

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

К. В. Холшевников

Н. П. Питъев

В. Б. Титов

# ПРИТЯЖЕНИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

*Учебное пособие*

*Санкт-Петербург*

*2005*

ББК 22.6

X74

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук В.А. Антонов  
(ГАО РАН),  
доктор физ.-мат. наук, проф. Т.В. Бордовицкая  
(Томский гос. университет)  
кандидат физ.-мат. наук, доц. Л.Г. Лукьянов  
кандидат физ.-мат. наук, доц. Г.И. Ширмин  
(Московский гос. университет)

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
С.-Петербургского государственного университета*

**Холшевников К.В., Питьев Н.П., Титов В.Б.**

X74     Притяжение небесных тел: Учебное пособие – СПб.,  
2005. – 108 с.

В книге излагаются различные представления гравитационного потенциала протяженных тел. Сообщаются минимальные сведения из абстрактной теории потенциала. Кратко рассмотрены представления простым слоем, системой точечных масс, рядом по произвольной системе ортогональных функций. Основное внимание уделено представлению гравитационного потенциала и его градиента рядом Лапласа по шаровым функциям. Подробно изучены свойства многочленов Лежандра, сферических гармоник, а также ряда Лапласа в зависимости от структуры тела и его возможных симметрий. Даны оценки полиномов Лежандра, шаровых функций, общего члена ряда Лапласа. Часть результатов получена на кафедре небесной механики Петербургского университета. Изложение сопровождается многочисленными примерами и задачами. Последние снабжены ответами, так что книга может служить справочником.

Для студентов и аспирантов астрономических и астрономо-геодезических отделений и кафедр университетов, а также специалистов в области небесной механики, космической геодезии, гравиметрии, теории космического полета.

**ББК 22.6**

© К.В.Холшевников, Н.П.Питьев, В.Б.Титов, 2005

© С.-Петербургский гос. университет, 2005

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Притяжение конечного числа материальных точек</b>	<b>8</b>
<b>Глава 2. Притяжение протяженного тела</b>	<b>14</b>
2.1 Притяжение протяженным телом материальной точки . . . . .	14
2.2 Потенциал бесконечного тела . . . . .	17
2.3 Самогравитация протяженного тела . . . . .	20
<b>Глава 3. Уравнения Лапласа и Пуассона</b>	<b>29</b>
<b>Глава 4. Представления внешнего гравитационного потенциала</b>	<b>37</b>
4.1 Простой слой . . . . .	37
4.2 Система точечных масс . . . . .	38
4.3 Разложение по ортогональным функциям . . . . .	38
<b>Глава 5. Ряд Лапласа</b>	<b>41</b>
5.1 Ряд по степеням расстояний . . . . .	41
5.1.1 Отделение радиуса в области $r < R^-$ .	43
5.1.2 Отделение радиуса в области $r > R^+$ .	45
5.2 Свойства многочленов Лежандра . . . . .	46
5.2.1 Рекуррентность . . . . .	46
5.2.2 Частные значения . . . . .	47
5.2.3 Производные . . . . .	48
5.2.4 Дифференциальное уравнение . . . . .	49

5.2.5	Формула Родрига . . . . .	49
5.2.6	Ортогональность . . . . .	50
5.2.7	Корни . . . . .	51
5.2.8	Элементарные сферические функции и теорема сложения . . . . .	52
5.2.9	Оценки . . . . .	57
5.2.10	Трудности вычисления многочленов Лежандра . . . . .	58
5.2.11	Сходимость ряда для производящей функции . . . . .	63
5.3	Ряд Лапласа . . . . .	63
<b>Глава 6. Свойства ряда Лапласа</b>		<b>71</b>
6.1	Классификация гармоник . . . . .	71
6.2	Первые члены . . . . .	72
6.3	Симметрия . . . . .	75
6.4	Примеры точного определения гармонических коэффициентов для тел вращения . . . . .	79
6.5	Оценки гармоник . . . . .	82
6.6	Градиент шаровой функции . . . . .	87
6.7	Параметры Стокса реальных тел . . . . .	92
<b>Глава 7. Система точечных масс</b>		<b>96</b>
<b>Литература</b>		<b>101</b>
	Именной указатель . . . . .	105
	Предметный указатель . . . . .	106

## Введение

В настоящем пособии излагается теория тяготения, важнейшей частью которой является теория гравитационного потенциала. Она представляет как теоретический, так и практический интерес в связи с различными приложениями в астрономии и механике. Движение с релятивистскими скоростями, в том числе в окрестности компактных массивных тел, не рассматривается, и мы ограничились рамками ньютоновой механики без привлечения общей теории относительности Эйнштейна. При написании пособия авторы использовали свой 30-летний опыт преподавания основ теории тяготения в рамках курса небесной механики для студентов-астрономов III курса Ленинградского–Петербургского университета.

В основе теории притяжения лежит закон всемирного тяготения, открытый Исааком Ньютоном (1643–1727) и опубликованный в его знаменитых *Philosophiae Naturalis Principia mathematica* в 1687 г. Понятие потенциала введено позже Адриеном Мари Лежандром (1752–1833) и отражает свойство независимости работы от формы пути — эта работа определяется лишь начальными и конечными точками и массами перемещаемых тел. Сравнительно простое нахождение потенциала для небольшого числа точечных масс становится трудной математической задачей для протяженных тел. Теория потенциала в настоящее время является одним из разделов математической физики. Когда рассматривается притяжение близких тел, необходимо учитывать особенности их формы и распределения масс внутри них. Задача нахождения сил и потенциала редко может быть решена в конечном виде, и приходится представлять искомые величины в виде бесконечных рядов различного типа. Наиболее подробно в книге рассмотрены часто используемые в задачах небесной механики ряды по сферическим функциям, введенным Лежандром и Пьером Симоном де Лапласом (1749–1827).

Применение таких функций в сложных и громоздких задачах нахождения потенциала и действующих сил позволяет представить результаты в простой и наглядной форме. Затронуты также вопросы оценки потери точности при действиях с отрезками рядов и оценки величины отбрасываемых членов ряда. Кратко рассматриваются другие способы представления внешнего потенциала. Часть результатов получена сотрудниками кафедры небесной механики Ленинградского–Петербургского университета.

Предполагается знакомство читателя с курсами математического анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений. Знание определенных сведений из курса математической физики желательно, хотя и не обязательно. Для активного овладения материалом в конце каждой главы предлагаются задачи по рассматриваемой теме. При изложении теоретических вопросов для большей ясности и понимания вместо полного и подробного доказательства иногда приводится лишь его схема, которая дополняется ссылками на соответствующие задачи. Поэтому роль задач не сводится только к упражнениям. Ко всем задачам приводятся ответы, так что пособие может играть и роль справочника. Трудные задачи сопровождаются указаниями. В конце книги приводятся именной и предметный указатели и список литературы, содержащий, в частности, справочники и руководства по теории потенциала и сферических функций.

Книга состоит из семи глав.

В первой главе вводится понятие гравитационного потенциала для случая конечного числа материальных точек (дискретный случай).

Во второй главе понятие гравитационного потенциала обобщается на случай протяженного тела.

В третьей главе рассматривается дифференциальный оператор Лапласа для точек вне и внутри притягивающих масс и дается определение гармонических функций.

Различные способы представления внешнего гравитационного потенциала обсуждаются в четвертой главе.

В пятой главе вводится ряд Лапласа, даны сведения о многочленах Лежандра. Формулируются и доказываются важнейшие свойства многочленов Лежандра, в частности, свойства ортогональности и теорема сложения. Даны основные оценки многочленов Лежандра и их производных.

Свойства ряда Лапласа и классификация сферических гармоник приводятся в шестой главе. Обсуждаются различные случаи симметрии гравитационного потенциала, даются оценки гармоник, примеры для некоторых простых случаев и реальных тел.

В седьмой главе кратко рассматривается представление внешнего потенциала объемного осесимметричного тела системой точечных масс, когда можно обойтись аппроксимацией лишь зональных гармоник. При таком подходе теряется ортогональность разложения, но удается избавиться от растущего усложнения, связанного с использованием сферических функций высокого порядка.

За редким исключением в книге принята единая система обозначений. Векторы выделяются жирным шрифтом. Их модули обозначаются теми же буквами обычным шрифтом. Формулы и задачи нумеруются двумя числами, первое соответствует главе. Для рисунков, теорем и лемм принята сквозная нумерация. Ссылки на литературу даны курсивом в круглых скобках.

Настоящее пособие можно рассматривать как введение в раздел математического естествознания, посвященный исследованию свойств гравитационного поля небесных тел и его удобного для практики представления. Желающим ознакомиться с темой подробно мы рекомендуем приведенные в списке литературы монографии (*Антонов и др., 1988*), (*Владимиров, 2003*), (*Гюнтер, 1953*), (*Дубошин, 1961*), (*Жуковский, 1949*), (*Кондратьев, 2003*), (*Ландкоф, 1966*), (*Михлин, 2002*), (*Никольский, 1983*), (*Питъев, Титов, Холшевников, 2002*), (*Сретенский, 1946*), (*Уермер, 1980*), (*Roispacé, 1899*). История вопроса подробнейшим образом описана в монографии (*Тодхантер, 2002*). По теории сферических функций мы рекомендуем книги (*Антонов и др., 1988*), (*Аксенов, 1986*), (*Бейтмен, Эрдейи, 1973*), (*Гобсон, 1952*), (*Годунов, Михайлова, 1998*), (*Сеге, 1962*).

Мы благодарим рецензентов книги, внимательно прочитавших рукопись и сделавших ценные замечания, которые мы постарались учесть, отчего книга несомненно выиграла. Мы признательны **Российскому Фонду Фундаментальных Исследований** (грант 05-02-17408) и **Совету по грантам президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ** (грант НШ-1078.2003.2) за финансовую поддержку.

## Глава 1

# Притяжение конечного числа материальных точек

В трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим конечное множество различных материальных точек  $\mathcal{Q} = \{Q_i\}$  с массами  $m_i > 0$ , где индекс  $i$  пробегает множество  $\mathcal{N}$  натуральных чисел от 1 до  $N$ . В некоторой декартовой системе отсчета с началом в точке  $O$  и осями  $x, y, z$  положение  $Q_i(x_i, y_i, z_i)$  однозначно определяется вектором  $\mathbf{r}_i = OQ_i = (x_i, y_i, z_i)$ . Система  $\mathcal{Q}$  предполагается изолированной. Каждая точка  $Q_i$  притягивается любой другой точкой  $Q_k$  с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между  $Q_i$  и  $Q_k$  (закон всемирного тяготения Ньютона):

$$\mathbf{F}_{ik} = G \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2} \frac{\mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}}. \quad (1.1)$$

Здесь  $G$  — постоянная тяготения,  $\mathbf{r}_{ik} = Q_i Q_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$ ,  $r_{ik} = |\mathbf{r}_{ik}|$  (рис. 1).

Учтем теперь, что на  $Q_i$  действует не одна точка  $Q_k$ , а вся система  $\mathcal{Q}$  точек  $\mathcal{Q}$  без самой  $Q_i$ . Сила, с которой на  $Q_i$  действует система  $\mathcal{Q}$ , находится сложением векторов (1.1):

$$\mathbf{F}_i = G \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (1.2)$$

Индекс  $i$  пробегает множество  $\mathcal{N}$  натуральных чисел от 1 до  $N$ , индекс  $k$  — множество  $\mathcal{N}(i)$  натуральных чисел от 1 до  $N$  за исключением  $i$ , что можно записать в виде

$$\mathcal{N}(i) = \mathcal{N} \setminus \{i\} = \{k : 1 \leq k \leq N, k \neq i\}.$$



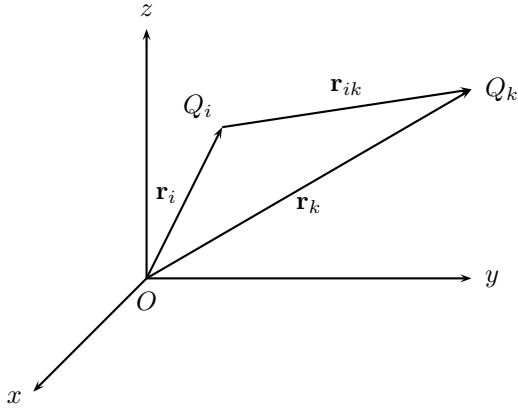


Рис. 1. Точки  $Q_i$ ,  $Q_k$  и связанные с ними векторы положения.

Масса  $m_i$  входит в выражение (1.2) общим множителем. Сокращая на него, получим соответствующее ускорение

$$\mathbf{w}_i = G \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} \frac{m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (1.3)$$

По аналогии с электрическим и другими физическими полями массу  $m_i$  можно считать *гравитационным зарядом* частицы  $Q_i$ , а ускорение  $\mathbf{w}_i$  — *напряженностью* в точке  $Q_i$  гравитационного поля системы точек  $Q_i$ .

*Замечание 1.* Значение постоянной тяготения зависит от принятой системы единиц. В системе СИ

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$

согласно (*Mohr, Taylor, 1999*). Как видим, точность определения  $G$  не слишком велика. Точность же определения произведения постоянной тяготения на массу многих тел Солнечной системы значительно выше. Для Солнца и Земли

$$Gm_{\odot} = 1.32712442076 \cdot 10^{20} \frac{\text{М}^3}{\text{с}^2}, \quad Gm_{\oplus} = 3.986004418 \cdot 10^{14} \frac{\text{М}^3}{\text{с}^2}$$

согласно (*Fukushima, 2000; Fukushima, 2002*). В руководствах по теории ньютоновского потенциала обычно полагают  $G = 1$ , что

возможно за счет выбора системы единиц измерения. Мы не стали делать этого: проверка размерностей правой и левой части формулы — неплохой контроль вычислений. При выборе специальной системы единиц этот контроль теряется.

*Замечание 2.* Если система отсчета инерциальна, то (1.3) представляют собой систему  $N$  векторных дифференциальных уравнений второго порядка (предполагается, что нет других сил, кроме гравитационных). В неинерциальном случае к гравитационным необходимо добавить силы инерции.

Важным свойством гравитационных сил является их *консервативность*, т. е. возможность представления в виде градиента некоторой скалярной функции от координат  $Q_i$ , не зависящей ни от времени, ни от скоростей  $Q_i$ .

Докажем это свойство. Как известно из векторного анализа,

$$\text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{grad}_i r_{ik} = -\frac{\mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}}, \quad (1.4)$$

$$\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \text{grad}_i \frac{1}{r_{ik}} = \frac{\mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}^3}. \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — вспомогательный вектор без индексов; нижний индекс у знака градиента показывает, что переменной считается точка  $Q_i$  при закрепленных остальных точках, так что для любой скалярной функции по определению

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \text{grad}_i f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial y_i}, \frac{\partial f}{\partial z_i} \right). \quad (1.6)$$

Существуют два подхода к нашей задаче, которые чаще всего используются в физике и астрономии.

**1. Точка  $Q_i$  выделена и рассматривается действие на нее остальных точек системы.**

В этом случае формулы (1.5) показывают, что

$$\mathbf{w}_i = \text{grad}_i V_i, \quad (1.7)$$

где

$$V_i(Q_i) = V_i(x_i, y_i, z_i) = G \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} \frac{m_k}{r_{ik}}. \quad (1.8)$$

Поскольку все точки, кроме  $i$ -й, закреплены, величина  $V_i$  считается функцией от  $Q_i$  и называется *гравитационным потенциалом*

системы  $Q_i$  в точке  $Q_i$ . Величина  $V_i$  имеет простой физический смысл. Это гравитационная потенциальная энергия (со знаком минус) единицы массы, помещенной в точку  $Q_i$ , создаваемая притяжением точек системы  $Q_i$ . Физическая размерность  $V_i$  совпадает с таковой для квадрата скорости.

Выделенность точки  $Q_i$  полезно закрепить и в обозначениях. Заменим систему  $N - 1$  фиксированных точек на систему  $N$  фиксированных точек  $Q = \{Q_k(x_k, y_k, z_k)\}$ ,  $k = 1 \div N$ , а выделенную точку на  $Q(x, y, z)$ . Соотношения (1.3), (1.7), (1.8) примут вид

$$\mathbf{w}(Q) = \mathbf{w}(x, y, z) = -G \sum_{k \in \mathcal{N}} \frac{m_k}{s_k^3} \mathbf{s}_k = \text{grad } V, \quad (1.9)$$

$$V(Q) = V(x, y, z) = G \sum_{k \in \mathcal{N}} \frac{m_k}{s_k}, \quad (1.10)$$

где  $s_k = |\mathbf{s}_k|$ ,  $\mathbf{s}_k = Q_k Q = \mathbf{r} - \mathbf{r}_k$ .

На формулы (1.9), (1.10) можно смотреть как на представление векторного и скалярного полей, описывающих гравитацию системы  $Q$  в точке  $Q$  пространства  $\mathbb{R}^3$ . В самом деле, формулы (1.9), (1.10) определяют ускорение  $\mathbf{w}$  и потенциал  $V$  в точке  $Q$  вне зависимости от того, есть ли какая-либо материя в физическом объеме, окружающем  $Q$ , или этот объем пуст. Но если поместить туда материальную частицу (пробную частицу), гравитационное поле будет действовать на нее согласно указанным формулам.

## 2. Все точки $Q_k$ равноправны.

В этом случае формуле (1.2) придадим форму

$$\mathbf{F}_i = \text{grad}_i U, \quad (1.11)$$

$$U(Q_1, \dots, Q_N) = G \sum_{(i,k) \in \mathcal{N}_1} \frac{m_i m_k}{r_{ik}} = \frac{G}{2} \sum_{(i,k) \in \mathcal{N}_2} \frac{m_i m_k}{r_{ik}}, \quad (1.12)$$

где  $\mathcal{N}_1$  — множество пар индексов, подчиненных условиям  $1 \leq i < k \leq N$ ;  $\mathcal{N}_2$  — подчиненных условиям  $1 \leq i, k \leq N, i \neq k$  (рис. 2).

Величина  $U$  называется *силовой функцией системы*  $Q$  и имеет ясный физический смысл. Это гравитационная потенциальная энергия (со знаком минус) самогравитации системы  $Q$ . Физическая размерность  $U$  совпадает с таковой для энергии.

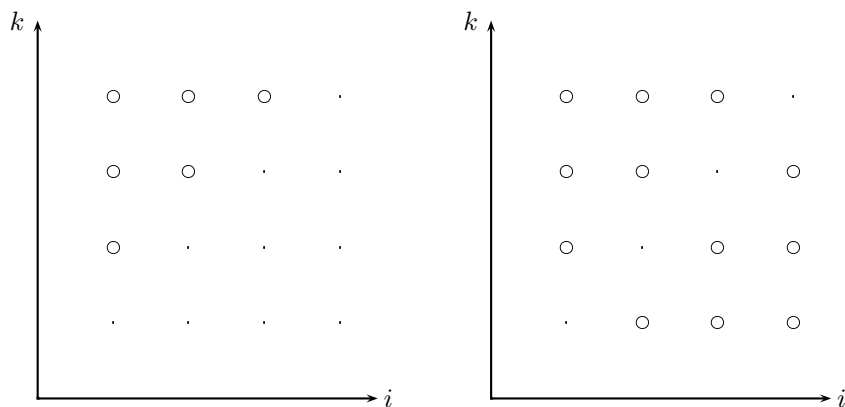


Рис. 2. Слева — множество  $\mathcal{N}_1$  при  $N = 4$ , справа — множество  $\mathcal{N}_2$  при  $N = 4$ ; элементы множеств обозначены кружочками ( $\circ$ ).

Функция  $V_i$  имеет то преимущество перед  $U$ , что выражается однократной, а не двойной суммой. С другой стороны, функция  $U$  одинакова для всей системы  $\mathcal{Q}$ , тогда как  $V_i$  — своя для каждой точки  $Q_i$ .

## Задачи к главе 1

**Задача 1.1.** Доказать, что в силовом поле (1.2) выполняется третий закон механики Ньютона.

**Задача 1.2.** Показать, что главный вектор в силовом поле (1.2) равен нулю.

**Задача 1.3.** Показать, что главный момент в силовом поле (1.2) равен нулю.

**Задача 1.4.** Введем систему единиц, в которой за единицу расстояния принята астрономическая единица длины, за единицу массы — масса Солнца, за единицу времени — сидерический год. Показать, что в этой системе с высокой точностью

$$G = 4\pi^2.$$

**Задача 1.5.** Доказать формулы (1.4), используя определение (1.6) и формулы

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_{ik}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2.$$

**Задача 1.6.** Доказать формулы (1.5), используя правило дифференцирования сложной функции и формулы (1.4).

**Задача 1.7.** Функция  $V_i$ , как и всякий потенциал, определяется уравнениями (1.3) с точностью до постоянного слагаемого. Покажите, что функция (1.8) равна работе против сил тяготения, необходимой для удаления точки  $Q_i$  единичной массы на бесконечность при неподвижных остальных точках  $Q_k$ .

**Задача 1.8.** Функция  $U$  также определяется с точностью до аддитивной постоянной. Покажите, что функция (1.12) равна работе против сил тяготения, необходимой для полного “растаскивания” системы  $\mathcal{Q}$ , когда в пределе все взаимные расстояния  $r_{ik}$  оказываются бесконечными.

**Задача 1.9.** Доказать равенство средней и правой части (1.12).

**Задача 1.10.** Доказать равенство левой и правой части (1.12).

*Указание.* Вычислите  $\partial U / \partial x_j$  и сравните с формулой (1.2), в которой индекс  $i$  замените на  $j$ .

**Задача 1.11.** Доказать аналитичность функции (1.10) и вектор-функции (1.9) в каждой точке  $\mathbb{R}^3$  за исключением точек  $Q_k$ .

**Задача 1.12.** Пусть  $p$  — расстояние от  $Q$  до произвольной точки  $Q_0 \in \mathbb{R}^3$ , не совпадающей ни с одной из точек  $Q_k$ . Найти радиус сходимости  $p_0$  ряда Маклорена функций (1.9), (1.10) по степеням  $p$ .

*Указание.* Представьте  $s_k^2$  в форме

$$s_k^2 = p^2 - 2s_{0k}p \cos H + s_{0k}^2,$$

где  $s_{0k}$  — расстояние от  $Q_0$  до  $Q_k$ ;  $H$  — угол между векторами  $Q_0Q$  и  $Q_0Q_k$ ; найдите корни  $s_k^2$ , считая эту величину функцией комплексной переменной  $p$  и вещественных параметров  $H$ ,  $s_{0k}$ .

*Ответ:*

$$p_0 = \min_{k \in \mathcal{N}} s_{0k}.$$

## Глава 2

# Притяжение протяженного тела

Формулы (1.2), (1.3), (1.9)–(1.12) тривиальным образом обобщаются на счетное множество точек  $Q_k$ : достаточно конечные суммы заменить рядами и позаботиться об условиях сходимости. Мы не останавливаемся на этом из-за отсутствия астрономических приложений, отсылая любознательных к книге (*Антонов и др., 1988*).

Напротив, распространение теории на протяженные тела вполне актуально. Как и выше, возможны два подхода.

### 2.1 Притяжение протяженным телом материальной точки

Как определить притяжение материальной точки  $Q(x, y, z)$  массой  $m$  протяженным телом  $T$ ? Стандартный способ — разбиение  $T$  на большое число  $N$  маленьких кусочков  $\Delta T_k$  диаметра  $\lambda_k$ , массой  $\Delta m_k$ , и замена тела  $\Delta T_k$  его внутренней точкой  $Q_k$  массой  $\Delta m_k$  (рис. 3). Ускорение и потенциал дискретизованного тела описываются формулами (1.9), (1.10), в которых  $m_k$  следует заменить на  $\Delta m_k$ . Очевидно, мы встретились с римановыми суммами, поэтому интересующие нас величины для  $T$  получаются переходом к пределу  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda = \max \lambda_k$ ), т. е. заменой сумм интегралами

$$\mathbf{w}(Q) = -G \int_T \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dm', \quad (2.1)$$

$$V(Q) = G \int_T \frac{dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.2)$$

Здесь  $Q(x, y, z)$  — произвольная точка  $\mathbb{R}^3$ ;  $Q'(x', y', z')$  — переменная точка, при интегрировании пробегающая тело  $T$ ;  $dm'$  — элемент массы;  $\mathbf{r} = OQ$ ;  $\mathbf{r}' = OQ'$ . Для приложений достаточно считать  $dm' = \varrho(Q')d\tau'$ , где  $\varrho$  — плотность  $T$  в точке  $Q'$ ,  $d\tau'$  — элемент объема. Плотность полагаем интегрируемой и кусочно-гладкой, а тело  $T$  — компактным множеством в  $\mathbb{R}^3$ .

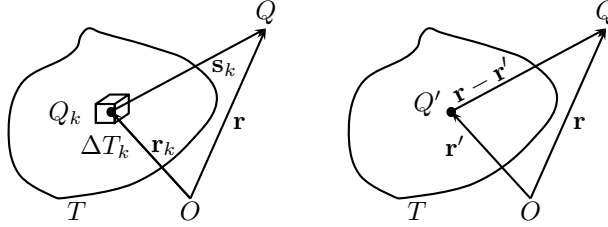


Рис. 3. К определению потенциала протяженного тела.

