно стать того же порядка.

Следовательно, время релаксации образования гравитонов дается выражением

$$\tau \simeq \frac{1}{\sum \sigma^* n_i} = \frac{4t^{3/2}}{\kappa} \left(\frac{\kappa \cdot 0,65 \cdot 32\pi}{3} \right)^{3/4} = t \frac{4,5}{\kappa^{1/4}} t^{1/2}, \quad \tau_1 \approx 5t_1.$$

Время установления равновесия больше самого времени t_1 , таким образом, установление равновесия в данном случае не гарантировано, поскольку время $t < t_1$ мы не должны рассматривать.

В принципе, не исключено при этом, что плотность энергии гравитонов на ранней стадии может быть и больше равновесной, неустановление равновесия в этом случае означает, что плотность останется больше равновесной навсегда. Такая ситуация возможна, в частности, при коллективных механизмах рождения гравитонов за счет макроскопических движений вещества.

Если все же принять, что гравитоны находятся в равновесии на определенной ранней стадии и лишь позже «отрываются» от частиц, то их современная плотность связана с плотностью электромагнитного излучения через величину κ_1 в момент отрыва. Можно показать (с учетом последующего распределения энергии между нейтрино e^+e^- и γ ; см. выше), что сегодня

$$\epsilon_g = \left[\frac{18}{11(\kappa - 1)} \right]^{3/4} \epsilon_\gamma < (0,1 \div 0,02) \epsilon_\gamma.$$

§ 4. Ядерные реакции в горячей модели

Первоначально Гамов предполагал, что нуклоны при очень большой плотности находились в состоянии нейтронов, а затем происходил радиоактивный распад нейтронов. В неопубликованной работе Ферми и Туркевича рассматривались ядерные

реакции соединения нейтронов с протонами и следующие за ними. Позже Хаяши (1950) заметил, что при высокой температуре (выше 2 Мэв, т. е. $T_9 > 20$) электроны, позитроны, нейтрино и антинейтрино горячей плазмы вызывают весьма быстрое превращение нейтронов в протоны и обратно по реакциям*)



Поэтому при высокой температуре, независимо от выбора начального состояния, устанавливается термодинамическое равновесие

$$\frac{n}{p} = e^{-\frac{\Delta mc^2}{T}}, \quad (18.4.2)$$

где Δm есть разность масс нейтрона и протона:

$$\Delta mc^2 = 1,28 \text{ Мэв.}$$

Так, например, в момент $t = 0,01$ сек, когда температура равна 9,5 Мэв, время установления равновесия порядка $2 \cdot 10^{-3}$ сек, равновесное соотношение $n : p = 0,47 : 0,53$. Ниже обозначаем n и p концентрации нейтронов и протонов, отнесенные к их сумме: $n + p = 1$. При понижении температуры равновесная концентрация n падает, но уменьшается и скорость процессов (18.4.1), вызванных частицами плазмы. Снова процесс распадается на две стадии: в первой стадии $n = n_e$ (n_e означает равновесную концентрацию); к концу первой стадии происходит «закалка», т. е. реакции уже слишком медленны для поддержания равновесия, а во второй стадии оставшиеся нейтроны медленно распадаются без участия плазмы с полупериодом 11,6 минут, известным из лабораторных опытов.

Приведем количественный расчет.

Расчеты Хаяши были чрезвычайно сложны, а предпосылки их не вполне соответствуют современным сведениям о нейтрино и бета-процессах. Эти расчеты были повторены В. М. Якубовым и изложены в работе Зельдовича (1965). Концентрации n и p удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -a(t)n + b(t)p, \\ \frac{dp}{dt} &= -b(t)p + a(t)n. \end{aligned} \right\} \quad (18.4.3)$$

Коэффициенты a и b зависят от температуры, но температура как функция времени известна. Количество нуклонов

*) Везде далее рассматриваются только электронные нейтрино, индекс e опускаем.

ничтожно по сравнению с количеством легких частиц в плазме, поэтому реакции n и p не оказывают никакого обратного влияния на концентрации e^- , e^+ , ν , $\bar{\nu}$ и, следовательно, не влияют на функции a и b ; уравнения линейны.

При высокой температуре, т. е. малом t ,

$$a = b = \text{const } T^5 = \text{const } t^{-5/2} = 4 \cdot 10^{-6} T_9^5; \quad (18.4.4)$$

здесь $T_9 = T^\circ \text{ K}/10^9$.

При низкой температуре

$$\left. \begin{aligned} b(t) &= e^{-\frac{\Delta mc^2}{T}} a = e^{-1,35\sqrt{t}} a(t), \\ a(t) &\rightarrow W = 10^{-3} \text{сек}^{-1} \quad \text{при } t \gg 1, \end{aligned} \right\} \quad (18.4.5)$$

где W — вероятность распада свободного нейтрона. Пользуясь тождеством $n+p=1$, приходим к одному уравнению,

$$\frac{dn}{dt} = b - (a+b)n, \quad (18.4.6)$$

решение которого легко написать:

$$n(t) = \int_0^t b(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (a+b) d\tau'} d\tau. \quad (18.4.7)$$

Введем теперь следующее обозначение:

$$a+b = f+W,$$

причем при больших t функция $f \rightarrow 0$, так как $a \rightarrow W$, $b \rightarrow 0$. Асимптотическое выражение $n(t)$ при $t \gg 1$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} n(t) &= n_0 e^{-Wt}, \\ n_0 &= \int_0^t b(\tau) \exp \left[W\tau - \int_{\tau}^{\infty} f d\tau' \right] d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (18.4.8)$$

где характерная величина n_0 дается интегралом во втором равенстве *). Кривые $n(t)$ и $n_e(t)$ показаны на рис. 95. Величина n_0 имеет смысл концентрации нейтронов $\frac{n}{n+p}$ после того, как произошла «закалка».

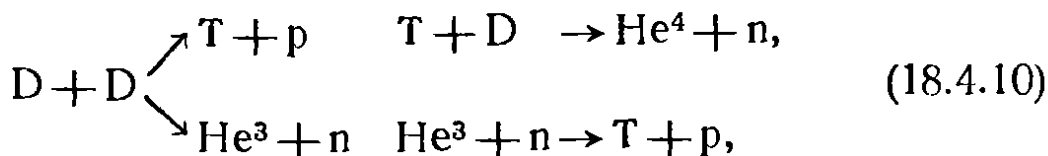
*) Подынтегральное выражение резко падает при $t > 1$ и снова возрастает лишь при $t > 10\,000$. Поэтому определение n_0 не зависит от конкретного выбора t , если $100 < t < 10\,000$. При $t \rightarrow 0$ $b(t) \rightarrow \infty$, так же как и $f(t)$; экспонента обращается в нуль быстрее, чем $b(t)$; в целом подынтегральное выражение $\rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Вычисленное таким образом значение n_0 по современным данным оказалось равным 0,165, т. е. численно мало отличается от результата Хаяши (1950).

На следующей стадии процесса происходит соединение нейтрона и протона в дейтон,



за которым следует цепочка термоядерных реакций:



в результате чего образуется He^4 .

Эта стадия также заново рассчитана многими авторами (ссылки см. в § 1 гл. 14). Ядро дейтерия представляет собой «энтропийный барьер» на пути образования He^4 . При температуре выше 100 кэВ равновесное содержание дейтерия ничтожно; это значит, что с образованием дейтерия успешно конкурирует фотораспад $\gamma + D \rightarrow p + n$. Процесс образования He^4 требует ряда двойных столкновений*), поэтому он представлен тем сильнее, чем выше плотность барионов при данной температуре, т. е. чем меньше удельная энтропия. При малой энтропии все нейтроны превращаются в He^4 и, следовательно, получится ~33% He^4 , ~67% водорода.

Мерой энтропии является отношение T^3/ρ , где ρ — плотность обычного вещества.

Приводим результаты расчетов Вагонера, Фаулера, Хойла (1967). В следующей ниже таблице введено обозначение $\theta = T/3^\circ$. При вычислении концентрации He^3 и Li^7 учтено, что образовавшиеся в ходе реакций T и Be^7 путем β -распада переходят соответственно в He^3 и Li^7 .

Общая картина изменения вследствие ядерных реакций содержания p , n , D , He^4 в горячей модели при $T^3/\rho \approx 3 \cdot 10^{30}$ дана на рис. 96 по расчетам Дорошкевича и Сюняева.

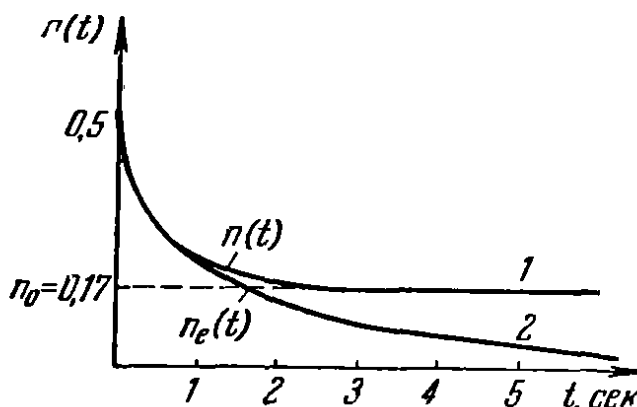


Рис. 95. Зависимость концентрации нейтронов в горячей модели. Кривая 1 — реальная концентрация, кривая 2 — равновесная концентрация.

*) Любопытно, что прямое соединение $D + D = He^4 + \gamma$ имеет совершенно ничтожное сечение в силу ряда запретов.

Таблица XXI

Химический состав дозвездного вещества в зависимости от энтропии

ρ/θ^3	H	D	He ³	He ⁴	Li ⁷
10^{-33}	0,980	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$9,7 \cdot 10^{-12}$
10^{-32}	0,892	$9,1 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$9,8 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-9}$
10^{-31}	0,763	$6,2 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$	0,236	$5,2 \cdot 10^{-10}$
$3,1 \cdot 10^{-31}$	0,748	$8,9 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$	0,252	$2,1 \cdot 10^{-10}$
10^{-30}	0,737	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	0,263	$4,4 \cdot 10^{-9}$
$3,1 \cdot 10^{-30}$	0,728	$2,7 \cdot 10^{-7}$	$9,9 \cdot 10^{-6}$	0,272	$2,1 \cdot 10^{-8}$
10^{-29}	0,719	$2,5 \cdot 10^{-12}$	$5,6 \cdot 10^{-6}$	0,281	$4,3 \cdot 10^{-8}$
$3,1 \cdot 10^{-29}$	0,709	$< 10^{-12}$	$4,4 \cdot 10^{-6}$	0,291	$1,1 \cdot 10^{-7}$
10^{-28}	0,701	$< 10^{-12}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	0,299	$2,9 \cdot 10^{-7}$
$3,1 \cdot 10^{-28}$	0,691	$< 10^{-12}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	0,309	$6,8 \cdot 10^{-7}$

Вопрос о фактическом количестве гелия в различных объектах обсуждается с точки зрения горячей модели в заметке Хойла и Тайлер (1964). Они считают, что имеется хорошее согласие с горячей моделью — содержание He⁴ ~ 30%. Раньше

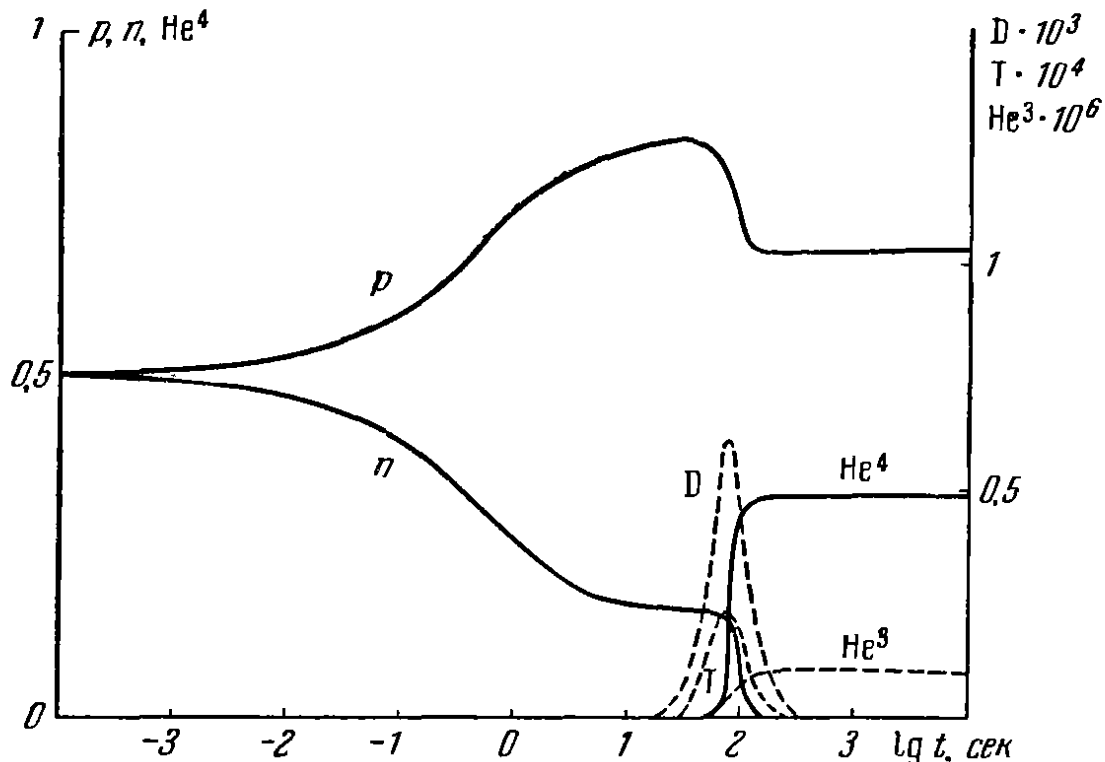


Рис. 96. Изменение вследствие ядерных реакций содержания протонов, нейтронов, дейтерия гелия — 4, гелия — 3 и трития в расширяющейся горячей модели. Правая шкала только для D, T, He³.

предполагали, что гелия значительно меньше. См. также недавнюю работу Сарджента и Сирла (1966), где указывается, что гелия в звездах первого поколения очень мало. Возможные

объяснения этого в рамках горячей модели см. в работах, указанных в сноске на стр. 487.

Определение содержания гелия в старых звездах особенно затруднительно именно потому, что старые звезды имеют низкую температуру поверхности. Вопрос о методах обнаружения гелия в межгалактическом газе рассматривался Р. А. Сюняевым (1966). Эти методы оказываются весьма сложными.

§ 5. Антинуклоны в горячей плазме

В связи с гипотезой горячей плазмы представляется методически интересным рассмотрение варианта полностью зарядово-симметричного мира, т. е. мира, в котором есть равное число нуклонов и антинуклонов (а также электронов и позитронов и т. д.).

При достаточно высокой температуре (но все же ниже $m_N c^2$) их концентрация определяется термодинамическим равновесием *)

$$n' = n'' = \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \frac{m^{3/2} (kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{mc^2}{kT}}; \quad kT < mc^2. \quad (18.5.1)$$

Термодинамическое равновесие осуществляется за счет баланса между аннигиляцией при соударении нуклонов и антинуклонов и рождением пар.

В ходе расширения равновесная концентрация уменьшается и при современной температуре $\approx 3^\circ \text{K}$ она «астрономически» мала, $10^{-10^{10}}$. Однако в действительности скорость аннигиляции становится пренебрежимой раньше, происходит «закалка» и остается определенное неравновесное количество нуклонов и антинуклонов. Рассмотрим этот процесс. Сечение аннигиляции в интересующей нас области энергии идет как $\sigma_0 \frac{c}{v}$, где v — скорость соударения, а σ_0 — порядка 10^{-26} см^2 , откуда получим уравнение изменения числа частиц в данном объеме:

$$\frac{d(nV)}{dt} = -\sigma_0 c n^2 V + \psi(\tau) V; \quad (18.5.2)$$

$\psi(\tau)$ есть функция, дающая скорость рождения пар в единице объема. Ее легко найти из очевидного условия, что при равновесной концентрации число аннигиляций и рождений одинаково, откуда

$$\psi(\tau) = \sigma_0 c n_{eq}^2, \quad (18.5.3)$$

где n_{eq} дано в (18.5.1).

*) Учтен спин 1/2 нуклона; n' есть сумма концентраций протонов и нейтронов, n'' — антипротонов и антинейтронов.

Под V надо понимать элемент объема, расширяющийся вместе с расширением всей Вселенной; в горячей плазме — при $\rho = \epsilon/3$, $a \sim \sqrt{t}$ и $V \approx V_1 t^{3/2}$. Следовательно (V_1 сокращается),

$$\frac{d(nt^{3/2})}{dt} = -\sigma_0 c(n^2 - n_{eq}^2) t^{3/2}, \quad (18.5.4)$$

где n_{eq} задана как функция времени (известна его зависимость от температуры, которая в свою очередь зависит известным образом от времени). Весь интервал изменения времени распадается на две части: $t < t_1$, где $n - n_{eq} \ll n_{eq}$, и $t > t_1$, где $n \gg n_{eq}$.

Границу областей найдем, подставляя $n = n_{eq}$ в левую часть

$$\begin{aligned} \frac{d(n_{eq} t^{3/2})}{dt} &= \sigma_0 c(n^2 - n_{eq}^2) t^{3/2}; \\ n - n_{eq} &= \frac{t^{-3/2}}{\sigma_0 c(n + n_{eq})} \frac{d(n_{eq} t^{3/2})}{dt}; \\ \frac{n - n_{eq}}{n_{eq}} &= \frac{1}{2\sigma_0 c n_{eq}} \left(\frac{3}{2t} - \frac{d \ln n_{eq}}{dt} \right) < 1. \end{aligned} \quad (18.5.5)$$

Равновесная плотность n_{eq} зависит от температуры главным образом за счет экспоненциального множителя, $n \sim e^{-\frac{mc^2}{kT}}$; $\ln n = \text{const} - mc^2/kT$; учитывая, что $T \sim 1/\sqrt{t}$ (см. выше (18.2.3)), получим $\frac{d \ln n_{eq}}{dt} = -\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} \frac{mc^2}{kT}$.

Таким образом, условие для границы области, где имеет место равновесие, дается соотношением

$$2\sigma_0 c n_{eq} t = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{mc^2}{kT}. \quad (18.5.6)$$

Поскольку n_{eq} зависит от температуры, и время t также может быть выражено через температуру, (18.5.6) представляет собой трансцендентное уравнение относительно температуры. Решение этого уравнения при известном σ_0 и известной связи t и T легко найти методом последовательных приближений.

Численно получим

$$\frac{mc^2}{kT} = 44, \quad T = 21 \text{ Мэв}, \quad t = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}, \quad n_{eq} = 10^{19} \text{ см}^{-3}.$$

В этот момент общая плотность составляет $7 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$. При $T = 21 \text{ Мэв}$ в равновесии находятся электроны, позитроны, кванты, нейтрино и антинейтрино электронные и мюонные*).

*) Кроме того, имеются свободные гравитоны (см. § 3 гл. 18), не взаимодействующие с другими частицами, их концентрация примерно на порядок меньше, чем легких частиц других сортов.

Количество более тяжелых частиц мало; примером является малая плотность нуклонов и антинуклонов, только что найденная.

Средняя энергия легких частиц — порядка $3 \div 4 kT$, т. е. порядка 80 Мэв , чему соответствует масса $\sim 1,5 \cdot 10^{-25} \text{ г}$. Значит, при плотности $7 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$ число легких частиц в см^3 порядка $5 \cdot 10^{35}$.

Итак, в предположении зарядово-симметричной однородной и изотропной горячей модели, к моменту, когда нарушается термодинамическое равновесие, нуклоны и антинуклоны составляют долю $2 \cdot 10^{-17}$ от легких частиц. До этого момента N и \bar{N} следовали равновесию; при $kT/mc^2 \gg 1$ их плотность была того же порядка, что и плотность легких частиц; в интервале $1 > kT/mc^2 > 1/44$ плотность N и \bar{N} падала экспоненциально и к моменту $kT/mc^2 = 1/44$ упала до $2 \cdot 10^{-17}$ плотности легких частиц.

После указанного момента, т. е. при $kT/mc^2 < 1/44$, $t > 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$ равновесное значение концентрации n_{eq} продолжает убывать экспоненциально, но равновесия в действительности нет и фактическая концентрация n падает медленнее. Поэтому $n \gg n_{eq}$ и в уравнении для $\frac{dn}{dt}$ можно пренебречь рождением новых пар N и \bar{N} . Остается

$$\frac{d(nt^{3/2})}{dt} = -\sigma_0 cn^2 t^{3/2} \quad (18.5.7)$$

с начальными условиями $t=t_1$, $n=n_1$, которые следует взять из рассмотрения предыдущей стадии:

$$n_1 = 10^{19}, \quad t_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}, \quad 2\sigma_0 cn_1 t_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{mc^2}{kT} = 23.$$

Уравнение (18.5.3) легко решается:

$$n = n_1 \frac{t_1^{3/2}}{t^{3/2}} \left[1 + 2\sigma_0 ct_1 n_1 - 2\sigma_0 ct_1 n_1 \sqrt{\frac{t_1}{t}} \right]^{-1}. \quad (18.5.8)$$

Если бы при $t > t_1$ не происходила аннигиляция (т. е. правый член в уравнении (18.5.7) был бы равен нулю), то n падало бы вследствие расширения по закону $n = n_1 t_1^{3/2} t^{-3/2}$. Квадратная скобка в (18.5.8) как раз и описывает дополнительное падение n вследствие аннигиляции. В пределе, при $t \rightarrow \infty$, $\sqrt{t_1/t} \rightarrow 0$; из-за аннигиляции количество нуклонов и антинуклонов падает в конечное число раз — в отношении $1 : 1 + 2\sigma_0 ct_1 n_1 = 1 : 24$.

Само расширение, очевидно, не меняет отношения числа нуклонов или антинуклонов к числу легких частиц, равное $2 \cdot 10^{-17}$ в момент t_1 . Однако вследствие аннигиляции это отношение падает в 24 раза, т. е. до 10^{-18} . Это падение происходит главным образом за время в несколько раз большее, чем t_1 , т. е. практически заканчивается в момент $t \sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ сек}$.

В этот момент кванты и e^+e^- пары составляют $\sim 60\%$ всех легких частиц. Пары e^+e^- превращаются впоследствии в кванты. Значит, отношение числа N или \bar{N} к квантам в настоящее время в зарядово-симметричной Вселенной должно было бы составлять $\sim 1,5 \cdot 10^{-18}$. Температуре реликтового излучения 3°K соответствует плотность квантов около 600 см^{-3} , что дает $n_N = n_{\bar{N}} \cong 10^{-15}$ и плотность $\rho_N = \rho_{\bar{N}} \cong 10^{-38} \text{ г/см}^3$. Эти малые значения являются доводом против гипотезы о зарядовой симметрии Вселенной. Однако перед обсуждением этих выводов вернемся к расчету и поставим вопрос — чем физически обусловлено получение такого малого безразмерного числа $n_N/n_\gamma \sim \sim 10^{-18}$; из каких безразмерных параметров задачи можно наглядно, хотя бы по порядку величины, получить это число. Выяснение этого вопроса, даже после получения численного результата более точным способом, в высшей степени полезно. Только таким путем можно ясно понять смысл результата и область его применимости.

Нам надо определить концентрацию антинуклонов после «закалки». В ходе расширения и падения температуры равновесная концентрация антинуклонов начинает экспоненциально падать, когда $kT \approx mc^2$. Ясно, что в силу экспоненциальной зависимости концентрации от температуры при $kT \leq mc^2$ момент «закалки», t_1 , примерно определяется условием $kT_1 = mc^2/\alpha$, где число α хотя и больше единицы, но порядка единицы. (В действительности, как было показано выше, $\alpha = 44$; по ходу решения трансцендентного уравнения α есть логарифм большой величины.)

Ясно, что таким способом можно только грубо определить T_1 , а следовательно, и t_1 . Идея заключается в том, что в очень грубом расчете можно заменять α на единицу только там, где α является множителем. Никак нельзя, однако, считать $\alpha \sim 1$ в выражении для n_{eq} , где $n_{eq} \sim e^{-\alpha}$, так как экспонента очень чувствительна к α . После того как момент «закалки» грубо найден, можно для определения $n_1 \sim n_{eq}$ в этот момент использовать условие равенства времени установления равновесия и гидродинамического $\sigma_0 c n_1 t \approx 1$. Используем порядки величин $\sigma_0 \sim (h/mc)^2$. Как известно, величина h/mc — комптоновская длина волны нуклона, — характеризует по порядку величины также и радиус действия ядерных сил, поскольку массы нуклонов и мезонов одного порядка. Выразим гидродинамическое время t_1 , воспользовавшись равенством,

$$\rho_1 \sim \frac{1}{G t_1^2} \sim \frac{kT}{c^2} \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3 \sim m \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^3 \frac{1}{\alpha^4},$$

$$t_1 = \alpha^2 G^{-1/2} m^{-2} \hbar^{3/2} c^{-3/2}.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 c \cdot n_1 G^{-1/2} m^{-2} \hbar^{3/2} c^{-3/2} = 1,$$

$$n_1 = G^{1/2} m^4 c^{1/2} \hbar^{-7/2}.$$

Это выражение сравним с выражением для общего числа легких частиц (лептонов)

$$n_l = \left(\frac{kT}{c\hbar}\right)^3 \cong \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3.$$

Получим

$$\frac{n_1}{n_l} = \sqrt{\frac{Gm^2}{\hbar c}}.$$

Величина Gm^2 входит в выражение гравитационного взаимодействия протонов точно так же, как e^2 — квадрат заряда — в выражение их электростатического взаимодействия. Таким образом, $Gm^2/\hbar c$ — это гравитационный аналог знаменитой «постоянной тонкой структуры» $e^2/\hbar c = 1/137$. Численно $Gm^2/\hbar c = 10^{-38}$, что дает $n_1/n_l \sim 10^{-19}$ в замечательном (для такого грубого подхода) согласии с точным расчетом.

Итак, на вопрос о том, почему в горячей зарядово-симметричной модели остается мало нуклонов и антинуклонов, можно дать краткий ответ: это происходит потому, что малое их гравитационное взаимодействие.

Более подробно можно сказать, что число остающихся N и \bar{N} зависит от конкуренции между их аннигиляцией и общим расширением. Аннигиляция зависит от ядерного взаимодействия, которое порядка единицы, так как $\sigma_0 \sim (\hbar/mc)^2$. Расширение задается таким образом, чтобы кинетическая энергия расширения равнялась потенциальной энергии гравитационного взаимодействия (на ранней стадии расширения это всегда так; см. § 8 гл. 15); ср. это утверждение с ньютоновской космологией. Именно вследствие этого условия скорость расширения $\sim G^{-1/2}$ и та же величина, $G^{-1/2}$, входит в выражение n_1/n_l .

Расчет аннигиляции N и \bar{N} в ходе расширения, изложенный выше, впервые, по-видимому, сделан одним из авторов (Зельдович (1965)); в результате вкралась численная ошибка, исправленная выше. Расчет без ошибок приведен в связи с проблемой аннигиляции кварков (см. следующий параграф) в работе Зельдовича, Окуня, Пикельнера (1965). Наконец, аналогичные результаты для антинуклонов получены Чиу (1966).

Вернемся к космологическим выводам. В литературе неоднократно обсуждался вопрос о зарядово-симметричных моделях.

Очевидной трудностью, которой выше мы совершенно не касались, является аннигиляция нуклонов и антинуклонов при образовании звезд и других небесных тел из разреженного газа.

В связи с этим, усилия ряда авторов (Клейн (1962), Альвен (1964)) были направлены на изобретение (весьма остроумных!) механизмов, разделяющих протоны и антипротоны в газовом облаке при совместном действии гравитации и магнитного поля.

Из проделанных расчетов видно, что в однородной модели аннигиляция происходит на чрезвычайно ранней стадии, задолго до образования отдельных газовых облаков. Уже на этой стадии концентрация N и \bar{N} падает до величин, несовместимых с наблюдаемой в настоящее время плотностью обычного вещества; последующее разделение не поможет согласовать зарядово-симметричную модель с наблюдениями.

В принципе можно представить себе Вселенную, зарядово-симметричную в среднем, за счет ее неоднородности. В начальном сингулярном состоянии предполагается избыток нуклонов в одних областях и избыток антинуклонов в других областях. По существу, для отдельной области ситуация не отличается от той модели откровенно несимметричного мира, которая в основном и рассматривается в данной книге. Если «область» больше охватываемой горизонтом, отличие в настоящее время принципиально не наблюдается. Если области меньше, то могут быть наблюдаемы гамма-кванты, рождающиеся на границе областей, где аннигиляция происходит и в настоящее время.

Расчет аннигиляции для межгалактического газа критической плотности дает величину, превосходящую наблюдаемый фон гамма-квантов.

Эта трудность отпадает, если принять, что межгалактического газа нет, или что магнитные поля на границе между областями вещества и антивещества препятствуют смещению ионизованных газов.

Вряд ли нужно более конкретно обсуждать здесь все возможные варианты такого рода (см., например, Альвен (1965)). Стоит, быть может, лишь отметить, что неоднородная зарядово-симметричная в среднем модель не представляется эстетически предпочтительной по сравнению с однородной незарядово-симметричной. Следует подчеркнуть, что зарядовая симметрия свойств частиц не требует зарядовой симметрии чисел или плотности частиц в космологическом решении.

В 1964 г. было открыто несохранение T четности во взаимодействии элементарных частиц; из этого следует, что свойства частиц и античастиц не в точности тождественны: например, должны быть различны коэффициенты разветвления при распаде $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ и $\Lambda \rightarrow N + \pi^0$ и такой же коэффициент для антича-

стицы $\bar{\Lambda} \rightarrow \bar{p} + \pi^+$ и $\bar{\Lambda} \rightarrow \bar{N} + \pi^0$. При этом, однако, массы (а для нестабильных и времена жизни) частиц и античастиц должны быть строго одинаковы.

А. Д. Сахаров (1967) пытается использовать несимметрию частиц и античастиц, чтобы получить зарядовую несимметрию как результат расширения из симметричного сингулярного состояния.

Однако при этом он постулирует также нарушение фундаментального закона сохранения барионного заряда, к чему в настоящее время нет никаких теоретических или экспериментальных оснований.

В зарядово-несимметричном мире также можно поставить вопрос об остаточной концентрации антинуклонов. Благодаря расширению здесь также асимптотически получается конечное $n_{\bar{N}} t^{3/2}$ и конечное не равное нулю отношение $n_{\bar{N}}/\gamma$ при $t \rightarrow \infty$. Однако при наличии избытка нуклонов, очевидно, что при $n_{\bar{N}} \ll n_N$ имеем уравнение, линейное относительно $n_{\bar{N}}$,

$$\frac{d(n_{\bar{N}} t^{3/2})}{dt} = -\sigma_0 c n_{\bar{N}} n_N t^{3/2}.$$

Поэтому хотя интеграл $\int \sigma_0 c n_N dt$ и сходится, но он велик и входит в выражение $n_{\bar{N}}$ в экспоненте!

$$n_{\bar{N}} \sim e^{-\int \sigma_0 c n_N dt}.$$

Задаваясь критической плотностью нуклонов, в настоящее время $\rho_N \sim 10^{-29}$ при $T=3^\circ$ получим $n_{\bar{N}}/n_N \sim 10^{-100}$. Такое ничтожное количество абсолютно не интересно. Космические лучи, взаимодействуя с веществом, дают хотя и малое по абсолютной величине, но все же гораздо большее, чем реликтовое, отношение $n_{\bar{N}}/n_N \sim 10^{-20}$.

§ 6. Кварки в горячей модели

Исследование сильно взаимодействующих элементарных частиц, к которым относятся не только протон, нейтрон, пи-мезоны, но и многие новые частицы, за последнее 10-летие прошло через ряд стадий. Из очень формальных теорий в 1964 г. возникла замечательная по своей простоте и наглядности концепция. Все огромное семейство частиц оказалось возможным представить как своеобразные молекулы или ядра, состоящие из трех сортов частиц: q_1, q_2, q_3 и соответствующих им трех сортов античастиц: $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$. При этом мезоны состоят из одного q и одного \bar{q} , барионы — из $3q$, антибарионы из $3\bar{q}$.

Приходится предполагать, что барионный заряд q равен $1/3$. Но, кроме того, как оказывается, нужно считать, что дробным является и электрический заряд q -частиц (читатель уже давно догадывается, что речь идет о кварках; см. § 10 гл. 6): q_1 — заряд $+2/3$, q_2 и q_3 заряд $-1/3$. Отсюда следует, что возможно превращение одних кварков в другие путем β -распада; можно предположить, что стабилен q_1 (если его масса меньше массы q_2 и q_3). Соответственно стабилен в таком случае и \bar{q}_1 . Подчеркнем, что до сих пор ни в составе первичных космических лучей, или продуктов их взаимодействия с ядрами, ни на ускорителях свободные кварки не наблюдались. Существование их в настоящее время является гипотезой, весьма привлекательной, но не доказанной. Горячая модель Вселенной приводит к выводу о возможности заметной концентрации реликтовых кварков, покоящихся или прилипших к ядрам. В ряде стран ведутся эксперименты, направленные на обнаружение таких кварков в обычных веществах путем опытов такого же типа, как классические опыты Милликена по измерению заряда электрона.

В связи с этим анализ вопроса о равновесии и закалке кварков в горячей модели (в предположении, что верна гипотеза об их существовании) представляет астрофизический интерес. Если кварки будут обнаружены, то изучение их концентрации и распределения в мироздании даст совершенно новые, необычно ценные данные об эволюции Вселенной.

Итак, обозначая M массу кварка, мы должны ожидать, что при $kT > Mc^2$ равновесная концентрация кварков и антикварков не отличается от концентрации всех других сортов частиц. По мере понижения температуры в ходе расширения концентрация убывает как $e^{-\frac{Mc^2}{kT}}$.

Вся теория закалки кварков строится вполне аналогично теории закалки нуклонов и антинуклонов в симметричной модели (см. предыдущий параграф).

Предполагается, что масса кварка в несколько раз больше массы нуклона. Поэтому равновесная концентрация вскоре становится ничтожно малой, меньше одного кварка на всю наблюдаемую Метагалактику при температуре порядка нескольких киловольт. Однако задолго до этого наступает момент, когда скорость реакции, ведущей к установлению равновесия, становится слишком малой и происходит «закалка» остающихся q и \bar{q} , после чего их абсолютная концентрация (число в 1 см^3) продолжает уменьшаться лишь за счет общего расширения, а отношение их концентрации к концентрации нуклонов n , т. е. q/n , \bar{q}/n , стремится к постоянной величине.

Кварки сильно взаимодействуют между собой. Малая скорость реакции связана с тем, что для реакции с участием кварка нужно всегда не меньше двух q или пары q и \bar{q} . На первый взгляд кажется, что поскольку барион B состоит из $3q$, надо тройное столкновение. В действительности энергетически вполне возможен процесс

$$q + q = B + \bar{q} \quad (18.6.1)$$

(так как $M > m_B$) и ясно, что двойные столкновения происходят чаще тройных. Пара $q + \bar{q}$ аннигилирует, превращаясь в мезоны.

Обратное время бимолекулярной реакции уничтожения кварков дается выражением

$$\tau^{-1} = \sigma v (q + \bar{q}), \quad (18.6.2)$$

где σ — сечение реакции порядка $(\hbar/Mc)^2 c/v$, v — скорость кварков, q и \bar{q} — соответствующие концентрации.

Закалка кварков достигается при температуре более высокой, чем закалка антинуклонов, т. е. в период приближенной зарядовой симметрии по N и \bar{N} даже в зарядово-несимметричной модели. Поэтому с высокой точностью $q \cong \bar{q}$, $q - \bar{q} \ll q$.

Реакция (18.6.1) способствует дальнейшему уменьшению разности $q - \bar{q}$ и в дальнейшем, запомнив этот вывод (который интересен сам по себе и, мы надеемся, с течением времени будет сопоставлен с наблюдениями), будем писать просто q . Итак, скорость реакции стремится к нулю при уменьшении q .

Напомним результаты предыдущего параграфа.

Для нахождения времени, при котором происходит закалка, эту скорость нужно сравнить со скоростью расширения или со скоростью изменения равновесной концентрации (различие между соответствующими характерными временами не очень велико).

Итак, существует такое q и t_1 , при котором

$$\tau^{-1} = t_1^{-1},$$

где t_1 — гидродинамическое время, т. е., попросту говоря, время, протекшее с момента $\rho = \infty$. Соответствующее отношение q/n после этого приблизительно (с точностью до численного коэффициента) сохраняется в ходе дальнейшего расширения, так как можно написать

$$\frac{d(q/n)}{dt} = -\sigma v \left(\frac{q}{n}\right)^2 n,$$

$$n \sim t^{-3/2}, \quad \int_{t_1}^{\infty} n dt = \int_{t_1}^{\infty} t^{-3/2} dt,$$

и интеграл в последнем равенстве сходится при $t \rightarrow \infty$; условие начала закалки t_1 обеспечивает, что q/n не сильно меняется.

Итак, условие закалки выделяет определенное значение q_1 . Равновесная концентрация q_{eq} экспоненциально зависит от массы кварка. Но если $q_1 \approx q_{eq}$ задано, то это значит, что момент закалки t_1 и температура, при которой происходит закалка T_1 , сами подстраиваются к значению массы кварка M , $kT = \frac{Mc^2}{\ln \alpha}$, где α зависит от сечения σ , от скорости расширения и других факторов, но зависимость от этих факторов только логарифмическая. В результате получающееся q_1 уже зависит экспоненциально от M — это и есть важнейший результат. Именно поэтому можно надеяться обнаружить реликтовые кварки — даже в том случае, если масса кварков велика и обнаружение кварков ядерно-физическими методами не удастся.

Повторяя теперь рассуждения предыдущего параграфа, приходим к формуле

$$\frac{q_1}{\tilde{N}_1} \approx \left(\frac{GM^2}{\hbar c} \right)^{1/2} \approx 10^{-19}.$$

Здесь \tilde{N}_1 есть концентрация всех видов частиц (γ , e^+ , e^- , ν , ...) на момент закалки, численное значение дано для M порядка массы нуклона. Обсуждая вопрос об энтропии горячей модели, мы нашли

$$\frac{n}{\tilde{N}} \approx S^{-1} = \text{const} \approx 10^{-9},$$

где n — концентрация барионов. Отсюда находим (подставляя для момента закалки $n_1/\tilde{N}_1 \approx 10^{-9}$):

$$\frac{q_1}{n_1} = \frac{10^{-19}}{10^{-9}} = 10^{-10}.$$

Мы видим, что концентрация реликтовых кварков пропорциональна удельной энтропии. Горячая модель предсказывает для первичного вещества $\sim 10^{-10}$ кварков (и столько же антикварков) на один барион. Расчет не претендует на точность, но результат оказывается впечатляющим — ведь кларк золота (т. е. Au/H) $\approx 10^{-12}$, кларк радия $\text{Ra}/\text{H} \approx 10^{-18}$.

Изложенные результаты, относящиеся к закалке кварков, были получены Окунем, Пикельнером и Зельдовичем в 1965 г.

Когда выполнялась эта работа, горячая модель еще не могла считаться полностью доказанной, поэтому в работе приведены как высокие цифры, относящиеся к горячей модели, так и низкие для холодной модели. Здесь мы приводим только расчет для горячей модели. В работе рассмотрен также вопрос

о дальнейшей судьбе кварков, в частности, об их прилипании к ядрам и выгорании в звездах.

Заметим, что благодаря зарядовой симметрии всегда остаются q и \bar{q} обоих знаков заряда. Если стабилен q с зарядом $Z = +\frac{2}{3}e$, то остается и реликтовый \bar{q} с $Z = -\frac{2}{3}e$. В противном случае остаются q , $Z = -\frac{1}{3}e$ и \bar{q} , $Z = +\frac{1}{3}e$. На первый взгляд $q \cong \bar{q}$ облегчает дальнейшее выгорание q и \bar{q} в веществе звезды: при столкновении q и \bar{q} нет кулоновского барьера. Однако в действительности, как отмечалось в работе Зельдовича, Окуня и Пикельнера (1965), отрицательные q или \bar{q} всегда стабилизируются прилипанием к ядрам! Поэтому наличие частиц с зарядами обоих знаков способствует выживанию отрицательных q или \bar{q} в звездах. Выгорание, по-видимому, не очень значительно. Очень труден вопрос о распределении кварков в ходе эволюции звезд и образования планет. По вопросу об экспериментальных методах поисков реликтовых кварков ограничимся указанием литературы: Бекки, Галлиаро, Морпурго (1965); Брагинский (1966); Чупка, Шиффер, Стевенс (1966); Брагинский и др. (1967, 1968), Пикельнер, Вайнштейн (1966).

ГЛАВА 19

РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ГОРЯЧЕЙ МОДЕЛИ; ПРОИСХОЖДЕНИЕ ГАЛАКТИК, СКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК, КВАЗАРОВ

§ 1. Вводные замечания

Фактически наблюдаемая в настоящее время Вселенная является в сильной степени неоднородной, по крайней мере в масштабах галактик. Вещество сконцентрировано в звездах; средняя плотность, получаемая делением массы Солнца на объем шара с радиусом, равным «радиусу» орбиты Плутона, порядка $5 \cdot 10^{-9} \text{ г/см}^3$, т. е. в 10^{22} раз больше средней плотности во Вселенной. Звезды сконцентрированы в галактиках, средняя плотность которых приблизительно в 10^6 раз превышает среднюю плотность во Вселенной. Если в межгалактическом пространстве нет равномерно распределенного газа с плотностью $\rho > 5 \times 10^{-31} \text{ г/см}^3$ (усредненная плотность вещества, входящего в галактики, по Оорту), то сильная неоднородность имеется и в больших масштабах. Высказывалось утверждение, что в областях размером порядка 100 Мпс плотность галактик уже мало отличается от средней. Однако это утверждение слабо обосновано и до сих пор нет количественных критериев уменьшения неоднородности при переходе к большим масштабам *).

Представление о строго однородной Вселенной является идеализацией, заведомо неприменимой к малым масштабам. В связи с наблюдаемой неоднородностью, прежде всего возникает вопрос, как статистически ее охарактеризовать, в частности, как убедиться в однородности в большом масштабе. Об этом шла речь в § 8 гл. 17.

Следующие вопросы относятся к эволюции Вселенной. Совместима ли наблюдаемая в настоящее время неоднородность с предположением о том, что на ранней стадии Вселенная была

*) Бесконечная последовательная иерархия космических систем все возрастающего масштаба носит название схемы Шарлье.

однородна? Можно ли получить сегодняшнее состояние как результат неустойчивости и развития возмущений и последующих за этим процессов? Возможны ли большие неоднородности вблизи сингулярного состояния $\rho = \infty$? Наконец, последний вопрос — как влияет неоднородность на законы движения частиц и распространение света, которые ранее были получены для однородного мира?

Мы начинаем именно с последнего вопроса, так как с ним были связаны возражения против всей концепции расширяющегося мира.

§ 2. Изменение пекулярных движений с космологическим расширением

Выше, в § 1 гл. 17, рассматривалась частица, имеющая так называемое «случайное движение», т. е. движущаяся со скоростью, отличающейся от средней — хаббловской — скорости в данной точке пространства. Было показано, что скорость случайного движения убывает обратно пропорционально радиусу мира. На этом основании Хойл (1958) указывал на парадокс. Сейчас скорость случайного движения составляет 100—200 км/сек. Расстояние между галактиками в среднем в 100 раз больше размеров галактики. Рассмотрим момент, когда галактики соприкасались между собой: это значит, что расстояние между ними было в 100 раз меньше, чем сегодня, т. е. радиус мира был в 100 раз меньше. Применяя буквально теорему (§ 1 гл. 17) о законе изменения скорости случайного движения, Хойл (1958) приходит к выводу, что она была в 100 раз больше, чем в настоящее время, т. е. достигала 20 000 км/сек. Это гигантская величина, совершенно не соответствующая всем представлениям о возможных начальных случайных скоростях галактик. Такой результат рассматривался как трудность однородной модели Фридмана.

В действительности дело заключается в том, что закон монотонного уменьшения скорости случайного движения как раз относится к числу законов, которые не имеют места в реальном, неоднородном мире (точнее, в мире, однородном только в среднем).

Простейший пример, показывающий неприменимость закона уменьшения скорости в мире однородном только в очень больших масштабах и неоднородном в меньших масштабах, представляет вращение планеты вокруг Солнца. Ясно, что такая система Солнце — планета вообще не чувствует наличия и движения всех других масс, будь то другие звезды или кванты и нейтрино. Другие звезды и галактики находятся далеко, и

учитывая это, их распределение можно считать сферически-симметричным. Сферически-симметричное в среднем распределение удаляющихся галактик, как мы видели в § 13 гл. 3, никак не влияет на локальные свойства. Плотность квантов и нейтрино ничтожна по сравнению со средней плотностью планетной системы. Поэтому в ходе расширения мира радиус орбиты и кинетическая энергия вращения остаются без изменения*), в противоположность случайному движению одной частицы в однородном мире.

Общий закон уменьшения импульса нарушается потому, что в рассматриваемой области вблизи орбиты распределение плотности очень далеко от однородного. Ирвин (1961), Лэйзер (1964), Дмитриев и Зельдович (1963) рассмотрели в общем виде вопрос об изменении энергии случайного движения в мире однородном только в среднем.

Поскольку предполагается, что неоднородность имеется только в масштабе, малом по сравнению с c/H (H — константа Хаббла), то можно пользоваться классической механикой и ньютоновской теорией тяготения. Рассмотрим совокупность точечных масс, перенумерованных индексом i . Запишем уравнение движения каждой из них с учетом гравитационного взаимодействия со всеми остальными:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_k m_k m_i \text{grad}_i \frac{1}{r_{ik}}. \quad (19.2.1)$$

Запишем радиус-вектор каждой частицы как

$$\mathbf{r}_i = \psi_i(t) a(t),$$

где a — радиус мира или пропорциональная ему величина (умножение a на постоянную ничего не меняет в выводах). Смысл записи заключается в выделении хаббловского движения: если $\psi_i = \text{const}$, то

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \psi_i \frac{da}{dt} = H \mathbf{r}_i.$$

Случайным движением (скорость \mathbf{v}_i) является движение, связанное с изменением ψ_i ; в самом деле,

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = a \frac{d\psi_i}{dt} + \psi_i \frac{da}{dt} = \mathbf{v}_i + H \mathbf{r}_i,$$

где, очевидно,

$$\mathbf{v}_i = a \frac{d\psi_i}{dt}. \quad (19.2.2)$$

*) В принципе из-за приливных сил и излучения гравитационных волн происходит весьма медленное изменение орбиты; однако потеря энергии сопровождается увеличением линейной скорости вращения. Скорость этих изменений никак не связана со скоростью расширения Метагалактики.

Если умножить уравнения (19.2.2) на $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ и просуммировать по всем частицам, получится закон сохранения полной энергии. Но если умножить уравнения на \mathbf{v}_i , просуммировать по частицам и учесть, что хаббловская H меняется с течением времени в соответствии со значением средней плотности, то получится следующее соотношение:

$$\frac{dT}{dt} + 2HT = \frac{dF}{dt} + HF, \quad (19.2.3)$$

где T есть кинетическая энергия случайного движения:

$$T = \int \rho \frac{v^2}{2} dV = \sum m_i \frac{v_i^2}{2}. \quad (19.2.4)$$

F можно назвать модулем потенциальной энергии неоднородного распределения плотности.

В приближении сплошной среды

$$F = \frac{1}{2} \int \int \frac{(\rho(\mathbf{r}_1) - \bar{\rho})(\rho(\mathbf{r}_2) - \bar{\rho})}{r_{12}} d^3r_1 d^3r_2. \quad (19.2.5)$$

В мире однородном статистически, т. е. лишь в среднем, везде в среднем одинаковы энергия случайного движения и отклонения плотности от средней. На больших расстояниях $\rho(\mathbf{r}_1) - \bar{\rho}$ и $\rho(\mathbf{r}_2) - \bar{\rho}$ не коррелированы, поэтому в выражении F (19.2.5) при фиксированном \mathbf{r}_1 в интеграл по \mathbf{r}_2 дает вклад только область, сравнимая с размерами неоднородностей. Следовательно, при рассмотрении большого объема V (размеры которого много больше отдельных неоднородностей) обе величины, T и F , пропорциональны V .

Полученное уравнение содержит в себе как частный случай теорему вириала для стационарного движения. Пусть обособились системы типа планетных систем, двойных звезд и отдельных галактик. В них плотность гораздо больше средней по Вселенной, так что общее расширение, меняющее $\bar{\rho}$, практически не влияет на величины T и F ; в стационарном случае, считая $\frac{dT}{dt} = \frac{dF}{dt} = 0$, получим

$$2HT = HF, \quad T = \frac{F}{2}. \quad (19.2.6)$$

Кинетическая энергия равна $1/2$ модуля потенциальной.

Уравнение содержит и случай однородного мира; положим $\rho = \bar{\rho}$; $F=0$, тогда, подставляя выражение $H = \frac{d \ln a}{dt}$, найдем

$$\frac{dT}{dt} + 2HT = \frac{dT}{dt} + 2T \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = 0,$$

откуда

$$T = \text{const} \frac{1}{a^2}; \quad (19.2.7)$$

когда скорость случайного движения уменьшается как a^{-1} , то кинетическая энергия падает как a^{-2} .

Наконец, уравнение показывает, что при начальном состоянии (когда-то в прошлом), строго однородном и без случайных движений $F=T=0$, может получиться состояние с $F \neq 0$, $T \neq 0$. Такой результат согласуется с гравитационной неустойчивостью фридманской модели, с возможностью самопроизвольной раскочки случайных движений и увеличения неравномерности плотности. Эта неустойчивость будет подробно исследована ниже. Здесь отметим только, что теорема накладывает интересное ограничение на кинетическую энергию такого самопроизвольно возникшего движения*). Только в том случае, если анализ наблюдений покажет, что $T > F$, и расхождение с выводами предыдущего рассмотрения не удастся объяснить выделением ядерной энергии, придется сделать вывод, что в прошлом однородная модель Фридмана не могла быть справедлива. Однако сейчас таких данных нет; по порядку величины $T \approx F$.

