А. ПУАНКАРЕ

# Лекции по НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

А. ПУАНКАРЕ

# ЛЕКЦИИ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

*Перевод с французского*
*Е. А. ГРЕБЕНИКОВА*

*Под редакцией*
*проф. Г. Н. ДУБОШИНА*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

531
П 88
УДК 521.1

# ОГЛАВЛЕНИЕ



## Том I

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПЛАНЕТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ



## Том II

## РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ. ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

# ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В течение первого десятилетия 20-го века в Париже были изданы «Лекции по небесной механике», читанные в Сорбонне знаменитым французским математиком А. Пуанкаре. Как можно видеть из предисловия автора к I тому сочинения, эта книга не дублирует ни ранее вышедшую обширную монографию А. Пуанкаре «Новые методы небесной механики», ни «Трактат по небесной механике» известного астронома Тиссерана, вышедший в конце 19-го века.

«Лекции по небесной механике» являются учебником, по которому можно начинать изучение этой части астрономии, не имея другой подготовки, кроме элементарных сведений из общей механики и высшей математики. Но этот учебник, принадлежащий перу гениального ученого, представляет собой сочинение, в котором с достаточной математической строгостью и предельной ясностью оригинально изложены идеи основных методов небесной механики.

Первый том книги Пуанкаре, вышедший в 1905 г. под названием «Общая теория планетных возмущений», разделен на 13 глав. Первая глава является вводной и посвящена рассмотрению метода Гамильтона — Якоби, на котором построено все последующее изложение. В главе II выводятся дифференциальные уравнения движения общей и ограниченной задач трех тел и их классические интегралы. Глава III посвящена оригинальному изложению теории невозмущенного кеплеровского движения с полным выводом всех необходимых формул. Главы IV, V и VI содержат обоснование и подробное изложение метода изменения произвольных постоянных Лагранжа с приложением к теории возмущенного движения планет солнечной системы.

В главе VII рассматривается применение метода Лагранжа к круговой ограниченной задаче трех тел.

Главы VIII и IX посвящены теории вековых возмущений. В главе X разбирается общий случай задачи трех тел, а в главе XI—теорема Пуассона о неизменяемости больших полуосей орбит во втором приближении. Наконец, две последние главы содержат изложение метода Делоне, с успехом применяемого в настоящее время к задачам о движении искусственных спутников Земли.

Таким образом, первый том содержит детальное изложение общих принципов применения метода последовательных приближений к интегрированию дифференциальных уравнений, определяющих возмущенные оскулирующие элементы орбит планет.

Второй том учебника Пуанкаре разделен на две части. Часть I «Разложение возмущающей функции» вышла в свет в 1907 г. и содержит рассмотрение всех необходимых вопросов, относящихся к этому важному разделу теории возмущений. Сюда входят и основы теории функций Бесселя и теория коэффициентов Лапласа и операторов Ньюкомба. Здесь автор уделяет много внимания вопросам сходимости разложений и трактует эти вопросы с полной математической строгостью.

Часть II второго тома вышла в 1909 г. под названием «Теория движения Луны», которую Пуанкаре разделяет на два отдела, относя к первому движение Луны под действием притяжений Земли и Солнца, а ко второму — изучение влияний притяжений планет и влияние сжатия Земли. Изложение построено на работах Хилла, Делоне и Брауна, и хотя здесь также не затрагиваются вопросы о сходимости рядов, но вся теория переработана и представлена в виде единого целого.

Третий том сочинения Пуанкаре, вышедший в 1910 г., содержит «Теорию приливов», которая теперь не входит в небесную механику и представляет собой изложение решения некоторых задач гидродинамики.

В настоящее, советское издание перевода книги Пуанкаре включены только два первых тома, которые объединены в один. Перевод сделан весьма тщательно и воспроизводит полностью труд знаменитого ученого почти без всяких изменений. Мы позволили себе только изменить в некоторых местах обозначения (например, обозначения для частных производных) и сделали несколько несущественных сокращений.

Советский читатель получит еще одну книгу по небесной механике, книгу, представляющую большую научную ценность и обладающую многими замечательными качествами.

Несомненно, что издание перевода труда А. Пуанкаре принесет большую пользу студентам, аспирантам и всем интересующимся небесной механикой, которая в наш век космической эры приобрела новое значение и стала необходимым звеном в длинной цепи наук, посвященных изучению, развитию и использованию методов освоения космического пространства.

*Проф. Г. Н. Дубошин*

## Том I

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПЛАНЕТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

# ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга не должна выполнять те же обязанности, что и другое мое сочинение «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» или сочинение Тиссерана «Traité de Mécanique céleste».

В «Новых методах» мы чаще всего исходили из геометрической точки зрения и исследовали аналитическую строгость; например, мы посвятили вопросу сходимости рядов большие усилия и многочисленные страницы; здесь, наоборот, мы оставили этот вопрос целиком в стороне, и читатель, который пожелает это изучить, должен обратиться к моему сочинению «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste».

С другой стороны, в «Новых методах» мы рассматривали приближения, намного более далекие, чем этого требует практика; мы могли, таким образом, подчеркнуть обстоятельства совсем непредвиденные, аналитическое значение которых весьма велико, но которые не представляют никакого интереса для астронома-практика и не приобретут его до того дня, когда точность наблюдений будет намного выше, чем сегодня, или когда пожелают сравнить наблюдения, рассматриваемые на протяжении веков.

Наоборот, мы рассматривали прежние результаты как известные, так что мы могли бы настаивать на связи между новыми методами и прежними результатами.

Поэтому «Новые методы» недоступны для начинающего и доступны только читателю, уже знакомому с небесной механикой.

Здесь, наоборот, мы ограничиваемся воспроизведением лекций, прочитанных нами студентам Сорбонны, и ставим проблемы сначала, предполагая только известными основы анализа и механики, а также законы Кеплера и Ньютона. Мы заимствуем у новых методов только существенные результаты, те, которые поддаются непосредственному применению, стараясь привязать их возможно больше к классическому методу вариации произвольных постоянных.

С другой стороны, Тиссеран постоянно занимался воспроизведением, так точно, как он мог, идей основателей небесной механики. Действительно, его книга дает нам все целиком в сжатой форме. Мы не делали заново то, что сделал он, и сделал хорошо.

Мы имеем на это право; путь, по которому следовали наши предшественники, не всегда был прямым; в подобных случаях мы шли кратчайшим путем; мы лишались также всего, что получали по пути и которое часто представляло большой интерес. Но мы не сожалеем об этом, так как все это сделал для нас Тиссеран.

Таким образом, эта новая книга не освобождает от чтения прежних упомянутых книг и в дальнейшем мы будем часто на них ссылаться.

ГЛАВА I

# ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ

Здесь будет идти речь не об экспериментальных основах и не о философских принципах механики, а лишь о некоторых аналитических преобразованиях, знакомство с которыми необходимо всем, желающим изучать динамику, и которые составляют основное содержание прекрасного сочинения Якоби «Лекции по динамике»*).

**1. Канонические уравнения.** Пусть

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

обозначают $2n$ переменных величин, образующих две группы, и пусть $F$ есть некоторая функция этих $2n$ переменных. Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}, \tag{1}$$

которые будем называть *каноническими уравнениями*.

Интегрируя полностью эти уравнения, выразим неизвестные $x$ и $y$ как функции времени $t$ и $2n$ произвольных постоянных

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}.$$

Заметим, между прочим, что функциональный определитель функций $x$ и $y$ по постоянным $\alpha$ не может равняться тождественно нулю.

В самом деле, если бы это было так, то между переменными $x$, $y$ и $t$ существовало бы соотношение, не зависящее от $\alpha$. А тогда переменным $x$ и $y$ нельзя было бы придать произвольные начальные значения при $t = t_0$.

Легко видеть, кроме того, что мы имеем в силу уравнений (1)

$$\frac{dF}{dt}=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y_i}\cdot\frac{dy_i}{dt}\right)=0,$$

откуда

$$F=\text{const},$$

*) Якоби К., Лекции по динамике. Перев. с нем. О. А. Полосухиной под ред. Н. С. Кошлякова, ОНТИ, 1936. (*Прим. ред.*)

что дает один из интегралов уравнений (1). Этот интеграл может быть назван интегралом живых сил, так как в случае уравнений динамики он выражает, как увидим ниже, сохранение энергии.

2. Канонические уравнения (1) могут быть записаны в другой, эквивалентной форме.

Допустим, что все переменные выражены в виде функций времени $t$ и постоянных $\alpha$. Тогда имеем тождественно

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial t}\right)=\sum\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}-\sum\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \alpha_k}, \tag{2}$$

где $\alpha_k$— одна из постоянных интегрирования. С другой стороны, очевидно, что

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_k}=\sum\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}+\sum\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha_k}. \tag{3}$$

В силу уравнений (1) правые части (2) и (3) равны, а следовательно, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(\sum x\frac{dy}{dt}\right)=\frac{\partial F}{\partial \alpha_k}. \tag{4}$$

Так как индекс $k$ принимает значения 1, 2, ..., $2n$, то мы будем иметь $2n$ таких уравнений. Наоборот, если имеют место уравнения (4), то правые части (2) и (3) равны и мы можем написать

$$\sum\left(\frac{dx}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}-\sum\left(\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha_k}=0.$$

Эти $2n$ уравнений линейны относительно $2n$ неизвестных

$$\frac{dx}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y},\quad -\left(\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial x}\right),$$

и определитель системы этих $2n$ линейных уравнений, который есть не что иное, как функциональный определитель $x$ и $y$ относительно $\alpha$, не может тождественно равняться нулю. Следовательно, система имеет только нулевое решение, откуда вытекает, что канонические уравнения (1) удовлетворяются. Таким образом. из уравнений (1) можно получить уравнения (4) и, наоборот, из уравнений (4) можно вывести уравнения (1). Следовательно, системы уравнений (1) и (4) эквивалентны.

3. **Канонические преобразования.** Пусть

$$x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n,$$
$$y'_1,\ y'_2,\ \ldots,\ y'_n$$

являются функциями $2n$ прежних переменных $x$ и $y$. Мы можем сделать замену переменных, принимая за новые переменные $x'$ и $y'$.

Допустим, что соотношения, связывающие новые и старые переменные, таковы, что выражение

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy = dS$$

есть точный дифференциал. Покажем, что в этом случае преобразование переменных не изменяет каноническую форму уравнений (1), которые примут вид

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x'_i}. \tag{1'}$$

Действительно, мы имеем

$$\sum x' \frac{\partial y'}{\partial a_k} - \sum x \frac{\partial y}{\partial a_k} = \frac{\partial S}{\partial a_k},$$

$$\sum x' \frac{dy'}{dt} - \sum x \frac{dy}{dt} = \frac{dS}{dt},$$

откуда выводим тождество

$$\frac{d}{dt}\left(\sum x \frac{\partial y}{\partial a_k}\right) - \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\sum x \frac{dy}{dt}\right) = \\ = \frac{d}{dt}\left(\sum x' \frac{\partial y'}{\partial a_k}\right) - \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\sum x' \frac{dy'}{dt}\right). \tag{5}$$

Так как из уравнений (1) можно вывести уравнения (4), то в силу тождества (5) мы будем иметь следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum x' \frac{\partial y'}{\partial a_k}\right) - \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\sum x' \frac{dy'}{dt}\right) = \frac{\partial F}{\partial a_k}, \tag{4'}$$

которые отличаются от уравнений (4) только тем, что вместо прежних переменных $x$ и $y$ в них входят новые переменные $x'$ и $y'$. Мы видели, что из уравнений (4) можно вывести уравнения (1). Точно так же из уравнений (4′) можно вывести уравнения (1′). Таким образом, уравнения (1′) являются следствием уравнений (1), что и требовалось доказать.

**4. Примеры.** Рассмотрим, например, преобразование

$$x'_i = y_i, \qquad y'_i = -x_i.$$

В этом случае

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy = -\sum y\,dx - \sum x\,dy = -d\left(\sum xy\right),$$

т. е. полный дифференциал. Отсюда следует, что в результате этого преобразования уравнения (1) переходят в уравнения (1′), что, впрочем, можно проверить и непосредственно.

**5.** Предположим теперь, что переменные $x'$ связаны с переменными $x$ линейными соотношениями и переменные $y'$ связаны с $y$ с помощью других линейных соотношений. Предположим, кроме того, что имеет место тождество

$$\sum x'y' = \sum xy. \tag{6}$$

Ясно, что дифференциалы $dy'$ связаны с дифференциалами $dy$ теми же линейными соотношениями, что и $y'$ с $y$. Следовательно, в тождестве (6) мы можем заменить $y$ и $y'$ на $dy$ и $dy'$, откуда следует, что

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy = 0,$$

т. е. является полным дифференциалом, а поэтому указанное преобразование не изменяет каноническую форму уравнений.

6. Если положим

$$x = \sqrt{2\varrho}\cos\omega, \qquad y = \sqrt{2\varrho}\sin\omega,$$

то будем иметь

$$x\,dy = 2\varrho\cos^2\omega\,d\omega + d\varrho\cos\omega\sin\omega,$$

и, следовательно,

$$x\,dy - \varrho\,d\omega = \varrho\cos 2\omega\,d\omega + \frac{d\varrho}{2}\sin 2\omega = d\left(\frac{\varrho}{2}\sin 2\omega\right)$$

есть полный дифференциал. Следовательно, если мы положим

$$x_1 = \sqrt{2x_1'}\cos y_1', \qquad y_1 = \sqrt{2x_1'}\sin y_1',$$

$$x_i = x_i', \qquad y_i = y_i' \quad \text{при} \quad i > 1,$$

то разность $\sum x'\,dy' - \sum x\,dy$ будет полным дифференциалом и каноническая форма уравнений сохраняется.

7. **Уравнения Гамильтона.** Уравнения динамики могут быть легко приведены к канонической форме.

Рассмотрим систему, состоящую из $\frac{n}{3}$ материальных точек, подверженных силам, зависящим только от их координат. В соответствии с принципом сохранения энергии эти силы должны допускать *силовую функцию*.

Обозначим координаты первой материальной точки через $x_1$, $x_2$, $x_3$; координаты второй — через $x_4$, $x_5$, $x_6$; ... ; координаты $\left(\frac{n}{3}\right)$-й — через $x_{n-2}$, $x_{n-1}$, $x_n$. Мы будем обозначать также массу первой материальной точки через $m_1 = m_2 = m_3$; массу второй — через $m_4 = m_5 = m_6$; ... ; массу последней — через $m_{n-2} = m_{n-1} = m_n$.

В этих обозначениях кинетическая энергия $T$ системы выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2.$$

Обозначим потенциальную энергию системы через $U$, которая будет зависеть только от координат, и полную энергию системы — через $F$, так что

$$F=T+U.$$

Тогда уравнения движения можно написать в виде

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Положим

$$y_i=m_i\frac{dx_i}{dt},$$

так что, например, $y_1$, $y_2$, $y_3$ представляют собой три компоненты количества движения первой материальной точки. Тогда будем иметь

$$T=\frac{1}{2}\sum\frac{y_i^2}{m_i},$$

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{y_i}{m_i}=\frac{\partial T}{\partial y_i}.$$

С другой стороны, уравнения (7) могут быть написаны следующим образом:

$$\frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Так как $T$ не зависит от $x$, а $U$ не зависит от $y$, то будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad \frac{\partial F}{\partial y_i}=\frac{\partial T}{\partial y_i},$$

и, следовательно,

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

т. е. уравнения движения имеют каноническую форму.

8. Возьмем теперь какую-нибудь систему криволинейных координат и будем определять положение системы материальных точек не прямоугольными координатами $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, а некоторыми функциями

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

этих $n$ прямоугольных координат. Наоборот, $n$ прямоугольных координат $x$ будут функциями $n$ новых координат $q$. Тогда функция $U$, которая зависит только от $x$, будет зависеть только от величин $q$. Пусть

$$x_i=\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Дифференцируя, находим

$$dx_i = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} dq_k. \tag{8}$$

или, обозначая для сокращения производные $\frac{dx_i}{dt}$ и $\frac{dq_k}{dt}$ через $x'_i$ и $q'_k$,

$$x'_i = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} q'_k. \tag{9}$$

Мы видим, что $x'$ являются линейными функциями производных $q'$, причем коэффициенты $\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}$ зависят только от $q$.

Отсюда следует, что $T = \frac{1}{2} \sum mx'^2$ будет однородным многочленом второй степени относительно $q'$, коэффициенты которого зависят от $q$. Поэтому если положим

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

то в силу теоремы об однородных функциях будем иметь

$$2T = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i = \sum p_i q'_i.$$

Заметим, кроме того, что если $T$ выразить в зависимости от $x'$ формулой $T = \frac{1}{2} \sum mx'^2$, то будем иметь также

$$\frac{\partial T}{\partial x'_i} = y_i, \quad 2T = \sum y_i x'_i.$$

Установив это, придадим переменным $q'$ приращения $dq'$, рассматривая при этом переменные $q$ как постоянные. Тогда переменные $x$ не изменятся, так как они зависят только от величин $q$, но производные $x'$ получат приращения $dx'$ и дифференцирование уравнений (9) дает

$$dx'_i = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} dq'_k. \tag{10}$$

Кроме того, мы будем иметь

$$dT = \sum \frac{\partial T}{\partial q'} dq' = \sum \frac{\partial T}{\partial x'} dx',$$

откуда

$$\sum p\, dq' = \sum y\, dx'. \tag{11}$$

Сравнение равенств (8) и (10) показывает нам, что между величинами $dx'$ и $dq'$ имеют место *те же соотношения*, что и между $dx$ и $dq$. Следовательно, в тождестве (11) мы можем заменить $dx'$ и $dq'$ на $dx$ и $dq$, что дает

$$\sum p\,dq = \sum y\,dx.$$

Таким образом,

$$\sum q\,dp - \sum x\,dy = d\left[\sum pq - \sum yx\right]$$

есть полный дифференциал.

Следовательно, если взять за новые переменные $q$ и $p$, то каноническая форма уравнений не изменится и мы будем иметь

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}. \tag{12}$$

Итак, мы получили уравнения Гамильтона для произвольной системы координат.

**9. Системы со связями.** Нетрудно распространить этот результат и на систему со связями. Предположим, что на нашу систему, состоящую из $\frac{n}{3}$ материальных точек, наложено $\alpha$ связей, так что прямоугольные координаты $x$ могут быть выражены в функции $n - \alpha = \beta$ независимых переменных

$$q_1, q_2, \ldots, q_\beta. \tag{13}$$

Пусть

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_\beta)$$

суть выражения $n$ прямоугольных координат в функции этих $\beta$ переменных. Введем $\alpha$ вспомогательных переменных

$$q_{\beta+1}, q_{\beta+2}, \ldots, q_n \tag{14}$$

и положим

$$x_i = \psi_i(q_1, q_2, \ldots, q_\beta, q_{\beta+1}, \ldots, q_n),$$

где $\psi_i$ суть какие угодно функции, приводящиеся к $\varphi_i$ при

$$q_{\beta+1} = q_{\beta+2} = \ldots = q_n = 0. \tag{15}$$

Если за независимые переменные взять величины

$$q_1, q_2, \ldots, q_n,$$

то уравнения (15) будут уравнениями связей.

Мы видим, что система со связями может быть рассматриваема как система без связей при условии, что к ней приложены некоторые дополнительные силы, так называемые *силы связи*, значение которых легко понять. Предположим, например, что две точки системы всегда остаются на постоянном расстоянии $a$. Тогда все будет происходить так, как если бы эти две точки притягивались, когда их расстояние делается больше $a$, и отталкивались, когда расстояние делается меньше $a$; это притяжение (или отталкивание) делается чрезвычайно большим, когда расстояние между точками равно $a+\varepsilon$ (или $a-\varepsilon$), если $\varepsilon$ — не сколь угодно мало. Аналогичную интерпретацию можно придать всем силам связей.

Пусть теперь $W$ — потенциальная энергия, обусловленная силами связи так, что работа этих сил выражается величиной $-dW$. Мы можем тогда рассматривать нашу систему как свободную, прибавляя к потенциальной энергии $U$ обычных сил величину $W$, т. е. изменяя $F$ на $F+W$. Тогда уравнения (12) запишутся в виде

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial(F+W)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial(F+W)}{\partial q_i}.$$

Но работа сил связи равна нулю при всяких перемещениях, совместимых со связями. Следовательно, функция $W$ не изменяется, когда переменные (13) изменяются, а переменные (14) постоянно остаются равными нулю.