Под знаком интеграла (2.2) стоит вещественно-аналитическая функция от  $Q$ :

$$[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-\sigma}, \quad \sigma = 1/2.$$

Под знаком интеграла (2.1) стоит та же функция при  $\sigma = 3/2$ , помноженная на вектор с компонентами  $(x - x', y - y', z - z')$ . Рассматриваемые как функции трех переменных  $(x, y, z)$  они имеют особенность только при  $Q = Q'$ .

### Теорема 1

В каждой из областей своего определения внешний потенциал  $V$  является аналитической функцией от  $(x, y, z)$ . Ее можно дифференцировать под знаком интеграла (2.2) сколько угодно раз.

Напомним — аналитической функцией называется функция, которая в окрестности каждой точки может быть представлена степенным рядом.

Внешним потенциалом принято называть сужение функции  $V$  на открытое множество  $T' = \mathbb{R}^3 \setminus T$ . Оговорка об областях определения вызвана тем, что  $T'$  может не быть связным. В разных областях  $T'' \subset T'$  потенциал могут представлять разные аналитические функции, не продолжающиеся одна в другую, как показывает задача 2.14.

Теорема 1 является простым следствием теорем Вейерштрасса и Эйлера о том, что интеграл по параметру от аналитической функции есть аналитическая функция и что если подынтегральная функция имеет непрерывную производную по параметру (тем более аналитична), то можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла (*Фихтенгольц, 1997*), (*Смирнов, 1961*), (*Никольский, 1983*).

Благодаря теореме 1 потенциал (2.2) приобретает физический смысл. В самом деле, формулу (2.1) можно записать в виде

$$\mathbf{w}(Q) = G \int_T \left( \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dm',$$

так что

$$\mathbf{w}(Q) = \text{grad} V \quad (2.3)$$

только тогда, когда допустимо дифференцирование под знаком интеграла (2.2).

*Замечание.* Мы считали  $T$  трехмерным телом. Для внешнего потенциала ничего не изменится, если  $T$  двумерно или одномерно. В двумерном случае  $T$  предполагается поверхностью Ляпунова (*Владимиров, 2003*), (*Михлин, 2002*). В одномерном случае  $T$  предполагается кусочно-гладкой кривой.

В астрономических приложениях из двумерных тел чаще всего встречается плоский диск, аппроксимирующий плоскую составляющую Галактики или, например, кольца Сатурна.

В качестве реальных приложений одномерных тел мы можем указать только на иглообразные галактики. Важнее модельные — например, гауссово кольцо (эллипс, орбита какой-либо планеты), позволяющее определять вековые возмущения планетных орбит, а также одномерное кольцо определенного радиуса и массы, гравитационное влияние которого аппроксимирует притяжение мелких астероидов главного кольца на внутренние планеты. Влияние крупных астероидов учитывается индивидуально.

Далее мы будем заниматься почти исключительно внешним потенциалом. Здесь же скажем несколько слов о внутреннем, для которого интегралы (2.1), (2.2) — несобственные. Для трехмерных тел эти интегралы сходятся при естественных ограничениях на  $\varrho$  и имеет место формула (2.3). Для двумерных тел сходится интеграл (2.2) для внутреннего потенциала, тогда как интеграл (2.1) для внутренних точек сходится только в смысле главного значения. Для одномерных тел внутренний потенциал не существует.



Потенциал и градиент потенциала объемного тела и потенциал двумерного тела непрерывны во всем  $\mathbb{R}^3$ . Более подробные сведения и доказательства см. в книгах (*Антонов и др., 1988*), (*Владимиров, 2003*).

Задачи 2.3 и 2.4 показывают, что в окрестности притягивающей линии (включая ее концевые точки) потенциал имеет логарифмическую сингулярность  $\sim \ln s$ , где  $s$  — расстояние до линии. Следовательно, градиент терпит разрыв типа  $s^{-1}$ .

В окрестности притягивающей поверхности потенциал непрерывен, а градиент имеет скачок (задача 2.19). В окрестности края притягивающей поверхности (включая ее угловые точки) потенциал непрерывен, а градиент имеет логарифмическую особенность (задачи 2.8 и 2.9). Поэтому замена реального трехмерного тела модельным двумерным и тем более одномерным требует некоторой осторожности.

В задачах к этой главе содержится несколько поучительных примеров вычисления внешнего и внутреннего потенциала простых тел. В действительности примеров тел, потенциал которых найден в конечном виде, гораздо больше. Особенно детально изучены эллипсоиды, см. например, книги (*Питъев, Титов, Холшевников, 2002*) и (*Кондратьев, 2003*).

## 2.2 Потенциал бесконечного тела

В предыдущем параграфе предполагалось, что тело имеет конечные размеры. Однако в астрономии приходится рассматривать не только такие тела, как планеты, размеры которых конечны, но и тела, плотность которых постепенно сходит на нет. Например, звездные оболочки или короны галактик. В таких случаях естественно обращаться к интегралам, область интегрирования которых бесконечна.

Рассмотрим простейший случай потенциала бесконечной прямой. Согласно задаче 2.1 потенциал прямолинейного отрезка постоянной линейной плотности  $\varrho$ , расположенного вдоль оси  $z$  между точками  $(0, 0, -a)$  и  $(0, 0, a)$ , равен

$$V(R, z) = G\varrho \ln \frac{\sqrt{R^2 + (a - z)^2} + a - z}{\sqrt{R^2 + (a + z)^2} - a - z},$$

где  $R$  — расстояние от точки  $Q$  до прямой. При  $a \rightarrow \infty$  очевидно  $V \rightarrow \infty$ : для удаления точки от прямой на бесконечное расстояние требуется бесконечная работа. Иными словами, вторая космическая скорость бесконечна. Это не препятствует существованию потенциала. Достаточно рассмотреть разность  $V(R, z) - V(R_0, z_0)$  и перейти к пределу при  $a \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} [V(R, z) - V(R_0, z_0)] = G\rho \ln \frac{R_0^2}{R^2}.$$

Таким образом, для потенциала бесконечной прямой с постоянной линейной плотностью  $\rho$  получаем

$$V(R) = -G\rho \ln \frac{R^2}{R_0^2} = -2G\rho \ln R + C. \quad (2.4)$$

Чтобы не запутаться в физических размерностях, предпочтительнее выбрать в качестве несущественной постоянной  $R_0$ , а не  $C$ . Если пользоваться правой частью (2.4) при  $C = 0$ , то значение  $V$  будет аддитивно зависеть от выбора единицы длины. Это допустимо, но неудобно. При переходе к градиенту зависимость от единицы измерения исчезает.

Из равенства (2.4) стандартным путем выводится потенциал бесконечного цилиндра с постоянной вдоль образующих объемной плотностью  $\rho(x, y)$ :

$$V(Q) = -G \int_{T^*} \rho(x', y') \ln \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{R_0^2} dx' dy', \quad (2.5)$$

где  $T^*$  — сечение цилиндра плоскостью  $z = 0$ .

Другой важный случай — притягивающая масса распределена с постоянной поверхностной плотностью  $\rho$  на плоскости  $z = z'$ . Рассмотрим сначала вызванное притяжением плоскости ускорение  $\mathbf{w}$ . По соображениям симметрии  $w_x = w_y = 0$ , а для вертикального ускорения

$$w_z = -G\rho \int \frac{z - z'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dx dy = -2\pi G\rho \operatorname{sign}(z - z'), \quad (2.6)$$

где интегрирование распространяется на всю плоскость. Сила тяготения не зависит от расстояния до плоскости! Такому ускорению  $\mathbf{w}$  с точностью до несущественной постоянной соответствует потенциал

$$V(z) = -2\pi G\rho |z - z'|. \quad (2.7)$$

*Замечание 1.* Бесконечная плоскость создает однородное по обе стороны от себя гравитационное поле. Притяжение конечного

куска  $T$  плоскости хорошо аппроксимируется однородным полем, если расстояние от точки  $Q$  до  $T$  много меньше размеров  $T$ . Согласно решению задачи 2.19 притяжение однородного диска радиусом  $R$ , лежащего в плоскости  $x, y$  и имеющего центр в начале координат, на положительной части оси  $z$  может быть представлено сходящимися при  $z < R$  рядами

$$V(z) = 2\pi G\rho \left( R - z + \frac{z^2}{2R} + \dots \right), \quad \frac{\partial V(z)}{\partial z} = 2\pi G\rho \left( -1 + \frac{z}{R} + \dots \right).$$

При  $z \ll R$  поле практически однородно. Вспомните почти однородное электростатическое поле, создаваемое пластинами конденсатора. Возможность создания конденсатора сравнительно небольших размеров (сантиметры), создающего тем не менее ощутимое электростатическое поле, объясняется тем, что кулоновское взаимодействие на много порядков мощнее гравитационного. Электростатическое поле конденсатора может быть даже опасным для жизни, тогда как его гравитационное поле неуловимо современными точнейшими приборами.

*Замечание 2.* В “земной” технической механике гравитационное поле Земли почти всегда считают однородным. Оценим соответствующую погрешность. Считая Землю шаром, сравним гравитационное ускорение в Северном полюсе  $(0, 0, R)$  и близкой внешней точке  $(x, y, R + z)$ . Согласно задаче 2.13 с точностью до первого порядка малости

$$\frac{\text{grad } V(x, y, R + z) - \text{grad } V(0, 0, R)}{|\text{grad } V(0, 0, R)|} = \left( -\frac{x}{R}, -\frac{y}{R}, \frac{2z}{R} \right).$$

При подъеме на километр от земной поверхности вектор ускорения свободного падения изменится на 0.03%, при горизонтальном перемещении на километр — вдвое меньше. Шар симметричен, и любую его точку можно выбрать за полюс.

Из выражения (2.7) стандартным путем выводится потенциал бесконечного слоя, расположенного между плоскостями  $z = a$  и  $z = b$ , с зависящей лишь от  $z$  объемной плотностью  $\rho(z)$ :

$$V(z) = -2\pi G \int_a^b \rho(z') |z - z'| dz', \quad (2.8)$$

а из (2.6) — ускорение

$$w_z = 2\pi G \int_a^b \rho(z') \text{sign}(z' - z) dz'. \quad (2.9)$$

## 2.3 Самогравитация протяженного тела

Правую часть формулы (1.12) можно считать римановой суммой для гравитационной потенциальной энергии (со знаком минус) протяженного тела. Точное выражение дается формулой

$$U = \frac{G}{2} \int_{T \times T} \frac{dm dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.10)$$

Важные сведения о функции  $U$  приводятся в книге (Кондратьев, 2003), причем существенная их часть получена самим автором. Величина  $U$  используется в теории фигур равновесия, при изучении приливов, в звездной динамике, но значительно реже, чем потенциал  $V$ . Ниже мы будем заниматься только потенциалом  $V$ .

### Задачи к главе 2

**Задача 2.1.** Дан однородный материальный отрезок массой  $M$ , расположенный на оси  $z$  с координатами концов  $a$  и  $b$ ,  $a < b$ . Найти его потенциал вне оси  $z$ .

*Ответ:*

$$V(x, y, z) = \frac{GMk}{b-a} \ln \frac{k(b-z) + \sqrt{x^2 + y^2 + (b-z)^2}}{k(a-z) + \sqrt{x^2 + y^2 + (a-z)^2}}, \quad x^2 + y^2 > 0.$$

Проверьте, что значения  $V$  при  $k = 1$  и  $k = -1$  совпадают.

При  $k = 1$  найденное выражение дает потенциал и на оси  $z$  для  $z < a$ ; при  $k = -1$  — на оси  $z$  при  $z > b$ .

**Задача 2.2.** Найти потенциал отрезка задачи 2.1 на оси  $z$  при  $z > b$  и  $z < a$  (прямым вычислением и предельным переходом).

*Ответ:*

$$V(0, 0, z) = \frac{GM}{b-a} \ln \frac{z-a}{z-b}, \quad z > b,$$
$$V(0, 0, z) = \frac{GM}{b-a} \ln \frac{b-z}{a-z}, \quad z < a.$$

**Задача 2.3.** Найти асимптотику потенциала задачи 2.1 при фиксированном  $z$ ,  $a < z < b$ , и малом  $x^2 + y^2$ .

Ответ:

$$V = \frac{GM}{b-a} \ln \frac{4(b-z)(z-a)}{x^2 + y^2} + \mathcal{O}(x^2 + y^2).$$

Остаточный член — регулярная функция от  $x^2 + y^2$ .

**Задача 2.4.** Найти асимптотику потенциала задачи 2.1 при малых  $x, y, z - b$ .

Ответ:

$$V = \frac{GM}{b-a} \ln \frac{2(b-a)}{s + \zeta} + \mathcal{O}(\zeta, s^2),$$

где  $\zeta = z - b, s = \sqrt{x^2 + y^2 + \zeta^2}$ . Остаточный член — регулярная функция от  $\zeta, s^2$ .

**Задача 2.5.** Доказать равенства

$$\begin{aligned} 2 \int \sqrt{t^2 + A^2} dt &= t\sqrt{t^2 + A^2} + A^2 \ln(t + \sqrt{t^2 + A^2}), \\ \int \ln(A + \sqrt{t^2 + B^2}) dt &= t \ln(A + \sqrt{t^2 + B^2}) + A \ln(t + \sqrt{t^2 + B^2}) - \\ &\quad - t - \sqrt{B^2 - A^2} \arcsin \frac{B^2 + A\sqrt{t^2 + B^2}}{B(A + \sqrt{t^2 + B^2})} \end{aligned}$$

при  $B \geq |A|$ .

**Задача 2.6.** Доказать, что

$$\int h(t) t dt = \frac{1}{3} h^3 + \frac{a \cos \theta}{2} [(t - a \cos \theta)h + a^2 \sin^2 \theta \ln(t - a \cos \theta + h)],$$

где  $h(t) = \sqrt{t^2 - 2at \cos \theta + a^2}$ . Проверить, что второе слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю при  $a \sin \theta \rightarrow 0$ .

**Задача 2.7.** Дан однородный прямоугольник массой  $M$ , расположенный в плоскости  $x, y$  между прямыми  $x = a_i$  и  $y = b_k, i, k = 1, 2, a_1 < a_2, b_1 < b_2$ . Найти его потенциал.

*Указание.* Согласно результату задачи 2.1 потенциал параллельного оси  $x$  прямоугольника длиной  $a_2 - a_1$  и толщиной  $dy'$  есть

$$dV = G \rho dy' \sum_{i=1}^2 (-1)^i \ln \left[ a_i - x + \sqrt{(a_i - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2} \right].$$

Остается воспользоваться задачей 2.5.

*Ответ:*

$$V = \frac{GM}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} V_{ik},$$

$$V_{ik} = (b_k - y) \ln [a_i - x + \sigma_{ik}] + (a_i - x) \ln [b_k - y + \sigma_{ik}] - \\ - |z| \arcsin \frac{(a_i - x)^2 + z^2 + (a_i - x)\sigma_{ik}}{(a_i - x + \sigma_{ik})\sqrt{(a_i - x)^2 + z^2}},$$

где  $\sigma_{ik} = \sqrt{(a_i - x)^2 + (b_k - y)^2 + z^2}$ .

**Задача 2.8.** Найти асимптотику потенциала задачи 2.7 при фиксированном  $y$ ,  $b_1 < y < b_2$ ,  $z = 0$  и  $x = a_2 + s$  при малом  $s$ .

*Указание.* К сингулярности может привести лишь слагаемое  $V_{21}$ .

*Ответ:*

$$V = \frac{2GM}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} s \ln |s| + \tilde{V},$$

причем градиент  $\tilde{V}$  ограничен.

**Задача 2.9.** Найти асимптотику потенциала задачи 2.7 при  $z = 0$ ,  $x = a_1 + \xi$ ,  $y = b_1 + \eta$  при малых  $\xi, \eta$ .

*Указание.* К сингулярности может привести лишь слагаемое  $V_{11}$ .

*Ответ:*

$$V = -\frac{GM}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} [\xi \ln(s - \eta) + \eta \ln(s - \xi)] + \tilde{V},$$

где  $s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . Градиент  $\tilde{V}$  ограничен.

**Задача 2.10.** Дана однородная сфера массой  $M$  и радиусом  $R$  с центром в  $O$ . Найти ее потенциал.

*Указание.* По симметрии можно считать  $Q = (0, 0, r)$ . Переходя к сферическим координатам, получаем

$$V = \frac{GM}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta d\lambda}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}}.$$

Ответ:

$$V(r) = \begin{cases} GM/R, & \text{если } r \leq R, \\ GM/r, & \text{если } r \geq R. \end{cases}$$

**Задача 2.11.** Дано тело сферической структуры, т. е. шар массой  $M$ , радиусом  $R$  с центром в  $O$ ; объемная плотность  $\rho(r)$  зависит только от расстояния до центра шара. Найти внешний потенциал и его градиент.

*Указание.* Воспользоваться задачей 2.10.

Ответ: при  $r \geq R$

$$V = \frac{GM}{r}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2}.$$

**Задача 2.12.** То же — для внутреннего потенциала.

Ответ: при  $r \leq R$

$$V = 4\pi G \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(a) a^2 da + \int_r^R \rho(a) a da \right\},$$
$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GM(r)}{r^2},$$

где  $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(a) a^2 da$  представляет собой массу, заключенную внутри шара радиусом  $r$ .

Таким образом, сферическая оболочка (часть шара вне сферы радиусом  $r$ ) не притягивает точку  $Q$ .

**Задача 2.13.** Внешний потенциал шара задачи 2.11 разложить по степеням декартовых координат до второго порядка в окрестности точки  $(0, 0, R)$ . То же — для градиента с точностью до первого порядка.

Ответ:

$$V(x, y, R+z) = \frac{GM}{R} \left( 1 - \frac{z}{R} + \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2R^2} + \dots \right),$$
$$\frac{\partial V(x, y, R+z)}{\partial x} = \frac{GM}{R^2} \left( -\frac{x}{R} + \dots \right),$$
$$\frac{\partial V(x, y, R+z)}{\partial z} = \frac{GM}{R^2} \left( -1 + \frac{2z}{R} + \dots \right).$$

**Задача 2.14.** Тело задачи 2.11 имеет полость  $r < R_0$ , т. е.  $\rho(r) = 0$  при  $0 \leq r < R_0$ . Найти внешний потенциал и его градиент, считая  $0 < R_0 < R$ .

*Ответ:*

$$V(r) = \begin{cases} A & \text{при } r \leq R_0, \\ GM/r & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq R_0, \\ -GM/r^2 & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

где  $A = 4\pi G \int_{R_0}^R \rho(a) a da = \text{const}$ .

**Задача 2.15.** Дана однородная материальная окружность массой  $M$ , радиусом  $a$  в плоскости  $x, y$  с центром в  $O$ . Найти ее потенциал.

*Ответ:*

$$V(x, y, z) = \frac{2GM}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\xi}} \mathbf{K} \left( \frac{2aR}{\xi} \right),$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\xi = a^2 + R^2 + z^2 + \sqrt{(a^2 + R^2 + z^2)^2 - 4a^2 R^2}$ ,  $\mathbf{K}$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

**Задача 2.16.** В условиях задачи 2.15 доказать неравенства  $\xi \geq 2a^2$ ,  $\xi \geq 2R^2$ ,  $2aR/\xi \leq 1$ . Где достигаются равенства?

**Задача 2.17.** В условиях задачи 2.15 найти потенциал на оси  $z$ .

*Ответ:*

$$V(0, 0, z) = \frac{GM}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

**Задача 2.18.** То же — для однородного кольца  $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ ,  $z = 0$ . Считать  $0 \leq a < b$ .

*Ответ:*

$$V(0, 0, z) = \frac{2GM}{b^2 - a^2} \left( \sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right).$$

**Задача 2.19.** То же — для однородного диска (кольца задачи 2.18 при  $a = 0$ ,  $b = R$ ).



Ответ:

$$V(0, 0, z) = \frac{2GM}{R^2} \left( \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right).$$

**Задача 2.20.** То же — для однородного цилиндра  $x^2 + y^2 \leq a^2$  между плоскостями  $z = b_1$  и  $z = b_2$ . Считать  $a > 0$ ,  $b_1 < b_2$ .

*Указание.* Воспользоваться результатами задач 2.19 и 2.5.

Ответ:

$$V(0, 0, z) = \frac{GM}{a^2(b_2 - b_1)} [\varphi(b_2 - z) - \varphi(b_1 - z)],$$

где

$$\varphi(t) = t\sqrt{t^2 + a^2} + a^2 \ln \left( t + \sqrt{t^2 + a^2} \right) - t^2 \operatorname{sign} t.$$

**Задача 2.21.** То же — для однородного северного полушара, ограниченного снизу диском из задачи 2.19.

*Указание.* Потенциал диска толщиной  $dx$ , вырезаемого из шара на высоте  $x$ , согласно результату задачи 2.19 есть

$$dV = 2\pi G \rho \left( \sqrt{R^2 + z^2} - 2zx - z + x \right) dx.$$

Ответ:

$$V(0, 0, z) = \frac{GM}{R^3} \left\{ \frac{1}{z} \left[ (z^2 + R^2)^{3/2} - |z - R|^3 \right] + \frac{3}{2} \psi(z - R) - \frac{3}{2} \psi(z) \right\},$$

где  $\psi(t) = t^2 \operatorname{sign} t$ .

**Задача 2.22.** То же — для однородного сжатого эллипсоида вращения, ограниченного поверхностью

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad 0 < c < a,$$

для  $z > c$ .

*Указание.* Проверьте и используйте, что потенциал диска толщины  $dx$  есть

$$dV = 2\pi G \rho \left( \sqrt{a^2 + z^2 - 2zx - \frac{a^2 - c^2}{c^2} x^2} - |z - x| \right) dx.$$

Ответ:

$$V(0, 0, z) = \frac{3GM}{2} \left\{ -\frac{z}{a^2 - c^2} + \frac{a^2 - c^2 + z^2}{2(a^2 - c^2)^{3/2}} \left[ \arcsin \frac{a^2 - c^2 + cz}{a\sqrt{a^2 - c^2 + z^2}} + \arcsin \frac{a^2 - c^2 - cz}{a\sqrt{a^2 - c^2 + z^2}} \right] \right\} \\ = \frac{3GM}{2} \left\{ -\frac{z}{a^2 - c^2} + \frac{a^2 - c^2 + z^2}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{z} \right\}.$$

**Задача 2.23.** То же — для однородного вытянутого эллипсоида вращения ( $0 < a < c$ ) для  $z > c$ .

Ответ:

$$V(0, 0, z) = \frac{3GM}{2} \left\{ \frac{z}{c^2 - a^2} + \frac{a^2 - c^2 + z^2}{2(c^2 - a^2)^{3/2}} \ln \frac{z - \sqrt{c^2 - a^2}}{z + \sqrt{c^2 - a^2}} \right\}.$$

**Задача 2.24.** Однородное тело вращения  $T$  задается в сферических координатах неравенствами

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \beta_1 \leq \theta \leq \beta_2$$

при  $0 \leq r_1 < r_2$ ,  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \pi$ . Нарисовать сечение  $T$  плоскостью  $xz$ , само тело  $T$ , определить его топологический тип и найти массу.

*Указание.* При определении топологического типа сначала рассмотреть случай  $0 < r_1$ ,  $0 < \beta_1$ ,  $\beta_2 < \pi$ , а затем случаи равенства в одном, двух или трех из последних соотношений.

Ответ (частичный):

$$M = \frac{2\pi\rho}{3}(r_2^3 - r_1^3)(\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

**Задача 2.25.** Найти потенциал тела  $T$  задачи 2.24 на оси  $z$ .

*Указание.* Вычисляя тройной интеграл (2.2) в сферических координатах, получаем

$$V = \frac{2\pi G\rho}{z} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_{r_1}^{r_2} r \sqrt{r^2 + z^2 - 2zr \cos \beta_k} dr.$$

Остается воспользоваться задачей 2.6.

Ответ:

$$V(0, 0, z) = \frac{\pi G\rho}{3z} \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} V_{ik}(z),$$

где

$$V_{ik} = 2R_{ik}^3 + 3z \cos \beta_k [(r_i - z \cos \beta_k) R_{ik} + z^2 \sin^2 \beta_k \ln(r_i - z \cos \beta_k + R_{ik})]$$

при  $R_{ik}(z) = \sqrt{r_i^2 - 2zr_i \cos \beta_k + z^2}$ .

**Задача 2.26.** Вывести результат задачи 2.21 из результата задачи 2.25.

**Задача 2.27.** Получить асимптотику потенциала задачи 2.25 на оси  $z$  при малых отрицательных  $z$  для  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = R$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = \beta$ ,  $0 < \beta < \pi/2$ .

*Замечание.* Малые отрицательные  $z$  отвечают внешнему потенциалу в окрестности конической точки. К сингулярности приводит лишь слагаемое  $V_{12}$ .

*Ответ:*

$$V(0, 0, z) = -Az^2 \ln(-z) + \tilde{V},$$

где  $A = \pi G \rho \cos \beta \sin^2 \beta$ , тогда как  $\tilde{V}$  регулярно в окрестности  $z = 0$ .