§ 3. Гравитационная неустойчивость однородного мира

Наглядно представляется очевидным, что при учете тяготения равномерное распределение вещества в пространстве является неустойчивым. Энергетически выгодно (сопровождается уменьшением потенциальной энергии) собирание вещества в отдельные сгустки с нарушением первоначальной однородности. Этой тенденции противостоит упругость вещества, т. е. зависимость давления от плотности.

*) Уравнение (19.2.7) можно записать в форме

$$\frac{d(aT)}{dt} = \frac{d(aF)}{dt} - aT,$$

откуда

$$T = F - \frac{1}{a} \int_0^t aT d\tau.$$

Так как, по определению, $T > 0$, то отсюда следует неравенство $T < F$.

Соотношение между силами тяготения и давления зависит от масштаба сгустков: гравитационный потенциал тела данной плотности пропорционален l^2 , а сила пропорциональна l , где l — характерный размер. Между тем внутренняя энергия единицы массы вещества при данной плотности не зависит от размера l , а сила, действующая на вещество, пропорциональна градиенту давления, т. е. пропорциональна $1/l$.

Поэтому при малых масштабах, т. е. для возмущений с малой длиной волны, преобладают силы давления; возмущения распространяются как звуковые волны. Зато возмущения с достаточно большой длиной волны совершенно независимо от вида уравнения состояния могут нарастать с течением времени. Для них давление — в предельном случае большой длины волны — не играет никакой роли.

Впервые количественно вопрос был рассмотрен Джинсом (1929а, б). Джинс рассматривал покоящееся вещество постоянной плотности как невозмущенное состояние. Для малых возмущений плотности был получен закон изменения:

$$\rho' = a_1 e^{\pm \omega t} \sin kx, \quad \omega = \sqrt{4\pi G \rho_0 - k^2 a_{зв}^2}, \quad (19.3.1)$$

где $a_{зв}$ — скорость звука в среде. Длинные волны соответствуют малым k , в пределе при $k \rightarrow 0$, $\omega = \sqrt{4\pi G \rho_0}$. Критическая «джинсовская» длина волны $\lambda_D = 2\pi/k_D$, определяется из условия $\omega = 0$, $k_D = \frac{1}{a_{зв}} \sqrt{4\pi G \rho_0}$,

$$\lambda_D = a_{зв} \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}. \quad (19.3.2)$$

При коротких волнах, когда подкоренная величина в (19.3.1) отрицательна, получается мнимый показатель, т. е. периодическая зависимость от времени, и в пределе, при $k^2 a_{зв}^2 \gg 4\pi G \rho_0$

формула описывает распространение звука $\rho' = a_1 e^{ik(x - a_{зв}t)}$.

В последнее время вопрос рассматривается снова. В ряде работ отмечают некорректность постановки задачи Джинса. Действительно в отсутствие возмущений не существует статического решения уравнений тяготения в однородной среде. Статические решения возможны лишь в том случае, если сила тяжести уравновешивается градиентом давления, но тогда давление не может быть везде одинаковым. Следовательно, необходимо при рассмотрении однородной среды принять в качестве невозмущенного нестационарное решение. Таким решением является фридмановское. Рассмотрим случай критической плотности:

$$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}; \quad H = \frac{2}{3} \frac{1}{t}; \quad (19.3.3)$$

при этом все расстояния l возрастают со временем как $l \sim t^{2/3}$. В ньютоновской теории задачу о малых возмущениях на таком фоне решил Боннор (1957); он получил два решения*) для больших длин волн возмущений λ , когда давление уже несущественно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta\rho}{\rho} &\sim t^{2/3} \sim l; & v &\sim t^{1/3} \sim l^{1/2}; \\ \frac{\delta\rho}{\rho} &\sim t^{-1} \sim l^{-3/2}; & v &\sim t^{-4/3} \sim l^{-2}, \end{aligned} \right\} \quad (19.3.4)$$

где v — возмущения скорости.

Как отмечает Боннор, эти результаты содержались в более ранней работе Е. М. Лифшица (1946), рассматривавшего малые возмущения фридмановского решения с помощью общей теории относительности. Итак, расширяющееся решение оказывается неустойчивым: существуют возмущения, относительная амплитуда которых растет с течением времени. Легко проверить, что в этом случае величины F и T предыдущего параграфа, отнесенные к единице массы, растут как $t^{2/3}$, и соотношение (19.2.3) между F и T выполняется.

В каком соотношении находится закон нарастания $\delta\rho/\rho$ и формулы Джинса? На первый взгляд закон роста $e^{+\omega t}$ и t^n очень не похожи, обычно считается, что экспонента нарастает быстрее любой степени. Но джинсовское значение ω зависит от плотности ρ ; в действительности, в невозмущенном решении ρ зависит от времени согласно (19.3.3). В этом случае естественным обобщением формул Джинса является

$$\frac{da}{dt} = \omega(t)a, \quad a = \text{const} e^{\pm \int \omega dt}, \quad (19.3.5)$$

где a — возмущение. Подставим в это выражение следующие соотношения:

$$\omega = \sqrt{4\pi G\rho}; \quad \rho = \frac{1}{6\pi Gt^2}; \quad \omega = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{3}};$$

интегрируя, находим

$$\int \omega dt = \sqrt{\frac{2}{3}} \ln t;$$

*) Мы получим эти решения более простым способом ниже, в § 4 этой главы. Эти решения применимы и к случаю сжатия ($t < 0$). Формулы (19.3.4) для этого случая надо переписать так: $\delta\rho/\rho \sim (-t)^{2/3}$ и $\delta\rho/\rho \sim (-t)^{-1}$; нарастающим является именно второе решение, $\sim (-t)^{-1}$.

Нарастание возмущений в случае сжатия еще быстрее, чем в расширяющейся Вселенной. Это было впервые отмечено Лифшицем (1946), а в последнее время рядом других авторов (Хаитер (1962), Дорошкевич и Зельдович (1963)).

получаем окончательно

$$e^{\pm \int \omega dt} = t^{\pm \sqrt{\frac{2}{3}}}. \quad (19.3.6)$$

Мы получили закон нарастания возмущений, близкий к точному решению Лифшица — Боннора — показательный: t^n с $n = \pm 0,81$ вместо точных значений $n_1 = 0,67$ и $n_2 = -1$ (см. выше). Эти соображения можно еще уточнить. Рассмотрим, следуя Боннору, вещество с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$. В таком веществе скорость звука пропорциональна $\rho^{1/6}$. В ходе расширения длина волны возмущения λ растет пропорционально росту всех линейных размеров, $\lambda \sim l$. При $\gamma = 4/3$ в ходе расширения не изменяется соотношение между λ и λ_D , т. е. остается неизменным соотношение между упругостью (давлением) и тяготением для данного возмущения. Поэтому при любой длине волны получаются точные степенные решения. При малой длине волны имеют место звуковые колебания. Их частота

$$\omega_{зв} = \frac{2\pi a_{зв}}{\lambda} \sim \frac{\rho^{1/6}}{l} \sim t^{-1}, \text{ так как } \rho \sim t^{-2}, \quad \lambda \sim l \sim t^{2/3}. \quad (19.3.7)$$

По известной теореме об адиабатических инвариантах при медленном изменении параметров колеблющейся системы энергия колебаний меняется пропорционально частоте колебаний. Энергия колебаний будет порядка

$$E \sim m v^2 \sim P V \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2,$$

причем

$$M = \rho \lambda^3 = \text{const}; \quad V \sim \lambda^3 \sim t^2, \quad (19.3.8)$$

$$P \sim \rho^{4/3} \sim t^{-8/3}.$$

Учитывая, что

$$E \sim \omega \sim t^{-1}, \quad (19.3.9)$$

получим, сопоставляя эти формулы для звуковых колебаний,

$$\left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)_{зв} \sim t^{-1/6}; \quad (v_{зв}) \sim t^{-1/2}.$$

В случае длинных волн действие гравитационной неустойчивости накладывается на адиабатическое изменение амплитуды: следовательно, более точно мы должны иметь

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \sim t^{-\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{2}{3}}}; \quad v \sim t^{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{3}}},$$

т. е. для нарастающих возмущений

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \sim t^{0,65}; \quad v \sim t^{0,31}, \quad (19.3.10)$$

тогда как точный закон, полученный Лифшицем,

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim t^{0,67} \quad \text{и} \quad v \sim t^{0,33}.$$

Для затухающих возмущений

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim t^{-0,98}, \quad v \sim t^{-1,31} \quad (19.3.11)$$

(точный закон $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim t^{-1}$ и $v \sim t^{-1,33}$).

Критическая длина волны, при которой происходит переход от монотонного изменения амплитуды t^n (n — вещественно) к колебательному режиму, $t^{k+im} = t^k \cos(m \ln t)$, в расчете Боннора также оказывается весьма близкой к джинсовскому значению λ_c , подсчитанному по мгновенному $\rho(t)$. Прекрасное численное согласие не оставляет сомнения в том, что идея расчета Джинса правильна, несмотря на некорректный выбор невозмущенного состояния.

§ 4. Рост возмущения произвольной формы и автомодельные решения

Теория малых возмущений приводит к выводу (обоснование ниже), что начальное возмущение плотности произвольной формы нарастает, сохраняя свою форму при равных нулю давлении и начальной скорости. Если в начальный момент было задано

$$t = t_0, \quad \rho = \bar{\rho}(1 + s_0(\mathbf{r})), \quad v = 0, \quad (19.4.1)$$

то в последующие моменты

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \bar{\rho}(1 + s_0(\mathbf{r})f(t, t_0)); \quad v \neq 0. \quad (19.4.2)$$

Например, в частном случае плоского мира, когда $\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}$, имеем (вывод см. далее)

$$f(t, t_0) = \frac{3}{5} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} + \frac{2}{5} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}. \quad (19.4.3)$$

Это утверждение справедливо при $P=0$ или в том случае, если при $P \neq 0$ рассматривается крупномасштабное возмущение, простирающееся в пространстве на расстояние, значительно большее джинсовской критической длины волны.

Под r здесь понимается лагранжева координата. Эйлеровы координаты R выражаются через r , в данном случае так:

$$R = a_1 t^{2/3} r. \quad (19.4.4)$$

Очевидно, что возмущение, меняясь по величине, растягивается в пространстве вместе с общим расширением всего невозмущенного решения.

Это утверждение (Дорошкевич, Зельдович (1963)) *) непосредственно следует из результатов Джинса и Боннора: в пределе при $\lambda \gg \lambda_c$ $k \ll 1/\lambda_D$ скорость нарастания всех синусоидальных возмущений ($\sim \sin kr$) одинакова. Следовательно, если возмущение произвольной формы $\rho' \sim s(r)$ разложить в интеграл Фурье, затем проследить рост каждой компоненты (с определенным k), а затем снова сложить фурье-компоненты, то получится возмущение той же формы. Единственное ограничение заключается в том, что нужно рассматривать лишь длинноволновые фурье-компоненты. Такой результат позволяет подойти с другой стороны к задаче о развитии возмущений.

Вспомним, как в гл. 15 было рассмотрено расширение шара, заполненного пылевидной материей ($P=0$) с хаббловским распределением скоростей. Для радиуса такого шара справедливо дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{4\pi}{3} G\rho R$$

с дополнительным условием

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3.$$

Из этого уравнения можно найти закон зависимости плотности от времени.

Теперь представим, что этот шар окружен также пылевидной материей, но начальные условия в окружающем веществе на малую величину отличаются от начальных условий внутри шара. Тогда состояние вещества внутри шара можно рассматривать как возмущенное состояние окружающего вещества. Сравнивая решение для шара с решением для окружающего вещества, мы получим закон развития возмущений со временем. Решение уравнения второго порядка имеет две константы; соответственно малым изменениям этих двух констант получим два типа возмущений. Покажем, как практически проводится такой расчет.

Первый интеграл уравнения для радиуса шара есть

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{R} + k^*/2, \quad (19.4.5)$$

*) Там рассмотрен также случай произвольного задания начальной скорости случайного движения, в этом случае

$$\delta\rho = \delta\rho_0 f_1(t, t_0) + \operatorname{div} \mathbf{u}' f_2(t, t_0).$$

а решение

$$t = t_0 + \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{2\frac{GM}{R} + k^*}}. \quad (19.4.6)$$

Взяв интеграл в (19.4.6), получим $t = t(R, t_0, k^*)$; решив это уравнение относительно $R = R(t, t_0, k^*)$, найдем

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \rho(t, t_0, k^*). \quad (19.4.7)$$

Две константы, входящие в (19.4.7), это t_0 и k^* . Поэтому

$$\rho(t, t_0 + \delta t_0, k^* + \delta k^*) = \rho(t, t_0, k^*) + \frac{\partial \rho}{\partial t_0} \delta t_0 + \frac{\partial \rho}{\partial k^*} \delta k^* = \rho + \delta \rho, \quad (19.4.8)$$

следовательно, два линейно независимых решения для возмущения плотности — это

$$\delta \rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial t_0}; \quad \delta \rho_2 = \frac{\partial \rho}{\partial k^*}. \quad (19.4.9)$$

Чтобы не иметь дело со сложными выражениями, рассмотрим в качестве невозмущенного движения «плоский мир», $k^* = 0$, и выберем в невозмущенном движении $t_0 = 0$. Тогда

$$t = \frac{2}{3} \frac{R^{3/2}}{\sqrt{2GM}},$$

$$R = \left(\frac{3}{2} t \sqrt{2GM} \right)^{2/3}, \quad \rho = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (19.4.10)$$

Ясно, что при $t_0 \neq 0$ везде вместо t войдет разность $(t - t_0)$, поскольку в исходное дифференциальное уравнение t входит только под знаком дифференциала. Иными словами, уравнение и решение допускают сдвиг по времени. Так мы найдем одно из возмущений (при $t_0 \rightarrow 0$)

$$\rho(t, t_0, k^* = 0) = \frac{1}{6\pi G (t - t_0)^2} = \frac{1}{6\pi G t^2} + \frac{2t_0}{6\pi G t^3};$$

$$\delta \rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial t_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{2}{6\pi G t^3},$$

и окончательно:

$$\frac{\delta \rho_1}{\rho} = -\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = \frac{2}{t} \sim R^{-3/2}. \quad (19.4.11)$$

Для того чтобы найти второй тип возмущения, разложим подынтегральную функцию в (19.4.6) в ряд по k^* : поскольку в невоз-

мушенном решении $k^* = 0$, в возмущенном $\delta k^* = k^*$ считается малым:

$$t = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{2GM}{R} + k^*}} = \int_0^R \frac{dR}{\sqrt{\frac{2GM}{R}}} - k^* \int_0^R \frac{dR}{\left(\frac{2GM}{R}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{R^{3/2}}{\sqrt{2GM}} - \frac{k^*}{5} \frac{R^{5/2}}{(2GM)^{3/2}} = \frac{2}{3} \frac{R^{3/2}}{\sqrt{2GM}} (1 - ak^*R). \quad (19.4.12)$$

С другой стороны, мы имеем (см. 19.4.10)

$$t = \frac{2}{3} (R_{\text{невозмуц}}^{3/2} / \sqrt{2GM}).$$

Отсюда

$$R = R_{\text{невозмуц}} \left(1 + \frac{2}{3} ak^*R\right),$$

$$\rho \sim \frac{M}{R^3} \sim \frac{M}{R_{\text{невозмуц}}^3 \left(1 + \frac{2}{3} ak^*R\right)^3} = \rho_{\text{невозмуц}} (1 - 2ak^*R), \quad (19.4.13)$$

$$\delta\rho_2 = \frac{\partial\rho}{\partial k^*} = -\rho_{\text{невозмуц}} 2aR,$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim R \sim t^{2/3}. \quad (19.4.14)$$

Таким образом, мы абсолютно точно воспроизвели, не прибегая к уравнениям в частных производных, ту часть результатов

Таблица XXIII

Развитие возмущений плотности в плоской модели для разных уравнений состояния

Уравнение состояния	Невозмущенное решение	$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_1$	$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_2$
$P = 0$	$R \sim t^{2/3}, \rho = \frac{1}{6\pi Gt^2}$	$\sim t^{-1} \sim R^{-3/2}$	$\sim t^{2/3} \sim R$
$P = \frac{\rho c^2}{3} \sim n^{4/3}$	$R \sim t^{1/2}, \rho = \frac{1}{32\pi Gt^2}$	$\sim t^{-1} \sim R^{-2}$	$\sim t^{1/2} \sim R$
$P = \rho c^2 \sim n^2$	$R \sim t^{1/3}, \rho = \frac{1}{24\pi Gt^2}$	$\sim t^{-1} \sim R^{-3}$	$\sim t^{1/3} \sim R^4$

Здесь n есть плотность сохраняющихся частиц (барионов, нуклонов), которую нужно отличать от плотности массы ρ при $P \neq 0$. В силу степенной зависимости между ρ и n , $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{\delta n}{n}$ относительное возмущение n меняется по тому же закону, что и относительное возмущение ρ .

Лифшица и Боннора, которая относится к длинным волнам:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_1 &\sim \frac{1}{t} \sim R^{-3/2}, \\ \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_2 &\sim t^{2/3} \sim R. \end{aligned} \right\} \quad (19.4.15)$$

Идея этого метода восходит к работе Г. И. Баренблатта и Я. Б. Зельдовича (1958), посвященной исследованию устойчивости стационарных и автомодельных решений. Метод можно легко применить и к другому уравнению состояния.

Результаты для плоского ($k^*=0$) невозмущенного движения сведены в табл. XXIII.

Наконец, легко найти и асимптотические выражения при $k \neq 0$. Если $k^* > 0$, мы имеем дело с открытым миром, в котором расширение никогда не сменится сжатием. Асимптотически при

$$\left. \begin{aligned} \frac{GM}{R} &\ll k^*, \quad t = t_0 + \frac{R}{\sqrt{k^*}}; \quad R = (t - t_0) \sqrt{k^*}; \\ \rho &\sim \frac{1}{k^{*3/2}} (t - t_0)^{-3}, \quad \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_1 = \frac{\partial \ln \rho}{\partial t_0} = \frac{1}{t - t_0} \sim \frac{1}{R}, \\ \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_2 &= \frac{\partial \ln \rho}{\partial k^*} = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (19.4.16)$$

Итак, один тип возмущений по-прежнему затухает. Второй тип возмущений, нараставший пропорционально $t^{2/3} \sim R$ в «плоском мире», в «открытом мире» перестает нарастать и «замерзает». Это естественно, так как в «открытом мире» с течением времени силы тяготения в ходе расширения становятся пренебрежимо малы. В противоположном случае $k^* < 0$, т. е. в случае замкнутого мира, с течением времени расширение сменяется сжатием. В ходе сжатия плотность меняется по закону:

$$\rho \sim \frac{1}{(t_k - t)^2}, \quad (19.4.17)$$

где t_k есть момент коллапса, когда плотности предстоит обратиться в бесконечность. Поэтому главным и нарастающим оказывается возмущение, соответствующее сдвигу решения по времени:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_1 \sim \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} \sim \frac{1}{t_k - t} \sim R^{-3/2} \rightarrow \infty \quad (19.4.18)$$

при $t \rightarrow t_k$, $R \rightarrow \infty$.

Наличие таких возмущений привело Лифшица (1946) к выводу о существенной неустойчивости сжимающейся Вселенной, исследованной затем в общем виде Лифшицем, Судаковым и Халатниковым (1963). Позже неустойчивость коллапсирующих

(сжимающихся) газовых сфер была рассмотрена в работах Хантера (1962), Лэйзера (1962), Саведова (1962).

Все рассуждения, относящиеся к построению решения путем сшивания двух известных (сферически-симметричных) решений в различных областях, справедливы и тогда, когда различие сжимаемых решений перестает быть малым. Возьмем снова два решения, в которых сингулярность ($\rho = \infty$) имела место в один и тот же момент времени, $t = 0$, и проследим их развитие в течение большого времени. Пусть в решении для внутреннего шара константа $k^* = k_1^* < 0$, а во внешнем веществе $k^* = k_2^* > 0$. Это значит, что внешнее решение соответствует открытому миру и плотность там монотонно убывает, а внутреннее решение представляет собой часть замкнутого мира; плотность во внутреннем решении вначале убывает, но затем доходит до минимума и снова возрастает до бесконечности; на рис. 97 показаны кривые изменения расстояния l_1 между парой частиц во внутреннем решении и l_2 — между парой частиц во внешнем решении (пары выбраны так, что $l_1/l_2 \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$).

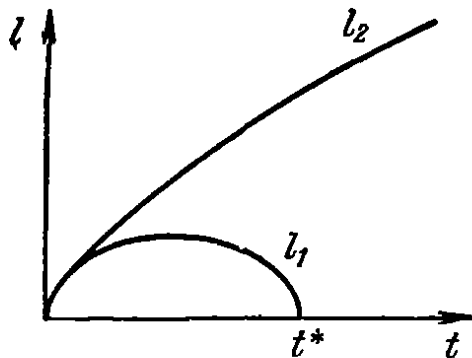


Рис. 97. Изменение с течением времени расстояний между парами частиц во внутреннем решении l_1 и внешнем решении l_2 .

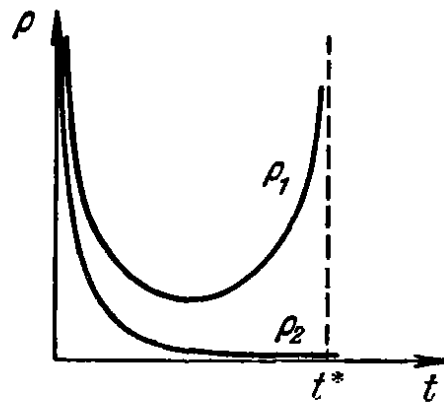


Рис. 98. Изменение с течением времени плотности во внутреннем решении ρ_1 и внешнем ρ_2 .

На рис. 98 показан ход плотности ρ_1 и ρ_2 в обоих решениях $\rho \sim t^{-3}$. Согласно формулам, приведенным выше, в этих решениях при $t \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$, $\rho_2/\rho_1 \rightarrow 1$. В случае отсутствия давления (пыль) в первом приближении $\rho_1 = \rho_2 = 1/6\pi G t^2$, а в следующем приближении при малом t :

$$\rho_1 = \frac{1}{6\pi G t^2} (1 - \text{const } k_1^* t^{2/3}), \quad \rho_2 = \frac{1}{6\pi G t^2} (1 - \text{const } k_2^* t^{2/3}). \quad (19.4.19)$$

Для внутреннего решения $k_1^* < 0$, $\rho_1 > 1/6\pi G t^2$. В соответствии с теорией малых возмущений при $t \rightarrow 0$ $\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho} \rightarrow 0$ (здесь, как и раньше, обозначаем через ρ любое ρ_1 или ρ_2 , или их среднее $(\rho_1 + \rho_2)/2$ там, где это не влияет на результат).

Полученный здесь результат сильнее, чем результат теории возмущений. В самом деле, в теории возмущений получалось $\delta\rho/\rho \sim t^{2/3}$, т. е. относительное возмущение растет, но абсолютное значение $\delta\rho = \rho t^{2/3} \sim \frac{1}{t^2} t^{2/3} \sim t^{-4/3}$ убывает. Получилось, что даже растущее возмущение дает убывание $\delta\rho$ по абсолютной величине. При этом было не ясно, можно ли, исходя из малого возмущения, получить конденсацию с конечной, не убывающей все время абсолютной величиной плотности на фоне открытого мира, в котором средняя плотность неограниченно убывает.

Здесь мы фактически построили пример начального состояния с $\delta\rho/\rho \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и с $\rho_1 \rightarrow \infty$ в определенный момент t^* , когда ρ_2 остается конечным и убывает (см. рис. 93 и 94).

Рассмотрим случай, когда давление отлично от нуля. При большой плотности мы всегда имеем дело с таким случаем; в любом веществе по порядку величины будет достигаться $P \sim \rho c^2$, а скорость звука приближается (также по порядку величины) к скорости света. В этом случае граница между областями с большей и меньшей плотностью является одновременно поверхностью разрыва давления. Разрыв давления сглаживается со скоростью, равной скорости звука: через время Δt плотность упала в слое толщиной $a_{зв} \Delta t$. Отсюда получится условие применимости описанного выше способа сшивания решений. Для того чтобы к моменту t сглаживание не изменило существенно внутреннего решения, необходимо, чтобы радиус внутренней области был значительно больше $a_{зв} t$.

В следующем параграфе мы увидим, что этот простой критерий совпадает с условием, что размер области больше джинсовской критической длины волны. Тем самым дается наглядная интерпретация критической длины волны. Наконец, из изложенного выше метода сшивки ясно, что отличие метрики возмущенной области от метрики окружающего пространства остается в ходе эволюции постоянным. Этот результат был строго получен в работе Лифшица (1946). Можно убедиться, что при любом уравнении состояния, $P=0$, $P=\rho c^2/3$, $P=\rho c^2$ (см. табл. XXIII) возмущения плотности, растущие в расширяющемся мире, сопровождаются постоянным возмущением метрики. При $t \rightarrow 0$ относительное различие плотности так же стремится к нулю *) $\delta\rho/\rho \rightarrow 0$, но $\delta g_{\mu\nu}/g_{\mu\nu} = \text{const}$.

Не существует решения уравнений ОТО, которое было бы сколь угодно близко к однородному фридмановскому решению при $t \rightarrow 0$ (по распределению плотности и по метрике) и в то

*) Мы рассматриваем расширяющийся мир и растущие в нем возмущения.

же время давало бы неоднородное распределение вещества, наблюдаемое в настоящее время.

Конкретный анализ, проделанный И. Д. Новиковым (1964а), показывает, что необходимы возмущения метрики порядка $\delta g_{\mu}^{\nu}/g_{\mu}^{\nu} \approx 0,01—0,001$ в начальном состоянии*) для того, чтобы рост возмущений по законам, рассмотренным выше, мог дать наблюдаемую в настоящее время неоднородность. Отсылая за подробностями к цитированной работе, дадим наглядную характеристику нарушения метрики. Наибольшая область, в которой наблюдается неоднородность распределения вещества — это скопление галактик. Рассмотрим массу, равную средней массе скопления; на границе объема, приходящегося в среднем на одно скопление, такая масса создает гравитационный потенциал порядка $GM/R \sim (0,01 \div 0,001) \cdot c^2$, где c — скорость света.

Однако было бы, конечно, наивно думать, что окружающая нас картина мира галактик возникла только путем механического развития неоднородностей. Важнейшее значение имели процессы выделения энергии в небесных объектах, после того как рост флуктуаций привел к образованию первых из них. Об этом см. далее в § 6.

§ 5. Неустойчивость и закон возрастания неоднородностей в горячей модели

Неоднородное состояние не может возникнуть из начального состояния, которое в пределе, при $t \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$, является однородным как в отношении распределения плотности, так и в отношении метрики. Таков итог предыдущего параграфа, в котором был наглядно разъяснен важный результат Е. М. Лифшица — постоянство возмущений метрики в теории возмущений. Этот результат относится к движению, которое совершается по уравнениям гидродинамики сплошной среды в ОТО. Флуктуации, термодинамические и квантовые, в ходе вывода не рассматривались.

Очевидно, что флуктуации в принципе могут создать неоднородность плотности и метрики из строго однородного состояния. Нельзя произвольно рассматривать обычные статистические флуктуации, $\delta\rho \sim N^{1/2}$, в какой-то условно выбранный момент времени, например, при $\rho = \rho_{\text{яд}} = 10^{14} \text{ г/см}^3$. Это равносильно предположению, что только в этот момент включена и начала действовать сила тяготения, обуславливающая гравитационную неустойчивость. В будущей теории придется рассматривать все развитие процесса от особой точки $t=0$, $\rho = \infty$.

*) При $t \rightarrow 0$, когда возмущения плотности стремятся к нулю $\delta\rho/\rho \rightarrow 0$.

Такая теория еще не построена, не ясно даже, какого знака будут трудности этой теории. Окажется ли, что флуктуации недостаточно сильны, чтобы создать наблюдаемую неоднородность? Или, может быть, чем раньше мы будем выбирать начальный момент включения флуктуаций, тем большая доля вещества успеет обособиться и гравитационно замкнуться (см. об этом в гл. 20).

Первая попытка дать теорию начальных амплитуд на основе фундаментальных принципов принадлежит А. Д. Сахарову (1965). Работа относится к холодной модели и вряд ли правильна буквально, но метод подхода, возможно, будет иметь значение и впредь.

Последовательного расчета флуктуаций в горячей модели в настоящее время нет. Проблеме начальных флуктуаций будет посвящен § 7. Отметим здесь же, что из самых общих соображений ясно, что под влиянием флуктуаций легче возникают коротковолновые, маломасштабные нарушения равномерности. Усиление неоднородности плотности происходит (при достаточной длине волны) по закону, независимому от длины волны, т. е. от волнового вектора k . Значит, следует ожидать, что первыми возникнут самые мелкие неоднородности, которые еще допускаются длиной волны Джинса.

Рассмотрим предел размера неоднородностей, обусловленный критерием Джинса, в горячей модели, где важнейшую роль играет давление излучения. Длина волны Джинса есть

$$\lambda_D \simeq \frac{2\pi a_{зв}}{\sqrt{4\pi G\rho}}. \quad (19.5.1)$$

Если давление определяется излучением, то скорость звука равна $c/\sqrt{3}$. Подставив $\rho = 3/32\pi Gt^2$ получим $\lambda_D \approx ct$.

При масштабе возмущения больше λ_D (или соответственно охваченной им массы M^D) они растут, при меньшем масштабе имеем звуковые волны постоянной амплитуды, а при $\lambda < \lambda_c \approx \sqrt{lct}$ амплитуда экспоненциально затухает из-за диссипативных процессов, связанных с комптоновским рассеянием на электронах; величина l — свободный пробег фотона.

С учетом зависимости температуры и плотности от времени, вытекающей из механики расширения, можно составить диаграмму рис. 99, на которой дана зависимость M^D от времени. Под «массой» всегда подразумевается масса барионов и электронов в данном объеме, т. е. величина сохраняющаяся, несмотря на изменение энергии квантов или их уход из рассматриваемой области пространства, содержащей данные барионы. При составлении диаграммы принято для сегодняшнего состояния $T_0 = 3^\circ \text{K}$, $\rho_0 = 10^{-30} \text{ г/см}^3$.

Сплошная линия $M_1^D \sim t^{3/2}$ соответствует границе масштаба сжатия вещества вместе с излучением (справа область неустойчивости); возникающий при этом перепад давлений максимален. В уравнениях движения учитывается вес излучения. Критическая масса M_1^D растет, достигая $\sim 10^{19} M_\odot$ при $t=t^*=3 \cdot 10^{13}$ сек, $\rho=3 \cdot 10^{-21}$ г/см³.

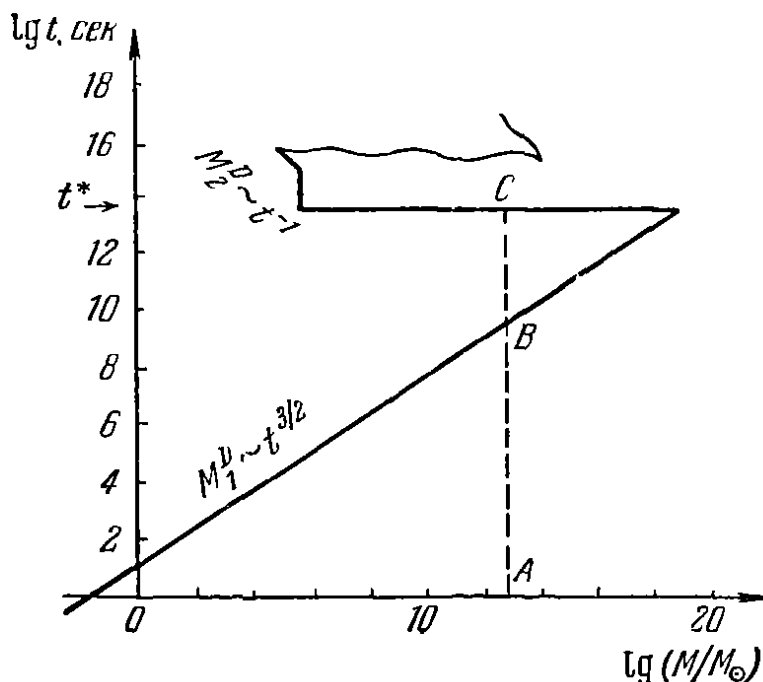


Рис. 99. Диаграмма гравитационной неустойчивости в горячей космологической модели. Правее сплошной линии область неустойчивости, левее — область устойчивости. Волнистая линия показывает увеличение λ^D при разогреве вещества возникшими объектами. Пунктир показывает, что адиабатическое возмущение, охватывающее некоторую массу, сначала может расти (на участке AB), затем попадает в область устойчивости (BC) и после C снова может расти. Изотермические возмущения ниже горизонта $t^* = \text{const}$ не растут нигде, выше $t^* = \text{const}$ растут в области правее кривой λ^D .

Однако продолжать эту линию дальше, для $t > 3 \cdot 10^{13}$ сек, не следует. Дело в том, что в расширяющейся горячей плазме важные перемены наступают при $t_0 \approx 10^6$ лет, $\rho = 3 \cdot 10^{-21}$ г/см³, когда $T = 3500^\circ$ и протоны и электроны связываются в атомы водорода*). Гелий нейтрализован и больше в «догалактическом» веществе практически нет никаких элементов.

*) Значение энтропии, соответствующее сегодняшнему состоянию, таково, что приблизительно совпадают условие рекомбинации протонов и электронов в нейтральные атомы и условие равенства плотности излучения ϵ/c^2 и плотности вещества ($\rho = nm$). Это совпадение использовано при построении рисунка.

Теперь нейтральная материя не взаимодействует с фоновым излучением. Возмущения плотности материи растут без соответствующих возмущений температуры и давления радиации. Давление радиации теперь не лимитирует рост возмущений. Критическая масса, соответствующая гравитационной неустойчивости Джинса, определяется только давлением плазмы и падает от $10^{19} M_{\odot}$ до $\approx 5 \cdot 10^5 M_{\odot}$ (см. рис. 95).

Эта «вторая длина волны Джинса» существовала и в ионизованной плазме, но не играла там определяющей роли. В самом деле, в горячей плазме существует второй тип возмущений, при котором в пространстве неоднородна плотность барионов, тогда как плотность излучения остается постоянной. Такие возмущения можно назвать изотермическими или энтропийными (см. § 5 гл. 11). Росту возмущений здесь противодействует только градиент газового давления $P_m = RT\rho_m$, но это давление гораздо меньше давления излучения. Соответственно гораздо меньше и критическая джинсовская масса M_2^D .

Однако при больших плотностях и температурах, пока вещество ионизовано и плотность излучения велика, возмущения изотермического типа с $M > M_2^D$ хотя и растут, но растут чрезвычайно медленно (см. § 11 гл. 11): ведь для роста возмущений нужен процесс движения вещества относительно квантов, а взаимодействие с квантами затрудняет такое движение. Практически можно считать такие возмущения замороженными. Это отмечают Пиблс (1965) и Л. М. Озерной (1966). Таким образом, только после рекомбинации водорода при $t \approx 10^6$ лет могут расти флуктуации с $M > 5 \cdot 10^5 M_{\odot}$.

§ 6. Гипотеза образования галактик и квазаров

Как развиваются процессы дальше, после $t = 10^6$ лет? Достаточно убедительного ответа пока нет. Эти вопросы только разрабатываются. Поэтому мы схематично изложим здесь только один из возможных вариантов, лишь для того, чтобы показать направление поисков.

Следуя работе А. Г. Дорошкевича и авторов (1967с), представим себе, что в момент рекомбинации водорода температура излучения и давление были совершенно однородными, но в плотности материи имелись некоторые малые неравномерности, некоторые малые возмущения (см. также Гаррисон (1967)).

Несколько слов о спектре возмущений: имеется характеристика $\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)$ для каждого мысленного деления материи на объемы с определенной массой M : $\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 = \varphi(M)$. Из самых об-

ших принципов ясно (см. выше), что $\varphi(M)$ есть функция, убывающая с ростом M , потому, что данное локальное возмущение дает убывающее $\frac{\delta\rho}{\rho}$, если среднее $\bar{\rho}$ взято для большей массы. В большей массе имеется больше шансов встретить возмущение обоих знаков. О связи $\varphi(M)$ с фурье-образом $\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_k$ см. на стр. 543.

Но в начале сразу после падения критической M^D до $5 \cdot 10^5 M_\odot$ разрешается расти только возмущениям с $M > M^D = 5 \cdot 10^5 M_\odot$. В результате уменьшения с ростом M функции $\varphi(M)$ и существования критической M^D первые рождаемые небесные тела — «празвезды» — будут иметь массу порядка $5 \cdot 10^5 M_\odot$.

Из-за статистического характера возмущений образование празвезд не происходит одновременно по всему объему материи. Имеются места, где празвезды случайно образовались несколько раньше. Теперь основная гипотеза состоит в том, что в момент рекомбинации водорода t^* амплитуда возмущений для критической массы $M^D = 5 \cdot 10^5 M_\odot$ очень мала, $\varphi(M^D, t^*) \gg 1$. Мы предполагаем, что эта величина настолько мала, что первые празвезды в действительности образовались, когда $t_1 = 3 \cdot 10^8$ лет, $\bar{\rho} = 10^{-26}$ г/см³. Эволюция таких празвезд происходит за промежуток времени, короткий по сравнению с t_1 . Это значит, что самые первые празвезды нагревают окружающий газ, и температура газа поднимается до $\sim 10^6$ °К. Температура реликтового излучения, оставшегося от празвездной стадии, уже низка (порядка 30—10° К), но газ является оптически тонким (согласно картине теперешнего состояния межгалактического газа, данной Гинзбургом и Озерным (1965)) и остывает медленно. Сгорание только 10^{-4} части всей материи в празвездах достаточно, чтобы повысить температуру до 10^6 °К. Но после этого 0,9999 часть массы в виде горячего газа имеет опять очень большую джинсовскую критическую массу порядка 10^9 — $10^{10} M_\odot$ и даже больше, зависящую от точных значений t_1 и T . Таким образом, сгорание первой 10^{-4} части материи предотвращает дальнейшее образование подобных празвезд.

Начинается эпоха конденсации галактик и скоплений галактик из горячего газа. Празвезды дают не только тепло и температуру, но и вызывают крупномасштабные возмущения. Мы не будем здесь обсуждать детали. В результате возникают большие облака — протогалактики или протоскопления. В итоге многочисленных работ уже известно, что дальнейшая эволюция горячих плотных газовых облаков как результат тепловых неустойчивостей даст образование галактик и обычное звездное население в них. Возможно, что большая часть вещества (90%)

еще и сейчас пребывает в форме ионизованного горячего межгалактического газа, поскольку космическая средняя плотность ограничена лишь $\rho < 4 \cdot 10^{-29}$, а плотность вещества в галактиках, усредненная по всему пространству, не превышает 10^{-30} г/см.

Очевидно, что эта картина не есть последовательный вывод, основанный только на фундаментальных принципах. Очень важная функция $\varphi(M^D, t^*)$, характеризующая начальные возмущения, была взята произвольно, чтобы привести в соответствие гипотезу с наблюдаемыми явлениями во Вселенной.

Если φ будет взято больше, то мы придем к выводу, что празвезды родились раньше, когда окружающий газ имел большую плотность и охлаждался быстрее. Тогда первые празвезды даже в большом числе не дали бы достаточно нагрева для прекращения дальнейшего образования празвезд: слишком много материи должно было бы пройти через эту стадию. Возмущения в большем масштабе, возникшие на ранней стадии, должны привести к возникновению большого числа плотных тел. Мы не наблюдаем такие тела или системы, следовательно, ранние празвезды невероятны.

Если взять $\varphi(M^D, t^*)$ меньше выбранного, то образование празвезд задерживается и нехватает времени для дальнейшей части эволюции, приводящей к галактикам и нормальным звездам.

Значение начального возмущения $\varphi(M^D, t^*)$ взято ad hoc. Что же взято из основной теории и наблюдений фона с $T=3^\circ$? Это:

1) Факт, что вплоть до момента $t=t^*$ в ионизованной плазме во всем интервале от малых масс до линии M_1^D на рис. 99 функция $\varphi(M)$ не растет. Все виды движения эффективно замедляются взаимодействием с излучением.

2) Критическое значение $M_2^D = 5 \cdot 10^5 M_\odot$ для нейтральной материи подсчитывается из джинсовской теории гравитационной неустойчивости и из уравнения Саха, используемого для определения момента появления нейтрального водорода *).

В качестве основного недостатка приведенной картины следует указать на то, что ясного представления об условиях, дающих рождение квазаров вместо нормальных галактик, нет. Возможно, эти условия связаны с тем, что квазар возникает на месте вспышки празвезды, где вещество обогащено тяжелыми элементами. Это приводит, по механизму тепловой неустойчивости, к возникновению компактного звездного скопления. Эволюция скопления в облако газа, может быть, и представляет собой образование квазара.

) Возможно, при образовании галактик важную роль играло затухание возмущений с $\lambda < \lambda_c$ до $t=t^$; $M_c(t^*) \approx \rho \lambda_c(t^*)$ — порядка массы скопления (Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1967 е), Сайлк (1967)).

Важный довод в пользу этого предположения дает исследование химического состава вещества квазаров. В квазарах обнаруживаются линии углерода, магния, серы и других элементов. И. С. Шкловский настойчиво подчеркивает сходство состава квазаров со средним составом вещества в самых обыкновенных галактиках, состоящих из звезд, например, в нашей галактике.

Рассматривая теорию сверхмассивных звезд, вначале статических, а потом вращающихся и турбулентных, мы видим, что при большой массе граница области существования звезды соответствует низкой температуре и плотности. Лишь с известными натяжками удастся получить при массе $M=10^7 M_{\odot}$ или $10^8 M_{\odot}$ условия, достаточные для протекания ядерной реакции горения водорода.

Образование тяжелых элементов из водорода и гелия, требующее более высокой температуры и плотности, вероятно, исключено в условиях сверхмассивной звезды. Наличие элементов тяжелее гелия с определенностью говорит о том, что вещество прошло эволюцию в составе звезд обычного типа. Однако скопление звезд, которое с течением времени превращается в квазар, не является обычным скоплением! В частности, как отмечали многие авторы, квазары не входят в состав скоплений галактик. Специальные исследования показали, что мы не видим скоплений вокруг ближайших квазаров потому, что их нет в действительности, а не потому, что на столь больших расстояниях трудно наблюдать галактики, которые в сотни раз слабее квазаров. Если квазар находится на пределе возможности наблюдения ($m \geq 20$ величины), то, действительно, галактики, которые могли бы ему сопутствовать, лежат за пределами наблюдаемости. Однако это объяснение неприменимо к таким квазарам, как 3C 273 ($m=12,7$), которые также не имеют сопутствующих галактик и не входят в состав скоплений.

Можно предположить, что галактики, превращающиеся в квазары, являются весьма плотными. Их эволюция протекает вначале медленно, а затем, по достижении определенной критической плотности, резко ускоряется. Столкновения звезд приводят к превращению скопления в облако плазмы.

До этого материнская галактика находится в латентном состоянии и не воспринимается как квазар. Так можно согласовать предположение о том, что материнские скопления являются древними, тогда как наблюдаемые квазары вспыхивают в разное время, в том числе и в самую близкую к нам эпоху.

Вместе с тем надо подчеркнуть, что наблюдаемые квазары не есть скопления в стадии столкновений звезд, как это иногда предполагалось: флуктуации яркости квазаров носят закономерный характер с явной периодичностью, а не статистический

характер! Такой характер кривой свидетельствует о том, что мы имеем дело с единой газовой массой. Количественно этот аргумент развивается Озерным и Чертопрудом (1966, 1967).

Превращение тесного скопления звезд в газовую массу нуждается в подробном исследовании. Еще раз подчеркиваем сугубую предварительность всей картины эволюции после $t = 10^6$ лет.

§ 7. Спектр возмущений

Полное теоретическое решение задачи об эволюции Метагалактики, образовании звезд, галактик, скоплений, квазаров, об остающемся количестве межгалактического газа требует знания величин двух разнородных типов:

1) начальных возмущений плотности, скорости, энтропии, метрики на ранний момент t_1 и

2) закона нарастания возмущений в период от t_1 до сегодняшнего дня.

Сведения второго типа, относящиеся к закону роста возмущений, были рассмотрены в § 3 и 4, и особенно, применительно к горячей модели, в § 5.

Однако, излагая общую картину эволюции в § 6, мы не использовали какие-либо теоретические оценки начальных возмущений. Наоборот, в сущности, из § 6 следует, какими должны быть возмущения для того, чтобы дать наблюдаемую в настоящее время картину. Можно ли получить сведения первого типа из основных принципов теории? До последнего времени в литературе имелись лишь первые попытки такого рода, которые нельзя считать удовлетворительными.

Например, в определенный, произвольно выбранный момент t_1 (скажем, при плотности, равной ядерной) принимали, что флуктуации плотности достигают «термодинамической величины»: в объеме, содержащем в среднем N атомов, отклонение от среднего равно $\Delta N = \sqrt{N}$ (Лифшиц (1946)). Такое предположение, кажущееся правдоподобным, в действительности осуществилось бы лишь в том случае, если до момента t_1 выключить расширение и выключить тяготение. В этом случае однородное в среднем распределение плотности стало бы действительно равновесным и за достаточное время из любого распределения выработалось бы распределение с законом флуктуаций $\Delta N = \sqrt{N}$ *).

*) Учет взаимодействия частиц меняет этот закон несущественно — дает только численный коэффициент порядка отношения скорости звука в идеальном газе данной температуры к фактической скорости звука с учетом взаимодействия.

Ясно, что выключение тяготения не соответствует физической реальности.

В настоящее время после экспериментального подтверждения горячей модели только в качестве курьеза можно упомянуть рассмотрение строго холодной модели, в которой вещество при плотности порядка $0,1 \text{ г/см}^3$ представляет собой твердый водород, в ходе расширения разрывающийся на отдельные глыбы (Зельдович (1962)).

Можно предположить, что будущая теория начнет рассмотрение с момента сингулярности ($\rho = \infty$ или $\rho = 10^{93} \text{ г/см}^3$) и примет за основу предположение о строгой однородности этого состояния.

Линейная теория нарастания возмущений характерна для макроскопической теории. В действительности, те же процессы, которые замедляют рост возмущений (вязкость, теплопроводность, не мгновенное установление равновесия, обуславливающее так называемую вторую вязкость), вызывают и появление возмущений.

Уравнение для амплитуды возмущений, которое в макроскопической теории имеет вид

$$\frac{d^2 a^*}{dt^2} = (-f^2 + g^2)a^* - \gamma \frac{da^*}{dt},$$

где член $\gamma da^*/dt$ зависит от диссипативных сил (вязкости и т. п.), $g^2 a^*$ описывает влияние гравитации. С учетом флуктуаций надо писать

$$\frac{d^2 a^*}{dt^2} = (-f^2 + g^2)a^* - \gamma \frac{da^*}{dt} + F, \quad (19.7.1)$$

где F есть случайная сила, не зависящая от a^* . Статистическая физика не утверждает, что фактическая амплитуда всегда соответствует равновесной энергии, равной kT на каждую колебательную степень свободы *),

$$r \overline{(a^*)^2} = kT. \quad (19.7.2)$$

Здесь k — постоянная Больцмана.

Однако если бы не было гравитационного усиления возмущений и влияния общего расширения на возмущения, то формула (19.7.2) должна была бы иметь место для стационарного состояния. Для этого нужно

$$\overline{F^2} = \gamma \frac{kT}{r} f^3.$$

Такова общая идея (восходящая к теории броуновского движения, созданной Эйнштейном в 1905 г.) связи между случайными

) Это привело бы как раз к $\Delta \bar{N} \approx \sqrt{\bar{N}}$, r — зависит от определения a^ .

силами F , создающими флуктуации, и макроскопическими величинами, входящими в γ .

Для нашей задачи интегрирование уравнения с учетом g^2 и с зависящими от времени r , γ , F , f , g должно дать $a(t)$.

Наряду с флуктуациями, зависящими от температуры, можно рассматривать флуктуации квантовомеханические. Для холодной модели это сделал А. Д. Сахаров (1965).

В обоих случаях цель заключается в том, чтобы избавиться от произвола в выборе начального момента рассмотрения. Отметим, что с учетом случайных сил, вызывающих флуктуации (типа F в уравнении (19.7.1), тепловых или квантовомеханических), уже не имеет места утверждение Лифшица о том, что возмущения метрики асимптотически не растут.

Идя по намеченному выше пути, возможно, удастся, считая сингулярное состояние полностью однородным и рассматривая возникновение и рост флуктуаций, без всякого произвола получить наблюдаемую сейчас картину неоднородностей во Вселенной.

Возможно, что итогом исследований, находящихся в настоящее время на начальной стадии, явится обратное — отказ от предположения об однородности сингулярного состояния*).

Если стать на такую точку зрения при решении проблемы, то меняется сама постановка задачи, которую можно формулировать уже так: мы хотим определить то начальное распределение барионов в плазме, которое нужно заранее «заложить» в сингулярное состояние, чтобы оно могло дать затем в ходе роста все наблюдаемые галактики и другие объекты.

Возможно, что начальный (для времени расширения Вселенной, т. е. для $t > 0$) спектр возмущений даст рассмотрение периода до сингулярности, $t < 0$; см. об этом периоде гл. 20.