Поэтому будем иметь

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=0 \quad (i=1, 2, \ldots, \beta).$$

С другой стороны, $W$ зависит только от $q$ и не зависит от $p$, так что $\frac{\partial W}{\partial p_i}=0$. Следовательно, давая индексу $i$ только значения $1, 2, \ldots, \beta$, мы будем иметь

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial q_i}.$$

Таким образом, мы снова пришли к уравнениям Гамильтона.

**10. Метод Якоби.** Вернемся снова к каноническим уравнениям (1). С этими уравнениями тесно связано некоторое уравнение в частных производных, открытое Якоби, которое мы сейчас получим.

Пусть $S$ — неизвестная функция. Заменим в функции $F(x_i, y_i)$ переменные $y_i$ частными производными $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ и приравняем эту функцию некоторой постоянной. Таким образом, мы получаем уравнение

$$F\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right)=\text{const}, \qquad (16)$$

которое и называется уравнением Якоби. Мы покажем, что интегрирование уравнений (1) приводится к решению уравнения Якоби.

В самом деле, предположим, что найдено частное решение уравнения (16), зависящее от $n$ произвольных постоянных

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n.$$

Постоянная, находящаяся в правой части уравнения (16), будет функцией этих $n$ постоянных, так что мы будем иметь

$$F\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n). \tag{17}$$

Функция $S$ зависит одновременно от переменных $x$ и от постоянных интегрирования $\beta$. Варьируя одновременно $x$ и $\beta$, мы будем иметь

$$dS = \sum \frac{\partial S}{\partial x} dx + \sum \frac{\partial S}{\partial \beta} d\beta.$$

Положим

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = y_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta_i} = \gamma_i. \tag{18}$$

Тогда между $4n$ величинами $x$, $y$, $\beta$, $\gamma$ имеем $2n$ соотношений (18). Следовательно, $2n$ из этих величин могут рассматриваться как функции $2n$ других. Например, $\beta$ и $\gamma$ можно рассматривать как функции $x$ и $y$. Это позволяет сделать замену переменных и вместо прежних переменных $x$ и $y$ взять новые переменные $\beta$ и $\gamma$.

Так как в силу (18)

$$dS = \sum y\, dx + \sum \gamma\, d\beta,$$

то выражение

$$\sum \gamma\, d\beta - \sum x\, dy = d\left(S - \sum xy\right)$$

есть полный дифференциал.

Следовательно, **з а м е н а п е р е м е н н ы х я в л я е т с я к а н о н и ч е с к о й**, и уравнения (1) приведутся к виду

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_i},$$

или, ввиду тождества (17), к следующим уравнениям:

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = 0. \tag{19}$$

Уравнения (19) интегрируются непосредственно. Сначала находим

$$\beta_i = \text{const}.$$

При постоянных $\beta$ функция $\varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ и ее производные $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}$ также будут иметь постоянные значения. А тогда интегрирование первых уравнений (19) дает

$$\gamma_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}\cdot t + \overline{\omega}_i,$$

где $\overline{\omega}_i$ суть $n$ новых постоянных интегрирования.

Таким образом, уравнения (19), а следовательно, и система (1) полностью проинтегрированы.

**11.** Возьмем опять уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{1}$$

исходя из которых мы можем написать уравнение Якоби:

$$F\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \text{const.} \tag{16}$$

Выполним каноническую замену переменных. Пусть $q$ и $p$ — новые переменные, так что

$$\sum q\,dp - \sum x\,dy = dV$$

— полный дифференциал, и вместо уравнений (1) будем иметь

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}. \tag{1'}$$

Обозначим через $F(q;\, p)$ результат замены в функции $F(x,\, y)$ переменных $x$ и $y$ их значениями в функции от $q$ и $p$. Мы поставили между $q$ и $p$ точку с запятой во избежание недоразумения, чтобы не казалось, что $F(q, p)$ есть результат замены $x$ на $q$ и $y$ на $p$ в функции $F$.

Применим к уравнениям (1′) метод Якоби. Для этого заменим в $F$ переменные $p_i$ частными производными $\frac{\partial S'}{\partial q_i}$ и приравняем функцию $F$ постоянной, что дает уравнение

$$F\left(q_i;\, \frac{\partial S'}{\partial q_i}\right) = \text{const.} \tag{16'}$$

Являются ли функции $S'$, которые удовлетворяют уравнению (16′), теми же самыми функциями $S$, которые удовлетворяют уравнению (16)? В о о б щ е  г о в о р я,  н е т.

Действительно, мы можем заменить уравнение (16) равенствами

$$F(x_i,\, y_i) = \text{const}, \quad dS = \sum y\,dx$$

и уравнение (16′) равенствами

$$F(q_i;\ p_i) = \mathrm{const}, \quad dS' = \sum p\,dq.$$

Уравнение $F(q;\ p) = \mathrm{const}$ заведомо является следствием уравнения $F(x, y) = \mathrm{const}$. Но, с другой стороны,

$$dS' - dS = \sum p\,dq - \sum y\,dx = d\left(\sum pq - \sum xy - V\right),$$

откуда

$$S' - S = \sum pq - \sum xy - V.$$

Правая часть, вообще говоря, не равна нулю.

Существует, однако, случай, когда $S' = S$. Это — случай уравнений Гамильтона и замены переменных, изложенной в § 8.

Действительно, в § 8 мы нашли, что

$$\sum y\,dx = \sum p\,dq,$$

откуда

$$dS' = dS, \ S' = S.$$

Другими словами, в случае уравнений Гамильтона, если в уравнении (16) заменить $x$ их выражениями в функции от $q$ и частные производные $\frac{\partial S}{\partial x}$ — соответствующими выражениями в функции от $q$ и от частных производных $\frac{\partial S}{\partial q}$, то преобразованное уравнение будет иметь вид

$$F\left(q_i;\ \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = \mathrm{const},$$

что есть не что иное, как уравнение (16′), в котором $S'$ заменена на $S$.

**12. Случай, когда время входит явно.** Предположим, что функция $F$ зависит не только от $x$ и $y$, но также и от времени $t$, и рассмотрим опять уравнения (1). Эти уравнения не допускают более интеграла живых сил

$$F = \mathrm{const}.$$

Тем не менее случай, когда время входит явно в функцию $F$, легко привести к случаю, который мы до сих пор рассматривали.

Действительно, введем две вспомогательные переменные, $u$ и $v$, и положим

$$F' = F(x_i, y_i;\ u) + v,$$

где $F(x_i, y_i; u)$ есть функция $F$, в которой время $t$ заменено на $u$. Рассмотрим теперь канонические уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial y}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial x}, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial v}, & \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Третье из уравнений (20) дает нам

$$\frac{du}{dt} = 1,$$

откуда $u = t$. Первые два уравнения совпадают с уравнениями (1), так как, если положить $u = t$, имеем

$$\frac{\partial F'}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F'}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Что касается четвертого уравнения, то оно определяет переменную $v$, которую можно определить также с помощью интеграла живых сил уравнений (20):

$$F(x_i, y_i; u) + v = \text{const}.$$

Допустим теперь, что производится замена переменных и новые переменные $x'$ и $y'$ являются функциями старых переменных $x$, $y$ и времени $t$.

1) Если разность

$$\sum x'\, dy' - \sum x\, dy$$

есть полный дифференциал, то выражение

$$\left(\sum x'\, dy' + u\, dv\right) - \left(\sum x\, dy + u\, dv\right)$$

также является точным дифференциалом. Таким образом, уравнения (20) сохраняют каноническую форму, если вместо прежних переменных $x_i$, $y_i$, $u$ и $v$ ввести новые переменные $x'_i$, $y'_i$, $u$ и $v$. *Уравнения* (1), *которые являются первыми уравнениями системы* (20), *также, следовательно, сохраняют каноническую форму.*

2) Пусть выражение

$$\sum x'\, dy' - \sum x\, dy$$

становится точным дифференциалом, когда $t$ рассматривается как постоянная.

Рассматривая $t$ как переменную, мы будем иметь

$$\sum x'\, dy' - \sum x\, dy = dS + W\, dt,$$

где $dS$ — некоторый точный *дифференциал*, а $W$ — функция $x$, $y$ и $t$ или, если угодно, $x'$, $y'$ и $t$.

Заменяя $t$ через $u$, имеем

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy = dS + W\,du.$$

Тогда, полагая

$$v' = v + W,$$

мы видим, что

$$\left(\sum x'\,dy' + u\,dv'\right) - \left(\sum x\,dy + u\,dv\right) = d\,(S + uW)$$

есть полный дифференциал.

Итак, если вместо $x_i$, $y_i$, $u$ и $v$ взять новые переменные $x_i'$, $y_i'$, $u$ и $v'$, то уравнения (20) сохраняют каноническую форму.

Но в новых переменных мы будем иметь

$$F' = F + v' - W$$

и

$$\frac{\partial F'}{\partial x'} = \frac{\partial\,(F-W)}{\partial x'}, \quad \frac{\partial F'}{\partial y'} = \frac{\partial\,(F-W)}{\partial y'}.$$

Первые два уравнения (20) напишутся в виде

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial\,(F-W)}{\partial y'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial\,(F-W)}{\partial x'}.$$

Отсюда видно, что *уравнения* (1) *имеют также каноническую форму с той лишь разницей, что функция $F$ заменена функцией $F-W$.*

3) *Пусть переменные $x'$ и $y'$ зависят только от переменных $x$ и $y$ и не зависят от $t$, и пусть выражение*

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy$$

*является точным дифференциалом.*

Мы приходим к первому случаю. *Уравнения* (1) *сохраняют каноническую форму с той же характеристической функцией $F$.*

Посмотрим, какой результат получается, если применить к уравнениям (20) метод Якоби. Полагая

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = y_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial u} = v$$

и приравнивая функцию $F'$ постоянной, мы найдем

$$F\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}, u\right) + \frac{\partial S}{\partial u} = \text{const}.$$

Заменяя $u$ на $t$, будем иметь

$$F\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \text{const}.$$

Такова форма уравнения Якоби в случае, который нас интересует.

**13. Скобки Якоби.** Вернемся к случаю, когда характеристическая функция $F$ не зависит явно от времени $t$. Пусть $F_1$ и $F_2$ — некоторые функции переменных $x_i$ и $y_i$.

Мы будем обозначать символом $(F_1, F_2)$ следующее выражение:

$$(F_1, F_2) = \sum \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \frac{\partial F_2}{\partial y_i} - \frac{\partial F_1}{\partial y_i} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \right),$$

которое называется *скобками Якоби*.

В силу уравнений (1) имеем тождественно

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} \right) = \sum \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial F_1}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right),$$

т. е.

$$\frac{dF_1}{dt} = (F_1, F).$$

Последнее равенство показывает, что для того, чтобы $F_1 = \text{const}$ было интегралом уравнений (1), необходимо и достаточно, чтобы скобки Якоби $(F_1, F)$ равнялись нулю.

Если $A$, $B$ и $C$ суть три произвольные функции, то справедливо легко проверяемое тождество

$$((A, B), C) + ((B, C), A) + ((C, A), B) = 0.$$

Допустим теперь, что $F_1 = \text{const}$ и $F_2 = \text{const}$ суть два интеграла уравнений (1). Тогда $(F_1, F_2) = \text{const}$ — третий интеграл. Это утверждение известно под названием теоремы Пуассона.

Действительно, имеем тождество

$$((F, F_1), F_2) + ((F_1, F_2), F) + ((F_2, F), F_1) = 0.$$

Первое и третье слагаемые равны нулю, так как $(F, F_1) = -(F_1, F)$ и $(F_2, F)$ равны нулю в силу того, что $F_1 = \text{const}$ и $F_2 = \text{const}$ являются интегралами уравнений. Поэтому получаем, что среднее слагаемое тоже равно нулю:

$$((F_1, F_2), F) = 0,$$

откуда следует, что $(F_1, F_2) = \text{const}$ также есть интеграл.

**14. Скобки Лагранжа.** Предположим, что уравнения (1) проинтегрированы и переменные $x_i$ и $y_i$ выражены в виде функций времени $t$ и $2n$ постоянных интегрирования $\alpha_k$.

Обозначим символом $[\alpha_h, \alpha_k]$ выражение

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \sum \left( \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_h} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_h} \right).$$

Выражение $[\alpha_h, \alpha_k]$ называется *скобками Лагранжа*, и его не следует смешивать со скобками Якоби.

В § 2 мы видели, что уравнения (1) влекут за собой следующие:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(\sum x\frac{dy}{dt}\right)=\frac{\partial F}{\partial \alpha_k}, \tag{4}$$

которые можно написать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(F+\sum x\frac{dy}{dt}\right), \tag{21}$$

Точно так же будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_h}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha_h}\left(F+\sum x\frac{dy}{dt}\right). \tag{22}$$

Дифференцируем (21) по $\alpha_h$, (22) по $\alpha_k$ и вычтем из первого результата второй. Тогда правые части уничтожатся и мы получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_h}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_h}\right)\right]=0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\sum\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_h}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}-\frac{\partial x}{\partial \alpha_h}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha_h}\right)\right]=\frac{d\,[\alpha_h, \alpha_k]}{dt}=0.$$

Это значит, что $[\alpha_h, \alpha_k]$ есть постоянная, не зависящая от времени и могущая зависеть только от постоянных интеграции.

**15.** Заметим теперь, что имеют место тождества

$$\frac{\partial [\alpha_h, \alpha_k]}{\partial \alpha_j}+\frac{\partial [\alpha_k, \alpha_j]}{\partial \alpha_h}+\frac{\partial [\alpha_j, \alpha_h]}{\partial \alpha_h}=0, \tag{23}$$
$$[\alpha_k, \alpha_k]=0, \qquad [\alpha_h, \alpha_k]=-[\alpha_k, \alpha_h],$$

являющиеся непосредственными следствиями определения скобок Лагранжа.

Покажем справедливость первого из этих тождеств. Мы имеем, очевидно,

$$[\alpha_h, \alpha_k]=\frac{\partial}{\partial \alpha_h}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_h}\right),$$
$$[\alpha_k, \alpha_j]=\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_j}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_k}\right),$$
$$[\alpha_j, \alpha_h]=\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_h}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha_h}\left(\sum x\frac{\partial y}{\partial \alpha_j}\right).$$

Дифференцируя первое из этих соотношений по $\alpha_j$, второе по $\alpha_h$. третье — по $\alpha_k$ и складывая, мы убедимся, что в правой части все слагаемые попарно уничтожаются, что и доказывает первое из тождеств (23).

Остальные два тождества очевидны.

**16.** Рассмотрим снова уравнение (21) и напишем его в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\sum x \frac{\partial y}{\partial \alpha_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k}\right),$$

где функция $\Omega$ определяется формулой

$$\frac{d\Omega}{dt} = F + \sum x \frac{dy}{dt} = F - \sum x \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Ясно, что функция $\Omega$, определяемая своей частной производной по времени, определяется с точностью до произвольной функции от постоянных $\alpha$.

В результате интегрирования получим

$$\sum x \frac{\partial y}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k} + A_k,$$

где $A_k$ — функции постоянных $\alpha$, не зависящие от времени $t$.

С другой стороны, мы имеем

$$\sum x \frac{dy}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} - F,$$

и так как

$$d\Omega = \sum \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_k} d\alpha_k + \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt,$$

$$dy = \sum \frac{\partial y}{\partial \alpha_k} d\alpha_k + \frac{\partial y}{\partial t} dt,$$

то, имея в виду, что $A_k$ не зависит от времени, получим

$$\sum x\, dy = d\Omega + \sum A_k\, d\alpha_k - F\, dt. \tag{24}$$

Отсюда выводим

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_h} - \frac{\partial A_h}{\partial \alpha_k}.$$

Так как $A_k$ и $A_h$ суть функции только от $\alpha$, не зависящие от $t$, то такими же являются их частные производные и, следовательно, скобки $[\alpha_h, \alpha_k]$. Таким образом, мы опять пришли к теореме § 14.

**17.** Возьмем в качестве постоянных интегрирования начальные значения $x_i^0$, $y_i^0$ переменных $x_i$ и $y_i$ при $t = 0$. В этом случае уравнение (24) принимает особенно простую форму.

Положим в равенстве (24) $t = 0$. Тогда $dt = 0$, $x_i = x_i^0$, $y_i = y_i^0$, $\Omega = \Omega_0$. Величины $A_k$ не зависят от времени, а поэтому не изменятся, и мы получим

$$\sum x^0\, dy^0 = d\Omega_0 + \sum A_k\, d\alpha_k.$$

Вычитая это равенство из (24), найдем

$$\sum x\,dy = d(\Omega - \Omega_0) + \sum x^0\,dy^0 - F\,dt. \tag{25}$$

18. В случае уравнений Гамильтона (в обозначениях § 7) имеем

$$F = T + U,$$

где $U$ не зависит от переменных $y$ и $T$ является однородной функцией второй степени относительно $y$. Следовательно, имеем

$$T = \frac{1}{2}\sum y\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{2}\sum y\frac{\partial F}{\partial y}.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\sum xy\right) = \sum x\frac{dy}{dt} + \sum y\frac{dx}{dt} = \sum y\frac{\partial F}{\partial y} - \sum x\frac{\partial F}{\partial x}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\left(\sum xy\right)}{dt} + F - \sum y\frac{\partial F}{\partial y}$$

и, наконец,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\left(\sum xy\right)}{dt} + U - T. \tag{26}$$

19. В частном случае задачи трех тел потенциальная энергия $U$ является однородной функцией степени ($-1$) относительно $x$, и $T$ остается однородной функцией второй степени относительно $y$ и не зависит от $x$.

Теорема об однородных функциях нам дает

$$-U = \sum x\frac{\partial U}{\partial x} = \sum x\frac{\partial F}{\partial x}, \quad 2T = \sum y\frac{\partial T}{\partial y} = \sum y\frac{\partial F}{\partial y},$$

откуда

$$2F = \sum y\frac{\partial F}{\partial y} - 2\sum x\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{27}$$

В этом случае легко составить функцию $\Omega$. Действительно, находим

$$\frac{d\Omega}{dt} = F - \sum x\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{d\left(\sum xy\right)}{dt} = \sum y\frac{\partial F}{\partial y} - \sum x\frac{\partial F}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{d\left(\Omega + \sum xy\right)}{dt} = F + \sum y\frac{\partial F}{\partial y} - 2\sum x\frac{\partial F}{\partial x} = 3F.$$

Так как $F$ постоянна в силу интеграла живых сил, то это уравнение интегрируется непосредственно, и мы находим

$$\Omega = 3F \cdot t - \sum xy + \text{const}.$$

Постоянную в правой части можно заменить некоторой произвольной функцией от постоянных интегрирования.

Положим теперь

$$J = 2\sum x \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \sum y \frac{\partial x}{\partial \alpha}.$$

Тогда находим, что

$$J = \sum x \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sum xy\right).$$

Далее будем иметь

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum x \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial^2 \left(\sum xy\right)}{\partial \alpha\, \partial t},$$

или

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial^2 \left(\Omega + \sum xy\right)}{\partial \alpha\, \partial t}$$

и наконец,

$$\frac{dJ}{dt} = 3\frac{\partial F}{\partial \alpha}.$$

В силу интеграла живых сил $F$ является постоянной, т. е. можно считать, что она является функцией $2n$ постоянных интегрирования $\alpha$. Отсюда следует, что частные производные $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ также постоянны.

Итак, $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ постоянны.

Из предыдущего равенства вытекает, что $J$ *является линейной функцией времени*.

Полученный результат тесно связан с теорией интегральных инвариантов. Подробно этот вопрос освещен в т. III книги «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» автора.

# ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

**20. Обозначения.** Рассмотрим три тела*), $A$, $B$, $C$, взаимно притягивающие друг друга по закону Ньютона. Примем обозначения § 7, т. е. обозначим через $x_1$, $x_2$, $x_3$ прямоугольные координаты тела $A$, через $x_4$, $x_5$, $x_6$ — такие же координаты тела $B$, и наконец, через $x_7$, $x_8$, $x_9$ — такие же координаты тела $C$. Что касается их масс, то будем обозначать массу тела $A$ безразлично через $m_1$, $m_2$ или $m_3$, массу тела $B$ — через $m_4$, $m_5$ или $m_6$ и массу тела $C$ — через $m_7$, $m_8$ или $m_9$, так что будем иметь

$$m_1 = m_2 = m_3,$$
$$m_4 = m_5 = m_6,$$
$$m_7 = m_8 = m_9.$$

Положим

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Таким образом, компоненты количества движения тела $A$ суть $y_1$, $y_2$ и $y_3$; тела $B$ — $y_4$, $y_5$ и $y_6$; тела $C$ — $y_7$, $y_8$ и $y_9$.

Полная кинетическая энергия системы определится тогда формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum \frac{y^2}{m}.$$

Потенциальная энергия будет равна

$$U = -\frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_1 m_7}{AC} - \frac{m_4 m_7}{BC}, \tag{1}$$

при условии, что основные единицы выбраны так, что постоянная тяготения равна единице.

В выражении для функции $U$ знаменатели $AB$, $AC$, $BC$ представляют расстояния $AB$, $AC$, $BC$.

Полная энергия системы будет

$$F = T + U$$

*) Под «телами» здесь подразумеваются материальные точки. (*Прим. ред.*)

и канонические уравнения движения напишутся в виде (см. § 7)

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}. \tag{2}$$

В дальнейшем оси координат будем обычно называть осью $x_1$, осью $x_2$ и осью $x_3$ соответственно.

**21. Интегралы задачи.** Канонические уравнения (2), являющиеся уравнениями движения в задаче трех тел, допускают несколько простых первых интегралов.

Прежде всего, мы имеем интеграл живых сил

$$F=\text{const}.$$

Заметим далее, что функция $U$ зависит только от взаимных расстояний трех тел, $A$, $B$, $C$; следовательно, она не зависит от выбора осей координат. Поэтому функция $U$ не изменится, если системе трех тел сообщить общее поступательное или вращательное движение.

Сообщим всей системе бесконечно малое перемещение $\varepsilon$ в направлении оси $x_1$. Тогда координаты $x_1$, $x_4$, $x_7$ примут значения $x_1+\varepsilon$, $x_4+\varepsilon$, $x_7+\varepsilon$, а другие координаты $x$, очевидно, не изменятся.

Так как приращение функции $U$ равно нулю, то мы будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial x_4}+\frac{\partial U}{\partial x_7}=0. \tag{3}$$

Здесь введем обозначение, которое будет весьма полезным в последующем. Именно, мы будем писать, например,

$$\textstyle\sum_3 \varphi(x_1)=\varphi(x_1)+\varphi(x_4)+\varphi(x_7),$$
$$\textstyle\sum_3 \varphi(x_2)=\varphi(x_2)+\varphi(x_5)+\varphi(x_8),$$
$$\textstyle\sum_3 \varphi(x_1, y_2)=\varphi(x_1, y_2)+\varphi(x_4, y_5)+\varphi(x_7, y_8),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

т. е. знак $\sum_3$, который может быть назван «суммой через три», имеет следующее значение. Он представляет сумму трех членов, первый из которых написан явно, второй член выводится из первого увеличением всех индексов на три единицы, третий член — увеличением на шесть единиц. Если угодно, можно сказать также, что второй член образован из координат точки $B$ и третий — из координат точки $C$, так же как первый образован из соответствующих координат точки $A$.

В случае, когда рассматривается задача не трех, а $n$ тел, можно, очевидно, пользоваться таким же обозначением, но под символом $\sum_n$ надо подразумевать тогда сумму не трех, а $n$ членов. Когда же будем употреблять знак $\sum$ без индекса 3, то суммирование должно быть распространено на все возможные значения индексов.

С этим обозначением уравнение (3) запишется в виде

$$\sum\nolimits_3 \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0,$$

или, так как $T$ не зависит от $x$,

$$\sum\nolimits_3 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

откуда

$$\sum\nolimits_3 \frac{dy_1}{dt} = 0,$$

что после интегрирования дает

$$\sum\nolimits_3 y_1 = \text{const.} \tag{4}$$

Левую часть уравнения (4) можно записать следующим образом:

$$y_1 + y_4 + y_7 = m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_4 \frac{dx_4}{dt} + m_7 \frac{dx_7}{dt},$$

а это есть проекция на ось $x_1$ количества движения центра инерции системы с полной массой $m_1 + m_4 + m_7$, сосредоточенной в одной точке. Аналогично находим

$$\sum\nolimits_3 y_2 = \text{const}, \qquad \sum\nolimits_3 y_3 = \text{const.} \tag{4'}$$

Уравнения (4) и (4′) показывают, что проекции количества движения центра инерции системы на оси координат являются постоянными. Так как выражение $\sum_3 y_1$ является производной от $\sum_3 m_1 x_1$, то, интегрируя равенства (4) и (4′), найдем, что

$$\sum\nolimits_3 m_1 x_1, \qquad \sum\nolimits_3 m_2 x_2, \qquad \sum\nolimits_3 m_3 x_3$$

суть линейные функции времени. Отсюда вытекает, что движение центра инерции системы прямолинейно и равномерно.

Мы не ограничим общность, если предположим, что центр инерции системы неподвижен. Действительно, мы знаем, что законы движения остаются такими же, независимо от того, относим ли мы движущуюся систему к неподвижным осям или к осям, обладающим прямолинейным и равномерным движением.

Поэтому выберем подвижные оси параллельными неподвижным осям с началом координат в центре инерции; движение осей будет равномерным и прямолинейным, так что законы движения не изменятся; для наблюдателя, связанного с подвижной системой, центр инерции будет казаться, кроме того, неподвижным.

**22. Интегралы площадей.** Сообщим теперь системе трех тел бесконечно малое вращение $\varepsilon$ вокруг оси $x_1$.

Координаты $x_1$, $x_4$, $x_7$ не изменятся, в то время как координаты $x_2$, $x_5$, $x_8$ превратятся в

$$x_2 - x_3\varepsilon, \quad x_5 - x_6\varepsilon, \quad x_8 - x_9\varepsilon,$$

а координаты $x_3$, $x_6$, $x_9$ в

$$x_3 + x_2\varepsilon, \quad x_6 + x_5\varepsilon, \quad x_9 + x_8\varepsilon.$$

Так как функция $U$ не должна измениться, то мы будем иметь

$$\sum_3 \left( x_3 \frac{\partial U}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) = 0,$$

или, так как $T$ не зависит от координат $x$,

$$\sum_3 \left( x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) = 0.$$

В силу уравнений (2) имеем

$$\sum_3 \left( x_3 \frac{dy_2}{dt} - x_2 \frac{dy_3}{dt} \right) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3) = 0,$$

так как имеет место тождество

$$y_2 \frac{dx_3}{dt} - y_3 \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Следовательно, интегрируя, будем иметь

$$\sum_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3) = \text{const}, \tag{5}$$

и точно так же найдем

$$\sum_3 (x_2 y_1 - x_1 y_2) = \text{const}, \quad \sum_3 (x_1 y_3 - x_3 y_1) = \text{const}. \tag{5$'$}$$

Соотношения (5) и (5′) известны под названием *интегралов площадей*.

Очевидно, что все, что мы сказали о движении центра инерции или об интегралах площадей, применимо без всяких изменений к случаю любого числа тел.

Рассмотрим вектор с компонентами

$$-\sum_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3), \quad -\sum_3 (x_1 y_3 - x_3 y_1), \quad -\sum_3 (x_2 y_1 - x_1 y_2).$$

Согласно равенствам (5) и (5′) этот вектор является постоянным по величине и по направлению. Он называется *вектором площадей*. Плоскость, перпендикулярная к вектору площадей, называется *неизменной плоскостью*.

Если неизменную плоскость взять в качестве координатной плоскости $x_1x_2$, то вектор площадей имеет компоненты

$$0,\ 0,\ \sum\nolimits_3 (x_1y_2 - x_2y_1).$$

**23. Замена переменных.** Задача трех тел имеет девять степеней свободы, т. е. мы имеем восемнадцать переменных $x$ и $y$. Можно воспользоваться свойством центра инерции для уменьшения числа степеней свободы и, следовательно, числа переменных, сохраняя притом каноническую форму уравнений движения. Вопросы замены переменных составляют предмет этого параграфа.

Обозначим наши новые переменные через

$$x_i',\ y_i'; \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9.$$

Допустим сначала, что $x_1'$, $x_4'$, $x_7'$ являются линейными функциями переменных $x_1$, $x_4$, $x_7$; $x_2'$, $x_5'$, $x_8'$ суть линейные функции от $x_2$, $x_5$, $x_8$, и $x_3'$, $x_6'$, $x_9'$ — линейные функции от $x_3$, $x_6$, $x_9$.

Допустим, кроме того, что линейные соотношения, которые связывают величины $x_1'$, $x_4'$, $x_7'$ с $x_1$, $x_4$, $x_7$, такие же, как те, которые связывают $x_2'$, $x_5'$, $x_8'$ с $x_2$, $x_5$, $x_8$, а также $x_3'$, $x_6'$, $x_9'$ с $x_3$, $x_6$, $x_9$.

Другими словами, если координаты $x'$ рассматривать как координаты трех фиктивных тел, то между координатами этих фиктивных тел и трех действительных тел мы будем иметь линейные соотношения, не зависящие от выбора осей.

То же самое предположим и относительно $y'$. Предположим, что $y_1'$, $y_4'$, $y_7'$ суть линейные функции от $y_1$, $y_4$, $y_7$; $y_2'$, $y_5'$, $y_8'$ — линейные функции от $y_2$, $y_5$, $y_8$; $y_3'$, $y_6'$, $y_9'$ — линейные функции от $y_3$, $y_6$, $y_9$.

Допустим, что эти линейные соотношения одинаковы.

Предположим, наконец, что эти линейные соотношения таковы, что мы имеем тождественно

$$\sum\nolimits_3 x_1'y_1' = \sum\nolimits_3 x_1y_1. \tag{6}$$

По нашему предположению, $y_2'$, $y_5'$, $y_8'$ связаны с $y_2$, $y_5$, $y_8$ такими же соотношениями, как $y_1'$, $y_4'$, $y_7'$ с $y_1$, $y_4$, $y_7$. Поэтому в тождестве (6) можно заменить величины $y_1$, $y_4$, $y_7$, $y_1'$, $y_4'$, $y_7'$ на $y_2$, $y_5$, $y_8$, $y_2'$, $y_5'$, $y_8'$, что дает

$$\sum\nolimits_3 x_1'y_2' = \sum\nolimits_3 x_1y_2.$$

Точно так же, так как $x_2'$, $x_5'$, $x_8'$ связаны с $x_2$, $x_5$, $x_8$ теми же соотношениями, как и $x_1'$, $x_4'$, $x_7'$ с $x_1$, $x_4$, $x_7$, будем иметь

$$\sum\nolimits_3 x_2'y_1' = \sum\nolimits_3 x_2y_1$$

и

$$\sum\nolimits_3 x_2'y_2' = \sum\nolimits_3 x_2y_2, \quad \sum\nolimits_3 x_1'y_3' = \sum\nolimits_3 x_1y_3,$$

или, более общим образом,

$$\sum\nolimits_3 x_i' y_k' = \sum\nolimits_3 x_i y_k,$$

где индекс $i$ может принимать любое из трех значений 1, 2, 3, так же как и индекс $k$.

В частности, будем иметь

$$\sum\nolimits_3 x_3' y_2' = \sum\nolimits_3 x_3 y_2, \qquad \sum\nolimits_3 x_2' y_3' = \sum\nolimits_3 x_2 y_3,$$

откуда

$$\sum\nolimits_3 (x_3' y_2' - x_2' y_3') = \sum\nolimits_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3)$$

и точно так же

$$\sum\nolimits_3 (x_1' y_3' - x_3' y_1') = \sum\nolimits_3 (x_1 y_3 - x_3 y_1),$$

$$\sum\nolimits_3 (x_2' y_1' - x_1' y_2') = \sum\nolimits_3 (x_2 y_1 - x_1 y_2).$$

Таким образом, указанная нами замена переменных не меняет форму интегралов площадей.

С другой стороны, имеем

$$\sum\nolimits_3 x_1' y_1' = \sum\nolimits_3 x_1 y_1, \qquad \sum\nolimits_3 x_2' y_2' = \sum\nolimits_3 x_2 y_2, \qquad \sum\nolimits_3 x_3' y_3' = \sum\nolimits_3 x_3 y_3.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\sum x_i' y_i' = \sum x_i y_i, \tag{7}$$

где знак $\sum$ без индекса 3 указывает, как было замечено раньше, что суммирование распространяется на все значения индекса $i$.

Если воспользоваться результатами § 5, то равенство (7) означает, что сделанное преобразование переменных является *каноническим преобразованием*. Поэтому каноническая форма уравнений (2) не нарушается, и в новых переменных уравнения движения задачи трех тел имеют вид

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i'}. \tag{8}$$

**24. Исключение центра инерции.** Рассмотрим, какую пользу можно извлечь из этого преобразования переменных. Допустим, что линейные соотношения, выражающие зависимость между новыми и прежними переменными, выбраны таким образом, что мы имеем

$$k' y_7' = y_1 + y_4 + y_7,$$

и, с другой стороны, предположим, что новые координаты $x_1'$ и $x_4'$ зависят только от разностей $x_1 - x_7$ и $x_4 - x_7$.

Тогда $y'_7$ с точностью до постоянного множителя есть количество движения центра инерции, а так как мы видели, что всегда можно предположить центр инерции неподвижным, то мы будем иметь

$$y'_7 = 0$$

и точно так же

$$y'_8 = y'_9 = 0.$$

Следовательно, мы должны иметь

$$\frac{dy'_7}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x'_7} = 0,$$

что показывает, что $F$ не зависит от $x'_7$.

Действительно, это должно иметь место, если линейные соотношения между новыми и старыми переменными таковы, что координаты $x'_1$ и $x'_4$ зависят лишь от разностей $x_1 - x_7$ и $x_4 - x_7$.

В этом случае кинетическая энергия системы $T$, которая зависит только от переменных $y$ и не зависит от координат $x$, будет зависеть в результате преобразования лишь от переменных $y'$, но не от $x'$. $U$, которая зависит лишь от разностей $x_1 - x_7$, $x_4 - x_7$, $x_2 - x_8$, $x_5 - x_8$, $x_3 - x_9$, $x_6 - x_9$, будет зависеть только от переменных $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$, но не будет зависеть от новых координат $x'_7$, $x'_8$, $x'_9$. Следовательно, характеристическая функция $F = T + U$ не будет зависеть от координат $x'_7$, $x'_8$, $x'_9$.

Впрочем, легко видеть, что наши две гипотезы не являются независимыми друг от друга и что если $y'_7$ пропорциональна сумме $y_1 + y_4 + y_7$, то переменные $x'_1$ и $x'_4$ зависят только от $x_1 - x_7$ и $x_4 - x_7$. В самом деле, вернемся к равенству (6), которое в развернутом виде можно написать следующим образом:

$$x_1y_1 + x_4y_4 + x_7y_7 = x'_1y'_1 + x'_4y'_4 + x'_7y'_7.$$

Придадим координатам $x_1$, $x_4$, $x_7$ равные значения; тогда первый член станет пропорциональным $y_1 + y_4 + y_7$, т. е. $y'_7$; в правой части тождества коэффициенты при $y'_1$ и $y'_4$ должны, следовательно, быть нулями; отсюда вытекает, что координаты $x'_1$ и $x'_4$ обращаются в нуль одновременно с величинами $x_1 - x_7$ и $x_4 - x_7$, что доказывает, что $x'_1$ и $x'_4$ связаны с этими разностями линейными соотношениями.

Итак, предположим, что $y'_7$ пропорциональна $y_1 + y_4 + y_7$ и координаты $x'_1$ и $x'_4$ зависят лишь от разностей $x_1 - x_7$ и $x_4 - x_7$. Тогда $F$ не зависит от $x'_7$, $x'_8$, $x'_9$ и мы имеем

$$y'_7 = y'_8 = y'_9 = 0.$$

Поэтому в дальнейшем нужно беспокоиться только о двенадцати переменных: $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$; $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$, $y'_4$, $y'_5$, $y'_6$. При этом число степеней свободы приводится к шести.

**25. Исключение узлов.** Рассмотрим фиктивную планету, имеющую координаты $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ и компоненты количества движения $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$.

Плоскость мгновенной орбиты этой фиктивной планеты, т. е. плоскость, проходящая через начало координат, планету и ее скорость, параллельна двум векторам с компонентами $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ и $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$. Она будет, следовательно, перпендикулярна к вектору $V$ с компонентами

$$x'_2y'_3-x'_3y'_2, \qquad x'_3y'_1-x'_1y'_3, \qquad x'_1y'_2-x'_2y'_1.$$

Рассмотрим теперь вторую фиктивную планету с координатами $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$ и с компонентами количества движения $y'_4$, $y'_5$, $y'_6$. Плоскость мгновенной орбиты этой фиктивной планеты перпендикулярна к вектору $V'$ с компонентами

$$x'_5y'_6-x'_6y'_5, \qquad x'_6y'_4-x'_4y'_6, \qquad x'_4y'_5-x'_5y'_4.$$

С другой стороны, вектор площадей, компоненты которого суть

$$\sum\nolimits_3 (x'_2y'_3-x'_3y'_2), \qquad \sum\nolimits_3 (x'_3y'_1-x'_1y'_3), \qquad \sum\nolimits_3 (x'_1y'_2-x'_2y'_1),$$

перпендикулярен к неизменной плоскости.

Но суммы $\sum_3$ содержат теперь только по два члена; третий член обращается в нуль, так как $y'_7$, $y'_8$, $y'_9$ равны нулю.

Следовательно, каждая компонента вектора площадей есть сумма соответствующих компонент векторов $V$ и $V'$. Отсюда следует, что вектор площадей является геометрической суммой двух векторов $V$ и $V'$. Таким образом, эти три вектора лежат в одной плоскости.

Следовательно, три плоскости, соответственно перпендикулярные к этим трем векторам, т. е. плоскости двух мгновенных орбит и неизменная плоскость, параллельны одной и той же прямой.

Следовательно, *линия пересечения плоскостей двух мгновенных орбит всегда остается параллельной неизменной плоскости.*

Это свойство обычно называется *исключением узлов*, потому что нет надобности рассматривать отдельно долготу узла первой и второй орбит если отнести долготы к неизменной плоскости.

Это свойство не выполняется, если фиктивные планеты определены не изучаемым преобразованием координат, а иначе: если, например, взять, как обычно делают, фиктивные планеты, координаты и скорости которых относительно неподвижных осей были бы такие же, как и координаты и скорости истинных планет относительно неизменных осей, связанных с Солнцем.

**26. Первый пример.** Мы можем взять, например,

$$x'_1 = x_1 - x_7, \quad x'_4 = x_4 - x_7, \quad x'_7 = x_7,$$
$$y'_1 = y_1, \quad y'_4 = y_4, \quad y'_7 = y_1 + y_4 + y_7.$$

Легко проверить, что:

1. Равенство (6) удовлетворяется.
2. $y'_7$ равна сумме $y_1 + y_4 + y_7$.
3. $x'_1$ и $x'_4$ зависят лишь от разностей $x_1 - x_7$ и $x_4 - x_7$.

Таким образом, указанная замена переменных удовлетворяет сформулированным свойствам: каноническая форма уравнений движения не нарушается; форма интегралов площадей также не нарушается; переменные $x'_7$, $x'_8$, $x'_9$ не входят явным образом в уравнения движения; переменные $y'_7$, $y'_8$, $y'_9$ тождественно равны нулю; число степеней свободы системы равно шести.

Что касается наших фиктивных планет, то легко найти их смысл. Первая из них имеет координаты точки $A$ в *ее относительном движении относительно точки* $C$, но она будет иметь то же количество движения, что и точка $A$ в *неподвижной системе координат*. То же самое и для второй фиктивной планеты.

**27. Фиктивные планеты.** Неудобство предыдущего решения легко видеть, хотя этому не следует придавать большого значения. Величины $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$ не пропорциональны производным

$$\frac{dx'_1}{dt}, \quad \frac{dx'_2}{dt}, \quad \frac{dx'_3}{dt}.$$

Рассмотрим первую фиктивную планету. В момент $t$ мы придадим ей некоторые координаты $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ и некоторые количества движения $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$. В момент $t + dt$ мы присвоим ей координаты $x'_1 + dx'_1$, $x'_2 + dx'_2$, $x'_3 + dx'_3$. Но скорость, которую она должна иметь, чтобы за время $dt$ перейти из первого положения во второе, не будет равна той, которая выводится из приданного количества движения.