**Задача 2.28.** Вычислить интеграл (2.6) переходом к полярным координатам.

**Задача 2.29.** Обозначим через  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  декартовы координаты; через  $P_z$  — плоскость  $Z = z$ ; через  $m_1(z)$  — массу цилиндра с параллельными оси  $Z$  образующими, единичной площади сечения, расположенного ниже плоскости  $P_z$ ; через  $m_2(z)$  — массу аналогичного цилиндра, расположенного выше этой плоскости. Доказать, что представление (2.9) можно записать в виде

$$w_z = 2\pi G [m_2(z) - m_1(z)].$$

**Задача 2.30.** Вывести формулы

$$\frac{1 - zx}{1 - 2zx + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) z^n,$$

$$\frac{x - z}{1 - 2zx + z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) z^{n-1},$$

$$\ln(1 - 2zx + z^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} T_n(x) z^n,$$

используя стандартное разложение Пуассона (*Фихтенгольц, 1997*)

$$\frac{1 - z^2}{1 - 2zx + z^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) z^n.$$

Здесь  $x = \cos \theta$ ,  $T_n(x) = \cos n\theta$ . Доказать, что ряды сходятся при  $|z| < 1$  и расходятся при  $|z| > 1$ .

**Задача 2.31.** Используя результат задачи 2.30, доказать, что при  $|z| < 1$

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2z \cos \theta + z^2) d\theta = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2z \cos \theta + z^2) d\theta = 0.$$

**Задача 2.32.** Дано тело  $T$  цилиндрической структуры, т. е. бесконечный цилиндр  $R \leq a$  с зависящей лишь от  $R$  объемной плотностью  $\varrho$ . Здесь  $R, \varphi, z$  — цилиндрические координаты. Найти его внешний потенциал и градиент.

*Указание.* Интеграл (2.5) записать в полярных координатах, считая  $Q = Q(R, 0, 0)$ . Воспользоваться результатом задачи 2.31.

*Ответ:* при  $R > a$

$$V(R) = -GM \ln \frac{R^2}{R_0^2}, \quad \frac{\partial V(R)}{\partial R} = -\frac{2GM}{R},$$

где  $M$  — масса цилиндра единичной высоты, вырезанного из  $T$  плоскостями  $z = 0, z = 1$ . Таким образом, внешний потенциал  $T$  совпадает с потенциалом оси цилиндра, если в ней сосредоточить всю его массу — см. формулу (2.4).

**Задача 2.33.** Найти внутренний потенциал и градиент тела задачи 2.32.

*Ответ:* при  $0 < R \leq a$

$$V(R) = -GM(R) \ln \frac{R^2}{R_0^2} - 2\pi G \int_R^a \varrho(R') R' \ln \frac{R'^2}{R_0^2} dR', \quad \frac{\partial V(R)}{\partial R} = -\frac{2GM(R)}{R},$$

где  $M(R) = 2\pi \int_0^R \varrho(R') R' dR'$  — масса цилиндра радиусом  $R$  единичной высоты, вырезанного из  $T$  плоскостями  $z = 0, z = 1$ . Таким образом, цилиндрическая оболочка (часть вне цилиндра радиусом  $R$ ) не притягивает точку  $Q$ .

## Глава 3

# Уравнения Лапласа и Пуассона

Ключевую роль в теории гравитации играет линейный дифференциальный оператор Лапласа (лапласиан)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.1)$$

инвариантный относительно сдвигов, вращений и отражений в  $\mathbb{R}^3$  (см. задачи 3.1–3.4). Функции, удовлетворяющие в некоторой области *уравнению Лапласа*

$$\Delta f(x, y, z) = 0, \quad (3.2)$$

называются *гармоническими* в этой области.

### Теорема 2

*Внешний потенциал  $V$  — гармоническая функция.*

Докажем теорему сначала для потенциала одной материальной точки  $Q_0$  массой  $m_0$ . В силу инвариантности  $\Delta$  относительно сдвигов можно поместить  $Q_0$  в начало координат, по однородности уравнения (3.2) можно считать  $Gm_0 = 1$ . Тогда согласно выражению (1.10)  $V = r^{-1}$ . Прямые вычисления (см. формулы (1.5)) показывают, что вне начала координат

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}.$$

Добавляя аналогичные выражения для вторых производных по  $y$  и  $z$ , приходим к искомому соотношению

$$\Delta V = 0, \quad (3.3)$$

выполняющемуся вне  $Q_0$ .

По линейности  $\Delta$  формула (3.3) верна для потенциала (1.10) системы точек  $\mathcal{Q}$ , если  $Q$  не совпадает ни с одной из точек  $Q_k$ . Применяя оператор  $\Delta$  под знаком интеграла (2.2), убеждаемся в справедливости (3.3) для внешнего потенциала произвольного тела  $T$ .

Напомним, что векторное поле называют *потенциальным*, если оно представляется градиентом некоторой скалярной функции, и *соленоидальным*, если его дивергенция равна нулю. Так как  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ , мы приходим к следующему утверждению.

### Теорема 3

*Поле ускорений (2.1), индуцированное гравитацией тела  $T$ , является потенциальным и соленоидальным вне  $T$ . Для трехмерного тела с интегрируемой плотностью поле потенциально во всем  $\mathbb{R}^3$ .*

Ради общности выпишем без доказательства еще *уравнение Пуассона* для внутреннего потенциала протяженного *трехмерного* тела

$$\Delta V = -4\pi G\rho, \quad (3.4)$$

справедливое в точках, где  $\rho$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с любым положительным показателем (*Антонов и др., 1988*). Полагая  $\rho = 0$  вне тела  $T$ , распространим уравнение Пуассона и на внешнюю по отношению к  $T$  часть  $\mathbb{R}^3$ , где (3.4) совпадает с (3.3).

*Замечание.* В этой книге мы идем естественным для ньютоновской физики путем. Исходным понятием служит сила гравитационного взаимодействия двух точек и соответствующий потенциал. Далее следует обобщение на произвольное конечное множество точек. Затем строится описание взаимодействия точки и протяженного тела  $T$  с помощью интеграла по  $T$ . Наконец, доказывается справедливость уравнений Лапласа и Пуассона.

В современной физике отправной точкой часто служит не сила, а поле. В этом случае теория строится в противоположном направлении. Сначала определяется потенциальное поле, удовлетворяющее в пустом пространстве уравнению Лапласа, а в заполненной материей части пространства — уравнению Пуассона. Потенциал ищется как решение этих уравнений при некоторых граничных условиях. В качестве примера приведем *задачу Дирихле*: найти внешний потенциал тела  $T$  как решение уравнения Лапласа, если потенциал известен на поверхности  $S$  тела  $T$ . Теоремы о свойствах

и способах действительного нахождения решений подобных задач математической физики подробно рассматриваются в многочисленных руководствах, например, (Антонов и др., 1988), (Владимиров, 2003), (Гюнтер, 1953), (Ландкоф, 1966), (Михлин, 2002), (Сретенский, 1946), (Уермер, 1980), (Poincaré, 1899).

Оба подхода равноправны.

### Задачи к главе 3

**Задача 3.1.** Доказать линейность оператора Лапласа:

$$\Delta(Cf) = C\Delta f, \quad \Delta(f_1 + f_2) = \Delta f_1 + \Delta f_2.$$

**Задача 3.2.** Доказать инвариантность оператора Лапласа относительно сдвигов. Именно, пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}', \quad \Delta' = \partial^2/\partial x'^2 + \partial^2/\partial y'^2 + \partial^2/\partial z'^2.$$

Тогда

$$\Delta f(\mathbf{r}) = \Delta' f(\mathbf{a} + \mathbf{r}'),$$

что обычно записывают в виде  $\Delta = \Delta'$ .

**Задача 3.3.** Доказать, что линейная подстановка  $\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$  преобразует лапласиан по закону

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^3 B_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j}.$$

Здесь  $A$  — произвольная невырожденная постоянная матрица;  $B = AA^*$ ;  $A^*$  — транспонированная матрица  $A$ ;  $B_{ij}$  — элемент матрицы  $B$ , стоящий в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце; вместо  $(x, y, z)$  используется запись  $(x_1, x_2, x_3)$ . Доказать, что матрица  $AA^*$  симметрична при любой  $s \times s$ -матрице  $A$ , но в общем случае не равна  $A^*A$  при  $s \geq 2$ .

*Указание.* Представить замену переменных в виде

$$x'_n = \sum_{k=1}^3 A_{nk} x_k.$$

Знаки сумм можно опустить, если подразумевать суммирование от 1 до 3 по повторяющимся индексам.

**Задача 3.4.** Доказать, что лапласиан инвариантен относительно ортогональных преобразований.

**Задача 3.5.** Доказать перестановочность оператора Лапласа и дифференцирования по параметру или, формулируя более точно, что для функции  $f(t, x, y, z)$ , имеющей непрерывные третьи производные  $\partial^3 f / \partial t \partial x^2$ ,  $\partial^3 f / \partial t \partial y^2$ ,  $\partial^3 f / \partial t \partial z^2$ , выполняется

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta f = \Delta \frac{\partial}{\partial t} f,$$

что записывается короче как

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta = \Delta \frac{\partial}{\partial t}.$$

Ниже мы не будем явно формулировать очевидные условия гладкости функций.

**Задача 3.6.** Доказать перестановочность оператора Лапласа и интегрирования по параметру

$$\int_a^b \Delta f(t, x, y, z) dt = \Delta \int_a^b f(t, x, y, z) dt.$$

**Задача 3.7.** Доказать перестановочность операторов Лапласа и дифференцирования по декартовым координатам

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta = \Delta \frac{\partial}{\partial x}.$$

**Задача 3.8.** Пусть гармоническая функция имеет вид  $h(x, y, z) = f(x, y)g(z)$ . Доказать, что функция  $g$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению  $g'' = Ag(z)$  при некотором  $A = \text{const}$  и зависит тем самым от трех параметров. Выразить явно функцию  $g$  через  $z$  и параметры. Какие значения параметров совместимы с ограниченностью функции  $g$  при всех  $z \in \mathbb{R}$ ?

**Задача 3.9.** Вычислить матрицу Якоби

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \varphi, z)}$$



перехода от декартовых координат к цилиндрическим

$$x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, z = z.$$

Ответ:

$$J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -R \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.10.** Вычислить якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим.

Ответ:  $\det J = R$ .

**Задача 3.11.** Убедиться, что матрица обратного перехода от цилиндрических координат к декартовым равна

$$\frac{\partial(R, \varphi, z)}{\partial(x, y, z)} = J^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi / R & \cos \varphi / R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.12.** Используя результат предыдущей задачи, показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial R^2} - 2 \cos \varphi \sin \varphi / R \frac{\partial^2}{\partial R \partial \varphi} + \sin^2 \varphi / R^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \sin^2 \varphi / R \frac{\partial}{\partial R} + 2 \cos \varphi \sin \varphi / R^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial R^2} + 2 \cos \varphi \sin \varphi / R \frac{\partial^2}{\partial R \partial \varphi} + \cos^2 \varphi / R^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \cos^2 \varphi / R \frac{\partial}{\partial R} - 2 \cos \varphi \sin \varphi / R^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

**Задача 3.13.** Вывести выражение для оператора Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Задача 3.14.** Доказать формулу

$$\Delta \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) = \left( 2 + R \frac{\partial}{\partial R} \right) \Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

*Указание.* Воспользоваться задачей 3.13 для действия левой и правой части на произвольную функцию.

**Задача 3.15.** Доказать формулу

$$\Delta \frac{\partial}{\partial R} = \left( \frac{2}{R} + \frac{\partial}{\partial R} \right) \Delta - \frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Задача 3.16.** Доказать формулу

$$\Delta \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta.$$

**Задача 3.17.** Вычислить матрицу Якоби

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \lambda)}$$

перехода от декартовых координат к сферическим

$$x = r \sin \theta \cos \lambda, \quad y = r \sin \theta \sin \lambda, \quad z = r \cos \theta.$$

*Ответ:*

$$J = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda & r \cos \theta \cos \lambda & -r \sin \theta \sin \lambda \\ \sin \theta \sin \lambda & r \cos \theta \sin \lambda & r \sin \theta \cos \lambda \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.18.** Вычислить якобиан перехода от декартовых координат к сферическим.

*Ответ:*  $\det J = r^2 \sin \theta.$

**Задача 3.19.** Убедиться, что матрица обратного перехода от сферических координат к декартовым равна

$$\frac{\partial(r, \theta, \lambda)}{\partial(x, y, z)} = J^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda & \sin \theta \sin \lambda & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \lambda / r & \cos \theta \sin \lambda / r & -\sin \theta / r \\ -\sin \lambda / (r \sin \theta) & \cos \lambda / (r \sin \theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.20.** Используя результат предыдущей задачи, показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \sin^2 \theta \cos^2 \lambda \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \cos^2 \lambda / r^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sin^2 \lambda / (r^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \\ &+ 2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \lambda / r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - 2 \sin \lambda \cos \lambda / r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \lambda} \\ &- 2 \cos \theta \sin \lambda \cos \lambda / (r^2 \sin \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \lambda} \\ &+ (\cos^2 \theta \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) / r \frac{\partial}{\partial r} \\ &+ (\cos \theta \sin^2 \lambda - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \cos^2 \lambda) / (r^2 \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ 2 \sin \lambda \cos \lambda / (r^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \sin^2 \lambda \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \sin^2 \lambda / r^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cos^2 \lambda / (r^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \\ &+ 2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \lambda / r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + 2 \sin \lambda \cos \lambda / r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \lambda} \\ &+ 2 \cos \theta \sin \lambda \cos \lambda / (r^2 \sin \theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \lambda} \\ &+ (\cos^2 \theta \sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) / r \frac{\partial}{\partial r} \\ &+ (\cos \theta \cos^2 \lambda - 2 \sin^2 \theta \cos \theta \sin^2 \lambda) / (r^2 \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &- 2 \sin \lambda \cos \lambda / (r^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin^2 \theta / r^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2 \sin \theta \cos \theta / r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \\ &+ \sin^2 \theta / r \frac{\partial}{\partial r} + 2 \sin \theta \cos \theta / r^2 \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

**Задача 3.21.** Вывести выражение для оператора Лапласа в сферических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta^* = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta^*,$$

где сферическая часть лапласиана (оператор Бельтрами) равна

$$\Delta^* = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} = \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}.$$

**Задача 3.22.** Преобразовать оператор Бельтрами к переменным  $(\xi, \lambda) = (\cos \theta, \lambda)$ .

*Ответ:*

$$\Delta^* = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} = (1 - \xi^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}.$$

**Задача 3.23.** Доказать формулу

$$\Delta \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \left( 2 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \Delta.$$

*Указание.* Воспользоваться задачей 3.21 для действия левой и правой части на произвольную функцию.

**Задача 3.24.** Доказать формулу

$$\Delta \frac{\partial}{\partial r} = \left( \frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \Delta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}.$$

**Задача 3.25.** Доказать формулу

$$\begin{aligned} r^2 \Delta \left( \sin^\alpha \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) &= r^2 \sin^\alpha \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta + \\ &[(\alpha^2 + 1) \sin^{\alpha-2} \theta - \alpha(\alpha + 1) \sin^\alpha \theta] \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ &2\alpha \sin^{\alpha-1} \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2 \sin^{\alpha-3} \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}. \end{aligned}$$

**Задача 3.26.** Доказать формулу

$$r^2 \Delta \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta + 2 \cos \theta \Delta^*.$$

**Задача 3.27.** Доказать формулу

$$\Delta \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta.$$

## Глава 4

# Представления внешнего гравитационного потенциала

В век ЭВМ определяющее потенциал представление объемным интегралом (2.2) вполне пригодно для вычислений, если знать распределение масс в теле  $T$ , т. е. если считать известной плотность  $\rho(Q)$  и форму поверхности  $S$  тела  $T$ . Впрочем, определение поверхности можно включить в задачу определения плотности: достаточно положить  $\rho = 0$  вне  $T$ .

Реально плотность земных недр известна в лучшем случае с тремя значащими цифрами, а для остальных небесных тел — и того хуже. Это явно не “астрономическая точность”. Для получения потенциала  $V$  с нужной для практики точностью используются другие представления. Сейчас их известно более десятка. Их сравнительные характеристики см. в работе (Антонов и др., 1982). Здесь мы коснемся трех из них и подробно опишем самое распространенное представление  $V$  рядом Лапласа по шаровым функциям.

### 4.1 Простой слой

Внутренний потенциал однозначно определяет плотность тела согласно уравнению (3.4). По внешнему же потенциалу плотность не восстанавливается без дополнительных сведений. Например, точка, сфера и шар индуцируют одинаковый потенциал во внешнем (содержащем бесконечно далекие точки) пространстве.

Указанная неоднозначность мешает определять плотность  $\rho$  по потенциалу  $V$ , но помогает получить более простое по сравнению

с выражением (2.2) представление  $V$ . Фиксируем замкнутую гладкую поверхность  $S'$ , близкую к  $S$ . Считаем  $S'$  материальной с поверхностной плотностью  $\varrho'$ , индуцирующей во внешнем к  $S'$  пространстве потенциал

$$V'(Q) = G \int_{S'} \frac{\varrho'(Q') d\sigma'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.1)$$

где  $d\sigma'$  — элемент поверхности  $S'$ . Оказывается (*Poincaré, 1899; Владимиров, 2003; Михлин, 2002*), существует такая функция  $\varrho'$  на  $S'$ , что  $V = V'$  во внешнем к обеим поверхностям  $S$  и  $S'$  пространстве.

В качестве поверхности  $S'$  на практике выбирают сферу или эллипсоид, близкие к  $S$ . Представление (4.1) лучше, чем (2.2), поскольку поверхностный интеграл считается быстрее тройного. Однако оно остается сложным и не используется в астрономии. Поэтому мы не останавливаемся на способах определения  $\varrho'$ .

## 4.2 Система точечных масс

Обозначим через  $V'$  потенциал (1.10) произвольной системы точек  $Q_k$  с массами  $m_k, k \in \mathcal{N}$ . Поскольку в качестве  $V'$  допустимо взять риманову сумму для интеграла (2.2), то можно гарантировать равномерное стремление  $V'$  к потенциалу  $V$  при  $N \rightarrow \infty$ . Однако выбирать  $4N$  параметров  $x_k, y_k, z_k, m_k$  так, чтобы они приближали реальное распределение масс, не обязательно. Так, одна надлежащим образом выбранная точка *точно* представляет потенциал шара, тогда как риманова сумма при сколь угодно большом  $N$  дает лишь приближенное представление. Некоторые способы оптимального выбора параметров системы мы опишем в главе 7.

## 4.3 Разложение по ортогональным функциям

Стандартным способом аппроксимации любой величины служит разложение в ряд по системе базовых функций. Поскольку потенциал  $V$  зависит от трех переменных, в общем случае мы

получаем тройной ряд линейных комбинаций базовых функций  $f_{ijk}(x, y, z)$

$$V(x, y, z) = \sum_{i,j,k} A_{ijk} f_{ijk}(x, y, z) \quad (4.2)$$

с постоянными для данного тела  $T$  коэффициентами  $A_{ijk}$ .

Из аналитичности функции  $V$  вытекает, что в некоторой окрестности любой внешней точки  $(a, b, c)$  потенциал можно представить рядом (4.2) при

$$f_{ijk}(x, y, z) = (x - a)^i (y - b)^j (z - c)^k.$$

Однако такое представление (и ему подобные) обладает существенными недостатками.

- Кратность ряда (4.2) равна трем, тогда как уравнение Лапласа (3.3) показывает, что функция  $V$  практически зависит от двух переменных. Например, если  $V = V_1(x, y)V_2(z)$ , то согласно задаче 3.8 функция  $V_2$  определяется с точностью до трех произвольных постоянных.
- Хотя сумма (4.2) гармонична, отдельные ее слагаемые этим свойством не обладают (за исключением первых четырех членов нулевой и первой степени).

Эти недостатки устраняются, если за базовую принять систему гармонических функций, ортогональных на некоторой замкнутой поверхности  $S$ . Кратность ряда снижается до двух, гарантируется гармоничность каждого слагаемого. В астрономии и гравиметрии за  $S$  принимают одну из трех поверхностей: сферу, эллипсоид вращения (два варианта — сжатый и вытянутый), трехосный эллипсоид. Соответствующие системы носят название сферических функций, сфероидальных функций, функций Ламе́. Кажется очевидным, что сферические функции являются частным случаем сфероидальных, а последние — частным случаем функций Ламе́. Это не совсем так. При последовательном обращении эксцентриситетов главных сечений в нуль мы встречаемся с вырождениями, требующими предельных переходов. Так что лучше говорить о предельных, нежели о частных случаях.

Сферические функции существенно проще сфероидальных, а последние — функций Ламе́. Это значительно перекрывает выигрыш от большей близости поверхностей массивных небесных тел

к трехосному эллипсоиду, чем к двуосному и тем более к сфере. Так, для Земли отличие ее поверхности от сферы оценивается величиной  $\alpha \sim 10^{-3}$ , отличие от обоих эллипсоидов  $\beta \sim 10^{-5}$ . Поэтому функции Ламе вообще не нужны. Сфероидальные функции потребуют несколько меньше членов ряда при одинаковой точности, но это не компенсирует их большей сложности. Выигрыш от сфероидальных функций возможен лишь для сильно сжатых тел. Пример — быстро вращающаяся нейтронная звезда. Выигрыш от функций Ламе возможен для звезд в тесных двойных системах с сильным полярным сжатием и вытянутостью друг к другу, а также для тел неправильной формы типа Фобоса и Иды.

Сферические же функции используются повсюду (причем не только в теории притяжения). Свойствам сферических функций и соответствующего представления потенциала мы посвятим две больших главы.



## Глава 5

### Ряд Лапласа

В математической физике используется несколько равноправных подходов к теории сферических функций. Мы выбрали наиболее естественный для теории притяжения путь, опирающийся на производящие функции. Для более подробного изучения можно рекомендовать следующую литературу по сферическим функциям: (Гобсон, 1952), (Бейтмен, Эрдейи, 1973), (Сеге, 1962), (Антонов и др., 1988), (Годунов, Михайлова, 1998).

#### 5.1 Ряд по степеням расстояний

Примем за основу выражение (2.2) и попытаемся представить  $V$  рядом, каждое слагаемое которого является произведением трех функций от одного аргумента  $r, \theta$  и  $\lambda$  соответственно. Процедуру можно выполнить в два шага. На первом выделяется множитель, зависящий лишь от расстояния  $r$ , и множитель, зависящий лишь от направления  $\tilde{Q} = (\theta, \lambda)$ . На втором шаге долгота отделяется от широты. По числу шагов следует ожидать двукратной суммы.

Представим сначала подынтегральное выражение (2.2) в сферических координатах:

$$W \stackrel{def}{=} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos H + r'^2}}, \quad (5.1)$$

где  $H$  — угол между векторами  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ ; по теореме косинусов

$$\cos H = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda'). \quad (5.2)$$

Важно, что  $H$  зависит только от направлений  $\tilde{Q}, \tilde{Q}'$ , но не от  $r, r'$ .

В астрономии рассматривают движение тел, как правило, не приближающихся слишком близко к телу  $T$ . Разумно ввести *объемлющую сферу*  $S^+$  (рис. 4): наименьшую из сфер с центром в начале координат, заключающих  $T$  внутри себя (попадание точек тела  $T$  на поверхность  $S^+$  допускается). Обычно начало помещают глубоко внутри тела  $T$  и сфера  $S^+$  не отходит далеко от поверхности  $S$ . Но ради общности мы пока не делаем никаких предположений о выборе точки  $O$ . Более того, мы рассмотрим еще и *пустую сферу*  $S^-$  (см. рис. 4): наибольшую из сфер с центром в точке  $O$ , не содержащих точек тела  $T$  внутри себя (по-прежнему допускается попадание точек тела  $T$  на поверхность  $S^-$ ). При выборе одной из точек  $T$  за начало координат пустой сферы не существует. Для тел отличной от шара топологии сфера  $S^-$  может благополучно существовать, даже если за точку  $O$  принять центр масс тела  $T$ . Таковы шар с полостью и полноторие, т. е. внутренность тора.

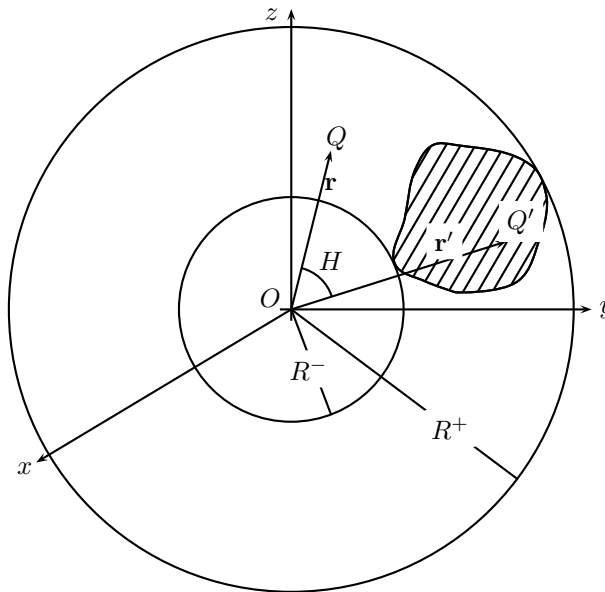


Рис. 4. К выводу ряда Лапласа. Заштриховано тело  $T$ ; изображена пустая сфера  $S^-$  радиусом  $R^-$  и объемлющая сфера  $S^+$  радиусом  $R^+$ , обе сферы имеют центр в начале координат.