Остановимся в заключение на некоторых общих свойствах спектра возмущений. Представим себе «событие» или «единичную флуктуацию», происшедшие в определенной точке пространства. Таким «событием» может быть, например, какое-то превращение элементарных частиц, скажем, $\Lambda = p + \pi^-$. Рассматривая такое событие, мы не вводим что-то принципиально новое в наших рассуждениях. В веществе, в котором идут обратимые реакции, связанные с превращением протонов в лямбда-частицы и обратно, вязкость зависит от скорости этого превращения. Соответственно, в случайной силе F (см. выше) есть вклад от таких процессов.

*) Наряду с развитием возмущений на фоне однородной изотропной горячей модели следует рассмотреть и анизотропную однородную модель. См. об этом гл. 21.

Общим свойством событий является тот факт, что за время Δt после события изменения давления, общей плотности (ϵ/c^2), плотности барионов n , скорости и т. д., вызванные событием, не выходят за пределы сферы радиуса $a_{зв}\Delta t$, где $a_{зв}$ — скорость распространения возмущения, в данном случае скорость звука.

Следовательно, внутри этой сферы средняя плотность ρ и плотность барионов n сохраняется.

Распределение возмущения $\delta\rho$, δn внутри шара обязано быть знакопеременным. Отсюда следует, что фурье-компоненты спектра возмущений плотности должны, как функция волнового вектора k , быть пропорциональны k^2 , т. е. убывать с увеличением длины волны $\lambda=2\pi/k$ как λ^{-2} .

В самом деле,

$$a_k^* = \int \delta\rho e^{ikr} d^3r.$$

При малом k разлагаем $e^{ikr} = 1 + ikr - \frac{k^2 r^2}{2} + \dots$

$$a_k^* = \int \delta\rho d^3r + ik \int \delta\rho r d^3r - \frac{k^2}{2} \int \delta\rho r^2 d^3r.$$

Первые два интеграла обращаются в нуль в силу свойств внутри шара (в сущности, по законам сохранения энергии и инерции центра тяжести). Этот вывод был подчеркнут (применительно к холодной модели) в обзоре Зельдовича (1965). Быстрое убывание a_k при малых k уменьшает вероятность обособления больших масс. Зависимость статистических свойств неоднородности Метагалактики от фурье-спектра плотности специально рассматривается в § 8 гл. 17.

Что нового вносит в эту картину горячая модель? Основной факт заключается в огромной величине пути, который может пройти возмущение в силу большой скорости звука.

В холодной модели $\int_0^{t_0} a_{зв} dt$ соответствовал объему, который заключает в себе меньше одной солнечной массы. Следовательно, закон $a_k \sim k^2$ относился к $k < k_0$, $k_0 \sim \sqrt[3]{\rho/M_\odot}$.

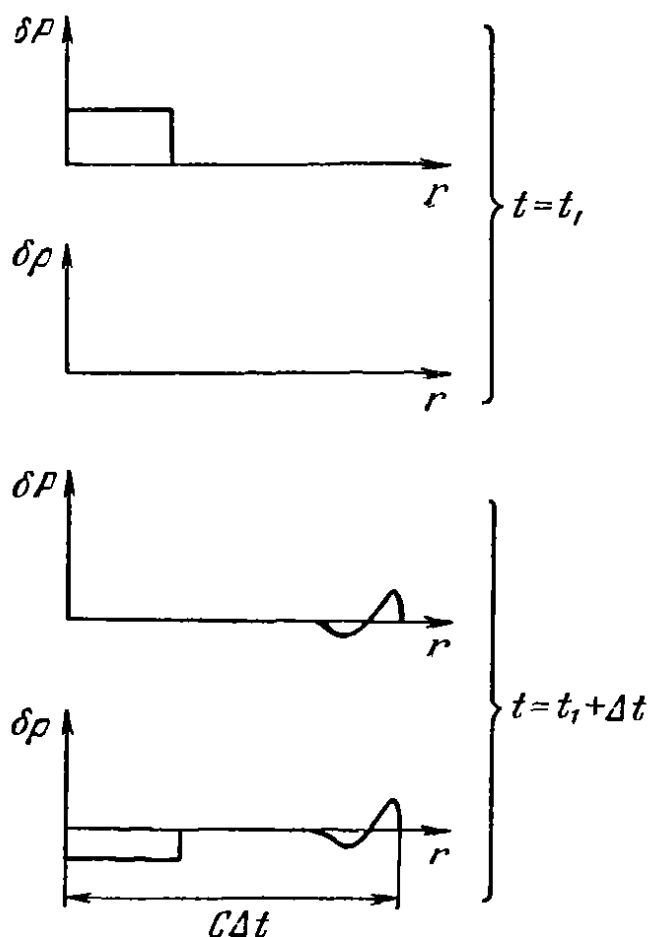
В горячей модели $\int_0^{t_0} a_{зв} dt$ соответствует объему, заключающему в себе $\sim 10^{19} M_\odot$. Эта величина соответствует абсциссе правого края области устойчивости на рис. 95. Следовательно, закон $a_k \sim k^2$ относится лишь к области $k < k'_0$,

$$k'_0 < \left(\frac{\rho}{10^{19} M_\odot} \right)^{1/3}.$$

Как мы сейчас покажем, a_k постоянно и не зависит от k в весьма широкой и наиболее важной области

$$k_1 > k > k'_0.$$

Здесь $k_1 = \sqrt{\rho/M'}$, где M' — область, на которой возмущение сглаживается диффузией и теплопроводностью, $M' \sim M_\odot$. В самом деле, рассмотрим возмущение, состоящее в локальном увеличении энтропии: так как нет



закон сохранения энтропии, то в результате «события» энтропия может увеличиться в окрестности какой-то точки без того, чтобы рядом энтропия должна была уменьшиться. Плотность в момент события пусть остается неизменной, $\delta\rho=0$. Увеличение энтропии при постоянной плотности означает рост давления.

Вслед за этим (в простейшей задаче без учета гравитации) последует выравнивание давления; от места, где произошло событие, уйдет сферическая акустическая волна (см. рис. 100). В масштабе меньшем, чем $a_{зв}\Delta t$, можно говорить о некомпенсированном изменении плотности там, где произошло событие, сопровождавшееся ростом энтропии. Некомпенсированному изменению плотности соответствует отличный от нуля первый член разложения, т. е. a_k , не зависящее от k .

Рис. 100. Возникновение флуктуаций плотности вследствие флуктуаций энтропии. В момент t_1 есть флуктуация давления, нет флуктуации плотности. В момент $t_1 + \Delta t$ флуктуация давления распространяется в виде звуковой волны и на месте возникновения флуктуации энтропии есть флуктуация плотности.

Более формально можно сказать, что двум типам возмущений — энтропийному (амплитуда σ) и адиабатическому (амплитуда π) соответствуют следующие выражения возмущенных величин:

$$\delta S_k = \sigma_k, \quad \delta p_k = \pi_k, \quad \delta\rho_k = \alpha\sigma_k + \beta\pi_k.$$

Поэтому если в начальный момент $\delta S \neq 0$, $\delta\rho = 0$, то это означает лишь, что в выражении $\delta\rho_k$ два члена компенсируют друг

друга. Но энтропийное и адиабатическое возмущения по-разному зависят от времени:

$$\sigma_k = \text{const}, \quad \pi_k = \text{const} e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ka_{\text{зв}}.$$

Следовательно,

$$\delta\rho_k = \alpha\sigma_k [1 - e^{-ika_{\text{зв}}(t-t_1)}].$$

Это выражение имеет все свойства, которые мы доказываем. Действительно, при $t=t_1$ $\delta\rho_k=0$, при большом $t-t_1$ это выражение не зависит от k в той области, где σ_k постоянно и $k > \frac{1}{a_{\text{зв}}(t-t_1)}$. Лишь при меньших k выражение пропорционально k^2 . Чтобы доказать это, следует более аккуратно провести расчет, учитывая условие $t=0$, $\delta n=0$ и рассматривая волны всех направлений, т. е. учитывая, что k , r суть векторы.

Читатель легко проделает такой расчет. Ситуация качественно не изменяется и в расширяющемся веществе с учетом гравитации: вместо закона $e^{i\omega t}$ адиабатические возмущения ведут себя иначе, но нам достаточно того факта, что они ведут себя не так, как энтропийные, и их первоначальная взаимная компенсация с течением времени исчезает.

Мы получили вывод, что при больших k фурье-образ $\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_k$ не зависит от k . Это, конечно, не означает, что величина $\varphi(M) = \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2$, определенная в § 6, постоянна от малых масс вплоть до масс в масштабе $a_{\text{зв}}(t-t_1)$. Связь между $\varphi(M)$ и $\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_k$ дается выражением

$$\overline{\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2} = \int \overline{\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_k^2} \psi(k) k^2 dk,$$

где ψ — взвешивающая функция, зависящая от объема усреднения. При усреднении по шаровым объемам радиуса R $\psi(k) = \frac{Y_{3/2}^2(kR)}{(kR)^3}$, $Y_{3/2}$ — полуцелая функция Бесселя.

Подробнее об этом см. Дорошкевич (1967). Таким образом, и при постоянном $\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_k$ функция $\varphi(M)$ будет убывающей с ростом M .

ГЛАВА 20

ПРОХОЖДЕНИЕ ЧЕРЕЗ СИНГУЛЯРНОЕ СОСТОЯНИЕ И ЭПОХА ДО РАСШИРЕНИЯ МЕТАГАЛАКТИКИ

§ 1. Неоднородность плотности на раннем дозвездном этапе расширения: оценка верхнего предела неоднородности

Вернемся теперь к вопросу о том, возможна ли сильная неоднородность плотности в начале расширения (Пиблс (1965), Зельдович, Новиков (1966b)).

Значительная неоднородность в распределении плотности на раннем этапе расширения горячей Вселенной может привести к обособлению и гравитационному самозамыканию отдельных масс.

В горячей модели Вселенной на ранней стадии плотность излучения (а также пар — частиц и античастиц всех сортов) гигантски превосходит плотность барионов. Поэтому массы, обособившиеся на ранней стадии, представляли бы собой нечто вроде так называемых геонов Уилера*), состоящих в основном из квантов и пар, однако не статических, а коллапсирующих и застывших (в смысле замедления времени в ОТО) с точки зрения внешнего наблюдателя**).

В процессе коллапса всякий выход излучения наружу стремится к нулю и поэтому асимптотически масса коллапсирующего тела (измеренная внешним наблюдателем) лишь на несколько процентов меньше суммы масс частиц, составляющих это тело. Аккреция вещества извне, особенно сильная в горячей модели, может только увеличить массу. Предположим, что доля α всего вещества на ранней стадии подверглась коллапсу.

*) Геонами Уилер назвал гипотетические, статические объекты, в которых световая энергия удерживается собственным гравитационным полем. Такие объекты, как он показал, неустойчивы.

**) В § 4 гл. 19 мы отметили, что возмущения метрики $\delta g_{\mu}^{\nu}/g_{\mu}^{\nu}$ в ходе расширения не меняются. Можно показать, что для обособления тел на стадии, когда $\rho = \epsilon/3$, возмущения метрики $\delta g_{\mu}^{\nu}/g_{\mu}^{\nu}$ в начальном состоянии должны быть уже не малы абсолютно и, следовательно, уже нельзя говорить о малых возмущениях.

Пусть это произошло в период, когда плотность массы покоя барионов составляла долю β полной плотности. Обозначим через a (фридмановский) радиус Вселенной в момент t коллапса рассматриваемых масс и через a_0 — в настоящее время*). Тогда $\rho_b(t) = \beta\rho(t)$; $\rho_{\text{col}}(t) = \alpha\rho(t)$, $\rho'_b(t) = \beta(1 - \alpha)\rho(t)$, где ρ_b — средняя плотность массы покоя барионов, ρ_{col} — плотность коллапсировавших масс, усредненная по всему объему, $\bar{\rho}$ — средняя плотность всех видов материи, ρ'_b — плотность массы покоя барионов в неколлапсировавшей части вещества. Далее, для настоящего времени (t_*) получим

$$\rho_{\text{col}}(t_*) = \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \rho_{\text{col}}(t), \quad \rho'_b(t_*) = \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \rho'_b(t),$$

$$\bar{\rho}(t_*) = \rho_{\text{col}}(t_*) + \rho'_b(t_*).$$

Здесь существенно, что коллапсировавшие тела не уменьшают свою массу в ходе расширения, — в этом их отличие от равномерно распределенного горячего вещества, состоящего из смеси излучения, пар и барионов, и имеющего высокое давление.

Поэтому $\rho_{\text{col}}/\rho'_b = \text{const}$, т. е. не уменьшается по мере расширения, тогда как в однородном веществе $\bar{\rho}/\rho'_b$ стремится к единице. В последнем равенстве использовано, что в настоящее время плотность излучения ($\sim 10^{-33}$ г/см³) значительно меньше плотности барионов. Итак, для t_*

$$\frac{\rho_{\text{col}}}{\rho'_b} = \frac{\alpha}{\beta(1 - \alpha)}.$$

В настоящее время из космологических данных $\bar{\rho} < 4 \cdot 10^{-29}$ г/см³. Для плотности обычных форм материи имеем $\rho'_b > 5 \cdot 10^{-31}$ г/см³. Эта оценка относится к звездам, возможно, что есть значительно большая плотность межгалактического ионизованного газа. Окончательно получим

$$\frac{\alpha}{\beta(1 - \alpha)} = \frac{\bar{\rho} - \rho'_b}{\rho'_b} < 160.$$

При малых β эта оценка весьма сильно ограничивает α . В самом деле, например, для образования при росте возмущений

*) Для нас безразлично, является ли Вселенная замкнутой, плоской или открытой (гиперболической); ниже входят только отношения a/a_0 , которые можно заменить отношением расстояний между любой далекой парой галактик без пекулярных скоростей.

коллапсировавших тел с массой порядка $1M_{\odot}$ нужно, чтобы коллапс происходил при

$$\bar{\rho}(t) \sim \frac{c^6}{G^3 M^2} = 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2} = 2 \cdot 10^{16} \text{ г/см}^3.$$

Зависимость β от плотности, найденная по значению энтропии, соответствующему t_* , $T=3^\circ \text{ К}$, $\rho_b=10^{-29} \text{ г/см}^3$, имеет вид (при $\bar{\rho} > 10^{-16} \text{ г/см}^3$):

$$\beta^{-1} = 10^{-4} \left(\frac{\bar{\rho}}{10^{-33}} \right)^{1/4} = 2 \cdot 10^4 \bar{\rho}^{-1/4}.$$

Для тел с $M=1M_{\odot}$ получим $\beta^{-1} \sim 2 \cdot 10^8$, $\alpha < 10^{-6}$. При $M=m \cdot M_{\odot}$ соответственно $\alpha < 10^{-6} \sqrt{m}$. Этим завершается доказательство того, что заметная доля массы не могла коллапсировать на ранней стадии, иначе мы вступили бы в противоречие с наблюдениями. Можно сделать следующий шаг и получить утверждение относительно спектра адиабатических флуктуаций на ранней стадии. Длину волны флуктуации l будем характеризовать величиной m — массой покоя барнионов в объеме l^3

$$m = \rho_b l^3 = \bar{\rho} l^3.$$

Подставляя

$$\beta^{-1} = 2 \cdot 10^4 \bar{\rho}^{-1/4}, \quad \bar{\rho} = \frac{3}{32\pi G t^2} = \frac{5 \cdot 10^5}{t^2},$$

получим

$$l = m^{1/3} t^{1/2}.$$

Следовательно, длина волны l меняется $\sim t^{1/2}$, т. е. $\sim a$ на стадии $P=\epsilon/3$, как это и должно быть.

Как известно (см. гл. 19), малые возмущения с фиксированным m растут по степенному закону

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim t^k, \quad t < t_{\text{кр}} \quad \left(k = \frac{1}{2} \right)$$

вплоть до момента t_1 , причем по порядку величины

$$t_1 = \frac{l(t_{\text{кр}})}{c} = \frac{m^{1/3} t_{\text{кр}}^{1/2}}{c}, \quad t_{\text{кр}} = \frac{m^{2/3}}{c^2}.$$

Если к моменту $t_{\text{кр}}$ возмущение плотности заметно меньше единицы, $\left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right) < 1$, то дальнейший рост его прекращается и сменяется затухающими колебаниями.

Если же вычисленное по линейной теории возмущение к моменту t_1 порядка или больше единицы, $\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right) \geq 1$, то это значит, что произошел необратимый коллапс; в ходе расширения обособившаяся масса сохраняется.

Для того чтобы коллапса не было, нужно, чтобы на ранний момент было выполнено условие

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{m,t} < \left(\frac{t}{t_{кр}}\right)^k = t^k \left(\frac{c^2}{m^{2/3}}\right)^k = t^{1/2} cm^{-1/3}.$$

Таким образом, из очень общих соображений дается верхний предел степени неоднородности на раннем этапе расширения.

§ 2. О возможности существования сверхплотных тел на ранних стадиях расширения горячей модели

В рамках «холодной» космологической модели было выдвинуто предположение о возможности существования задержавшихся в общем космологическом расширении отдельных сгустков (ядер) (Новиков (1964г), Неeman (1965)). Суть гипотезы заключалась в следующем. Предположим, что в начальный момент космологического расширения (момент бесконечной плотности) начало расширяться не все вещество Вселенной. Некоторые области (ядра) задержались и по мировому времени некоторый период не расширяются. Эта задержка по времени может быть произвольной длительности и для разных ядер разная.

Затем происходит расширение этих ядер. Их вещество выходит из-под гравитационного радиуса (за конечное от начала расширения ядра время внешнего наблюдателя; см. § 12 гл. 3) и энергия вещества путем взаимодействия с падающим извне веществом переходит в энергию космических лучей и излучения. Возможно расширение не сразу всего задержавшегося вещества, а последовательно отдельных его оболочек, т. е. возможны повторные взрывы и непрерывное истечение вещества*). Падающее извне вещество может быть выброшено раньше ядром со скоростью меньше параболической.

Можно пытаться связать эти явления с выделением энергии в квазарах или во взрывах ядер галактик. Такая модель конкре-

*) Гипотеза не дает ответа на вопрос о причине задержки и повторных взрывов, они должны быть «заложены» в начальных условиях решения. Ситуация здесь почти такая же, как в космологическом решении, параметры которого задаются начальными условиями, а не следуют из теории.

тизирует идею сверхплотных D -тел, давно развиваемую В. А. Амбарцумяном (1961, 1964).

Вряд ли гипотеза задержавшихся ядер имеет отношение к квазарам, которые, по-видимому, являются стационарными объектами. Тем не менее принципиальная возможность огромных неоднородностей при прохождении через сингулярное состояние весьма интересна. Из изложенного в § 4 гл. 19 ясно, как можно построить модель задержавшегося ядра: надо задать момент начала расширения внутреннего шара намного более поздним, чем момент начала расширения окружающего вещества. Однако такая модель задержавшегося ядра будет точным решением лишь для вещества без давления. В горячей модели неизбежна аккреция излучения задержавшимися ядрами. Как мы сейчас покажем, эта аккреция может оказаться катастрофически большой. Все оценки будут относиться не только к задержавшимся ядрам, находящимся под своими сферами Шварцшильда в момент $t_0=0$, но и к любым телам, сколлапсировавшим в достаточно ранний момент t_0 .

Стационарную аккрецию релятивистского газа на гравитирующий центр массы M можно рассматривать как движение невзаимодействующих частиц (если свободный пробег больше r_g) либо как движение сплошной среды. Оба подхода дают одинаковое выражение по порядку величины для изменения массы тела. Приводим формулу для невзаимодействующих частиц (см. § 10 гл. 3):

$$\frac{dM}{dt} = \frac{27}{4} \pi r_g^2 c \rho_r. \quad (20.2.1)$$

Подставляем $\rho_r = 3/32\pi G t^2$, что имеет место в горячей фридмановской модели на стадии $\rho_r > \rho_b$, и интегрируем в пределах от $t=t_0$ до момента $t=t_1$, когда $\rho_r = \rho_b \approx 10^{-17} \text{ г см}^{-3}$, $t \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ сек}$ (в последующем периоде ρ_r падает быстрее, чем $t^{-3/2}$; можно учесть вклад и от этого периода, но это уже не меняет существа дела). Получаем

$$M_1 = \frac{M_0}{1 - \frac{81}{32} \frac{GM_0}{c^3} \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_1} \right)}. \quad (20.2.2)$$

Формула (20.2.2) может давать бесконечные значения M_1 при

$$t_0 \leq \left(\frac{81}{32} \frac{GM_0}{c^3} \right). \quad (20.2.3)$$

В известном смысле эта бесконечность формальна, так как выражение (20.2.2) применимо только для стационарного по-

тока, и ясно, что масса ядра под сферой Шварцшильда не может увеличиться за счет аккреции больше чем на величину массы, которую успеет пройти к моменту t_1 со скоростью звука (примерно равной скорости света) волна возмущения, начиная от момента коллапса ядра или от $t=0$, если ядро существовало с начала расширения.

Таким образом, во-первых, M_1 должно быть заведомо меньше массы излучения в Метагалактике до оптического горизонта в момент t_1 , т. е. $M_1 \leq 10^{16} M_\odot$ (или даже больше, если учесть период после t_1). Этот предел весьма велик; захваченное излучение не принимает участия в космологическом расширении (см. предыдущий параграф).

Во-вторых, если ядро существовало с начала расширения, то до момента, пока оптический горизонт не охватит массу окружающей материи порядка M_0 , масса ядра не вырастет заметно; именно этот момент надо подставлять в (20.2.2) в качестве t_0 . Такой момент определяется соотношением

$$t_c = \frac{GM_0}{c^3}. \quad (20.2.4)$$

Он соответствует средней плотности космологической модели, равной характерной плотности гравитационного самозамыкания тела массы M_0 :

$$\rho_c = \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi r_g^3}.$$

Конечно, такие соображения дают лишь порядок величины t_0 . Из формул (20.2.3) и (20.2.4) видно (считаем $t_1 \gg t_0$), что t_c как раз порядка критического значения t_0 , дающего формальную бесконечность, а точнее, приводящего к аккреции массы излучения до современного оптического горизонта.

Таким образом, ответ существенно зависит от численного коэффициента в точном нестационарном выражении для $\frac{dM}{dt}$. Если к моменту, когда средняя плотность равна плотности гравитационного самозамыкания

$$\rho_c = \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi r_g^3},$$

выражение для $\frac{dM}{dt}$ отличается от (20.2.1) множителем, заметно меньшим единицы (точнее, $< 32/81$), то увеличение массы задержавшихся ядер вследствие аккреции излучения порядка

массы самих ядер*), в противном случае захваченная масса стремится к катастрофически большой $\sim 10^{16} M_{\odot}$. Величина множителя должна быть выяснена детальным расчетом (и может зависеть от конкретных предположений). Может оказаться, что гипотеза задержавшихся в расширении ядер, существовавших и на ранних этапах расширения, противоречит наблюдениям. Наконец, отметим, что если гравитационный коллапс какого-либо тела происходит в момент, когда средняя плотность излучения меньше плотности гравитационного самозамыкания тела, то аккреция излучения уже несущественна.

§ 3. Что было до расширения Метагалактики?

Рассмотрение эволюции малых флуктуаций в расширяющемся мире и содержание двух предыдущих параграфов заставляет думать, что представление о сильной неоднородности на ранних этапах расширения противоречит наблюдениям. Это, конечно, не является пока строго доказанным утверждением, но мы станем на такую точку зрения и посмотрим, к каким следствиям она ведет.

Продолжая решение для расширяющейся модели в прошлое, вероятно, можно утверждать, что расширение началось с плотности не меньше $\sim 10^{93} \text{ г/см}^3$, когда квантовые эффекты гравитации существенны и общая теория относительности уже неприменима.

Возможны две точки зрения на то, что было до этого. Во-первых, возможно, будущая теория сверхплотного состояния (которой пока нет) покажет, что вещество никогда раньше не находилось в состоянии малой плотности. Тогда исследование состояния «до» (т. е. до начала расширения) лежит пока за рамками современной физики, поскольку соответствующей теории сверхплотного состояния нет.

В будущей теории такого состояния (см. по этому поводу работу Сахарова (1965)), возможно, станут неприменимы многие привычные нам понятия, в том числе понятие непрерывного метрического пространства — времени. Тогда и сама постановка вопроса может измениться, ибо понятия «до» и «после» станут неприменимы. В таком случае параметры, характеризующие расширяющийся мир, такие, как скорость расширения, высокое значение удельной энтропии (горячий мир) и т. д., надо рассматривать в современной теории как начальные условия, а это

*) В этом случае интересно исследование наблюдательных эффектов, связанных со столкновением расширяющихся ядер с падающим извне релятивистским газом.

значит, что они никак не объясняются. Такое положение вряд ли удовлетворяет любознательность исследователей.

Во-вторых, возможно, что перед расширением было сжатие до плотности $\rho_g \approx 10^{93} \text{ г/см}^3$, сменившееся расширением*). Конкретная физика процессов при $\rho \approx 10^{93} \text{ г/см}^3$ неизвестна, неизвестен, в частности, и процесс перехода от сжатия к расширению, но необходимо потребовать, чтобы в двух фиксированных состояниях при меньшей плотности соответственно «до» и «после» сингулярного состояния выполнялись законы сохранения энергии-импульса, барионного числа, энтропии (последнее в том случае, если при $\rho \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$ нет сильного роста S). Ситуация здесь вполне аналогична физике элементарных частиц, где, не описывая самого процесса взаимодействия при сближении, можно, исходя из общих законов, описать состояние до и после столкновения (см. по этому поводу книгу Гаррисона, Торна, Вакано, Уилера (1965)).

Такая точка зрения встречается со многими трудностями. Прежде всего сжатие однородного мира неустойчиво и неизбежно растут неоднородности, которые вблизи сингулярного состояния становятся большими. Выравниваются ли они в сингулярном состоянии? Если нет, то мы сталкиваемся с трудностью, указанной в начале параграфа. Если эту трудность можно преодолеть, то возникают вопросы о составе вещества на стадии сжатия, его распределении и многие другие. Рассмотрение этих вопросов должно опираться на следующие предположения:

- 1) применимость к состоянию «до» известных законов физики,
- 2) наблюдаемые свойства мира должны быть следствием состояния до начала расширения.

В предположении о сжатии мира в прошлом обнадеживающим является тот факт, что при большой энтропии автоматически, без добавочных предположений, решается вопрос о химическом составе: как было показано в гл. 18, при большой плотности полностью стирается, «забывается» старый химический состав и после окончания ядерных реакций на фазе расширения получается водород и гелий.

Одним из удивительных свойств наблюдаемого мира является высокое значение удельной энтропии (горячий мир) и связанная с этим почти полная зарядовая симметрия при больших

*) Как уже отмечалось, в работе Лифшица, Судакова и Халатникова (1962) указывается, что в общем решении ОТО не должно быть сингулярности. Отсюда следовал бы вывод, что достигается конечная максимальная плотность $\rho \neq \rho_g$, зависящая от конкретных условий. Следует напомнить, однако, что, как указано в гл. 14, применимость утверждений работы к рассматриваемой проблеме до сих пор не ясна.

плотностях и температурах и почти полная зарядовая асимметрия при малых плотностях (см. § 5 гл. 18). Рассмотрению этой проблемы посвящается следующий параграф.

§ 4. Зарядовая несимметрия и энтропия горячей Вселенной

Рассмотрим этот вопрос, следуя работе авторов (1966b). Безразмерная удельная энтропия мира в единицах § 5 гл. 8 (отнесенная к одному бариону в системе с постоянной Больцмана $k=1$) составляет около 10^9 . Это значит, что на каждый барион приходится около 10^8 квантов электромагнитного излучения и примерно столько же электронных и мюонных нейтрино (см. § 2 гл. 18).

Отсюда для раннего периода $t < 10^{-6}$ сек (отсчет от момента сингулярности; $t = 10^{-6}$ соответствует $T = 1000$ Мэв, $\rho = 5 \cdot 10^{17}$ г/см³) следует, что на каждый барион приходилось также около 10^8 барион-антибарионных пар. Таким образом, асимптотически при $t \rightarrow 0$ на каждые $N = 100\,000\,000$ барионов приходится $\bar{N} = 99\,999\,999$ антибарионов и примерно такое же количество мезонов и лептонов*). Малая, но сохраняющаяся разность $\Delta = N - \bar{N}$ (состав отнесен к $\Delta = 1$) играет решающую роль для всей последующей эволюции вещества!

Такое почти зарядово-симметричное состояние представляется на первый взгляд весьма неестественным.

Альтернативная гипотеза о полной зарядовой симметрии Вселенной не представляется нам убедительной. Ниже мы попытаемся дать естественное объяснение малой зарядовой несимметрии при большой плотности.

Исключать из рассмотрения период с $t \sim 10^{-6}$ сек, $\rho = 10^{17}$ г/см³ нет оснований, ибо границы применимости общей теории относительности и релятивистской космологии соответствуют $t = 10^{-43}$ сек, $\rho = 10^{93}$ г/см³.

Решение загадки почти зарядово-симметричного состояния возможно, если предполагать, что при $t < 0$ имела место фаза сжатия вещества.

Предположим, что при $t \approx -10^{18}$ сек никаких антибарионов не было, имелись только барионы (нуклоны, обычные ядра, ионы и атомы). Средняя плотность в этот момент 10^{-30} г/см³. Предположим, что к этому моменту в результате ядерных реак-

*) При плотности $\rho > 5 \cdot 10^{17}$ г/см³ размер объема, приходящегося на один барион, меньше комптоновской длины волны и неясно, можно ли говорить об отдельных барионах и антибарионах. Однако надо полагать, что понятие барионного заряда, как сохраняющейся величины, останется в силе. При меньшей плотности, скажем, 10^{15} г/см³, сомнений в применимости понятий барион и антибарион нет, а почти полная зарядовая симметрия уже есть.

ций или гравитационных процессов выделилась энергия порядка $E_1 = 10^{16}$ эрг/г. Если выбрать более поздний момент, когда больше $\bar{\rho}$, то потребная для объяснения высокой удельной энтропии энергия E_1 растет, $E_1 = 10^{28} (-t)^{-2/3} = 10^{26} \rho^{1/3}$. Для сравнения напомним, что масса покоя равна $9 \cdot 10^{20}$ эрг/г, энергия превращения $H \rightarrow He^4 \sim 7 \cdot 10^{18}$ эрг/г, гравитационный потенциал на поверхности Солнца $\sim 2 \cdot 10^{15}$ эрг/г.

В ходе сжатия эта энергия (которая первоначально могла находиться в форме оптических квантов и энергичных нейтрино) должна перейти в равновесные формы; приведенное значение E_1 обеспечивает необходимую энтропию. В этом случае возникновение барион-антибарионных пар и удивительное почти зарядово-симметричное состояние являются уже естественным следствием известных законов физики.

В состоянии большой плотности энтропия не может сильно измениться; это есть естественное обобщение конкретных соображений о том, что при больших, но еще доступных современному анализу плотностях, с увеличением плотности время релаксации всех процессов уменьшается и период, когда плотность много больше ядерной, дает малый вклад в прирост энтропии*). Следовательно, после перехода на фазу расширения имеется та же высокая удельная энтропия и почти полная зарядовая симметрия при большой плотности.

Выше момент выделения данной энергии был произвольно выбран так, чтобы дать значение энтропии S , известное из наблюдений. В принципе, фундаментальная теория сама должна приводить к определенному S . Рассмотрим один пример. Будем считать, что при $t < 0$ вещество было однородным и состояло из частиц с массой порядка массы нуклона m . Пусть при столкновениях эти частицы взаимодействуют с сечением $\sigma = \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \frac{c}{v}$, превращаясь в нуклоны и выделяя энергию mc^2 **). Когда в ходе сжатия плотность вещества была еще мала, частицы практически не сталкивались. В некоторый момент частицы начинают эффективно сталкиваться. Этот момент, очевидно, определяется из условия, что время жизни частицы $\tau = 1/n\sigma v$ должно равняться гидродинамическому $t \approx 1/\sqrt{G\rho}$. В это время выделяется энергия порядка mc^2 на нуклон. Нетрудно подсчитать, какая при этом наберется энтропия. Простой расчет дает

$$S^2 \approx \frac{\hbar}{mc} : \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = l_c : l_g = 10^{-14} \text{ см} : 10^{-33} \text{ см}, \quad S \approx 3 \cdot 10^9.$$

*) Эти соображения относятся только к однородной изотропной модели, о возможности роста энтропии в анизотропной модели см. следующую главу.

**) Представьте себе какое-то нейтральное подобие кварков.

Здесь l_c — комптоновская длина нуклона, l_g — гравитационная единица длины (см. § 3 гл. 18).

Таким образом, фундаментальная для космологии величина S , возможно, выражается через комбинацию атомных и гравитационных величин. От внешне аналогичных формул Эддингтона, Дирака и др. выражение S отличается тем, что S есть локальная величина и выражение получено логическим путем рассмотрения физических процессов в ходе эволюции.

Сомнение вызывают конкретные предположения о выделении энергии и особенно об однородном (в микроскопическом масштабе!) распределении частиц. Мы приводим результат лишь для того, чтобы подчеркнуть, что появилась новая теоретическая задача — вычисления большой безразмерной величины S .

Закон сохранения энергии для Вселенной как целого не ограничивает удельной энергии E_1 , приходящейся на один барион и измеренной локально (подробнее см. следующий параграф). Выделение малой энергии $\Delta E_1 \ll mc^2$ и последующее сжатие приводят к состоянию, в котором $E_1 \gg mc^2$ и, в частности, к рождению пар $N - \bar{N}$ в количестве, превышающем исходное число барионов.

Таким образом, можно предполагать, что Вселенная на 100% зарядово-несимметрична, за исключением кратковременного периода большой плотности, когда она по естественным причинам почти симметрична.

§ 5. Осциллирующая модель и модель однократного сжатия и расширения

По-прежнему будем предполагать, что фазе космологического расширения предшествовало сжатие. Условия сшивания в сингулярном состоянии определяют все параметры модели. В частности, при переходе от сжатия к расширению сохраняется знак перед $c^2/2$ в уравнении для изменения радиуса кривизны (см. гл. 15):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 \pm \frac{c^2}{2}. \quad (20.5.1)$$

Предположим $\rho > \rho_c$ и, следовательно, выбран знак минус. Если плотность на фазе сжатия больше критической, то и на фазе расширения она тоже больше критической. Значит, расширение модели должно смениться сжатием.

Если возможен перескок от сжатия к расширению в момент бесконечной плотности и если $\rho > \rho_c$, то в целом эволюция представляется состоящей из последовательных циклов (рис. 101).

Однородная модель при этом замкнута и закон сохранения нуклонов формулируется элементарно — число N не меняется от одного цикла к другому. Относительно энтропии S было сделано предположение, что S не меняется в момент перескока от одного цикла к другому. Однако она возрастает в ходе каждого цикла. Возрастание энтропии особенно велико, если во время цикла образуются звезды и происходят ядерные реакции.

Будем рассматривать плотность энергии в сопутствующей системе координат. Для определенности в каждом цикле будем сравнивать момент, когда радиус максимален (момент, когда расширение сменяется сжатием). Для этого момента из уравнения (20.5.1) при $\frac{da}{dt} = 0$ найдем

$$\epsilon = \rho c^2 = \frac{3c^4}{8\pi G a_{\max}^2}.$$

Плотность энергии зависит от плотности нуклонов и от удельной энтропии, приходящейся на один нуклон.

Плотность нуклонов есть

$$n = \frac{N}{2\pi^2 a^3}, \quad S = \frac{S_{\text{полн}}}{N},$$

N — полное число нуклонов, $S_{\text{полн}}$ — полная энтропия, $2\pi^2 a^3$ — объем замкнутого мира. Зависимость

$$\epsilon(n, S) = \epsilon\left(\frac{N}{2\pi^2 a^3}, \frac{S_{\text{полн}}}{N}\right)$$

дается уравнением состояния вещества. С определенностью можно сказать только, что $\frac{d\epsilon}{dS} > 0$ и $\frac{\partial \epsilon}{\partial n} \geq \frac{\epsilon}{n}$.

Уравнение

$$\epsilon\left(\frac{N}{2\pi^2 a_{\max}^3}, \frac{S_{\text{полн}}}{N}\right) = \frac{3c^4}{8\pi G a_{\max}^2}$$

служит для определения максимального радиуса в данном цикле по известной энтропии. Из свойств ϵ следует, что в каждом следующем цикле a_{\max} больше, чем в предыдущем (см. рис. 19, в). Больше также и энергия, приходящаяся на один нуклон в момент остановки ($\frac{da}{dt} = 0$):

$$E = \frac{\epsilon}{n} = \text{const } a_{\max}^3 \epsilon = \text{const } a_{\max}.$$

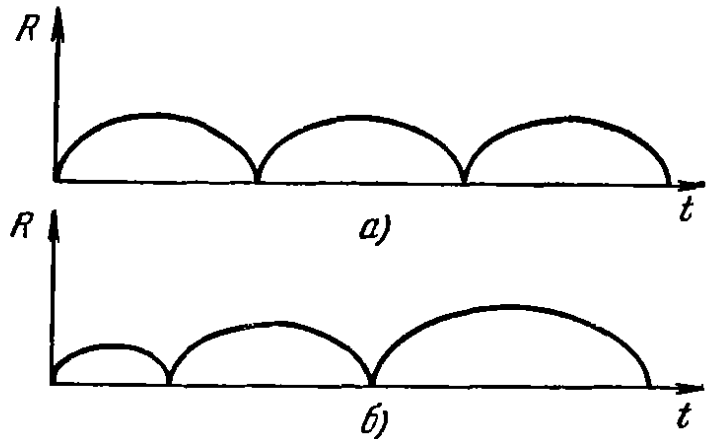


Рис. 101. Осциллирующая модель при $\rho > \rho_c$. а — осцилляции без увеличения энтропии, б — осцилляции с увеличивающейся энтропией.

Вследствие гравитационного взаимодействия увеличение энергии, приходящейся на один нуклон, не противоречит закону сохранения энергии. Полная энергия замкнутого мира всегда тождественно равна нулю.

Таким образом, в осциллирующей модели все время растет амплитуда колебаний. Расчет изменения амплитуды в каждом цикле зависит от изменения энтропии, т. е. от конкретных процессов. Итак, необратимый рост энтропии при учете гравитации и общей теории относительности приводит к картине, весьма непохожей на картину тепловой смерти (постоянная температура всюду и покой), как ее рисовали физики XIX века (см. Дополнение XIII).

Будем продолжать решение в прошлое. Минимальная амплитуда цикла в прошлом определяется соотношением:

$$a = \sqrt{\frac{3c^4}{8\pi G \epsilon_{\text{нукл}}}},$$

где

$$\epsilon_{\text{нукл}} = m_{\text{нукл}} n c^2.$$

Иными словами, минимальная амплитуда определяется суммой масс нуклонов.

Амплитуда, таким образом, всегда конечна и в каждом цикле энтропия изменяется на конечную величину. Так как энтропия сейчас конечна, то в прошлом возможно только конечное число циклов. Предположение о возможности циклов, таким образом, только отодвигает трудность с начальным сингулярным состоянием, но не устраняет ее.

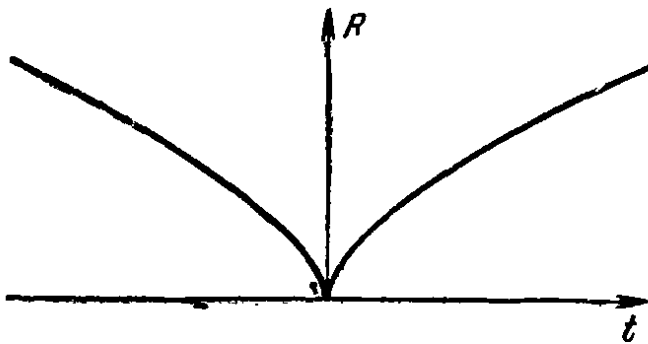


Рис. 102. Модель однократного сжатия и расширения при $\rho < \rho_c$.

Переходим к случаю открытой модели. В открытой модели, в предположении полной однородности число нуклонов N , так же как и полная энтропия $S_{\text{полн}}$ бесконечны. Однако удельная энтропия $S = S_{\text{полн}}/N$ является вполне определенной, конечной величиной и закон сохранения энтропии (с учетом сохранения нуклонов) формулируется как сохранение S . В открытой модели можно построить решение, которое представляет собой а) сжатие при $t < 0$, б) сингулярность (т. е. достижение бесконечной плотности), в момент, который удобно принять за $t = 0$ и, наконец, в) расширение после этого при $t > 0$ (рис. 98, 102).

Если допустить возможность перехода через $t=0$, $\rho=\infty$ или $\rho=10^{93}$ г/см³, то в общем получается решение со следующими свойствами:

1) Решение существует для всех значений времени от $t=-\infty$ до $t=+\infty$; на обоих краях $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ средняя плотность стремится к нулю, $\bar{\rho} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$, как $|t|^{-3}$. Сами физические состояния при $t=-\infty$ и $t=+\infty$ различны, в частности, $S(t=+\infty) > S(t=-\infty)$.

2) Закон сохранения нуклонов справедлив без ограничений в любой момент и в любой точке пространства.

В заключение еще раз подчеркнем, что вопросы, рассматриваемые в этой главе, ни в коей мере не решены окончательно. Вместе с тем, они являются важнейшими принципиальными вопросами, которые должна решить космология.

ГЛАВА 21

АНИЗОТРОПНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ

§ 1. Вводные замечания

Есть все основания полагать, что в настоящее время и в недалеком прошлом Метагалактика удовлетворяла наиболее простым «естественным» предположениям об изотропии и однородности распределения вещества и его движения. При этом мы отвлекаемся от той мелкомасштабной (по сравнению со всей наблюдаемой Метагалактикой) неоднородности, которая проявляется в существовании галактик и их скоплений. Как уже отмечалось, сильным дополнительным аргументом в пользу изотропии и однородности является изотропия реликтового излучения горячей Вселенной, наблюдаемого на Земле в настоящее время (см.: Дополнение X).

Изотропия излучения свидетельствует об одинаковости условий в различных направлениях от нас. Фоновое излучение в изученной области $\lambda = 20 \text{ см} - 0,25 \text{ см}$ слабо взаимодействует с пылью, нейтральными атомами и плазмой. Это позволяет сделать заключение об изотропии, относящейся к гораздо большему расстоянию, чем это можно сделать по статистике далеких дискретных объектов. Приходящие к нам сегодня кванты испытали рассеяние (в среднем) на таком расстоянии, которое соответствует красному смещению не менее чем $z = 6$ или 8 , т. е. в момент $t \sim 1/15 t_0$, где t_0 — сегодняшней возраст Метагалактики.

Значит, по крайней мере начиная с этого периода, расширение происходит изотропно*) (см. об этом Дополнение XI).

С другой стороны, предположение о строгой однородности и изотропии сингулярного состояния и самого раннего периода

*) Второе следствие этих наблюдений, не относящееся непосредственно к рассматриваемому вопросу, заключается в том, что Земля (Солнце, наша Галактика) не имеет большой скорости относительно поля излучения. Сейчас доказано, что анизотропия излучения на $\lambda = 3 \text{ см}$ составляет $\Delta T/T \leq 0,005$, что соответствует скорости 300 км/сек .

большой плотности отнюдь не может считаться доказанным ни из каких-либо общих принципов, ни из наблюдательных данных. В концепции, согласно которой до современной стадии расширения была стадия сжатия, нужен специальный (не известный в настоящее время) механизм сглаживания неоднородностей, чтобы получилось однородное и изотропное состояние сразу после сингулярности. Поэтому естественно, что вслед за выяснением всех свойств простейших решений, найденных Фридманом, последовало исследование более общих решений. Вопрос о возможных неоднородностях на ранней стадии подробно рассматривался в гл. 20 в связи с теорией образования галактик и их скоплений.

Здесь будет рассмотрен частный случай строго однородных, но анизотропных решений уравнений ОТО. Этот класс решений выделяется не только своей математической простотой, позволяющей исследовать решение до конца. Дополнительными причинами, вызывающими интерес к АО (анизотропным однородным) решениям являются следующие:

1. Чем ближе состояние к сингулярности, чем больше плотность, тем ближе горизонт, т. е. меньше та область, которую нужно рассматривать, чтобы исследовать локальные свойства решения. Поэтому локальные свойства (например, зависимость плотности от времени и химический состав данного малого элемента) определяются в первую очередь именно локальной анизотропией, но не однородностью.

2. Существует класс АО-решений, асимптотически с течением времени стремящихся к изотропному решению Фридмана. В этом смысле наблюдения не позволяют отдать предпочтение АО- или изотропному решению. Однако в АО-решениях имеется дополнительный параметр, в зависимости от выбора которого получаются существенно различные следствия для химсостава первичного вещества. Может оказаться (см. § 6 гл. 21), что АО-решение окажется необходимым для согласования теории с данными о химсоставе старых звезд.

3. Специальной причиной интереса к АО является возможность включения в АО-решения магнитного поля. Дело в том, что есть основания предполагать существование изначального метагалактического магнитного поля, существовавшего до появления галактик. Такую возможность упомянул Хойл (1958), однако он считал ее неприятной, неудобоваримой (*unpalatable*) и противопоставлял ей самовозбуждение поля в теории стационарного состояния (*steady state*) с творением материи. (Критику последней см. гл. 22, § 2.)

К предположению об изначальном магнитном поле подводит целый ряд астрономических работ, в которых указывается на

трудность спонтанного возникновения галактических полей (Хойл (1958); Пикельнер (1963); Каплан — Пикельнер (1963)). В других работах рассматривается образование галактик путем конденсации проводящего газа во внешнем магнитном поле; структура галактик (Хойл, Иреленд (1961), Лозинская — Кардашов (1963), Пикельнер (1963), Пиддингтон (1964)) ставится в зависимость от взаимной ориентации первоначального межгалактического поля и момента вращения газового облака. Магнитное поле, однородное в пределах галактики или скопления галактик, рассматривалось в связи с проблемой квазаров (Кардашов (1964)) и космических лучей (Шама (1962)).

Сделаем последний шаг по пути рассмотрения полей, однородных во все большем масштабе. Предположим, что первоначальное поле было однородным во всей Вселенной на той гипотетической стадии ее эволюции, когда было однородным и распределение вещества (Зельдович (1965b)). В дальнейшем, когда гравитационная неустойчивость обусловила образование отдельных звезд, галактик и скоплений галактик, увлечение силовых линий поля веществом привело к усилению поля в галактиках и его запутыванию. Мы рассмотрим свойства космологического решения в период, когда однородность еще не нарушена.

Безотносительно к величине поля и к соотношению между плотностью энергии поля и плотностью обычного вещества, наличие поля меняет общие свойства симметрии пространства. Без поля можно удовлетворить условиям однородности (эквивалентности всех точек) и изотропии (эквивалентности всех направлений в каждой точке), что и реализовано в решении Фридмана. При наличии поля возможна однородность, но изотропия нарушена наличием выделенного направления вдоль поля. Это и является важной причиной (помимо двух, указанных выше), вызывающей интерес к анизотропным решениям.

4. Наконец, в АО-решениях отсутствие изотропии дает возможность протекания на ранних стадиях расширения неравновесных процессов, ведущих, в частности, к увеличению энтропии. Такие процессы со свободными нейтрино в АО-решениях будут рассмотрены в § 8.

Изучим сначала анизотропные решения без магнитного поля. Потом включим в рассмотрение магнитное поле, а затем рассмотрим влияние на решение наличия свободных нейтрино и других слабо взаимодействующих частиц.

Как и в случае фридмановского решения, мы начнем с рассмотрения аналогичной ньютоновской задачи (Зельдович (1964d)), а затем перейдем к рассмотрению в ОТО (Шюкинг, Гекман (1958)).

§ 2. Ньютоновская теория анизотропного однородного решения

Будем, как и в § 1 гл. 15, рассматривать вещество без давления $P=0$. В § 13 гл. 11 было показано, что в ньютоновской теории добавление к уже существующему эллипсоидальному распределению однородного вещества новых слоев с сохранением подобия не меняет гравитационного поля внутри первоначального распределения.

Таким образом, если удастся найти решение для движения вещества однородного эллипсоида, которое все время переводит начальный однородный эллипсоид в однородный же эллипсоид (но другой формы и размера), то затем, добавляя неограниченно новые слои (что никак не сказывается на движении вещества во внутренних частях), мы получим космологическое решение однородное, но с анизотропной, вообще говоря, деформацией. Рассмотрим однородное вещество, заполняющее трехосный эллипсоид.

Как известно, внутри эллипсоида гравитационный потенциал Φ является квадратичной функцией координат,

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} \Phi_{ik} x_i x_k,$$

причем коэффициенты Φ_0 , Φ_{ik} не зависят от точки. Оси тензора Φ_{ik} совпадают с осями эллипсоида. Если выбрать координатные оси по осям эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, то внутри его

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} \Phi_{xx} x^2 + \frac{1}{2} \Phi_{yy} y^2 + \frac{1}{2} \Phi_{zz} z^2.$$

В соответствии с уравнением Пуассона,

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 4\pi G\rho,$$

но сами Φ_{xx} , Φ_{yy} , Φ_{zz} не равны между собой; их отношения зависят от отношения осей эллипсоида. Величина Φ_{ii} (здесь нет суммирования по ii !) — наибольшая для направления x_i , соответствующего самой короткой оси эллипсоида; например, в пределе $a=b \ll c$ для вытянутого эллипсоида с осью z ,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2\pi G\rho, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \rightarrow 0,$$

а для тонкого диска

$$a = b \gg c,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \rightarrow 0.$$

Корректная постановка задачи в ньютоновской теории заключается в следующем: задаемся в начальный момент плотностью $\rho(t_0) = \rho_0$, обобщенным хаббловским линейным (Нарликар (1963)) распределением скорости (которое, как увидим далее, обеспечит нужные свойства решения),

$$u_i = H_{ik}(t_0) x_k.$$

Эта форма допускает наличие вращения при $H_{ik} \neq H_{ki}$. Зададимся также и уравнением*) эллипсоида $A_{ik}(t_0) x_i x_k = 1$, ограничивающего область, заполненную веществом (внутри) от пустоты.