Важность этого замечания будет лучше понята в главе IV, когда будет рассматриваться определение оскулирующих орбит. Но сейчас укажем другое решение, лишенное отмеченного неудобства.

Для этого нужно, чтобы было

$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt},$$

где $m'_i$ суть постоянные коэффициенты, причем $m'_1 = m'_2 = m'_3$; $m'_4 = m'_5 = m'_6$; $m'_7 = m'_8 = m'_9$.

Оставим без изменения все другие наши предположения. Тогда $m'_1 = m'_2 = m'_3$ представляет массу первой фиктивной планеты;

$m'_4 = m'_5 = m'_6$ — масса второй фиктивной планеты; величины $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$ и $y'_4$, $y'_5$, $y'_6$ являются компонентами количества движения первой и второй фиктивных планет соответственно. Равным образом мы можем рассматривать $m'_7 = m'_8 = m'_9$, $x'_7$, $x'_8$, $x'_9$, $y'_7$, $y'_8$, $y'_9$ как массу, координаты и компоненты количества движения третьей фиктивной планеты.

Так как мы оставили в силе все другие предположения, в частности, то, которое выражается равенством (6), то будем иметь

$$\sum_3 m'_1 x'_1 \frac{dx'_1}{dt} = \sum_3 m_1 x_1 \frac{dx_1}{dt}.$$

Между производными $\frac{dx'_1}{dt}$, $\frac{dx'_4}{dt}$, $\frac{dx'_7}{dt}$ и $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_4}{dt}$, $\frac{dx_7}{dt}$ имеют место те же линейные соотношения, как и между координатами $x'_1$, $x'_4$, $x'_7$ и $x_1$, $x_4$, $x_7$. Поэтому в предыдущем тождестве можно заменить производные $\frac{dx'_i}{dt}$ самими величинами $x'_i$, что дает

$$\sum_3 m'_1 (x'_1)^2 = \sum_3 m_1 (x_1)^2. \tag{9}$$

С другой стороны, согласно нашим допущениям координаты $x'_2$, $x'_5$, $x'_8$, $x_2$, $x_5$, $x_8$ связаны такими же линейными соотношениями, как и переменные $x'_1$, $x'_4$, $x'_7$, $x_1$, $x_4$, $x_7$. Поэтому можно написать

$$\sum_3 m'_1 x'_1 x'_2 = \sum_3 m_1 x_1 x_2 \tag{9'}$$

и точно так же

$$\left.\begin{aligned} &\sum_3 m'_1 (x'_2)^2 = \sum_3 m_1 (x_2)^2, \quad \sum_3 m'_1 (x'_3)^2 = \sum_3 m_1 (x_3)^2, \\ &\sum_3 m'_1 x'_1 x'_3 = \sum_3 m_1 x_1 x_3, \quad \sum_3 m'_1 x'_2 x'_3 = \sum_3 m_1 x_2 x_3. \end{aligned}\right\} \tag{9''}$$

Далее, так как между $x'_1$, $x'_4$, $x'_7$, $x_1$, $x_4$, $x_7$ существуют те же линейные соотношения, как и между их производными, то мы будем иметь

$$\sum_3 m'_1 \left(\frac{dx'_1}{dt}\right)^2 = \sum_3 m_1 \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2$$

и точно так же

$$\sum_3 m'_2 \left(\frac{dx'_2}{dt}\right)^2 = \sum_3 m_2 \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2,$$

$$\sum_3 m'_3 \left(\frac{dx'_3}{dt}\right)^2 = \sum_3 m_3 \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2.$$

Складывая эти три равенства, найдем

$$\sum m'_i \left(\frac{dx'_i}{dt}\right)^2 = \sum m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2,$$

причем в этом случае индекс $i$ принимает все возможные значения.

Последнее равенство выражает то обстоятельство, что *живая сила трех фиктивных тел равна живой силе трех истинных тел.* Следовательно, имеем

$$T=\frac{1}{2}\sum m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\sum\frac{y'^2}{m'}.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы $T$ как функция величин $m'$ и производных координат $x'$ или, что то же самое, как функция $m'$ и $y'$, имеет тот же вид, что и зависимость кинетической энергии от масс $m$ и производных координат $x$ (или от масс $m$ и величин $y$).

28. Равенства (9), (9′) и (9″) допускают весьма простую геометрическую интерпретацию.

Пусть $Z$ — некоторая ось, проходящая через начало координат, $P$ и $P'$ — две перпендикулярные плоскости, проходящие через ось $Z$; пусть также $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — направляющие косинусы плоскости $P$, а $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ — плоскости $P'$.

Расстояние точки $A$ до плоскости $P$ равно

$$\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3;$$

ее расстояние до плоскости $P'$ будет

$$\alpha' x_1+\beta' x_2+\gamma' x_3.$$

Тогда квадрат ее расстояния до оси $Z$ будет равен

$$(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3)^2+(\alpha' x_1+\beta' x_2+\gamma' x_3)^2$$

и момент инерции системы трех тел относительно оси $Z$ равен

$$J=\sum\nolimits_3 m_1\,[(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3)^2+(\alpha' x_1+\beta' x_2+\gamma' x_3)^2].$$

Точно так же момент инерции системы трех фиктивных тел относительно оси $Z$ выражается равенством

$$J'=\sum\nolimits_3 m_1'\,[(\alpha x_1'+\beta x_2'+\gamma x_3')^2+(\alpha' x_1'+\beta' x_2'+\gamma' x_3')^2].$$

Возводя в квадрат выражения, стоящие в скобках, найдем, что $J$ есть многочлен второй степени относительно направляющих косинусов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$. То же самое можно сказать и относительно $J'$.

Коэффициент при $\alpha^2$ и $\alpha'^2$ в выражении для $J$ равен

$$\sum\nolimits_3 m_1x_1^2,$$

а в выражении для $J'$

$$\sum\nolimits_3 m_1'x_1'^2.$$

Коэффициент при $2\alpha\beta$, равный коэффициенту при $2\alpha'\beta'$, в выражении для $J$ равен $\sum_3 m_1x_1x_2$, а в выражении для $J'$ равен $\sum_3 m_1'x_1'x_2'$.

Резюмируя, делаем вывод, что каждый коэффициент многочлена $J$ в силу равенств (9), (9′) и (9″) равен соответствующему коэффициенту многочлена $J'$. Отсюда вытекает, что многочлены $J$ и $J'$ тождественно равны.

Итак, *момент инерции системы трех фиктивных тел относительно любой оси, проходящей через начало координат, равен моменту инерции системы трех реальных тел относительно той же оси.*

**29.** Остается определить линейные соотношения, связывающие переменные $x_1'$, $x_4'$, $x_7'$ и $x_1$, $x_4$, $x_7$ так, чтобы выполнялось условие (9).

Задача, очевидно, допускает бесконечное число решений. Вот наиболее простое, обычно применяемое решение (рис. 1).

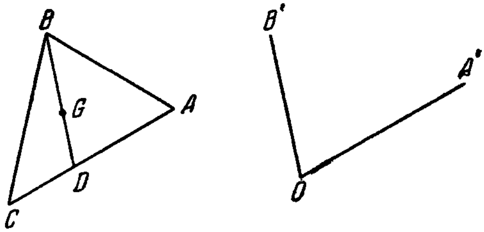


Рис. 1.

Пусть отрезок $OA'$ равен и параллелен отрезку $CA$. Две массы $m_1$ и $m_7$ помещаются в точках $A$ и $C$ соответственно. Пусть точка $D$ является центром инерции этих двух масс. Эти две массы можно заменить массой $m_7' = m_1 + m_7$, помещенной в точке $D$, и массой $m_1'$, определенной равенством

$$\frac{1}{m_1'} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_7},$$

помещенной в точке $A'$.

Действительно, если обозначим через $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ координаты точки $A'$, через $x_7'$, $x_8'$, $x_9'$ — координаты точки $D$, то очевидно, что $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ и $x_7'$, $x_8'$, $x_9'$ будут линейными функциями координат точек $A$ и $C$; с другой стороны, мы имеем между $x_1'$, $x_1$ и $x_7$ то же линейное соотношение, что и между $x_2'$, $x_2$ и $x_8$ или между $x_3'$, $x_3$ и $x_9$, а между $x_7'$, $x_1$ и $x_7$ будем иметь то же линейное соотношение, что и между $x_8'$, $x_2$ и $x_8$ или между $x_9'$, $x_3$ и $x_9$.

В самом деле,

$$x_1' = x_1 - x_7, \quad x_2' = x_2 - x_8, \quad x_3' = x_3 - x_9,$$
$$m_7'x_7' = m_1x_1 + m_7x_7, \quad m_7'x_8' = m_1x_2 + m_7x_8, \quad m_7'x_9' = m_1x_3 + m_7x_9.$$

Осталось показать, что равенство (9) выполняется, или

$$m_1' x_1'^2 + m_7 x_7'^2 = m_1 x_1^2 + m_7 x_7^2, \tag{10}$$

что означает то же самое, так как мы рассматривали тело $B$, и поэтому можно написать

$$m_4' = m_4, \quad x_4' = x_4, \quad x_5' = x_5, \quad x_6' = x_6.$$

Но равенство (10) может быть написано в виде

$$m_1' (x_1 - x_7)^2 + \frac{(m_1 x_1 + m_7 x_7)^2}{m_7'} = m_1 x_1^2 + m_7 x_7^2.$$

Из предыдущего тождества следует равенство коэффициентов

$$m_1' + \frac{m_1^2}{m_7'} = m_1, \quad -m_1' + \frac{m_1 m_7}{m_7'} = 0, \quad m_1' + \frac{m_7^2}{m_7'} = m_7.$$

Эти три соотношения дают соответственно

$$m_1' = m_1 - \frac{m_1^2}{m_7'} = \frac{m_1 (m_7' - m_1)}{m_7'} = \frac{m_1 m_7}{m_7'},$$

$$m_1' = \frac{m_1 m_7}{m_7'},$$

$$m_1' = m_7 - \frac{m_7^2}{m_7'} = \frac{m_7 (m_7' - m_7)}{m_7'} = \frac{m_1 m_7}{m_7'},$$

т. е. приводят к одному и тому же значению для $m_7'$, причем, кроме того,

$$\frac{1}{m_1'} = \frac{m_7'}{m_1 m_7} = \frac{m_1 + m_7}{m_1 m_7} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_7}.$$

Таким образом, равенство (10) доказано.

**30.** Мы только что видели, что две массы $m_1$ и $m_7$, расположенные в точках $A$ и $C$, можно заменить массами

$$m_1 + m_7, \quad m_1' = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7},$$

помещенными в $D$($D$ — центр инерции точек $A$ и $C$) и в $A'$.

Итак, мы заменили наши три истинные массы $m_1$, $m_4$, $m_7$, расположенные в точках $A$, $B$, $C$, тремя фиктивными массами $m_1'$, $m_4$, $m_1 + m_7$, расположенными в точках $A'$, $B$, $D$.

Применим второй раз это преобразование, действуя с массами, сосредоточенными в $B$ и $D$, так же, как мы поступали с массами $A$ и $C$.

Проведем отрезок $OB'$, равный и параллельный отрезку $BD$, и поместим в точке $B'$ фиктивную массу $m_4'$, определенную формулой

$$\frac{1}{m_4'} = \frac{1}{m_4} + \frac{1}{m_1 + m_7} = \frac{m_1 + m_4 + m_7}{m_4 (m_1 + m_7)}.$$

Пусть $G$ — центр инерции масс, сосредоточенных в $B$ и $D$; очевидно, что $G$ — также центр инерции всех реальных масс $A$, $B$ и $C$. Поместим в точке $G$ фиктивную массу

$$m'_7 = m_4 + (m_1 + m_7) = m_1 + m_4 + m_7.$$

Таким образом, мы заменим две массы $B$ и $D$ двумя новыми массами $B'$ и $G$.

В итоге мы постепенно заменили три действительные массы $m_1$, $m_4$, $m_7$, расположенные в точках $A$, $B$, $C$, тремя фиктивными массами $m'_1$, $m_4$, $m_1 + m_7$, сосредоточенными в точках $A'$, $B$, $D$, и, далее, тремя фиктивными массами $m'_1$, $m'_4$, $m'_7$, расположенными в точках $A'$, $B'$, $G$.

Итак, мы определили такое преобразование переменных, которое обладает всеми свойствами, перечисленными в предыдущих параграфах.

Так как центр инерции системы, по предположению, неподвижен, то третье фиктивное тело, расположенное в $G$, должно рассматриваться как неподвижное. Нам остается тогда только рассмотреть движение двух фиктивных планет $A'$ и $B'$, так что число степеней свободы сводится к шести.

Уравнения движения сохраняют каноническую форму: интегралы площадей также сохраняют свою форму. Выражение кинетической энергии в функции фиктивных масс и скоростей такое же, как и в функции действительных масс и скоростей. Наоборот, в выражении для потенциальной энергии $U$ надо сохранить действительные массы и расстояния между ними. Но мы раньше заметили, что $U$ зависит только от разностей координат $x_1 - x_7$, $x_4 - x_7$, ... ; следовательно, функция $U$ зависит только от координат $x'_1, \ldots, x'_6$ двух первых фиктивных тел $A'$ и $B'$ и не зависит от координат третьего фиктивного тела $G$ (впрочем, мы предположили, что координаты $G$ равны нулю).

**31.** Результат, которого мы добились, можно выразить следующим образом. Движение планеты $A$ отнесено к подвижным осям, проходящим через центральное тело $C$, а движение второй планеты $B$ относится к точке $D$ (центру инерции масс $A$ и $C$).

Этот результат можно, очевидно, обобщить. Пусть имеется центральное тело $C$ и $n$ планет $P_1, P_2, \ldots, P_n$; будем рассматривать движение планеты $P_1$ в системе координат с началом в точке $C$; движение планеты $P_2$ — в системе координат с осями, параллельными осям первой системы координат, и с началом в центре инерции масс $C$ и $P_1$; движение планеты $P_3$ — в системе координат с началом в центре инерции масс $C$, $P_1$ и $P_2$ и т. д. Этот метод может быть применен к любому количеству планет*).

*) В литературе по небесной механике такие координаты обычно называются координатами Якоби. (*Прим. перев.*)

Очевидно, что в задаче трех тел вместо того, чтобы рассматривать движение планеты $A$ относительно $C$ и планеты $B$ относительно центра инерции $A$ и $C$, можно, наоборот, рассматривать движение планеты $B$ относительно $C$, а движение $A$ — относительно центра инерции масс $B$ и $C$.

В дальнейшем, как правило, будем всегда предполагать, что используется преобразование переменных, изложенное в § 30, а не то, которое было изложено в § 26. Положим в дальнейшем, что

$$U_1 = -\frac{m_1 m_7}{AC}, \quad U_2 = -\frac{m_4(m_1+m_7)}{BD},$$

$$U_3 = m_1 m_4\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right),$$

откуда

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

**32. Случай, когда одна из масс равна нулю.** Рассмотрим случай, когда одна из масс настолько мала, что ее притяжением можно пренебречь. Это имеет место, например, когда изучаются возмущения малой планеты Юпитером. Движение малой планеты претерпевает значительные возмущения со стороны Юпитера, но движение Юпитера не возмущается притяжением малой планеты.

Другой такой случай будем иметь в теории Луны. Масса Луны настолько мала, что можно было допустить, что относительное движение Солнца относительно центра инерции Земля — Луна не изменяется притяжением Луны.

Итак, допустим, что масса $m_4$, например, может быть рассматриваема как бесконечно малая первого порядка. Тогда с точностью до бесконечно малых величин второго порядка будем иметь

$$m_4' = \frac{m_4(m_1+m_7)}{m_1+m_4+m_7} = m_4.$$

Следовательно, $m_4'$— также бесконечно малая величина первого порядка и таковы же величины $y_4'$, $y_5'$, $y_6'$ и $\frac{y_4'^2}{m_4'}$, $\frac{y_5'^2}{m_4'}$, $\frac{y_6'^2}{m_4'}$. Положим

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1'^2}{m_1'} + \frac{y_2'^2}{m_2'} + \frac{y_3'^2}{m_3'}\right), \quad T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{y_4'^2}{m_4'} + \frac{y_5'^2}{m_5'} + \frac{y_6'^2}{m_6'}\right),$$

так что $T_1$ и $T_2$— соответственно кинетические энергии первой и второй фиктивных планет. Положим также

$$U = U_1 + U_2 + U_3,$$

$$U_1 = -\frac{m_1 m_7}{AC}, \quad U_2 + U_3 = -\frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_4 m_7}{BC}.$$

Мы видим, что $T_1$ и $U_1$ конечны, тогда как $T_2$ и $U_2+U_3$ суть малые первого порядка. Мы можем теперь положить

$$F=\Phi_0+m_4\Phi_1,\quad \Phi_0=T_1+U_1,\quad m_4\Phi_1=T_2+U_2+U_3.$$

Канонические уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{dx_i'}{dt}=\frac{\partial\Phi_0}{\partial y_i'}+m_4\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_i'},\quad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_i'}-m_4\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_i'}. \tag{11}$$

Для первой фиктивной планеты, т. е. для $i=1, 2$ или $3$, имеем $\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_i'}=0$, так как $T_2$ зависит только от $y_4'$, $y_5'$, $y_6'$; произведение $m_4\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_i'}$ весьма мало, тогда как $\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_i'}$ и $\frac{dy_i'}{dt}$ конечны. Мы можем, следовательно, пренебречь членами с $\Phi_1$, так что наши уравнения напишутся в виде

$$\frac{dx_i'}{dt}=\frac{\partial\Phi_0}{\partial y_i'},\quad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_i'}. \tag{12}$$

Так как функция $\Phi_0$ зависит только от переменных $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$, то система уравнений (12) является полной канонической системой с тремя степенями свободы. Эта система определяет движение первой фиктивной планеты, или, что то же самое, относительное движение планеты $A$ относительно Солнца $C$. Это движение таково, как если бы масса $m_4$ не существовала, т. е. оно является кеплеровским.

Рассмотрим теперь движение второй фиктивной планеты, т. е. относительное движение планеты $B$ относительно центра инерции системы двух тел $A$ и $C$. Для этого вернемся к системе уравнений (11) и придадим индексу $i$ значения 4, 5, 6. Так как $\Phi_0$ не зависит от $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$, $y_4'$, $y_5'$, $y_6'$, то мы будем иметь

$$\frac{dx_i'}{dt}=m_4\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_i'},\quad \frac{dy_i'}{dt}=-m_4\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_i'}. \tag{13}$$

Так как движение фиктивной планеты можно считать известным, то величины $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$ будут известными функциями времени. Подставляя в функцию $\Phi_1$ и в ее частные производные их значения, мы получаем для определения движения второй фиктивной планеты систему канонических уравнений с тремя степенями свободы. Но характеристическая функция $\Phi_1$ будет зависеть не только от неизвестных $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$, $y_4'$, $y_5'$, $y_6'$, но также и от времени. Следовательно, будем иметь случай, который рассматривался в § 12.

Мы можем написать уравнения (13) таким образом, чтобы лучше выявлялся порядок малости различных членов.

Действительно, положим

$$y'_4 = m'_4 y''_4, \quad y'_5 = m'_5 y''_5, \quad y'_6 = m'_6 y''_6,$$

или, так как $m'_4 = m'_5 = m'_6$ и $m'_4 = m_4$ с точностью до малых второго порядка,

$$y'_i = m_4 y''_i \quad (i = 4,\ 5,\ 6).$$

Так как $y'$ суть величины первого порядка, то $y''$ будут иметь конечные значения. Тогда

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}\left(y''^2_4 + y''^2_5 + y''^2_6\right) - \frac{m_1}{AB} - \frac{m_7}{CB},$$

и уравнения (13) запишутся в виде

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y''_i}, \quad \frac{dy''_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x'_i}. \tag{14}$$

Здесь неизвестные $x'$ и $y''$ конечны и все члены функции $\Phi_1$ представляются в конечной форме. Масса $m_4$ не входит более в эти уравнения.