Для точек  $Q$ , лежащих внутри сферы  $S^-$ , по определению  $r < R^-$ , тогда как вне сферы  $S^+$  будет  $r > R^+$ , где  $R^-$  и  $R^+$  — радиусы  $S^-$  и  $S^+$  соответственно (см. рис. 4). Для пробегающих тело  $T$  точек  $Q'$  всегда  $R^- \leq r' \leq R^+$ .

### 5.1.1 Отделение радиуса в области $r < R^-$

Внутри пустой сферы  $r < r'$  и функцию  $W$  можно разложить в ряд Маклорена по  $r$ , сходящийся при достаточно малых  $r$ . Как и  $W$ , общий член ряда будет гармонической функцией. Действительно, сделаем подстановку  $r' = 1/\xi$  и представим (5.1) в форме

$$r'W = \frac{1}{\sqrt{1 - 2(\xi r) \cos H + (\xi r)^2}}.$$

Очевидно, что разложения правой части в ряд Маклорена по  $r$  и  $\xi$  совпадают. Коэффициенты могут быть получены дифференцированием по параметру  $\xi$ , что сохраняет гармоничность согласно задаче 3.5.

Для фактического нахождения ряда положим временно  $z = r/r'$ ,  $x = \cos H$ . Тогда

$$r'W = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z < 1.$$

Разложим функцию  $r'W$  в ряд по степеням  $z$ , обозначая коэффициенты через  $P_n(x)$ , именуемые многочленами Лежандра в честь изучавшего их математика:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n. \quad (5.3)$$

Можно считать, что равенство (5.3) определяет функции  $P_n(x)$ , поэтому его левая часть называется *производящей функцией* полиномов Лежандра. Их свойствам мы посвятим специальный параграф, а пока докажем, что  $P_n(x)$  — многочлены степени  $n$ , четные при четных  $n$  и нечетные при нечетных  $n$ . Свойство четности вытекает из инвариантности левой части (5.3) относительно одновременной замены знака у  $x$  и  $z$ . По индукции легко установить, что

$$\frac{d^n}{dz^n} \left[ (1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = (1 - 2zx + z^2)^{-n-\frac{1}{2}} Q_n(x, z),$$

где  $Q_n$  — многочлены от  $x$  и  $z$ , причем ведущий член по первой переменной равен  $(2n - 1)!! x^n$ . Подставляя  $z = 0$ , установим полиномиальность  $P_n$ .

Вернемся к функции  $W$  и старым обозначениям:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r^{n+1}} P_n(\cos H). \quad (5.4)$$

Мы выполнили первый шаг: представили  $W$  суммой гармонических слагаемых, каждое из которых есть функция только от  $r$ , помноженная на функцию только от  $\tilde{Q}$ . Зависимость от  $r$  чрезвычайно проста. Зависимость от  $\tilde{Q}$  тоже несложна. По установленному свойству многочленов Лежандра общий член ряда (5.4) представляет собой линейную комбинацию слагаемых вида  $r^n (\cos H)^{n-2k}$ , т. е. согласно соотношению (5.2) является однородным многочленом степени  $n$  относительно декартовых координат точки  $Q$ , которые в этой главе мы будем обозначать большими буквами  $X, Y, Z$ .

Гармонический многочлен  $r^n f_n(\tilde{Q})$  называют часто *шаровой функцией первого рода порядка  $n$* , а ее угловую часть  $f_n(\tilde{Q})$  — *сферической функцией порядка  $n$* . Легко показать (см. задачу 3.21), что

$$\Delta^* f_n = -n(n+1)f_n, \quad (5.5)$$

так что сферические функции являются собственными функциями оператора Бельтрами.

Пространство шаровых (а тем самым и сферических) функций порядка  $n$  линейно и имеет размерность  $2n + 1$ . Действительно, представим однородный многочлен в виде

$$F(X, Y, Z) = \sum_{k=0}^n Z^k f_{n-k}(X, Y),$$

где  $f_{n-k}$  — однородный многочлен указанной степени от двух переменных. Действие лапласиана на многочлен  $F$  представим в форме

$$\Delta F = \sum_{k=0}^n [\Delta f_{n-k} + (k+1)(k+2)f_{n-k-2}] Z^k,$$

где принято  $f_{-1} = f_{-2} = 0$ . Гармоничность  $F$  влечет цепочку равенств

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2f_{n-2} &= -\Delta f_n, \\ 2 \cdot 3f_{n-3} &= -\Delta f_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ (n-2)(n-1)f_1 &= -\Delta f_3, \\ (n-1)nf_0 &= -\Delta f_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что многочлены  $f_n$  и  $f_{n-1}$ , содержащие  $2n + 1$  коэффициентов, произвольны, а остальные определяются по ним однозначно.

Подставим выражение (5.4) в формулу (2.2), записывая элемент массы в виде  $dm' = \varrho(r', \theta', \lambda') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\lambda'$ :

$$V(Q) = GM \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^{n+1}} Y_n(\tilde{Q}). \quad (5.6)$$

Здесь произвольный масштабный множитель  $R$  и масса  $M$  тела  $T$  введены для того, чтобы сделать функцию

$$Y_n(\tilde{Q}) = \frac{R^{n+1}}{M} \int_T \frac{\varrho(Q') \sin \theta'}{r'^{n-1}} P_n(\cos H) dr' d\theta' d\lambda' \quad (5.7)$$

безразмерной. Обратим внимание, что мы воспользовались почленным интегрированием ряда (5.4), что допустимо в силу доказываемой ниже в разделе 5.2.11 его локально-равномерной внутри пустой сферы сходимости, а также вынесли множитель  $r^n$  за знак интеграла как не зависящий от  $Q'$ . Интегрирование по параметрам  $r', \theta', \lambda'$  не нарушает гармоничности (задача 3.6). Поэтому общий член ряда (5.6), называемого часто рядом Лапласа, есть шаровая функция, а формула (5.7) задает сферическую функцию.

### 5.1.2 Отделение радиуса в области $r > R^+$

Вне объемлющей сферы  $r' < r$  и функцию  $W$  можно разложить в ряд Маклорена по  $r'$ , сходящийся при достаточно малых  $r'$ . Общий член ряда с точностью до множителя  $r'^n/n!$  есть производная от  $W$  по  $r'$  порядка  $n$  при  $r' = 0$  и согласно задаче 3.5 представляет собой гармоническую функцию. Найдем ее явный вид. Положим временно  $z = r'/r$ ,  $x = \cos H$ . Тогда

$$W = \frac{1}{r\sqrt{1-2zx+z^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z < 1.$$

Мы опять встретились с производящей функцией многочленов Лежандра, так что

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos H). \quad (5.8)$$

Представление потенциала  $V$  при  $r > R^+$  принимает вид

$$V(Q) = GM \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{r^{n+1}} Y_n(\tilde{Q}), \quad (5.9)$$

где

$$Y_n(\tilde{Q}) = \frac{1}{MR^n} \int_T r'^{n+2} \sin \theta' P_n(\cos H) \varrho(Q') dr' d\theta' d\lambda'. \quad (5.10)$$

Гармоническая функция вида  $r^{-n-1} f(\tilde{Q})$ , где  $f$  — деленный на  $r^n$  однородный многочлен степени  $n$ , называется *шаровой функцией второго рода*. Заметим, что  $f$  по-прежнему удовлетворяет (5.5). Таким образом, если  $r^{-n-1} f(\tilde{Q})$  — шаровая функция второго рода, то  $r^n f(\tilde{Q})$  — шаровая функция первого рода и наоборот, причем  $f$  в обоих случаях будет сферической функцией порядка  $n$ . Ряд (5.9) также называют рядом Лапласа.

Прежде чем двигаться дальше, необходимо тщательно изучить свойства многочленов Лежандра, стоящих под знаком интеграла (5.7) и интеграла (5.10).

## 5.2 Свойства многочленов Лежандра

### 5.2.1 Рекуррентность

Перепишем определяющее соотношение (5.3):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n, \quad (5.11)$$

где ряд справа сходится при всех  $x \in [-1, 1]$  для достаточно малых  $z$ . Значение радиуса сходимости найдем ниже, раздел 5.2.11. Продифференцируем (5.11) по  $z$  и домножим результат на  $1-2zx+z^2$ :

$$\frac{x-z}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = (1-2zx+z^2) \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(x) z^{k-1}.$$

В левой части стоит производящая функция, так что

$$(x - z) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) z^k = (1 - 2zx + z^2) \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(x) z^{k-1}.$$

Приравняем коэффициенты при  $z^n$  для  $n \geq 1$ :

$$xP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} + (n-1)P_{n-1} - 2xnP_n,$$

откуда

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}, \quad n \geq 0. \quad (5.12)$$

Эта рекуррентность справедлива и при  $n = 0$ , что проверяется подстановкой значений  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = x$  (см. задачу 5.1), если наложить естественное условие  $0 \cdot P_{-1} = 0$ .

Равенство (5.12) вновь показывает, что  $P_n$  — многочлен степени ровно  $n$ , причем четный при четных  $n$  и нечетный при нечетных  $n$ .

## 5.2.2 Частные значения

При  $x = 1$  производящая функция упрощается

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad (5.13)$$

Сравнивая выражения (5.11) и (5.13), находим

$$P_n(1) = 1. \quad (5.14)$$

Аналогичные рассуждения для  $x = -1$  показывают, что

$$P_n(-1) = (-1)^n. \quad (5.15)$$

При  $x = 0$  слева в (5.11) по-прежнему степень бинома

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} z^{2k}, \quad (5.16)$$

где принято  $(-1)!! = 0!! = 1$ . Сравнивая (5.11), (5.16), находим

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (-1)^{n/2} \left[ \frac{(n-1)!!}{n!!} \right], & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad (5.17)$$

### 5.2.3 Производные

Дифференцируя соотношение (5.11) по  $x$ , придем к производящей функции для производных от многочленов Лежандра

$$\frac{z}{(1 - 2zx + z^2)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x) z^n. \quad (5.18)$$

Домножим обе части на  $(1 - 2zx + z^2)/z$  и представим левую часть рядом (5.11):

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) z^k = (1 - 2zx + z^2) \sum_{k=1}^{\infty} P'_k(x) z^{k-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при  $z^n$ , приходим к рекуррентности

$$P'_{n+1} = P_n + 2xP'_n - P'_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (5.19)$$

Используя (5.12) (см. задачу 5.2), получаем

$$xP'_n = nP_n + P'_{n-1} = -(n+1)P_n + P'_{n+1}. \quad (5.20)$$

Подставляя выражение (5.20) в соотношение (5.19), находим

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n. \quad (5.21)$$

Формула (5.21) полезна возможностью рекуррентно находить не только производные, но и интегралы

$$(2n+1) \int_{-1}^x P_n(x') dx' = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x). \quad (5.22)$$

При определении постоянной интегрирования учтено соотношение (5.15). Частные значения производных в точках  $0, \pm 1$  можно получить по уже использованной схеме, опираясь на ряд (5.18):

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad P'_n(-1) = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}, \quad (5.23)$$

$$P'_n(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!!}{(n-1)!!}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad (5.24)$$



## 5.2.4 Дифференциальное уравнение

Сферическая функция  $P_n(\cos H)$  удовлетворяет уравнению (5.5)

$$\Delta^* P_n(\cos H) = -n(n+1)P_n(\cos H)$$

при любых значениях  $\theta', \lambda'$ . Полагая в формуле (5.2)  $\theta' = 0$ , получаем  $\cos H = \cos \theta$ . Зависимость от  $\lambda$  исчезла, поэтому оператор Бельтрами редуцируется к дифференцированию по  $\theta$ , и мы приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, линейному и однородному:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \right) + n(n+1)P_n(\cos \theta) = 0. \quad (5.25)$$

Переходя к переменной  $x = \cos \theta$ , получаем (см. задачу 3.22)

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right) + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad (5.26)$$

или, что то же:

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0. \quad (5.27)$$

Точки  $x = \pm 1$  являются особыми, так что из двух линейно-независимых решений лишь одно представляет собой многочлен, см. (Гобсон, 1952) и (Бейтмен, Эрдейи, 1973). Тем самым уравнение (5.27) определяет  $P_n$  с точностью до постоянного множителя. Последний практически всегда фиксируется условием (5.14) или (5.23). Можно привлечь также (5.17) при четном и (5.24) при нечетном  $n$ .

## 5.2.5 Формула Родрига

Продифференцируем функцию  $y = (x^2 - 1)^n$  и убедимся в справедливости соотношения

$$(x^2 - 1)y' - 2nxy = 0. \quad (5.28)$$

Вычислим производную порядка  $n+1$  от обеих частей (5.28), пользуясь правилом Лейбница. После приведения подобных

$$(x^2 - 1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0. \quad (5.29)$$

Сравнивая уравнения (5.27) и (5.29), убеждаемся, что многочлен  $y^{(n)}$  отличается от  $P_n$  лишь множителем. Последний легко найти, применяя правило Лейбница для производной порядка  $n$  от  $y = (x-1)^n(x+1)^n$ :

$$y^{(n)} = n!(x+1)^n + (x-1)Q_{n-1}(x),$$

где  $Q_{n-1}$  — некоторый многочлен указанной степени. Отсюда  $y^{(n)}(1) = 2^n n!$  Сравнение с (5.14) приводит к соотношению

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad (5.30)$$

называемому *формулой Родрига*.

Соотношение (5.30) позволяет легко найти коэффициенты многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k p_{nk} x^{n-2k}, \quad (5.31)$$

$$p_{nk} = \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!}. \quad (5.32)$$

Здесь  $\lfloor a \rfloor$  — целая часть вещественного числа  $a$ .

Для доказательства достаточно записать по формуле бинома

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{2n-2k}$$

и воспользоваться (5.30).

## 5.2.6 Ортогональность

Пусть  $y_n = (x^2 - 1)^n$ . Все производные от  $y_n$  порядка, меньшего  $n$ , обращаются в нуль на концах промежутка  $[-1, 1]$ . Вычислим интеграл от  $y_k^{(k)} y_n^{(n)}$  по частям, считая для определенности  $k \geq n$ . С учетом отмеченного поведения при  $x = \pm 1$  получим

$$\int_{-1}^1 y_k^{(k)}(x) y_n^{(n)}(x) dx = - \int_{-1}^1 y_k^{(k-1)}(x) y_n^{(n+1)}(x) dx.$$

Продолжив процесс, придем к тождеству

$$\int_{-1}^1 y_k^{(k)}(x) y_n^{(n)}(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 y_k^{(k-n)}(x) y_n^{(2n)}(x) dx. \quad (5.33)$$

Если  $k > n$ , сделаем еще шаг и увидим под интегралом функцию  $y_n^{(2n+1)} \equiv 0$ . Согласно соотношению (5.30) функции  $y_k^{(k)}, y_n^{(n)}$  лишь постоянными множителями отличаются от  $P_k, P_n$ .

Мы доказали ортогональность многочленов Лежандра в основном промежутке  $[-1, 1]$ :

$$\int_{-1}^1 P_k(x)P_n(x)dx = 0, \quad \text{если } k \neq n. \quad (5.34)$$

Если  $k = n$ , то тождество (5.33) принимает форму

$$\int_{-1}^1 [y_n^{(n)}(x)]^2 dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n y_n^{(2n)}(x) dx.$$

Поскольку старший член  $y_n$  равен  $x^{2n}$ , то  $y_n^{(2n)}(x) = (2n)!$ , поэтому

$$\int_{-1}^1 [y_n^{(n)}(x)]^2 dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx.$$

Последний интеграл вычислен в задаче 5.8. С учетом множителя в формуле Родрига (5.30) получаем окончательную нормировку

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (5.35)$$

## 5.2.7 Корни

Пусть  $f(x) = (x^2 - 1)^n, n \geq 1$ . Обращение  $f$  в нуль на концах основного промежутка  $[-1, 1]$  влечет по теореме Ролля существование корня  $x_{11}$  производной  $f'$ ,  $-1 < x_{11} < 1$ . При  $n \geq 2$  производная  $f'$  по-прежнему обращается в нуль в точках  $x = \pm 1$ . Применяя теорему Ролля к промежуткам  $[-1, x_{11}]$  и  $[x_{11}, 1]$ , убеждаемся, что  $f''$  имеет два корня  $x_{21}, x_{22}$ , причем  $-1 < x_{21} < x_{11} < x_{22} < 1$ . Продолжая процесс, приходим к выводу, что  $f^{(n)}$  имеет  $n$  различных корней внутри промежутка  $(-1, 1)$ . Так как  $f^{(n)}$  — многочлен степени  $n$ , то других корней нет.

Итак,  $P_n(x)$  имеет ровно  $n$  различных корней  $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}$ , и все они расположены в интервале  $(-1, 1)$ .

Примем во внимание свойство четности многочлена  $P_n$ .

Если  $n$  четно, то  $P_n$  имеет  $n/2$  положительных корней и  $n/2$  равных им по модулю отрицательных.

Если  $n$  нечетно, то  $P_n$  имеет  $(n-1)/2$  положительных корней,  $(n-1)/2$  равных им по модулю отрицательных корней и корень  $x = 0$ .

### 5.2.8 Элементарные сферические функции и теорема сложения

Вспомним, что в разделе 5.1 мы сделали только один шаг к цели, отделив расстояния от направлений. Для отделения широт от долгот необходимо исследовать пространство сферических функций фиксированного порядка  $n$ . В разделе 5.1.1 установлено, что каждая функция из этого пространства представляет собой однородный многочлен степени  $n$ , деленный на  $r^n$ . В сферических координатах это тригонометрический многочлен от  $\theta, \lambda$  степени не выше  $n$  по каждой из переменных. Базис пространства содержит  $2n+1$  элементов. Логично поэтому искать элементарные сферические функции  $Y_{ns}(Q)$ ,  $1 \leq s \leq 2n+1$ , в виде

$$Y_{n,2k}(Q) = \tilde{P}_n^k(\cos \theta) \sin k\lambda, \quad Y_{n,2k+1}(Q) = P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda, \quad (5.36)$$

где  $\tilde{P}_n^k, P_n^k$  — многочлены от  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$  степени не выше  $n$ . Индекс  $k$  изменяется от 0 до  $n$ , гармоника  $Y_{n0}$  тождественно равна нулю, так что имеется  $2n+1$  функций вида (5.36). В этом разделе точку на единичной сфере  $S_0$  будем обозначать буквой  $Q$ .

Применяя к  $Y_{n,2k+1}$  оператор Бельтрами, получаем для  $P_n^k$  линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} P_n^k(\cos \theta) \right] + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{\sin^2 \theta} \right] P_n^k(\cos \theta) = 0, \quad (5.37)$$

или после перехода к  $x = \cos \theta$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^k(x) \right] + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] P_n^k(x) = 0. \quad (5.38)$$

Это уравнение обобщает (5.26), совпадая с ним при  $k = 0$ .

Нужное нам решение (5.37) есть тригонометрический многочлен от косинусов и синусов  $\theta$ . Из-за сингулярности уравнения (5.37) при  $\sin \theta = 0$  второе линейно-независимое решение имеет особенности, так что  $P_n^k$  определяются дифференциальным уравнением с точностью до постоянного множителя, см. (Гобсон, 1952) и (Бейтмен, Эрдейи, 1973).

Применяя оператор Бельтрами к  $Y_{n,2k}$ , получаем для  $\tilde{P}_n^k$  то же уравнение (5.38), так что  $\tilde{P}_n^k$  отличается от  $P_n^k$  несущественным постоянным множителем. Не умаляя общности, считаем в дальнейшем  $\tilde{P}_n^k = P_n^k$ .

Величины  $P_n^k(x)$ , называемые *присоединенными функциями Лежандра*, легко выражаются через многочлены Лежандра. Пусть

$$y(x) = (1 - x^2)^{k/2} P_n^{(k)}(x),$$

где верхний индекс в скобках означает  $k$ -ю производную по  $x$ . Как следует из задач 5.9, 5.18, величина  $y$  удовлетворяет уравнению

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] y = 0, \quad (5.39)$$

совпадающему с (5.38). Поскольку  $y(\cos \theta)$  — тригонометрический многочлен степени  $n$  от  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ , можно положить

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k} = \frac{(1 - x^2)^{\frac{k}{2}}}{(2n)!!} \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}} [(x^2 - 1)^n]. \quad (5.40)$$

При  $k = 0$  присоединенная функция Лежандра  $P_n^k(x)$  становится просто многочленом Лежандра  $P_n(x)$ .

*Замечание.* В астрономии по рекомендации Международного астрономического союза пользуются нормировкой (5.40). В физике нередко встречается определение  $P_n^k$ , совпадающее с (5.40) с точностью до множителя  $(-1)^k$ . При работе со справочниками надо обращать внимание, какая нормировка там используется.

Докажем, что присоединенные функции Лежандра  $P_n^k(x)$ ,  $P_m^k(x)$  одного индекса  $k$  ортогональны между собой на основном промежутке  $[-1, 1]$ . Пусть

$$H_{nm}^k = \int_{-1}^1 P_n^k(x) P_m^k(x) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^k P_n^{(k)}(x) P_m^{(k)}(x) dx.$$

Интегрируя по частям при  $k > 0$ , находим

$$H_{nm}^k = - \int_{-1}^1 P_m^{(k-1)}(x) \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^k P_n^{(k)}(x) \right] dx = (n+k)(n+1-k) H_{nm}^{k-1},$$

где в конце использован результат задачи 5.10. Отсюда

$$H_{nm}^k = \frac{(n+k)!}{(n-k)!} H_{nm}^0.$$

Подставляя вместо  $H_{nm}^0$  правые части равенств (5.34), (5.35), получаем соответственно

$$\int_{-1}^1 P_n^k(x) P_m^k(x) dx = 0, \quad n \neq m, \quad (5.41)$$

$$\int_{-1}^1 [P_n^k(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \quad (5.42)$$

Рекуррентности для присоединенных функций Лежандра можно получить по той же схеме, что и для многочленов Лежандра. Приведем несколько нужных в дальнейшем соотношений, доказательства которых составят предмет нескольких задач этой главы:

$$P_n^{k+1}(x) = x P_{n-1}^{k+1}(x) + (n+k) \sqrt{1-x^2} P_{n-1}^k(x), \quad (5.43)$$

$$(n-k+1) P_n^{k-1}(x) = (n+k-1) x P_{n-1}^{k-1}(x) - \sqrt{1-x^2} P_{n-1}^k(x), \quad (5.44)$$

$$P_n^{k+1}(x) = 2k \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^k(x) - (n-k+1)(n+k) P_n^{k-1}(x). \quad (5.45)$$

Линейная независимость гармоник (5.36) очевидна, число их равно размерности пространства сферических функций порядка  $n$ . Поэтому произвольная сферическая функция  $f_n$  представляется линейной комбинацией элементарных:

$$f_n(Q) = \sum_{s=1}^{2n+1} c_s Y_{ns}(Q). \quad (5.46)$$

Ортогональность тригонометрических функций на окружности влечет ортогональность  $Y_{ns}$  на единичной сфере при фиксированном первом индексе. Ортогональность присоединенных функций Лежандра влечет ортогональность  $Y_{ns}$  при фиксированном втором индексе. Таким образом,

$$\int Y_{ns}(Q)Y_{n's'}(Q) d\sigma = 0, \quad (5.47)$$

если  $n \neq n'$  или  $s \neq s'$ . Здесь  $d\sigma = \sin \theta d\theta d\lambda$  — элемент площади единичной сферы. Символом  $\int(\cdot)d\sigma$  будем обозначать интеграл по поверхности единичной сферы.

Интеграл от квадрата определяется формулой (5.42)

$$\int [Y_{ns}(Q)]^2 d\sigma = \mu_{ns}. \quad (5.48)$$

Здесь при  $s = 2k + 1$ ,  $0 \leq k \leq n$  и при  $s = 2k$ ,  $1 \leq k \leq n$

$$\mu_{ns} = \frac{2\pi(1 + \delta_{k0}) (n + k)!}{2n + 1 (n - k)!},$$

где  $\delta_{k0}$  — символ Кронекера.

Заметим, что (5.47) влечет ортогональность на единичной сфере произвольных сферических функций разного порядка

$$\int f_n(Q)f_m(Q) d\sigma = 0, \quad n \neq m. \quad (5.49)$$

Коэффициенты  $c_s$  разложения Фурье (5.46) по ортогональной системе (5.36) с учетом (5.48) даются стандартной интегральной формулой

$$c_s = \frac{1}{\mu_{ns}} \int f_n(Q)Y_{ns}(Q) d\sigma. \quad (5.50)$$

Формулы (5.46), (5.50) позволяют вывести важное интегральное свойство многочленов Лежандра. Функции (5.36) обращаются в нуль при  $\sin \theta = 0$ , за исключением  $Y_{n1}$ , равной  $P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ . В северном полюсе  $Q_0$  (при  $\theta = 0$ ) равенство (5.46) переходит в

$$c_1 = f_n(Q_0). \quad (5.51)$$

Сопоставление (5.50) и (5.51) показывает, что

$$f_n(Q_0) = \frac{2n+1}{4\pi} \int f_n(Q) P_n(\cos \theta) d\sigma.$$

Эта формула легко обобщается на произвольную точку  $Q' \in S_0$ . Достаточно повернуть оси координат так, чтобы новая ось  $Z$  проходила через  $Q'$ . Угол  $\theta$  переходит в  $H$ , поэтому

$$f_n(Q') = \frac{2n+1}{4\pi} \int f_n(Q) P_n(\cos H) d\sigma. \quad (5.52)$$

Можно сказать, что  $P_n(\cos H)$  играет роль  $\delta$ -функции Дирака в пространстве сферических функций.