Выбор формы области в виде эллипсоида обеспечивает квадратичный вид потенциала φ , что приводит к линейной зависимости ускорения от координат:

$$\ddot{x}_i = -\Phi_{ik} x_k.$$

Отсюда следует, что зависимость скорости от координат остается с течением времени линейной; коэффициенты тензора H_{ik} зависят от времени, но не от координат. Уравнение для H_{ik} имеет вид

$$\dot{H}_{ik} = -H_{in} H_{nk} - \Phi_{ik}.$$

В свою очередь линейная зависимость скорости обеспечивает сохранение с течением времени однородности, поскольку $\dot{\rho}/\rho = -\text{div} \mathbf{u} = -H_{ll}$ не зависит от координат (по индексу l произведено суммирование). Кроме того, линейная зависимость скорости от координат приводит к тому, что поверхность, ограничивающая вещество, все время остается эллипсоидальной, хотя коэффициенты A_{ik} меняются с течением времени:

$$\dot{A}_{ik} = -H_{ll} A_{lk} - H_{mk} A_{im}.$$

Следует подчеркнуть, что меняется не только ориентация осей в пространстве, но и форма эллипсоида, характеризуемая отношением его полуосей. Так, в частном случае, когда в начальный момент вещество покоится, через некоторое время плотность обратится в бесконечность за счет того, что обратится в нуль полуось, которая была наименьшей в начальный момент, две другие полуоси, уменьшаясь, останутся конечными, эллипсоид выродится в плоскую фигуру. С другой стороны, предположим, что в начальный момент вещество заполняло шар,

*) Удобно записать уравнение эллипсоида в таком виде, с учетом того, что оси эллипсоида с течением времени могут отклониться от координатных осей.

так что тензор φ_{ik} был единичным, т. е. изотропным $\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi G\rho}{3} r^2$ в соответствии с предположением Нарликара (см. выше).

Пусть, однако, начальное распределение скоростей анизотропно, т. е. тензор H_{ik} не единичен. Тогда с течением времени шар, деформируясь, превратится в эллипсоид, а значит, начальная изотропия φ_{ik} естественно нарушится.

Система уравнений $\dot{H} = \dot{H}(H, \varphi)$, $\dot{A} = \dot{A}(A, H)$ становится замкнутой заданием зависимости φ_{ik} от A_{ik} и ρ , которая дается теорией потенциала. Эта зависимость выражается, как известно, эллиптическими интегралами; при этом φ_{ik} симметрично и положительно definite.

Мы не будем разбирать все свойства решения задачи, отсылая интересующихся к работе Я. Б. Зельдовича (1964d). Остановимся только на случае, который интересен с точки зрения приложений к космологической задаче, поставленной в предыдущем параграфе.

Именно, рассмотрим случай, когда вращение отсутствует, т. е. H_{ik} симметричен, главные оси тензора H_{ik} совпадают с осями эллипсоида. Кроме того, ограничимся сначала случаем осевой симметрии $a=b$ (эллипсоид вращения) и потребуем, чтобы в ходе расширения при очень больших размерах (соответственно $\rho \rightarrow 0$) форма эллипсоида приближалась к форме шара, т. е. наступала «изотропизация» и скорость расширения на бесконечности стремилась к нулю (случай критической плотности). Проще всего рассмотреть не задачу об анизотропном расширении, а обратную задачу о сжатии, а затем обратить время.

Пусть имеется большой шар, слабо деформированный в эллипсоид вращения. Возможны два случая: $a=b > c$ — сплюснутый как репа эллипсоид, или $a=b < c$ — вытянутый как огурец. Вначале в обоих случаях $|a - c| \ll a$.

Рассмотрим первый случай, $a=b > c$. Как отмечено выше, ускорение по более короткой оси больше, $\varphi_{xx} = \varphi_{yy} < \varphi_{zz}$. Следовательно, с течением времени сплюснутость будет возрастать (рис. 103), и тело превратится в некоторый момент t_0 в плоский блин $c=0$. Объемная плотность вещества ρ в этот момент обращается в бесконечность. Гравитационная энергия блина (отрицательная) конечна. Конечным также является и гравитационное поле в любой точке, несмотря на $\rho \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что и скорость

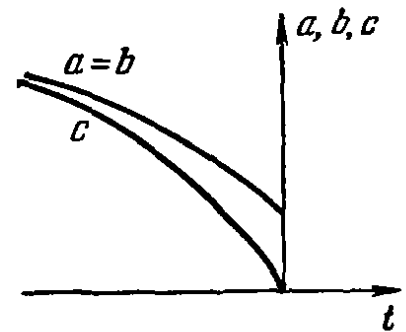
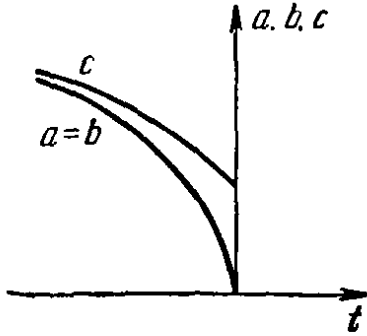


Рис. 103. Сжатие в диск сплюснутого эллипсоида. На графике показано изменение со временем величин $a=b$ и c , $a=b > c$.

остается конечной. Следовательно, асимптотический при $\rho \rightarrow \infty$ закон изменения величин c и ρ с течением времени есть

$$c \sim (t_0 - t), \quad \rho \sim \frac{1}{t_0 - t}. \quad (21.2.1)$$

Во втором случае $a=b>c$ и $\varphi_{xx}=\varphi_{yy}>\varphi_{zz}$. Эллипсоид с течением времени становится все более узким (рис. 104) и при некотором $t=t_0$ превращается в отрезок нити $a=b=0$, c — конечно. Поле вблизи длинной нити возрастает неограниченно, как $1/r$ (r — расстояние от нити), следовательно, скорость в ньютоновской теории стремится к бесконечности:



$$\dot{a}^2 \sim \ln \left(\frac{a_0}{a} \right)^2, \quad (21.2.2)$$

Рис. 104. Сжатие в нить вытянутого эллипсоида. На графике изображено изменение со временем величин $a=b$ и c , $a=b < c$.

где a_0 — величина порядка $c(t_0)$.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда скорость сжатия различна по всем трем осям. Из предыдущего изложения ясен характер этого решения. Ускорение на самой короткой оси будет наибольшим, и тело превратится в некоторый момент t_0 в плоский эллипс $c=0$, $a \neq b$ (a не круг, как было, когда $a=b$). Асимптотический закон (21.2.1), очевидно, будет справедлив и теперь.

Таким образом, случай стягивания в «нить» в общей ньютоновской задаче является вырожденным, он требует одновременного обращения в нуль двух величин, a и b .

Теперь остается обратить время (т. е. рассматривать расширение), увеличить неограниченно (добавляя новые слои вещества) размеры эллипсоида в фиксированный момент при фиксированной плотности вещества и мы получим решение ньютоновской космологической задачи.

Величины a , b и c будут (вследствие однородности) характеризовать изменение расстояний между любыми парами точек соответственно по осям x , y и z . В силу сказанного в начале параграфа, переход от конечного эллипсоида к неограниченному распределению никак не изменит зависимости a , b и c от времени.

§ 3. Гравитационный парадокс ньютоновской теории

Можно ли было сразу решать задачу для неограниченного распределения, пользуясь уравнениями движения и уравнением Пуассона $\Delta\varphi=4\pi G\rho$, а не рассматривать предварительно за-

дачу об эллипсоидах. Не будет ли это проще? Остановимся в связи с этим на некоторых принципиальных вопросах. Прежде всего заметим, что потенциал φ и вектор гравитационного поля $\text{grad } \varphi$ являются ненаблюдаемыми величинами (см. гл. 2). Наблюдаемыми величинами являются вторые производные $\varphi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}$, от которых зависит относительное ускорение соседних частиц. На φ_{ik} наложено только одно условие (уравнение Пуассона), следовательно, остается пять степеней свободы (имея в виду $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$). Таким образом, уравнений механики и уравнения Пуассона недостаточно для решения космологической задачи! Именно этот произвол в выборе φ_{ik} в ньютоновской теории в случае бесконечного однородного вещества и следовало бы назвать гравитационным парадоксом, поскольку φ и $\text{grad } \varphi$ ненаблюдаемы, так что тот факт, что $|\varphi| \rightarrow \infty$, $|\text{grad } \varphi| \rightarrow \infty$, трудностей не вызывает *) и называть это парадоксом не следует.

Один способ избавиться от произвола заключается в наложении условия изотропии; это дает $\varphi_{ik} = \frac{4\pi G\rho}{3} \delta_{ik}$. Тогда естественно потребовать и изотропии поля скорости $H_{ik} = H\delta_{ik}$ и мы естественно приходим к решению Фридмана и Милна — Мак-Кри.

Второй способ заключается в предварительном рассмотрении эллипсоида, заполненного веществом; решение задачи потенциала с условием $\varphi \rightarrow 0$ в пустоте на бесконечности даст внутри эллипсоида определенные и постоянные φ_{ik} , зависящие от формы и ориентации эллипсоида. Эти φ_{ik} в ньютоновской теории не меняются при подобном увеличении эллипсоида **) и, в частности, при стремлении размера к бесконечности.

Таким образом, φ_{ik} в бесконечном пространстве с $\rho = \text{const}$ зависят от того, каким предельным переходом получено решение из решения для конечной области ***).

*) В этом смысле высказывания Ландау и Лифшица (1962) о трудностях ньютоновской теории в бесконечном пространстве представляются неправильными.

**) Форма и ориентация (но не размер) эллипсоида характеризуются как раз пятью величинами.

***) Очевидно, эта неоднозначность ньютоновской теории получается именно в результате рассмотрения бесконечного пространства, заполненного веществом постоянной плотности. В задаче с плотностью, достаточно быстро спадающей на бесконечности, где можно поставить условие $\varphi = 0$ на бесконечности, это условие вместе с уравнением Пуассона полностью определяет потенциал.

А. Л. Зельманов предлагает в качестве дополнительных условий для устранения неоднозначности брать условия, следующие из решения аналогичной задачи в релятивистской космологии. Очевидно, при этом

Можно решить и обратную задачу и найти форму и ориентацию эллипсоида по заданным φ_{ik} . При этом, если заданы φ_{ik} и H_{ik} в данный момент, зависимость их от времени уже не содержит произвола: $\varphi_{ik}(t_0)$ соответствует определенному эллипсоиду, а H_{ik} однозначно определяет закон изменения эллипсоида и плотности и тем самым определяет $\varphi_{ik}(t)$ в следующий момент. В частности, если задать $\varphi_{ik}(t_0)$ изотропным, оставляя $H_{ik}(t_0)$ не изотропным, то $\varphi_{ik}(t)$ станет анизотропным; это показывает непоследовательность предположения Нарликара, который рассматривал анизотропную деформацию при изотропном тензоре φ_{ik} . Как мы увидим далее, такое предположение не соответствует духу не только ньютоновской, но также и релятивистской задачи.

§ 4. Релятивистская теория анизотропного однородного решения

Мы начнем с рассмотрения анизотропного однородного решения без вращения с евклидовым сопутствующим пространством, заполненным веществом с $P=0$ (Шюкинг и Гекман (1958)).

Метрика такой модели может быть записана в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx_1^2 - b^2(t) dx_2^2 - c^2(t) dx_3^2.$$

Уравнения Эйнштейна могут быть записаны в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) &= 4\pi G\rho, & \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) &= 4\pi G\rho, \\ \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right) &= 4\pi G\rho, & \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} &= -4\pi G\rho. \end{aligned} \right\} \quad (21.4.1)$$

Решение имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 t^{p_1} (t - t_0)^{\frac{2}{3} - p_1}, \\ b &= b_0 t^{p_2} (t - t_0)^{\frac{2}{3} - p_2}, \\ c &= c_0 t^{p_3} (t - t_0)^{\frac{2}{3} - p_3}, \end{aligned} \right\} \quad (21.4.2)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \quad (21.4.3)$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G} \cdot \frac{1}{t(t - t_0)}. \quad (21.4.4)$$

предполагается уже известным решение релятивистской задачи. Тем не менее такой подход может оказаться полезным для рассмотрения, например, локальных возмущений в той или иной модели, так как позволит применять несравненно более простой аппарат ньютоновской теории.

Объем элемента вещества меняется, очевидно, как $V \sim 1/\rho \sim \sim t(t-t_0)$. Соотношения (21.4.3) оставляют из трех величин ρ_1, ρ_2, ρ_3 только одну произвольную, например, наименьшую, $\rho_1 \equiv -\alpha$. Находим, что α может меняться от $1/3$ до нуля. Тогда $0 \leq \rho_2 \leq 2/3, 2/3 \leq \rho_3 \leq 1$. Параметрами, характеризующими анизотропию, являются α и t_0 . «Постоянная» Хаббла H теперь зависит от направления (но не от координат) и в целом является тензором. Главными его осями будут как раз x_1, x_2, x_3 . В направлении осей x_1, x_2, x_3 эта величина равна соответственно $\dot{a}/a, \dot{b}/b, \dot{c}/c$. При $t \gg t_0$ решение «изотропизуется» и переходит в решение Фридмана.

Сравним это решение с приведенным выше решением ньютоновской задачи. Для этого будем рассматривать, как и там, не расширение, а сжатие, т. е. обратим время. Как и в ньютоновском решении, возможны два качественно разных случая. Первый случай $\alpha = 0, \rho_2 = 0, \rho_3 = 1$. Зависимость $a = b$ и c от времени полностью аналогична случаю сплюснутого эллипсоида вращения ньютоновской задачи. Если же $\alpha \neq 0$, поведение решения вблизи особенности приобретает совсем другой характер (рис. 105). При больших $|t|$ имеем $\ddot{a} < 0, \ddot{b} < 0, \ddot{c} < 0$, аналогично ньютоновской задаче. Но при некотором t изменяется знак относительного ускорения по оси x_1 и $\ddot{a} > 0$. В момент $|t| = |t_0/2|$ меняется и знак относительной скорости по этой оси — сжатие меняется на растяжение. В пределе при $t = 0$ расстояние между соседними частицами по оси x_1 растет неограниченно.

Указанные особенности решение имеет при любых допустимых значениях α , за исключением разобранный выше случая $\alpha = 0$. Следовательно, в релятивистской задаче, изучаемой здесь, сжатие в нить является общим, а в блин исключительным случаем. Таким образом, релятивистское решение качественно отличается от решения ньютоновской задачи. Локальные свойства релятивистского решения не получаются путем ньютоновского рассмотрения задачи, как это было для изотропного однородного случая.

Прежде, чем выяснить причины отмеченного факта, подчеркнем следующее важное обстоятельство. Рассмотрим поведение решения вблизи особенности $t \rightarrow 0$.

В левые части уравнений (21.4.1) входят величины вида $\ddot{a}/a, (\dot{a}/a)^2, (\dot{b}/b)^2$, имеющие порядок t^{-2} . В правые части входит величина ρ порядка t^{-1} . Следовательно, при $t \rightarrow 0$ правой частью

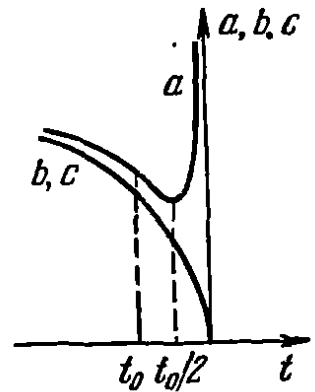


Рис. 105. Сжатие однородного анизотропного вещества в релятивистской задаче. На графике изображено изменение со временем величин a, b, c для случая $\alpha = 1/3$.

можно пренебречь по сравнению с левой и решение асимптотически не зависит от наличия вещества, что подчеркивают Лифшиц и Халатников (1963). Эту стадию деформации можно назвать «вакуумной». (Решения для вакуума см. Тауб (1951)). Легко найти момент конца вакуумной стадии, когда в ходе расширения на деформацию уже начинает влиять вещество, после чего решение быстро изотропизуется. Для этого члены $\ddot{a}/a \sim t^{-2}$ должны быть порядка $4\pi G\rho$. Этот момент $t \approx t_0$.

Растяжение по одной оси и сжатие по двум другим на вакуумной стадии (при рассмотрении сжатия вещества) аналогично приливному эффекту во внешнем поле тяготеющего тела. Например, водная оболочка Земли испытывает такие относительные ускорения в поле тяготения Луны. Она вытягивается вдоль линии Земля — Луна и сжимается в перпендикулярных направлениях.

Вернемся к вопросу о причинах несоответствия ньютоновских и релятивистских космологических решений. В рамках ньютоновской механики все линейные размеры, фигурирующие в задаче, можно менять, сохраняя подобие и без изменения локальных свойств решения, т. е. без изменения зависимости от времени величин $\rho(t)$, $H_{ik}(t)$, $\varphi_{ik}(t)$.

Почему же получающиеся закономерности не согласуются с релятивистскими космологическими решениями?

В релятивистской теории играет роль скорость света c . Точное релятивистское решение задачи о движении конечного объема, заполненного веществом, зависит не только от ρ , H_{ik} , φ_{ik} , но и от безразмерных критериев вида $G\rho r^2/c^2$ и $H_{ik}r/c$, где r — характерный размер.

Ньютоновские решения являются предельной формой точных релятивистских решений в пределе при стремящихся к нулю критериях, указанных выше. Однако космологические решения должны осуществляться в противоположном предельном случае, когда критерии стремятся к бесконечности. Поэтому эти решения не совпадают с ньютоновскими.

Особенность задачи заключается в том, что релятивистские критерии выпадают из формул, относящихся к локальным величинам, в специальном случае сферической симметрии задачи (соответствующей изотропному решению). Однако этот факт не обобщается на эллипсоидальные решения. Различие между сферическим и эллипсоидальным случаем проявляется, в частности, при рассмотрении гравитационного излучения.

В общей теории относительности при движении сферического слоя вещества поле снаружи не изменяется, поле внутри равно нулю и также не меняется. При движении эллипсоидального

слоя квадрупольный момент распределенной массы изменяется, следовательно, должно происходить излучение гравитационной волны.

По-видимому, и поле внутри движущейся эллипсоидальной оболочки (равное нулю в ньютоновском приближении) в общей теории относительности отлично от нуля. Происходит нечто вроде проникновения гравитационной волны внутрь полости, хотя строго о волне нельзя говорить на расстояниях меньше τc , где τ — характерное время движения, и лучше говорить о переменном гравитационном поле.

Рассмотрим тело, для которого в начальном состоянии релятивистские критерии малы. Если это тело сжимается, то плотность и скорость движения нарастают и поэтому на последних стадиях движение в теле конечной массы может приобрести черты, характерные для анизотропного космологического решения. При этом переменное гравитационное поле от движения внешних оболочек, имеющее «приливной характер» (т. е. растягивающее вещество в одном направлении и сжимающее в двух других направлениях) будет определять динамику движения внутренних слоев.

Качественное отличие первого вырожденного случая $\alpha=0$, когда релятивистское решение аналогично ньютоновскому, от второго общего случая $\alpha \neq 0$, когда эти решения не похожи, состоит в том, что в первом случае в ньютоновском приближении задачи поле и скорость сжатия вблизи $\rho=\infty$ остаются конечными, во втором случае они неограниченно нарастают.

Обратимся теперь к случаю горячей модели с уравнением состояния на ранней стадии расширения $P=\epsilon/3$. Точные решения этой задачи можно найти в работе Компанейца и Чернова (1964) и работе Дорошкевича (1966). Мы покажем здесь, что учет давления не меняет характера решения.

В решении (21.4.2) при $t \rightarrow 0$ объем элемента вещества меняется как $V \sim t$. Следовательно, плотность ультрарелятивистского газа с $P=\epsilon/3$ меняется, как

$$\rho = \frac{\epsilon}{c^2} = At^{-4/3}, \quad (21.4.5)$$

где A — константа.

В уравнениях тяготения типа (21.4.1) в правых частях теперь стоят члены вида $4\pi G\rho$ и $4\pi GP/c^2$, которые пропорциональны $t^{-4/3}$; ими по-прежнему можно пренебречь, по сравнению с членами в левых частях, которые пропорциональны t^{-2} . Таким образом, здесь как и в случае $P=0$, решение вблизи особенности $t \rightarrow 0$ не зависит от материи и асимптотически при $t \rightarrow 0$ имеет

тот же вид, являясь «вакуумным решением» *):

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 t^{P_1}, & b &= b_0 t^{P_2}, & c &= c_0 t^{P_3}, \\ \rho &= \frac{A}{t^{4/3}}. \end{aligned} \right\} \quad (21.4.6)$$

Вырожденный случай $\alpha=0$ имеет асимптотику

$$\left. \begin{aligned} a &= a_1 t \left(1 - \frac{4}{5} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \right), & b &= c = b_1 \left(1 + \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \right), \\ \rho &= \frac{A}{t^{4/3}}, & t &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (21.4.7)$$

В общем случае любых α : $1/3 \geq \alpha \geq 0$ при больших t решение изотропизуется, переходя в решение Фридмана для вещества с $P = \epsilon/3$:

$$a = b = c \sim t^{1/2}, \quad \rho = \frac{3}{32\pi G t^2}.$$

Момент окончания «вакуумного» решения $t = \theta$ и быстрой последующей изотропизации легко находится (так же как и в случае $P=0$) приравниванием членов вида \ddot{a}/a и $4\pi G\rho$. По порядку величины получаем (если α не специально мало)

$$\theta^{-2} \approx 4\pi G\rho = 4\pi G \frac{A}{\theta^{4/3}};$$

отсюда

$$\theta \approx G^{-3/2} A^{-3/2}. \quad (21.4.8)$$

В этом параграфе мы рассмотрели только простейшие случаи анизотропных однородных космологических решений. О других классах анизотропных, однородных решений см. § 9 этой главы.

§ 5. Магнитная модель однородной Вселенной

Рассмотрим теперь задачу, поставленную во введении к данной главе: построим однородную анизотропную модель с магнитным полем (Хойл (1958); Брахмачари (1955), Розен (1964), Зельдович (1965b), Халатников (1965), Дорошкевич (1965с)).

Важнейшие свойства такой модели заключаются в том, что магнитное поле существует, несмотря на отсутствие электрического тока, где бы то ни было, что формально следует из одно-

*) Зависимость решения вблизи $t=0$ от материи имеет место только для предельно жесткого уравнения состояния $P = \epsilon$.

родности поля $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ *). Уравнения общей теории относительности совместно с уравнениями Максвелла приводят к выполнению условия вмороженности поля (сохранения потока поля через контур, состоящий из данных частиц вещества) независимо от проводимости вещества; при этом в простейшем случае осесимметричного решения $a = b$ в выражении метрики (§ 4) и $dB/dt = -2\gamma B$, где $\gamma = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{b}}{b}$ — постоянная Хаббла поперечного расширения.

Зависящее от времени магнитное поле сопровождается появлением электрического поля $\mathbf{E}^* = \frac{\gamma}{c} [\mathbf{rB}]$, однако вмороженность поля приводит к тому, что наблюдатель, движущийся вместе с веществом, естественно, никакого электрического поля в своей системе не обнаруживает (это и есть признак вмороженности). Вывод этого свойства дан в приложении. Заряженные частицы, движущиеся относительно вещества, отклоняются полем, но их энергия, измеренная наблюдателем там, где они в данный момент находятся, по-прежнему только уменьшается в ходе расширения. Уравнения общей задачи о магнитной модели Вселенной даны в приложении. Отсылая за подробностями вычислений к работе А. Г. Дорошкевича (1965), приведем сразу решение для вещества при $P = 0$ с магнитным полем при критической общей плотности энергии (вещества + поле), дающей плоское сопутствующее пространство:

$$a = b = A_* x,$$

$$c = A_* \left[x + 4 - \frac{8}{x} + a_1 \frac{\sqrt{x-1}}{x} \right], \quad t = \frac{2}{3} \frac{(2+x)\sqrt{x-1}}{\sqrt{8\pi G \rho x^4/c^2}},$$

$$\epsilon_{\text{вещ}} = \frac{3\Phi_0}{A_*} \frac{1}{ca^2}, \quad \epsilon_{\text{магн}} = \frac{\Phi_0}{a^4} \text{ (вмороженность поля),}$$

Параметр x изменяется в пределах

$$1 \leq x_0 \leq x < \infty.$$

Решение записано в параметрическом виде. A — масштабный множитель, x_0 — определяется из условия $c(x_0) = 0$. Модель характеризуется двумя параметрами: a_1 — описывающим степень анизотропии **), и Φ_0 — описывающим величину магнитного поля.

Эти параметры можно выразить через отношение «постоянных» Хаббла: $\omega_0 = \beta/\gamma$, где $\beta = \dot{c}/c$, $\gamma = \dot{a}/a = \dot{b}/b$, и саму γ в некоторый момент $t = t_1$, и через отношение энергии вещества и поля

*) Конечное тело при таком условии имеет ток на поверхности.

**) Однако, ни при каком a_1 нет изотропного решения.

$\omega_1 = \epsilon_{\text{вещ}}/\epsilon_{\text{поля}}$ в тот же момент

$$8\pi G \frac{\Phi_0}{A^4} = \frac{(x^*)^4}{(x^*)-1} \gamma^2,$$

$$a_1 = 2\omega_1 \sqrt{x^* - 1} [(1 - \omega_0)(x^*)^4 - 4(x^*)\omega_0 + 8(1 + \omega_0)],$$

где обозначено: $x^* = 2 \frac{1 + \omega_0}{1 + 2\omega_0} + \frac{\omega_1^{-1}}{1 + 2\omega_0}$.

В ходе расширения плотность магнитной энергии убывает быстрее плотности энергии вещества и при $t \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) пренебрежимо мала по сравнению с плотностью энергии вещества:

$$\epsilon_{\text{вещ}} : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{\text{магн}}}{\epsilon_{\text{вещ}}} = 0.$$

Решение при $t \rightarrow \infty$, так же как и анизотропное решение без поля (см. § 4), переходит в решение Фридмана.

Вблизи особой точки $\rho = \epsilon/c^2 \rightarrow \infty$ поведение решения качественно различно в зависимости от соотношения постоянных Хаббла.

При $a_1 < 24\sqrt{3}$ решение при $\rho \rightarrow \infty$ качественно ведет себя так же, как и без поля (см. § 4) — происходит сжатие в «блич». Это и не удивительно, так как обращение в бесконечность происходит за счет сжатия по оси x_1 , расстояния в плоскости (x_2, x_3) остаются

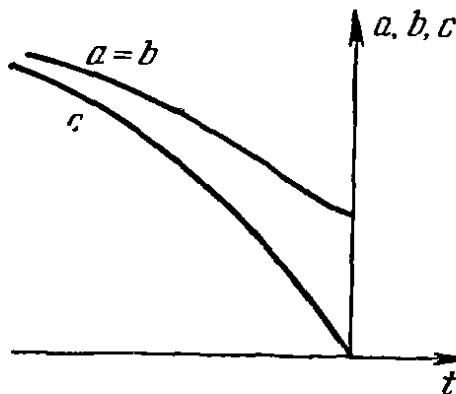


Рис. 106. Осесимметричное анизотропное решение с магнитным полем, $a_1 > 24\sqrt{3}$.

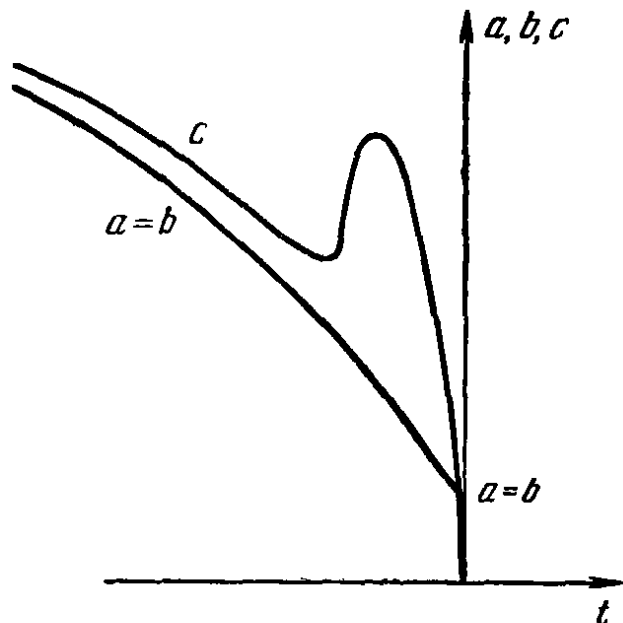


Рис. 107. Осесимметричное анизотропное решение с магнитным полем $a_1 > 24\sqrt{3}$.

конечными; величина поля зависит только от этих размеров: $\epsilon_{\text{магн}} = \Phi_0/a^4$ остается конечной при $\rho \rightarrow \infty$ и, естественно, не влияет на асимптотику (см. рис. 106, где, так же как и в предыдущих решениях, изображено сжатие, т. е. обращено время).

При $a_1 > 24\sqrt{3}$ магнитное поле существенно влияет на поведение вблизи $\rho \rightarrow \infty$ по сравнению с аналогичным случаем без поля (см. § 4).

Поведение решения изображено на рис. 107. В ходе сжатия в некоторый момент сжатие по x_1 сменяется релятивистским расширением по x_1 (переход на вакуумное решение), но затем магнитное поле, достаточно выросшее при сжатии в плоскости $(r\varphi)$ [без поля это сжатие было бы неограниченным], меняет ход решения: расширение по x_1 снова меняется на сжатие и происходит переход на асимптотику предыдущего решения — сжатие в «блин» при конечном значении поля: $\lim \epsilon_{\text{магн}} = \Phi_0/a^4(0) \neq \infty$.

Таким образом, поле, после того как оно перевело решение, которое без поля сжалось бы в нить, на асимптотику сжатия в «блин», в ходе дальнейшего сжатия в пределе при $\rho \rightarrow \infty$ вновь не играет никакой роли.

Итак, магнитное поле в случае осесимметричного решения делает асимптотику решения вблизи сингулярного состояния таким, что $\epsilon_{\text{магн}}$ конечно при $\epsilon_{\text{вещ}} \rightarrow \infty$.

Остается добавить, что влияние магнитного поля на решение при $P \neq 0$, в частности, при $P = \epsilon/3$, точно такое же, как и при $P = 0$. В случае $P = \epsilon/3$ при любом соотношении α и γ вблизи сингулярного состояния асимптотика решения совпадает с решением § 4.

Плотность энергии магнитного поля $\epsilon_{\text{магн}}$ здесь также остается конечной вблизи сингулярности $\rho_{\text{общ}} = \epsilon_{\text{общ}}/c^2 \rightarrow \infty$.

Переходим теперь к рассмотрению общего случая, когда деформация различна по всем трем осям (поле направлено по x_1).

Будем рассматривать ситуацию, когда в начале при больших $|t|$ сжатия по двум направлениям, ортогональным полю, мало отличаются друг от друга. Тогда вначале процесс будет идти как описано выше (см. рис. 107). Сначала идет сжатие по всем трем осям, затем сжатие по x_1 сменяется расширением. Потом магнитное поле переводит расширение по x_1 снова в сжатие. Здесь на асимптотике $\rho \rightarrow \infty$ начинает сказываться отличие от вырожденного случая $\dot{b}/b = \dot{c}/c$. Малая разность $\dot{b}/b - \dot{c}/c > 0$ начинает играть важную роль. Покажем, что магнитное поле не влияет на асимптотику решения вблизи сингулярности и решение в общем случае должно быть «вакуумным»: $a \sim t^{p_1}$, $b \sim t^{p_2}$, $c \sim t^{p_3}$, $p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$, только отрицательным должен быть показатель степени не p_1 , а p_2 или p_3 (пусть для определенности p_3), т. е. расширение должно протекать в направлении, ортогональном полю. Действительно, в этом случае энергия поля будет расти как

$$\epsilon_{\text{магн}} \sim B^2 \sim t^{2(p_2+p_3)},$$

и вследствие условий (21.4.3) имеем $2(p_2 + p_3) < 2^*$). Поэтому в уравнениях тяготения при $t \rightarrow 0$ членами, содержащими магнитное поле $\epsilon_{\text{магн}} \sim t^{2(p_2 + p_3)}$, можно пренебречь по сравнению с членами вида $\ddot{a}/a \sim t^{-2}$ и $\dot{a}\dot{b}/ab \sim t^{-2}$, т. е. поле асимптотически не влияет на решение, и асимптотика его «вакуумная» — сжатие по двум осям и расширение по третьей, перпендикулярной к полю.

Заметим, что когда $1/3 > p_1 \geq 0$, то энергия магнитного поля в ходе сжатия растет быстрее, чем $t^{-1/3}$, т. е. быстрее, чем энергия релятивистского газа и $\epsilon_{\text{магн}}/\epsilon_{\text{вещ}} \rightarrow \infty$.

Для получения расширяющегося космологического решения надо, очевидно, во всех предыдущих рассуждениях обратить направление времени.

В заключение отметим следующий интересный факт (Дорошкевич (1965с)). В случае осесимметричного решения магнитное поле влияет на асимптотику решения $\rho \rightarrow \infty$ даже при предельно жестком уравнении состояния вещества $P = \epsilon$. Казалось бы, магнитное поле, имея «давление» $P = \epsilon/3$, не может здесь конкурировать с $P = \epsilon$. Тем не менее введение поля в модель устраняет при коллапсе релятивистское расширение по оси z в пределе $\rho \rightarrow \infty$.

И еще одно замечание. Формально все формулы и выводы этого параграфа остаются в силе, если однородное магнитное поле заменить электрическим. Однако однородное метagalактическое электрическое поле должно вызывать появление электрического тока заряженных частиц. В настоящее время нет оснований предполагать наличие общего электрического поля (в отличие от предположений об общем магнитном поле!). Поэтому модель с электрическим полем вряд ли имеет какое-либо отношение к реальности.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 5

Приводим уравнение Максвелла и Эйнштейна для однородной осесимметричной анизотропной модели с метрикой вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [dr^2 + f^2(r) d\varphi^2] - c^2(t) dz^2, \quad f(r) = \begin{cases} \sin r \\ r \\ \text{sh } r \end{cases} \quad (21.5.1n)$$

Электромагнитное поле задается тензором

$$F_{lk} = \frac{\partial A_k}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^k}.$$

*) За исключением вырожденного случая $p_1 = p_3 = 0$, $p_2 = 1$, когда $2(p_2 + p_3) = 2$.

Уравнение Максвелла

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} F^{ik}) = 0. \quad (21.5.2п)$$

Из вида метрики следует

$$A_0 = A_1 = 0, \quad A_2 = A_2(r), \quad A_3 = A_3(t), \\ [x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = z].$$

Отсюда находим для электрического и магнитного полей:

$$E_z^* = \frac{\text{const}_1}{a^2}, \quad E_x^* = E_y^* = 0, \quad (21.5.3п)$$

$$B_z = \frac{\text{const}_2}{a^2}, \quad B_x = B_y = 0. \quad (21.5.4п)$$

Таким образом, в сопутствующем пространстве электрическое поле (21.5.3п) не вызывает появления магнитного, а магнитное (21.5.4п) не вызывает появления электрического поля.

Соотношения (21.5.3п) и (21.5.4п) есть условие замороженности поля (неподвижности силовых линий относительно вещества). Плотность энергии:

$$\epsilon_{\text{эл+магн}} = \frac{E^{*2} + B^2}{8\pi} = \frac{\Phi_0}{a^4}.$$

Для вещества без поля обозначим плотность энергии через $\epsilon_{\text{вещ}}$ и давление через P .

Подставляя выражение для метрики и для тензора T_k^i в уравнения Эйнштейна, найдем (скорость света принята равной единице):

$$16\pi G \epsilon_{\text{эл+магн}} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\delta}{a^2} - \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} - \frac{\ddot{c}}{c},$$

$$16\pi G \epsilon_{\text{вещ}} = -\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\delta}{a^2} + 5 \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\ddot{c}}{c},$$

$$16\pi G P = -3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\delta}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} - \frac{\ddot{c}}{c},$$

$$8\pi G (\epsilon_{\text{вещ}} + \epsilon_{\text{эл+магн}}) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\delta}{a^2},$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{при } f(r) = \sin r, \\ 0 & \text{при } f(r) = r, \\ -1 & \text{при } f(r) = \text{sh } r. \end{cases}$$

См. Дополнение IX.

§ 6. Ядерные реакции на ранней стадии в анизотропной горячей модели

Приведенные в § 1 гл. 21 оценки возможной степени сегодняшней анизотропии (см. также Псковский (1960)) показывают, что реальная Вселенная могла быть существенно анизотропной при $t \approx 0,01 t_{\text{соврем}} \approx 10^{15}$ сек. См. Дополнения X—XII.

Таким образом, параметр t_0 , характеризующий в моделях § 4 анизотропию модели, может быть порядка $t_0 \approx 10^{15}$ сек. Это время гигантски превосходит характерное время для ядерных реакций в горячей модели (см. гл. 18), равное примерно $t = 100 \div 200$ сек. Итак, в модели с критической плотностью, даже при анизотропии существенно меньшей, чем возможная сейчас, на ранней стадии расширения при протекании ядерных реакций анизотропия могла быть гигантской, закон изменения плотности давался не фридмановским решением, а анизотропным (см. § 4), и исход реакций мог оказаться совсем не таким, как в модели Фридмана.

Итог ядерных процессов зависит от того, с какой скоростью при характерной для этих процессов фиксированной плотности (а значит, и температуре) происходит изменение плотности (и температуры).

Сравним $\frac{d\rho}{dt}$ в изотропных и анизотропных моделях при одном и том же ρ .

В изотропной модели

$$\rho = \frac{A}{t^2}, \quad \left| \frac{d\rho}{dt} \right| = \frac{2A}{t^3}.$$

В анизотропной модели $\rho = \epsilon/3$, $t \ll t_0$

$$\rho = \frac{A}{t^{4/3} t_0^{2/3}}, \quad \left| \frac{d\rho}{dt} \right| = \frac{4A}{3t^{7/3} t_0^{2/3}}.$$

Следовательно, в начале расширения при одной и той же плотности в анизотропной модели скорость изменения плотности больше в $(\rho/\rho_0)^{1/4}$ раз; $\rho_0 = A/t_0^2$.

Посмотрим, как это повлияет на окончательный химический состав после протекания ядерных реакций в расширяющемся веществе. Качественные соображения имеются в работе Хавкита и Тейлора (1966). Количественные расчеты были проделаны Торном (1967а) и Дорошкевичем и Сюняевым.

Пусть параметр анизотропии $\theta = t_0$ много меньше, чем время «заковки» состава нейтронов и протонов (дающей $n/p = 0,17$; см. § 4 гл. 18), т. е. меньше нескольких секунд. Тогда решение выходит на изотропное раньше этого характерного времени, и все ядерные процессы протекают как и во фридмановском решении. Окончательный химический состав, как и в изотропном решении, $\text{He} \approx 30\%$, $\text{H} \approx 70\%$. Пусть θ лежит в интервале между несколькими секундами и $\sim 10^{10}$ сек. Ранняя стадия до «заковки» протекает по анизотропному решению, т. е. быстрее, и поэтому должно остаться больше нейтронов. Эти нейтроны дадут затем

в ходе ядерных реакций (при $t \approx 100$ сек) большое содержание гелия. Наконец, при $\theta > 10^{10}$ сек расширение протекает достаточно быстро уже и стадии ядерных реакций. Реакции соединения

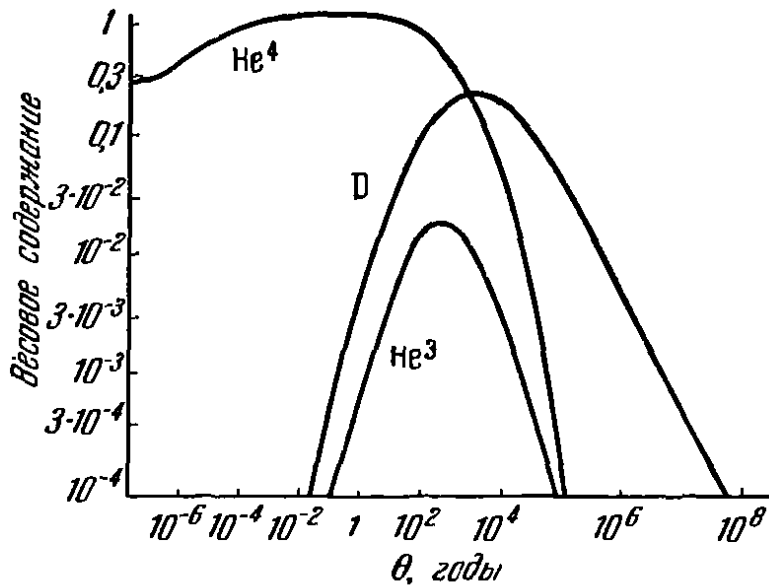


Рис. 108. Относительная весовая концентрация He^4 , D и He^3 в дозвездном веществе как функция параметра анизотропии θ .

нейтронов и протонов не успевают пройти столь же полно, как и во фридмановской модели, и мы получим существенно меньшее окончательное содержание гелия. Аналогичные рассуждения справедливы и для содержания других элементов, D и He^3 .

На рис. 108 приведены результаты расчетов Торна (1966) химического состава первичного вещества в зависимости от параметра анизотропии. Таким образом, химический состав дозвездного вещества существенно зависит от степени изотропии на очень ранних стадиях расширения.

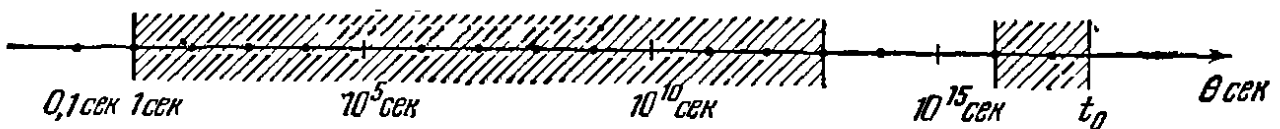


Рис. 109. Разрешенные и запрещенные значения параметра анизотропии θ . Заштрихованные области — запрещенные наблюдениями значения θ .

Для выполнения двух условий: в первичном веществе содержание $\text{He}^4 < 30\%$ и $\text{D} < 1\%$, нужно, чтобы $\theta > 10^{13}$ или $\theta < < 1$ сек. В первом случае He^4 практически не будет совсем.

Итак, можно считать, что современные данные о химическом составе вещества указывают на то, что параметр анизотропии

не мог заключаться в пределах $1 \text{ сек} < \theta < 10^{13} \text{ сек}$. Кроме того, наблюдаемая изотропия равновесного космологического излучения показывает, что $\theta < 10^{16} \text{ сек}$. Область разрешенных значений параметра θ показана на рис. 109 (см. Дополнения X, XI).

§ 7. Рост возмущений плотности в анизотропных однородных моделях

В начальный период, когда деформация расширяющихся моделей сильно анизотропна, закон изменения плотности энергии со временем иной, чем в моделях Фридмана. Уже по этой причине следует ожидать, что рост возмущений с течением времени здесь будет иной, чем рассмотренный в гл. 19. Такая задача была решена А. Г. Дорошкевичем (1966) для осесимметричной модели с критической плотностью. Приводим его результаты.

Метод решения задачи аналогичен рассмотренному в работе Лифшица и Халатникова (1963).

Возмущения всех величин разлагаются в интегралы Фурье. Так, для плотности,

$$\delta\varepsilon = \int e^{i(k_1x+k_2y+lz)} \delta\varepsilon_{kl} dk_1 dk_2 dl.$$

Ограничимся рассмотрением роста возмущений плотности в расширяющихся моделях.

При любом уравнении состояния возмущения при $\gamma < \alpha$ нарастают быстрее, чем при $\gamma > \alpha$. Нас будет интересовать рост возмущений в горячей модели, т. е. при $P = \varepsilon/3$ на ранних этапах расширения.

В моделях без магнитного поля длинноволновые возмущения (много больше джинсовской длины волны) нарастают по закону

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varepsilon_{kl}}{\varepsilon} &\sim \varepsilon^{-3/2} && \text{при } \gamma < \alpha, \\ \frac{\delta\varepsilon_{kl}}{\varepsilon} &\sim \varepsilon^{-1} && \text{при } \gamma > \alpha. \end{aligned}$$

Оба закона дают рост более быстрый, чем в изотропной модели ($\delta\varepsilon_k/\varepsilon \sim \varepsilon^{-1/2}$).

Введение магнитного поля меняет асимптотику невозмущенного решения в случае $\gamma < \alpha$ и переводит при $t \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow \infty$ решение на асимптотику $\gamma > \alpha$. Следовательно, в случае магнитного поля возмущения при $\varepsilon \rightarrow \infty$ растут как $\delta\varepsilon_{kl}/\varepsilon \sim \varepsilon^{-1}$. Подчеркнем, что последнее относится только к осесимметричному решению.

В ходе расширения, когда решение изотропизуется, при $\varepsilon \rightarrow 0$ закон роста возмущений переходит на фридмановский:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim \varepsilon^{-1/2}.$$

§ 8. Нейтрино и гравитоны в анизотропной космологической модели

В § 2 гл. 18 было показано, что в горячей изотропной однородной модели слабо взаимодействующие частицы — гравитоны, нейтрино, начиная с некоторого момента (разного для разных частиц), являются свободными и не взаимодействуют ни между собой, ни с другими частицами.

В изотропном решении отключение нейтрино от других частиц не вызывало нарушения равновесных соотношений между плотностью энергии и температурой нейтрино, с одной стороны, и γ -квантов и пар e^+ , e^- , с другой, так как они остывают по одинаковому закону (при $kT > m_e c^2$).

В анизотропном решении это не так. У свободной частицы каждая компонента импульса *) i_1, i_2, i_3 меняется обратно пропорционально a_1, a_2, a_3 , энергия частицы $E = ic$ определяется наибольшей компонентой импульса. В ходе анизотропной деформации распределение частиц в импульсном пространстве становится все более резко анизотропным.

Будем рассматривать сначала только один сорт свободных частиц. Если эти частицы стали свободными на вакуумной стадии анизотропного решения, когда по x_1 идет сжатие, то из-за фиолетового смещения компонента импульса i_1 возрастает, а следовательно, возрастает и энергия каждой частицы $E \sim i \approx \approx i_1 \sim t^\alpha$ (где $\alpha = -p_1$).

Плотность энергии свободных частиц становится главной составляющей общей плотности энергии. Она меняется по закону

$$\epsilon^* \sim E n^* \sim t^{\alpha-1}, \quad (21.8.1)$$

в то время как плотность энергии взаимодействующих частиц меняется по закону $t^{-1/3}$. Следовательно, при наличии свободных частиц плотность энергии уменьшается медленнее, чем в их отсутствие и поэтому материя начинает влиять на решение гораздо раньше, чем в отсутствие свободных частиц.

Вычисления (см. Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1967а, б)) показывают, что если без свободных частиц вакуумное решение продолжалось до момента θ , то свободные частицы сокращают этот период до $t = q$:

$$q = \theta \left(\frac{\tau}{\theta} \right)^{\frac{1+3\alpha}{3(1+\alpha)}} \beta^{-\frac{1}{1+\alpha}}; \quad (21.8.2)$$

*) В этом параграфе мы обозначаем компоненты импульса через i_1, i_2, i_3 , чтобы не путать с показателями степени в выражении для α .

здесь τ — момент, когда частицы становятся свободными ($\tau < \theta$), β — отношение плотности энергии свободных частиц ϵ^* к общей плотности энергии ϵ на момент отъединения τ . В модели без свободных частиц за вакуумной стадией наступает быстрая изотропизация решения при $t > \theta$. При наличии свободных частиц за вакуумной стадией при $t > q$ следует период, когда в динамике доминирующую роль играют свободные частицы с резко анизотропным тензором энергии-импульса (частицы движутся главным образом вдоль оси x_1): $|T_0^0| \sim |T_1^1| \gg |T_2^2|, |T_3^3|$.

Космологическое решение с таким тензором энергии-импульса приведено в работе Дорошкевича, Зельдовича, Новикова (1967a, b). Это решение показывает, что в направлении движения частиц (вдоль оси x_1 , поровну в обоих направлениях) происходит расширение, а в поперечных направлениях расширение слабое (см. Дополнение IX). Из-за эффекта красного смещения компонента импульса i_1 по оси x_1 теперь быстро уменьшается, гораздо быстрее i_2 и i_3 . К некоторому моменту компонента i_1 , которая при $t = q$ была много больше i_2 и i_3 , сравнивается с одной из них, скажем, с i_2 . После этого основную роль в энергии свободных частиц начинает играть компонента импульса i_2 (частицы в основном летят вдоль x_2), начинается быстрое расширение по оси x_2 , компонента i_2 уменьшается быстрее других, снова сравнивается с i_1 , становится меньше ее и т. д. Анизотропия будет «колебательной» с убывающей амплитудой и растущим периодом, пока все компоненты i_1, i_2, i_3 не станут одного порядка, и плотность энергии свободных частиц сравняется (по порядку) с плотностью энергии взаимодействующих частиц (β считаем порядка единицы). После этого наступает быстрая изотропизация решения. Подробности и формулы см. в упомянутых выше работах.

Свободными частицами, о которых мы говорили, могут являться также гравитоны.

Поведение нейтрино отличается от описанного выше тем, что на вакуумной стадии часть нейтрино и летящих навстречу антинейтрино получают такую энергию, что становится заметной вероятность их необратимого превращения в электроны и позитроны. Для гравитонов это не имеет места, так как сечение их взаимодействия не зависит от энергии (см. § 3 гл. 18).

Будем считать, что слабо взаимодействующими частицами являются нейтрино (для определенности электронные). В анизотропном решении момент, когда нейтрино становятся свободными, может быть найден точно тем же путем, что и в изотропном (см. § 2 гл. 18). Вычисления дают для этого момента

$$\tau = (\tau')^{9/4} \theta^{-5/4}, \quad (21.8.3)$$

где $\tau' \sim 0,1$ сек — момент отъединения нейтрино в изотропном решении (см. § 2 гл. 18), θ — параметр анизотропии в решении без свободных частиц.