**33.** Раньше мы относили движение малой планеты $B$ к центру инерции $A$ и $C$, а движение планеты $A$ к центру $C$. Мы смогли бы поступить и наоборот и отнести малую планету к Солнцу, а большую — к центру инерции системы Солнце — малая планета. Для этого, сохраняя все выводы, мы только должны допустить, что бесконечно малой величиной является масса $m_1$ тела $A$.

Движение малой планеты $A$ тогда будет отнесено к Солнцу $C$, а движение планеты $B$ — к центру инерции $D$ тел $A$ и $C$. Но так как масса планеты $A$ равна нулю, центр инерции $D$ совпадает с $C$, а это означает, что движение большой планеты также относится к Солнцу.

Тогда с точностью до малых первого порядка будем иметь

$$m'_4 = \frac{m_4(m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7} = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}$$

и с точностью до малых второго порядка

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7} = m_1.$$

Сохраним для функций $T_1$, $T_2$, $U_1$, $U_2$ и $U_3$ обозначения предыдущего параграфа.

Здесь $T_2$ и $U_2$ конечны, а $T_1$ и $U_1 + U_3$ — величины первого порядка. Положим

$$F = \Phi_0 + m_1\Phi_1, \quad \Phi_0 = T_2 + U_2, \quad m_1\Phi_1 = T_1 + U_1 + U_3.$$

В конечном итоге мы снова придем к уравнениям (11), с той лишь разницей, что масса $m_4$ заменена массой $m_1$.

Если мы изучим сначала движение планеты $B$, то можем пренебречь функцией $\Phi_1$ и получим систему канонических уравнений (12), которая показывает, что движение планеты $B$ является кеплеровским.

Если мы желаем изучить движение малой планеты $A$, необходимо придать индексу $i$ значения 1, 2, 3; соответствующие частные производные функции $\Phi_0$ равны нулю, и мы получаем канонические уравнения

$$\frac{dx'_i}{dt} = m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x'_i}. \tag{13'}$$

Полагая, как и в предыдущем параграфе,

$$y'_i = m'_i y''_i = m_i y''_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

мы будем иметь

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(y''^2_1 + y''^2_2 + y''^2_3) + \frac{U_1 + U_3}{m_1}$$

и снова придем к уравнениям (14).

34. Мы видели в § 12, что когда характеристическая функция $F$ зависит явно от времени, интеграл живых сил перестает существовать. В уравнениях (14) § 32 и 33 характеристическая функция $\Phi_1$ зависит не только от переменных $x'$ и $y'$, но и от времени, поэтому интеграл живых сил $\Phi_1 = \text{const}$ не имеет места.

То же самое можно сказать и об интегралах площадей. Что же происходит с интегралом живых сил и с интегралами площадей, которые имеют место в общем случае, когда одну из масс мы заставляем стремиться к нулю? Они не перестают существовать, но в пределе оказываются соотношениями только между координатами и проекциями скорости большой планеты и не содержат координаты и проекции скорости малой планеты. Следовательно, они теряют интерес, когда дело касается изучения движения малой планеты.

Взамен этому мы видели в § 12, что можно сделать такую замену переменных в уравнениях (14), чтобы их каноническая форма сохранилась.

35. **Ограниченная задача.** Впоследствии мы часто будем рассматривать этот весьма важный частный случай задачи трех тел. Допустим, что одна из масс равна нулю, а движение большой планеты происходит по кеплеровской орбите вокруг Солнца. Более того, допустим, что эксцентриситет этой кеплеровской орбиты равен нулю, так что орбита большой планеты является круговой. Тогда большая планета и Солнце движутся по концентрическим круговым орбитам, центр которых совпадает с их центром инерции, и эти круговые орбиты расположены в одной плоскости.

Наконец, предположим, что начальное положение и начальная скорость малой планеты лежат в этой же плоскости, так что малая планета всегда будет оставаться в этой плоскости.

Описанный частный случай задачи трех тел называется *ограниченной задачей* *). Для исследования можно пользоваться методами, изложенными в § 32 или 33. В обоих случаях движение большой планеты отнесено к Солнцу, но движение малой планеты отнесено либо к Солнцу, либо к центру инерции Солнца и большой планеты.

В § 34 мы видели, что для малой планеты интеграл живых сил и интегралы площадей теряют смысл. Но в случае ограниченной задачи трех тел существует комбинация этих интегралов, представляющая интеграл уравнений (14), называемая *интегралом Якоби*. Это будет показано ниже.

**36. Возмущающая функция.** Мы имеем

$$U_1+U_2=-\frac{m_1m_7}{AC}-\frac{m_4(m_1+m_7)}{BD},$$

$$U_3=\frac{m_4(m_1+m_7)}{BD}-\frac{m_4m_7}{BC}-\frac{m_1m_4}{AB}.$$

Допустим, что тело $C$ — это Солнце, а тела $A$, $B$ — планеты. Из этого следует, что массы $m_1$ и $m_4$ очень малы по сравнению с $m_7$, и их можно рассматривать как величины первого порядка. Центр инерции $D$ будет находиться вблизи точки $C$, так как он делит расстояние $AC$ на отрезки, пропорциональные массам $m_1$ и $m_7$. Расстояние $CD$ можно также рассматривать как величину первого порядка малости и то же самое можно сказать о разностях

$$BC-BD,\quad \frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}.$$

При этих условиях функция $U_1+U_2$ — также первого порядка, так как все ее слагаемые имеют в качестве множителей массы $m_1$ или $m_4$. Функция

$$U_3=m_1m_4\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{AB}\right)+m_4m_7\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}\right)$$

является величиной второго порядка малости, так как первое слагаемое содержит множитель второго порядка малости $m_1m_4$, а второе слагаемое $m_4\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}\right)$ является также величиной второго порядка.

С другой стороны, величины $m_1'$ и $m_4'$ — первого порядка и то же самое можно сказать о величинах $y_i'=m_i'\frac{dx_i'}{dt}$, так как для

*) Под «ограниченной задачей» автор понимает плоскую ограниченную круговую задачу трех тел. (*Прим. перев.*)

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ массы $m'_i$ — бесконечно малые, а $y'_7, y'_8, y'_9$ равны нулю.

То же можно сказать о $\frac{y_i'^2}{m'_i}$ и о

$$T = T_1 + T_2,$$

где обозначения $T_1$ и $T_2$ имеют тот же смысл, что и в § 32.

Мы можем, следовательно, положить

$$F = F_0 + \mu F_1,$$

где

$$F_0 = T + U_1 + U_2, \qquad \mu F_1 = U_3.$$

Тогда $F_0$ есть величина первого порядка, а $\mu F_1$ — второго, и если параметр $\mu$ означает некоторый весьма малый числовой коэффициент порядка $m_1$ или $m_4$, то $F_1$ имеет тот же порядок, что и $F_0$. Благодаря введению параметра $\mu$ относительная величина двух членов $F_0$ и $\mu F_1$ делается очевидной.

Выражение $\mu F_1$ называется *возмущающей функцией.*

37. Рассмотрим сначала функцию $F_0$. Имеем

$$F_0 = \left(T_1 - \frac{m_1 m_7}{AC}\right) + \left[T_2 - \frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD}\right]. \tag{15}$$

Первая скобка зависит только от переменных $x'_1, x'_2, x'_3, y'_1, y'_2, y'_3$, а вторая лишь от переменных $x'_4, x'_5, x'_6, y'_4, y'_5, y'_6$. Если в первом приближении пренебречь очень малым членом $\mu F_1$, то $F$ приведется к $F_0$, и мы будем иметь

$$F = F'_0 + F''_0,$$

где $F'_0$ и $F''_0$ означают первое и второе слагаемые формулы (15), так что канонические уравнения задачи примут вид

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial F'_0}{\partial y'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial F'_0}{\partial x'_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{16}$$

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial F''_0}{\partial y'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial F''_0}{\partial x'_i} \qquad (i = 4, 5, 6). \tag{16'}$$

В уравнения (16) входят только координаты и компоненты скорости первой фиктивной планеты, в то время как в уравнения (16′) входят координаты и компоненты скорости второй фиктивной планеты, следовательно, уравнения (16) и (16′) являются независимыми. Отсюда следует, что движения фиктивных планет определяются независимо и могут рассматриваться отдельно.

Если сначала будем рассматривать уравнения (16), то

$$F'_0 = \frac{1}{2m'_1}\left(y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2\right) - \frac{m_1 m_7}{AC}.$$

Из этого вытекает, что движение первой фиктивной планеты совпадает с движением массы $m_1'$, притягиваемой неподвижной массой

$$\frac{m_1 m_7}{m_1'} = m_1 + m_7.$$

Это движение будет эллиптическим, происходящим согласно законам Кеплера *).

Переходя к системе (16′), имеем

$$F_0'' = \frac{1}{2m_4'}\left(y_4'^2 + y_5'^2 + y_6'^2\right) - \frac{m_4(m_1+m_7)}{BD}.$$

Из предыдущего равенства следует, что движение второй фиктивной массы совпадает с движением тела с массой

$$m_4' = \frac{m_4(m_1+m_7)}{m_1+m_4+m_7},$$

притягиваемого неподвижной массой $\dfrac{m_4(m_1+m_7)}{m_4'} = m_1 + m_4 + m_7.$

Следовательно, движение второй фиктивной массы также является кеплеровским.

Так как член $\mu F_1$, которым мы пренебрегали, весьма мал по сравнению с $F_0$, то следует ожидать, что ошибка, обусловленная этим упрощением, не должна быть большой. Истинные орбиты будут мало отличаться от кеплеровских эллипсов, а возмущения, которые будут наложены на эти эллиптические орбиты, весьма малы.

38. Рассмотрим теперь возмущающую функцию $\mu F_1$, которую можно представить в следующем виде:

$$\mu F_1 = m_1 m_4\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{A'B'}\right) + m_1 m_4\left(\frac{1}{A'B'} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right).$$

Первый член в правой части называется *главной частью возмущающей функции*. Остальные два члена составляют *дополнительную часть возмущающей функции*. Главная часть имеет вид

$$m_1 m_4\left[\frac{1}{\sqrt{x_4'^2 + x_5'^2 + x_6'^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_4'-x_1')^2 + (x_5'-x_1')^2 + (x_6'-x_3')^2}}\right].$$

Интересно рассмотреть, как можно перейти от выражения главной части возмущающей функции к выражению для дополнительной части возмущающей функции $\mu F_1$.

*) Имея в виду движения планет вокруг Солнца, Пуанкаре везде рассматривает только эллиптическое кеплеровское движение. (*Прим. ред.*)

Допустим сначала, что

$$AC=\sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2}$$

намного меньше, чем

$$BD=\sqrt{x_4'^2+x_5'^2+x_6'^2}\,.$$

В этом случае выражение

$$\frac{1}{A'B'}=[(x_4'-x_1')^2+(x_5'-x_2')^2+(x_6'-x_3')^2]^{-\frac{1}{2}}$$

можно разложить в ряд по возрастающим степеням величин $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$. В самом деле, мы имеем

$$(A'B')^2=(BD)^2+(AC)^2-2AC\cdot BD\cos\gamma$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{A'B'}=[BD-ACe^{i\gamma}]^{-\frac{1}{2}}\cdot[BD-ACe^{-i\gamma}]^{-\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

где $\gamma$ — угол между направлениями $BD$ и $AC$, или между $OB'$ и $OA'$.

Каждый из двух множителей второй части (17) может быть разложен в ряд по степеням $\frac{AC}{BD}$ всякий раз, когда эта величина меньше единицы. Следовательно, левая часть также может быть разложена в ряд и мы можем написать

$$\frac{1}{A'B'}=\sum P_n\frac{AC^n}{BD^{n+1}}\,,$$

где $P_n$ — некоторая функция угла $\gamma$.

Сверх того, легко видеть, что общий член разложения $P_n\frac{AC^n}{BD^{n+1}}$ можно представить в виде частного двух целых многочленов относительно $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$. К этому вопросу мы вернемся в одной из последующих глав, где детально рассмотрим разложение возмущающей функции.

Раз это так, то первый член нашего разложения, который соответствует значению $n=0$, есть не что иное, как $\frac{1}{BD}$, так что главная часть возмущающей функции будет равна

$$-m_1m_4\sum P_n\frac{AC^n}{BD^{n+1}}\,, \tag{18}$$

где $n$ принимает все целые положительные значения 1, 2, ... Теперь полная возмущающая функция может быть написана в виде

$$\mu F_1=m_1m_4\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{BA}\right)+m_4m_7\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}\right)$$

и мы будем иметь

$$BA^2 = (x_4' - \alpha x_1')^2 + (x_5' - \alpha x_2')^2 + (x_6' - \alpha x_3')^2,$$
$$BC^2 = (x_4' - \beta x_1')^2 + (x_5' - \beta x_2')^2 + (x_6' - \beta x_3')^2,$$

где

$$\alpha = \frac{m_7}{m_1 + m_7}, \quad \beta = \frac{-m_1}{m_1 + m_7},$$

так как непосредственно видно, что проекции вектора $DA$ на оси координат равны $\alpha x_1'$, $\alpha x_2'$, $\alpha x_3'$, а проекции вектора $DC$ равны $\beta x_1'$, $\beta x_2'$, $\beta x_3'$.

Мы видим, что выражения для $BA$ и $BC$ отличаются от $A'B'$ только тем, что вместо величин $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ в них входят $\alpha x_1'$, $\alpha x_2'$, $\alpha x_3'$ или $\beta x_1'$, $\beta x_2'$, $\beta x_3'$.

Поэтому будем иметь

$$\frac{1}{BA} = \sum \alpha^n P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}}, \quad \frac{1}{BC} = \sum \beta^n P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}},$$

где $n$ принимает значения 0, 1, 2, ...

Таким образом, можно написать

$$\mu F_1 = m_4 (m_1 + m_7) \frac{1}{BD} - m_4 \sum (m_1 \alpha^n + m_7 \beta^n) P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}}.$$

Но $\frac{1}{BD}$ равна первому члену разложения $P_0 \frac{(AC)^0}{BD}$, а, с другой стороны,

$$m_1 \alpha^n + m_7 \beta^n = (m_1 + m_7)(\alpha \beta^n - \beta \alpha^n).$$

Следовательно, имеем

$$\mu F_1 = m_4 (m_1 + m_7) \left[ \frac{1}{BD} - \sum (\alpha\beta^n - \beta\alpha^n) P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}} \right].$$

При $n = 0$ $\alpha\beta^n - \beta\alpha^n = \alpha - \beta = 1$, $P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}} = \frac{1}{BD}$, поэтому соответствующий член уничтожается с членом $\frac{1}{BD}$. Для $n = 1$ $\alpha\beta^n - \beta\alpha^n = 0$ и соответствующий член разложения равен нулю. Следовательно, мы можем написать

$$\mu F_1 = -m_4 (m_1 + m_7) \sum (\alpha\beta^n - \beta\alpha^n) P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}}$$

(где $n$ принимает значения 2, 3, 4, ...) или

$$\mu F_1 = -m_4 \sum \frac{m_1 m_7^n \pm m_7 m_1^n}{(m_1 + m_7)^n} P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}}$$

(знак «плюс» нужно взять в том случае, если $n$ четное, а знак «минус», если $n$ — нечетное).

Итак, когда главная часть возмущающей функции разложена в ряд, имеющий форму (18), и когда желательно получить в том же виде разложение дополнительной части возмущающей функции, то достаточно умножить каждый член разложения (18) на подходящий постоянный множитель. Этот множитель

$$\frac{m_7^n \pm m_7 m_1^{n-1}}{(m_1+m_7)^n}$$

с точностью до величин порядка $m_1$ равен 1 для $n = 2, 3, 4, \ldots$ и нулю, если $n = 1$.

Таким образом, с точностью до величин порядка $m_1^2 m_4$, т. е. до третьего порядка, возмущающая функция $\mu F_1$ будет равна своей главной части без первого члена разложения (18).

Главная часть равна

$$-m_1 m_4 \sum P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{19}$$

а дополнительная часть с точностью до членов третьего порядка равна

$$m_1 m_4 P_1 \frac{AC}{BD^2}\,.$$

Выражение (19), представляющее совокупность членов первой степени в разложении

$$\frac{m_1 m_4}{A'B'} = m_1 m_4 \left[(x_4' - x_1')^2 + (x_5' - x_2')^2 + (x_6' - x_3')^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

по степеням $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, можно преобразовать к другому виду. Действительно, пренебрегая квадратами величин $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, мы найдем

$$\frac{m_1 m_4}{A'B'} = m_1 m_4 \left[BD^2 - 2\,(x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6')\right]^{-\frac{1}{2}}$$

или

$$\frac{m_1 m_4}{A'B'} = m_1 m_4 \left[\frac{1}{BD} + \frac{x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3 x_6'}{BD^3}\right].$$

Отсюда следует, что приближенное выражение для дополнительной части возмущающей функции имеет вид

$$\frac{m_1 m_4}{BD^3}\,(x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6').$$

**39.** Такой же результат можно получить более быстрым путем. Пусть

$$m_1 m_4 \left(\frac{1}{A'B'} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right)$$

есть дополнительная часть возмущающей функции. Так как $\frac{1}{A'B'}-\frac{1}{AB}$ — величина порядка $m_1$, то первое слагаемое — порядка $m_1^2 m_4$, т. е. третьего порядка. Рассмотрим второе слагаемое

$$m_4 m_7\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}\right).$$

Мы нашли, что

$$\frac{1}{BC}=[(x_4'-\beta x_1')^2+(x_5'-\beta x_2')^2+(x_6'-\beta x_3')^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Разложим величину $\frac{1}{BC}$ по степеням $\beta$, что возможно, так как при весьма малом $\beta$ $\beta AC = DC$ всегда меньше $BD$. Мы найдем

$$\frac{1}{BC}=\frac{1}{BD}+\beta P_1\frac{AC}{BD^2}+\beta^2 P_2\frac{AC^2}{BD^3}+\ldots$$

Всеми членами, начиная с третьего, можно пренебречь, так как они умножаются на $m_4 m_7$, т. е. все они имеют порядок выше третьего. Таким образом, для дополнительной части возмущающей функции с тем же приближением остается

$$-m_4 m_7\beta P_1\frac{AC}{BD^2}=m_4 m_7\frac{m_1}{m_1+m_7}P_1\frac{AC}{BD^2}.$$

Пренебрегая еще произведением $m_4 m_1^2$, будем иметь

$$m_4 m_1 P_1\frac{AC}{BD^2}=\frac{m_1 m_4}{BD^3}(x_1' x_4'+x_2' x_5'+x_3' x_6').$$

Итак, утверждение доказано. Изложенный прием может быть применен и в том случае, когда $AC$ больше $BD$, между тем как в предыдущем параграфе мы предполагали, что $AC$ меньше $BD$.

40. Рассмотрим, в частности, случай, когда одна из масс равна нулю. Сначала, как и в § 33, допустим, что $m_1=0$. Тогда движение обеих планет отнесено к Солнцу, так как точки $D$ и $C$ совпадают. Мы имеем тогда

$$F=\Phi_0+m_1\Phi_1,$$

и можем пренебречь членами порядка $m_1^2$. Это значит, что в возмущающей функции пренебрегаем членами порядка $m_4 m_1^2$. Мы видим, что с указанной точностью дополнительная часть возмущающей функции приводится к выражению

$$\frac{m_1 m_4}{BD^3}(x_1' x_4'+x_2' x_5'+x_3' x_6').$$

Но центр инерции $D$ находится очень близко от точки $C$, и с точностью до величин порядка $m_1$ $BD$ может быть заменено на $BC$, а $A'B'$ на $AB$.