Теперь мы подготовлены к представлению  $P_n(\cos H)$  через элементарные сферические функции. Согласно равенству (5.2)

$$\cos H = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda'). \quad (5.53)$$

Так как  $P_n$  — многочлен степени  $n$  от  $\cos H$ , его можно представить с учетом (5.53) многочленом Фурье по косинусам разности долгот

$$P_n(\cos H) = \sum_{k=0}^n \Phi_{nk}(\theta, \theta') \cos k(\lambda - \lambda'). \quad (5.54)$$

Иногда более удобна запись

$$P_n(\cos H) = \sum_{k=0}^n [\Phi_{nk}(\theta, \theta') \cos k\lambda' \cos k\lambda + \Phi_{nk}(\theta, \theta') \sin k\lambda' \sin k\lambda]. \quad (5.55)$$

Поскольку  $P_n(\cos H)$  — сферическая функция, для нее справедливо представление (5.46), что в сравнении с (5.55) показывает  $\Phi_{nk}(\theta, \theta') = C P_n^k(\cos \theta)$ . Величина  $C$  не зависит от  $\theta$ , но может зависеть от  $\theta'$ . Формула (5.53) обнаруживает симметрию  $\theta$  и  $\theta'$ , так что  $C = \alpha_{nk} P_n^k(\cos \theta')$  с некоторым числовым коэффициентом  $\alpha_{nk}$ .

Полученную формулу

$$P_n(\cos H) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} P_n^k(\cos \theta) P_n^k(\cos \theta') \cos k(\lambda - \lambda') \quad (5.56)$$



называют *теоремой сложения для многочленов Лежандра*. Она представляет сферическую функцию слева линейной комбинацией элементарных сферических функций.

Осталось еще определить постоянные  $\alpha_{nk}$ . Положим в (5.52)  $f_n(Q) = Y_{ns}(Q)$ ,  $s = 2k + 1$ :

$$\frac{4\pi}{2n+1} Y_{ns}(Q') = \int Y_{ns}(Q) P_n(\cos H) d\sigma.$$

Правая часть согласно формуле (5.56) равна

$$\alpha_{nk} Y_{ns}(Q') \int [Y_{ns}(Q)]^2 d\sigma = \alpha_{nk} \mu_{ns} Y_{ns}(Q'),$$

откуда

$$\alpha_{nk} = (2 - \delta_{k0}) \frac{(n-k)!}{(n+k)!}. \quad (5.57)$$

## 5.2.9 Оценки

Из множества оценок выпишем основные. Доказательства можно найти в книге (Антонов и др., 1988).

Многочлены Лежандра и все их производные достигают наибольшего значения на правом конце промежутка. В частности, при  $x \in [-1, 1]$

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad |P'_n(x)| \leq \frac{n(n+1)}{2}. \quad (5.58)$$

Внутри промежутка многочлены убывают как  $n^{-1/2}$ . Именно,

$$|P_n(\cos \theta)| < \sqrt{\frac{2}{\pi(n + \frac{1}{2}) \sin \theta}}, \quad 0 < \theta < \pi. \quad (5.59)$$

История последнего неравенства длилась сто лет. Сначала Т.Стилтьес доказал оценку

$$|P_n(\cos \theta)| \sqrt{\sin \theta} < \frac{A}{\sqrt{n}} \quad (5.60)$$

с неопределенной константой  $A$ . Затем С.Н.Бернштейн нашел оптимальную константу  $A = \sqrt{2/\pi}$ . Оптимальность означает, что при любом  $A$ , меньшем, чем  $\sqrt{2/\pi}$ , найдется пара  $n, \theta$  такая, что неравенство (5.60) нарушится. Наконец, В.А.Антонов и

К.В.Холшевников установили оценку (5.59) и доказали оптимальность константы  $B = 1/2$  в классе оценок

$$|P_n(\cos \theta)|\sqrt{\sin \theta} < \sqrt{\frac{2}{\pi(n+B)}}.$$

Укажем еще оценку интеграла

$$\left| \int_{-1}^x P_n(t) dt \right| < \sqrt{\frac{2}{\pi n^2(n+3/2)}}. \quad (5.61)$$

Согласно равенству (5.22) отсюда следует

$$|P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)| < \sqrt{\frac{8}{\pi n}}. \quad (5.62)$$

### 5.2.10 Трудности вычисления многочленов Лежандра

Многочлены Лежандра ограничены в основном промежутке единицей, но их коэффициенты быстро растут. Это может привести к неприемлемой потере точности при вычислениях. Исследуем этот вопрос количественно.

Мерой потери выберем сумму модулей коэффициентов (5.32)

$$q_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} p_{nk}. \quad (5.63)$$

Согласно формуле (5.31)

$$P_n(i) = q_n i^n, \quad (5.64)$$

где  $i$  — мнимая единица. Подставив  $x = i$  в соотношение (5.11), получим производящую функцию последовательности  $\{q_n\}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2iz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (iz)^n. \quad (5.65)$$

Разложим подкоренное выражение на множители:

$$1 - 2iz + z^2 = (1 - qzi)(1 + q^{-1}zi),$$

где  $q = \sqrt{2} + 1 = 2.414214\dots$ ,  $q^{-1} = \sqrt{2} - 1 = 0.414214\dots$ . Перемножая биномиальные ряды типа (5.16) для  $(1 - qzi)^{-1/2}$  и  $(1 + q^{-1}zi)^{-1/2}$  и приравнявая коэффициенты в обеих частях равенства (5.65), получаем

$$q_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(2n - 2m - 1)!!(2m - 1)!!}{(2n - 2m)!!(2m)!!} q^{n-2m}. \quad (5.66)$$

Отношение модулей последовательных членов суммы равно

$$\frac{(n - m)(2m + 1)}{(2n - 2m - 1)(m + 1)q^2} < \frac{2}{q^2} < 1,$$

так что сумма (5.66) имеет лейбницевский тип, и ее значение заключено в пределах

$$\frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} q^n - \frac{(2n - 3)!!}{2(2n - 2)!!} q^{n-2} < q_n < \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} q^n.$$

Введем вспомогательную переменную

$$x_n = \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} \sqrt{\pi n}$$

и рассмотрим отношение

$$\left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^2 = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 4n} > 1.$$

Следовательно, последовательность  $\{x_n\}$  возрастает и  $x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Последнее равенство — следствие формулы Валлиса (*Антонов и др., 1988*, формула (4.6.4)). Оценка сверху получена:

$$q_n < \frac{q^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Аналогично для переменной

$$y_n = \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} \left( 1 - \frac{n}{2n - 1} q^{-2} \right) \sqrt{\pi(n + 1)}$$

образуем отношение

$$\left( \frac{y_n}{y_{n-1}} \right)^2 = \frac{[(2 - c)^2 n^2 - 2(2 - c)n + 1](4n^3 - 8n^2 - 3n + 9)}{4n^3[(2 - c)^2 n^2 - 2(2 - c)(3 - c)n + (3 - c)^2]},$$

где  $c = q^{-2} = 3 - 2\sqrt{2} = 0.171573\dots$

Разность  $\xi(n)$  знаменателя и числителя равна

$$\xi(n) = (12 - 20c + 7c^2)n^3 - (40 - 42c + 9c^2)n^2 + (39 - 18c)n - 9.$$

Если  $n \geq 4$ , то  $n^3 \geq 4n^2$ ,

$$\xi(n) \geq (8 - 38c + 19c^2)n^2 > 0.$$

При  $n = 2, 3$  имеем  $\xi(2) = 5 - 28c + 20c^2 > 0$ ,  $\xi(3) = 72 - 216c + 108c^2 > 0$ . Следовательно, последовательность  $y_n$  убывает и

$$y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 - \frac{1}{2}c = \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0.914213\dots$$

Окончательно

$$\frac{(1 - c/2)q^n}{\sqrt{\pi(n+1)}} < q_n < \frac{q^n}{\sqrt{\pi n}}. \quad (5.67)$$

В качестве иллюстрации составим таблицу.

Величины  $q_n$  и их оценки

$n$	10	100	200	300	500	1000
$q_n^-$	$1.05 \cdot 10^3$	$9.72 \cdot 10^{36}$	$1.31 \cdot 10^{75}$	$2.02 \cdot 10^{113}$	$5.63 \cdot 10^{189}$	$9.73 \cdot 10^{380}$
$q_n$	$1.09 \cdot 10^3$	$9.86 \cdot 10^{36}$	$1.32 \cdot 10^{75}$	$2.05 \cdot 10^{113}$	$5.69 \cdot 10^{189}$	$9.83 \cdot 10^{380}$
$q_n^+$	$1.20 \cdot 10^3$	$1.07 \cdot 10^{37}$	$1.43 \cdot 10^{75}$	$2.22 \cdot 10^{113}$	$6.16 \cdot 10^{189}$	$1.06 \cdot 10^{381}$

Здесь  $q_n^-$  и  $q_n^+$  — левая и правая части неравенств (5.67).

Таким образом, вычисление  $P_n(x)$  по формуле типа (5.31) может привести к потере 3 значащих цифр при  $n = 10$ ; 113 значащих цифр при  $n = 300$ ; 381 значащей цифры при  $n = 1000$ .

Безусловно, при рациональном  $x$  можно свести ошибку к нулю, пользуясь вычислениями в рациональной арифметике. Покажем, что того же можно добиться вычислениями в арифметике конечных  $s$ -ичных дробей, если  $s$  делится на два — в частности, для дробей десятичных, двоичных и восьмеричных. Достаточно доказать, что коэффициенты  $p_{nk}$  многочленов Лежандра представляют собой целые числа, деленные на степень двойки.

### Лемма 1

На множестве  $\mathcal{N}$  натуральных чисел введем целочисленную функцию  $\alpha(n)$  — наибольшее из целых неотрицательных  $m$  таких, что  $n!$  делится на  $2^m$ . Тогда

$$\alpha(n) = n - \beta(n), \quad (5.68)$$

где  $\beta(n)$  — число единиц в двоичном представлении  $n$ . В частности,

$$\beta(n) \geq 1, \quad \alpha(n) \leq n - 1, \quad (5.69)$$

причем равенства достигаются тогда и только тогда, когда  $n$  есть степень двойки.

**Доказательство.** Двоичное представление  $n$  соответствует записи

$$n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k},$$

где  $n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 0$ ,  $k = \beta(n) \geq 1$ . Представим  $n!$  в виде

$$n! = N_1 N_2 \dots N_k,$$

где

$$N_1 = (2^{n_1})!, \quad N_2 = (2^{n_1} + 1)(2^{n_1} + 2) \dots (2^{n_1} + 2^{n_2}),$$

$$N_3 = (2^{n_1} + 2^{n_2} + 1)(2^{n_1} + 2^{n_2} + 2) \dots (2^{n_1} + 2^{n_2} + 2^{n_3}), \dots$$

$$N_k = (2^{n_1} + \dots + 2^{n_{k-1}} + 1)(2^{n_1} + \dots + 2^{n_{k-1}} + 2) \dots (2^{n_1} + \dots + 2^{n_k}).$$

Разложение  $N_1$  на простые множители содержит  $\alpha(2^{n_1})$  двоек. Разложение  $N_2$  на простые множители содержит  $\alpha(2^{n_2})$  двоек. Действительно, входящий в  $N_2$  общий множитель можно представить в форме

$$2^{n_1} + 2^s r = 2^s (2^{n_1-s} + r),$$

где  $r$  нечетно и  $2^s r < 2^{n_1}$ . Поэтому слагаемое  $2^{n_1}$  не влияет на результат. Аналогично,  $N_3$  содержит  $\alpha(2^{n_3})$  двоек и т. д. Таким образом,

$$\alpha(n) = \alpha(2^{n_1}) + \alpha(2^{n_2}) + \dots + \alpha(2^{n_k}). \quad (5.70)$$

Для первых нескольких  $n$  утверждения леммы проверяются непосредственно. Предположим их справедливость для всех  $n$ , двоичная запись которых содержит не более  $k - 1$  разрядов. Тогда для числа  $n$ , состоящего из  $k$  разрядов, справедливо (5.70) при  $\alpha(2^{n_i}) = 2^{n_i} - 1$ , так что

$$\alpha(n) = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_k} - k = n - \beta(n),$$

что по индукции доказывает лемму.

#### Теорема 4

Коэффициенты  $p_{nk}$  многочленов Лежандра имеют вид

$$p_{nk} = \frac{1}{2^{n-\beta(k)-\beta(n-2k)}} \tilde{p}_{nk}, \quad n \geq 1, \quad (5.71)$$

где  $\tilde{p}_{nk}$  — нечетные целые.

Доказательство. Перепишем выражение (5.32) в виде

$$2^n p_{nk} = \binom{2n-2k}{n} \binom{n}{k}.$$

Поскольку биномиальные коэффициенты — целые числа,  $p_{nk}$  равно нечетному числу, деленному на степень двойки. Степень эта равна

$$n + \alpha(k) + \alpha(n-k) + \alpha(n-2k) - \alpha(2n-2k),$$

что по лемме совпадает с

$$n - \beta(k) - \beta(n-k) - \beta(n-2k) + \beta(2n-2k),$$

если условиться, что  $\beta(0) = 0$ . Умножение на 2 не меняет числа единиц в двоичном представлении числа, так что  $\beta(n-k) = \beta(2n-2k)$ , что и доказывает формулу (5.71).

При  $k = 0$  показатель степени в знаменателе (5.71) равен  $n - \beta(n)$ . То же при  $k = n/2$  для четных  $n$ . При  $k = (n-1)/2$  для нечетных  $n$  показатель равен

$$n - \beta\left(\frac{n-1}{2}\right) - \beta(1) = n - \beta(n-1) - \beta(1) = n - \beta(n).$$

Поэтому для крайних коэффициентов

$$p_{nk} = \frac{1}{2^{n-\beta(n)}} \tilde{p}_{nk}, \quad k = 0, \quad k = \lfloor n/2 \rfloor. \quad (5.72)$$

Для остальных  $k$  также справедливо представление (5.72) с целыми (возможно, четными)  $\tilde{p}_{nk}$ . В самом деле, неравенство  $\beta(a+b) \leq \beta(a) + \beta(b)$  очевидно, откуда

$$\beta(n) \leq \beta(2k) + \beta(n-2k) = \beta(k) + \beta(n-2k). \quad (5.73)$$

*Замечание.* Вычисление функций  $P_n^{(m)}(x), P_n^m(x)$  не вызывает дополнительной потери точности. Хотя модули коэффициентов типа  $p_{nk}$  растут, в той же мере растут и наибольшие значения  $P_n^{(m)}(x)$ , см. задачу 5.16. Точно так же коэффициенты многочлена  $P_n^{(m)}(x)$  остаются конечными двоичными дробями.

Результаты этого параграфа получены авторами и ранее не публиковались.

### 5.2.11 Сходимость ряда для производящей функции

Определим, наконец, область сходимости ряда (5.11). Считаем  $x$  вещественным параметром из промежутка  $[-1, 1]$ ,  $z$  — комплексной переменной. Особые точки функции слева даются уравнением

$$z^2 - 2zx + 1 = 0,$$

имеющим два корня

$$z_{1,2} = x \pm i\sqrt{1-x^2}, \quad |z_{1,2}| = 1.$$

На концах  $x = \pm 1$  оба корня сливаются в один двойной. Таким образом, ряд (5.11) сходится в круге  $|z| < 1$  и расходится при  $|z| > 1$ . Отсюда следует сходимость рядов Лапласа (5.6), (5.9) со скоростью геометрической прогрессии вне объемлющей и внутри пустой сферы, что гарантирует и законность всех операций, выполненных при выводе рядов.

Возвратимся в вещественную область: ряд (5.11) сходится при  $0 \leq z < 1$  и расходится при  $z > 1$ . Каково его поведение при  $z = 1$ ?

Если  $x = \pm 1$ , имеет место расходимость, поскольку общий член  $P_n(\pm 1)$  равен единице по модулю.

Если  $-1 < x < 1$ , ряд сходится условно (*Владимиров, 2003; Антонов и др., 1988; Михлин, 2002*).

## 5.3 Ряд Лапласа

Займемся рядом Лапласа (5.9), описывающим потенциал вне объемлющей сферы. Все свойства ряда (5.6) аналогичны, и мы не будем их явно формулировать.

С точки зрения практики представление (5.9) — полуфабрикат. Нужно еще отделить широты от долгот в сферической функции. Это легко сделать, применяя к равенству (5.10) теорему сложения (5.56). В результате

$$\begin{aligned} Y_n(\tilde{Q}) &= \sum_{k=0}^n P_n^k(\cos \theta)(A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^n J_{nk} P_n^k(\cos \theta) \cos k(\lambda - \lambda_{nk}). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{nk} \\ B_{nk} \end{pmatrix} &= \frac{\alpha_{nk}}{MR^n} \int_T r'^{n+2} P_n^k(\cos \theta') \sin \theta' \begin{pmatrix} \cos k\lambda' \\ \sin k\lambda' \end{pmatrix} \varrho(Q') dr' d\theta' d\lambda', \\ J_{nk} &= \sqrt{A_{nk}^2 + B_{nk}^2}, \quad \cos k\lambda_{nk} = \frac{A_{nk}}{J_{nk}}, \quad \sin k\lambda_{nk} = \frac{B_{nk}}{J_{nk}}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

В формуле (5.75) можно опустить штрихи, так как точка  $Q$  здесь не появляется и путаницы не возникнет.

Безразмерные величины  $A_{nk}, B_{nk}$  называют *гармоническими коэффициентами* или *коэффициентами Стокса*.

Ряд (5.9) с учетом (5.74) можно записать в виде

$$V(Q) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n^k(\cos \theta)(A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda). \quad (5.76)$$

Ясно, что он имеет требуемую форму: общий член — гармоническая функция; сумма двойная, а не тройная, причем внутренняя сумма конечна (это уже, что называется, сверх программы); каждый член суммы есть произведение трех функций одной переменной —  $r, \theta$  и  $\lambda$  соответственно.

Масштабный множитель  $R$  может быть выбран произвольно. Для упрощения теории выгодно за  $R$  принять радиус объемлющей сферы  $R^+$ . На практике чаще выбирают наибольший или средний радиус экваториального сечения тела. При сравнении различных моделей гравитационного поля небесного тела необходимо принимать во внимание, какое значение  $R$  использовалось. С изменением  $R$  изменяются и  $A_{nk}, B_{nk}$ . Обозначим их поэтому  $A_{nk}(R), B_{nk}(R)$ .



Придавая в формуле (5.76) величине  $R$  два различных значения  $R = R_1$  и  $R = R_2$ , находим связь коэффициентов Стокса, отнесенных к  $R_1$  и  $R_2$ :

$$R_1^n A_{nk}(R_1) = R_2^n A_{nk}(R_2), \quad R_1^n B_{nk}(R_1) = R_2^n B_{nk}(R_2). \quad (5.77)$$

Коэффициенты  $A_{nk}, B_{nk}$  могут быть вычислены по (5.75) лишь с большой погрешностью, поскольку, как уже говорилось, функция  $q(Q')$  известна плохо. На практике параметры Стокса для Земли определяют по высокоточным наблюдениям геодезических и навигационных ИСЗ с привлечением наземных гравиметрических данных. В первые десятилетия космической эры печатались таблицы постоянных Стокса со все увеличивающимся их числом и растущим числом значащих цифр — см., например, (Аксенов, 1977). Теперь имеются массивы, содержащие  $A_{nk}, B_{nk}$  при  $n \leq N$  и всех  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) вплоть до  $N = 300$  и выше (Lemoine et al., 1998), (Biancale et al., 2000). Массивы хранятся в электронном виде. Поскольку в матрице коэффициентов  $n$ -я строка содержит  $2n + 1$  элементов, их общее число при  $0 \leq n \leq N$  равно  $(N + 1)^2$ , что превышает  $10^5$  при  $N \geq 316$ . Ввиду возможной потери точности (см. раздел 5.2.10) к численным значениям  $A_{nk}, B_{nk}$  при больших  $n$  надо относиться с осторожностью.

Для Луны, Марса, Венеры (Potts, von Frese, 2003), (Yuan et al., 2001), (Konopliv et al., 1999) параметры Стокса также определены (в меньшем количестве и с меньшей точностью) из наблюдений их искусственных, а для Марса и Юпитера и естественных спутников. Для других тел Солнечной системы несколько первых гармонических коэффициентов определены из наблюдений их естественных спутников, временных искусственных спутников (например, для Фобоса и Эроса), пролетных космических аппаратов.

Для Солнца  $A_{nk}, B_{nk}$  столь малы, что удалось пока найти оценку лишь одного коэффициента (Pijpers, 1998), (Godier, Rozelot, 2000)

$$A_{20} = (-2.0 \pm 0.4) \cdot 10^{-7}$$

по гелиосейсмическим данным и измерениям дифференциальной угловой скорости поверхностного вращения Солнца с привлечением модели внутреннего строения Солнца. Из радиолокационных наблюдений планет и космических аппаратов в рамках теории движе-

ния больших планет этот коэффициент, характеризующий сжатие Солнца, оказался равным (Питьева, 2005)

$$A_{20} = (-1.9 \pm 0.3) \cdot 10^{-7}.$$

Мы не считаем первых четырех коэффициентов, одинаковых для всех тел, как будет показано в разделе 6.1.

## Задачи к главе 5

**Задача 5.1.** Дифференцируя левую часть (5.3) по  $z$  или пользуясь биномиальным рядом, показать, что

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

**Задача 5.2.** Доказать соотношение (5.20).

*Указание.* Продифференцируйте равенство (5.12) и сравните с (5.19).

**Задача 5.3.** Вывести рекуррентности

$$(1 - x^2)P'_n(x) = n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)] = (n + 1)[xP_n(x) - P_{n+1}(x)].$$

*Указание.* Продифференцировать, воспользоваться соотношениями (5.20) и сравнить с (5.26).

**Задача 5.4.** Показать, что формулы

$$P_n^{(k+1)}(x) = xP_{n-1}^{(k+1)}(x) + (n + k)P_{n-1}^{(k)}(x),$$

$$(n - k + 1)P_n^{(k-1)}(x) = (n + k - 1)xP_{n-1}^{(k-1)}(x) - (1 - x^2)P_{n-1}^{(k)}(x),$$

$$(1 - x^2)P_n^{(k+1)}(x) = 2kxP_n^{(k)}(x) - (n - k + 1)(n + k)P_n^{(k-1)}(x)$$

равносильны формулам (5.43)-(5.45).

**Задача 5.5.** Выведите первое и последнее из соотношений задачи 5.4, дифференцируя формулы (5.20) и (5.27).

**Задача 5.6.** Докажите среднее из соотношений задачи 5.4.

*Указание.* Подставьте в левую часть вместо  $P_n^{(k-1)}$  правую часть первой из формул задачи 5.4, предварительно заменив там

$k$  на  $k - 2$ . С точностью до обозначений индексов получится последнее из соотношений задачи 5.4.

**Задача 5.7.** Вывести аналоги формулы (5.22), полагая нижний предел интеграла равным 0 и 1.

**Задача 5.8.** Вычислить интеграл

$$I_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx, \quad n \geq 0.$$

*Указание.* Интегрируя по частям, вывести рекуррентность. Можно также воспользоваться теорией бета-функций Эйлера.

*Ответ:*

$$I_n = 2 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

**Задача 5.9.** Дифференцируя (5.27), вывести уравнение для  $k$ -й производной полинома Лежандра  $y = P_n^{(k)}(x)$ .

*Ответ:*

$$(1 - x^2)y'' - 2(k+1)xy' + [n(n+1) - k(k+1)]y = 0,$$

или, что то же,

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)y'] - 2kxy' + [n(n+1) - k(k+1)]y = 0.$$

**Задача 5.10.** Показать, что

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)^k P_n^{(k)}(x)] + [n(n+1) - k(k-1)](1 - x^2)^{k-1} P_n^{(k-1)}(x) = 0.$$

**Задача 5.11.** Вывести рекуррентности

$$\begin{aligned} P_n^{k+2} &= \frac{2(k+1)x}{\xi} P_n^{k+1} - (n-k)(n+k+1)P_n^k, \\ (2n+1)xP_n^k &= (n-k+1)P_{n+1}^k + (n+k)P_{n-1}^k, \\ P_{n+1}^k - P_{n-1}^k &= (2n+1)\xi P_n^{k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(n+k)(n+k+1)P_{n-1}^k - (n-k)(n-k+1)P_{n+1}^k &= (2n+1)\xi P_n^{k+1}, \\
xP_n^k &= P_{n-1}^k + (n-k+1)\xi P_n^{k-1} = P_{n+1}^k - (n+k)\xi P_n^{k-1}, \\
(n-k)xP_n^k &= (n+k)P_{n-1}^k - \xi P_n^{k+1}, \\
(n+k+1)xP_n^k &= (n-k+1)P_{n+1}^k + \xi P_n^{k+1}, \\
\xi^2 \frac{d}{dx} P_n^k &= (n+1)xP_n^k - (n-k+1)P_{n+1}^k = -nxP_n^k + (n+k)P_{n-1}^k,
\end{aligned}$$

где  $\xi = \sqrt{1-x^2}$ .