После момента τ нейтрино не взаимодействуют с другими частицами, но на вакуумной стадии встречные потоки нейтрино и антинейтрино взаимодействуют между собой. Идет процесс



сечение которого $\sigma = 10^{-43} E_\nu^2$, где E_ν — энергия нейтрино в Мэв. Процесс (21.8.4) будет приводить на вакуумной стадии к необратимому превращению части нейтрино в пары e^+ , e^- , которые мгновенно термализуются*). Наиболее энергичные нейтрино все время превращаются в e^+ , e^- . Это ведет, с одной стороны, к уменьшению числа нейтрино (в расчете на один барион), к более медленному росту их энергии на вакуумной стадии $E_\nu \sim t^{\alpha/3}$ вместо $E \sim t^\alpha$ для свободных невзаимодействующих (см. выше), с другой стороны, к подогреву среды, к увеличению энтропии вещества.

Для роста энтропии получается формула

$$\frac{S}{S_0} = \left[1 + \frac{4\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\frac{1-\alpha}{3}} \right]^{3/4}. \quad (21.8.5)$$

Плотность энергии нейтрино и γ -квантов и пар e^+ , e^- из-за подогрева оказывается все время одного порядка. Взаимодействие встречных потоков нейтрино и антинейтрино будет продолжаться до тех пор, пока либо прекратится рост с энергией сечения взаимодействия нейтрино (это будет при $E_\nu = 300$ Бэв) либо окончится вакуумная стадия, т. е. прекратится рост E_ν . Момент окончания вакуумной стадии в рассматриваемых условиях дается соотношением

$$q = \theta \left(\frac{\tau'}{\theta} \right)^{\frac{9}{4} \frac{1-\alpha}{3-\alpha}}, \quad \tau' < \theta. \quad (21.8.6)$$

Очевидно, наибольший подогрев вещества и наибольшее уменьшение числа нейтрино будет тогда, когда параметры модели как раз таковы, что $E_\nu = 300$ Бэв достигается точно при $t = q$. При этом оказывается $S/S_0 = 10^3$. При меньших α , S/S_0 больше; максимальное значение $(S/S_0) \sim 10^6$, $\alpha \approx 0,02$ (Дорошкевич).

*) Для мюонных нейтрино взаимодействие ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$ приводит к рождению пар мюонов, которые термализуются и после этого распадаются на e^+ , e^- , ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ν_e , $\bar{\nu}_e$. Энергия этих вторичных нейтрино ~ 30 Мэв, много меньше возрастающей энергии первичных нейтрино, движущихся по оси x_1 .

В общем случае после $t=q$ энтропия вещества постоянна для $t>q$, нейтрино больше не исчезают. Решение быстро изотропизуется. Но чрезвычайно важно, что на момент q энергия нейтрино, которая росла после отъединения как $E_\nu \sim t^{\alpha/3}$, много больше энергии γ -квантов, которая все время уменьшалась: $E_\gamma \sim t^{-1/3}$. Для последующего времени $t>q$ отношение E_ν/E_γ сохраняется. В результате, если ранние стадии расширения Вселенной действительно были анизотропными, то сегодня энергия реликтовых нейтрино может во много раз превышать равновесную энергию $T=2^\circ\text{К}$, предсказываемую изотропной моделью. Но зато во столько же раз меньше их плотность. На сегодняшний день должно быть справедливо приблизительное равенство $\epsilon_\nu = \epsilon_\gamma$.

Приведем цифры, относящиеся к наиболее благоприятному для роста энтропии случаю. Для этого случая параметр $\theta = 3 \cdot 10^{10}$ сек, т. е. без нейтрино изотропизация решения произошла бы при $t = 3 \cdot 10^{10}$ сек. Нейтрино становятся свободными в этом решении при $\tau = 10^{-15}$ сек, когда $E_\nu = E_\gamma = E_{e^+e^-} = 3$ Бэв. Нейтрино сокращают продолжительность вакуумной стадии до $q = 10^4$ сек (считаем $\alpha = \frac{1}{3}$). В этот момент $E = 300$ Бэв, $E_\nu = 10^4$ эв, отношение $n_\nu/n_\gamma \approx 3 \cdot 10^7$ и $S/S_0 = 10^3$. Последние отношения сохраняются все последующее время. На сегодняшний день должно быть $E_\nu = 10^4$ эв, $n_\nu = 2 \cdot 10^{-5}$ 1/см³ и поток нейтрино резко анизотропен (если какие-то процессы не изотропизовали его на ранних стадиях). Для $\alpha \approx 0,02$ возможно $S : S_0 \approx 10^6$.

Если параметр θ меньше $3 \cdot 10^{10}$ сек, то вакуумная стадия продолжается меньше, меньше подогрев, меньше сегодняшнее значение $E_\nu < 10^4$ эв. Если же θ больше $3 \cdot 10^{10}$ сек, то подогрев кончается раньше из-за того, что E_ν достигает значения 300 Бэв, меньше нейтрино выбывает из игры, решение после $t=q$ приобретает колебательный характер, что несколько уменьшает отношение E_ν/E_γ так, чтобы после изотропизации выполнялось равенство $\epsilon_\nu \approx \epsilon_\gamma$. В результате сегодняшнее E_ν также меньше 10^4 эв.

Итак, в рамках рассмотренной выше схемы максимальная сегодняшняя энергия $E_\nu = 10^4$ эв. Но это еще не все.

В анизотропном случае возможно, что слабо взаимодействующие частицы никогда не были в равновесии с другими (а в принципе это возможно вообще для всех частиц!). Действительно, для равновесия надо, чтобы время установления равновесия было меньше, чем гидродинамическое (см. § 2 гл. 18):

$$\frac{1}{n\sigma c} < t_H.$$

Будем считать, что при большой энергии сечение $\sigma = \text{const}$ или даже падает с энергией. В анизотропном решении плотность всех сохраняющихся частиц $n = A/t$, где $A = \text{const}$. Таким образом, если взять A достаточно малым, то неравенство (21.8.7) никогда не будет выполнено, и частицы будут свободными. В этом случае энергия нейтрино сегодня может быть много больше 10^4 эв.

Кроме того, наше рассмотрение было чрезвычайно схематичным. Мы не рассматривали возможности изотропизации хотя бы небольшой части направленных пучков нейтрино большой энергии, совместного действия свободных частиц разных сортов и магнитного поля, различного рода неустойчивостей. Все это еще предстоит проанализировать.

Подытожим сказанное в § 8. (См. также Дополнения XI, XII.)

1. Динамика анизотропных космологических моделей и физика процессов в них тесно связана с присутствием слабо взаимодействующих частиц и с возможной неравновесностью вещества.

В частности, следует повторить расчеты Торна (1967а) химического состава дозвездного вещества с учетом сказанного. Качественно выводы Торна не должны измениться.

2. Энергия слабо взаимодействующих частиц (нейтрино, гравитонов) в настоящее время может сильно отличаться от 2°K , предсказываемого изотропной моделью, и может быть весьма велика. Может быть, даже возможно экспериментальное обнаружение космологических нейтрино.

3. В анизотропных моделях возможно сильное увеличение начальной энтропии вещества.

4. Необходим дальнейший анализ процессов в анизотропных моделях. Не исключено, что по крайней мере некоторые варианты таких моделей окажутся несовместимыми с наблюдаемыми свойствами Метагалактики.

§ 9. Заключительные замечания

Итак, многие физические процессы сильно различаются в модели Фридмана и в моделях, отличие которых на современном этапе от фридмановской фактически мало. Подчеркнем, что рассматривались только простейшие отклонения от модели Фридмана.

Тем не менее расчеты по фридмановской модели дают выводы, не противоречащие наблюдениям! И хотя наблюдения еще не очень критичны для этих выводов, все же это наводит на мысль, что в природе по каким-то причинам осуществляется именно фридмановское решение, во всяком случае в изученной

нами области Вселенной; или же анизотропное однородное решение, выходящее при расширении на фридмановское.

Это еще раз подчеркивает важность проблем гл. 20.

Мы не останавливались здесь на других классах однородных анизотропных моделей, в частности, на моделях с вращением. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, нестационарные решения с вращением, пригодные для описания реальной наблюдаемой картины, практически не изучены. Во-вторых, сложность моделей с вращением неимоверно больше, чем без вращения. Для иллюстрации следствий отклонений от фридмановского решения было достаточно и невращающихся частных моделей. Неясно, следует ли рассматривать частные сложные модели или надо, делая следующий шаг к усложнению, сразу переходить к анализу общего случая произвольных отклонений. См. по этому поводу серию работ Лифшица и Халатникова (1962a, b, 1963). Сошлемся для интересующихся на знаменитое решение Гёделя (1949) для однородного вращения без деформации. Анализ его см., например, у Синга (1963). О нерассмотренных здесь классах однородных анизотропных моделей без вращения см., например, Тауб (1951), Шюкинг, Гекман (1958), Шепли (1964), Грищук (1967).

Подчеркнем еще раз (см. гл. 4 § 6), что наличие вращения не означает, вообще говоря, устранения сингулярности в решении. Можно прямо построить сингулярное решение с вращением, воспользовавшись семифункциональным решением Лифшица и Халатникова (1962b).

Наконец, сделаем еще замечание о топологии сопутствующего 3-мерного пространства. В однородных изотропных моделях с $\rho > \rho_{кр}$ пространство замкнуто. В пространственно анизотропных осесимметричных моделях с $\rho > \rho_{кр}$ оказывается, что пространство замкнуто в плоскости $(r\varphi)$, но бесконечно по оси z . Однако анизотропное решение нельзя рассматривать как «малое возмущение» изотропного, ибо анизотропия при сохранении однородности сразу делает искривление пространства в одном направлении равным нулю, т. е. меняет его на конечную величину. Тем не менее локально в данной точке плотности и скорости вещества мало отличаются от фридмановского*).

Сделанные замечания важны с принципиальной точки зрения. Но в реальной Вселенной все же огромное значение имеет оптический горизонт. По-видимому, реально все вещество около 10^{10} лет назад прошло стадию чрезвычайно большой плотности.

*) Возможно, по-видимому, такое малое возмущение всех локальных свойств замкнутой модели, которое переводит замкнутое пространство в открытое (см. в связи с этим Ньюмен, Тамбурино, Унти (1963), Мизнер (1963)).

Это состояние характерно тем, что в нем осуществляются условия равновесного состояния и вещество «забывает» о тех неравновесных процессах, которые были до этого (если понятие «до» вообще применимо; см. гл. 20). Если при сверхвысокой плотности действительно было термодинамическое равновесие, то практически все ядерные процессы на последующей стадии эволюции будут определяться только этими почти (с высочайшей точностью!) равновесными условиями.

Поэтому хотя в модели с бесконечным временным прошлым (в обычном метрическом времени) и нет «принципиального» оптического горизонта, но есть «практический» горизонт, определяемый величиной $\approx ct$, где t — время с начала расширения. Сигналы о более ранних моментах и более далеких областях могли бы в принципе дойти до нас, но практически этого нет, так как такая информация должна была бы передаваться сверхпроникающими частицами, которые способны «не термализоваться» при огромных плотностях вблизи $t=0$ и пробиться к нам сквозь огромную «оптическую толщу».

В этом смысле не столь существенна разница между открытым и закрытым миром, ибо горизонт делает доступным современному исследователю только ограниченную область пространства.

В свете сказанного судить сейчас о том, что было бы до наблюдаемого расширения, можно только следующим образом. Изучаются такие возможные состояния вещества, которые в ходе сжатия дают сверхплотные (равновесные в смысле состава) состояния, с такими параметрами, чтобы при расширении дать наблюдаемую картину мира.

Именно такой способ анализа возможных состояний до расширения Метагалактики мы и использовали в гл. 20.

Исследования самого последнего времени показали, что в случае анизотропной деформации вблизи $\rho \rightarrow \infty$ возможно, что никогда не было полного термодинамического равновесия. См. об этом предыдущий параграф. Если такая ситуация действительно имела место в природе, то слабо взаимодействующие частицы, например, нейтрино, не термализуются вблизи момента $t=0$, свободно переходят сквозь вещество, на короткое мгновение ставшее сверхплотным в ходе космологического сжатия и последующего расширения (если действительно до расширения было сжатие). Эти нейтрино несут информацию об эпохе до $t=0$ и об областях пространства, лежащих дальше ct . В этом случае никакого «практического» горизонта нет, и об эпохе «до $t=0$ » мы сможем судить, непосредственно изучая эти слабо взаимодействующие частицы.

ГЛАВА 22

КРИТИКА НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

§ 1. О принципе Маха

В литературе непрерывно появляются статьи, обсуждающие с разных точек зрения принцип Маха (см., например, сборник «Гравитация и относительность» под ред. А. З. Петрова, 1965).

Суть этого принципа состоит в следующем: инерция тела определяется его взаимодействием (гравитационно-инерционным) с другими телами Вселенной. Этот принцип сыграл большую эвристическую роль в создании Эйнштейном ОТО. Но после создания теории относительности выяснилось, что принцип Маха в ней не содержится! Рассмотрим вопрос несколько подробнее.

Что значит утверждение: инерция определяется взаимодействием с другими телами? Прямолинейный ответ на этот вопрос состоит в следующем: инертная масса тела, т. е. мера его сопротивляемости действующей силе, определяется его взаимодействием с другими телами. Если бы этих тел не было, то не было бы инертной массы у пробного тела. С другой стороны, «инерция тела должна возрастать по мере скопления весомых масс вблизи него» (Эйнштейн, русское издание (1955)).

Оба последних утверждения не выполняются в теории относительности. Во-первых, в пустом пространстве справедлива СТО, где тела обладают инерцией. Во-вторых, одна и та же сила, например, сила сжатой пружины, всегда сообщает данному телу одинаковое ускорение, независимо от близости тяжелых масс или отсутствия их. Противоположное утверждение Эйнштейна связано с ошибочной интерпретацией полученной им формулы (на эту ошибку указывали Бранс (1962), Дикке (1965)). С этой точки зрения каждое подтверждение теории относительности есть удар по принципу Маха.

Иначе обстоит дело с некоторыми другими физическими идеями, которые иногда связывают с принципом Маха. Так, Эйнштейн (русское издание (1955)) пишет, что с точки зрения Маха следует ожидать, что «тело должно испытывать ускоряю-

щую силу, когда близлежащие массы ускоряются; эта сила по направлению должна совпадать с направлением ускорения.

Вращающееся полое тело должно создавать внутри себя «кориолисово поле сил», стремящееся отклонить движущиеся тела в направлении вращения . . .».

Оба эффекта имеют место в ОТО (см. § 9 гл. 1). Но они не связаны с изменением инертных свойств тела, а описывают изменение инерциальной системы отсчета при движении тяготеющих масс. Иначе говоря, масса пробного тела остается неизменной, но инерциальная система отсчета будет разная в зависимости от наличия и движения окружающих тел. Принципиально эти эффекты, указанные Эйнштейном, того же характера, что и изменение инерциальной системы в присутствии неподвижной тяготеющей массы (скажем, вблизи невращающейся планеты). Инерциальная система свободно падает в поле тяготения массы, в то время как в отсутствие массы она совпадала с инерциальной системой на бесконечности. Очевидно, такое изменение инерциальной системы никак не связано с изменением инерциальных свойств тела, которые являются мерой сопротивляемости тела ускоряющим (негравитационным) силам.

Итак, принципа Маха в ОТО нет. В последние годы были поставлены остроумные опыты, показавшие, что момент вращения ядра не зависит от направления оси вращения (Древер (1962), Хагхес, Робинсон, Бертран-Лопез (1960)). Если бы силы, возникающие при вращении, зависели от расположения далеких масс, то вследствие неточной изотропности распределения далеких масс вращение происходило бы по-разному при разном направлении оси. Авторы рассматривают результаты опытов как опровержение принципа Маха.

С ними спорит Дикке (1961). Он пользуется уравнениями ОТО, но считает, что масса зависит от направления движения (вводит тензор массы). Такая позиция Дикке непоследовательна: принцип Маха можно защищать лишь в его наивно первоначальном виде. Тот, кто пользуется общей теорией относительности, уже отказался от принципа Маха!

Прямолинейное применение принципа Маха может привести к идее, что инерциальной является система, связанная с разбегающимися галактиками. Но тогда, казалось бы, уже движение с постоянной скоростью (и не обязательно с ускорением относительно этой системы) должно вести к физическим отличиям. Однако этого нет. Другие аспекты: см. Дикке (1964), Уилер (1964).

Существует еще вопрос (Хойл, Нарликар (1963)): почему отсутствуют (или малы) скорости галактик, перпендикулярные к нашему лучу зрения? Экспериментально мы почти ничего не

знаем о наличии у галактик скоростей, перпендикулярных к лучу зрения. Если этих скоростей нет (или они малы), то возникает вопрос, почему? В решении Фридмана их нет, потому что таковы начальные условия в этом решении. Такой ответ авторы считают неудовлетворительным, случайное отсутствие таких скоростей мало вероятно. Они строят такую теорию, не останавливаясь перед введением новых гипотез, см. ниже § 2, в котором отсутствие вращения получается само собой.

Этот вопрос, очевидно, не имеет прямого отношения к принципу Маха.

По существу, из критики фридмановского решения следует отметить, что отсутствие вращения в этом решении не есть простая случайность. Отсутствие вращения есть следствие одного общего принципа однородности и изотропии решения.

Вопрос о том, почему этот принцип имеет место в природе, до сих пор не получил ответа; он примыкает к тем проблемам, которые рассматривались в § 8 гл. 21 и в гл. 20.

§ 2. Теория рождения вещества

В 1935—1950 гг. предполагали, что постоянная Хаббла соответствует $T = H_0^{-1} = 2 \cdot 10^9$ лет, так что возраст Вселенной еще меньше этой величины. Между тем возраст Земли и возраст радиоактивных элементов не менее $5 \cdot 10^9$ лет. Считали, что это расхождение опровергает представление об эволюции Вселенной, основанное на решении Фридмана. В связи с этим в 1948 г. были выдвинуты радикально иные теории (Бонди и Голд (1948), Хойл (1948, 1949)), согласно которым спонтанное рождение вещества в пустоте компенсирует убывание плотности, связанное с хаббловским расширением. Таким образом, указанные авторы приходят к идее стационарной Вселенной (Steady — State). Условие стационарности по времени вместе с пространственной изотропией и однородностью Бонди называет «совершенным (perfect) космологическим принципом».

По естественным психологическим причинам теории продолжают существовать и обсуждаются и до сих пор, хотя причины, вызвавшие их к жизни, давно исчезли. Сейчас нет сколько-нибудь надежных определений возраста каких-либо объектов, которые превышали бы современное значение $H_0^{-1} = 13 \cdot 10^9$ лет.

Для стационарности нужно компенсировать уменьшение плотности при расширении. При $\bar{\rho} = 10^{-30}$ г/см³ и $H = 3 \times 10^{-18}$ сек⁻¹ темп рождения вещества для компенсации должен быть

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} = -3H\rho = 10^{-37} \text{ г/см}^3 \text{ сек},$$

что соответствует рождению одного атома водорода в год в одном m^3 . Прямое лабораторное опровержение рождения, происходящего в таком темпе, практически невозможно. Другое общее свойство стационарной теории заключается в требовании независимости от времени хаббловской постоянной. Отсюда следует, что каждая частица движется ускоренно: ее скорость удаления равна $u = Hr$, H постоянно, r растет. В теории тяготения ускорение возможно лишь в том случае, если предположить, что величина $rc^2 + 3P$ отрицательна. Это обеспечивается введением гипотетического «С»-поля с отрицательной плотностью энергии. В § 10 гл. 17 показано, что наблюдения определенно говорят о наличии эволюции в Метагалактике и опровергают тем самым стационарную космологию. Кроме того, отрицательное отношение к теории рождения основано на общетеоретических принципах.

Теория рождения Бонди и Голда (1948), а также Хойла (1948) и ее новейшие варианты Хойла и Нарликара (1963) противоречат теории относительности. Бонди и не пользуется теорией относительности, Хойл пишет уравнения, по форме подобные уравнениям ОТО, но вводит в каждой точке избранный 4-вектор. Это неизбежно, так как, когда вещество рождается спонтанно, то необходимо задать его скорость движения и существует избранная система координат, в которой рождающееся вещество хотя бы в среднем покоится. Первоначально предполагалось, что рождаются нейтроны или атомы водорода.

Бербидж и Хойл (1956) предположили, что рождаются нуклон-антинуклонные пары. Такое предположение не решает космологической проблемы — рождение пар не компенсирует убыли плотности нуклонного заряда в ходе расширения. Кванты, которые могут возникнуть при аннигиляции*), регистрировались аппаратурой, установленной на искусственном спутнике Земли; их количество во много раз меньше того, которое следовало бы из предположений Бербидажа и Хойла.

Хойл (1960) развил вариант теории, согласованный по крайней мере со специальной теорией относительности, с отсутствием выделенной системы координат. В этом варианте рождение определяется неким полем ϕ , источником которого в свою очередь являются гравитирующие массы. При последовательном проведении такой теории с учетом локальной неоднородности плотности неизбежен следующий вывод: скорость рождения в данной точке пропорциональна плотности материи, уже присутствующей в данной точке, коэффициент пропорциональности $3H =$

*) Основную роль играет нередкий процесс $p + \bar{p} = 2\gamma$, а цепочка через нейтральные пионы $p + \bar{p} = \pi^+ + \pi^- + \pi^0$, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

$= 9 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$ соответствует удвоению массы за время порядка $3 \cdot 10^9$ лет. Если рождается водород, то горная порода, пролежавшая в Земле 10^9 лет, должна содержать не менее 30% водорода по весу.

Наконец, Хойл и Нарликар (1963) рассматривают связь между принципом Маха и теорией рождения.

Хойл и Нарликар строят теорию рождения вещества с участием нового поля S , в котором из уравнений автоматически получается стационарное решение с хаббловским распределением скорости, без вращения. Это решение получается как единственное стационарное решение, к которому, по-видимому, стремится любое другое. Однако свойства S -поля, которые приходится постулировать, весьма странные: S -поле может создавать отрицательную плотность энергии. В новой теории рождение материи сопровождается ростом S -поля, так что суммарная энергия материи и S -поля сохраняется. Полная плотность энергии отрицательна, именно поэтому каждая частица движется по закону $R \sim e^{Ht}$, испытывая положительное ускорение.

Теория с отрицательной плотностью энергии S -поля несовместима с квантовой теорией элементарных частиц и полей. Если в классической теории внешнее S -поле способно рождать частицы, то в квантовой теории при отрицательной плотности энергии S -поля возможен «взрыв вакуума» — спонтанное рождение обычных частиц и квантов S -поля. Теория со скалярным S -полем, связанным с массами частиц, симметрична относительно частиц и античастиц: в принципе в такой теории невозможно обеспечить именно рождение нуклонов, а не нуклон-антинуклонных пар. По всем этим причинам нельзя согласиться с таким радикальным нововведением, в сущности, только по эстетической причине: решение Фридмана не нравится*).

Наряду с теориями, постулирующими в явном виде рождение вещества, есть работы, в которых предполагается, что гравитационная константа меняется с течением времени. Впервые высказал такую идею Дирак (1937, 1938); при этом он четко отметил, что идея противоречит теории относительности: законы природы не инвариантны, а зависят от времени, истекшего с момента, когда плотность была бесконечной. В работах школы Иордана (1937, 1938, 1955) рассматривается теория с переменной константой тяготения, построенная подобно ОТО и, в частности, согласующаяся со специальной теорией относительности.

*) Авторы теории « S »-поля используют ее для объяснения взрывов кварзов.

В такой теории с течением времени возрастает количество вещества в объеме, границы которого движутся вместе с веществом. Новый обзор см. у Дикке (1964).

Другими словами, теория Иордана приводит к рождению вещества. Никакого механизма рождения вещества на уровне атомов и элементарных частиц Иордан не дает, и не случайно, так как рождение вещества несовместимо с теорией элементарных частиц. Поэтому теория Иордана неудовлетворительна.

§ 3. Другие объяснения красного смещения

Идея стационарности Вселенной, как показывает исторический опыт, обладает большой привлекательностью, основанной, вероятно, на инерции мышления. Человек привык к малым скоростям. В пределах жизни человека, и даже человечества, не происходило заметных изменений в большинстве космических систем. Поэтому когда появилось наблюдательное доказательство красного смещения спектральных линий, последовал ряд попыток дать новое объяснение смещения линий. Многие авторы хотели избежать представления о доплер-эффекте и взаимном удалении галактик. В этих объяснениях используется тот факт, что смещение именно красное. Если $\rho > \rho_{кр}$, то через 10^{10} лет красное смещение сменится фиолетовым; тогда эти объяснения отпадут автоматически. Но сейчас во всяком случае $H > 0$, смещение спектральных линий соответствует уменьшению энергии кванта, т. е. потере квантом части энергии на пути от далеких объектов до земного наблюдения. Поэтому возникли два варианта объяснения:

1. Квант по пути от источника до наблюдателя взаимодействует с межгалактическим веществом и отдает ему часть своей энергии.

Такое объяснение сразу опровергается, ибо взаимодействие должно носить характер рассеяния. Отдача энергии сопровождается передачей импульса. При этом, вообще говоря, должно меняться и направление кванта, что должно привести к размыванию изображения источника. Такого размывания на опыте нет.

2. Квант спонтанно распадается. Например, он испускает пару нейтрино-антинейтрино, отдавая им малую долю своей энергии. По сохранению энергии и импульса квант может испускать только частицы с массой покоя, равной нулю, притом частицы, летящие параллельно направлению полета кванта.

Смертельный удар по такой гипотезе нанес М. П. Бронштейн (1934): из специальной теории относительности неизбежно следует, что если есть некоторая вероятность распада кванта, то эта вероятность обратно пропорциональна частоте

кванта *). Следовательно, красное смещение было бы различным для различных участков спектра; радиоволны от далеких источников вообще не могли бы дойти до нас, не было бы классических уравнений Максвелла для медленно меняющихся полей. Итак, нет никаких приемлемых объяснений красного смещения, кроме представления о расширяющейся Вселенной. Подчеркнем здесь еще раз, что без измерения красного смещения, уже из уравнений механики следует, что однородное распределение вещества должно быть нестационарным (см. § 1 гл. 15) и красное смещение в спектрах галактик, являющееся эффектом Доплера, подтверждает это.

§ 4. Электрическая Вселенная

Литтлтон и Бонди (1948) выдвинули гипотезу, что заряд электрона и протона не в точности одинаков, концентрация электронов и протонов в космическом масштабе тем не менее одинакова, поэтому галактики обладают удельным зарядом. Электростатическое отталкивание галактик они считают причиной наблюдаемого разлета галактик и расширения Вселенной. Лабораторные опыты, как более ранние, так и поставленные уже после работы Литтлтона и Бонди, не подтверждают различия заряда протона и электрона.

Это само по себе не опровергает их идею; ее можно было бы изменить, считая, что не в точности равны средние плотности положительно и отрицательно заряженных частиц во Вселенной.

Решающее возражение заключается в том, что эта точка зрения противоречит изотропии и однородности Вселенной, следующей из наблюдений. Электрическое поле представляет собой вектор, характеризующий определенное направление в пространстве. Таким образом, в данной точке различные направления были бы не эквивалентны.

Далее, плотность электрической энергии $E^2/8\pi$ не постоянна и тем самым нарушается однородность Вселенной. В замкнутом мире мы видели, что полный электрический заряд обязан равняться нулю.

*) Результат легко понять, вспоминая известное, проверенное на опыте, увеличение времени распада мезонов, движущихся со скоростью, близкой к скорости света. Время меняется как $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, вероятность

$W = W_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, энергия мезона $E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, следовательно, $EW = m_0 c^2 W_0 = \text{const.}$ Но энергия по Планку и де-Бройлю связана с частотой $E = \hbar \omega$, откуда $W \omega = \text{const.}$ Этот закон универсален для мезонов и квантов.

В открытой (бесконечной) Вселенной конечная средняя плотность заряда невозможна, однородное распределение заряда приводит к безграничному возрастанию поля E^* и плотности энергии $E^{*2}/8\pi$.

Здесь уместно отметить различие между полем тяготения и электрическим полем. В классическом приближении закон тяготения Ньютона и закон Кулона взаимодействия зарядов подобны; в обоих случаях сила спадает как r^{-2} . Но гравитационное поле эквивалентно ускорению, оно исчезает при переходе к ускоренно движущейся системе координат. Поэтому существует нестационарное решение Фридмана, в котором в любой точке существует инерциальная система, движущаяся с веществом, и в этой системе нет поля тяжести. Электрическое поле тянет электроны и протоны в противоположные стороны, поэтому никаким преобразованием координат нельзя устранить электрическое поле. Теория Литтлтона и Бонди не удовлетворяет важнейшему общему принципу однородности и изотропии Вселенной.

§ 5. Направление времени

Физик XVIII века без каких-либо обоснований принимал существование абсолютного пространства и независимого от него абсолютного времени с заданным направлением течения времени от прошлого к будущему. При этом, например, механическую задачу о движении он мог решать и для определения будущего (предсказание затмений) и для определения движения в прошлом, приводящего по законам механики к известному состоянию в данный момент (вычисление прошлых затмений). Специальная теория относительности, связавшая время и пространство преобразованиями Лоренца, ничего не изменила в вопросе о знаке времени: как известно, световые конусы ($r=ct$, $r=-ct$), ограничивающие «абсолютное будущее» и «абсолютное прошлое» по отношению к выбранному «событию» (четырёхмерной точке $r=0$, $t=0$), инвариантны относительно преобразования Лоренца. Машина времени Уэллса для путешествия в прошлое невозможна, как и во времена Ньютона.

Вопрос о направлении времени возник около 100 лет назад в связи с теоремами статистики и термодинамики о необратимом возрастании энтропии в замкнутой системе. Были предложения определить будущее как то направление времени, для которого происходит рост энтропии. Сравнительно недавно высказывалась Голдом (1962) идея о связи направления времени («стрелы времени» — arrow of time) и нейтрино. В ряде работ, в том числе и в московском докладе Хойла (ноябрь 1963),

предлагается определить положительное направление времени по расширению Вселенной, т. е. по увеличению расстояний между галактиками; если раньше галактики сближались, то и время, по Хойлу, текло в противоположную сторону по сравнению с современным.

По мнению авторов, принципиально неправильны попытки связать направление времени только с теми или иными конкретными и сложными явлениями. Различие между прошлым и будущим существует в любом процессе, в том числе и в системе, состоящей из двух частиц. Физика локальна и явления, происходящие с парой частиц, не должны зависеть от роста энтропии в какой-то другой, не взаимодействующей с частицами сложной системе или от удаления галактик. В качестве возражения последнему утверждению обычно выдвигают обратимость законов механики и электродинамики — возможность замены t на $-t$ в уравнениях.

Однако для решения уравнений нужно, кроме уравнений, задать начальные условия. В теории, в которой рассматривается поле (для определенности электромагнитное), мы задаем условие излучения, которое несимметрично относительно прошлого и будущего. В самом деле, при движении зарядов они излучают электромагнитные волны, и энергия самих зарядов уменьшается по мере роста времени, в будущем. Потерю энергии можно рассматривать как результат воздействия волнового поля на сами заряды, создающие это поле.

Благодаря обратимости уравнений, можно задать такое поле сходящейся волны, чтобы волна, действуя на заряды, увеличивала бы энергию системы. Однако ясно, что такая постановка задачи искусственна, нет причин для того, чтобы приходящие извне волны имели частоту и фазу, нужные для раскачки системы. Между тем, волны, излучаемые системой, в силу самого их происхождения находятся в фазе с движением системы. Именно это фазовое соотношение обеспечивает то, что поле излучаемой волны тормозит движение зарядов, отбирает от них энергию. Таким образом, условие излучения или, выражаясь более общим образом, принцип причинности позволяет однозначно определить будущее и прошлое.

Попытки изгнать из теории понятие поля, которые делались 10 лет назад, с заменой поля дальнодействием и с рассмотрением на равных основаниях запаздывающего и опережающего взаимодействия, предпринимались в связи с трудностями теории элементарных частиц (Уилер и Фейнман (1945)). В такой теории каждая частица взаимодействует с остальными частицами, но не сама с собой, чтобы избежать бесконечностей в собственной энергии.

Однако вскоре после этого правильный способ рассмотрения взаимодействия частицы с тем полем, которое создает она сама (так называемая теория перенормировок), привел к результатам, блестяще согласующимся с точными опытами: сдвиг Лэмба — Ризерфорда, аномальный магнитный момент электрона. Теории действия на расстоянии были опровергнуты (см. Фейнман (1948, 1967)). Направление времени от прошлого к будущему объективно существует в природе, и космология не вносит в эту проблему ничего принципиально нового. См. также Моррисон (1967).

ДОПОЛНЕНИЕ I

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

В работе А. Д. Сахарова [19676] предлагается новый способ вывода уравнений теории тяготения. Развитие его идей, возможно, окажет непосредственное влияние на астрофизику. Поэтому ниже кратко излагаются эти идеи.

Принимается, как обычно в ОТО, что физическое пространство — время может быть римановым, но не обязано быть плоским. В ОТО действие пишется в виде суммы двух членов (V — четырехмерный объем),

$$S = -mc \int ds - \frac{c^3}{16\pi G} \int R dV, \quad (1)$$

где первый член представляет собой сумму, взятую по траекториям всех частиц. Варьируя первый член, мы получаем уравнение траектории как геодезической. В кривом пространстве положение траектории зависит от кривизны, так что первый член включает в себя воздействие гравитационного поля на движение частиц.

Варьируя метрику пространства в выписанном выше выражении S , мы получаем уравнения самого гравитационного поля: вариация метрики в первом члене доставляет правую часть уравнений

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik}. \quad (2)$$

Грубо говоря, первый член дает выражение силы, с которой частицы стремятся искривить пространство. Такая формулировка соответствует принципу равенства действия и противодействия: есть тождественная связь между действием кривизны на движение частицы и действием частицы на кривизну. Эта связь выражается как раз в том, что оба эти фактора получаются из одного выражения $-mc \int ds$, с ds , вычисленным в римановом пространстве. Второй член, пропорциональный $\int R dV$, при вари-

ции метрики дает левую часть уравнения (2). Можно сказать, что $\int R dV$ описывает упругость пространства, характеризует сопротивление пространства искривлению. Не случайно в плоском пространстве, когда $R=0$, этот член обращается в нуль. Таковы классические представления ОТО.

Для современной квантовой теории элементарных частиц характерно, что наряду с представлением о реальных частицах меняется и представление о вакууме. В вакууме под действием полей могут рождаться пары частиц и античастиц или отдельные нейтральные частицы. Но по законам квантовой механики даже те поля, которые не могут рождать реальные частицы, все же перестраивают вакуум. Идея Сахарова заключается в том, что достаточно в основу теории положить один первый член в выражении действия, $-mc \int ds$ или, точнее, соответствующее квантовомеханическое выражение. Квантовомеханическая теория построена таким образом, что в плоском пространстве она дает S_V вакуума, равное нулю (или равное определенной величине, соответствующей космологической постоянной; см. Дополнение II). Квантовая теория в принципе позволяет вычислить в таком случае изменение действия, которое происходит при замене плоского пространства на искривленное.

Сахаров формулирует это изменение как влияние кривизны пространства на вакуумные флуктуации полей — электронно-позитронных, электромагнитных и т. п. Само гравитационное поле, т. е. пространство и его кривизна, рассматриваются при этом классически, не квантово.

Из общих соображений релятивистской инвариантности и размерности следует, что поправка в действии должна зависеть от инварианта R и должна расходиться. Это значит, что конечная величина получается лишь в предположении, что квантовая теория частиц справедлива лишь при импульсе, меньшем определенного предела p_0 . Поправка к действию равна

$$\frac{kp_0^2}{\hbar} \int R dV,$$

где k — безразмерный численный множитель порядка единицы*). Предполагается, что упругость пространства целиком обусловлена именно этими квантовыми эффектами. Другими словами, Сахаров считает, что константа гравитации, которую вводят из опыта, в действительности, по крайней мере

*) О его точном значении в настоящее время спрашивать нельзя, поскольку нет конкретной картины при импульсах порядка и больше p_0 .

в принципе, могла бы быть вычислена из условия

$$\frac{c^3}{16\pi G} \int R dV \equiv \frac{kp_0^2}{\hbar} \int R dV, \quad G = k' \frac{c^3 \hbar}{L^2}, \quad L = \frac{\hbar}{p_0}$$

Для астрофизики особенно интересно, что развитие этих идей должно в принципе дать и следующие поправки, зависящие от квадратичных инвариантов кривизны, с коэффициентами порядка $\hbar \ln [p_0/mc]$, где m — массы частиц. Таким образом, намечается путь получения поправок к уравнениям Эйнштейна. Эти поправки будут заметны при кривизне порядка 10^{64} см^{-2} и, возможно, дадут условия перехода от сжатия к расширению в окрестности сингулярности. Заметим, что речь идет при этом о нелинейных (по кривизне) поправках к самим уравнениям ОТО, а не о той нелинейности (по отклонениям метрики от плоской), которая (нелинейность) уже содержится в классических уравнениях ОТО.

Выходя за рамки астрофизики (даже релятивистской), заметим, что идея Сахарова, по-видимому, может быть перенесена и на электродинамику и на теорию слабого взаимодействия [Зельдович, 1967а]. В электродинамике обычно вводят действие

$$S = -mc \int ds - \frac{e}{c} \int A_i dx^i - \frac{1}{8\pi} \int (H^2 - E^2) dV,$$

где первый член представляет собой действие свободных заряженных частиц, второй — взаимодействие заряженных частиц и электромагнитного поля, а третий — действие свободного электромагнитного поля. Предлагается в качестве исходных взять первые два члена и получить третий член — действие поля — как результат квантовых вакуумных поправок, как это было сделано с членом $\sim \int R dV$ в теории тяготения. В замечательной работе Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчука (1955) можно найти соображения, благоприятные для такого подхода.

Аналогично можно подойти и к теории промежуточного заряженного бозона W , осуществляющего слабое взаимодействие по реакциям

$$n = p + W^-, \quad W^- = e^- + \nu^-.$$

При этом теория приводит к выводу, что масса электромагнитных квантов должна равняться нулю, в отличие от массы W -бозона. Одно и то же значение p_0 (при определенных предположениях о спектре масс фермионов) дает разумные значения для постоянной гравитации, заряда элементарной частицы и константы слабого взаимодействия.

ДОПОЛНЕНИЕ II

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ

Общие требования, обычно предъявляемые к уравнениям теории тяготения, допускают написание вариационного принципа с действием в виде (V — четырехмерный объем)

$$S = -mc \int ds - \frac{c^3}{16\pi G} \left[\int R dV + \int 2\Lambda dV \right]. \quad (1)$$

При этом уравнения имеют вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \kappa T_{ik}. \quad (2)$$

Здесь Λ есть так называемая космологическая постоянная, а пропорциональные ей величины (ΛdV , Λg_{ik}) называют космологическими членами. Уравнения, очевидно, удовлетворяют условию локальной Лоренц-инвариантности и, в том же смысле, что и уравнения без Λ , содержат в себе уравнения движения, так как по-прежнему $T_{ik, k} = 0$.

Первоначально Эйнштейн выбрал Λ таким образом, чтобы получить стационарное решение с отличной от нуля средней плотностью $T_0^0 = \bar{\rho} c^2 = \text{const}$; для этого нужно $\Lambda = \frac{8\pi G \bar{\rho}}{3c^2}$. После того как было открыто красное смещение, Эйнштейн склонялся к уравнениям с $\Lambda \equiv 0$.

В период до 1930 г. космологические решения с $\Lambda \neq 0$, стационарные и нестационарные, были подробно исследованы, однако, вплоть до 1967 г. не было реальных указаний на необходимость или хотя бы желательность введения Λ .

Статистика квазаров (распределение их по величине красного смещения линий испускания z_{em} и линий поглощения z_{abs} и по видимой величине m) плохо согласуется с простейшими предположениями об их эволюции и о космологической модели с $\Lambda = 0$. В частности, Бербиджи (обзор Е. Бербидж 1967) отмечают удивительное совпадение z_{abs} для шести квазаров в пределах $1,94 < z_{abs} < 1,96$, при общем числе измеренных z_{abs} , равном 10 (учитываем только объекты с z_{abs} , отличающимся от z_{em}).

Из статистики квазаров по z_{em} Петросян, Сальпетер, Шекерс (1967) предположили $\Lambda \neq 0$. И. С. Шкловский (1967b), Н. С. Кардашев (1967) объясняют аномалию с $z_{abs} = 1,95$ тем, что в ходе космологического расширения период с $z \sim 1,95$ был растянут до $5 \cdot 10^{10}$ лет (по Кардашеву). Такое решение возможно при определенном выборе Λ и $\bar{\rho}$: при $H_0 = 100$ км/сек Мпс нужно, например, $\Lambda \approx 10^{-55}$ см⁻² и $\bar{\rho}_0 = 2 \cdot 10^{-30}$.

В настоящее время правильность космологического объяснения аномалии с $z_{abs} = 1,95$ и предлагаемой модели отнюдь не

доказана; эта модель встречается с трудностями — в распределении квазаров по z_{em} нет соответствующего максимума. Вместе с тем в ходе дискуссий выяснилось, что и простейшее предположение $\Lambda \equiv 0$, хотя и не опровергнуто, но не имеет еще и сегодня четкого однозначного доказательства. Можно предвидеть, что в ближайшие годы предстоит большая и трудная работа по определению величины Λ или по крайней мере границ, в которых может быть заключена эта величина. После того как джин выпущен из бутылки (предположено, что, может быть, $\Lambda \neq 0$), легенды говорят, что загнать джина обратно бывает трудно. Даже если отпадет конкретная гипотеза $\Lambda \approx 10^{-55} \text{ см}^{-2}$, мы вернемся не к простодушному $\Lambda \equiv 0$, а к осторожному $-a < \Lambda < b$, и к постепенному мучительному уменьшению a и b . В предвидении такой деятельности представляется полезным краткий обзор вопросов, связанных с Λ . Можно сказать так: введение Λ означает предположение, что вакуум обладает определенной плотностью гравитирующей массы $\rho_V = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}$, соответствующей плотностью энергии $\epsilon_V = \rho_V c^2$ и давлением $P = -\epsilon_V$. При $\epsilon_V > 0$ $P < 0$ и лучше говорить в этом смысле о натяжении.

Переноса Λg_{ik} в правую часть (2), мы видим, что в уравнения тяготения входит сумма энергии частиц в единице объема и энергии вакуума ($T_{00} + \Lambda g_{00}$), давления частиц и давления вакуума ($T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}$).

Подчеркнем релятивистскую инвариантность сделанного предположения о вакууме: при лоренц-преобразовании поток энергии $\epsilon_V \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ компенсируется работой сил давления $P_V \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\epsilon_V \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (где $\beta = v/c$), так что в любой системе остается $T_{0\alpha} \equiv 0$. Формально это видно сразу из того, что космологический член пропорционален g_{ik} . Лоренц-преобразование, по определению, сохраняет g_{ik} локального пространства Минковского.

Постоянные величины ϵ_V и P_V удовлетворяют и термодинамическому соотношению $dE = d(\epsilon_V V) = -P_V dV$. Уравнения космологии при наличии Λ получаются простым добавлением ϵ_V и P_V к энергии и давлению материи в соответствующих уравнениях:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi}{3} G a \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) = -\frac{4\pi}{3} \frac{G a}{c^2} (\epsilon_m + 3P_m + \epsilon_V + 3P_V) = \\ &= -\frac{4\pi}{3} \frac{G a}{c^2} (\epsilon_m + 3P_m - 2\epsilon_V), \\ \frac{\dot{a}^2}{2} &= \frac{4\pi G a^2}{3} \rho \pm \frac{c^2}{2} = \frac{4\pi G a^2}{3c^2} (\epsilon_m + \epsilon_V) \pm \frac{c^2}{2}. \end{aligned}$$

В члене $\pm \frac{c^2}{2}$ знак $+$ относится к открытому (гиперболическому) миру, знак $-$ к закрытому (сферическому) миру. При этом ρ_m , ϵ_m , P_m меняются в соответствии с законом расширения и уравнением состояния (например, при $P_m=0$, $\rho_m = \text{const}/a^3$), тогда как ϵ_V , относящееся к вакууму, выражается через Λ постоянно и не зависит от a .

Особенно отметим, что положительное ϵ_V (при $\Lambda > 0$) создает отталкивание (см. уравнение для \ddot{a}) поскольку в уравнение входит $\epsilon + 3P$.

Приведенные уравнения позволяют проанализировать свойства решений. Так, в частности, чтобы решение было стационарным, $\ddot{a} = \dot{a} = 0$, нужно (при $P_m = 0$) $\epsilon_V = 1/2 \rho_m c^2$, и далее нужно, чтобы мир был замкнутым, с постоянным радиусом

$$a_1 = \frac{c}{\sqrt{4\pi G \rho_m}}.$$

Связь между радиусом мира и красным смещением остается без изменений, так что в настоящее время $a_0 = (1 + 1,95)a_1$, $\rho_{m0} = (1 + 1,95)^{-3} \rho_m$; подставляя эти величины в уравнение для \dot{a}^2 , находим современное значение a . Предположим, что при определенном красном смещении z_1 (по отношению к сегодняшнему наблюдателю) мир был в почти стационарном состоянии. Связь между красным смещением и радиусом мира не изменяется в теории с $\Lambda \neq 0$. Поэтому для сегодняшних величин (индекс 0)

$$a_0 : a_1 = \lambda_0 : \lambda_1 = 1 + z_1; \quad \rho_{m0} = \rho_m (1 + z_1)^{-3}.$$

Подставляя эти величины в уравнения для \dot{a}^2 , выразим сегодняшнее значение постоянной Хаббла H_0 через ρ_m : именно так нашел Кардашев параметры предлагаемой модели.

Отметим некоторые общие свойства космологических решений с $\Lambda \neq 0$. Ограничимся решениями, которые в настоящее время расширяются с определенным значением постоянной Хаббла, в соответствии с наблюдениями. При $\Lambda = 0$, как описано в гл. 17, для полной характеристики решения достаточно определить параметр ускорения q либо плотность вещества ρ : эти величины были связаны соотношением (при $P_m = 0$)

$$q = \frac{1}{2} \rho_0 : \rho_c = \frac{1}{2} \rho_0 : \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

При $\Lambda \neq 0$ нужно знать две величины, ρ_m и Λ ; параметр ускорения

$$q = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_c} - \frac{\epsilon_V}{\rho_c c^2} = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_c} - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G \rho_c}.$$

Значит, нет выбора: либо определение плотности всех видов материи, либо определение q по наблюдениям далеких галактик *), с учетом их эволюции. Только сочетание обоих типов наблюдений позволит найти Λ . Заметим, что в решении Кардашева $q = -1,3$. Сандейдж ранее давал $q = 1,0 \pm 0,5$. Согласно устному сообщению на конгресс в Праге (1967) пересмотр данных может снизить q до 0. Весьма желателен тщательный анализ совместимости $q = -1,3$ с данными по галактикам.

В отличие от случая $\Lambda = 0$, нет простой связи между замкнутостью или незамкнутостью мира и его будущим. Мир может быть замкнутым и неограниченно расширяться, т. е. $a \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ при $\epsilon_V > 0$.

При $\Lambda = 0$ прошлое мира (в однородном изотропном решении Фридмана) соответствовало сингулярности, т. е. бесконечной плотности, возраст мира (отсчитанный от сингулярности) меньше $1/H_0$ — при любом выборе параметров ρ_0, P_0, q .

В теории с $\Lambda \neq 0$ ситуация иная: при данной плотности вещества ρ_0 и при Λ больше определенного критического значения (при этом $q < -1$) решение в прошлом проходит через минимум a , и максимум плотности, но не через сингулярность. В таком решении трудно представить себе возникновение равновесного 3° реликтового излучения; соответствующую область параметров, вероятно, следует отбросить.

Если близко подойти к границе этой области (но не переходя границу), получатся решения с растянутым периодом почти стационарного состояния; именно такой тип решения предлагает Кардашев. В таких решениях мир замкнут, и свет успевает несколько раз обойти весь мир. В работе Петросяна, Сальпетера и Шекереса подробно анализируются наблюдения в этой ситуации, когда лучи, испущенные в одной точке, через определенное время фокусируются снова в противоположной точке замкнутого мира.

В заключение остановимся на вопросе о природе Λ . Возможен подход, в котором определенное Λ и соответствующие ρ_V, ϵ_V, P_V объявляются мировыми постоянными, не подлежащими дальнейшему объяснению. Возможна и другая точка зрения: предположим, что в каком-то нулевом приближении $\Lambda = \rho_V = \epsilon_V = P_V \equiv 0$; отличные от нуля величины, характеризующие вакуум, получаются по определенной причине, должны, в принципе, получаться из каких-то представлений теории элементарных частиц. В настоящее время такой теории нет, как нет и теории, доказывающей, что $\Lambda = 0$.

*) Связь между наблюдаемыми величинами и q при не слишком больших $z < 0,5$ сохраняется при $\Lambda \neq 0$.

Все работы по теории поляризации вакуума и квантовой теории частиц строились на основе того, что в лабораторной физике мы измеряем разности энергии системы частица + вакуум и одного вакуума; отличное от нуля ϵ_V сокращается в вычислениях.

Величина ϵ_V входит лишь в гравитационную теорию. Хотя теории и нет, однако уже сейчас можно высказать существенные соображения с помощью анализа размерностей.