Пренебрегая $m_1^2$, мы будем иметь, следовательно,

$$F=(T_1+T_2)-\frac{m_1m_7}{AC}-\frac{m_4(m_1+m_7)}{BD}+m_1m_4\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{AB}\right)+$$
$$+\frac{m_1m_4}{BD^3}(x_1'x_4'+x_2'x_5'+x_3'x_6').$$

В последних двух членах $BD$ с той же точностью можно заменить на $BC$. Отсюда, пренебрегая в выражении для $\Phi_0$ величиной порядка $m_1$, а в выражении для $\Phi_1$ — величиной порядка $m_1^2$, получим

$$\Phi_0=T_2-\frac{m_4(m_1+m_7)}{BC},$$

$$\Phi_1=\frac{T_1}{m_1}-\frac{m_7}{AC}+m_4\left(\frac{1}{BC}-\frac{1}{AB}\right)+\frac{m_4}{BC^3}(x_1'x_4'+x_2'x_5'+x_3'x_6').$$

Напомним, что в обозначениях § 33 мы имели

$$\frac{T_1}{m_1}=\frac{1}{2}(y_1''^2+y_2''^2+y_3''^2).$$

**41.** Если допустить, как и в § 32, что $m_4=0$, то движение большой планеты будет отнесено к Солнцу, а движение малой планеты — к центру инерции большой планеты и Солнца. Тогда найдем

$$\Phi_1=\frac{T_2}{m_4}-\frac{m_1+m_7}{BD}+m_1\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{A'B'}\right)+m_1\left(\frac{1}{A'B'}-\frac{1}{AB}\right)+$$
$$+m_7\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}\right).$$

В правой части этого равенства третье слагаемое соответствует главной части возмущающей функции, а последние два слагаемых представляют дополнительную часть возмущающей функции. Дальнейшее упрощение невозможно.

**42. Случай Луны.** Случай теории Луны требует специального рассмотрения. Допустим, что тело $A$ представляет Луну, тело $B$ — Солнце и тело $C$ — Землю. При этих условиях очевидно, что расстояние $AC$ значительно меньше расстояния $BD$.

Положим тогда

$$U=U_1+U_2+U_3,\quad U_1=-\frac{m_1m_7}{AC},\quad U_2=-\frac{m_4(m_1+m_7)}{BD},$$
$$U_3=m_1m_4\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{AB}\right)+m_4m_7\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}\right).$$

Мы сохраним для $T_1$ и $T_2$ обозначения § 32, так что

$$F=T_1+T_2+U_1+U_2+U_3.$$

Сравним порядок величин слагаемых. $U_3$ является возмущающей функцией. Принимая во внимание, что величина $AC$ намного меньше $BD$, мы можем написать, как в § 38,

$$U_3 = -m_4 \sum \frac{m_1 m_7^n \pm m_7 m_1^n}{(m_1+m_7)^n} P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}}.$$

В силу малости $AC$ первый член

$$-m_4 \frac{m_1 m_7^2 + m_7 m_1^2}{(m_1+m_7)^2} P_2 \frac{AC^2}{BD^3}$$

намного больше других. Так как масса $m_1$ значительно меньше массы $m_7$, то предыдущее выражение имеет такой же порядок, как

$$m_1 m_4 \frac{AC^2}{BD^3}.$$

Наоборот, $U_2$— величина порядка $\frac{m_4 m_7}{BD}$, и $U_1$— порядка $\frac{m_1 m_7}{AC}$. Остались нерассмотренными функции $T_1$ и $T_2$. Мы знаем, что в кеплеровском движении, если эксцентриситет равен нулю, кинетическая энергия постоянна и равна половине абсолютного значения потенциальной энергии.

Но гелиоцентрическая орбита Земли и геоцентрическая орбита Луны очень близки к кеплеровым эллипсам с малыми эксцентриситетами. Из этого следует, что $T_1$ приблизительно равна $-\frac{U_1}{2}$ и $T_2$ приблизительно равна $-\frac{U_2}{2}$.

Итак, мы можем разложить функцию $F$ на три части:

1) $T_2+U_2$— величина порядка $\frac{m_4 m_7}{BD}$;

2) $T_1+U_1$— величина порядка $\frac{m_1 m_7}{AC}$;

3) $U_3$—величина порядка $m_1 m_4 \frac{AC^2}{BD^3}$.

Мы имеем приближенно

$$\frac{m_4}{m_7} = 330\,000, \qquad \frac{m_1}{m_7} = \frac{1}{80}, \qquad \frac{AC}{BD} = \frac{1}{400}.$$

Следовательно, отношение

$$\frac{U_3}{T_1+U_1} \text{— порядка } \frac{m_4}{m_7}\left(\frac{AC}{BD}\right)^3$$

$$\text{или } \frac{1}{150} \text{ и } \frac{U_3}{T_2+U_2} \text{— порядка } \frac{m_1}{m_7}\left(\frac{AC}{BD}\right)^3 \text{ или } \frac{1}{12\,000\,000}.$$

Мы видим, что третья часть возмущающей функции значительно меньше второй части и пренебрежимо мала в сравнении с первой частью. Следовательно, мы можем положить

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1,$$

где $\Phi_0 = T_2 + U_2$, $m_1\Phi_1 = T_1 + U_1 + U_3$. Для определения переменных $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$ мы имеем канонические уравнения

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y'_i} + m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y'_i},$$

$$\frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x'_i} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x'_i} - m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x'_i}$$

$$(i = 4,\ 5,\ 6).$$

Заметим, что $\Phi_1$ не зависит от переменных $y'_4$, $y'_5$, $y'_6$, которые входят только в $T_2$; функции $T_1$ и $U_1$ не зависят от переменных $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$, от которых зависит только функция $U_3$. Поэтому предыдущие уравнения примут вид

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x'_i} - \frac{\partial U_3}{\partial x'_i}, \tag{20}$$

и если пренебречь в уравнениях функцией $U_3$, окончательно получим

$$\frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x'_i}.$$

Движение Солнца относительно центра инерции Земля — Луна определяется уравнениями, в которых функция $F$ заменена функцией $\Phi_0$, т. е. массы Земли и Луны сосредоточены в их общем центре инерции. Следовательно, *движение Солнца является кеплеровским*. (Разумеется, при условии, что рассматриваются только взаимные действия Солнца, Земли и Луны и пренебрегается притяжением других планет.)

Для определения координат $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ мы воспользуемся каноническими уравнениями при $i = 1, 2, 3$. В силу того, что функция $\Phi_0$ не зависит от переменных $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$, эти уравнения упростятся, и мы получим

$$\frac{dx'_i}{dt} = m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x'_i}. \tag{13'}$$

Функция $\Phi_1$ зависит, так же как и в § 33 и 40, не только от неизвестных $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$, но и от времени $t$. В самом деле, она зависит от координат $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$, которые можно рассматривать как известные функции времени, определяемые уравнениями (20).

Функция $m_1\Phi_1$ состоит сама из двух частей, $T_1 + U_1$ и $U_3$. Вторая часть, как мы видели раньше, намного меньше первой части, поэтому она играет роль возмущающей функции. Но малость этой возмущающей функции не обусловлена теми же обстоятельствами, как в случае возмущений планет.

Роль возмущающей массы играет масса Солнца, которую нельзя считать малой величиной, наоборот, она очень велика, Но отношение, которое нужно рассматривать —

$$\frac{m_4}{m_7}\left(\frac{AC}{BD}\right)^3,$$

весьма малó, так как отношение $\frac{AC}{BD}$ малó.

Малость $\frac{AC}{BD}$ влечет за собой еще одно следствие, а именно, видна выгода разложения возмущающей функции в форме (18), как было сделано в § 38.

Сделаем еще одно замечание: в § 30 и 40 мы говорили, что когда масса $m_1$ бесконечно мала, можно рассматривать движение тел $A$ и $B$ относительно $C$, так как центр инерции $D$ совпадал с точкой $C$. Здесь же масса $m_1$ настолько мала, что ее влиянием на движение Солнца относительно центра инерции $D$ можно пренебречь, как это было и в § 33 и 40, но она не настолько мала по сравнению с $m_7$, чтобы считать, что точки $C$ и $D$ совпадают.

**43. Случай замены § 26.** Все, что было сказано выше, предполагает, что использовано преобразование § 30, которое мы и будем обычно применять. Посмотрим, что изменится, если мы возьмем другое преобразование переменных, например, преобразование, рассматривавшееся в § 26.

В § 26 мы положили

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_7, & x_4' &= x_4 - x_7, & x_7' &= x_7, \\ y_1' &= y_1, & y_4' &= y_4, & y_7' &= y_1 + y_4 + y_7. \end{aligned}$$

Таким образом, мы определили такую замену переменных, которая не нарушает ни каноническую форму уравнений движения, ни форму интегралов площадей. Но противоположно тому, что дает преобразование переменных, приведенное в § 30, здесь выражение кинетической энергии в функции переменных $y'$ не имеет такой же формы, как в функции $y$. Действительно, с учетом условия $y_7' = 0$ имеем

$$\frac{y_1^2}{m_1} + \frac{y_4^2}{m_4} + \frac{y_7^2}{m_7} = \frac{y_1'^2}{m_1} + \frac{y_4'^2}{m_4} + \frac{(y_1' + y_4')^2}{m_7},$$

что может быть написано в виде

$$\frac{y_1'^2}{m_1'} + \frac{y_4'^2}{m_4'} + \frac{2y_1' y_4'}{m_7},$$

где положено

$$m_1' = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \quad m_4' = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}.$$

Следовательно, мы будем иметь

$$T=\frac{1}{2}\sum\frac{y_i'^2}{m_i'}=T_1+T_2+T_3,$$

где

$$T_1=\frac{1}{2m_1'}(y_1'^2+y_2'^2+y_3'^2),$$

$$T_2=\frac{1}{2m_4'}(y_4'^2+y_5'^2+y_6'^2),$$

$$T_3=\frac{1}{m_7}(y_1'y_4'+y_2'y_5'+y_3'y_6').$$

В конечном итоге для $F$ будем иметь

$$F=T_1+T_2+T_3-\frac{m_1m_7}{AC}-\frac{m_4m_7}{BC}-\frac{m_1m_4}{AB}$$

и эту функцию $F$ можно рассматривать как сумму четырех частей:

1) $T_1-\frac{m_1m_7}{AC}$, что определяет кеплеровское движение, которое весьма мало отличается от движения планеты $A$ относительно $C$;

2) $T_2-\frac{m_4m_7}{BC}$ определяет кеплеровское движение, которое весьма мало отличается от движения точки $B$ относительно $C$;

3) $-\frac{m_1m_4}{AB}$ является главной частью возмущающей функции и имеет выражение

$$-\frac{m_1m_4}{\sqrt{(x_1'-x_4')^2+(x_2'-x_5')^2+(x_3'-x_6')^2}};$$

4) $T_3$ представляет дополнительную часть возмущающей функции.

**44. Обычный метод.** Астрономы пользуются еще одним преобразованием. Положим

$$x_1'=x_1-x_7, \quad x_4'=x_4-x_7.$$

Таким образом, планеты $A$ и $B$ обе относятся к Солнцу $C$. Сверх того, положим

$$y_i'=m_i\frac{dx_i'}{dt}.$$

Легко видеть, что тогда уравнения движения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_i'}{dt}=\frac{\partial F'}{\partial y_i'}, \quad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{\partial F'}{\partial x_i'} \qquad (i=1,\ 2,\ 3),\\ &\frac{dx_i'}{dt}=\frac{\partial F''}{\partial y_i'}, \quad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{\partial F''}{\partial x_i'} \qquad (i=4,\ 5,\ 6),\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где

$$F' = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{BC^3}(x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6'),$$

$$F'' = \sum \frac{y_i'^2}{2m_i} - U - \frac{m_1^2}{AC} - \frac{m_4^2}{BC} + \frac{m_1 m_4}{AC^3}(x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6').$$

Мы видим, что уравнения (21) не являются каноническими, так как в правых частях первых уравнений входит функция $F'$, а в правых частях вторых уравнений — функция $F''$.

Функции $F'$ и $F''$ можно рассматривать в виде суммы четырех частей.

1. Часть

$$\frac{1}{2m_1}(y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2) - \frac{m_1 m_7}{AC} - \frac{m_1^2}{AC}$$

определяет движение по кеплеровскому эллипсу, которое мало отличается от гелиоцентрического движения планеты.

2. Часть

$$\frac{1}{2m_4}(y_4'^2 + y_5'^2 + y_6'^2) - \frac{m_4 m_7}{BC} - \frac{m_4^2}{BC}$$

определяет движение по кеплеровскому эллипсу, которое мало отличается от гелиоцентрического движения планеты $B$.

3. Главная часть возмущающей функции равна

$$-\frac{m_1 m_4}{AB}.$$

4. Дополнительная часть в возмущающей функции $F'$ равна

$$\frac{m_1 m_4}{BC^3}(x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6'),$$

а в функции $F''$ равна

$$\frac{m_1 m_4}{AC^3}(x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6').$$

Уравнения (21) получаются очень просто, и этот вывод можно найти в главе III т. I «Небесной механики» Тиссерана*).

Это преобразование координат имеет большие неудобства. Нарушается не только каноническая форма уравнений движения, но и форма интегралов площадей. Поэтому мы ими здесь не будем пользоваться.

*) В нашей специальной литературе уравнения (21) обычно называются «уравнениями движения в гелиоцентрических координатах». Подробное рассмотрение этих уравнений можно найти в книге Г. Н. Дубошина «Небесная механика», Физматгиз, 1963 г., и М. Ф. Субботина «Курс небесной механики», т. II, Гостехиздат, 1947 г. (*Прим. перев.*)

# ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

**45. Задача двух тел.** Рассмотрим два тела, $A$ и $C$, первое — движущееся с массой $m$, а второе — неподвижное, с массой $M$, и изучим движение первого под действием ньютонианского притяжения, вызываемого неподвижным телом.

Поместим начало координат в точке $C$ и обозначим прямоугольные координаты тела $A$ через $x_1$, $x_2$, $x_3$ и компоненты его количества движения через $y_1$, $y_2$, $y_3$.

Движение тела $A$ определяется каноническими уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} F=T+U, \qquad T=\frac{1}{2m}(y_1^2+y_2^2+y_3^2), \\ U=-\frac{m\cdot M}{AC}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

**46.** Предположим теперь, что оба тела, $A$ и $C$, с массами $m_1$ и $m_7$, движутся, взаимно притягивая друг друга, по закону Ньютона. Как и в главе II, обозначим координаты тела $A$ через $x_1$, $x_2$, $x_3$, координаты тела $C$ — через $x_7$, $x_8$, $x_9$, компоненты количества движения — символом $y$ с соответствующим нижним индексом. Воспользуемся преобразованием переменных § 29, т. е. положим

$$x_1'=x_1-x_7, \qquad m_7'x_7'=m_1x_1+m_7x_7,$$

$$m_1'=\frac{m_1m_7}{m_1+m_7}, \qquad m_7'=m_1+m_7,$$

так что $x_7'$, $x_8'$, $x_9'$ суть координаты центра инерции $D$ двух тел, $A$ и $C$, а $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ являются проекциями вектора $CA$ на оси координат.

Мы знаем, что без ограничения общности можно считать центр инерции неподвижным, т. е. считать, что

$$x_7'=x_8'=x_9'=0.$$

Таким образом, число степеней свободы системы уменьшается на три единицы.

При этих условиях уравнения движения сохраняют каноническую форму и имеют вид

$$\frac{dx_i'}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i'}, \tag{1'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} F=T+U, \quad T&=\frac{1}{2m_1'}(y_1'^2+y_2'^2+y_3'^2),\\ U&=-\frac{m_1m_7}{AC}. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Сравнивая уравнения (1′) и формулы (2′) с уравнениями (1) и формулами (2), мы видим, что движение тела $A$ относительно тела $C$ таково же, что и движение движущейся массы $m_1'=\frac{m_1m_7}{m_1+m_7}$, притягиваемой неподвижной массой $\frac{m_1m_7}{m_1'}=m_1+m_7$.

Мы увидим вскоре, что движущаяся масса, притягиваемая неподвижной массой, описывает эллипс, в одном из фокусов которого находится неподвижная масса. Следовательно, траектория точки $A$ в своем движении относительно точки $C$ также является эллипсом, в одном из фокусов которого находится $C$.

Так как отношения отрезков $AD$, $DC$ и $AC$ постоянны и центр инерции, по предположению, неподвижен, то точки $A$ и $C$ в своем абсолютном движении описывают подобные эллипсы, для которых точка $D$ является общим фокусом.

**47. Применение метода Якоби.** Учитывая последний вывод, остается исследовать движение тела, притягиваемого неподвижным центром. Эта задача может быть решена многими способами, но с точки зрения последующих приложений необходимо, чтобы мы решили ее с помощью одного частного метода, а именно метода Якоби, изложенного в § 10.

Так как

$$F=\frac{1}{2m}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-\frac{mM}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}},$$

то уравнение Якоби напишется в виде

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2\right]-\frac{mM}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}=\text{const}. \tag{3}$$

Форма уравнения Якоби меняется, если перейти к новым координатам, например, к прямоугольным или вообще к произвольным. Это следует из анализа, сделанного в § 11.

Уравнение (3) можно получить в результате замены переменных Гамильтона § 8 и замены $p_i$ частными производными $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ в новом выражении для $F$.

Если сначала воспользоваться новыми прямоугольными координатами $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, будем иметь (если начало координат остается в точке $C$)

$$T=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx_1'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3'}{dt}\right)^2\right], \qquad AC=x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2.$$

Производная функции $T$ по переменным $\frac{dx_i'}{dt}$ будет равна

$$y_i'=m\frac{dx_i'}{dt}$$

и мы получим

$$F=\frac{1}{2m}(y_1'^2+y_2'^2+y_3'^2)-\frac{mM}{AC},$$

так что уравнение Якоби в новых координатах запишется в виде

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1'}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2'}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3'}\right)^2\right]-\frac{mM}{\sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2}}=\text{const}.$$

Отсюда следует, что форма уравнения Якоби не меняется при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой, тоже прямоугольной системе. *Таким образом, функция $S$ удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных, вид которого не зависит от выбора осей, лишь бы только начало координат осталось в точке $C$.*

Перейдем теперь к сферическим координатам по формулам

$$x_1=r\sin\zeta\cos\varphi,$$
$$x_2=r\sin\zeta\sin\varphi,$$
$$x_3=r\cos\zeta.$$

Если воспользоваться выражением для скорости в полярных координатах, то имеем

$$T=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2+r^2\sin^2\zeta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right].$$

Частные производные функции $T$ по переменным $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ соответственно равны

$$R=m\frac{dr}{dt}, \qquad \mathrm{Z}=mr^2\frac{d\zeta}{dt}, \qquad \Phi=mr^2\sin^2\zeta\frac{d\varphi}{dt},$$

так что будем иметь

$$T=\frac{1}{2m}\left[R^2+\frac{Z^2}{r^2}+\frac{\Phi^2}{r^2\sin^2\zeta}\right]$$

и

$$F=\frac{1}{2m}\left[R^2+\frac{Z^2}{r^2}+\frac{\Phi^2}{r^2\sin^2\zeta}\right]-\frac{mM}{r}.$$

Поэтому преобразованное уравнение Якоби принимает вид

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\zeta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right]-\frac{mM}{r}=\text{const}. \tag{4}$$

Как видно, форма уравнения (4) также не зависит от выбора осей координат.

48. Теперь нужно найти интеграл уравнения (4), зависящий от трех произвольных постоянных. Обозначая константу правой части через $-\frac{m^3M^2}{2L^2}$, будем искать функцию $S$ в виде

$$S=S_1+G\zeta,$$

где $S_1$ зависит только от $r$, а $G$ есть некоторая постоянная.

Таким образом, будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{dS_1}{dr},\qquad \frac{\partial S}{\partial \zeta}=G,\qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi}=0$$

и уравнение (4) примет вид

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2+\frac{G^2}{r^2}\right]-\frac{mM}{r}=-\frac{m^3M^2}{2L^2},$$

откуда

$$\frac{dS_1}{dr}=\sqrt{\frac{2m^2M}{r}-\frac{G^2}{r^2}-\frac{m^4M^2}{L^2}}$$

и

$$S_1=\int\sqrt{\frac{2m^2M}{r}-\frac{G^2}{r^2}-\frac{m^4M^2}{L^2}}\,dr. \tag{5}$$

49. Найденное решение не является полным, так как оно зависит только от двух произвольных постоянных $L$ и $G$. Но его легко обобщить. Мы видели, в самом деле, что форма уравнения (4) не зависит от выбора осей координат. Но $\zeta$ есть угол между вектором $AC$ и осью $x_3$. Поэтому мы получим новое решение, полагая

$$S=S_1+G\zeta,$$

где буква $\zeta$ обозначает теперь угол, образуемый вектором $AC$ с *произвольной* прямой $\Delta$, проходящей через начало. Эта прямая $\Delta$ может быть выбрана за ось $x_3$ и вид уравнения (4) не изменится.