*Указание.* Часть этих формул уже доказана. С остальными уже нетрудно справиться.

**Задача 5.12.** Найти производящую функцию для производных порядка  $m$  многочленов Лежандра.

*Указание.* Использовать формулы (5.3) или (5.18).

*Ответ:*

$$\frac{(2m-1)!!z^m}{(1-2zx+z^2)^{1/2+m}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^{(m)}(x)z^n.$$

**Задача 5.13.** Показать, что в основном промежутке  $[-1, 1]$  многочлены Лежандра и все их производные принимают наибольшее значение при  $x = 1$ .

*Указание.* Представить  $1 - 2zx + z^2$  в виде  $(1 - e^{i\theta}z)(1 - e^{-i\theta}z)$  и доказать, что коэффициенты производящей функции задачи (5.12) — многочлены с положительными коэффициентами от  $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ .

**Задача 5.14.** Используя формулы (5.3), найти производящую функцию для интегралов от многочленов Лежандра.

*Ответ:*

$$\frac{1+z-\sqrt{1-2zx+z^2}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(x)z^n,$$

что можно представить также в форме

$$\sqrt{1-2zx+z^2} = 1 - xz - \sum_{n=1}^{\infty} P_n^*(x)z^{n+1}.$$

Здесь

$$P_n^*(x) = \int_{-1}^x P_n(t) dt.$$

Ряды сходятся абсолютно и равномерно в замкнутом круге  $|z| \leq 1$ .

**Задача 5.15.** Доказать, что при  $-1 \leq x \leq 1$  в круге  $|z| < 1$

$$\ln \frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

При  $x = 1$  левую часть следует заменить ее предельным при  $x \rightarrow 1$  значением

$$\ln \frac{1}{1 - z}.$$

Чему равна левая часть при  $x = -1$  ?

**Задача 5.16.** Найти значение  $P_n^{(m)}$  в ключевых точках  $0, \pm 1$ .

*Ответ:*

$$P_n^{(m)}(1) = \frac{(n+m)!}{2^m m! (n-m)!}, \quad P_n^{(m)}(-1) = (-1)^{n-m} \frac{(n+m)!}{2^m m! (n-m)!},$$

$$P_n^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n - m \text{ нечетно,} \\ (-1)^k (n+m-1)!! / (2^k k!), & \text{если } n - m = 2k. \end{cases}$$

**Задача 5.17.** Представить  $P_n(\cos \theta)$  в виде многочлена Фурье.

*Указание.* В формуле (5.56) положить  $\lambda' = 0$ ,  $\theta = \theta' = \pi/2$  и воспользоваться результатом задачи 5.16.

*Ответ:*

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} g_{nm} \cos(n-2m)\theta,$$

$$g_{nm} = 2 \frac{(2m-1)!! (2n-2m-1)!!}{(2m)!! (2n-2m)!!}, \quad \text{если } 2m < n,$$

$$g_{n,n/2} = \left[ \frac{(n-1)!!}{n!!} \right]^2 \quad (n \text{ четно}).$$

**Задача 5.18.** Пусть  $z(x) = (1 - x^2)^{k/2}y(x)$ . Вывести формулу

$$(1 - x^2)z'' - 2xz' + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2} \right] z = \\ (1 - x^2)^{k/2} \{ (1 - x^2)y'' - 2(k+1)xy' + [n(n+1) - k(k+1)]y \}.$$

**Задача 5.19.** Найти присоединенные функции Лежандра для  $n = 1, 2$ .

*Указание.* Использовать (5.40) и решение задачи 5.1.

*Ответ:*  $P_1^0 = \cos \theta$ ,  $P_1^1 = \sin \theta$ ,  $P_2^0 = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$ ,  $P_2^1 = 3 \cos \theta \sin \theta$ ,  $P_2^2 = 3 \sin^2 \theta$ .

**Задача 5.20.** Показать, что при  $n = 1$  формула (5.56) переходит в (5.53).

**Задача 5.21.** Показать, что присоединенные функции Лежандра  $P_n^k(x)$  четны при четном  $n - k$  и нечетны при нечетном  $n - k$ .

**Задача 5.22.** Показать, что  $P_n^k(x)$  в интервале  $(-1, 1)$  имеет ровно  $n - k$  корней, симметрично расположенных относительно начала координат. Какие еще корни имеет  $P_n^k(x)$ ?

**Задача 5.23.** Используя неравенство Буняковского и равенство (5.35), доказать оценку

$$\int_{-1}^1 |P_n(x)| dx < \frac{2}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \geq 1.$$

При  $n = 0$  следует поставить знак равенства.

**Задача 5.24.** Показать, что все числа  $\tilde{p}_{nk}$  в формуле (5.72) нечетны, если  $n$  есть степень двойки без единицы.

## Глава 6

# Свойства ряда Лапласа

### 6.1 Классификация гармоник

Элементарные сферические гармоники (5.36) принято делить на три класса по расположению их корней на единичной сфере  $S_0$ .

*Первый класс: зональные гармоники.*

К ним относится при данном  $n \geq 1$  лишь одна гармоника  $Y_{n1} = P_n(\cos \theta)$ . Она обращается в нуль на параллелях  $\theta = \theta_{ns}$ ,  $s = 1, \dots, n$ ,  $0 < \theta_{ns} < \pi$ . Критические параллели симметричны относительно экватора. Экватор является критической параллелью при нечетном и только нечетном  $n$ . Для доказательства достаточно сослаться на раздел 5.2.7. В зонах между критическими параллелями чередуются по непрерывности положительные и отрицательные значения  $Y_{n1}$  (рис. 5, а). Число зон, включая полярные шапки, равно  $n + 1$ .

*Второй класс: тессеральные гармоники.*

К ним относят  $Y_{n,2k}, Y_{n,2k+1}$  при  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ . Согласно задаче 5.22 здесь имеются  $n - k$  критических параллелей. К ним добавляются  $2k$  критических меридианов с долготами

$$\lambda_{ks} = \frac{\pi}{k}s, \quad s = 0, \dots, 2k - 1,$$

для  $Y_{n,2k}$  и  $2k$  сдвинутых на  $\pi/2k$  меридианов для  $Y_{n,2k+1}$ .

Критические параллели и меридианы разбивают сферу на  $2k(n - k + 1)$  плиток (тессера на латинском языке). Плитки треугольны у полюсов (за исключением случая  $k = 1$ , когда они двуугольны) и четырехугольны между критическими параллелями.

Плитки в шахматном порядке разбивают сферу на участки положительных и отрицательных значений  $Y_{n,2k}, Y_{n,2k+1}$  (рис. 5, б).

*Третий класс: секториальные гармоники.*

К ним относят  $Y_{n,2n}, Y_{n,2n+1}$  при  $n \geq 1$ . Критические параллели отсутствуют. Критические меридианы разбивают сферу на  $2n$  секторов от полюса до полюса с чередованием знаков  $Y_{n,2n}$  и  $Y_{n,2n+1}$  (рис. 5, в).

Для динамики близких к гравитирующему небесному телу спутников различие между тессеральными и секториальными гармониками менее важно, чем различие между каждым из этих классов и зональными гармониками. Поэтому второй и третий класс часто объединяют в один класс незональных гармоник.

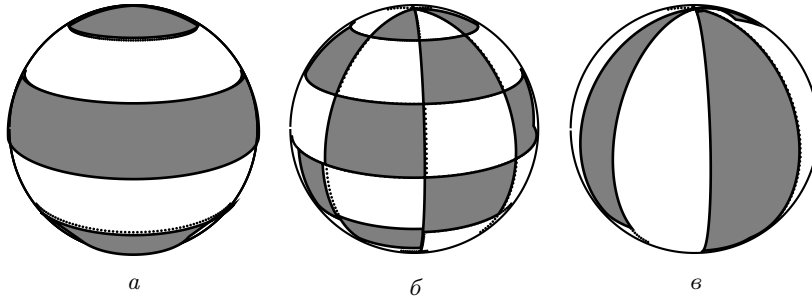


Рис. 5. Разбиение сферы в случае зональных (а), тессеральных (б) и секториальных (в) гармоник.

## 6.2 Первые члены

Первые члены ряда (5.9), отвечающие  $n = 0, 1, 2$ , имеют простой механический смысл. Выяснить это проще, опираясь на (5.10) и возвращаясь там к элементу массы

$$Y_n(\tilde{Q}) = \frac{1}{MR^n} \int_T r'^n P_n(\cos H) dm'. \quad (6.1)$$

Выражения для первых многочленов Лежандра получены в задаче 5.1.

Пусть  $n = 0$ :

$$Y_0 = \frac{1}{M} \int_T dm' = \frac{M}{M} = 1, \quad (6.2)$$



так что  $A_{00} \equiv 1$ . Отсюда следует, в частности, что на большом удалении любое тело притягивает как материальная точка той же массы, помещенная в любой точке пространства (начало координат произвольно):

$$V = \frac{GM}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (6.3)$$

Пусть  $n = 1$ :

$$Y_1 = \frac{1}{MR} \int_T r' \cos H dm' = \frac{\mathbf{r}}{MRr} \int_T \mathbf{r}' dm',$$

поскольку  $r' \cos H = r^{-1} \mathbf{r} \mathbf{r}'$ , а не зависящий от  $Q'$  множитель можно вынести за знак интеграла. Последний равен массе, умноженной на радиус-вектор центра масс  $\mathbf{r}_c$  тела  $T$ :

$$Y_1 = \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}_c}{Rr}, \quad (6.4)$$

что равносильно (см. задачу 5.19)

$$A_{10} = \frac{z_c}{R}, \quad A_{11} = \frac{x_c}{R}, \quad B_{11} = \frac{y_c}{R}. \quad (6.5)$$

В астрономии за редкими исключениями начало координат совмещают с центром масс тела  $T$ . В этом случае

$$Y_1 = 0, \quad V = \frac{GM}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (6.6)$$

Пусть  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{2MR^2} \int_T r'^2 (3 \cos^2 H - 1) dm' \\ &= \frac{3}{2MR^2 r^2} \int_T (\mathbf{r} \mathbf{r}')^2 dm' - \frac{1}{2MR^2} \int_T r'^2 dm', \end{aligned}$$

что легко выразить через три момента инерции относительно координатных плоскостей

$$\tilde{A}_1 = \int_T x'^2 dm', \quad \tilde{A}_2 = \int_T y'^2 dm', \quad \tilde{A}_3 = \int_T z'^2 dm'$$

и три центробежных момента инерции

$$A_4 = \int_T y' z' dm', \quad A_5 = \int_T z' x' dm', \quad A_6 = \int_T x' y' dm'.$$

В механике предпочитают моменты относительно координатных осей

$$A_1 = \int_T (y'^2 + z'^2) dm', \quad A_2 = \int_T (z'^2 + x'^2) dm', \quad A_3 = \int_T (x'^2 + y'^2) dm',$$

однозначно связанных с моментами относительно плоскостей

$$2\tilde{A}_1 = A_2 + A_3 - A_1, \quad 2\tilde{A}_2 = A_3 + A_1 - A_2, \quad 2\tilde{A}_3 = A_1 + A_2 - A_3.$$

Окончательно,

$$Y_2 = \frac{(A_2 + A_3 - 2A_1)x^2 + (A_3 + A_1 - 2A_2)y^2 + (A_1 + A_2 - 2A_3)z^2}{2MR^2r^2} + \frac{3}{MR^2r^2}(A_4yz + A_5zx + A_6xy). \quad (6.7)$$

Переходя в (6.7) к полярным координатам и используя задачу 5.19, находим коэффициенты Стокса второго порядка

$$A_{20} = \frac{A_1 + A_2 - 2A_3}{2MR^2}, \quad A_{21} = \frac{A_5}{MR^2}, \quad B_{21} = \frac{A_4}{MR^2}, \quad (6.7^*)$$

$$A_{22} = \frac{A_2 - A_1}{4MR^2}, \quad B_{22} = \frac{A_6}{2MR^2}.$$

Заметим, что пять гармонических коэффициентов второго порядка при заданном масштабном множителе  $R$  однозначно определяются массой и шестью моментами инерции. Знание пяти коэффициентов  $A_{2k}, B_{2k}$  накладывает пять ограничений на моменты инерции, а именно, центробежные моменты однозначно связаны с  $A_{21}, B_{21}, B_{22}$ , тогда как любые два из осевых моментов выражаются через  $A_{20}, A_{22}$  и третий момент.

Трехпараметрический произвол с выбором начала отсчета позволил обратить в нуль все три коэффициента первой гармоники  $Y_1$ . Трехпараметрический произвол с выбором направлений осей позволяет обратить в нуль три из пяти коэффициентов  $Y_2$ , а именно

$$A_{21} = B_{21} = B_{22} = 0, \quad (6.8)$$

если за координатные приняты главные оси инерции тела  $T$ . Как известно, в главных осях все три центробежных момента инерции обращаются в нуль.

Если за ось  $z$  выбрать одну из главных осей инерции (обычно это ось вращения тела), то  $A_4 = A_5 = 0$ , поэтому два из пяти коэффициентов Стокса второго порядка обращаются в нуль:

$$A_{21} = B_{21} = 0. \quad (6.9)$$

Если эллипсоид инерции  $T$  есть эллипсоид вращения, то, выбрав главные оси в качестве координатных, при надлежащей нумерации получим  $A_1 = A_2$ , так что ненулевым остается лишь один коэффициент  $A_{20}$ .

Наконец, если эллипсоид инерции — сфера, то при любой ориентации осей  $x, y, z$  вторая гармоника тождественно обращается в нуль. Заметим, что тело при этом может сильно отличаться от шара. Например, любой однородный правильный многогранник обладает сферическим эллипсоидом инерции (*Арнольд, 1974*, гл. 6).

На практике за начало координат почти всегда выбирают центр масс. Направления же осей выбирают из условия (6.8) лишь тогда, когда эллипсоид инерции имеет выраженную трехосность. В противном случае главные направления определяются из наблюдений с большими погрешностями. Если за оси координат выбирать главные центральные оси инерции, это повлекло бы постоянную ревизию их направлений. Выигрыш же от (6.8) не столь велик, поскольку два коэффициента  $A_{20}, A_{22}$  остаются вне нашей власти.

### 6.3 Симметрия

Любая симметрия тела относительно подгруппы группы вращений  $\mathbb{R}^3$  с отражениями влечет такую же симметрию потенциала (2.2), который мы запишем в виде

$$V(\mathbf{r}) = G \int_T \frac{\varrho(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.10)$$

В самом деле, вычислим  $V(g\mathbf{r})$ , где  $g$  — элемент указанной подгруппы (например, поворот вокруг некоторой оси на определенный угол):

$$V(g\mathbf{r}) = G \int_T \frac{\varrho(\mathbf{r}') d\tau'}{|g\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Совершим замену переменных интегрирования  $\mathbf{r}' = g\mathbf{r}''$ . По ортогональности  $g$  элемент объема сохранится:  $d\tau' = d\tau''$ . По симметрии тела  $gT = T$ ,  $\varrho(g\mathbf{r}'') = \varrho(\mathbf{r}'')$ . Поэтому

$$V(g\mathbf{r}) = G \int_T \frac{\varrho(\mathbf{r}'') d\tau''}{|g\mathbf{r} - g\mathbf{r}''|}.$$

Преобразование  $g$  сохраняет расстояния:  $|g\mathbf{r} - g\mathbf{r}''| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|$ , и мы получаем требуемое:

$$V(g\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}).$$

Всякая же симметрия потенциала влечет ограничение на постоянные Стокса. Покажем это на примере важнейших симметрий. Центр масс считаем совпадающим с началом координат.

### 1. Зеркальная симметрия север–юг.

Пусть северное и южное полушария зеркально симметричны. В сферических координатах это означает

$$\varrho(r', \pi - \theta', \lambda') = \varrho(r', \theta', \lambda'). \quad (6.11)$$

По доказанному такой же симметрией обладает и потенциал

$$V(r, \pi - \theta, \lambda) = V(r, \theta, \lambda). \quad (6.12)$$

В ряде (5.76) отличными от нуля могут быть лишь слагаемые, сохраняющие эту симметрию, т.е. согласно задаче 5.21 слагаемые, для которых разность  $n - k$  четна.

Итак, отличными от нуля могут быть лишь коэффициенты  $A_{nk}, B_{nk}$  с четным  $n - k$ . При нечетном  $n - k$  имеем

$$A_{nk} = B_{nk} = 0.$$

### 2. Зеркальная симметрия восток–запад.

Пусть зеркально симметричны восточное и западное полушария:

$$\varrho(r', \theta', -\lambda') = \varrho(r', \theta', \lambda'), \quad V(r, \theta, -\lambda) = V(r, \theta, \lambda). \quad (6.13)$$

Очевидно, все  $B_{nk} = 0$ .

**3. Зеркальная симметрия относительно плоскости меридиана  $\lambda = 90^\circ$ .**

Пусть

$$\varrho(r', \theta', \pi - \lambda') = \varrho(r', \theta', \lambda'), \quad V(r, \theta, \pi - \lambda) = V(r, \theta, \lambda). \quad (6.14)$$

Отличными от нуля могут быть лишь  $A_{nk}$  при четном  $k$ , и  $B_{nk}$  при нечетном  $k$ .

**4. Зеркальная симметрия относительно трех координатных плоскостей.**

Такая симметрия равносильна совокупности предыдущих симметрий. Поэтому все  $B_{nk} = 0$ , а  $A_{nk}$  могут быть отличными от нуля только при четности  $n$ , и  $k$ .

**5. Поворотная симметрия север–юг и восток–запад.**

Пусть тело  $T$  переходит в себя при повороте на угол  $\pi$  вокруг оси  $x$ , оси начала долгот:

$$\varrho(r', \pi - \theta', -\lambda') = \varrho(r', \theta', \lambda'), \quad V(r, \pi - \theta, -\lambda) = V(r, \theta, \lambda). \quad (6.15)$$

При таком повороте меняются местами северное и южное, а также восточное и западное полушария.

Переход в ряде (5.76) от  $r, \theta, \lambda$  к  $r, \pi - \theta, -\lambda$  добавляет к  $A_{nk}$  множитель  $(-1)^{n-k}$ , а к  $B_{nk}$  — множитель  $(-1)^{n-k+1}$ .

Отличными от нуля могут быть лишь  $A_{nk}$  при четном  $n - k$ , и  $B_{nk}$  при нечетном  $n - k$ .

**6. Поворотная симметрия север–юг.**

Пусть тело  $T$  переходит в себя при повороте на угол  $\pi$  вокруг оси  $y$ :

$$\varrho(r', \pi - \theta', \pi - \lambda') = \varrho(r', \theta', \lambda'), \quad V(r, \pi - \theta, \pi - \lambda) = V(r, \theta, \lambda). \quad (6.16)$$

Отличными от нуля могут быть лишь  $A_{nk}$  при четном  $n$ , и  $B_{nk}$  при нечетном  $n$ .

**7. Симметрия поворота вокруг оси  $z$  на дискретные углы.**

Пусть для некоторого натурального  $l$  тело  $T$  переходит в себя после поворота на угол  $\alpha = 2\pi/l$  вокруг оси  $z$ :

$$\varrho(r', \theta', \lambda' + \alpha) = \varrho(r', \theta', \lambda'), \quad V(r, \theta, \lambda + \alpha) = V(r, \theta, \lambda). \quad (6.17)$$

В ряде (5.76) остаются лишь слагаемые, для которых  $k\alpha$  кратно  $2\pi$ . Иными словами, отличны от нуля могут быть лишь те  $A_{nk}, B_{nk}$ , для которых  $k$  делится на  $l$ .

### 8. Осевая симметрия.

Пусть тело  $T$  переходит в себя после поворота на любой угол вокруг оси  $z$ , иначе говоря, плотность и потенциал не зависят от  $\lambda$ :

$$\varrho = \varrho(r', \theta'), \quad V = V(r, \theta). \quad (6.18)$$

Отличны от нуля могут быть лишь  $A_{n0}$ , остальные  $A_{nk}, B_{nk}$  при  $k \geq 1$  обращаются в нуль.

Если к осевой добавить симметрию северного и южного полушарий (зеркальная и поворотная симметрия для тела вращения совпадают), останутся лишь коэффициенты  $A_{n0}$  с четным  $n$ .

С увеличением  $l$  случай 7 все более приближается к случаю 8 в следующих двух смыслах.

При  $N > l$  для  $n \leq N$  примерно  $(N+1)^2/l$  коэффициентов из их общего количества  $(N+1)^2$  могут быть отличны от нуля в случае 7. В случае 8 ненулевыми могут быть  $(N+1)^2/(N+1) = N+1$  коэффициентов.

При  $n < l$  ненулевыми остаются лишь коэффициенты при зональных гармониках.

### 9. Сферическая симметрия.

Пусть  $T$  — шар:

$$\varrho = \varrho(r'), \quad V = V(r). \quad (6.19)$$

Все коэффициенты Стокса обращаются в нуль за исключением  $A_{00} = 1$ . Внешний потенциал шара

$$V(r) = \frac{GM}{r}$$

совпадает с потенциалом точки той же массы, помещенной в его центре. Эту знаменитую теорему И.Ньютон доказывал больше года. Теория сферических функций делает ее очевидной.

## 6.4 Примеры точного определения гармонических коэффициентов для тел вращения

Потенциал тел вращения содержит лишь зональные гармоники. Международный Астрономический Союз рекомендует обозначать  $A_{n0} = -J_n$ . Ряд (5.76) принимает форму

$$V(Q) = -\frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta), \quad r > R^+, \quad (6.20)$$

причем  $J_0 = -1$ , а если начало совмещено с центром масс, то  $J_1 = 0$ .

Для простых тел разработан прием вычисления  $J_n$ , часто ведущий к цели. Рассмотрим точку  $Q_0$  на положительной части оси  $z$  вне объемлющей сферы: в сферических координатах  $Q_0 = (0, 0, r)$ ,  $r > R^+$ . Полагая в (6.20)  $P_n(\cos 0) = P_n(1) = 1$ , получаем

$$V(Q_0) = -\frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}. \quad (6.21)$$

По теореме единственности ряда Маклорена по степеням  $R/r$  коэффициенты  $J_n$  однозначно определяются функцией

$$V_0(r) \stackrel{\text{def}}{=} V(Q_0).$$

Поэтому достаточно найти потенциал лишь на оси  $z$  при  $z = r > R^+$ , разложить его в ряд (6.21) и получить  $J_n$ . Иными словами, функция  $V_0(r)$  будет производящей для  $J_n$ .

### 1. Точка.

Пусть точка  $Q_1$  массой  $M$  имеет прямоугольные координаты  $(0, 0, c)$ . Ее потенциал на оси  $z$ ,  $z = r > |c|$  равен

$$V(Q_0) = \frac{GM}{r-c} = \frac{GM}{r(1-c/r)} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{R^n} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}, \quad (6.22)$$

откуда

$$J_n = -\left(\frac{c}{R}\right)^n.$$

Радиус объемлющей сферы равен  $c$ . Ниже мы, как правило, не будем вводить лишних параметров, считая  $R$  радиусом объемлющей сферы.

## 2. Окружность.

Однородная окружность массой  $M$  с радиусом  $R$  и центром в точке  $O$  лежит в плоскости  $x, y$ . Ее потенциал при  $z = r > 0$  вычислен в задаче 2.17:

$$V(Q_0) = \frac{GM}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{GM}{r} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k},$$

откуда

$$J_{2n+1} = 0, \quad J_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

## 3. Диск.

Однородный диск массой  $M$  с радиусом  $R$  и центром в точке  $O$  лежит в плоскости  $x, y$ . Его потенциал при  $z = r > 0$  вычислен в задаче 2.19:

$$V(Q_0) = \frac{2GM}{R^2} \left( \sqrt{R^2 + r^2} - r \right).$$

По-прежнему имеем дело с биномиальным рядом, так что

$$V(Q_0) = \frac{2GM}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k},$$

откуда

$$J_{2n+1} = 0, \quad J_{2n} = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}.$$

## 4. Полушар.

Однородное северное полушарие массой  $M$  и радиусом  $R$  опирается на вышеописанный диск. Его потенциал при  $z = r > 0$  вычислен в задаче 2.21:

$$V(Q_0) = \frac{GM}{R^3} \left[ \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{R}{r}\right)^3 - 3\frac{R}{r} + \frac{3R^2}{2r^2} \right].$$

Опять достаточно биномиального ряда

$$V(Q_0) = \frac{GM}{R^3} \left[ \left(\frac{R}{r}\right)^3 + 3 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-5)!!}{(2k)!!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} \right],$$



так что

$$J_0 = -1, \quad J_{2n} = 0 \quad (n \geq 1), \quad J_{2n+1} = 3(-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+4)!!}. \quad (6.23)$$

**5. Однородное тело вращения, задаваемое в сферических координатах неравенствами**

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \beta_1 \leq \theta \leq \beta_2$$

при  $0 \leq r_1 < r_2$ ,  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \pi$ .