Теория элементарных частиц позволяет построить величину размерности ϵ_V : в этой теории есть энергия mc^2 , длина \hbar/mc , плотность $n = (mc/\hbar)^3$ и $\epsilon_V = mc^2 (mc/\hbar)^3$. Полученная таким образом величина заведомо не годится: получаем для массы электрона ϵ_V порядка 10^{27} , а для массы протона ϵ_V порядка 10^{35} . По-видимому, именно на сопоставлении такого «теоретического» ϵ_V с тем, что допустимо в космологии, основывалось подсознательное отвращение физиков к $\Lambda \neq 0$: если уж нельзя взять большое Λ , пусть не будет никакого!

Под влиянием предложений астрономов было отмечено (Зельдович, 1967b), что разумное ϵ_V можно получить, умножая $mc^2 (mc/\hbar)^3$ на безразмерную величину $Gm^2/\hbar c$, характерную для гравитации.

Выражение такого рода соответствует следующей идее: теория элементарных частиц, включая их электромагнитное и всякое другое (кроме гравитационного!) взаимодействие, такова, что дает $\epsilon_V \equiv 0$. Гравитация нарушает этот принцип. За подробностями отсылаем к цитированной заметке.

Любопытно, что получающиеся для современного периода выражения H , ρ_m , a похожи на соотношения, которые предлагались Дираком и Эддингтоном. Однако в предлагаемом подходе константа Λ жестко связана с константами элементарных частиц и константой тяготения G . Радиус мира $a \simeq 1/\sqrt{\Lambda}$, постоянная Хаббла $H \approx c\sqrt{\Lambda}$, причем a и H меняются со временем; безразмерные отношения $a : 1/\sqrt{\Lambda}$, $H : c\sqrt{\Lambda}$ также меняются. Этим предлагаемые выражения отличаются от формул, в которых предполагалось, что меняется со временем сама константа G .

ДОПОЛНЕНИЕ III

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ И ПРИЕМЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

В ньютоновской теории сила тяготения сферического тела убывает как $1/r^2$. В поле тяготения можно мерить только относительные ускорения. Относительное ускорение (обозначим через A) двух пробных частиц в поле тяготения убывает как $1/r^3$. Это — общеизвестные приливные силы. Квадрупольная состав-

ляющая поля тяготения тела или системы несферической формы порядка GMR^2/r^4 , где M — массы, разнесенные на расстояние R и создающие квадрупольный момент Q . Относительные ускорения пробных частиц от этой составляющей поля порядка $A \approx GMR^2l/r^5$, где l — расстояние между пробными частицами. Если квадрупольный момент периодически зависит от времени (например, при вращении двойной звезды), эти относительные ускорения меняются в той же фазе. Таков вывод ньютоновской теории. Релятивистская теория тяготения утверждает, что выводы о квадрупольной составляющей несправедливы при $r > cT$, где T — характерное время изменения квадрупольного момента источника поля. Начиная с этого расстояния, относительное ускорение двух пробных тел меняется как $1/r$; тогда можно говорить о гравитационной волне: при периодическом изменении квадрупольного момента фаза относительного ускорения пробных тел смещена по сравнению с фазой в источнике на угол r/cT . Из условия непрерывности A при $r = cT$ получаем оценку для величины A в волновой зоне: $A \approx \frac{GMR^2l}{(cT)^4 r}$. На больших расстояниях от источника относительное ускорение пробных тел от статического поля источника (убывающее как $1/r^3$) пренебрежимо мало по сравнению с относительным ускорением в гравитационной волне, убывающим как $1/r$. Именно это относительное ускорение в волне и должно измеряться при приеме гравитационных волн.

ДОПОЛНЕНИЕ IV

О ВСПЫШКАХ СВЕРХНОВЫХ *)

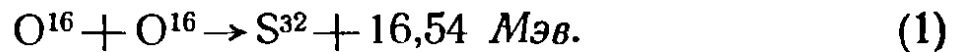
За сравнительно короткое время (1965—1967 гг.) опубликован ряд работ, которые представляют собой весьма крупный шаг в теории поздних стадий эволюции и гравитационного коллапса массивных звезд ($M > M_{\odot}$). Очень интересно установление связи этих работ с наблюдаемыми вспышками сверхновых. К сожалению, классическая теория эволюции звезд, учитывающая все тонкости ядерного горения, конвекции, лучистой теплопроводности столкнулась со специфическими трудностями еще на стадии гелиевого горения (см. Хоффмейстер и др. (1964а, 1964б, 1965), Ибен (1964)). Поэтому поздние стадии эволюции с горением углерода, кислорода и т. д. вплоть до образования железа приходится пока рассматривать приближенно, например, с использованием политропных моделей. Этому вопросу посвящена содержательная работа Фаулера и Хойла (1964). Одним из важ-

*) Дополнение IV написано В. С. Имшенником и Д. К. Надежиным.

ных результатов этой работы является построение приближенной модели предсверхновой, т. е. звезды в момент, непосредственно предшествующий потере механической устойчивости и гравитационному коллапсу. В политропном газовом шаре с показателем политропы $n=3$ на фазовой плоскости плотность — температура все газовые частицы звезды проходят один и тот же эволюционный трек. Это обстоятельство позволяет ограничиться в основном рассмотрением локальной эволюции в центральной точке звезды с учетом важнейших физических процессов, происходящих при высоких плотностях и температурах, таких, как вклад релятивистских электронно-позитронных пар, радиации, излучения нейтрино, различных ядерных реакций и β -взаимодействий. Количественные выводы Фаулера и Хойла относятся только к звездам очень большой массы ($M > 10 M_{\odot}$), где можно пренебречь вырождением электронов. По модели Фаулера и Хойла предсверхновая для их типичной звезды с массой $30 M_{\odot}$ состоит из центрального железного ядра ($3 M_{\odot}$), кислородной мантии ($17 M_{\odot}$), причем мантия и ядро имеют вместе структуру политропы, и разреженной водородно-гелиевой оболочки ($10 M_{\odot}$). В работе показано, что непосредственной причиной потери механической устойчивости звезды и последующей имплозии является фоторасщепление ядер железа на гелий и нуклоны. Начало имплозии происходит для типичной звезды с массой ядра и мантии $20 M_{\odot}$ при температуре центра $T_{\text{ц}} \simeq 5 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$ и плотности центра $\rho_{\text{ц}} \simeq 10^7 \text{ г/см}^3$. Перед этим в процессе эволюции центральные области звезды догорают до железа, сохраняя гидростатическое равновесие, хотя уже при $T_{\text{ц}} \geq 0,5 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$ основным механизмом энергетических потерь, определяющим ускоренный темп эволюции, становится объемное нейтринное излучение, а не фотонные потери с поверхности звезды.

Таким образом, звезда подходит к упомянутому выше критическому состоянию. Важнейший вопрос состоит в следующем: каким образом при этом возникает взрыв, выброс массы наружу, выделение положительной энергии? Ведь достижение критического состояния знаменует собой начало быстрого сжатия звезды или по крайней мере ее центральной области. Лишенные поддержки внешние слои должны в свою очередь падать внутрь. Фаулер и Хойл пришли к выводу, что наблюдаемый эффект вспышки сверхновой может возникнуть в ходе имплозии из-за детонации кислорода мантии звезды. Следует отметить, что существование кислородной мантии одновременно с железным ядром связано с предположением об отсутствии перемешивания вещества звезды в процессе эволюции. Итак, предлагается

рассматривать ядерную реакцию:



Характерную энергию вспышки сверхновой II типа, которые связываются как раз с массивными звездами, в 10^{52} эрг может дать тогда сгорание $10 M_{\odot}$ кислорода. Таким образом, Фаулером и Хойлом указано конкретное решение проблемы о связи имплозии с эксплозией и разлетом звезды в пространство. Динамика самой имплозии в описываемой работе практически не могла быть проанализирована, так как все оценки делались в грубом предположении свободного падения и адиабатического характера процесса. В частности, был сделан неправильный вывод о несущественности нейтринного излучения в ходе имплозии.

В большой работе Колгейта и Уайта (1966) впервые были сделаны расчеты динамики имплозии для целого ряда масс звезд ($10M_{\odot}$, $2M_{\odot}$, $1,5M_{\odot}$, $2M_{\odot}$ + оболочка красного гиганта в $\sim 8M_{\odot}$). В расчетах были приняты во внимание эффекты релятивистского вырождения электронов и нерелятивистского вырождения нуклонов. Характер принятого в работе нейтринного излучения (оно имело смысл модифицированного урка-процесса, хотя не учитывало его должным образом) был таков, что центральная область звезды в ходе имплозии охлаждалась до низких температур и за счет вклада в давление нерелятивистских вырожденных нейтронов останавливалась вблизи ядерной плотности вещества ($\rho_{\text{ц}} \sim 10^{15}$ г/см³). Однако сама по себе остановка ядра звезды, похожего на холодную нейтронную звезду, еще не вызывала существенного выброса массы внешней оболочки. Кроме того, остановка происходила уже в той области, где эффекты ОТО могли стать существенными (динамика имплозии рассматривалась в рамках обычной нерелятивистской гидродинамики с гравитацией в ньютоновском приближении). Важным новым достижением в работе Колгейта и Уайта является установление непрозрачности звезды для излученных в центре нейтрино на некотором этапе имплозии. В результате возникновения непрозрачности плотность энергии нейтрино и антинейтрино достигает в ядре звезды равновесного значения, а их энергия частично выделяется во внешней оболочке (авторы называют это депозицией). Существенно отметить, что без учета мощной ударной волны, образующейся на границе остановившегося ядра звезды и падающей оболочки и имеющей по оценкам температуру около 50 Мэв ($5 \cdot 10^{11}$ К), вывод о непрозрачности был бы не столь обоснованным. Дело заключается в специфической зависимости сечений поглощения и рассеяния нейтрино в веществе от энергии нейтрино ($\sigma \sim E^2$), так что нейтрино высоких энергий, рожденные в области фронта ударной волны, задерживаются веще-

ством оболочки гораздо эффективнее нейтрино, излученных из центральных охлаждающихся областей. Конечно, конкретный вычислительный прием Колгейта и Уайта — депозиция нейтрино — в основном носит интуитивный характер. Поэтому количественные заключения о массе сброшенной оболочки звезды (а она составляет значительную часть всей массы модели), характер расходящейся ударной волны, доля космических лучей, внешняя радиация в оптическом диапазоне могут серьезно измениться при уточнении физической стороны процессов. По поводу роли детонации O^{16} в сбросе оболочки Колгейт и Уайт приходят к отрицательному выводу на основе модельного расчета. Если детонация происходит в движущемся к центру звезды слое, то ее энергия не обязательно приведет к торможению этого движения и последующему разлету, а в основном ускорит движение вещества к центру звезды.

Таким образом, рассмотрение динамики имплозии показало, что нейтринные процессы, в особенности нейтринная непрозрачность, играют важнейшую роль для развития эксплозии и вспышки сверхновой. Другими словами, без учета нейтринного переноса энергии из центра звезды в оболочку нельзя получить выброса заметной доли массы звезды с наблюдаемой величиной энергии. В работе Колгейта и Уайта имплозия звезд малой массы ($2M_{\odot}$ и $1,5M_{\odot}$) приводит к тем же самым результатам, что и имплозия звезд большой массы ($10M_{\odot}$), хотя непосредственной причиной имплозии является не распад железа, а поглощение вырожденных электронов ядрами (при плотности $\rho \geq \geq 10^{11} \text{ г/см}^3$ фермиевская энергия электронов становится $\geq 20 \text{ Мэв}$, что вполне достаточно для нейтронизации любых ядер, даже He^4).

Вскоре вслед за работой Колгейта и Уайта появились две интересные статьи Арнетта из группы Камерона (1966, 1967), в которых основное внимание сконцентрировано на нейтринных процессах. Арнетт, критически оценив приближение депозиции нейтрино, использовал другой способ. После возникновения нейтринной непрозрачности для описания переноса энергии им было принято приближение нейтринной теплопроводности, построенное по аналогии с лучистой теплопроводностью. Следует подчеркнуть, что идеологически эти работы являются развитием концепции Колгейта и Уайта, но представляются физически более последовательными. Однако недостаточность наших знаний в области нейтринной физики и сложность нейтринных взаимодействий не позволяют сейчас полностью реализовать все преимущества приближения нейтринной теплопроводности. При определении росселандовой средней нейтринной непрозрачности Арнетт учитывает только эффект рассеяния нейтрино на электронах, полагая, что таким путем оценена минимальная величина

непрозрачности. Вероятно, в этих оценках содержится большой произвол, даже в утверждении об их минимальности. В частности, сомнителен способ определения концентрации электронов. К тому же в этой работе показано, что конечный результат сброса оболочки весьма чувствителен к величине нейтринной теплопроводности. Арнетт (1966) учел более полно источники нейтринного излучения, чем это было сделано раньше. С этим в основном связано получение горячего нейтронного ядра звезды после остановки имплозии, а не холодного нейтронного ядра Колгейта и Уайта. В согласии с Колгейтом и Уайтом показано, что без учета нейтринной непрозрачности сброс оболочки практически не осуществляется. В своей первой работе Арнетт приходит к выводу о хорошем согласии своих результатов с результатами Колгейта и Уайта. Для испытания структурной чувствительности там же был приведен дополнительный расчет имплозии с совершенно другой моделью предсверхновой, полученной ранее в работе Чиу (1966). В модели Чиу, полученной по классической схеме эволюции без использования приближения политропы и с включением нейтринных потерь, имеется очень плотное, почти изотермическое ядро с плотностью в центре $\rho_{\text{ц}} \sim 10^9 \text{ г/см}^3$. Имплозия в этом случае обусловлена, аналогично малым массам Колгейта и Уайта, электронным захватом. Окончательные результаты, несмотря на большую разницу в структуре предсверхновых (конденсированная модель и модель политропы с $n=3$), в общем похожи друг на друга. В работе Арнетта (1966) отмечена еще возможная большая роль мюонных нейтрино, для которых оболочка звезды прозрачна при любой плотности и возникновение которых обусловлено спонтанным распадом μ -мезонов, рождающихся парами в горячем нейтронном ядре звезды *).

Следующая работа Арнетта (1967) уточняет уравнение состояния вещества, которое в предыдущей работе было очень грубым, включает излучение мюонных нейтрино, дополнительно учитывает модифицированный урка-процесс, а также содержит некоторые другие физические уточнения задачи. В результате расчетов серии масс ($32M_{\odot}$, $8M_{\odot}$, $4M_{\odot}$, $2M_{\odot}$) автор приходит к принципиально иным выводам, чем раньше. Для двух больших масс имплозия центральных областей звезды не останавливается и не происходит сброса массы. Здесь на результат, ве-

*) Этот процесс, вообще говоря, становится существенным лишь при очень высоких температурах. Для сравнения можно указать $m_{\mu}c^2/k = 1,2 \cdot 10^{12} \text{ }^{\circ}\text{K}$. Эффективная степень температурной зависимости энергетических потерь мюонными нейтрино, как легко показать, равна $1,2 \cdot 10^{12}/T$, и соответственно она может быть очень велика в той области, где этот процесс становится существенным.

роятно, существенно повлияли мюонные нейтрино, которые унесли огромную энергию $\sim 10^{54}$ эрг (в то время как электронные нейтрино уносят во внешнее пространство $\sim 10^{52}$ эрг) и не дали остановиться имплозии. Меньшее влияние мюонные потери энергии оказали на массы $4 M_{\odot}$ и $2 M_{\odot}$, где результаты похожи на предыдущие. Например, при массе модели $2 M_{\odot}$ произошел сброс оболочки, и осталось горячее нейтронное ядро с массой $0,57 M_{\odot}$, которое после остывания может стать устойчивой нейтронной звездой. Таким образом, по Арнетту (1967) звезды с массой, несколько большей $4 M_{\odot}$, испытывают в конце концов релятивистский коллапс и не дают эффекта вспышки сверхновой. Только для звезд достаточно малой массы имплозия может сопровождаться вспышкой сверхновой. При оценке окончательных выводов Арнетта, вероятно, нужно напомнить о большой чувствительности результатов расчета к заданной величине нейтринной непрозрачности. Поэтому, например, указанная критическая масса ($4 M_{\odot}$) может серьезно измениться.

Независимым образом рассмотрение динамики имплозии массивной звезды ($10 M_{\odot}$, $30 M_{\odot}$) было предпринято Ивановой, Имшенником и Надежиным (1967). В качестве предсверхновой была принята модель политропы с индексом $n=3$. Уравнение состояния вещества, учитывающее все основные физические процессы, было аппроксимировано для удобства машинного счета аналитическим образом:

$$P(\rho, T) = \frac{k\rho T}{\mu m_p} + \frac{a}{3} T^4, \quad (2)$$

$$E(\rho, T) = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_p} + \frac{aT^4}{\rho} + \frac{\Delta Q}{2Am_p} \left[1 + \operatorname{th} \left(\frac{T - T_0}{\Delta T_0} \right) \right]. \quad (3)$$

Здесь μ — молекулярный вес, который должен быть принят постоянным для выполнения термодинамического тождества*), третий член в соотношении (3) эффективно описывает увеличение энергии при распаде железа на He^4 и нейтроны. В соответствии с этим было принято $T_0 = 6,5 \cdot 10^9$ °К, $\Delta T_0 = 1 \cdot 10^9$ °К, $\Delta Q = 124,5$ Мэв, $A = 56$, $\mu = 56/27$ **). На фазовой плоскости $\rho - T$ (плотность — температура) показатель адиабаты γ , характеризующий механическую устойчивость звезды, имеет специфический овраг с $\gamma < 4/3$ (см. рис. 33, а). Его границы в этой аппроксимации представляют собой линии $T = \text{const}$ и равны $T =$

*) Кстати, этому важному условию не удовлетворяет интерполяционное уравнение состояния из работы Колгейта и Уайта (1966).

***) В данном случае описан только переход $\text{Fe}^{56} \rightleftharpoons 13\text{He}^4 + 4n$, но не $\text{He}^4 \rightleftharpoons 2p + 2n$.

$$= T_0 \pm 2,119 \cdot 10^9 \text{ }^\circ\text{K:}$$

$$\gamma = \beta + \frac{2(4 - 3\beta)^2}{3 \left[8 - 7\beta + \beta b_0 \text{ch}^{-2} \left(\frac{T - T_0}{\Delta T_0} \right) \right]}, \quad (4)$$

где β — отношение газового давления к полному, а $b_0 = \frac{\mu \Delta Q}{3kA \Delta T_0} = 17,835$. Описанное аппроксимирующее уравнение состояния удовлетворительно согласуется с численным уравнением состояния.

Возможность охарактеризовать механическую устойчивость звезды с помощью показателя адиабаты γ и выделить его критическое значение $4/3$ связана с пренебрежением эффектами ОТО. Неустойчивость звезды фактически наступает при значении показателя адиабаты (усредненном по звезде) несколько большем $4/3$ (см. § 4, гл. 10). Поэтому устойчивая область на правом берегу оврага на рис. 33, а, имеющая превышение γ над критическим значением, существенно сужается и не играет роли в остановке имплозии звезды. Остановка происходит в области высоких плотностей $10^{11} \div 10^{15} \text{ г/см}^3$, не изображенных на рис. 33, а, где показатель адиабаты, заметно превышающий критическое значение $4/3$, обязан нерелятивистским нуклонам.

Нейтринное излучение включало механизмы аннигиляции электронно-позитронных пар и модифицированного равновесного урка-процесса сначала на ядрах группы железа, потом на свободных нуклонах:

$$\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}_{\nu\beta} + \mathcal{E}_{\nu e^+e^-}, \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_{\nu\beta} = 1,3 \cdot 10^9 \alpha(T_9) T_9^5 \Phi \left(\frac{\rho}{T^3} \right) \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{сек}}, \quad (6)$$

$$\mathcal{E}_{\nu e^+e^-} = 4,3 \cdot 10^{15} \frac{T_9^9}{\rho} \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{сек}}. \quad (7)$$

В формуле (6) множитель $\alpha(T_9)$ учитывает переход вещества из железа в свободные нуклоны и равен

$$\alpha(T_9) = x_{\text{Fe}} + 612(x_n + x_p), \quad (8)$$

где x_n , x_p , x_{Fe} — весовые концентрации нуклонов и железа. Число 612, равное $\frac{(ft)_{\text{Fe}}}{(ft)_{n,p}} \cdot 56$, получалось при максимальной оценке нейтринного излучения ядер группы железа, $(ft)_{\text{Fe}} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ сек}$ согласно Фаулеру и Хойлу (1964) и $(ft)_{n,p} = 1,19 \cdot 10^3 \text{ сек}$. Функция $\alpha(T_9)$ аппроксимировалась в хорошем соответствии с численными расчетами линейной функцией от $T_9 = 7$ до $T_9 = 20$. Функция $\Phi(\rho/T^3)$, всегда меньшая единицы, необходима в (6) для учета вырождения электронного газа.

Единственное предположение, использованное при выводе формулы (6), которую можно назвать высокотемпературным приближением самого общего равновесного урка-процесса, заключается в следующем неравенстве: $kT \gg Q (mc^2)$, где Q — энергия β -распада с включением энергии покоя электрона. При $\rho/T^3 \rightarrow 0$ $\Phi \rightarrow 1$, так что получается известное асимптотическое выражение для невырожденного электронного газа:

$$\mathcal{E}_{v\beta} = 7,8 \cdot 10^{11} T_9^5 \frac{\text{эрг}}{2 \cdot \text{сек}}. \quad (9)$$

Для характеристики функции Φ ниже приводится сокращенная таблица ее значений вместе с величиной химического потенциала электронов в единицах kT , в зависимости от аргумента $x = 7,086 \cdot 10^{-5} \rho/T_9^3$:

$\mu_e kT$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
x	6,15	28,9	117,0	447,0	$1,64 \cdot 10^3$	$5,77 \cdot 10^3$	$1,95 \cdot 10^4$	$6,35 \cdot 10^4$
Φ	0,891	0,658	0,437	0,277	0,172	0,107	0,066	0,041

Применимость формулы (6) еще подразумевает, что времена релаксации кинетического равновесия β -процессов достаточно малы по сравнению с характерными гидродинамическими временами. Это условие контролировалось в процессе счета. Таким образом, в описываемой работе ставилась задача физически корректного учета наиболее эффективного в условиях имплозии источника нейтринного излучения — модифицированного равновесного урка-процесса.

Расчет горения кислорода в ядерной реакции (1) производился по формуле

$$\frac{dx}{dt} = -f(\rho, T, x) = -\rho x^2 \varphi(T) \simeq -\rho x^2 \left(\frac{T_9}{5,3}\right)^{26}. \quad (10)$$

Здесь x — весовая концентрация кислорода. В интервале температур $T_9 \simeq 2 \div 5$ формула (10) с точностью до множителя порядка 1,5 аппроксимирует точное выражение $\varphi(T)$, данное Фаулером и Хойлом (1964). Необходимость внимательного анализа роли детонации кислорода диктуется еще такими соображениями. Детонация кислорода энергетически способна вызвать разлет всей звезды: с учетом ядерной энергии полная энергия звезды в момент потери устойчивости положительна. Здесь имеется принципиальное отличие от нейтринных механизмов и

ударных волн, когда при отрицательной полной энергии происходит выброс только части массы, а остаток попадает в новое равновесное состояние или коллапсирует. Энерговыделение при горении кислорода равно

$$\mathcal{E}_\partial = \frac{\Delta q}{2Am_p} f(\rho, T, x), \quad \Delta q = 16,54 \text{ Мэв}, \quad A = 16. \quad (11)$$

Для обоснования преимущественного синтеза кислорода было оценено время конкурирующего процесса — фоторасщепления кислорода. Оценка показала, что оно при характерных температурах и плотностях сгорания кислорода значительно превышает время горения. Горение кислорода в расчете приобретает черты детонации и приводит к существенному выделению энергии.

Сферически-симметричная система уравнений газодинамики в лагранжевом виде с учетом гравитации, энергетических членов — \mathcal{E}_v из (5) и \mathcal{E}_∂ из (11), уравнения состояния из (2) и (3) интегрировались численным методом. В отличие от численных методов, в предыдущих работах использовалась неявная разностная схема, свободная от численной неустойчивости. Лишь уравнение горения кислорода (10) считалось по явной схеме с мелким шагом по времени. Разностная схема была записана в дивергентной форме, что обеспечило выполнение закона сохранения энергии с точностью до нескольких единиц в пятом знаке.

Путем расчетов было исследовано условие потери механической устойчивости. При заданной полной массе звезды M и молекулярным весе μ свободным параметром для политропы $n=3$ служил начальный радиус R_0 . Путем постепенного уменьшения R_0 устанавливалось его критическое значение. Оказалось, что $R_{0 \text{ кр}} = R_{1/3} / \xi_{\text{кр}}$, где $\xi_{\text{кр}} \simeq 1,25$, а $R_{1/3}$ соответствует условиям, когда центральная точка звезды попадает на линию $\gamma = 4/3 \left(T_{\frac{4}{3} \text{ ц}} = 4,4 \cdot 10^9 \text{ К} \right)$. Критические условия лишь немного опережают условия обращения в нуль средней взвешенной величины

$$\overline{(\gamma - 4/3)} = \frac{\int_0^M \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) \frac{P}{\rho} dM'}{\int_0^M \frac{P}{\rho} dM'}, \quad \overline{(\gamma - 4/3)} = 0 \text{ при } \xi_{\text{кр}} = 1,29, \quad (12)$$

выражающей критерий механической устойчивости звезды по отношению к основной моде возмущения.

В отличие от расчетов Колгейта, Уайта (1966) и Арнетта (1966, 1967), было показано, что имплозия не останавливается, если не учитывать поглощение нейтрино в оболочке звезды. Но в принципе возможна временная остановка центральной области звезды с последующим развитием детонации кислорода и сбросом оболочки. Возобновившаяся имплозия приобретает характер коллапса и развивается одновременно со сбросом оболочки. Однако без остановки центральной области, хотя бы и временной, сброса оболочки не происходит. Этот результат согласуется с последними расчетами Арнетта (1967). При этом подчеркнем, что именно увод энергии нейтрино является причиной безостановочной имплозии, так как по уравнению состояния могут выполняться условия механической устойчивости звезды (на правом берегу оврага неустойчивости фазовой плоскости $\rho - T$). Численные результаты здесь существенно подкрепляются найденным автомодельным решением, которое имеет место для упрощенных условий:

$$\mathcal{E}_\nu = a \rho^s T^n, \quad a > 0, \quad P = \frac{k}{\mu m_p} \rho T, \quad E = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (13)$$

$$\mu = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}.$$

В этом случае уравнения содержат два параметра с независимой размерностью: гравитационная постоянная и постоянная в законе потерь энергии нейтринным излучением. Численное решение в окрестности центра асимптотически выходит на автомодельный режим, одним из свойств которого является постоянное отношение гравитационной силы и градиента давления в каждой точке. При $s=0$, $n=6$, $\gamma=5/3$ в соотношениях (13), для центра звезды $q = -(Gm/r^2/1/\rho dp/dr)_{r=0} = 1,7$, для бесконечно удаленной точки ($r \rightarrow \infty$), $q=2,6$. Важно отметить, что при заданном законе нейтринных потерь режим свободного падения не достигается вплоть до момента бесконечной плотности в центре звезды. В процессе имплозии одновременно со сжатием происходит нагрев центральной области.

По-видимому, для закона излучения нейтрино, принятого Колгейтом и Уайтом (1966), соответствующее автомодельное решение дает охлаждение центра. Для непосредственной проверки влияния закона нейтринного излучения было задано согласно Колгейту и Уайту (1966)

$$\mathcal{E}_\nu = 8,5 \rho^{5/3} T_9 \frac{\varepsilon \rho^2}{2 \cdot \text{сек}}.$$

Расчет с прежним уравнением состояния (2) и (3) продемонстрировал охлаждение центральной области звезды в ходе сжатия. Процесс сжатия хорошо представляется в фазовой плоскости

$\rho - T$, так как все газовые частицы звезды проходят приблизительно по одному и тому же треку из-за близости показателя адиабаты к значению $4/3$. Это обстоятельство было уже отмечено и использовано в предыдущих работах.

Горячее нейтронное ядро звезды все же частично вырождено, так как $\mu_e/kT = 2 \div 3$, где μ_e — химический потенциал электронного газа. Это приводит к снижению в несколько раз скорости нейтринного излучения, согласно формуле (6) и таблице функции Φ . Нейтринное излучение начинает определять газодинамический процесс с $T_{\text{ц}} \geq 20 \cdot 10^9 \text{ К}$. При этих условиях времена релаксации β -процессов становятся существенно меньше соответствующих газодинамических времен. Тем самым оправдано исходное предположение формулы нейтринных потерь (6). При этих же условиях известно отношение концентраций нейтронов и протонов, что весьма важно для дальнейших расчетов непрозрачности нейтрино.

Следуя выводу Колгейта и Уайта (1966) о роли нейтринной непрозрачности, в описываемой работе была сделана попытка учесть поглощение нейтрино. Для этого в центральной точке звезды было численно решено уравнение переноса нейтрино, другими словами, найдена спектральная нейтринная интенсивность. Затем была составлена величина эффективного излучения энергии в центральной точке звезды путем вычитания из излученной энергии поглощенной энергии и интегрирования по всему спектру энергий нейтрино. При расчетах нейтринной интенсивности можно было принимать во внимание только поглощение нейтрино на нуклонах, так как рассеяние нейтрино на электронах в условиях преимущественной концентрации нейтронов несущественно. В процессе интегрирования по радиусу звезды из газодинамического расчета брались функции $\rho(r)$ и $T(r)$, но отношение концентраций нейтронов и протонов, а также химический потенциал электронов брались постоянными, равными их значениям в центре звезды. Последние две величины фактически слабо зависят от радиуса в окрестности центра.

Основное приближение в расчете поглощения нейтрино состояло в том, что снижение потерь энергии, найденное для центра звезды, приписывалось всем точкам звезды в данный момент времени. Для антинейтрино производилась аналогичная процедура. При этом следует иметь в виду, что пробег антинейтрино заметно больше пробега нейтрино. Главным образом потому, что концентрация нейтронов в 10—100 раз превышает концентрацию протонов. Совершенно ясно, что в описываемом расчете не осуществлялось перераспределение по звезде энергии нейтринного излучения, подобное сделанному Колгейтом, Уайтом и Арнеттом, что, конечно, является недостатком расчета.

В расчете после прекращения нейтринных потерь имплозия центральной области звезды останавливается, затем образуется ударная волна с последующей детонацией кислорода и выбросом оболочки. Характеристики сброшенной оболочки и полная энергия нейтринного излучения даны ниже:

$\Delta M/M_{\odot}$	$E_{\text{кин}}^{\text{об}}$, эрг	$p^{\text{об}}$, $\frac{\text{г}\cdot\text{см}}{\text{сек}}$	$v_{\text{п}}$, $\frac{\text{км}}{\text{сек}}$	E_{ν} , эрг
0,25	$2,5 \cdot 10^{50}$	$4,5 \cdot 10^{41}$	9800	$0,76 \cdot 10^{52}$

$\Delta M/M_{\odot}$ — масса сброшенной оболочки в солнечных единицах; $E_{\text{кин}}^{\text{об}}$ — кинетическая энергия оболочки; $p^{\text{об}}$ — «импульс» оболочки, характеризующий среднюю скорость, $p^{\text{об}} = \int_{\Delta M} v dM'$; $v_{\text{п}}$ —

параболическая скорость на поверхности равновесной звезды; E_{ν} — полная энергия нейтринного излучения. Эти результаты, особенно $E_{\text{кин}}^{\text{об}}$ и $\Delta M/M_{\odot}$, мало чувствительны к условиям формирования ударной волны во внутренних слоях звезды. При этом детонация кислорода, который сгорает почти целиком, увеличивает примерно на порядок массу и энергию оболочки. Энергия детонации намного больше $E_{\text{кин}}^{\text{об}}$ и равна $0,3 \cdot 10^{52}$ эрг, т. е. только небольшая ее доля реализуется в кинетическую энергию оболочки (примерно 10%). В этом смысле наши выводы согласуются с заключением Колгейта и Уайта (1966) о неэффективности процесса детонации для эксплозии. Сделанные оценки, по-видимому, исключают также эффект детонации гелия в поверхностных слоях звезды. В ударной волне получается на поверхности звезды (на уровне, где до поверхности остается 10^{-5} всей массы звезды) температура $(1 \div 2)10^8$ °К и плотность ~ 10 г/см³, что явно недостаточно для быстрого сгорания гелия.

Таким образом, без учета перераспределения энергии электронных нейтрино и излучения энергии мюонных нейтрино, рассмотренный механизм дает на полтора—два порядка заниженную энергию взрыва по сравнению со средней энергией, наблюдаемой при вспышках сверхновых. Однако характеристики сверхновых II типа показывают сильные вариации, и полученное значение энергии лежит вблизи нижней границы. Для количественного исследования роли перераспределения энергии электронных нейтрино, по-видимому, нужно провести сложные новые расчеты на основе уравнения переноса нейтрино. На современном этапе исследований важность этого эффекта следует из описанных выше работ Колгейта и Уайта (1966) и Арнетта (1966, 1967),

Очень важным является вопрос о кривой блеска сверхновой. Сопоставление кривых блеска, полученных из теоретических расчетов, с наблюдаемыми должно дать ценную информацию о параметрах, характеризующих звезду непосредственно перед вспышкой, таких, как масса, радиус, скорость спадания плотности вблизи поверхности звезды. Распространение сильной ударной волны в среде с понижающейся плотностью обладает тем свойством, что значения газодинамических величин (давления, скорости и т. д.) очень слабо зависят от предыстории возникновения ударной волны. Основными характеристиками, определяющими процесс, являются полная энергия, заключенная в движущемся газе, и закон спадания плотности. Для степенного закона спадания плотности, который приближенно выполняется во внешних слоях звезды, распространение сильной ударной волны является автомодельным (Гандельман, Франк-Каменецкий, 1956). и результат совсем не зависит от конкретного вида начальных условий. Это обстоятельство позволяет при теоретическом изучении взрыва сверхновой рассматривать выход ударной волны отдельно от механизма генерации ударной волны вблизи центра звезды. Связующим параметром является полная энергия газа, движущегося за ударным фронтом. Выброс оболочки ударной волной исследован в работах Надежина и Франк-Каменецкого (1962, 1964b). В работе Имшенника и Надежина (1964) была сделана попытка объяснить кривую блеска сверхновой II типа путем расчета выхода ударной волны с учетом лучистой теплопроводности и рекомбинации водорода в расширяющейся оболочке. Основная идея этой работы состоит в том, что кривая блеска сверхновой есть результат высвечивания тепловой энергии внешних слоев звезды, нагретых сильной ударной волной. В качестве предсверхновых были взяты политропы индекса 3 с массами $15 M_{\odot}$ и $50 M_{\odot}$, радиусами соответственно $9 R_{\odot}$ и $20 R_{\odot}$. Выход ударной волны на поверхность сопровождается резким пиком светимости. Хотя светимость в максимуме и достигает наблюдаемой величины у сверхновых II типа ($M_{\text{bol}} \sim -21^m$), но продолжительность свечения ничтожно мала (~ 20 мин вместо ~ 20 дней). Светимость падает из-за быстрого расширения и адиабатического охлаждения внешних слоев, поскольку плотность еще довольно высока, и лучистой теплопроводностью можно пренебречь. В результате дальнейшего понижения температуры начинается рекомбинация водорода, основным механизмом охлаждения становится перенос энергии излучением, и возникает так называемая волна охлаждения, впервые описанная Зельдовичем, Компанейцем и Райзером (1958). Кривая блеска выходит на плато со значением светимости $M_{\text{bol}} = -13^m \div -15^m$. Такая светимость сохраняется при-

близительно в течение $50 \div 100$ дней. Излучение поддерживается в основном за счет энергии, освобождающейся при рекомбинации водорода. Этот участок теоретической кривой блеска хорошо совпадает (как по величине, так и по продолжительности) с платообразным участком после хорошо известного излома на наблюдаемых кривых блеска сверхновых II типа*). Основная энергия излучается сверхновой за ~ 20 дней вблизи максимума блеска ($M_{\text{bol max}} = -21^m$), но последующий платообразный участок тем не менее отчетливо заметен на наблюдаемых кривых блеска. Итак, если каким-нибудь образом удалось бы растянуть 20-минутный пик светимости на теоретической кривой блеска по времени до ~ 20 дней, то наблюдаемая и теоретическая кривая блеска совпали бы по основным параметрам. Единственный путь, по-видимому, состоит в увеличении радиуса начальной модели звезды, что должно привести к увеличению времени адиабатического охлаждения самых внешних слоев звезды и тем самым к увеличению продолжительности свечения вблизи максимума. С этой целью был выполнен расчет для начальной модели $M = 30 M_{\odot}$, $R = 500 R_{\odot}$, $L = 2 \cdot 10^5 L_{\odot}$ (желтый сверхгигант).

Увеличение радиуса в ~ 50 раз по сравнению с начальными моделями Имшенника и Надежина (1964) привело к тому, что продолжительность пика светимости возросла до ~ 1 дня, а максимум блеска остался приблизительно тем же ($\sim -21^m$). При этом энергия движущегося газа за ударной волной, которая является свободным параметром задачи, была принята такой, чтобы скорость разлетающейся оболочки совпала с наблюдаемой у сверхновых II типа (~ 5000 км/сек). Как следует из расчетов, максимум блеска сверхновой достигается, когда радиус увеличивается по сравнению с начальным всего лишь в $\sim 1,5$ раза. Таким образом, восходящая ветвь кривой блеска сверхновой вызвана в основном прогревом поверхностных слоев ударной волной, а не увеличением размеров светящейся поверхности. Это соображение дает возможность по наблюдаемым светимости ($\sim -21^m$) и температуре ($\sim 4 \cdot 10^4$ К) сверхновой вблизи максимума блеска оценить радиус предсверхновой, который получается равным $\sim 10^4 R_{\odot}$. Такие большие радиусы могут иметь красные сверхгиганты спектрального класса M2, а также открытые недавно инфракрасные звезды. Расчет прохождения ударной волны через атмосферу такой звезды осложняется тем, что

*) В работе Имшенника и Надежина (1964) при обсуждении результатов были использованы устаревшие данные о сверхновых II типа, и поэтому обсуждаемый участок кривой блеска был ошибочно отнесен к максимуму блеска сверхновой. На это обстоятельство было обращено внимание Шкловским (1966).

до сих пор не существует удовлетворительных моделей красных сверхгигантов.

Распространение ударной волны в очень разреженной атмосфере существенно отличается от ее распространения в плотной атмосфере. Впереди ударной волны распространяется тепловая волна, которая имеет значительно более протяженные размеры, чем толщина ударного фронта. Этот вопрос подробно рассмотрен в монографии Зельдовича и Райзера (1963). Возникновение тепловой волны в упомянутом выше расчете для желтого сверхгиганта с радиусом $R=500R_{\odot}$ также способствовало резкому увеличению продолжительности свечения вблизи максимума: от 20 минут до одного дня. Отметим, что у желтого сверхгиганта после максимума блеска также получился платообразный участок кривой блеска приблизительно с теми же параметрами, что и раньше. Таким образом, в отличие от области вблизи максимума плато кривой блеска, вызванное волной охлаждения, слабо чувствительно к радиусу предсверхновой. Как показано Имшенником и Надежиным (1964), основным определяющим параметром волны охлаждения является потенциал ионизации вещества.

Отметим также ряд работ *), в которых кривые блеска сверхновых (преимущественно I типа) предлагается объяснить с помощью распада неустойчивых изотопов калифорния и элементов группы железа. Такие изотопы могут появиться в наружных слоях звезды благодаря ядерным реакциям, протекающим при высоких температурах в мощной ударной волне. После выхода ударной волны неустойчивые изотопы распадаются и служат источником излучаемой энергии.

Вопрос о максимуме кривой блеска также затрагивается Колгейтом и Уайтом (1966). Путем грубых оценок они приходят к выводу, что высвечивания тепловой энергии внешних слоев, нагретых ударной волной, недостаточно для объяснения наблюдаемых максимумов блеска. Энергетическим источником свечения сверхновых, по их мнению, может быть β -распад нестабильных ядер, выброшенных вместе с оболочкой из недр звезды.

Совсем коротко можно сказать о возможности наблюдения электронных нейтрино. Они излучаются согласно Арнетту (1966, 1967) и Ивановой, Имшеннику и Надежину (1967) с полной энергией 10^{52} эрг в течение $2 \cdot 10^{-2}$ сек со средней энергией частиц ~ 10 Мэв. Тогда, аналогично Арнетту (1966), можно получить, что для ≥ 10 отсчетов на измерительной установке Дэвиса сверхновая должна находиться на расстоянии ≤ 5 кпс, т. е. в пределах нашей Галактики.

*) Борст (1950), Бааде, Кристи, Бербидж, Фаулер, Хойл (1956), Андерс (1959).

Отметим, что в более ранних работах (см. стр. 295 и 297) получена оценка энергии электронных нейтрино для масс $\sim 2 M_{\odot}$ того же порядка, что и у Арнета, а для $M \sim 10 M_{\odot}$ примерно в 100 раз больше, хотя полная потеря энергии с включением мюонных нейтрино оказалась такой же.

Наконец, несколько слов о происхождении космических лучей. Колгейт и Уайт (1966) приходят на основе расчетов к выводу, что доля массы звезды, равная 10^{-4} , расположенная на наружном краю, выбрасывается с релятивистскими энергиями свыше $2m_p c^2$. Для поддержания энергетической плотности космических лучей $5 \cdot 10^{-14}$ эрг/см³, в объеме Галактики, равном $5 \cdot 10^{68}$ см³, при их времени жизни $2 \cdot 10^8$ лет требуется тогда одна вспышка сверхновой в $10 M_{\odot}$ в течение $1,5 \cdot 10^4$ лет. Таким образом, рассмотрение динамики имплозии и вызванного ею взрыва звезды дает обнадеживающую оценку и в отношении происхождения космических лучей.

ДОПОЛНЕНИЕ V

РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ АККРЕЦИИ

За последнее время получены некоторые новые результаты как в области наблюдений рентгеновских источников, так и в области попыток их теоретического объяснения.

1. Открыты новые рентгеновские источники. Благодаря улучшению углового разрешения удалось идентифицировать рентгеновский источник в Скорпионе со звездой 13^m величины, наблюдаемой оптически.

Шкловский (1967а) дает астрофизический анализ объема, температуры и плотности газа, способного дать наблюдаемое излучение источника в Скорпионе. Предполагается, что излучение носит тормозной характер — возникает при столкновениях тепловых (распределенных по Максвеллу) электронов с протонами, газ является оптически тонким.

В этой же работе И. С. Шкловский по наблюдательным данным (ср. Зельдович, 1964а; Новиков, Зельдович (1966)) приходит к выводу, что аккреция может быть источником энергии рентгеновского излучения.

2. Рассматривается нейтронная звезда, принимается малая плотность газа на бесконечности, поток газа мал, поток излучения от звезды значительно меньше критического (10^{38} эрг/сек), уравновешивающего тяготение (см. гл. II, § 11).

В этом случае движение газа вдали от звезды можно рассматривать как свободное падение, кинетическая энергия газа у поверхности близка к потенциальной энергии. Падающий газ можно представить как поток протонов с энергией около $200 Mэв$

и других ядер с такой же энергией на один нуклон. На первый взгляд можно представить остановку движущегося газа ударной волной с превращением кинетической энергии в тепловую энергию газа, а вслед за этим охлаждение сжатого газа излучением; при этом мы нашли бы максимальную температуру порядка 70 Мэв . Вследствие большой длины пробега падающих протонов такая картина оказывается внутренне противоречивой.

Правильный подход заключается в следующем: атмосфера звезды прогревается потоком падающих быстрых частиц. Глубина прогрева определяется длиной пробега частиц и составляет около $\eta = 30 \div 50 \text{ г/см}^2$. Выраженный в единицах массы на см^2 пробег не зависит от температуры.

Давление в атмосфере определяется в каждой точке в основном весом лежащего выше газа $p = \eta g$, где g — ускорение силы тяжести на поверхности звезды. Зная зависимость передачи энергии от потока частиц веществу атмосферы, можно составить тепловой баланс в каждой точке атмосферы. Вещество нагревается быстрыми частицами и отдает энергию тормозным излучением и обратным комптон-эффектом.

Такой расчет дает при $L = 3 \cdot 10^{38} \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}$ распределение температуры электронов в атмосфере от $T = 2 \cdot 10^8$ на внешней поверхности до $T = 2,5 \cdot 10^7$ в глубине. Раньше мы знали только крайние оценки: $T \sim 1,7 \cdot 10^7$ — эффективная болометрическая температура и $T = 0,7 \cdot 10^{12}$ — температура остановки газа. Рассмотрение баланса энергии атмосферы резко сузило границы, в которых заключена температура. Задача о расчете спектра рентгеновских лучей при данном определении температуры еще не решена.

При максимальном возможном гравитационном потенциале нейтронной звезды энергия свободного падения достаточна для рождения π^0 -мезонов*). Поэтому можно ожидать излучения гамма-квант распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ с энергией $50\text{—}100 \text{ Мэв}$. Может быть, именно это излучение позволит отличить нейтронные звезды от белых карликов (см. п. 3).

3. Рассмотрим случай, когда расчет падения газа без учета встречного потока излучения дает большой поток массы $\mu_0 = \frac{dM}{dt}$, так что нулевое приближение для светимости

$$L_0 = \mu_0 \varphi(R) = \mu_0 \frac{GM}{R} > L_c.$$

В этом случае следует ожидать, что в действительности именно влияние излучения будет определять поток массы, осуществится светимость L_c и поток $\mu_c = L_c / \varphi(R)$.

*) Порог при столкновениях $p + \text{He}^4$ и $\text{He}^4 + \text{He}^4$ ниже, чем при $p + p = p + p + \pi^0$.

Торможение вещества встречным потоком излучения также приводит к передаче энергии от вещества излучению. Поток энергии излучения не остается постоянным в зависимости от радиуса r , $L=L(r)$. Только $L(\infty)=L_c$. При меньших r , $L(r)$ меньше, по грубому расчету $L(R)=e^{-1}L_c$. Поэтому вблизи звезды уже нет точного равновесия между силой тяготения и световым давлением. Скорость падения газа на поверхность звезды не мала, она не более, чем в 1,5—2 раза уменьшена по сравнению со скоростью свободного падения.

4. Аккреция газа белым карликом.

В важной работе Камерон и Мок (1967) рассматривают излучение рентгена при аккреции газа на белых карликах. Гравитационный потенциал на поверхности белого карлика несравненно меньше, чем на поверхности нейтронной звезды: при $M=1M_\odot$ и радиусе 10^9 см $GM/R \sim 10^{17} \frac{\text{см}^2}{\text{сек}^2} \sim 10^{-4} \text{С}^2$. Скорость протонов соответствует энергии 100 кэв. Однако этого достаточно, чтобы нагреть газ при остановке до температуры порядка 30 кэв ($2.5 \cdot 10^8$ градусов). Пробег протонов зато существенно меньше, чем в случае падения на нейтронную звезду.

Можно предположить, что в этом случае действительно рентгеновское излучение получается из оптически тонкого слоя горячего газа, полученного при ударном сжатии. Та часть излучения, которая падает на поверхность звезды, перерабатывается в излучение низкой температуры и дает видимый свет.

Неустойчивость плазмы под действием направленного потока частиц может ускорить отдачу энергии, сократить толщину прогреваемого слоя и повысить его температуру.

ДОПОЛНЕНИЕ VI

К ТЕОРИИ КВАЗАРОВ

В настоящее время, по совокупности опубликованных работ, указано большое число факторов, которые могут играть роль в энергетическом балансе в устойчивости квазаров и в той внешней картине, которая представляется наблюдателю.

Перечислим главные составные части и факторы*), которые назывались в разное время (важнейшие работы см. в тексте):

- 1) горячая плазма, в том числе в локальном равновесии с излучением;
- 2) магнитные поля — мелкомасштабные и в масштабе квазара как целого;

*) Антиквары из антигравитирующего антивещества находятся за пределами допустимого в данной книге.

- 3) релятивистские частицы;
- 4) турбулентно движущиеся газовые облака;
- 5) вращение квазара как целого;
- 6) звезды, погруженные в сгусток плазмы, с подразделением на
 - 6а) звезды, вспыхивающие как сверхновые,
 - 6б) звезды, сталкивающиеся между собой с выбросом газа,
 - 6в) нейтронные звезды, создающие гравитационное поле и гравитационное красное смещение линий,
 - 6г) нейтронные звезды как источник энергии при аккреции.

Иногда также упоминается возможная роль необычно сильного гравитационного поля.

Наблюдательные данные с несомненностью говорят о наличии плазмы, магнитных полей и релятивистских частиц; в частности, об этом свидетельствует поляризация излучения и радиоизлучение квазаров. Не исключено, что в квазагах, т. е. в объектах радиоспокойных (не дающих радиоизлучения), но оптически подобных квазарам, меньше релятивистских частиц и слабее поля. Систематическое сравнение квазаров и квазагов, по-видимому, до настоящего времени не проведено.

Наблюдения (по расширению спектральных линий) указывают на наличие скоростей газа порядка 3000 км/сек.

Предположение о существовании звезд в составе квазаров не обосновано прямыми наблюдениями. Это предположение подкрепляется тесной аналогией между квазарами (ниже мы не отличаем их от квазагов), сейфертовскими галактиками и ядрами галактик. Вторым аргументом является то, что химический состав светящейся плазмы соответствует веществу, которое подвергалось ядерным реакциям в звездах.

При конденсации первичного дозвездного вещества, не прошедшего горнило звезд, газ состоял бы из водорода и гелия.

Обратимся к энергетическим соображениям.

Как отмечено подробно в тексте, плазма в локальном равновесии с излучением в условиях большой звезды имеет γ , весьма близкое к $4/3$, т. е. практически не обладает запасом устойчивости.

Магнитное поле также эффективно соответствует $\gamma = 4/3$. Нужно подчеркнуть, что этот результат относится не только к мелко-масштабному, хаотическому полю, которое дает при усреднении по объему изотропное магнитное давление.