Полученное новое решение содержит теперь четыре произвольные постоянные, так как две произвольные постоянные нужны для определения направления прямой $\Delta$, проходящей через начало.

Одна из этих постоянных является лишней, а поэтому мы расположим прямую $\Delta$ в плоскости $x_1x_2$ и обозначим угол между прямой $\Delta$ и осью $x_1$ через $\theta$. Тогда мы будем иметь три постоянные,

$$L,\ G,\ \theta.$$

**50.** Остается применить правило § 10. Положим

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=y_i,\qquad \frac{\partial S}{\partial L}=l,\qquad \frac{\partial S}{\partial G}=g,\qquad \frac{\partial S}{\partial \theta}=-\Theta.$$

Тогда $l$, $g$, $\Theta$ являются постоянными или линейными функциями времени; $L$, $G$, $\theta$ — постоянные. Далее, будем иметь

$$\frac{dl}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial L},\qquad \frac{dg}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial G},\qquad \frac{d(-\Theta)}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

где $\psi$ обозначает правую часть уравнения (4), т. е.

$$\psi=-\frac{m^3M^2}{2L^2}.$$

Поэтому будем иметь

$$\frac{dl}{dt}=\frac{m^3M^2}{L^3},\qquad \frac{dg}{dt}=0,\qquad \frac{d\Theta}{dt}=0.$$

Следовательно, $l$ есть линейная функция времени, а $g$ и $\Theta$— постоянные. Мы положим, кроме того,

$$\frac{dl}{dt}=n.$$

**51.** Какой смысл имеют все эти формулы? Радикал

$$\sqrt{\frac{2m^2M}{r}-\frac{G^2}{r^2}-\frac{m^4M^2}{L^2}}$$

должен быть всегда действительным, поэтому радиус-вектор $r$ может изменяться только в некоторых пределах. Наибольшее значение $r$ называется *афелийным расстоянием*, а его наименьшее значение — *перигелийным расстоянием*. Их среднее арифметическое называется *средним расстоянием* и обозначается через $a$. Тогда афелийное и перигелийное расстояния будем обозначать соответственно через

$$a(1+e),\qquad a(1-e).$$

Мы получим этот максимум и минимум, приравнивая радикал нулю, что дает уравнение

$$m^4M^2r^2-2m^2ML^2r+G^2L^2=0.$$

Так как сумма решений уравнения должна быть равна $2a$, то будем иметь $m^2Ma = L^2$, откуда

$$L = m\sqrt{M}\cdot\sqrt{a}.$$

Произведение корней должно быть равно $a^2(1-e^2)$, поэтому имеем

$$G^2L^2 = m^4M^2a^2(1-e^2),$$
$$G^2 = m^2Ma(1-e^2),$$
$$G = m\sqrt{M}\sqrt{a(1-e^2)},$$

и, сверх того, найдем

$$\frac{dl}{dt} = n = \frac{m^3M^2}{L^3} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{a^3}}.$$

Поскольку до сих пор мы не выбирали нижний предел для интеграла (5), функция $S_1$ определена с точностью до произвольной постоянной. Выберем нижний предел равным перигелийному расстоянию $a(1-e)$, так что будем иметь

$$S_1 = \int\limits_{a(1-e)}^{r} S_1'\,dr, \tag{6}$$

где $S_1'$ означает наш радикал.

**52. Формулы кеплеровского движения.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -\Theta.$$

Сначала заметим, что $S_1$ не зависит от $\theta$, т. е. от ориентации прямой $\Delta$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = G\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}.$$

Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в начале координат; пусть ось $x_1$ пересекает сферу в точке $A$, а плоскость $x_1x_2$ пересекает ее по большому кругу $ABC$. Прямая $\Delta$, лежащая в плоскости $x_1x_2$, пересекает сферу в точке $B$. Радиус-вектор, идущий от начала к движущейся массе, пересечет сферу в точке $D$.

Плоскость, проходящая через прямую $\Delta$ и радиус-вектор, пересекает сферу по большому кругу $BD$, который образует с большим кругом $BC$ угол $i$. Дуга $AB$ измеряет угол $\theta$, а дуга $BD$ — угол $\zeta$. Допустим, что угол $\theta$ получил приращение $d\theta$; прямая $\Delta$, оставаясь в плоскости $x_1x_2$, будет пересекать теперь сферу в точке $B'$, бесконечно близкой к точке $B$, и мы будем иметь

$$AB' = \theta + d\theta, \qquad B'D = \zeta + d\zeta,$$

а следовательно, $BB' = d\theta$. Построим малую дугу $B'P$, перпендикулярную к большому кругу $BD$. Мы знаем, что с точностью до малых второго порядка дуги $B'D$ и $PD$ равны между собой. Следовательно, будем иметь

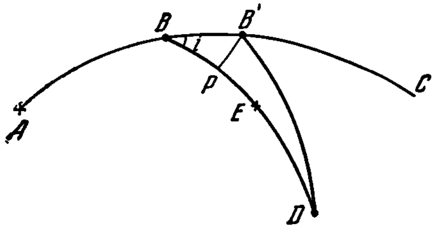


Рис. 2.

$$BP = -d\zeta.$$

В малом треугольнике $BPB'$ имеем $BP = BB' \cos i$, а следовательно,

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} = \cos i.$$

Наконец,

$$\Theta = G \cos i.$$

Так как $\Theta$ и $G$ суть величины постоянные, то отсюда следует, что угол $i$ тоже постоянен.

Таким образом, плоскость $BD$ проходит через неподвижную прямую $\Delta$, расположенную в плоскости $x_1x_2$, и наклонность $i$ этой плоскости к плоскости $x_1x_2$ постоянна. Отсюда следует, что плоскость $BD$ неподвижна. Таким образом, радиус-вектор планеты все время остается в неподвижной плоскости, а следовательно, орбита движущейся массы есть плоская кривая.

Тогда угол $\theta$ представляет собой *долготу узла* плоскости орбиты, угол $i$ — ее *наклонность*.

**53.** Перейдем к уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial L} = l.$$

Так как член $G\zeta$ не зависит от $L$, то будем иметь

$$l = \frac{dS_1}{dL},$$

и мы можем вычислить правую часть равенства, дифференцируя интеграл (5) под знаком интеграла. Таким образом найдем

$$l = \int \frac{m^4M^2}{L^3} \cdot \frac{dr}{S_1'},$$

причем пределы интегрирования те же, что и в формуле (6).

Мы должны вычислить интеграл, зависящий от квадратного радикала. Это интегрирование может быть выполнено с помощью круговых функций, для чего целесообразно положить

$$r = a(1 - e\cos u).$$

Так как $\cos u$ изменяется в пределах от $-1$ до $+1$, $r$ будет меняться между значениями $a(1-e)$ и $a(1+e)$. Перигелийное расстояние достигается при этом тогда, когда переменная $u$ принимает значения, кратные $2\pi$, а афелийное расстояние, когда $u$ принимает значения нечетной кратности $\pi$. Введенный нами вспомогательный угол $u$ называется эксцентрической аномалией.

Мы будем иметь

$$S_1'^2 r^2 = -G^2 + 2m^2 M r - \frac{m^4 M^2}{L^2} r^2.$$

Правая часть этого соотношения является многочленом второй степени относительно $\cos u$ и обращается в нуль для афелийных и перигелийных расстояний, т. е. когда $u$ принимает значения, кратные $\pi$.

Следовательно, этот многочлен пропорционален $\sin^2 u$.

Чтобы определить коэффициент пропорциональности, положим $\cos u = +\infty$, придавая, таким образом, переменной $u$ мнимое значение. При этих условиях будем иметь с большой точностью

$$r = -ae\cos u, \qquad \sin^2 u = -\cos^2 u,$$

$$S_1'^2 r^2 = -\frac{m^4 M^2}{L^2} r^2 = -m^4 M^2 \frac{a^2 e^2}{L^2}\cos^2 u = -m^2 M a e^2 \cos^2 u.$$

Таким образом, для всех значений $r$ будем иметь

$$S_1'^2 r^2 = m^2 M a e^2 \sin^2 u = L^2 e^2 \sin^2 u,$$

откуда

$$l = \int \frac{m^4 M^2}{L^4} \cdot \frac{r\,dr}{e\sin u} = \int \frac{r\,dr}{a^2 e \sin u}.$$

Но

$$r = a(1 - e\cos u), \qquad dr = ae\sin u\,du,$$

и мы получаем

$$l = \int_0^u (1 - e\cos u)\,du.$$

Нижний предел интегрирования, так же как и в формуле (6), должен соответствовать перигелийному расстоянию, т. е. $u = 0$. Выполняя интегрирование, найдем

$$l = u - e\sin u. \tag{7}$$

Это — *уравнение Кеплера*.

Уравнение Кеплера дает возможность выражать радиус-вектор в виде функции времени. Действительно, радиус-вектор $r$ зависит от $u$, а уравнение Кеплера выражает зависимость эксцентрической аномалии $u$ от $l$, которая является линейной функцией времени.

Оно показывает также, что афелийное и перигелийное расстояния действительно достигаются. До сих пор мы знали только, что $r$ не может выходить из этих пределов.

Действительно уравнение (7) показывает, что эксцентрическая аномалия $u$ может принимать все возможные действительные значения u, в частности, значения, которые соответствуют перигелийному и афелийному расстояниям. В самом деле, каждому действительному значению $u$ соответствует некоторое действительное значение $l$ и, следовательно, некоторое действительное значение времени, так как $l$ является линейной функцией времени.

Угол $l$ называется *средней аномалией*. В самом деле, $l$ изменяется пропорционально времени и становится равной эксцентрической аномалии всякий раз, когда $\sin u$ равен нулю, т. е. всякий раз, когда планета находится в перигелии или в афелии.

54. Перейдем теперь к уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial G}=g,$$

которое может быть записано в виде

$$g=\frac{\partial S_1}{\partial G}+\zeta.$$

Дифференцированием под знаком интеграла мы получим

$$\frac{\partial S_1}{\partial G}=\int\frac{-G\,dr}{r^2S_1'}=G\int\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{S_1'}.$$

Интеграл опять может быть вычислен в круговых функциях, но так как здесь переменной является $\frac{1}{r}$, то мы положим

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos v}{a(1-e^2)},$$

так что когда $\cos v$ изменяется от $-1$ до $+1$, $r$ изменяется от $a(1+e)$ до $a(1-e)$.

Квадрат функции $S_1'$ есть многочлен второй степени относительно $\frac{1}{r}$ и, следовательно, относительно $\cos v$. $S_1'$ обращается в нуль, когда $r$ равен $a(1-e)$ или $a(1+e)$, т. е. когда $v$ принимает значения, кратные $\pi$. Следовательно, $S_1'$ пропорциональна $\sin^2 v$.

Чтобы определить множитель пропорциональности, положим $\cos v=+\infty$, что дает

$$\frac{1}{r}=\frac{e\cos v}{a(1-e^2)}=\frac{m^2Me\cos v}{G^2},$$

$$\sin^2 v=-\cos^2 v,\quad S_1'^2=-\frac{G^2}{r^2}=-\frac{m^4M^2e^2\cos^2 v}{G^2}.$$

Таким образом для всех значений $v$ имеем

$$S_1'^2=\frac{m^4M^2e^2\sin^2 v}{G^2}, \quad S_1'=\frac{m^2Me\sin v}{G}.$$

Но

$$d\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-e\sin v\,dv}{a(1-e^2)}=\frac{-m^2Me\sin v\,dv}{G^2}=-\frac{S_1'dv}{G}$$

и

$$\frac{\partial S_1}{\partial G}=-\int dv.$$

Интеграл должен иметь такой же нижний предел, как и интеграл (6), т. е. $v=0$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{\partial S_1}{\partial G}=-v,$$

откуда окончательно получим

$$v=\zeta-g.$$

Вернемся к рис. 2 и возьмем на неподвижном большом круге $BD$ дугу $BE$, равную $g$. Так как $g$ постоянна, точка $E$ будет неподвижной, так же как и вектор $OE$, соединяющий ее с началом координат. Тогда $v$ равна дуге $ED$, т. е. углу между неподвижным радиусом-вектором $OE$ и радиусом-вектором $OD$. Таким образом, $r$ и $v$ будут полярными координатами планеты в плоскости $OBD$, если прямая $OE$ есть полярная ось и точка $O$ — полюс. Следовательно, уравнение

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \tag{8}$$

есть уравнение орбиты в полярных координатах. Но это уравнение эллипса, отнесенного к одному из своих фокусов.

Следовательно, орбита является эллиптической. Переменная $v$ называется *истинной аномалией*. Истинная аномалия $v$ принимает в перигелии значения, кратные $2\pi$, а в афелии значения нечетной кратности $\pi$. В перигелии при $v=0$ планета находится на прямой $OE$ и ее долгота в орбите равна $\theta+g$.

Постоянный угол $\theta+g$ называется *долготой перигелия*.

55. Из уравнения (8) выводим

$$er\cos v=a(1-e^2)-r=a(1-e^2)-a(1-e\cos u),$$

откуда

$$r\cos v=a(\cos u-e)$$

и

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin u.$$

Прямоугольные координаты имеют следующие значения:

1) если $\theta$ предполагается равным нулю, то

$$x_1 = r\cos\zeta,\quad x_2 = r\sin\zeta\cos i,\quad x_3 = r\sin\zeta\sin i;$$

2) если $\theta$ произвольно, то

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r(\cos\zeta\cos\theta - \sin\zeta\sin\theta\cos i),\\ x_2 &= r(\sin\zeta\cos\theta + \cos\zeta\sin\theta\cos i),\\ x_3 &= r\sin\zeta\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

Далее,

$$\left.\begin{aligned} r\cos\zeta &= r\cos v\cos g - r\sin v\sin g,\\ r\sin\zeta &= r\cos v\sin g + r\sin v\cos g. \end{aligned}\right\} \tag{8''}$$

Заменяя здесь $r\cos v$ и $r\sin v$ их значениями, находим

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a(\cos u - e)(\cos g\cos\theta - \sin g\sin\theta\cos i) -\\ &\qquad - a\sin u\sqrt{1-e^2}(\sin g\cos\theta + \cos g\sin\theta\cos i),\\ x_2 &= a(\cos u - e)(\cos g\sin\theta + \sin g\cos\theta\cos i) +\\ &\qquad + a\sin u\sqrt{1-e^2}(-\sin g\sin\theta + \cos g\cos\theta\cos i),\\ x_3 &= a(\cos u - e)\sin g\sin i + a\sin u\sqrt{1-e^2}\cos g\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

**56.** Мы положили

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = y_i,\quad \frac{\partial S}{\partial L} = l,\quad \frac{\partial S}{\partial G} = g,\quad \frac{\partial S}{\partial\theta} = -\Theta$$

и, следовательно,

$$dS = \sum y\,dx + l\,dL + g\,dG - \Theta\,d\theta,$$

откуда следует, что

$$\sum x\,dy - l\,dL - g\,dG - \theta\,d\Theta$$

является полным дифференциалом. Введем теперь новые переменные, полагая

$$L - G = \varrho_1,\quad G - \Theta = \varrho_2$$

и

$$Ll + Gg + \Theta\theta = L\lambda + \varrho_1\omega_1 + \varrho_2\omega_2, \tag{10}$$

откуда

$$\lambda = l + g + \theta,\quad \omega_1 = -g - \theta,\quad \omega_2 = -\theta.$$

Из последних формул видно, что $\omega_1$ есть долгота перигелия, — $\omega_2$ — долгота узла. Переменная $\lambda$ называется *средней долготой*.

Прежние переменные $L$, $G$, $\Theta$; $l$, $g$, $\theta$ связаны с новыми переменными $L$, $\varrho_1$, $\varrho_2$; $\lambda$, $\omega_1$, $\omega_2$ линейными соотношениями, и тождество (10) показывает, что замена переменных является канонической в соответствии с условиями § 5. Поэтому

$$l\,dL+g\,dG+\theta\,d\Theta-\lambda\,dL-\sum\omega\,d\varrho$$

есть полный дифференциал, так же как и

$$\sum x\,dy-\lambda\,dL-\sum\omega\,d\varrho,$$

или как

$$\sum y\,dx-L\,d\lambda-\sum\varrho\,d\omega.$$

57. Положим теперь

$$\xi_i=\sqrt{2\varrho_i}\cos\omega_i,\quad \eta_i=\sqrt{2\varrho_i}\sin\omega_i.$$

Замена переменных остается канонической в силу § 6. Следовательно, выражение

$$\sum\varrho\,d\omega-\sum\xi\,d\eta$$

есть полный дифференциал и то же самое можно утверждать о выражениях

$$\sum y\,dx-L\,d\lambda-\sum\xi\,d\eta,\quad \sum x\,dy-\lambda\,dL-\sum\eta\,d\xi.$$

58. В большинстве приложений эксцентриситет $e$ и наклонность $i$ очень малы. Поэтому

$$\varrho_1=L-G=m\sqrt{M}\cdot\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)$$

есть величина порядка квадрата эксцентриситета, а

$$\xi_1=\sqrt{2\varrho_1}\cos\omega_1,\quad \eta_1=\sqrt{2\varrho_1}\sin\omega_1$$

— величины порядка эксцентриситета. Поэтому мы будем называть эти две величины *эксцентрическими переменными*.

Величина

$$\varrho_2=G-\Theta=G\,(1-\cos i)$$

имеет порядок квадрата наклонности, а поэтому переменные

$$\xi_2=\sqrt{2\varrho_2}\cos\omega_2,\quad \eta_2=\sqrt{2\varrho_2}\sin\omega_2$$

имеют порядок наклонности. Поэтому мы будем называть эти две величины *облическими переменными*.

Кроме того, мы имеем

$$e^2 = \frac{2\varrho_1}{L} + \left(\frac{\varrho_1}{L}\right)^2,$$

откуда

$$\sqrt{L}\, e \cos \omega_1 = \xi_1 \sqrt{1 + \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}},$$

$$\sqrt{L}\, e \sin \omega_1 = \eta_1 \sqrt{1 + \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}}$$

и

$$\xi_2 = 2\sqrt{G} \sin \frac{i}{2} \cos \omega_2, \quad \eta_2 = 2\sqrt{G} \sin \frac{i}{2} \sin \omega_2.$$

Введенные нами переменные определяют форму, размеры и ориентацию эллиптической орбиты, а также положение планеты на орбите. Мы должны различать:

1) систему элементов $a$, $e$, $i$, $l$, $g + \theta$, $\theta$, наиболее часто используемую астрономами. Они называются *эллиптическими элементами*;

2) систему $L$, $G$, $\Theta$, $l$, $g$, $\theta$;

3) систему $L$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\lambda$, $\omega_1$, $\omega_2$;

4) систему $L$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\lambda$, $\eta_1$, $\eta_2$.

Последние системы, как было показано в § 56 и 57, являются каноническими, поэтому называются системами канонических элементов *).

59. В предыдущем параграфе мы нашли выражения для прямоугольных или полярных координат планеты как функций эллиптических или канонических элементов. Остается определить переменные $y_i$, т. е. определить составляющие скорости в функции тех же элементов. Для этого воспользуемся равенствами

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$$

или, возвращаясь к полярным координатам § 47, равенствами

$$m\frac{dr}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad mr^2 \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \zeta}, \quad mr^2 \sin^2 \zeta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \varphi}. \tag{11}$$

Кроме того, без ограничения общности мы можем предположить, как и в § 48, что $\zeta$ есть угол между радиусом-вектором и осью $x_3$ и что, следовательно, плоскость орбиты проходит через ось $x_3$.

---

*) Обычно система 2) называется системой элементов Делоне. Системы 3) и 4), как правило, называют первой и второй системой канонических элементов Пуанкаре. (*Прим. перев.*)

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{dS_1}{dr}=S_1', \quad \frac{\partial S}{\partial \zeta}=G, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi}=0.$$

Первое из уравнений (11) дает

$$m\frac{dr}{dt}=S_1',$$

откуда

$$dt=\frac{m\,dr}{S_1'}$$

и

$$dl=n\,dt=\frac{m^4M^2\,dr}{L^3S_1'}.$$

Мы снова пришли к уравнению, которое было выведено в § 53.