Потенциал тела на оси  $z$  выражен в элементарных функциях в задаче 2.25. Но для наших целей предпочтительнее полученное там же промежуточное интегральное представление, которое можно записать в виде

$$V(Q_0) = 2\pi G \varrho \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_{r_1}^{r_2} V_k(\xi) d\xi, \quad (6.24)$$

где

$$V_k(\xi) = \frac{\xi(1 - 2\xi x_k/r + \xi^2/r^2)}{\sqrt{1 - 2\xi x_k/r + \xi^2/r^2}}, \quad x_k = \cos \beta_k.$$

Как видим, для представления  $V_k$  рядом по степеням  $1/r$  достаточно воспользоваться стандартным разложением (5.3):

$$V_k = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{V_{kn}(\xi)}{r^{n+1}}, \quad (6.25)$$

где

$$V_{kn} = \xi^{n+2} [P_{n+1}(x_k) - 2x_k P_n(x_k) + P_{n-1}(x_k)]$$

и принято  $P_{-1} = P_{-2} = 0$ . Величина  $V_{k,-1} = \xi$  не зависит от  $k$  и пропадает при суммировании согласно формуле (6.24). Считаем в разложении (6.25)  $n \geq 0$ . С помощью равенства (5.12) получаем

$$V_{kn} = \frac{\xi^{n+2}}{n+1} [-x_k P_n(x_k) + P_{n-1}(x_k)],$$

откуда

$$\int_{r_1}^{r_2} V_{kn}(\xi) d\xi = \frac{r_2^{n+3} - r_1^{n+3}}{(n+1)(n+3)} [-x_k P_n(x_k) + P_{n-1}(x_k)],$$

$$V(Q_0) = 2\pi G \varrho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^{n+3} - r_1^{n+3}}{(n+1)(n+3)r^{n+1}} \sum_{k=1}^2 (-1)^k [-x_k P_n(x_k) + P_{n-1}(x_k)].$$

Выражая плотность через массу (см. задачу 2.24), окончательно имеем

$$J_n = \frac{3(R^{n+3} - r_1^{n+3})}{(n+1)(n+3)R^n(R^3 - r_1^3)(x_1 - x_2)} \sum_{k=1}^2 (-1)^k [x_k P_n(x_k) - P_{n-1}(x_k)], \quad (6.26)$$

где учтено  $r_2 = R$ .

Для тел с пустотами вокруг начала отсчета согласно выражению (5.6) потенциал внутри пустой сферы представляется рядом

$$V(Q) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad r < R^-. \quad (6.27)$$

Как и выше, для точки  $Q_0$  на положительной части оси  $z$  внутри пустой сферы

$$V(Q_0) = V_0(r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{r}{R}\right)^n. \quad (6.28)$$

Функция  $V_0$  — производящая для коэффициентов  $I_n$ .

Для потенциала точки  $Q_1(0, 0, R)$  массой  $M$  вместо соотношений (6.22) имеем

$$V(Q_0) = \frac{GM}{R-r} = \frac{GM}{R(1-r/R)} = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

откуда

$$I_n = 1.$$

## 6.5 Оценки гармоник

Мы уже выяснили, что ряд Лапласа (5.9) сходится вне объемлющей сферы приблизительно со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $R^+/r$ . Получим более полную картину при естественных предположениях о строении тела  $T$ . Ниже примем  $R = R^+$ .

Не следует оценивать каждое слагаемое сферической функции, ведь мы работаем со всей их совокупностью — она конечна. Обратимся к оценке  $Y_n(\tilde{Q})$ . Поскольку  $Y_n(\tilde{Q})$  не зависит от направлений координатных осей, проведем ось  $z$  через точку  $\tilde{Q}$ . Формула (5.10) примет вид

$$Y_n(\tilde{Q}) = \frac{1}{MR^n} \int_T r^{n+2} \sin \theta P_n(\cos \theta) \varrho(Q) dr d\theta d\lambda, \quad (6.29)$$

или, что то же,

$$Y_n(\tilde{Q}) = \frac{1}{MR^n} \int_T r^n P_n(\cos \theta) dm. \quad (6.30)$$

Справа мы опустили штрихи у всех переменных, теперь это не приведет к путанице. Заменяя в выражении (6.30)  $r$  на  $R$ ,  $P_n$  на 1 (см.(5.58)), получим простейшую оценку

$$|Y_n(\tilde{Q})| \leq 1, \quad (6.31)$$

пригодную для любых тел.

Для получения более точных оценок надо наложить некоторые условия на плотность.

1. Пусть плотность  $\varrho$  ограничена:

$$\varrho \leq \varrho_0. \quad (6.32)$$

Заменяем справа в формуле (6.29)  $P_n$  на  $|P_n|$ ,  $\varrho$  на  $\varrho_0$  и распространим интегрирование на шар  $T_R$  радиусом  $R$ :

$$|Y_n(\tilde{Q})| \leq \frac{\varrho_0}{MR^n} \int_{T_R} r^{n+2} \sin \theta |P_n(\cos \theta)| dr d\theta d\lambda.$$

Переменные расщепились, и тройной интеграл распался на три:

$$\int_0^R r^{n+2} dr = \frac{R^{n+3}}{n+3}, \quad \int_0^{2\pi} d\lambda = 2\pi,$$

$$\int_0^\pi \sin \theta |P_n(\cos \theta)| d\theta = \int_{-1}^1 |P_n(x)| dx < \frac{2}{\sqrt{2n+1}},$$

где в конце использована задача 5.23.

Окончательно

$$|Y_n(\tilde{Q})| \leq \frac{3}{(n+3)\sqrt{2n+1}} \frac{M_0}{M}, \quad (6.33)$$

где  $M_0$  — масса шара с радиусом  $R$  и плотностью  $\varrho_0$ .

2. Пусть плотность ограничена и вдоль каждого “меридиана”  $r = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$  имеет производную по  $\theta$ , равномерно ограниченную на  $[0, \pi]$  и непрерывную за возможным исключением конечного множества точек, число которых также равномерно ограничено. Точками разрыва будут, например, точки входа и выхода “меридиана” через поверхность тела и поверхности разрыва плотности.

Интеграл (6.29) распространим на шар  $T_R$ , полагая  $\varrho = 0$  вне  $T$ . Внутреннее интегрирование выполним по  $\theta$  и пока не будем переходить к модулю:

$$\int_0^\pi \varrho \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta = - \int_0^\pi \varrho dP_n^*(\cos \theta). \quad (6.34)$$

Здесь и ниже

$$P_n^*(x) = \int_{-1}^x P_n(x') dx', \quad \varrho' = \frac{\partial \varrho}{\partial \theta}.$$

Обозначим через  $I$  интеграл (6.34) по дуге между двумя последовательными точками  $\theta_1, \theta_2$  разрыва  $\varrho'$ :

$$I = -\varrho P_n^*(\cos \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} P_n^*(\cos \theta) \varrho' d\theta.$$

Ограниченность  $\varrho, \varrho'$  вместе с неравенством (5.61) влечет

$$|I| < C_1 n^{-\frac{3}{2}}, \quad C_1 = \text{const}.$$

В силу конечности числа точек разрыва

$$\left| \int_0^\pi \varrho \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta \right| < C_2 n^{-\frac{3}{2}}, \quad C_2 = \text{const}.$$

Тривиальное интегрирование по  $\lambda$  и  $r$  приводит к окончательному результату

$$|Y_n(\tilde{Q})| < \frac{C}{n^{5/2}}. \quad (6.35)$$

Можно выписать явное выражение для постоянной  $C$  (Антонов и др., 1988), но мы не будем делать этого ввиду его малой конструктивности.

Требую большей гладкости  $\varrho$ , получаем (Антонов и др., 1988)

$$|Y_n(\tilde{Q})| < \frac{C}{n^\sigma}, \quad (6.36)$$

причем  $\sigma$  тем больше, чем выше степень гладкости  $\varrho$ . Наконец, аналитичность  $\varrho$  ведет к оценке принципиально лучшего вида (Антонов и др., 1988):

$$|Y_n(\tilde{Q})| < \frac{C}{n^{3/2}} p^n, \quad 0 \leq p < 1. \quad (6.37)$$

Заметим, что допускаются даже разрывы плотности при пересечении аналитических поверхностей.

Примеры из книги (Антонов и др., 1988) показывают, что оценки (6.35), (6.37) достигаются. Только они и нужны для практики, так как реальные небесные тела делятся на два класса. К первому относятся имеющие твердую поверхность (планеты земной группы, спутники, астероиды, ядра комет). Их внешние поверхности и поверхности разрыва плотности имеют изломы. Поэтому для них оценка (6.35) точна: показатель  $\sigma$  в (6.36) можно взять равным  $5/2$ , но не больше. Ко второй группе относятся газожидкие тела (планеты-гиганты, звезды). Для них справедлива оценка (6.37). Как показывает пример эллипсоида, для таких тел  $p$  тем меньше, чем меньше сжатие. В сферическом пределе имеем  $p = 0$ .

Итак, для всех негладких тел ряд Лапласа (5.9) сходится при  $r \geq R$ , т. е. вне и на объемлющей сфере

$$r = R \quad (6.38)$$

и расходится внутри нее при  $r < R$ .

Для тел аналитической структуры границей области сходимости служит сфера

$$r = pR \quad (6.39)$$

при некотором  $p < 1$ . Классический пример функции  $e^{-1/x^2}$ , имеющей всюду сходящийся ряд Маклорена из одних нулей, показывает, что ряд может сходиться “не туда”, к совсем другой функции. Куда же сходится наш ряд между сферами (6.38), (6.39)? Ответ зависит от взаимного расположения тела  $T$  и точки  $Q$ , в которой определяется потенциал.

**1. Точка под объемлющей сферой внутри тела.**

Внутренний потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона (3.4), тогда как внешний — уравнению Лапласа (3.3). Поэтому ряд (5.9) сходится не к потенциалу, а к его аналитическому продолжению извне внутри. Это две разные функции (рис. 6).

**2. Точка под объемлющей сферой вне тела.**

Если в точку  $Q$  под объемлющей сферой вне  $T$  можно проникнуть извне вдоль пути, лежащего в некоторой пустой области, то по принципу аналитического продолжения ряд (5.9) представляет там именно потенциал  $V$ . Напомним, что функция  $V$  аналитична во всем внешнем пространстве.

Таким образом, для тел, топологически эквивалентных шарам, полноториям, внутренностям сфер с несколькими ручками, сходимость ряда Лапласа (5.9) в любой точке вне  $T$  влечет его сходимость именно к  $V$  (см. рис. 6).

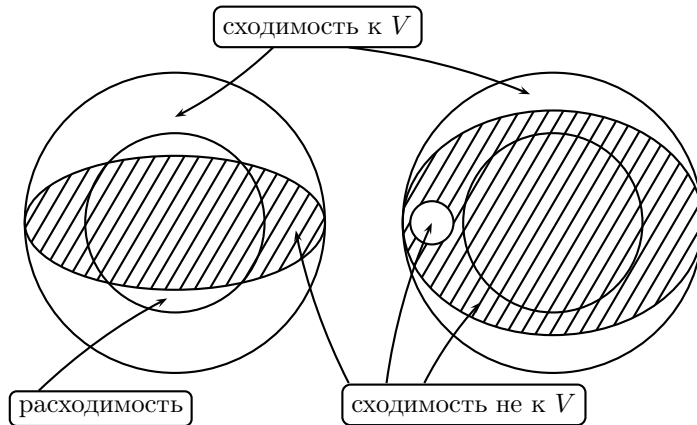


Рис. 6. Поведение ряда (5.9) тела аналитической структуры. Тело  $T$  (заштриховано) и две сферы  $r = R, r = pR, 0 < p < 1$ .

Невозможно проникнуть указанным путем только в полость, если таковая имеется в теле (рис. 6). Внешний потенциал в содержащей далекие точки внешней области и полости описывается разными аналитическими функциями, не продолжающимися одна в другую. Хорошая иллюстрация этого дается задачей 2.14.

## 6.6 Градиент шаровой функции

### Теорема 5

*Градиент шаровой функции второго рода порядка  $n$  является шаровой функцией второго рода порядка  $n + 1$ .*

В силу перестановочности операторов Лапласа и дифференцирования по декартовым координатам (задача 3.7) градиент шаровой функции гармоничен. Представим произвольную шаровую функцию второго рода порядка  $n$  в виде

$$V(x, y, z) = \frac{f(x, y, z)}{r^{2n+1}},$$

где  $f$  — однородный многочлен степени  $n$ . Вычислим производную

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{g(x, y, z)}{r^{2n+3}}, \quad (6.40)$$

где

$$g(x, y, z) = r^2 \frac{\partial f}{\partial x} - (2n + 1)xf(x, y, z). \quad (6.41)$$

Очевидно, что  $g$  — однородный многочлен степени  $n + 1$ . Представление гармонической функции  $\partial V/\partial x$  в виде (6.40), (6.41) доказывает теорему.

Для получения явного выражения достаточно найти градиент базовых шаровых функций

$$U_{nk} = \frac{1}{r^{n+1}} P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda, \quad W_{nk} = \frac{1}{r^{n+1}} P_n^k(\cos \theta) \sin k\lambda. \quad (6.42)$$

Производные по  $r, \lambda$  элементарны. Дифференцируя тождество (5.40), находим производную по  $\theta$ :

$$\frac{d}{d\theta} P_n^k(\cos \theta) = k \operatorname{ctg} \theta P_n^k(\cos \theta) - P_n^{k+1}(\cos \theta).$$

Заменим в выражениях (6.42)  $n$  на  $n - 1$  и продифференцируем функцию  $U_{nk}$  по  $x$ , воспользовавшись вычисленной в задаче 3.19 матрицей Якоби  $\partial(r, \theta, \lambda)/\partial(x, y, z)$ . Получим

$$\sin \theta r^{n+1} \frac{\partial U_{n-1,k}}{\partial x} = E_1 P_{n-1}^k(\cos \theta) + E_2 P_{n-1}^{k+1}(\cos \theta), \quad (6.43)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= (k \cos^2 \theta - n \sin^2 \theta) \cos \lambda \cos k\lambda + k \sin \lambda \sin k\lambda, \\ E_2 &= -\cos \theta \sin \theta \cos \lambda \cos k\lambda. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований представим правую часть равенства (6.43) в виде

$$E_3 \cos(k-1)\lambda + E_4 \cos(k+1)\lambda,$$

где

$$\begin{aligned} 2E_3 &= (k \cos^2 \theta - n \sin^2 \theta + k) P_{n-1}^k - \cos \theta \sin \theta P_{n-1}^{k+1}, \\ 2E_4 &= (k \cos^2 \theta - n \sin^2 \theta - k) P_{n-1}^k - \cos \theta \sin \theta P_{n-1}^{k+1}. \end{aligned}$$

При  $k = 0$  согласно соотношению (5.43)

$$2E_3 = 2E_4 = -\sin \theta P_n^1.$$

При  $k \geq 1$  в формуле для  $E_3$  подставим вместо  $P_{n-1}^{k+1}$  правую часть равенства (5.45)

$$2E_3 = \sin \theta (n-k) [-\sin \theta P_{n-1}^k + (n+k-1) \cos \theta P_{n-1}^{k-1}],$$

что согласно рекуррентности (5.44) равно

$$(n-k)(n-k+1) \sin \theta P_n^{k-1}.$$

Аналогично

$$2E_4 = -\sin \theta P_n^{k+1}.$$

Мы получили первую из формул



$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{n-1,k}}{\partial x} &= -\frac{1+\delta_{0k}}{2}U_{n,k+1} + \mu_{nk}U_{n,k-1}, \\
\frac{\partial W_{n-1,k}}{\partial x} &= -\frac{1-\delta_{0k}}{2}W_{n,k+1} + \mu_{nk}W_{n,k-1}, \\
\frac{\partial U_{n-1,k}}{\partial y} &= -\frac{1+\delta_{0k}}{2}W_{n,k+1} - \mu_{nk}W_{n,k-1}, \\
\frac{\partial W_{n-1,k}}{\partial y} &= \frac{1-\delta_{0k}}{2}U_{n,k+1} + \mu_{nk}U_{n,k-1}, \\
\frac{\partial U_{n-1,k}}{\partial z} &= -(n-k)U_{nk}, \\
\frac{\partial W_{n-1,k}}{\partial z} &= -(n-k)W_{nk}, \tag{6.44}
\end{aligned}$$

где

$$\mu_{nk} = (1 - \delta_{0k}) \frac{(n-k+1)(n-k)}{2},$$

$\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $i \geq 0, j \geq 0$ . Остальные выводятся аналогично.

В практических целях желательно выразить стоксовы коэффициенты градиента через стоксовы коэффициенты самого потенциала. Запишем произвольный отрезок ряда Лапласа (5.76) в форме

$$V = GM \sum_{n=l}^N R^n \sum_{k=0}^n (A_{nk}U_{nk} + B_{nk}W_{nk}) \tag{6.45}$$

при  $0 \leq l \leq N \leq \infty$ . Тогда

$$\text{grad } V = GM \sum_{n=l+1}^{N+1} R^{n-1} \sum_{k=0}^n (\mathbf{A}_{nk}U_{nk} + \mathbf{B}_{nk}W_{nk}). \tag{6.46}$$

Сравнение выражений (6.44) и (6.45) дает компоненты  $A_{nk}^i, B_{nk}^i$  векторов  $\mathbf{A}_{nk}, \mathbf{B}_{nk}$  как линейные комбинации  $A_{n-1,s}, B_{n-1,s}$ ,  $n \geq 1$ ;  $s = k-1, k+1$  для  $i = 1, 2$ ;  $s = k$  для  $i = 3$ :

$$\begin{aligned}
A_{nk}^1 &= -\frac{1+\delta_{1k}}{2}(1-\delta_{0k})A_{n-1,k-1} + \nu_{nk}A_{n-1,k+1}, \\
B_{nk}^1 &= (1-\delta_{0k})\left[-\frac{1-\delta_{1k}}{2}B_{n-1,k-1} + \nu_{nk}B_{n-1,k+1}\right], \\
A_{nk}^2 &= \frac{1-\delta_{1k}}{2}(1-\delta_{0k})B_{n-1,k-1} + \nu_{nk}B_{n-1,k+1}, \\
B_{nk}^2 &= -(1-\delta_{0k})\left[\frac{1+\delta_{1k}}{2}A_{n-1,k-1} + \nu_{nk}A_{n-1,k+1}\right], \\
A_{nk}^3 &= -(n-k)A_{n-1,k}, \\
B_{nk}^3 &= -(1-\delta_{0k})(n-k)B_{n-1,k}.
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Здесь

$$\nu_{nk} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

*Замечание.* Обычно считают  $B_{n0}$  и  $A_{nk}, B_{nk}$ , а также соответствующие шаровые гармоники равными нулю вне пределов суммирования. В частности,

$$A_{n,-1} = B_{n,-1} = B_{n0} = A_{n,n+1} = B_{n,n+1} = A_{n,n+2} = B_{n,n+2} = 0. \tag{6.48}$$

Используя равенства (6.44), (6.47), мы можем не учитывать (6.48), так как все соответствующие коэффициенты обращаются в нуль.

Ради общности выведем представление градиента отрезка ряда Лапласа (5.6) в полости  $r < R^-$ :

$$V = GM \sum_{n=l}^N \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{k=0}^n \left( A_{nk} \tilde{U}_{nk} + B_{nk} \tilde{W}_{nk} \right), \tag{6.49}$$

где  $\tilde{U}_{nk}, \tilde{W}_{nk}$  — элементарные шаровые функции первого рода:

$$\tilde{U}_{nk} = r^n P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda, \quad \tilde{W}_{nk} = r^n P_n^k(\cos \theta) \sin k\lambda, \tag{6.50}$$

а коэффициенты Стокса определяются интегралами

$$\begin{pmatrix} A_{nk} \\ B_{nk} \end{pmatrix} = \frac{\alpha_{nk} R^{n+1}}{M} \int_T \frac{1}{r'^{n-1}} P_n^k(\cos \theta') \sin \theta' \begin{pmatrix} \cos k\lambda' \\ \sin k\lambda' \end{pmatrix} \varrho(Q') dr' d\theta' d\lambda'. \tag{6.51}$$

Градиент шаровой функции первого рода есть шаровая функция первого рода, но теперь ее порядок уменьшается на единицу:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{U}_{n+1,k}}{\partial x} &= -\frac{1+\delta_{0k}}{2} \tilde{U}_{n,k+1} + \tilde{\mu}_{nk} \tilde{U}_{n,k-1}, \\
\frac{\partial \tilde{W}_{n+1,k}}{\partial x} &= -\frac{1-\delta_{0k}}{2} \tilde{W}_{n,k+1} + \tilde{\mu}_{nk} \tilde{W}_{n,k-1}, \\
\frac{\partial \tilde{U}_{n+1,k}}{\partial y} &= -\frac{1+\delta_{0k}}{2} \tilde{W}_{n,k+1} - \tilde{\mu}_{nk} \tilde{W}_{n,k-1}, \\
\frac{\partial \tilde{W}_{n+1,k}}{\partial y} &= \frac{1-\delta_{0k}}{2} \tilde{U}_{n,k+1} + \tilde{\mu}_{nk} \tilde{U}_{n,k-1}, \\
\frac{\partial \tilde{U}_{n+1,k}}{\partial z} &= (n+k+1) \tilde{U}_{nk}, \\
\frac{\partial \tilde{W}_{n+1,k}}{\partial z} &= (n+k+1) \tilde{W}_{nk}.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Здесь

$$\tilde{\mu}_{nk} = (1 - \delta_{0k}) \frac{(n+k+1)(n+k)}{2}.$$

Вместо выражений (6.46), (6.47) имеем теперь

$$\text{grad } V = GM \sum_{n=l-1}^{N-1} \frac{1}{R^{n+2}} \sum_{k=0}^n \left( \mathbf{A}_{nk} \tilde{U}_{nk} + \mathbf{B}_{nk} \tilde{W}_{nk} \right), \tag{6.53}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{nk}^1 &= -\frac{1+\delta_{1k}}{2} (1-\delta_{0k}) A_{n+1,k-1} + \tilde{\nu}_{nk} A_{n+1,k+1}, \\
B_{nk}^1 &= (1-\delta_{0k}) \left[ -\frac{1-\delta_{1k}}{2} B_{n+1,k-1} + \tilde{\nu}_{nk} B_{n+1,k+1} \right], \\
A_{nk}^2 &= \frac{1-\delta_{1k}}{2} B_{n+1,k-1} + \tilde{\nu}_{nk} B_{n+1,k+1}, \\
B_{nk}^2 &= -(1-\delta_{0k}) \left[ \frac{1+\delta_{1k}}{2} A_{n+1,k-1} + \tilde{\nu}_{nk} A_{n+1,k+1} \right], \\
A_{nk}^3 &= (n+k+1) A_{n+1,k}, \\
B_{nk}^3 &= (1-\delta_{0k})(n+k+1) B_{n+1,k}
\end{aligned} \tag{6.54}$$

при

$$\tilde{\nu}_{nk} = \frac{(n+k+1)(n+k+2)}{2}.$$

Эквивалентные (6.44), (6.52) формулы выведены в статье (Cunningham, 1970). Формулы (6.47), (6.54) впервые опубликованы в статье (Холшевников, 2004).

## 6.7 Параметры Стокса реальных тел

Раньше всех и лучше всех было изучено гравитационное поле Земли. Приведем несколько первых коэффициентов Стокса из книги (Аксенов, 1977).

Коэффициенты Стокса для Земли

n	\k	0	1	2	3	4
0	$A_{0k}$	$10^6$				
1	$A_{1k}$	0	0			
	$B_{1k}$		0			
2	$A_{2k}$	-1082.628	0	2.4129		
	$B_{2k}$		0	-1.3641		
3	$A_{3k}$	2.538	1.9698	0.89204	0.68630	
	$B_{3k}$		0.2602	-0.63468	1.4304	
4	$A_{4k}$	1.593	-0.52989	0.33024	0.98943	-0.079692
	$B_{4k}$		-0.48765	0.70633	-0.15467	0.33928

В столбце для  $k = 0$  приводятся  $A_{n0} \cdot 10^6$ , в остальных столбцах —  $A_{nk} \cdot 10^6$  (сверху) и  $B_{nk} \cdot 10^6$  (снизу).

Все три коэффициента первого порядка  $A_{10}, A_{11}, B_{11}$  обращаются в нуль согласно равенству (6.6), поскольку начало отсчета совмещено с центром масс Земли. Коэффициент  $J_2 = -A_{20}$  положителен, что отвечает сжатию Земли у полюсов. Действительно, у сжатых тел момент инерции относительно оси вращения больше каждого из двух других главных моментов, поэтому согласно (6.7\*)  $J_2 > 0$ . У всех больших планет, Солнца и крупных спутников  $J_2 > 0$ , что и вызвало появление странного минуса в формуле (6.20). Коэффициенты  $A_{21}, B_{21}$  обращаются в нуль согласно (6.9), так как за ось  $z$  принята главная ось инерции.

Коэффициент  $J_2$  имеет порядок сжатия Земли и отвечает близости Земли к эллипсоиду вращения. Коэффициент  $J_4$  имеет порядок квадрата сжатия и качественно согласуется с коэффициентом для эллипсоида.