Если магнитное поле имеет масштаб порядка всего квазара, мы приходим к тому же результату: рассматриваем устойчивость системы относительно подобного изменения всех масштабов; гравитационная энергия меняется пропорционально l^{-1} ,

магнитная энергия — при выполнении условия вмороженности (поле l^{-2}) меняется по тому же закону, $H^2 l^3 = l^{-1}$, так что упорядоченное магнитное поле не создает устойчивости.

Исключением формально является поле, линии которого не замкнуты, а уходят в бесконечность. Однако тот запас устойчивости, который создает такое поле, порядка $H_\infty^2 l^3$, т. е. практически ничтожен.

Соображения, основанные, по существу, на теореме вириала, показывают, что в квазаре обязательно должно иметь место нерелятивистское движение вещества.

Это положение является общей основой рассмотренных в тексте теорий с турбулентным или вращательным движениями плазмы. Но с той же целью можно рассматривать и движение звезд, входящих в состав ядра квазара. Одна из задач теории заключается в определении скоростей внешних наблюдаемых областей плазмы при наличии быстрого движения (возможно, даже со скоростью до $0,1-0,2 c$) внутри. Наибольшие трудности при этом испытывает теория вращающегося квазара, в которой следует ожидать чрезмерно больших предсказанных скоростей.

Предполагая наличие звезд в составе квазара, необходимо рассматривать баланс между образованием газа при взрывах и столкновениях звезд и расходом газа на образование новых звезд, аккрецией газа и выбросом газа из квазара наружу.

В работе Спитцера и Саслау (1965) предполагается, что газ главным образом расходуется на образование новых звезд; однако при других условиях температуры и плотности этот вывод может оказаться несправедливым.

Наряду с аккрецией, при быстром движении звезды относительно газа возможна и абляция — сдувание газа с поверхности звезды.

В тесном скоплении звезд и газа нормальные звезды часто подвергаются разрушению, тогда как нейтронные звезды в силу малого диаметра гораздо долговечнее. Процесс естественного отбора может естественно привести к тому, что в составе квазара будет относительно много нейтронных звезд.

Как уже отмечалось в связи с теорией рентгеновских источников, аккреция газа на поверхность нейтронной звезды является мощным источником энергии. Эти представления совершенно не обязательно связывать с идеей о гравитационном красном смещении линий в спектре квазара, как это делается в гипотезе Хойла и Фаулера (1967). Наблюдение запрещенных линий говорит в пользу разреженной, протяженной оболочки квазара, находящейся в области малого гравитационного потенциала.

Остановимся в заключение на вопросах эволюции квазаров. Есть много наблюдательных и теоретических аргументов в пользу того, что квазары имеют сравнительно малое время жизни (в среднем оценки группируются вокруг $10^5 \div 10^6$ лет). В таком случае нужно найти ту форму, в которой вещество находится в латентном состоянии до того, как оно вспыхнет в виде квазара.

Возможна гипотеза, что до вспышки имеется весьма плотное скопление звезд. Его эволюция (за счет испарения и столкновений) идет вначале медленно, а затем приобретает катастрофический характер. При этом вполне вероятно, что мы наблюдаем квазары не в момент катастрофы, а по окончании процессов, связанных с разрушением обычных звезд. Уже отмечалось, что, например, ЗС 273 находится в практически стационарном состоянии, светимость его закономерно колеблется; эти упорядоченные колебания не согласуются с картиной случайных взрывов сверхновых или столкновений. Наконец, из предполагаемой кратковременности активного периода квазара следует, что плотность угасших квазаров должна во много раз ($\sim 10^5$ раз!) превышать плотность наблюдаемых квазаров. Ожидаемое расстояние от нас до ближайшего угасшего квазара (или квазага) должно быть в 100—300 раз меньше расстояния до ЗС 273, т. е. несколько мегапарсек.

В настоящее время нет ни наблюдательных, ни теоретических указаний на возможные способы обнаружения и идентификации угасших квазаров. Эта задача, безусловно, весьма важна.

ДОПОЛНЕНИЕ VII

ФИЗИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ТОПОЛОГИИ ВСЕЛЕННОЙ

В общей теории относительности отказ от простого предположения о плоском евклидовом пространстве естественно ставит вопрос и о том, что топология пространства (как трехмерного, так и четырехмерного пространства-времени) может отличаться от простейшей топологии плоского пространства для открытого мира или топологии сферы для закрытого мира.

Уже после первой работы Эйнштейна (1917) по космологической проблеме, в которой была построена статическая космологическая модель со сферическим замкнутым 3-мерным пространством, Клейном (1918) было указано, что 3-мерное пространство с той же метрикой может быть и эллиптическим*), т. е. обладающим иными свойствами в целом, чем сферическое пространство.

*) Эллиптическим называется пространство, в котором диаметрально противоположные точки 3-мерной сферы отождествлены.

Вопрос о свойствах связности пространства в целом и об его топологии все время упоминается в литературе (см., например, обзор Гекмана и Шюкинга (1959)).

Нестационарность Вселенной и вероятное существование в прошлом сингулярности, очевидно, ограничивает область, доступную наблюдению и затрудняет прямое наблюдательное исследование топологии, например, путем наблюдения одного и того же удаленного объекта в противоположных направлениях.

Поэтому представляют интерес те ограничения, которые можно наложить на топологию, исходя из соображений, не зависящих от астрономических наблюдений.

Одним из таких ограничений является требование выполнения принципа причинности. С этим требованием несовместимы многообразия, в которых имеются замкнутые времениподобные мировые линии (см., например, Гёдель (1949), Синг (1963)).

Мы хотим здесь подчеркнуть, что недавние открытия физики элементарных частиц, позволяющие дать абсолютные определения «правого» и «левого», показывают, что реальное физическое 3-мерное пространство не может быть неориентируемым, что — а priori нельзя отвергнуть. Известно, что неориентируемые 3-мерные пространства имеются, например, среди 18 возможных типов пространств постоянной нулевой кривизны (как среди открытых, так и среди замкнутых) *) (см. Шюегеш (1966)).

В работе Шюегеша (1966) подчеркивается, что в неориентируемом пространстве инверсия является непрерывным преобразованием (а не дискретным, как в ориентируемом).

Здесь мы сделаем физические выводы из этого замечания Шюегеша (Зельдович, Новиков (1967b)).

В неориентируемом пространстве существует такой контур, обход по которому превращает правую систему координат в левую, т. е. обход по такому контуру эквивалентен операции пространственного отражения (P).

Открытие в 1956 г. нарушения четности в слабых взаимодействиях позволяет однозначно определить понятие «правой» и «левой» системы. Следует ли уже отсюда, что реальное физическое пространство не может быть неориентируемым (**)?

Это утверждение сделать нельзя, если считать, что обход по контуру превращает частицу в античастицу, т. е. обход соответствует комбинированной инверсии (CP), так как согласно гипотезе Ландау именно такая комбинированная инверсия сохраняет симметрию пустого пространства относительно правого и левого.

*) Неориентируемых пространств нет среди 3-мерных пространств постоянной положительной кривизны.

***) Тот факт, что несохранение четности должно иметь значение для астрофизики, подчеркивается Понтекорво (1963).

Таким образом, в неориентируемом пространстве при условии (СР)-инвариантности вопрос о том, являются ли две удаленные частицы одинаковыми или частицей и античастицей, зависит от пути, по которому они будут сведены в одну точку.

Открытие нарушения (СР)-инвариантности в распаде K_0^2 -мезона позволяет предсказать абсолютное отличие вещества от антивещества (см. обзор Окуня (1966)) и тем самым окончательно закрывает возможность неориентированного непрерывного пространства. Очевидно, в таком пространстве в ходе обноса по неориентируемому контуру должны были бы скачком изменяться свойства частиц, что невозможно *).

Подчеркнем, что рассматриваемые выводы не зависят от нестационарности сопутствующего пространства в космологии, не зависят от того, успеем ли мы в расширяющейся от сингулярности космологической модели, двигаясь со скоростью не более световой, обойти мир по замкнутому контуру, дающему пространственное отражение. Действительно, мы можем рассмотреть цепочку покоящихся вдоль данного контура частиц, сравнивать свойства лежащих рядом частиц и прийти к тому же противоречию.

ДОПОЛНЕНИЕ VIII

МЕЖГАЛАКТИЧЕСКИЙ ГАЗ **)

Вопрос о существовании межгалактического газа возник в связи с тем, что плотность вещества, сосредоточенного в галактиках ($\sim 5 \cdot 10^{-31}$ г/см³; Оорт, 1958), мала по сравнению с критической плотностью ($\rho_c \sim \frac{3H^2}{8\pi G} = 2 \cdot 10^{-29}$ г/см³), в пользу которой склоняются экспериментаторы (Сэндейдж, 1962). В действительности же значение $\rho \sim 2 \cdot 10^{-29}$ г/см³ является в высшей степени неопределенным, поэтому обнаружение межгалактического газа и определение его плотности было бы весьма важным для космологии: параметр ускорения и средняя плотность вещества определяют модель Вселенной ***).

*) Если окажется справедливой гипотеза зеркальных частиц (см. обзор Окуня (1966)), то симметрия между правым и левым будет восстановлена. В этом случае неориентируемое пространство оказывается возможным при условии, что обход по неориентируемому контуру соответствует (СРА)-инверсии (А — переход к зеркальной частице).

**) Дополнение VIII написано Р. А. Сюняевым.

***) При Λ -члене, равном нулю, для установления модели Вселенной достаточно измерений средней плотности вещества ρ . Параметр ускорения в этом случае равен $q = \frac{\rho}{2\rho_c}$. См. Дополнение III.

Возможно, что в нашей окрестности все вещество находится в галактиках, и межгалактический газ отсутствует. Однако совокупность существующих экспериментальных данных позволяет установить лишь верхний предел плотности межгалактической среды и он пока очень высок: $\rho < 6 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ (Курт, Сюняев, 1966а).

Имеется также и другая сторона проблемы межгалактического газа: современная космология располагает весьма скудными сведениями о дозвездной стадии эволюции Вселенной. До образования галактик должен был существовать газ; необходимо выяснить условия и период его существования.

а. Существующие экспериментальные данные. После открытия квазаров с красным смещением $z > 2$ появилась возможность наблюдения в их спектрах ступеньки поглощения нейтральным межгалактическим водородом в линии L_α , так как в этом случае смещенная линия доступна для земных наблюдений. Ганн, Петерсон (1965) дают при $z \sim 2$ значение $n_H = 6 \cdot 10^{-11} \text{ см}^{-3}$. По другим данным, это к тому же верхний предел. Отсутствие линии поглощения молекулы H_2 $\lambda 1108 \text{ \AA}$ в спектрах квазаров говорит о малой плотности молекулярного водорода (Филд, Соломон, Вамплер, 1966). Эти результаты можно совместить с гипотезой межгалактического газа, лишь предполагая высокую степень ионизации, а значит, и высокую температуру газа при $z \sim 2$. К тому же выводу, но уже при малых z приводят наблюдения поглощения в линии 21 см в спектрах внегалактических радиоисточников (Филд, 1959; Дэвис, Дженнисон, 1964) *).

Прямое наблюдение свободных электронов и протонов гораздо более сложно. Комптоновское рассеяние света далеких объектов на электронах мало (оптическая толщина $\tau \sim 1$ для $z \sim 5 \div 10$ в простейших моделях (Бакал, Сальпетер, 1965; Кардашев, Шоломицкий, 1966), поэтому слабы надежды обнаружить его в ближайшее время.

Измерения рентгеновского фона позволили установить верхний предел температуры межгалактического газа $T < 5 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ (Филд, Генри, 1964). Курт и Сюняев (1967а, б) указали на возможность измерения излучения межгалактической плазмы в линиях L_α и $\lambda 304 \text{ \AA}$ He II , смещенных космологическим красным смещением. Измерения В. Г. Курта на советских межпланетных станциях позволили установить верхний предел на плотность

*) Последние измерения (Колер, 1966) дают для нашей окрестности $n_H > 4 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-3}$, однако они прямо противоречат результатам (Дэвис, Дженнисон, 1964). Кроме того, теоретический анализ показывает, что эти данные и данные по измерениям n_H при $z \sim 2$ (Ганн, Петерсон, 1965) несовместимы (Дороскевич, Сюняев, 1967; Вейманн, 1967).

среды в нашей окрестности при низких температурах: $\rho < 4 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$, если $T < 5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{К}$ *). Интересную возможность определения плотности газа по результатам воздействия давления «межгалактического ветра» на выбросы из радиогалактик исследовал Парийский (1967) ($\rho < 10^{-30} \text{ г/см}^3$). Однако эта оценка ненадежна, так как плохо известны физические характеристики выбросов (масса, плотность, время жизни и т. д.).

Существенный вклад в среднюю плотность вещества во Вселенной может внести межгалактический газ, сосредоточенный в скоплениях галактик. На его существование указывает несоответствие между вириальной и видимой массой скоплений галактик (Эйбл, 1965; Караченцев, 1965). Однако прямые наблюдения нейтрального водорода в линии 21 см в скоплении галактик в Деве (Колер, 1966) показали, что его плотность мала ($n_{\text{H}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-3}$) и, кроме того, что весь газ должен быть нейтральным (низка его спиновая температура, $T_s = 3^\circ \text{К}$, а это несовместимо с высокой электронной температурой). Этот результат представляется неправдоподобным и нуждается в проверке, так как если газ был когда-либо разогрет до $T > 10^4 \text{ }^\circ\text{К}$ (одного взрыва радиогалактики достаточно, чтобы плазменные волны и космические лучи разогрели и ионизовали газ такой плотности в масштабах скопления галактик), то он не успел бы остыть и прорекомбинировать за космологическое время.

б. Тепловой баланс газа. Существует ряд теоретических работ, посвященных рассмотрению теплового баланса межгалактического газа. Подробный анализ возможных источников нагрева газа и его остывания при расширении Вселенной и вследствие излучения водорода был впервые проделан Гинзбургом и Озерным (1965); Голд, Рамзай (1966), Зельдович, Новиков, Сюняев (1966), Вейманн (1967) отметили важную роль гелия **) в тепловом балансе газа. Расчеты остывания межгалактической среды (Дорошкевич, Сюняев, 1967б) с учетом потерь энергии при обратном комптон-эффекте тепловых электронов на реликтовом излучении и роли гелия показали:

*) Непосредственное измерение интегрального излучения нашей Галактики в ультрафиолете ($\Phi(1225-1340 \text{ \AA}) < 2 \cdot 10^{40} \text{ эрг/сек}$) позволило оценить фон от галактик. Оказалось, что смещенное излучение в линиях и при свободно-свободных переходах от межгалактической плазмы определяет фон Метагалактики в ультрафиолете. Поэтому дальнейшие наблюдения могут привести к обнаружению межгалактического газа (Курт, Сюняев, 1967 а, с).

**) Наличие 30% гелия (по весу) в первичном веществе предсказывает горячая модель Вселенной. Наблюдения линий поглощения ионов тяжелых элементов и водорода в спектрах квазаров видимо показали, что обилие тяжелых элементов меньше галактического (Рис, Шама, 1967), и их излучением можно пренебречь.

а) из-за больших потерь энергии при обратном комптон-эффекте маловероятно существование горячей межгалактической плазмы при $z > 10$;

б) при $z < 5$ в широкой области температур $5 \cdot 10^4 < T < 3 \cdot 10^5$ °К потери энергии определяются излучением в линии $\lambda 304 \text{ \AA}$ He II (при $T \sim 10^4$ °К велико излучение в линии L_α). В этих областях температура плазмы падает столь быстро, что не успевает устанавливаться стационарная степень ионизации гелия и водорода, что несколько снижает потери;

в) существующих источников нагрева (радиогалактик, галактик, QSS и QSG, космических лучей и диссипации турбулентной энергии), видимо, недостаточно для поддержания высокой температуры газа. Однако учет эволюции радиогалактик и квазаров по Лонгейру (Лонгейр, 1966) показывает, что при $z \sim 3 \div 5$ мощное выделение энергии при образовании объектов могло разогреть газ, который в дальнейшем должен был остывать.

Расчет теплового баланса газа в скоплениях галактик показал, что существуют три энергетически выгодные области температур: $T < 10^4$ °К, $2,5 \cdot 10^4 < T < 5 \cdot 10^4$ °К, $T < 3 \cdot 10^5$ °К (при этих температурах потери энергии газом на излучение минимальны).

в. *Необходимость периода нейтрального водорода в эволюции Вселенной.* Согласно горячей модели Вселенной рекомбинация водорода должна была произойти при $z \sim 1300$ (Пиблс, 1965; Озерной, 1966; Вейманн, 1966) *), а до этого водород был ионизован. Однако при малых z водород также, видимо, ионизован (Ганн, Петерсон, 1965). Возникает вопрос, происходила ли в действительности рекомбинация водорода и не был ли газ ионизован все время от ранних стадий расширения.

Кауфман (1965) пыталась таким образом объяснить происхождение фонового радиоизлучения. Однако теоретический анализ показал, что в период $300 < z < 1300$ газ заведомо должен был оставаться нейтральным (Сюняев, 1967).

При больших z потери ионизованной плазмы с высокой температурой при обратном комптон-эффекте на реликтовом излучении очень велики и для поддержания высокой температуры необходимо «сжечь» в гелий более 30% водорода, что противо-

*) Интересно отметить, что в результате выделения значительного числа энергичных квантов рекомбинация замедляется. Оставшегося количества электронов достаточно, чтобы комптон-эффект квантов реликтового излучения на них поддерживал температуру вещества, равную температуре излучения вплоть до $z \sim 200$ (т. е. длина волны Джинса не менялась от $z \sim 1300$ до $z \sim 200$). Выделение энергичных квантов при рекомбинации должно сильно отразиться на виновской части спектра реликтового излучения (при $\lambda < 1,6 \cdot 10^{-2}$ см поток должен значительно превышать равновесный; асимптотика: $F_\nu \sim \nu^{-6}$ вместо $F_\nu \sim e^{-h\nu/kT}$) (Зельдович, Курт, Сюняев, 1967).

речит наблюдениям. В то же время межгалактическая плазма с низкой температурой (однако, достаточной для ионизации) должна сильно излучать в радиодиапазоне. Это излучение ограничено измерениями в области 100—600 Мгц. z_{\max} является верхней границей, в действительности же большие потери энергии при обратном комптон-эффекте делают маловероятным существование ионизованного газа при $z > 10 \div 20$. Видимо, первичный газ остыл и прорекомбинировал при $z \sim 1300$ (примерно через миллион лет после начала расширения) и оставался нейтральным вплоть до $z \sim 5 \div 20$. Только малая часть этого нейтрального газа сконденсировалась в дискретные тела, которые, выделяя ядерную и гравитационную энергию, возможно, взрываясь, разогрели и ионизовали газ. Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1967) считают, что галактики образовались из этого вторично разогретого газа.

г. *Заключение.* В ряде работ предложены эксперименты, постановка которых будет способствовать решению проблемы межгалактического газа. Это:

1) измерения фона в ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах; особенно интересна область длин волны $\lambda \sim 30 \text{ \AA}$, где велико излучение плазмы с $T \sim 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$. При больших длинах волн Галактика непрозрачна для рентгеновского излучения (Вейманн, 1966; Курт, Сюняев, 1967а; Рис, Шама, 1966);

2) наблюдения спектра поглощения квазара 3С273 ($z \sim 0,16$) в ультрафиолетовом диапазоне (если плотность $n_H > 10^{-10} \text{ см}^{-3}$ в нашей окрестности, то межгалактический водород будет заметен) (Курт, Сюняев, 1967а);

3) измерения фона в радиодиапазоне (200—1000 Мгц) и выделение излучения межгалактической плазмы (плоская компонента $F_\nu = \text{const}$) (Сюняев, 1967);

4) наблюдения искажений спектра реликтового излучения при $\lambda < 0,1 \text{ см}$. Этот вопрос анализировали Вейманн (1966), Зельдович, Курт, Сюняев (1967).

ДОПОЛНЕНИЕ IX

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА НА КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ

Рассмотрение анизотропных космологических моделей с однородным магнитным полем (§ 5 гл. 21) или с направленными потоками нейтрино (§ 8 гл. 21) приводят к уравнениям Эйнштейна, в которых пространственная часть тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ не изотропна; не выполняется закон Паскаля. Как

влияет анизотропия $T_{\alpha\beta}$ на расширение, на ускорения вещества в разных направлениях? Во-первых, подчеркнем, что вследствие однородности никакого градиента давления нет, нет и никаких сил, с этим связанных. Влияние анизотропии $T_{\alpha\beta}$ может быть только гравитационным!

В главе 1 и 3 отмечалось, что в ОТО гравитационное поле зависит и от давления. Изотропное давление замедляет расширение. Анизотропия давления должна создавать анизотропию ускорений деформации вещества.

Запишем уравнения тяготения типа (21.4.1). Теперь в правых их частях тензор T_{α}^{β} будет анизотропен:

$$\frac{\ddot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} + \frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} \left(\frac{\dot{\tilde{b}}}{\tilde{b}} + \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right) = \frac{-8\pi G}{c^2} \left(T_1^1 - \frac{1}{2} T \right), \quad (1)$$

$$\frac{\ddot{\tilde{b}}}{\tilde{b}} + \frac{\dot{\tilde{b}}}{\tilde{b}} \left(\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} + \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \right) = \frac{-8\pi G}{c^2} \left(T_2^2 - \frac{1}{2} T \right), \quad (2)$$

$$\frac{\ddot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} + \frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} \left(\frac{\dot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} + \frac{\dot{\tilde{b}}}{\tilde{b}} \right) = \frac{-8\pi G}{c^2} \left(T_3^3 - \frac{1}{2} T \right), \quad (3)$$

$$\frac{\ddot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} + \frac{\ddot{\tilde{b}}}{\tilde{b}} + \frac{\ddot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{-8\pi G}{c^2} \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right). \quad (4)$$

Из вида уравнений (1)–(4) видно, как влияет анизотропия T_{α}^{β} на относительные ускорения. В самом деле, пусть тензор T_{α}^{β} изотропен и имеется некоторое решение уравнений. Изменим в момент t тензор T_{α}^{β} , сделав его скачком анизотропным, не меняя плотности энергии T_0^0 и следа тензора T . Тогда скачком изменятся ускорения $\ddot{\tilde{a}}/\tilde{a}$, $\ddot{\tilde{b}}/\tilde{b}$, $\ddot{\tilde{c}}/\tilde{c}$. Чтобы выяснить характер этого изменения, разберем два примера. Положим в некоторый момент $\dot{\tilde{a}}/\tilde{a} = \dot{\tilde{b}}/\tilde{b} = \dot{\tilde{c}}/\tilde{c} = \alpha$. Для однородного магнитного поля на оси x_1 имеем ($W = H^2/8\pi$)

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} &= -\frac{8\pi G}{c^2} W - 2\alpha^2, & \frac{\ddot{\tilde{b}}}{\tilde{b}} &= \frac{\ddot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{8\pi G}{c^2} W - 2\alpha^2, \\ \frac{\ddot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} + \frac{\ddot{\tilde{b}}}{\tilde{b}} + \frac{\ddot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} &= -\frac{8\pi G}{c^2} W. \end{aligned} \quad (5)$$

Для потока нейтрино с плотностью ϵ_{ν} по оси x_1 имеем

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} &= \frac{8\pi G}{c^2} \epsilon_{\nu} - 2\alpha^2, & \frac{\ddot{\tilde{b}}}{\tilde{b}} &= \frac{\ddot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = -2\alpha^2, \\ \frac{\ddot{\tilde{a}}}{\tilde{a}} + \frac{\ddot{\tilde{b}}}{\tilde{b}} + \frac{\ddot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} &= -\frac{8\pi G}{c^2} \epsilon_{\nu}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, помимо эффекта «веса давления» — уменьшения суммы вторых производных в (4), который имел место и при изотропном T_{α}^{β} , есть еще (гравитационный!) эффект анизотропии ускорений, вызванный анизотропией T_{α}^{β} . При этом «отрицательное давление» (натяжение), как в случае T_1^1 для магнитного поля, ведет к добавочному уменьшению ускорения в этом направлении. Положительное давление — $T_2^2 = T_3^3$ для магнитного поля и T_1^1 для потока нейтрино — ведет к добавочному увеличению ускорения в данном направлении.

ДОПОЛНЕНИЕ X

НАБЛЮДЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ И АНИЗОТРОПИИ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

На XIII ассамблее Международного Астрономического Союза в Праге в августе 1967 г. были сообщены новые данные об измерении интенсивности космологического радиоизлучения. В дополнение к данным, приведенным на стр. 459, имеются следующие измерения:

Автор	Шейкшафт	Бюрк	Пузанов, Соломонович, Станкевич
λ , см	73	41	0,82
T , °К	$2,5 \pm 1,6$	$2,6 \pm 0,6$	$2,9 \pm 0,7$

В последнее время сообщено также о новых измерениях степени изотропии космологического радиоизлучения. Конклин и Брэсуелл (1967) провели измерения с помощью 60-футовой антенны на частоте $\nu = 10,690$ Мггц ($\lambda \approx 2,8$ см) вдоль дуги $\delta = 37,4^\circ$; $\alpha = 23^h 30^m \div 3^h 30^m$. Дуга подходит к Млечному Пути в созвездии Персея. Угловое разрешение в этих измерениях было весьма высоким; $\Delta\alpha \approx 1^\circ$; $\Delta\delta \approx 12'$. Авторы приходят к выводу, что с точностью до $\Delta T/T \approx \pm 0,002$ нет отклонений от изотропии излучения. Высокое угловое разрешение позволяет сделать вывод, что измеряемое излучение не имеет мелкоструктурных флуктуаций, а ρ_{10^6} могущих быть вызванными отдельными источниками, интенсивность излучения которых на этих длинах волн неизвестна. Уилкинсон и Патридж (1967) проводят измерения на длине волны $\lambda = 3,2$ см вдоль всей небесной

параллели $\delta = -8^\circ$. Угловое разрешение по обеим координатам порядка 15° . Авторы обнаружили отклонения от изотропии. Имеются два максимума, $\Delta T/T \approx 0,003 \pm 0,001$ при $\alpha \approx 8^h$ и $\alpha \approx 19^h$ и минимум $\Delta T/T \approx -0,005 \pm 0,001$ при $\alpha \approx 2^h$. Максимум у $\alpha = 19^h$ авторы с осторожностью и оговорками интерпретируют как излучение центральных областей Млечного Пути. Второй максимум лежит несколько в стороне от Млечного Пути в направлении, противоположном его центральным областям.

Минимум излучения не может быть интерпретирован как результат флуктуаций числа источников, попадающих в диаграмму направленности антенны и дающих некоторый вклад в измеряемое излучение. Об этом свидетельствуют и теоретические оценки и прямые измерения Конклина и Брэсуелла (см. выше). Этот минимум не может быть объяснен и движением наблюдателя относительно «фона», ибо тогда при $\alpha \approx 14^h$ должен был наблюдаться максимум $\Delta T/T$, чего в действительности нет.

О возможном объяснении минимума $\Delta T/T$ анизотропией космологического расширения см. Дополнение XII.

Следует подчеркнуть предварительный характер результатов измерений, которые нуждаются в подтверждении.

ДОПОЛНЕНИЕ XI

НАБЛЮДАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА НАЛИЧИЯ СИЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИИ НА РАННЕЙ СТАДИИ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ

Важнейшим вопросом является наблюдательная проверка предположения о сильной анизотропии в начале космологического расширения и о роли слабо взаимодействующих частиц на этой стадии.

Влияние анизотропии на химический состав дозвездного вещества рассмотрен в § 6 гл. 21. Однако наблюдательное установление этого состава с нужной точностью встречается с огромными трудностями.

В § 8 гл. 21 подчеркивалось, что следствием физических процессов с нейтрино в анизотропных моделях может быть наличие в настоящее время резко анизотропного потока нейтрино с энергией до $E_\nu \approx 10^4$ ев и с плотностью порядка плотности космологического электромагнитного излучения с $T = 3^\circ$ К, $\rho_\nu = \rho_\gamma$. Обнаружение этих нейтрино остается пока также за пределами экспериментальных возможностей ядерной физики.

Целью настоящего Дополнения является подчеркнуть, что присутствие слабо взаимодействующих частиц в анизотропном решении ведет к наличию в настоящее время анизотропной

составляющей в тензоре энергии-импульса порядка сегодняшней плотности квантов с $T=3^\circ\text{K}$. Это в свою очередь ведет к необходимости анизотропии деформации сегодня и поэтому к анизотропии (квадрупольной для метрики, рассмотренной ниже) электромагнитного космологического излучения порядка (независимо от степени начальной анизотропии космологического расширения; см. сноску далее):

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 50 \left[\frac{\rho_{\text{anis}}}{\rho_\gamma} \frac{\rho_\gamma}{\rho_{\text{bar}}} \right]_{t=t_0}, \quad (1)$$

где ρ_{anis} — анизотропная составляющая плотности свободных частиц, ρ_γ — плотность γ -квантов с $T=3^\circ\text{K}$ и ρ_{bar} — плотность барионов; $\rho_{\text{bar}} \approx 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$, t_0 — сегодняшний момент.

Вывод формулы (1) (Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1967d)) приведен в конце этого Дополнения.

Из (1) следует, что при $\rho_{\text{anis}}/\rho_\gamma \approx 0,1 \div 1$ (см. § 8 гл. 21) (эта оценка может быть уточнена), $\rho_\gamma/\rho_{\text{bar}} = 3 \cdot 10^{-5}$ имеем

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-4} \div 10^{-3}. \quad (2)$$

Подчеркнем, что если правильны в основных чертах процессы с нейтрино, рассмотренные в § 8 гл. 21 и анизотропия ранних стадий расширения была велика*) (но независимо от ее конкретного значения), выражение (1) дает нижнюю границу ожидаемой анизотропии $\Delta T/T$, а не верхнюю границу.

Мизнер (1967а, б, с) рассматривал процессы, связанные с вязкостью нейтрино. При рассматриваемых им условиях получается неравенство: $\Delta T/T < 3 \cdot 10^{-5}$ для $\rho_{\text{bar}} = 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$. Мизнер, по-видимому, преувеличивает долю энергии слабо взаимодействующих частиц и преуменьшает остаточную анизотропию.

В анизотропных однородных моделях с евклидовым сопутствующим пространством, которые рассмотрены в §§ 4—8 гл. 21 и в рамках которых получена формула (1), анизотропия излучения должна носить квадрупольный характер; в направлении наибольшей скорости расширения наблюдается минимум T , в направлении наименьшей скорости расширения (ортогонально первому направлению) — максимум T . При измерении $\Delta T/T$ неподвижной относительно Земли антенной $\Delta T/T$ должна иметь 12^h период. Результаты измерений приведены в Дополнении. Они дают амплитуду $\Delta T/T \approx 0,005 \div 0,003$, в общем в согласии с оценкой (2). Однако если интерпретировать максимумы $\Delta T/T$ (см. Дополнение X) как изучение Млечного Пути, то угловая зависи-

*) Анизотропия деформации должна быть велика на стадии, когда нейтрино перестают взаимодействовать с другими частицами.

мость не имеет 12^h периода, так как остается только один минимум шириной $\sim 40^\circ - 60^\circ$. В следующем Дополнении показано, что такая угловая зависимость анизотропии должна иметь место в моделях с искривленным сопутствующим пространством постоянной кривизны.

Итак, сегодня анизотропия $\Delta T/T \leq 0,005$. Это означает, что на рис. 109 граница правой области запрещенных наблюдениями значений θ смещается влево почти до слияния с границей левой области.

В заключение укажем вывод формулы (1).

Рассмотрим модель с плоским пространством

$$ds^2 = dt^2 - [a^2(t) d\tilde{x}^2 + b^2(t) d\tilde{y}^2 + c^2(t) d\tilde{z}^2].$$

Для оценок положим $b=c$. В отсутствие нейтрино после окончания существенно анизотропной стадии при $t=\theta$ (θ — параметр, характеризующий продолжительность анизотропной стадии $\rho = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t(t+\theta)}$) анизотропия падает по следующему закону: $\frac{a-b}{a} \sim t^{-1/2}$ для $p = \frac{\epsilon}{3}$ и $\frac{a-b}{a} \sim t^{-1}$ для $P=0$; P — давление. Здесь положено $a=b=c$ при $t \rightarrow \infty$.

Наличие нейтрино изменяет характер и продолжительность анизотропной стадии. После окончания периода сильной анизотропии в этом случае имеется анизотропный поток нейтрино с $\rho_{\text{anis}} \approx \rho_\nu$. В ходе почти изотропного расширения $\rho_{\text{anis}} \sim \rho_\nu \sim \rho_{\text{bar}}^{4/3}$. Из уравнений для анизотропной модели тогда получаем:

$$\text{на стадии, когда } p = \frac{\epsilon}{3}, \quad \frac{a-b}{a} = 3 \frac{\rho_{\text{anis}}}{\rho_\nu} \ln t/t_0,$$

$$\text{на стадии, когда } p = 0, \quad \frac{a-b}{a} = -6 \frac{\rho_{\text{anis}}}{\rho_\nu} \sim t^{-3/2}.$$

Таким образом, наличие ρ_{anis} «консервирует» анизотропию расширения на стадии $\rho_\nu > \rho_{\text{bar}}$. На последующей стадии $\rho_{\text{bar}} > \rho_\nu$ анизотропия падает $\sim t^{2/3}$. Таким образом, наличие ρ_{anis} всегда замедляет изотропизацию решения. Из полученных результатов следует оценка для $\Delta T/T$. Если считать, что межгалактический газ непрозрачен для изучения на момент, соответствующий $z = \Delta\lambda/\lambda \approx 8$ [12], то получаем

$$\left. \frac{\Delta T}{T} \right|_{t \rightarrow \infty} \approx \left. \frac{a-b}{a} \right|_{z=8} \approx 50 \left[\frac{\rho_{\text{anis}}}{\rho_\nu} \frac{\rho_\nu}{\rho_{\text{bar}}} \right]_{t=t_0},$$

t_0 — сегодняшний момент.

Более точное значение коэффициента в правой части равенства — 52 — получено В. М. Дашевским.

ДОПОЛНЕНИЕ XII

ОЖИДАЕМАЯ АНИЗОТРОПИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ МОДЕЛЯХ ПРИ $\rho < \rho_{кр}$

Для анализа возможности сильной анизотропии на ранней стадии космологического расширения обычно используется модель с плоским сопутствующим пространством и плотностью материи, равной критической. Назовем такие модели А-моделями. Анизотропия космологического излучения в таких моделях должна носить квадрупольный характер и, согласно Дорошкевичу, Зельдовичу, Новикову (1967d) должна быть порядка

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-4} \div 10^{-3}.$$

В анизотропных космологических моделях, отличных от А-моделей, анизотропия космологического излучения уже не будет квадрупольной (Новиков, 1967). Покажем это.

В А-моделях лучи света, идущие вдоль главных осей тензора скоростей деформации, сохраняют неизменным свое направление.

Однако существуют космологические модели, которые, так же как и А-модели, сильно анизотропны на ранней стадии и изотропизируются при $t \rightarrow \infty$, но обладают следующим свойством.

Луч света, идущий в некоторой точке вдоль одной из главных осей тензора скоростей деформации сопутствующего пространства, придя в другую точку, будет иметь направление, уже не совпадающее с этой осью. Назовем такие модели В-моделями. В В-модели все точки сопутствующего пространства эквивалентны, и в этом смысле пространство однородно, но ковариантная 3-мерная пространственная производная от тензора скоростей деформации не равна нулю, т. е. этот тензор ориентирован по-разному в разных точках пространства*). Примером В-модели является модель с отрицательной кривизной пространства, рассмотренная Гекманом и Шюкингом (1962). Метрика ее такова:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [d\tilde{x}^2 + S^2(t) e^{2\tilde{x}} d\tilde{y}^2 + S^{-2}(t) e^{2\tilde{x}} d\tilde{z}^2], \quad (1)$$

$$\dot{R}^2 = 1 + \frac{\Lambda}{3} R^2 + \frac{2GM}{R} + \frac{a_1}{3R^4}, \quad (2)$$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3}, \quad S = \exp a_1 \int \frac{dt}{R^3}, \quad c = 1, \quad p = 0. \quad (3)$$

*) А. Л. Зельманов (1959b) называет такие пространства неоднородными, сохраняя термин «однородный» только для пространств, в которых ковариантные производные от всех физических и геометрических тензоров равны нулю. См. по этому поводу работу Л. П. Грищука (1967).

Положим $\Lambda=0$. В этой модели плотность меньше критической и модель изотропизуется при $t \rightarrow \infty$. Поэтому если будет доказано, что плотность материи во Вселенной меньше критической и есть анизотропия, то необходимо будет отказаться от обычно используемых анизотропных моделей с плоским пространством и плотностью, равной критической, и обратиться к моделям с отрицательной кривизной пространства.

Рассмотрим распространение света в В-модели Гекмана, Шюкинга с пространством постоянной отрицательной кривизны на поздней стадии, когда расширение почти изотропно.

На поздних стадиях $R(t) \sim t$, $S(t) \sim e^{-a_1 \frac{1}{2t^2}} = \left(1 - \frac{a_1}{2} t^2\right)$ модель при $t \rightarrow \infty$ стремится к изотропной «модели Милна» с $\rho=0$. На рассматриваемой поздней стадии расширения траектория луча света будет практически совпадать с геодезической в 3-мерном пространстве, имеющем метрику, описываемую выражением в квадратной скобке (1) при $S=\text{const}$. Для луча в плоскости (\tilde{x}, \tilde{y}) уравнение траектории: $(\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2 = C - t^{-2x}$ либо $\tilde{y} = \text{const}$. Луч света, идущий в момент t_0 вдоль оси « \tilde{y} » через время порядка t_0 , будет идти практически в направлении оси « x ». Следовательно, луч испытывает красное смещение, соответствующее деформации по направлению оси « \tilde{y} », только за время порядка t_0 . Каждый луч, шедший в направлении « \tilde{y} », хранит информацию об анизотропии, соответствующую времени t_0 .

Пусть α — угол между отрицательным направлением оси « \tilde{x} » и лучом, проходящим в начале координат в момент наблюдения. Тогда величина α для луча, шедшего вдоль « \tilde{y} » в момент, соответствующий красному смещению z , определяется для больших z формулой

$$\alpha = \frac{2}{z}, \quad z \gg 1.$$

Для почти изотропной стадии, в случае когда плотностью вещества в динамике еще нельзя пренебречь, формула получена Дорошкевичем ($R = \rho/\rho_{\text{кр}}$):

$$\sin \alpha = \frac{\Omega^2 (1+z)}{4 + 2\Omega z - 4\Omega - \Omega^2 (z-1) - 4(1-\Omega)\sqrt{1+\Omega z}}. \quad (4)$$

Если бы среда была всегда прозрачна для излучения, то чем меньше α , тем меньше была бы в этом направлении наблюдаемая температура излучения. Однако межгалактическая среда в ходе расширения становится прозрачной для излучения при определенном z_0 . Поэтому лучи с малым α не шли вдоль « \tilde{y} », после того как среда стала прозрачной. Следовательно, максимальная разность температур должна наблюдаться в направлении

оси « \tilde{x} » и под углами $\pm\alpha = \alpha(z_0)$, а не во взаимно перпендикулярных направлениях, как в А-моделях. В плоскости « \tilde{x} , \tilde{z} » под такими же углами $\pm\alpha = \alpha(z_0)$ будет наблюдаться максимальная разность $\Delta T/T$ другого знака. В целом зависимость $\Delta T/T$ от направления дается выражением

$$\frac{\Delta T}{T} \sim f(\alpha) \sin 2\varphi$$

($\alpha=0$ в отрицательном направлении оси x). Функция $f(\alpha)$ имеет острый максимум вблизи $\alpha = \theta \ll 1$. Если принять $\rho_0 \approx 2 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$, $\Omega = 0,07$, $\Lambda = 0$, $z_0 \approx 25$, то $\theta(z_0) \approx 8^\circ$. Распределение излучения будет почти изотропным по всему небу за исключением пятна размером $\sim 4\theta$. В пятне будут четыре разделенные перпендикулярными диаметрами с чередующимися избытком и недостатком интенсивности излучения. Ясно, что при сканировании антенной можно пройти только через область с минимумом $\Delta T/T$. Может быть, такая ситуация имеет место в измерениях Уилкинсона и Партриджа? Ясно, что необходимы новые наблюдения и в других направлениях на небе, чтобы решить проблему анизотропии. Анализ влияния нейтрино в В-моделях еще предстоит.

ДОПОЛНЕНИЕ XIII

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЯГОТЕНИЕ

Статистическая физика систем, в которых тяготение играет существенную роль, имеет нетривиальные, необычные особенности. В прошлом, без должного учета этих особенностей, поверхностное применение термодинамики (т. е., по существу, статистики) в космологии приводило к совершенно неправильным выводам. Так, в частности, возникла пресловутая проблема «тепловой смерти Вселенной» и, как следствие неправильных предположений, — флуктуационная теория*) нарушения термодинамики в космологическом масштабе.

Для понимания особенностей задачи рассмотрим основную величину — статистический интеграл $Z = \int e^{-E/kT} dp dx$, взятый по всему фазовому объему системы**). Энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии частиц и энергии

*) Не смешивать с флуктуационной теорией возникновения неоднородностей; см. гл. 19.

***) Свободная энергия системы, как известно, выражается через Z , $F = -kT \ln Z$; легко выразить и все другие величины — энергию $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ и т. д.

их взаимодействия, в частности, гравитационного взаимодействия.

В классической теории интеграл разбивается на произведение двух интегралов, по импульсам и по координатам. Итак, мы должны рассматривать $\int e^{-\frac{U(x)}{kT}} dx$, где $U(x)$ есть потенциальная энергия гравитационного взаимодействия; x есть символическое обозначение всех координат всех частиц, составляющих систему; в ньютоновской теории $U(x) = -G \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}}$.

С таким выражением потенциальной энергии U интеграл расходится. Интеграл расходится при $r \rightarrow \infty$, когда $U \rightarrow 0$, в том случае, если бесконечен объем интегрирования, приходящийся на одну частицу*). Это свойство является общим для тяготения и для всех других потенциалов. Расходимость при больших r существенна при рассмотрении системы конечного числа частиц в бесконечном пространстве, например, скопления звезд (см. гл. 19). Однако это свойство интеграла с гравитационной энергией не отличается от свойств других типов взаимодействия, например, электромагнитного, ядерных сил.

Существенно, что статистический интеграл с гравитационным взаимодействием расходится и при малом $r \rightarrow 0$. Экспонента $e^{A/r}$ растет при $r \rightarrow 0$ быстрее, чем убывает объем (r^3).

Кулоновское электромагнитное взаимодействие двух разноименных зарядов обладает тем же свойством. Однако квантовые эффекты ограничивают снизу то минимальное расстояние, на которое электрон может приблизиться к ядру. В системе из большого числа заряженных частиц притяжение разноименных зарядов компенсируется отталкиванием одноименных. Поэтому кулоновские силы обуславливают образование атомов, жидкости, кристаллов, но не приводят к более сильным катастрофическим эффектам.

Между тем силы тяготения, ничтожно малые на атомном уровне, возрастают с увеличением числа частиц.

В макроскопических, астрономических масштабах силы тяготения и расходимость статистического интеграла при малых расстояниях, т. е. при больших плотностях, играет решающую роль.

При рассмотрении невзаимодействующих частиц статистическая физика приводит к выводу, что наиболее вероятным является равномерное распределение частиц в пространстве.

*) Само по себе рассмотрение бесконечного объема и бесконечного числа частиц при конечной их плотности, как уже отмечено в основном тексте, не создает трудностей.

На несколько более ученом языке можно сказать, что энтропия максимальна для равномерного однородного распределения вещества, к тому же с постоянной температурой.

В этом равновесном состоянии невозможно, по второму началу термодинамики, возникновение макроскопического движения, магнитных полей, какой бы то ни было организованной структуры.

Наблюдаемое в настоящее время состояние характеризуется резкой неоднородностью плотности и температуры (звезды, галактики), макроскопическими движениями и магнитными полями.

Из противопоставления наблюдаемого и равновесного состояния возникают вопросы:

1) применительно к будущему, должна ли Вселенная перейти в однородное изотермическое равновесное состояние («тепловая смерть»)?

2) применительно к прошлому, если когда-то Вселенная была в однородном изотермическом равновесном состоянии, то как возникло сегодняшнее наблюдаемое явно неравновесное состояние? Не следует ли приписать его появление гигантской флуктуации, нарушению термодинамики?

Ошибка в постановке этих вопросов заключается в том, что (молчаливо) в рассмотренном не учитывалась гравитация. С учетом гравитации однородное распределение вовсе не соответствует максимуму энтропии.

Соберем вещество в отдельные сгустки, звезды или галактики. При сохранении полной энергии произойдет выделение гравитационной энергии и повышение температуры.

Вероятность состояния есть произведение вероятности пространственного распределения частиц на вероятность того, что частицы имеют данные скорости, данную кинетическую энергию.

При собирании вещества в сгустки «пространственная» вероятность уменьшается, но зато растет «скоростная» вероятность, так что общее произведение растет.

Образование звезд и галактик из равномерного вещества происходит с ростом энтропии, является естественным процессом, не требует нарушения термодинамики *)!

*) Строго однородное изотермическое состояние является равновесным. Равновесие есть экстремум энтропии, но этот экстремум в данном случае не является максимумом и тем более абсолютным максимумом. Направление эволюции звезд, галактик, всей Вселенной подробно обсуждается во многих разделах основного текста книги и здесь неуместно было бы повторяться. Во всяком случае современный читатель должен ясно понимать, что энтропия растет и в то же время — эволюция в будущем, с учетом тяготения, отнюдь не ведет к однородному серому изотермическому состоянию.

- А. А. Абрикосов, АЖ 31, 112 (1954).
Х. Альвен, АЖ 42, 873 (1965).
Л. В. Альтшулер, УФН 85 (2), 197 (1965).
В. А. Амбарцумян, Ученые записки ЛГУ 22, 19, 1938.
В. А. Амбарцумян, «Доклады на XI Сольвеевском конгрессе», Брюссель, 1958.
В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 2, Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1960.
В. А. Амбарцумян, «Доклады на XIII Сольвеевском конгрессе», 1964.
В. А. Амбарцумян, Г. С. Саакян, АЖ 37, 193 (1960).
В. А. Амбарцумян, Г. С. Саакян, Вопросы космогонии 9, 91 (1963).
А. И. Базь, В. И. Гольданский, Я. Б. Зельдович, УФН 85 (3), 445 (1965).
Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, ДАН СССР 118, 671 (1958).
Дж. Бербидж и Э. М. Бербидж, в сб. «Происхождение и эволюция звезд», М., ИЛ, 1962 (перевод из «Handbuch der Physik», Berlin, 51, 1958).
Г. С. Бисноватый-Коган, АЖ 43, № 1, 89 (1966).
Г. С. Бисноватый-Коган, Астрофизика 3 (1967а).
Г. С. Бисноватый-Коган, Доклад на XIII конгрессе МАС (1967b).
Г. С. Бисноватый-Коган, АЖ 44, № 6 (1967с).
Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, АЖ 43, № 6, 1200 (1966).
Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, АЖ 44, 525 (1967).
Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, АЖ 44, № 6 (1967).
Г. С. Бисноватый-Коган, Я. М. Каждан, АЖ 43, № 4, 761 (1966).
А. Ф. Богородский, Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии, Киев, Изд-во Киевского ун-та, 1962.
В. Б. Брагинский, УФН 86, 433 (1965).
В. Б. Брагинский, Письма ЖЭТФ 3, 69 (1966).
В. Б. Брагинский, Я. Б. Зельдович, В. К. Мартынов, В. В. Мигулин, ЖЭТФ 52, 29 (1967).
В. Б. Брагинский, Я. Б. Зельдович, В. К. Мартынов, В. В. Мигулин, ЖЭТФ 54, 120, 1968.
С. И. Брагинский, ЖЭТФ 47, 2178 (1964).
Дж. Вебер, Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, 1962.
П. Вестервельт, Письма ЖЭТФ 4, 333 (1966).
Ю. С. Владимиров, ЖЭТФ 45, 251 (1963).
Ж. Вокулер, в сб. «Строение звездных систем», М., ИЛ, 1962, стр. 376.
Л. С. Галкин, Тезисы Первой Советской гравитационной конференции, М., 1961.