Остальные коэффициенты имеют порядок  $10^{-6}$  и вначале не обнаруживают тенденции к убыванию с ростом  $n$ , она появится лишь при  $n$  больше дюжины (Галазин и др., 1998), (Lemoine et al., 1998), (Biancale et al., 2000). Мы столкнулись с интересной ситуацией. Все коэффициенты, за исключением  $A_{00}$  и  $A_{20}$ , имеют порядок  $10^{-6}$  и меньше,  $A_{00} = 1$ ,  $|A_{20}| \sim 10^{-3}$ . Это означает, что Земля отклоняется от сферически симметричного тела (с точки зрения ее внешнего гравитационного поля — у шара все Стоксовы постоянные, кроме  $A_{00}$ , равны нулю) на величину  $\sim 10^{-3}$ , а от эллипсоида — на величину  $\sim 10^{-6}$ . Никакого другого простого тела (ограниченного, например, поверхностью четвертого порядка), чье поле отличалось бы от земного на величины хотя бы  $\sim 10^{-8}$ , не существует.

Удивление и даже недоверие вызвало в свое время большое значение  $|J_3|$  (большее каждого коэффициента Стокса, кроме  $J_2$  и  $|J_0|$ ). Оно свидетельствует о значительной асимметрии северного и южного полушарий Земли.

Похожие свойства постоянных Стокса у Луны (Potts, von Frese, 2003), Марса (Yuan et al., 2001), Венеры (Konopliv et al., 1999) и других подобных тел. Специфика Луны — меньшее полярное сжатие и большее экваториальное. Поэтому  $J_2$  там на порядок меньше, а  $J_{22}$  — больше. Большая нерегулярность строения Луны влечет более медленное убывание  $Y_n$  с ростом  $n$ .

Остановимся еще на одном важном вопросе. Ряд Лапласа *расходится* на поверхности Земли, тем не менее гравиметристы им успешно пользуются. Более того, сами коэффициенты Стокса определяются с привлечением не только спутниковых, но и гравиметрических данных. В чем причина столь странной благосклонности к нам природы? Этот вопрос подробно исследован в книге (Антонов и др., 1988). При незначительном погружении под объемлющую сферу (для Земли достаточно ограничиться глубиной  $R/300$ ) ряд Лапласа ведет себя как асимптотическое разложение. А именно представим  $V$  в виде

$$V(Q) = V_N(Q) + U_N(Q),$$

где  $V_N$  — отрезок ряда от  $n = 0$  до  $n = N$ , а  $U_N$  — поправочный член. Существует некоторое критическое  $N_0$  (вообще говоря, зависящее от глубины погружения), что  $\|U_N\|$  уменьшается с ростом  $N$ , пока  $N \leq N_0$ , а затем начинает расти (до сколь угодно больших значений при достаточно больших  $N > N_0$ ). Здесь  $\|\cdot\|$  —

подходящая норма, например, максимум модуля по всем  $\tilde{Q}$  при постоянном  $r$ . Для Земли  $N_0 \sim 300 \div 400$ , так что реальные модели гравитационного поля Земли (*Lemoine et al., 1998*), (*Biancale et al., 2000*) уже подходят к критическому  $N$ . Для менее регулярной Луны  $N_0 \sim 70 \div 100$ , для Фобоса  $N_0 \sim 5 \div 10$ .

## Задачи к главе 6

**Задача 6.1.** Найти коэффициенты Стокса потенциала отрезка задач 2.1 и 2.2 при  $b = -a = R$ .

*Ответ:* при нечетном  $n$  коэффициенты  $J_n$  равны нулю, а при четном  $n$

$$J_n = -\frac{1}{n+1}.$$

**Задача 6.2.** То же для кольца задачи 2.18 при  $b = R$ .

*Ответ:* коэффициенты Стокса с нечетными индексами равны нулю, а с четными определяются формулой

$$J_{2n} = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \left[ \frac{R^{2n+2} - a^{2n+2}}{(R^2 - a^2)R^{2n}} \right].$$

**Задача 6.3.** Доказать, что у трехосного эллипсоида в главных осях все  $B_{nk} = 0$ , а среди  $A_{nk}$  отличными от нуля могут быть лишь те, у которых оба индекса четны.

**Задача 6.4.** Доказать, что у эллипсоида вращения среди коэффициентов Стокса отличными от нуля могут быть лишь  $A_{n0}$  при четном  $n$ .

**Задача 6.5.** Показать, что для ряда Лапласа в области  $r < R^-$  симметрия тела  $T$  так же влияет на коэффициенты  $A_{nk}$ ,  $B_{nk}$ , как и для ряда в области  $r > R^+$ .

**Задача 6.6.** Найти коэффициенты Стокса потенциала вытянутого эллипсоида вращения задачи 2.23.

*Указание.* Положим  $\sqrt{c^2 - a^2} = c\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — эксцентриситет меридионального сечения эллипсоида. Потенциал эллипсоида примет форму

$$V_0 = \frac{3GM}{2} \left\{ \frac{r}{\varepsilon^2 c^2} + \frac{r^2 - c^2 \varepsilon^2}{2c^3 \varepsilon^3} \ln \frac{1 - c\varepsilon/r}{1 + c\varepsilon/r} \right\}.$$

*Ответ:* коэффициенты Стокса с нечетными индексами равны нулю, а с четными определяются формулой

$$J_{2n} = -3 \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Здесь учтено, что радиус объемлющей сферы  $R = c$ .

**Задача 6.7.** Найти коэффициенты Стокса потенциала сжатого эллипсоида вращения задачи 2.22.

*Указание.* Следует положить  $\sqrt{a^2 - c^2} = a\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — по-прежнему эксцентриситет меридионального сечения эллипсоида, и воспользоваться ответом задачи 2.22 с учетом того, что радиус объемлющей сферы  $R = a$ . Но есть и более простой путь. При  $c < a$  достаточно в формуле для потенциала задачи 6.6 сделать подстановку  $c \mapsto a$ ,  $\varepsilon \mapsto i\varepsilon$ , чтобы получить потенциал сжатого эллипсоида.

*Ответ:* коэффициенты Стокса с нечетными индексами равны нулю, а с четными определяются формулой

$$J_{2n} = 3(-1)^{n+1} \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}.$$

**Задача 6.8.** Показать, что коэффициенты Стокса (6.26) переходят в (6.23) при  $r_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = \pi/2$ .

**Задача 6.9.** Найти коэффициенты  $I_n$  разложения (6.27) потенциала однородной окружности задач 2.15 и 2.17 внутри пустой сферы.

*Ответ:*

$$I_{2n+1} = 0, \quad I_{2n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

**Задача 6.10.** То же для кольца задачи 2.18 при  $a = R$ .

*Ответ:*

$$I_{2n+1} = 0, \quad I_{2n} = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \left[ \frac{R(bR^{2n} - Rb^{2n})}{(b^2 - R^2)b^{2n}} \right].$$

**Задача 6.11.** Вывести формулы (6.44).

**Задача 6.12.** Вывести формулы (6.52).

**Задача 6.13.** Вывести формулы (6.47).

**Задача 6.14.** Вывести формулы (6.54).

## Глава 7

### Система точечных масс

В главе 4 мы описали представление гравитационного поля Земли полем точечных масс. Поскольку представление шаровыми функциями развито в мельчайших деталях, разумно принять его за точное и определять параметры системы точечных масс из условия совпадения всех шаровых функций обоих представлений с номерами от нуля до некоторого фиксированного значения. В общем случае такая теория еще не построена. Ограничимся разработанным случаем, когда аппроксимации подлежит лишь зональная часть потенциала.

Дан потенциал осесимметричного тела

$$V = -GM \sum_{n=0}^{\infty} J_n \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (7.1)$$

Требуется подобрать параметры системы  $k$  точечных масс  $Q_s$ , расположенных на оси  $z$ , чтобы потенциал системы

$$U = G \sum_{s=1}^k \frac{m_s}{r_s}, \quad (7.2)$$

будучи разложен в ряд шаровых функций при том же масштабном множителе  $R$

$$U = -G(m_1 + \dots + m_k) \sum_{n=0}^{\infty} I_n \frac{R^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad (7.3)$$



имел бы совпадающие первые коэффициенты

$$\begin{aligned}(m_1 + \dots + m_k)I_0 &= MJ_0, \\ (m_1 + \dots + m_k)I_1 &= MJ_1, \\ &\dots \\ (m_1 + \dots + m_k)I_N &= MJ_N.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Параметрами системы являются  $2k$  чисел  $c_s, m_s$  — координаты и массы  $Q_s$ . Равенство числа неизвестных и числа уравнений в (7.4) наступает при  $N = 2k - 1$ . Согласно равенству (6.22)

$$I_n = -\frac{1}{(m_1 + \dots + m_k)R^n} \sum_{s=1}^k m_s c_s^n.\tag{7.5}$$

Запишем явно уравнения (7.4):

$$\sum_{s=1}^k m_s c_s^n = -MR^n J_n, \quad n = 0, \dots, N.\tag{7.6}$$

Системами типа (7.6) занимается теория моментов. Мы решим (7.6) для важнейшего случая  $k = 2$ , определяющего задачу двух неподвижных центров. Полагая  $N = 3$ , приходим к системе

$$\begin{aligned}m_1 + m_2 &= M, & m_1 c_1 + m_2 c_2 &= 0, \\ m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 &= -MR^2 J_2, & m_1 c_1^3 + m_2 c_2^3 &= -MR^3 J_3.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Это система четырех алгебраических уравнений порядка от первого до четвертого по совокупности переменных. Тем не менее ее решение находится элементарно.

Из первых двух уравнений (7.7) выражаем массы через координаты:

$$m_1 = \frac{c_2}{c_2 - c_1} M, \quad m_2 = \frac{-c_1}{c_2 - c_1} M.\tag{7.8}$$

Считаем  $c_2 \neq c_1$ , иначе дело сводится к одному притягивающему центру, а для него задача уже решена:  $m_1 = M, c_1 = 0$ .

Подставляя (7.8) в оставшиеся уравнения (7.7), получаем

$$\frac{c_2 c_1^2 - c_1 c_2^2}{c_2 - c_1} = -R^2 J_2, \quad \frac{c_2 c_1^3 - c_1 c_2^3}{c_2 - c_1} = -R^3 J_3.$$

Оба числителя имеют множителем  $c_2 - c_1$ , и мы приходим к уравнениям

$$c_1 c_2 = R^2 J_2, \quad c_1 c_2 (c_1 + c_2) = R^3 J_3. \quad (7.9)$$

Подставляя значение  $c_1 c_2$  из первого уравнения во второе, находим

$$c_1 c_2 = R^2 J_2, \quad c_1 + c_2 = \frac{R J_3}{J_2}.$$

Числа  $c_1, c_2$  являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - (R J_3 / J_2) z + (R^2 J_2) = 0$$

и равны

$$c_{1,2} = \left[ \frac{J_3}{2J_2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2 - J_2} \right] R. \quad (7.10)$$

Для Земли и всех крупных тел Солнечной системы под корнем стоит отрицательное число. Это неудивительно: нельзя аппроксимировать сжатое тело вытянутым агрегатом — гантелью. Та же ситуация имеет место в случае спиральных и эллиптических галактик. Даже геометрически вытянутые тела (ядра комет, некоторые астероиды и спутники, иглообразные галактики), как правило, вращаются вокруг наименьшей оси (оси наибольшего момента инерции) и являются тем самым динамически сжатыми. В случае  $J_2 = 0, J_3 \neq 0$  уравнения (7.9) не имеют даже комплексного решения, но вряд ли подобная ситуация реализуется для каких-либо небесных тел, обладающих ощутимой гравитацией.

Вернемся к сжатым телам. Можно получить вещественное решение системы (7.7), отбрасывая четвертое уравнение и допуская отрицательные массы. Но предпочитают использовать комплексные числа. Обозначив

$$\alpha = \frac{J_3}{2J_2}, \quad \beta = \sqrt{J_2 - \alpha^2},$$

запишем параметры системы в виде

$$\begin{aligned} c_1 &= (\alpha - i\beta)R, & c_2 &= (\alpha + i\beta)R, \\ m_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - i\frac{\alpha}{\beta}\right) M, & m_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + i\frac{\alpha}{\beta}\right) M. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Подставив (7.11) в (7.2), получим окончательно

$$U = \frac{GM}{2} \left\{ \frac{1 - i\alpha/\beta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \alpha R + i\beta R)^2}} + \frac{1 + i\alpha/\beta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \alpha R - i\beta R)^2}} \right\}. \quad (7.12)$$

Функция  $U$  вещественна при вещественных  $x, y, z$ . В задаче 7.3 дано ее выражение через вещественные переменные.

Заметим, что в случае зеркальной симметрии север—юг  $J_3 = \alpha = 0$ , так что массы  $m_s$  становятся вещественными и равными друг другу, а координаты  $c_s$  — сопряженными чисто мнимыми.

## Задачи к главе 7

**Задача 7.1.** Положите  $\alpha = \sqrt{J_2} \cos \xi$ ,  $\beta = \sqrt{J_2} \sin \xi$  и найдите явные выражения коэффициентов Стокса потенциала (7.2) при  $k = 2$  и параметрах (7.11).

*Ответ:*

$$I_n = \frac{1}{\beta} J_2^{(n+1)/2} \sin(n-1)\xi = J_2^{n/2} \frac{\sin(n-1)\xi}{\sin \xi}.$$

**Задача 7.2.** То же для случая  $J_3 = 0$ .

*Ответ:*

$$I_{2n+1} = 0, \quad I_{2n} = (-1)^{n+1} J_2^n.$$

**Задача 7.3.** Избавиться в выражении (7.12) от комплексных переменных.

*Указание.* Воспользоваться формулой

$$\sqrt{A + iB} = \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2}} + i \operatorname{sign} B \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}},$$

справедливой при  $A > 0$ .

Ответ:

$$U = GM \frac{\sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} + A} - \delta \operatorname{sign} B \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} - A}}{\sqrt{2(A^2 + B^2)}},$$

где  $\delta = \alpha/\beta$ ,  $A = x^2 + y^2 + (z - \alpha R)^2 - \beta^2 R^2$ ,  $B = 2\beta R(z - \alpha R)$ .

**Задача 7.4.** Положим в равенствах (7.8)  $c_1 = c = R\sqrt{J_2}$ ,  $c_2 = c + \varepsilon$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим диполь: предельное положение двух сливающихся точек с возрастающими по модулю массами разных знаков. Найти предельное выражение потенциала диполя.

Ответ:

$$U = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}} \left[ 1 - \frac{c(z - c)}{x^2 + y^2 + (z - c)^2} \right].$$

**Задача 7.5.** Вычислить  $I_n$  для диполя задачи 7.4 переходом к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  в формуле (7.5).

Ответ:

$$I_n = \frac{(n-1)c^n}{R^n}.$$

**Задача 7.6.** То же, раскладывая  $U(0, 0, r)$  в ряд по степеням  $c/r$  при  $r > c$ .

**Задача 7.7.** Показать, что для потенциала диполя задачи 7.4 можно обеспечить  $I_k = J_k$  при  $k = 0, 1, 2$ .

**Задача 7.8.** Может ли тело с интегрируемой плотностью, расположенное внутри сферы  $r = c$ , обладать внешним потенциалом, совпадающим с потенциалом диполя задачи 7.4?

Ответ: нет.

**Задача 7.9.** Может ли тело с ограниченной интегрируемой плотностью, расположенное внутри сферы  $r = c$  при  $c = R\sqrt{J_2}$ , обладать потенциалом, совпадающим с потенциалом задач 7.2 и 7.1?

Ответ: нет.

## Литература

- Антонов и др., 1982.* — Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Сравнительные свойства различных представлений гравитационного поля Земли // Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики. Киев: Наукова думка. С. 93–106.
- Антонов и др., 1988.* — Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М: Наука.
- Аксенов, 1977.* — Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука.
- Аксенов, 1986.* — Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М.: Наука.
- Арнольд, 1974.* — Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука.
- Бейтмен, Эрдейи, 1973.* — Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3-х т. М.: Наука.
- Владимиров, 2003.* — Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М: Физматлит.
- Галазин и др., 1998.* — Галазин В.Ф., Каплан Б.Л., Лебедев М.Г., Максимов В.Г., Петров Н.В., Сидорова-Бирюкова Т.Л. Система геодезических параметров земли “Параметры Земли 1990 года” (ПЗ-90)/ Под ред. В.В.Хвостова. М.: Координационный научно-информационный центр.

- Гобсон, 1952.* — Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит.
- Годунов, Михайлова, 1998.* — Годунов С.К., Михайлова Т.Ю. Представления группы вращений и сферические функции. Новосибирск: Научная книга.
- Градштейн, Рыжик, 1971.* — Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука.
- Грэхем и др., 1998.* — Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир.
- Гюнтер, 1953.* — Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат.
- Дубошин, 1961.* — Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: Физматгиз.
- Дубошин, 1975.* — Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Ч. I. М.: Наука.
- Жуковский, 1949.* — Жуковский Н.Е. Теория притяжения // Собр. соч. Т. 5. М.: Гостехиздат.
- Кондратьев, 2003.* — Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований.
- Корн, 1984.* — Корн Т., Корн Г. Справочник по математике. М.: Наука.
- Ландкоф, 1966.* — Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука.
- Михлин, 2002.* — Михлин С.Г. Курс математической физики. СПб.: Лань.
- Никольский, 1983.* — Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2-х т. М.: Наука.
- Питъев, Титов, Холшевников, 2002.* — Питъев Н.П., Титов В.Б., Холшевников К.В. Фигуры равновесия небесных тел. СПб.: Изд-во СПбГУ.

- Питьева, 2005.* — Питьева Е.В. Релятивистские эффекты и сжатие Солнца из радарных наблюдений планет и космических аппаратов // Письма в Астрономический журнал. Т. 5. С. 378–387.
- Сеге, 1962.* — Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз.
- Смирнов, 1961.* — Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2. М.: Физматгиз.
- Сретенский, 1946.* — Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: Гостехиздат.
- Субботин, 1949.* — Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т. 3. М.; Л.: Гостехиздат.
- Тодхантер, 2002.* — Тодхантер И. История математических теорий притяжения и фигуры Земли от Ньютона до Лапласа. М.: УРСС.
- Уермер, 1980.* — Уермер Дж. Теория потенциала. М.: Мир.
- Фихтенгольц, 1997.* — Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2, 3. СПб.: Лань.
- Холшевников, 2004.* — Холшевников К.В. Простейшая форма представления градиента гравитационного потенциала небесных тел // Труды 33-й межд. студ. научн. конф. “Физика космоса”, 2-6 февр. 2004, Екатеринбург. Екатеринбург: Изд. УрГУ. С. 222–231.
- Biancale et al., 2000.* — Biancale R., Balmino G., Lemoine J.-M., Marty J.-C., Moynot B., Barlier F., Exertier P., Laurain O., Gegout P., Schwintzer P., Reigber Ch., Bode A., Gruber Th., König R., Massmann F.-H., Raimondo J.C., Schmidt R., Zhu S.Y. A New Global Earth’s Gravity Field Model from Satellite Orbit Perturbations: GRIM5-S1 // Geophysical Research Letters. Vol. 27. P. 3611–3614.
- Cunningham, 1970.* — Cunningham L.E. On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed during the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // Celest. Mech. Vol. 2. P. 207–216.

- Fukushima, 2000.* — Fukushima T. Report on Astronomical Constants. Towards models and constants for sub-microarcsecond astrometry // Proceedings of IAU Colloquium 180. Washington. P. 417–427.
- Fukushima, 2002.* — Fukushima T. Report on astronomical constants // Highlights of Astronomy. Vol. 12. San Francisco, CA: Astronomical Society of the Pacific. P. 107–112.
- Godier, Rozelot, 2000.* — Godier S., Rozelot J.P. The solar oblateness and its relationship with the structure of the tachocline and of the Sun's subsurface // Astron. Astrophys. Vol. 355. P. 365–374.
- Konopliv et al., 1999.* — Konopliv A.S., Banerdt W.B., Sjogren W.L. Venus Gravity: 180th Degree and Order Model // Icarus. Vol. 139. P. 3–18.
- Lemoine et al., 1998.* — Lemoine F.G. et al. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential Model Egm96 // NASA/TP-1998-206861. Nasa, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland 20771. July 1998.
- Mohr, Taylor, 1999.* — Mohr P.J., Taylor B.N. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998 // J. Phys. and Chem. Rev. Data. Vol. 28, No 6. P. 1713–1852.
- Pijpers, 1998.* — Pijpers F.P. Helioseismic determination of the solar gravitational quadrupole moment // MNRAS. Vol. 297. L76–L80.
- Poincaré, 1899.* — Poincaré H. Théorie du potentiel Newtonien. Paris: Georges Carré et C. Naud editeurs.
- Potts, von Frese, 2003.* — Potts L.V., von Frese R.R.B. Comprehensive mass modeling of the Moon from spectrally correlated free-air and terrain gravity data // J. Geophys. Res. (Planets). Vol. 108. P. 5–19.
- Yuan et al., 2001.* — Yuan D.-N., Sjogren W.L., Konopliv A.S., Kucinskis A.B. Gravity field of Mars: A 75th Degree and Order Model // J. Geophys. Res. Vol. 106. P. 23377–23402.



## Именной указатель

- Антонов В.А. 57  
Бельтрами Э. (Beltrami E.) 36  
Бернштейн С.Н. 57  
Буняковский В.Я. 70  
Вейерштрасс К. (Weierstrass C.) 16  
Дирак П.А.М. (Dirac P.A.M.) 56  
Дирихле П.Г. (Lejeune-Dirichlet P.G.) 30  
Кронекер Л. (Kronecker L.) 55, 89  
Липшиц Р. (Lipschitz R.) 30  
Ламе Г. (Lamé G.) 39, 40  
Лаплас П.С. (Laplace P.S.) 5  
Лежандр А.М. (Legendre A.M.) 5  
Ляпунов А.М. 16  
Маклорен К. (Maclaurin C.) 43, 45, 79, 86  
Ньютон И. (Newton I.) 5, 8, 12, 78  
Пуассон С.Д. (Poisson S.D.) 29  
Родриг Б.О. (Rodrigues B.O.) 49  
Стилтьес Т. (Stieltjes T.) 57  
Стокс Дж.Г. (Stokes G.G.) 64, 65  
Фурье Ж.Б.Ж. (Fourier J.B.J.) 55, 56, 69  
Холшевников К.В. 58  
Эйлер Л. (Euler L.) 16, 67  
Эйнштейн А. (Einstein A.) 5  
Якоби К. (Jacobi K.) 32, 34

## Предметный указатель

- Аналитическая функция 13,  
15, 16, 39, 85–87
- Гармоники сферические 7, 71  
зональные 7, 71, 72, 78, 79  
секториальные 72  
тессеральные 71, 72
- гармоническая функция 6, 29,  
32, 39, 43, 45, 46, 64
- гармонические коэффициенты 64, 65, 74,  
79
- гравитационная потенциаль-  
ная энергия 11, 20
- гравитационное поле Земли  
92–94, 97
- гравитационные силы 10
- гравитационный потенциал  
5–7, 10, 37  
бесконечное тело 17  
градиент 17, 22  
протяженное тело 14, 15  
точечные массы 38
- Задача Дирихле 30
- закон всемирного тяготения  
5, 8
- Коэффициенты Стокса 64, 65,  
74–76, 78, 89, 90, 93–  
95
- Матрица Якоби 32, 34, 88
- многочлены Лежандра 6, 43,  
44, 46, 53, 55, 57, 58,  
72
- дифференциальное урав-  
нение 49
- корни 51, 70
- коэффициенты 50, 58, 60,  
62
- ортогональность 50, 51
- производные 48, 57, 67,  
68
- производящая функция  
43, 46
- производящая функция  
для интегралов 68
- производящая функция  
для производных 48,  
68
- рекуррентность 46, 66
- теорема сложения 52, 57
- формула Родрига 49–51
- Объемлющая сфера 42
- оператор Бельтрами 35, 36,  
44, 49, 52, 53
- оператор Лапласа (лапла-  
сиан) 6, 29, 32, 33,  
35
- инвариантность 29, 31, 32
- линейность 31

Постоянная тяготения 8  
потенциал Земли 65, 92, 94  
потенциал однородных фигур  
    вытянутый эллипсоид  
        вращения 26  
диск 24, 80  
кольцо 24  
окружность 24, 80, 95  
отрезок 20, 21  
полусфер 25, 80  
прямоугольник 21, 22  
сжатый эллипсоид вращения 25  
цилиндр 25  
присоединенные функции Ле-  
    жандра 53, 70  
дифференциальное урав-  
    нение 52  
ортогональность 55  
рекуррентность 54, 67

пустая сфера 42

Ряд Лапласа 6, 37, 41, 42, 45,  
    63, 71, 82, 93, 94  
отрезок 89, 90, 93  
сходимость 63, 85, 86, 93

Силовая функция 11  
сферические функции 5–7,  
    39–41, 44–46, 49, 52,  
    54, 56, 64, 78  
ортогональность 55

Уравнение Лапласа 29, 39  
уравнение Пуассона 29

Шаровые функции 37, 44–46,  
    87, 97  
градиент 87, 91

Якобиан 33, 34

Учебное издание

*Константин Владиславович Холшевников,  
Николай Петрович Питъев, Владимир Борисович Титов*

## ПРИТЯЖЕНИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

*Учебное пособие*

Зав. редакцией Г. И. Чердиченко  
Обложка Е. А. Соловьевой

Подписано к печати с оригинал-макета 09.03.2005.  
Печать офсетная. Ф-т 60×84/16. Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 6,0.  
Тираж 250 экз. Заказ N .

Редакция оперативной подготовки учебно-методических  
и научных изданий СПбГУ.  
199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

ЦОП типографии Издательства СПбГУ.  
199061, Санкт-Петербург, Средний пр., 41.