- Г. М. Гандельман, ЖЭТФ 43, 7, 131 (1962).
 Г. М. Гандельман, В. С. Пинаев, ЖЭТФ 37, 1072 (1959).
 Г. М. Гандельман, Д. А. Франк-Каменецкий, ДАН СССР 107, 811 (1956).
 М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ 51, 129 (1966a).
 М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ 51, 1127 (1966b).
 Р. Е. Гершберг, Тезисы Симпозиума «Переменные звезды и звездная эволюция» (Москва, ноябрь, 1964).
 С. С. Герштейн, Я. Б. Зельдович, Письма ЖЭТФ 4, 174 (1966).
 В. Л. Гинзбург, АЖ 38, 380 (1961).
 В. Л. Гинзбург, ДАН СССР 156, 43 (1964).
 В. Л. Гинзбург, Д. А. Киржниц, ЖЭТФ 47, 2006 (1964).
 В. Л. Гинзбург, Л. М. Озерной, ЖЭТФ 47, № 9, 1030 (1964).
 В. Л. Гинзбург, Л. М. Озерной, АЖ 42, 943 (1965).
 В. Л. Гинзбург, Л. М. Озерной, Известия высших учебных заведений (Радиофизика) 9, 221 (1966).
 В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, УФН 84 (2), 201 (1964a).
 В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, ДАН СССР 158, 808 (1964b).
 Л. П. Гришук, АЖ 44, 1097 (1967).
 Л. Э. Гуревич, Вопросы космогонии 2, 151 (1954a).
 Л. Э. Гуревич, Вопросы космогонии 3, 94 (1954b).
 Л. Э. Гуревич, А. И. Лебединский, Труды четвертого совещания по вопросам космогонии, 147, Москва, 1955.
 В. Ц. Гурович, АЖ 42, № 6 (1965).
 О. Х. Гусейнов, Тезисы II Всесоюзной конференции по гравитации, Тбилиси, 1965.
 О. Х. Гусейнов, Я. Б. Зельдович, АЖ 43, 313 (1966).
 В. М. Дашевский, Я. Б. Зельдович, АЖ 41, 1071 (1964).
 В. М. Дашевский, В. И. Слыш, АЖ 42, 863 (1965).
 Р. Дикке, В сборнике «Гравитация и относительность», М., «Мир», 1965.
 Н. А. Дмитриев, ЖЭТФ 42, 772 (1962).
 Н. А. Дмитриев, Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 45, 1150 (1963); ЖЭТФ 18, 793 (1964).
 Н. А. Дмитриев, С. А. Холин, Вопросы космогонии 9, 254 (1963).
 А. Г. Дорошкевич, АЖ 43, 105 (1965a).
 А. Г. Дорошкевич, Астрофизика 1, 255 (1965b).
 А. Г. Дорошкевич, Астрофизика 2, 37 (1966).
 А. Г. Дорошкевич, Астрофизика 3, 175 (1967).
 А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, АЖ 40, 807 (1963).
 А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, ЖЭТФ 49, 170 (1965).
 А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Письма ЖЭТФ 5, 119 (1967a).
 А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, ЖЭТФ 53, 644 (1967b).
 А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, АЖ 44, 295 (1967c).
 А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, АЦ, № 442 (1967d).
 А. Г. Дорошкевич, Я. Г. Зельдович, И. Д. Новиков, препринт ИПМ (1967e).
 А. Г. Дорошкевич, И. Д. Новиков, ДАН СССР 154, № 4, 809 (1964).
 А. Г. Дорошкевич, Р. А. Сюняев, АЖ 44, № 6 (1967a).
 Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 33, 4, 991 (1957).
 Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 37, 569 (1959).
 Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 38, 4, 1123 (1960).

- Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 41, 1609 (1961).
Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 42, 1667 (1962a).
Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 42, 641 (1962b).
Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 43, 1037 (1962c).
Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 43, 1561 (1962d).
Я. Б. Зельдович, Вопросы космогонии 9, 157 (1963a).
Я. Б. Зельдович, УФН 80, 357 (1963b).
Я. Б. Зельдович, Вопросы космогонии 9, 240 (1963c).
Я. Б. Зельдович, Атомная энергия 14, 92 (1963d).
Я. Б. Зельдович, Вопросы космогонии 9, 36 (1963e).
Я. Б. Зельдович, Вопросы космогонии 9, 232 (1963f).
Я. Б. Зельдович, АЦ № 250 (1963g).
Я. Б. Зельдович, ДАН СССР 155, 67 (1964a).
Я. Б. Зельдович, АЖ 41, 19 (1964b).
Я. Б. Зельдович, АЖ 41, 873 (1964c).
Я. Б. Зельдович, препринт (1964d).
Я. Б. Зельдович, Письма ЖЭТФ 1 (3), 40 (1965a).
Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 48, 986 (1965b).
Я. Б. Зельдович, АЖ 42, № 2, 283 (1965c).
Я. Б. Зельдович, УФН 86 (2), 303 (1965d).
Я. Б. Зельдович, УФН 89 (4), 647 (1966).
Я. Б. Зельдович, Письма ЖЭТФ 6, 922 (1967a).
Я. Б. Зельдович, Письма ЖЭТФ 6, 1050 (1967b).
Я. Б. Зельдович, О. Х. Гусейнов, ДАН СССР 162, 791 (1965a).
Я. Б. Зельдович, О. Х. Гусейнов, Письма ЖЭТФ 1 (4), 11 (1965b).
Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеев, Ю. П. Райзер, ЖЭТФ 34, 1278, 1447 (1958).
Я. Б. Зельдович, В. Г. Курт, Р. А. Сюняев, ЖЭТФ 1967.
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, УФН 84 (3), 377 (1964a).
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, ДАН СССР 155, 1033 (1964b).
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, ДАН СССР 158, 811 (1964c).
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, УФН 86 (3), 477 (1965).
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Эйнштейновский сборник 1 (1966a).
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, АЖ 43, 758 (1966b).
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Симпозиум № 29 МАС, Бюракан (1966c).
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, АЖ 44, № 3 (1967a).
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Письма ЖЭТФ 6, 772 (1967b).
Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Р. А. Сюняев, АЦ № 371 (1966).
Я. Б. Зельдович, Л. Б. Окунь, С. Б. Пикельнер, УФН 87, 113 (1965).
Я. Б. Зельдович, М. А. Подурец, ДАН СССР 156, 57 (1964).
Я. Б. Зельдович, М. А. Подурец, АЖ 42, № 5, 963 (1965).
Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн, М., «Наука», 1966.
Я. Б. Зельдович, Я. А. Смородинский, ЖЭТФ 41, 907 (1961).
А. Л. Зельманов, Канд. диссертация, МГУ (1944).
А. Л. Зельманов, ДАН СССР 61, 993 (1948).
А. Л. Зельманов, ДАН СССР 107, 815 (1956).
А. Л. Зельманов, ДАН СССР 124, 1030 (1959a).
А. Л. Зельманов, Труды шестого совещания по вопросам космогонии, Москва (1959b).
Л. Н. Иванова, В. С. Имшенник, Д. К. Надёжин, препринт (1967).
В. С. Имшенник, Д. К. Надёжин, АЖ 41, 829 (1964).
В. С. Имшенник, Д. К. Надёжин, АЖ 42, № 6, 1154 (1965).
В. С. Имшенник, Д. К. Надёжин, АЖ 44, 377 (1967).
В. С. Имшенник, Д. К. Надёжин, В. С. Пинаев, АЖ 43, № 6, 1215 (1966).

- В. С. Имшенник, Д. К. Надёжин, В. С. Пинаев, АЖ 44, 768 (1967).
 Л. Инфельд, Е. Плебанский, Движение и релятивизм, М., ИЛ, 1962.
 Н. Н. Калиткин, ЖЭТФ 38 (5), 1534 (1960).
 С. А. Каплан, ЖЭТФ 19, 951 (1949a).
 С. А. Каплаи, Уч. зап. Львовского ун-та, 15, вып. 4, стр. 101 (1949b).
 С. А. Каплаи, Физика звезд, М., Физматгиз, 1963.
 С. А. Каплан, Г. А. Лупанов, АЖ 42, 299 (1965).
 С. А. Каплан, С. Б. Пикельнер, Межзвездная среда, М., Физматгиз (1963).
 И. Д. Караченцев, Астрофизика 1, 303, 1965.
 Н. С. Кардашев, АЖ 41, № 5 (1964).
 Н. С. Кардашев, АЦ № 430, 1967.
 Н. С. Кардашев, Г. Б. Шоломицкий, АЦ № 336 (1965).
 Д. А. Киржиц, В. Л. Поляченко, ЖЭТФ 46, 755 (1964).
 Д. А. Киржиц, В. Л. Поляченко, ЖЭТФ 46, 225 (1964); ЖЭТФ 19, 514 (1964).
 Я. Климов, АЖ 40, 874 (1963).
 А. С. Компанеец, ЖЭТФ 31, 876 (1956).
 А. С. Компанеец, А. С. Чернов, ЖЭТФ 47, 1939 (1964).
 У. Х. Копвилем, В. Р. Нагибаров, Письма ЖЭТФ 2, 529 (1965).
 В. А. Крат, Фигуры равновесия небесных тел, М., Гостехиздат, 1950.
 Б. В. Кукаркии, Астрофизика 1, № 4, 465 (1965).
 В. Г. Курт, Р. А. Сюняев, Космические исследования 5, 573 (1967a).
 В. Г. Курт, Р. А. Сюняев, Письма ЖЭТФ 5, 299 (1967b).
 В. Г. Курт, Р. А. Сюняев, АЖ 44, 6 (1967c).
 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, 4-е изд., М., Физматгиз, 1962.
 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., Физматгиз, 1964.
 Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН СССР 102, 489 (1955).
 Л. Д. Ландау, К. П. Станюкович, ДАН СССР 46, 399 (1945).
 А. И. Лебединский, Вопросы космогонии 2, 5 (1954).
 Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ 16, 587 (1946).
 Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, ЖЭТФ 39, 149 (1960a).
 Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, ЖЭТФ 39, 800 (1960b).
 Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН 30 (3), 391 (1963).
 Е. М. Лифшиц, В. В. Судаков, И. М. Халатников, ЖЭТФ 40, 1847 (1961).
 Т. А. Лозинская, Н. С. Кардашев, АЖ 40, 209 (1963).
 М. А. Марков, ЖЭТФ 51, 878 (1966).
 Д. Я. Мартынов, Курс общей астрофизики, Физматгиз, М., 1965.
 А. Г. Масевич, АЖ 33, 216 (1956).
 А. Г. Масевич, Э. В. Коток, АЖ 40, 659 (1963).
 А. Г. Масевич, Э. В. Коток, О. Б. Длужиевская, А. Мазани, АЖ 42, 334 (1965).
 В. Н. Мироновский, ЖЭТФ 48, 358 (1965a).
 В. Н. Мироновский, АЖ 42, 977 (1965b).
 А. А. Михайлов (редактор), Курс астрофизики и звездной астрономии 2, Физматгиз, 1962.
 Ф. Моррисон, УФН 92, 159 (1967).
 Д. К. Надёжин, Д. А. Франк-Каменецкий, АЖ 39, 1003 (1962).
 Д. К. Надёжин, Д. А. Франк-Каменецкий, АЖ 41, 842 (1964a).
 Д. К. Надёжин, Д. А. Франк-Каменецкий, Вопросы космогонии 10, 154 (1964b).

- Д. К. Надёжин, Д. А. Франк-Каменецкий, АЖ 42, 290 (1965).
И. Д. Новиков, АЖ 38, 564 (1961).
И. Д. Новиков, Вестник Моск. ун-та, серия III, № 5, стр. 90 (1962a).
И. Д. Новиков, Вестник Моск. ун-та, серия III, № 6, стр. 61 (1962b).
И. Д. Новиков, Сообщения ГАИШ, № 120, 42 (1962c).
И. Д. Новиков, АЖ 40, 772 (1963).
И. Д. Новиков, АЦ № 290 (1964a).
И. Д. Новиков, АЖ 41, 1075 (1964b).
И. Д. Новиков, ЖЭТФ 46, 686 (1964c).
И. Д. Новиков, Сообщение ГАИШ, № 132, стр. 3 и 43 (1964d).
И. Д. Новиков, Письма ЖЭТФ 3, № 5, 223 (1966a).
И. Д. Новиков, АЖ 43, 911 (1966b).
И. Д. Новиков, препринт (1967).
И. Д. Новиков, Л. М. Озерной, ДАН СССР 150, 1019 (1963).
И. Д. Новиков, Л. М. Озерной, препринт, ФИАН, А-17 (1964).
И. Д. Новиков, Р. А. Сюняев, АЖ 44, 320 (1967).
К. Ф. Огородников, Динамика звездных систем, Физматгиз, 1958.
Л. М. Озерной, УФН 83, 565 (1964).
Л. М. Озерной, ДАН СССР 163, 50 (1965).
Л. М. Озерной, Доклад на II Всесоюзной гравитационной конференции, Тбилиси, апрель (1965).
Л. М. Озерной, АЖ 43, 300 (1966a).
Л. М. Озерной, Диссертация, ГАИШ, Москва (1966).
Л. М. Озерной, Ранние стадии формирования звезд и звездных систем, Труды Симпозиума «Переменные звезды и звездная эволюция», «Знание» (1967a).
Л. М. Озерной, О механизме переменного излучения и природе квази-звездных объектов, Труды Симпозиума «Переменные звезды и звездная эволюция», «Знание» (1967b).
Л. М. Озерной, В. Е. Чертопруд, АЖ 43, 20 (1966).
Л. М. Озерной, В. Е. Чертопруд, АЖ 44, 537 (1967).
Л. Б. Окунь, УФН 89, 603 (1966).
Ю. Н. Парийский, АЖ 44, № 5 (1967).
А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, Физматгиз, 1961.
А. З. Петров (редактор), Гравитация и относительность, «Мир», М., 1965.
А. З. Петров, Новые методы в общей теории относительности, «Наука», 1966.
В. С. Пинаев, Вопросы космогонии 9, 176 (1963a).
В. С. Пинаев, ЖЭТФ 45, 548 (1963b).
Г. В. Пинаева, АЖ 41, 25 (1964).
С. Б. Пикельнер, Основы космической электродинамики, М., Физматгиз, 1961.
С. Б. Пикельнер, АЖ 40, 601 (1963).
С. Б. Пикельнер, АЖ 42, 3 (1965).
С. Б. Пикельнер, Л. А. Вайнштейн, Письма ЖЭТФ 4, 307 (1966).
М. А. Подурец, ДАН СССР 154, 300 (1964a).
М. А. Подурец, АЖ 41, № 6 (1964b).
Б. М. Понтекорво, ЖЭТФ 36, 1615 (1959).
Б. М. Понтекорво, Вопросы космогонии 9, 132 (1963).
Б. М. Понтекорво, Я. А. Смородицкий, ЖЭТФ 41, 239 (1961).
Ю. П. Псковский, АЖ 37, 1056 (1960).
Ю. П. Псковский (редактор), Наблюдательные основы космологии, М., ИЛ, 1965.
А. П. Пустовойт, А. В. Баутин, ЖЭТФ 46, 1386 (1964).
В. И. Пустовойт, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ 42, 163 (1962).

- П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, изд. 2-е, М., «Наука», 1964.
- А. Розенфельд, А. Барбаро-Галтиери, В. Баркас, П. Бастьен, Дж. Кирз, М. Руз, УФН **86** (2), 335 (1965).
- С. В. Рублев, Труды Симпозиума «Переменные звезды и звездная эволюция» (Москва, ноябрь, 1964, стр. 8).
- Ю. А. Рылов, ЖЭТФ **40**, 1955 (1961).
- Г. С. Саакян, Изв. АН Арм. ССР **14**, 117 (1961).
- Г. С. Саакян, АЖ **39**, 1014 (1962).
- Г. С. Саакян, Тезисы II Всесоюзной конференции по гравитации, Тбилиси, 1965.
- Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартанян, Сообщ. Бюраканской обсерватории **33**, 55 (1963).
- Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартанян, АЖ **41**, 193 (1964).
- А. Д. Сахаров, ЖЭТФ **49**, 345 (1965).
- А. Д. Сахаров, Письма ЖЭТФ, т. 3, 439 (1966).
- А. Д. Сахаров, Письма ЖЭТФ **5**, 32 (1967a).
- А. Д. Сахаров, ДАН СССР **177** (1), (1967).
- З. Ф. Сеидов, Астрофизика **3**, 189 (1967).
- Дж. Л. Синг, Общая теория относительности, ИЛ, 1963.
- Ю. Н. Смирнов, АЖ **41**, 1084, 1964.
- К. П. Станюкович, Неустановившиеся движения сплошной среды, М., Гостехиздат, 1955.
- К. П. Станюкович, Гравитационное поле и элементарные частицы, М., 1965.
- Р. А. Сюняев, АЖ **43**, 1237 (1966).
- Р. А. Сюняев, препринт ИПМ (1967).
- Дж. Уилер, Гравитация, нейтрино и Вселенная, М., ИЛ, 1962.
- Р. Фейнман, УФН **91**, 29 (1967).
- В. Г. Фесенков, АЖ **26**, 67, 1949.
- В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, изд. 2-е, М., Физматгиз, 1961.
- Д. А. Франк-Каменецкий, Физические процессы внутри звезд, М., Физматгиз, 1959.
- Д. А. Франк-Каменецкий, АЖ **40**, 455 (1963).
- Г. Фридман, УФН **84** (3), 505 (1964).
- А. А. Фридман, Избранные труды, М., 1966.
- И. М. Халатников, ЖЭТФ **48**, 261 (1965).
- Ф. Хойл, Вопросы космогонии **7**, 15 (1960); в сб. «Магнитная гидродинамика», М., Госатомиздат, 1958, стр. 37.
- П. Н. Холопов, АЖ **42**, 369 (1965).
- Г. А. Шайн, Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс. **7**, 83 (1943).
- Э. Шацман, Вопросы космогонии **3**, 227 (1954).
- М. Ф. Широков, И. З. Фишер, АЖ **39**, 899 (1962).
- И. С. Шкловский, АЖ **39**, 591 (1962).
- И. С. Шкловский, АЦ № 250 (1963).
- И. С. Шкловский, АЦ № 256 (1963).
- И. С. Шкловский, АЖ **41**, 80 (1964b).
- И. С. Шкловский, АЖ **42**, 287 (1965a).
- И. С. Шкловский, ДАН СССР **160** (1), 54 (1965).
- И. С. Шкловский, Н. С. Кардашев, ДАН СССР **155**, 1039 (1964).
- И. С. Шкловский, Сверхновые звезды, «Наука», 1966.
- И. С. Шкловский, АЦ № 401 (1967a).
- И. С. Шкловский, АЦ № 429 (1967b).
- И. С. Шкловский, АЖ **44**, 930 (1967).
- А. С. Эддингтон, Теория относительности, Ленинград — Москва, 1934.

- А. С. Эйнштейн, Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.
 А. С. Эйнштейн, Собрание научных трудов, 1, «Наука», 1965.
 Т. А. Эмин-заде, ДАН Азерб. ССР 15, 1005 (1959).
 Т. А. Эмин-заде, Труды Шемахинской обс. (Баку) 3, 12, 1964.
 Е. И. Эпик, Сб. «Ядерные процессы в звездах», М., ИЛ, 1957, стр. 108.
 Abell G. O., Annual Rev. Astronomy and Astrophys. 3, 1, 1965.
 Aller L. H., Abundance of the Elements, Wiley (Interscience), New York, 1961.
 Aller L. H., McLaughlin D. B. (ed. by), Stellar Structure, Chicago, London, 1965.
 Alpher R., Bethe H. A., Gamow G., Phys. Rev. 73, 803 (1948).
 Alpher R., Herman R., Phys. Rev. 74, 1737 (1948).
 Alpher R., Herman R., Rev. Mod. Phys. 22, 153 (1950).
 Alpher R., Herman R., Ann. Rev. Nucl. Sci. 2, 1 (1953).
 Alfvén H., Kleip O., Arkiv f. Fysik 23, 187 (1962).
 Alfvén H., Preprint, Stockholm, 1964.
 Ambarzumian V., Rapport 11 Conseil de physique Solvay, Brussels, 1958.
 Ambarzumian V., Rapport 13 Conseil de physique Solvay, Brussels, 1964.
 Ames W. L., Torn K. S., Preprint, orange series, California (1967).
 Anand S. P. S., Nature 207, 1345 (1965).
 Anders E., Ap. J. 129, 327 (1959).
 Anderson B. A., Donaldson W., Palmer H., Rowson B., Nature 205, 375 (1965).
 Anderson J. L., Gautreau R., Phys. Letters 20, 24 (1966).
 Argon P. E. et al., Nuovo Cimento, Suppl., 111, 245 (1965).
 Arnett W. D., Canad. J. of Ph. 44, 2553 (1966).
 Arnett W. D., Canad. J. of Ph. 45, 1621 (1967).
 Auer L. H., Wolf N. J., Ap. J. 142, 182 (1965).
 Baade W., Evolution of Stars and Galaxies, Cambridge, 1963.
 Baade W., Christy R., Burbidge G., Fowler W. A., Hoyle F., Publ. Astr. Soc. Pacific 68, 296 (1956).
 Baade W., Zwicky F., Proc. Nat. Acad. Sci. 20, 255 (1934).
 Baglin A., Comptes Rendus 258, 5801 (1964); 260, 2424 (1965).
 Baglin A., Annales d'Astrophysique 29, № 2 (1966).
 Bahcall J. N., Salpeter E. E., Ap. J. 142, 1677 (1965).
 Bahcall J. H., Salpeter E. E., Ap. J. 144, 2 (1966a); Ap. J. 143, 2, 847 (1966b).
 Bahcall J. N., Wolf R. A., Phys. Rev. 140, B1445, B1452 (1965a); Ap. J. 142, 1254 (1965b).
 Barber D., Donaldson W., Miley G. K., Smith M., Nature 209, 753 (1966).
 Bardeen J. M., Anand S. P. S., Ap. J. 144, 953 (1966).
 Bechi C., Gallinaro G., Morpurgo G., Nuovo Cimento 39, 409 (1965).
 Belinfante F. G., Physics Letters 20, 25 (1966).
 Bertotti B., Proc. Roy. Soc. 294, 195 (1966).
 Bird G. F., Rev. Mod. Phys. 36, 717 (1964).
 Birkhoff G., Relativity and Modern Physics, Cambridge, 1923.
 Bondi H., «Cosmology», 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London and New York (1961).
 Bondi H., Proc. Roy. Soc. A282, 303 (1964).
 Bondi H., Gold T., M. N. R. A. S. 108, 252 (1948).
 Bondi H., Lyttleton R. A., Proc. Roy. Soc. A252, 313 (1959).

- Bondi H., Bonnor W., Lyttleton R. A., 3 lectures, BBC, London, 1961.
- Bonnor W. B., *Month. Not.* **117**, 104, 1957.
- Borst L., *Phys. Rev.* **78**, 807 (1950).
- Bowyer S., Byram E. T., Chubb T. A., Friedman H., *Nature* **201**, 1307 (1964).
- Bowyer S., Price T. G., *Proc. Cambr. Philos. Soc.* **61**, № 2, 531 (1965).
- Brachmachary R. L., *Nuovo Cimento* **2**, 850 (1965).
- Bronstein M. P., *Phys. Z. Sowjet.* **2**, 100 (1934).
- Burbidge E. M., *Ann. Rev. Astron. Astrop.* **5**, 399 (1967).
- Burbidge G., Burbidge E. M., In «Handbuch der Physik» (S. Flügge ed.), vol. 51, Springer, Berlin, 1958 (см. перевод в сб. «Происхождение и эволюция звезд», М., ИЛ, 1962).
- Burbidge G., Burbidge E. M., *Ap. J.* **143**, 271 (1966).
- Burbidge G., Hoyle F., *Nuovo Cimento* **4**, 558 (1956).
- Burbidge G., Lynds C. R., Preprint (1966).
- Burbidge G., Burbidge E. M., Hoyle F., Lynds C. R., *Nature* **210**, 774 (1966).
- Cameron A. G. W., *Ap. J.* **130**, 884 (1959a).
- Cameron A. G. W., *Ap. J.* **130**, 895 (1959b).
- Cameron A. G. W., *Ap. J.* **130**, 916 (1959c).
- Cameron A. G. W., *Nature* **205**, 787; **206**, 1342 (1965).
- Cameron A. G. W., Mok M., *Nature* **215**, 464 (1967).
- Carter B., Preprint, Department of Applied Math. and Theor. Phys. Univ. of Cambridge, 1965.
- Chandrasekhar S., *Mon. Not.* **93**, 539 (1933).
- Chandrasekhar S., *Stellar Structure*, Chicago, 1939.
- Chandrasekhar S., *Principles of Stellar Dynamics*, Chicago, 1942.
- Chandrasekhar S., *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*; *Rev. Mod. Phys.* **15**, 1 (1943).
- Chandrasekhar S., *Phys. Rev. Letts* **12**, 114, 437 (1964a); *Ap. J.* **140**, 417 (1964b).
- Chandrasekhar S., *Phys. Rev. Letts* **14**, 241 (1965).
- Chandrasekhar S., Tooper R. F., *Ap. J.* **139**, 1396 (1964).
- Chiu H. Y., *Ann. Phys.* **15**, 1 (1961a).
- Chiu H. Y., *Ann. Phys.* **16**, 321 (1961b).
- Chiu H. Y., *Phys. Rev.* **123**, 1040 (1961).
- Chiu H. Y., *Ann. Phys.* **26**, 364 (1964).
- Chiu H. Y., *Phys. Rev. Letts* **17**, 712 (1966).
- Chiu H. Y., *Stellar evolution*, Plenum Press, New York, 1966.
- Chiu H. Y., Salpeter E. E., *Phys. Rev. Letts* **12**, 413 (1964).
- Chupka W. A., Schiffer J. P., Stevens C. M., *Phys. Rev. Letts* **17**, 60 (1966).
- Colgate S. A., White R. H., *Ap. J.* **143**, 626 (1966).
- Conklin E. K., Bracewell R. V., *Phys. Rev. Lett* **18**, 614 (1967).
- Cox A. N., Stewart J. N., Eilers D. D., *Ap. J., Suppl.*, № 94 (1965).
- Danby G., Gaillard J. M., Goulianois K., Lederman L. M., Misty M., Schwarz M., Steiberg J., *Phys. Rev. Letts* **9**, 36 (1962).
- Davies R. D., Jennison R. C., *M. N.* **128**, 123, 1954.
- De Grasse R. W., Hogg D. C., Ohm E. A., Scovill H. E. D., *J. Appl. Phys.* **30**, 12, 2013 (1959).
- Dicke R. H., *Scientific American* **205**, 84, Dec. (1961a).
- Dicke R. H., *Phys. Rev. Letts* **7**, 352 (1961b).
- Dicke R. H., *Phys. Rev.* **126**, 1580 (1962).
- Dicke R. H., in «Gravitation and Relativity» (Chiu and Hoffman eds.), W. A. Benjamin, New York, 1964.

- Dicke R. H., Peebles P. J. E., Roll P. G., Wilkinson D. T., Ap. J. **142**, 414 (1965).
- Dirac P. A. M., Nature **139**, 323 (1937).
- Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. **A165**, 199 (1938).
- Drever R. W. P., Phil. Mag. **6**, 683 (1962).
- Durney B., Roxburgh I. W., Nature **208**, 1304 (1965).
- Dyson F. G., Interstellar Communication, N. Y., 1963.
- Eddington A. S., Relativitäts Theorie in mathematischer Behandlung, Berlin, 1925.
- Eddington A. S., The Internal Constitution of the Star, Cambridge, 1926.
- Eggen O. J., Greenstein J. L., Ap. J. **141**, 83 (1965).
- Einstein A., Sitzungsber. preuss Akad. Wiss. **142**, 1917.
- Einstein A., Sitzungsber. Acad. Wiss. Berl. **1**, 154, 1918.
- Einstein A., The Meaning of Relativity, Princeton, Univ. Press, 1950.
- Einstein A., Rosen N., J. Frankl. Inst. **223**, 43 (1937).
- Einstein A., Strauss E., Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945).
- Emden R., Gaskugeln, Leipzig, 1907.
- Eötvös R. V., Math. u. Naturwiss. Ber. Ungarn **8**, 65 (1890); Beibl. Ann. Phys. **15**, 688 (1891); Ann. d. Phys. **59**, 354 (1896); Ann. d. Phys. **68**, 11 (1922).
- Erez G., Rosen N., Bull. Res. Council Israel **F8**, 47 (1959).
- Faulkner J., Hoyle F., Narlikar J. V., Ap. J. **140**, 1100 (1964).
- Feinman R. P., Phys. Rev. **74**, 939 (1948).
- Field G., Ap. J. **129**, 525 (1959).
- Field G., Nature **202**, № 4934, 786 (1964).
- Field G. B., Henry R. C., Ap. J. **140**, 1002 (1964).
- Field G. B., Solomon P. M., Wampler E. J., Ap. J. **145**, 351 (1966).
- Finkelstein D., Phys. Rev. **110**, 965 (1958).
- Finlay-Freundlich E., M. N. **105**, 237 (1945); **107**, 268 (1947).
- Finzi A., Phys. Rev. Letts **15**, № 15, 599 (1965).
- Fowler R. H., M. N. **87**, 114 (1926).
- Fowler W. A., Rev. Mod. Phys. **36**, 545, 1104 (1964a); Preprint (Calif. Inst. of Technology, November) (1964b).
- Fowler W. A., The Dallas Conference, Dec. 1963; Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse (ed. by Robinson J., Schild A., Schücking E. L.), Univ. Chicago Press, 1965.
- Fowler W. A., Ap. J. **144**, 180 (1966).
- Fowler W. A., Hoyle F., Ap. J., Suppl. **9**, № 91, 201 (1964). (Русский перевод: Фаулер, Хойл, Нейтринные процессы и образование пар в массивных звездах и сверхновых, «Мир», 1967.)
- Fowler W. A., Burbidge E. M., Burbidge G. R., Hoyle F., Ap. J. **142**, 2, 423 (1965).
- Frenkel J., Zs. Phys. **50**, 234 (1928).
- Friedmann A., Z. Phys. **10**, 377 (1922).
- Friedmann A., Z. Phys. **21**, 326 (1924).
- Friedmann H. et al., Preprint (1964); Science **147**, № 3656 (1965).
- Gamow G., Phys. Rev. **70**, 572 (1946).
- Gamow G., Rev. Mod. Phys. **21**, 367 (1949).
- Geroch R. P., Phys. Rev. Lett. **17**, 445 (1966).
- Gold T., «Recent Developments in General Relativity», стр. 225, McMillan (Pergamon), New York, 1962.
- Gould R. J., Ramsay W., Ap. J. **144**, 587 (1966).
- Gödel K., Rev. Mod. Phys. **21**, 447 (1949).
- Greenstein J. L., Quasi-Stellar Sources, Scient. Amer. **209** (6), 54 (1963). (Русский перевод: УФН **83** (3), 549 (1964).)

- Greenstein J. L., Schmidt M., *Ap. J.* **140**, 1 (1964); *Quasi-Stellar Radio Sources and Gravitational Collapse* (ed. by Robinson J., Schild A., Schucking E. L.), Univ. Chicago Press, стр. 175, 1965.
- Greenstein G. S., Truran J. W., Cameron A. G. W., *Nature* **213**, 871 (1967).
- Gombas P., *Theorie und Lösungsmethoden des mehrteilchenproblems der wellenmechanik*, Basel, 1950. (Русский перевод: П. Гомбаш. Проблема многих частиц в квантовой механике, М., 1953.)
- Gunn J. E., Peterson B. A., *Ap. J.* **142**, 1633 (1965).
- Hagedorn R., *Nuovo Cimento*, Suppl. **3** (2), 147, 1965.
- Hamada T., Salpeter E. E., *Ap. J.* **134**, 683 (1961).
- Härm R., Schwarzschild M., *Ap. J.* **142**, 855 (1965).
- Harrison E. R., *Phys. Rev. Letts* **18**, 1011 (1967).
- Harrison R. K., Thorne K. S., Wakano M., Wheeler J. A., *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, Univ. Chicago Press, 1965. (Русский перевод: Дж. Уилер, Б. Гаррисон, М. Вакано, К. Торн, Теория гравитации и гравитационной коллапс.)
- Hawking S. W., *Phys. Rev. Lett.* **17**, 144 (1966).
- Hawking S. W., Taylor R. T., *Nature* **209**, 1278 (1966).
- Hayashi C., *Progr. Theor. Phys.*, Japan **5**, 224, 1950.
- Hayashi C., in «*Stellar Evolution*», New York, стр. 193 (1966).
- Heckmann O., *Theorien der Kosmologie*, Berlin, 1942.
- Heckmann O., Schucking E., *Z. Astrophys.* **38**, 95 (1955); **40**, 81 (1956).
- Heckmann O., Schucking E., in «*Handbuch der Physik*». (Flügge ed.), Band. 53, Springer, Berlin, 1959.
- Heckmann O., Schucking. *Gravitation*, N. Y. (1962).
- Hilbert D., *Gött. Nachr.*, 1917, *Math. Ann.* **92**.
- Hoffmeister E., Kippenhahn R. und Weigert A., *Z. Astrophys.* **59**, 242 (1964a).
- Hoffmeister E., Kippenhahn R. und Weigert A., *Z. Astrophys.* **60**, 57 (1964b).
- Hoyle F., *M. N.* **108**, 372 (1948); **109**, 365 (1949).
- Hoyle F., in «*La structure et l'évolution de l'universe*», 11 Conseil de physique Solvay, Brussels, стр. 66, 1958.
- Hoyle F., *M. N.* **120**, 256 (1960).
- Hoyle F., Burbidge G. R., *Ap. J.* **144**, 534 (1966).
- Hoyle F., Ireland J. G., *M. N.* **122**, 35 (1961).
- Hoyle F., Burbidge G., Burbidge E. M., Preprint (1964).
- Hoyle F., Fowler W., *Ap. J.* **132**, 565 (1960).
- Hoyle F., Fowler W., *Nature* **197**, 533 (1963a).
- Hoyle F., Fowler W., *M. N.* **125**, 169 (1963b).
- Hoyle F., Fowler W., Preprint (1965).
- Hoyle F., Fowler W., Burbidge G., Burbidge E. M., *Ap. J.* **139**, 909 (1964).
- Hoyle F., Narlikar J. V., *Proc. Roy. Soc.* **273**, 4 (1963).
- Hoyle F., Narlikar J. V., Wheeler J. A., *Nature* **203**, 914 (1964).
- Hoyle F., Taylor R. J., *Nature* **203**, 1108 (1964).
- Huang S. S., *Ap. J.* **138**, 471 (1963).
- Hubble E., *Proc. Nat. Acad. Sci. Wash.* **15**, 168 (1929).
- Hughes V. W., Robinson H. G., Bertran-Lopez V., *Phys. Rev. Letts* **4**, 342 (1960).
- Humason M., Mayall N., Sandage A., *Ap. J.* **61**, 97 (1956).
- Hund V., *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **15**, 189 (1936).
- Hunter C., *Ap. J.* **136**, 594 (1962).
- Hurley M., Roberts P. H., *Ap. J.*, Suppl. № 96, 11, 95 (1965).
- Iben I., *Ap. J.*, **140**, 1631, 1964.

- Iben I., Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse (ed. by Robinson J., Schild A., Schücking E. L.), Univ. Chicago Press, стр. 67, 1965.
- Iben I., Ann. Rev. Astron. Astrop. 5, 571 (1967).
- Inman C. L., Ap. J. 141, 187 (1965).
- Irvine W. M., Doctoral Thesis, Harvard University, 1961.
- Israel W., Preprint Series A, № 10, vol. 2, Canada (1966).
- J Jeans J. H., Astronomy and Cosmology, Cambridge, 1929a, стр. 345, Cambr Univ. Press, London and New York.
- J Jeans J. H., Phil. Trans. Roy. Soc. A199, 1 (1929).
- Jordan P., Naturwiss. 25, 513 (1937).
- Jordan P., Naturwiss. 26, 417 (1938).
- Jordan P., Schwerkraft und Weltall Vieweg, Braunschweig, 1955.
- Jugaku J., Sargent W. L. W., Greenstein J. L., Ap. J. 134, 783 (1961b).
- Kaufman M., Nature 207, 4998, 736 (1965).
- Kenderdine S., Ryle M., Pooley G. G., M. N. 134, 189 (1966).
- Kerr R. P., Phys. Rev. Letts 11, 237 (1963).
- Kerr R. P., in «Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse» (ed. by Robinson J., Schild A., Schücking E. L.), Univ. Chicago Press, стр. 99, 1965.
- Kippenhahn R., Weigert A., Zt. f. Ap. 65, 253, 1967.
- Kippenhahn R., Thomas H. C. und Weigert A., Z. Astrophys. 61, 242 (1965).
- Kohler A., Ap. J. 146, 488 (1966).
- Kruskal M., Phys. Rev. 119, 1743 (1960).
- Kraushaar W., Clark G., Phys. Rev. Letts 8, 106 (1962).
- Landau L. D., Zs. Phys. Sowjetunion 1, 285 (1932).
- Landau L. D., Nature 141, 333 (1938).
- Layzer D., Ann. Astron. J. 59, 170 (1954).
- Layzer D., Ap. J. 137, 351 (1963).
- Layzer D., Ann. Rev. Astron. Astrop. 2, 341 (1964).
- Layzer D., Ap. J. 141, № 2, 837 (1965).
- Ledoux P., Ap. J. 94, 537 (1941).
- Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev. 98, 1501 (1955).
- Lemaitre G., Ann. Soc. Scient. Bruxelles A53, 51 (1933).
- Longair M. S., M. N. 133, 421 (1966).
- Low F. J., Johnson H. L., Ap. J. 141, 336 (1965).
- Mathews J., Sandage A., Pub. Astron. Soc. Pacific 74, 406 (1962).
- Mestel L., M. N. 119, 223 (1959).
- Mestel L., in «Stellar Structure», Chicago — London, 297, 1965.
- Metzner A. W., J. Math. Phys. 4, 1194 (1963).
- Michce R. W., Bodenheimer P. H., M. N. 125, 269 (1963a); 126, 278 (1963b).
- Michel F. C., Phys. Rev. B133, 329 (1964); «Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse» (ed. by Robinson J., Schild A., Schücking E. L.), Univ. Chicago Press, стр. 75, 1965.
- Milne E., «Relativity, Gravitation and World-Structure», Oxford Univ. Press, London and New York, 1935.
- Milne E., «Kinematic Relativity», Oxford Univ. Press, London and New York 1948.
- Misner C. W., J. Math. Phys. 4, 924 (1963).
- Misner C. W., Nature 214, 40 (1967a).
- Misner C. W., The Isotropy of the Universe, Preprint (1967b).
- Misner C. W., Neutrino Viscosity, Preprint (1967c).
- McCrea W., Milne E., Quart. J. Math. 5, 73 (1934).
- McKellar A., Public Dominion Astroph. Observ. 7, № 15 (1941).

- McVittie G. C., *General Relativity and Cosmology*, London, 1956.
- McVittie G. C., in «Handbuch der Physik» (S. Flügge ed.), bd. 53, Springer, Berlin (1959a).
- McVittie G. C., Report on Rouaymont's Conference, Paris (1959b).
- McVittie G. C., *General Relativity and Cosmology*, Univ. of Illinois, Urbana, Illinois, 1962a.
- McVittie, *Fact and Theory in Cosmology*, Macmillan, New York, 1962b.
- McVittie, *Phys. Rev.* 128, 2871 (1962c).
- Monaghan J., Roxburgh I. W., *M. N.* 131, 13 (1965).
- Narlikar J. V., *M. N.* 126, 203 (1963).
- Ne'eman Y., *Ap. J.* 141, 1303 (1965).
- Neumann S., Scott E., in «Handbuch der Physik» (Flügge S., ed.), bd. 53, Springer, Berlin, 1959.
- Neymann J., Page E., Scott E., *A. J.* 66, 533 (1961).
- Newman E., Tamburino L., Unti T., *J. Math. Phys.* 4, 915 (1963).
- Novikov I. D., Zeldovich Ja. B., *International Conference on Relativistic Theories of Gravitation 1*, London, 1965; *Supplemento al Nuovo Cimento, Serie I*, 4, 810 (1966).
- Novikov I. D., Zeldovič Ya. B., *Ann. Rev. Astron. Astrop.* 5, 627 (1967).
- Oort J., in «La structure et l'évolution de l'univers», 11 Conseil de physique Solvay, Brussels, 1958.
- Ohm E. A., *Bell. Syst. Tech. J.* 40, 4 (1961).
- Oppenheimer J. R., Snyder H., *Phys. Rev.* 56, 455 (1939).
- Oppenheimer J. R., Volkoff G. M., *Phys. Rev.* 55, 374 (1938).
- Pacholczyck A. G., *Ap. J.* 142, 805 (1965).
- Paczinski B., *Acta Astronomica* 16, 231 (1966).
- Parker E. N., *Phys. Rev. Letts* 14, 55 (1965).
- Parker P. D., Bahcall J. N., Fowler W. A., *Ap. J.* 139, 602 (1964).
- Partridge R. B., Peebles P. J., *Ap. J.* 147, 868 (1967a); 148, 377 (1967b).
- Pauli W., *Theory of Relativity*, Macmillan (Pergamon), New York, 1958.
- Peierls S. E., Singwi K. S., Wroe D., *Phys. Rev.* 87, 46 (1952).
- Penrose R., *Phys. Rev. Letts* 14, 57 (1965).
- Penzias A. A., Wilson R. W., *Ap. J.* 142, 419 (1965).
- Peebles P. J. E., *Ap. J.* 142, 1317 (1965).
- Peebles P. J. E., *Phys. Rev. Letts* 16, 410 (1966).
- Peebles P. J. E., *Ap. J.* 147, 859 (1967).
- Peres A., *Progr. Theor. Phys., Japan* 24, 149 (1960).
- Peters P. C., Mathews J., *Phys. Rev.* 131, 435 (1963).
- Petrosian V., Salpeter E., Szekeres P., *Ap. J.* 147, 1222 (1967).
- Piddington J. H., *M. N.* 128, 345 (1964).
- Ramsey W. H., *M. N.* 110, 325 (1950).
- Raychaudhury A., *Phys. Rev.* 98, 1123 (1955).
- Reeves H., Preprint (1965).
- Rees M. J., Sciama D. W., *Ap. J.* 145, 6 (1966).
- Rees M. J., Sciama D. W., *Ap. J.* 147, 353 (1967).
- Regge T., Wheeler J., *Phys. Rev.* 108, 1063 (1957).
- Reines F., Woods R. M., *Phys. Rev. Letts.* 14, 20 (1965).
- Robertson H., *Rev. Mod. Phys.* 5, 62 (1933).
- Robertson H., in «Science in Progress» (ed. by Baisell G. A.), 2nd Ser., Yale Univ. Press, New Haven, Connecticut.
- Roll P. G., Krotkoy R., Dicke R. H., *Ann. Physics* 26, 442 (1964).
- Roxburgh I. W., *Nature* 207, 363 (1965).
- Rozen G., *Phys. Rev.* 136, 2798 (1964).
- Salpeter E. E., *Ap. J.* 121, 161 (1955).
- Salpeter E. E., *Ap. J.* 134, № 3, 669 (1961).

- Salpeter E. E., *Ap. J.* **140** (2), 796 (1964).
- Sandage A. in «Problems of Extragalactic Research», стр. 359 (ed. by McVittie G. C.), Macmillan, New York, 1962.
- Sandage A., *Ap. J.* **141**, 1560 (1965).
- Sandage A., Wyndhan, *Ap. J.* **141** (1), 328 (1965).
- Sargent W. L. W., Searle L., Preprint (1966).
- Sargent W. L. W., Jugaku J., *Ap. J.* **134**, 777 (1961a).
- Sato H., *Progress of Theoretical Physics* **35**, 241 (1966).
- Savedoff M. P., *Ap. J.* **138**, 291 (1963).
- Schatzman E., *White dwarfs*, Amsterdam, 1958.
- Schatzman E., *IAU Symp. № 10*, p. 129 (1959).
- Schatzman E., *Ann. d'Ap.* **25**, 1 (1962).
- Schmidt M., *Ap. J.* **136**, 164, (1963).
- Schmidt M., *Simposium of the IAU, № 29*, Byurakan, 1966.
- Schücking E., Hegkmann O., *11 Conseil de physique Solvay, Bruxelles*, 1958.
- Schwarzschild M., *Berl. Ber.* **189**, 1916
- Schwarzschild M., *Structure and Evolution of the Stars*, Princeton, 1958.
- Schwarzschild M., Härm R., *Ap. J.* **129**, 637 (1959).
- Sciama P. W., *M. N.* **123**, 317 (1962).
- Setti G., Woltjer L., *Ap. J.* **143**, 838 (1966).
- Shapiro I., *Phys. Rev. Letts* **13**, 789 (1965).
- Sharov A. S., Efremov Yu. N., *Inform. Bull. Variable Stars, № 23*, Commission 27 of IAU, 1963.
- Shepley L. C., *Proc. Nat. Acad. Sci.* **52**, 1403 (1964).
- Shklovsky J. S., *Ap. J.* **148**, № 1 (1967).
- Sholomitsky G. B., *Inform. Bull., Variable Stars, № 83*, Commission 27 of IAU, 1965.
- Silk J., Preprint, Cambridge, Massachusetts (1967).
- Slish V. I., *Nature* **199**, 682 (1963).
- Smith S. F., Havas P., *Phys. Rev.* **138**, №2B, 495 (1965).
- Smith H. J., Hoffleit D., *Nature* **198**, 650 (1963).
- Spitzer L. J., Saslaw W. C., *Ap. J.* **143**, 400 (1966).
- Sterne T. E., *M. N.* **93**, 736, 770 (1933).
- Stothers R., *Ap. J.* **138**, 1085 (1963).
- Struve O., *Stellar Evolution*, Princeton, New Jersey, 1950.
- Takarada K., Sato H., Hayashi C., *Progress Theor. Phys.* **36**, 504 (1966).
- Taub A. H., *Ann. Math.* **53**, 472 (1951).
- Thirring H., *Phys. Zs.* **19**, 33 (1918); **22**, 29 (1921).
- Thirring W., *Ann. of Phys.* **16**, № 1 (1961).
- Thorne K. S., *Ap. J.* **148**, 51 (1967a).
- Thorne K. S., *The rotation and pulsation of general relativistic stellar models*, preprint, California (1967b).
- Tolman R. C., *Phys. Rev.* **35**, 875 (1930).
- Tolman R. C., *Proc. Nat. Acad. Sci.* **20**, 169 (1934a).
- Tolman R. C., *Relativity. Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, 1934b.
- Tolman R. C., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 374 (1949).
- Tsuruta S., Wright J., Cameron A. G., *Nature* **206**, 1137 (1965).
- Wagoner R. V., *Rotation and Gravitational Collapse*, Preprint (1965).
- Wagoner R. V., Fowler W. A., Hoyle F., *Ap. J.*, **148**, 3 (1967)
- Welch W. J., et al., *Phys. Rev. Letts* **18**, 1068 (1967).
- Wallerstein G., *Phys. Rev. Letts* **9**, 143 (1962).
- Weinberg S., *Phys. Rev.* **128**, 1457 (1962).
- Weyl H., *Ann. der Phys.* **54**, 117 (1917); **59**, 185 (1919).
- Weymann R., *Phys. Fluids* **8**, 2, 12 (1965).
- Weymann R., *Ap. J.* **145**, 566 (1966).

- Weymann R., *Ap. J.* **147**, 887 (1967).
Wheeler J. A., *Phys. Rev.* **97**, 511 (1955).
Wheeler J. A., *La structure et l'évolution de l'univers*, 11 Conseil de physique Solvay, Brussels, 1958.
Wheeler J. A., *Neutrinos, Gravitation and Geometry*, Bologna, 1960.
Wheeler J. A., in «*Gravitation and Relativity*», N. Y., 195, 1964.
Wheeler J. A., *Annual Review of Astronomy and Astroph.* **4**, (1966).
Wheeler J. A., Feynman R. P., *Rev. Mod. Phys.* **17**, 157 (1945).
Whitrow G. J., Yallop J. B. D., *M. N.* **137**, 301 (1964).
Wildhack W. A., *Phys. Rev.* **57**, 81, 1940.
Wilkinson D. T., Partridge R. B., *Nature* **215**, 719 (1967).
Woltjer L., *Blueshifts in Quasi-Stellar Objects*, Preprint, 1966.
Zel'dovich Ja., *M. N.* **128**, 221 (1964).
Zel'dovich Ja., *Advances in Astronomy and Astroph.* **3**, 241 (1965).
Zorn J. C., Chamberlain G. E., Hughes V. W., *Phys. Rev.* **129**, 2566 (1963).
Zwicky F., in «*Handbuch der Physik*», Berlin **51**, 766, 1958.
Zwicky F., in «*Handbuch der Physik*» (Flügge S., ed), bd **53**, Springer, Berlin, 1959.
Zwicky F., Rudnicki K., *Ap. J.* **131**, 707 (1963).
Gunn J. E., *Ap. J.* **147**, 61 (1967).
Bertotti B., *Proc. Roy. Soc.* **294**, 195 (1966).
Penrose R., *General relativistic energy flux and elementary optics*, V. Hlavaty's Festschrift (1966).

Зельдович Яков Борисович
Нолыков Игорь Дмитриевич

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
АСТРОФИЗИКА

М., 1967 г., 656 стр. с илл.

Редактор *В. А. Угаров*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректоры *М. Ф. Алексеева*
и *Ю. И. Зварич*

Сдано в набор 6/VII 1967 г. Подписано
к печати 2/XII 1967 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Физ.
печ. л. 41. Условн. печ. л. 41. Уч.-изд. л. 39,36.
Тираж 5500 экз. Т-16036. Цена книги 2 р. 73 к.
Заказ № 784.

Издательство «Наука». Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 имени
Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

- Барабашов Н. П. и др., Луна, 1960, 484 стр., цена 1 р. 70 к.
Белопольский А. А., Астрономические труды, 1954, 320 стр.,
цена 69 коп.
Всехсвятский С. К., Физические характеристики комет, 1958,
575 стр., цена 2 р. 70 к.
Грушинский Н. П., Теория фигуры Земли, 1963, 446 стр., цена
87 коп.
Кринов Е. Л., Основы метеоритики, 1955, 391 стр., цена 1 р. 48 к.
Ловелл Б., Метеорная астрономия, перев. с англ., 1958, 437 стр.,
цена 1 р. 78 к.
Меррил П., Линии химических элементов в астрономических спек-
трах, перев. с англ., 1959, 192 стр., цена 50 коп.
Михайлов А. А., Теория затмений, 1954, 272 стр., цена 1 р. 50 к.
Огородников К. Ф., Динамика звездных систем, 1958, 628 стр.,
цена 1 р. 74 к.
Пикельер С. Б., Основы космической электродинамики, 1966,
408 стр., цена 1 р. 52 к.
Шароиев В. В., Планета Венера, 1965, 252 стр., цена 76 коп.
Шароиев В. В., Природа планет, 1958, 552 стр., цена 1 р. 91 к.
Щеглов П. В., Электронная телескопия, 1963, 196 стр., цена 63 коп.

Вышеперечисленные книги требуют в магазинах Книготорга. Письменный заказ можно направить также в ближайший отдел «Книга — почтой» республиканского, областного, краевого книготорга.

Литература будет выслана иналоженным платежом. При отсутствии этих книг на месте следует обратиться по адресу: Москва, К-31, Петровка, 15, магазин № 8 Москиги, отдел «Книга — почтой»