60. Третье из уравнений (11) просто дает $\frac{d\varphi}{dt}=0$, что означает, что скорость планеты всегда лежит в плоскости орбиты. Наконец, второе из уравнений (11) дает

$$mr^2\frac{d\zeta}{dt}=G.$$

Но $mr\frac{d\zeta}{dt}$ является проекцией количества движения на перпендикуляр к радиусу-вектору. Таким образом, левая часть есть не что иное, как момент количества движения, так что $G$ представляет величину вектора площадей.

Так как этот вектор необходимо перпендикулярен к плоскости орбиты, то его компоненты будут равны

$$G\sin i\sin\theta, \quad -G\sin i\cos\theta, \quad G\cos i=\Theta.$$

61. Рассмотрим теперь вычисление величин $y_i$. Мы могли бы взять для этого уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=y_i,$$

но удобнее воспользоваться следующими:

$$y_i=m\frac{dx_i}{dt}=m\cdot n\frac{\partial x_i}{\partial l}=\frac{m^4M^2}{L^3}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial l},$$

когда координаты $x$ выражены в функции переменных $l$, $g$, $\theta$, $L$, $G$, $\Theta$, или уравнениями

$$y_i=\frac{m^4M^2}{L^3}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial\lambda},$$

когда $x$ представлены в функции $\lambda$, $L$, $\varrho$, $\omega$ или $\lambda$, $L$, $\xi$, $\eta$. Само собой разумеется, что $\frac{\partial x}{\partial l}$ или $\frac{\partial x}{\partial\lambda}$ обозначают частные производные по $l$ или по $\lambda$.

**62.** В равной степени можно воспользоваться и интегралами площадей

$$x_2y_3-x_3y_2=G\sin i\sin\theta,$$
$$x_3y_1-x_1y_3=G\sin i\cos\theta,$$
$$x_1y_2-x_2y_1=\Theta.$$

Эти уравнения недостаточны для определения переменных $y$, так как они не независимы, но к ним можно присоединить интеграл живых сил

$$\frac{1}{2m}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-\frac{mM}{r}=-\frac{m^3M^2}{2L^2}.$$

**63.** Может представить интерес приведение уравнений (9) к другой форме. Для этого введем две вспомогательные величины, $X$ и $Y$, полагая

$$X=a(\cos u-e)\cos l+a\sin u\sqrt{1-e^2}\sin l=r\cos(v-l),$$
$$Y=-a(\cos u-e)\sin l+a\sin u\sqrt{1-e^2}\cos l=r\sin(v-l).$$

Легко видеть, что правые части уравнений (9) будут линейными и однородными функциями от $X$ и $Y$. Остается найти коэффициенты при $X$ и $Y$.

Напомним, каким образом были получены уравнения (9). Мы воспользовались уравнениями (8′) и (8″), учитывая, что $\zeta=v+g$. Кроме того, мы заменили в уравнениях (8′) $r\cos v$ и $r\sin v$ их выражениями (8″). Но, очевидно, $\zeta=(v-l)+(g+l)$, так что уравнения (9) принимают вид

$$x_1=X[\cos(g+l)\cos\theta-\sin(g+l)\sin\theta\cos i]-$$
$$-Y[\sin(g+l)\cos\theta+\cos(g+l)\sin\theta\cos i],$$
$$x_2=X[\cos(g+l)\sin\theta+\sin(g+l)\cos\theta\cos i]+$$
$$+Y[-\sin(g+l)\sin\theta+\cos(g+l)\cos\theta\cos i],$$
$$x_3=X\sin(g+l)\sin i+Y\cos(g+l)\sin i$$

или

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=X\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda+\sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda-2\theta)\right]-\\
&-Y\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda+\sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda-2\theta)\right],\\
x_2&=X\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda-\sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda-2\theta)\right]+\\
&+Y\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda-\sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda-2\theta)\right],\\
x_3&=X\sin i\sin(\lambda-\theta)+Y\sin i\cos(\lambda-\theta).
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

**64. Сводка формул.** Мы полагаем полезным привести здесь сводку формул, связывающих переменные $x$ и $y$ с каноническими элементами $L$, $\lambda$, $\rho$, $\omega$, $\xi$, $\eta$. В эти формулы входят массы $m$, $M$ и различные вспомогательные величины $a$, $e$, $i$, $u$, $r$, $v$, $l$, $X$, $Y$.

Имеем:

$$\left.\begin{gathered}
L = m\sqrt{M}\sqrt{a}, \quad \rho_1 = L\left(1-\sqrt{1-e^2}\right),\\
\rho_2 = (L-\rho_1)(1-\cos i),\\
\xi_1 = \sqrt{2\rho_1}\cos\omega_1, \quad \eta_1 = \sqrt{2\rho_1}\sin\omega_1,\\
\xi_2 = \sqrt{2\rho_2}\cos\omega_2,\\
\eta_2 = \sqrt{2\rho_2}\sin\omega_2, \quad l = \lambda + \omega_1,\\
l = u - e\sin u,\\
r\cos v = a(\cos u - e),\\
r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin u,\\
X = r\cos(v-l), \quad Y = r\sin(v-l).
\end{gathered}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= X\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda+2\omega_2)\right] - \\
&\quad - Y\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda+2\omega_2)\right],\\
x_2 &= X\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\cos\left(\lambda+2\omega_2\right)\right] + \\
&\quad + Y\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda+2\omega_2)\right],\\
x_3 &= X\sin i\sin(\lambda+\omega_2) + Y\sin i\cos(\lambda+\omega_2).
\end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = r = a(1-e\cos u) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

$$x_2y_3 - x_3y_2 = -(L-\rho_1)\sin i\sin\omega_2,$$

$$x_3y_1 - x_1y_3 = -(L-\rho_1)\sin i\cos\omega_2,$$

$$x_1y_2 - x_2y_1 = L - \rho_1 - \rho_2,$$

$$\frac{1}{2m}(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - \frac{mM}{r} = -\frac{m^3M^2}{2L^2}.$$

**65. Форма разложения.** Для более удобного применения выведенных формул нужно разложить координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ в ряды, зависящие от канонических элементов. Какова форма этих разложений?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, мы разобьем задачу на две части. Сначала рассмотрим разложения вспомогательных величин $X$ и $Y$, после чего рассмотрим разложения коэффициентов при $X$ и $Y$ в уравнениях (12′).

Заметим прежде всего, что переменная $\varrho_1$ разложима по степеням $e^2$ и коэффициенты разложения зависят от $L$. Первый член разложения содержит $e^2$, следовательно, величина $\frac{\sqrt{2\varrho_1}}{e}$ также разложима по степеням $e^2$ и то же самое можно сказать о $\frac{e}{\sqrt{2\varrho_1}}$.

Из уравнения, связывающего $\varrho_1$ с $e^2$, можно вывести разложение $e^2$ в ряд по степеням $\varrho_1$. В § 58 мы нашли

$$e^2 = \frac{2\varrho_1}{L} + \left(\frac{\varrho_1}{L}\right)^2.$$

Отсюда вытекает, что величину $\frac{e}{\sqrt{2\varrho_1}}$ также можно разложить по степеням $\varrho_1$. Но

$$\frac{e}{\sqrt{2\varrho_1}} = \frac{e\cos\omega_1}{\xi_1} = \frac{e\sin\omega_1}{\eta_1}$$

и

$$2\varrho_1 = \xi_1^2 + \eta_1^2.$$

Из этого следует, что $e\cos\omega_1$ и $e\sin\omega_1$ разложимы по степеням $\xi_1$ и $\eta_1$, что следует также из формул § 58. Коэффициенты всех этих разложений зависят от $L$.

**66.** Покажем теперь, что величины $u-l$, $\cos(u-l)$ и $\sin(u-l)$ можно разложить по степеням $e\cos l$ и $e\sin l$.

Для этого рассмотрим уравнение Кеплера

$$l = u - e\sin u, \tag{7}$$

которое можно написать в виде

$$(u-l) - e\sin l\cos(u-l) - e\cos l\sin(u-l) = 0.$$

Левая часть последнего равенства разложима по степеням $(u-l)$, $e\sin l$, $e\cos l$. При каком условии можно разложить $(u-l)$ по степеням $e\sin l$ и $e\cos l$? Согласно теореме о неявных функциях это условие заключается в том, что частная производная левой части по $(u-l)$ должна быть отличной от нуля при $e\cos l = 0$ и $e\sin l = 0$. Это условие выполнено, так как эта производная равна единице. Следовательно, $(u-l)$ может быть разложена по степеням $e\cos l$ и $e\sin l$, и то же самое можно утверждать и о $e\cos(u-l)$ и $e\sin(u-l)$, которые в свою очередь разложимы в ряды по степеням $(u-l)$.

Это очевидно также для

$$e^2\cos(u+l) = e^2\cos 2l\cos(u-l) - e^2\sin 2l\sin(u-l),$$

так как

$$e^2 \cos 2l = (e \cos l)^2 - (e \sin l)^2, \quad e^2 \sin 2l = 2 (e \cos l) (e \sin l).$$

Отсюда следует, что $e^2 \cos (u + l)$ тоже можно разложить в ряд по степеням $e \cos l$ и $e \sin l$. Аналогично разлагается в ряд и выражение $e^2 \sin (u + l)$.

67. Далее заметим, что мы имеем

$$\frac{X}{a} = \cos (u - l) \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} + e^2 \cos (u + l) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2} - e \cos l,$$

$$\frac{Y}{a} = \sin (u - l) \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} - e^2 \sin (u + l) \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2} + e \sin l.$$

Мы видели, что $\frac{\cos}{\sin} (u - l)$ и $e^2 \frac{\cos}{\sin} (u + l)$ разложимы по степеням $e \cos l$, $e \sin l$. То же справедливо и для

$$\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2},$$

так как эти две функции разложимы по степеням $e^2 = (e \cos l)^2 + (e \sin l)^2$.

Из этого следует, что $\frac{X}{a}$ и $\frac{Y}{a}$ разложимы по степеням $e \cos l$, $e \sin l$, а следовательно, и по степеням $e \cos \omega_1$, $e \sin \omega_1$, так как

$$e \cos l = e \cos \omega_1 \cos \lambda - e \sin \omega_1 \sin \lambda,$$
$$e \sin l = e \sin \omega_1 \cos \lambda + e \cos \omega_1 \sin \lambda,$$

или по степеням

$$\xi_1, \ \eta_1,$$

так как $e \cos \omega_1$ и $e \sin \omega_1$ разлагаются по степеням $\xi_1$ и $\eta_1$.

Окончательно получаем, что $X$ и $Y$ разложимы по степеням $\xi_1$ и $\eta_1$. Коэффициенты этих разложений зависят от $L$ и $\lambda$.

68. Перейдем теперь к коэффициентам при $X$ и $Y$ в уравнениях (12′), которые имеют вид

$$\pm \cos^2 \frac{i}{2} \cdot \frac{\cos}{\sin} \lambda \pm \sin^2 \frac{i}{2} \frac{\cos}{\sin} (\lambda + 2\omega_2)$$

или

$$\sin i \frac{\cos}{\sin} (\lambda + \omega_2).$$

Эти коэффициенты разлагаются по степеням

$$\sin \frac{i}{2} \cos \omega_2, \ \sin \frac{i}{2} \sin \omega_2. \tag{13}$$

Это очевидно для $\sin^2\frac{i}{2}$, который есть сумма квадратов величин (13), и для $\cos^2\frac{i}{2}=1-\sin^2\frac{i}{2}$, $\cos\frac{i}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{i}{2}}$.

Это ясно также для выражений $\sin^2\frac{i}{2}\cos 2\omega_2$, $\sin^2\frac{i}{2}\sin\ 2\omega_2$, из которых первое равно разности квадратов величин (13), а второе — удвоенному произведению их.

Точно так же это справедливо для

$$\sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda+2\omega_2)=\sin^2\frac{i}{2}\cos 2\omega_2\cos\lambda-\sin^2\frac{i}{2}\sin 2\omega_2\sin\lambda,$$

для

$$\sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda+2\omega_2),\ \sin i\,{\cos\atop\sin}\,\omega_2=2\cos\frac{i}{2}\sin\frac{i}{2}{\cos\atop\sin}\,\omega_2,$$

а также для

$$\sin i\cos(\lambda+\omega_2),\quad \sin i\sin(\lambda+\omega_2).$$

Отсюда следует, что коэффициенты при $X$ и $Y$ разложимы по степеням двух величин (13).

Но мы имеем

$$\xi_2=2\sqrt{L-\varrho_1}\sin\frac{i}{2}\cos\omega_2,$$

$$\eta_2=2\sqrt{L-\varrho_1}\sin\frac{i}{2}\sin\omega_2.$$

Следовательно, наши коэффициенты разлагаются по степеням величин

$$\frac{\xi_2}{2\sqrt{L-\varrho_1}},\quad \frac{\eta_2}{2\sqrt{L-\varrho_1}}.$$

Но

$$\frac{1}{\sqrt{L-\varrho_1}}=\left(L-\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

разложима по степеням $\xi_1$ и $\eta_1$.

Таким образом, коэффициенты при $X$ и $Y$ в уравнениях (12′) разложимы по степеням $\xi_1$, $\eta_1$, $\xi_2$, $\eta_2$.

69. Итак, координаты $x_i$ разложимы по степеням $\xi_1$, $\eta_1$, $\xi_2$, $\eta_2$. Коэффициенты этих разложений зависят от $L$ и $\lambda$.

Небесполезно добавить, что выражения для $x_i$ являются периодическими функциями переменной $\lambda$, т. е. они не меняются, если $\lambda$ заменить на $\lambda+2\pi$.

Разложения для $y_i$ имеют тот же вид. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к формулам

$$y_i = \frac{m^4 M^2}{L^3} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \lambda}.$$

Таким образом, переменные $x_i$ и $y_i$ могут быть разложены в ряды следующего вида:

$$\sum A \cos (p_0 \lambda + h) \mathfrak{M}, \qquad (\alpha)$$

где $p_0$ — целое число; $A$ и $h$ — постоянные, зависящие только от $L$; $\mathfrak{M}$ — целый одночлен относительно $\xi$ и $\eta$.

Полагая затем $\xi_i = \sqrt{2\varrho_i} \cos \omega_i$, $\eta_i = \sqrt{2\varrho_i} \sin \omega_i$, мы придадим разложению ($\alpha$) вид

$$\sum B \varrho_1^{q_1} \varrho_2^{q_2} \cos (p_0 \lambda + p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 + h), \qquad (\beta)$$

где $B$ и $h$ зависят только от $L$; $p$ принимает целые положительные или отрицательные значения; $2q$ — четные неотрицательные числа, причем $2q_i$ имеет такую же четность, как $p_i$, и притом

$$2q_i \geqslant |p_i|.$$

Мы хотим показать, что разложение ($\alpha$) можно представить в форме ($\beta$). Достаточно показать это для любого члена разложения. Это непосредственно очевидно, если одночлен $\mathfrak{M}$ приводится к единице, так как тогда член разложения будет равен $A \cos (p_0 \lambda + h)$.

Таким образом, будет достаточно показать, что если некоторая функция представляется разложением формы ($\beta$), то это также справедливо и для произведения функции на $\xi_i$ или на $\eta_i$, следовательно, применяя индуктивный метод, можно будет показать, что произведение указанной функции на произвольный одночлен $\mathfrak{M}$ можно выразить в виде разложения (9).

Итак, пусть

$$H = \sum B \varrho_1^{q_1} \varrho_2^{q_2} \cos (p_0 \lambda + p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 + h).$$

Мы утверждаем, что можно в форме ($\beta$) представить и разложения

$$H\xi_i = H \sqrt{2\varrho_i} \cos \omega_i, \quad H\eta_i = H \sqrt{2\varrho_i} \sin \omega_i = H \sqrt{2\varrho_i} \cos \left( \omega_i - \frac{\pi}{2} \right)$$

и вообще выражения вида

$$H \sqrt{2\varrho_i} \cos (\omega_i + h').$$

Действительно, имеем

$$H\sqrt{2\varrho_i}\cos(\omega_i+h')=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum B\varrho_1^{q_1}\varrho_2^{q_2}\sqrt{\varrho_i}\,[\cos(p_0\lambda+p_1\omega_1+p_2\omega_2+\omega_i+h+h')+$$
$$+\cos(p_0\lambda+p_1\omega_1+p_2\omega_2-\omega_i+h-h')].$$

Но это выражение имеет форму ($\beta$); в самом деле, если положить для определенности $i=1$, то мы видим, что $2q_2$ и $p_2$ не изменяются, а вместо $2q_1$ будем иметь $2q_1+1$, вместо $p_1$ в одном члене будем иметь $p_1+1$, а в другом $p_1-1$.

Но если

$$2q_1\equiv p_1\ (\mathrm{mod}\,2)\,^{*}),\qquad 2q_1\geqslant|p_1|,$$

то будем иметь, очевидно,

$$2q_1+1\equiv p_1+1\equiv p_1-1\ (\mathrm{mod}\,2),$$
$$2q_1+1\geqslant|p_1+1|,\quad 2q_1+1\geqslant|p_1-1|,$$

что и доказывает высказанную теорему.

**70. Симметрия.** Если эллиптической орбите и планете придать общее вращение на угол $\varepsilon$ вокруг оси $x_3$ (как если бы планета и ее орбита образовывали одно твердое тело), то элементы $l$, $g$, $\theta$, $L$, $G$, $\Theta$ изменятся на $l$, $g$, $\theta+\varepsilon$, $L$, $G$, $\Theta$. Элементы $L$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\lambda$, $\omega_1$, $\omega_2$ изменятся на $L$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\lambda+\varepsilon$, $\omega_1-\varepsilon$, $\omega_2-\varepsilon$, а координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ примут значения $x_1\cos\varepsilon-x_2\sin\varepsilon$, $x_1\sin\varepsilon+x_2\cos\varepsilon$, $x_3$.

Итак, если в разложениях координат $x$ заменить переменные $\xi$ и $\eta$ их выражениями в функции $\varrho$ и $\omega$, то мы получим ряды, расположенные по синусам и косинусам кратных $\lambda$, $\omega_1$, $\omega_2$.

Будем иметь, следовательно,

$$x_i=\sum A\cos(p_0\lambda+p_1\omega_1+p_2\omega_2+h),$$

где $p_0$, $p_1$ и $p_2$ — целые числа, а $A$ и $h$ суть функции от $L$, $\varrho_1$ и $\varrho_2$.

Положим

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\sum A\cos(p_0\lambda+p_1\omega_1+p_2\omega_2+h),\\ x_2&=\sum A'\cos(p_0\lambda+p_1\omega_1+p_2\omega_2+h'),\\ x_3&=\sum A''\cos(p_0\lambda+p_1\omega_1+p_2\omega_2+h'').\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Если $\lambda$, $\omega_1$, $\omega_2$ заменить на $\lambda+\varepsilon$, $\omega_1-\varepsilon$, $\omega_2-\varepsilon$, то аргумент косинуса увеличится на $(p_0-p_1-p_2)\,\varepsilon$ и $x_1$, $x_2$, $x_3$ должны превратиться в

$$x_1\cos\varepsilon-x_2\sin\varepsilon,\qquad x_1\sin\varepsilon+x_2\cos\varepsilon,\quad x_3.$$

*) Числа $a$ и $b$ называются сравнимыми по $\mathrm{mod}\,m$, если при их делении на $m$ получается один и тот же остаток. (*Прим. перев.*)

Отсюда заключаем, что:

1) в разложениях $x_1$ и $x_2$ $p_0 - p_1 - p_2 = 1$, а в разложении для $x_3$ $p_0 - p_1 - p_2 = 0$;

2) $A = A'$, $h' = h - \frac{\pi}{2}$.

**71.** Рассмотрим опять фигуру, образованную планетой и ее эллиптической орбитой, и заменим ее симметричной фигурой относительно плоскости $x_1x_3$.

Это приводит к изменению $L$, $G$, $\Theta$, $l$, $g$, $\theta$ на $L$, $G$, $\Theta$, $-l$, $-g$, $-\theta$, или $L$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\lambda$, $\omega_1$, $\omega_2$ на $L$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $-\lambda$, $-\omega_1$, $-\omega_2$, или, наконец, $x_1$, $x_2$, $x_3$ на $x_1$, $-x_2$, $x_3$.

Таким образом, когда углы $\lambda$, $\omega_1$, $\omega_2$ изменяют знак, координата $x_2$ изменяет знак, в то время как координаты $x_1$ и $x_3$ не изменяются.

Это означает, что в разложениях (14) мы должны иметь

$$h = h'' = 0, \; h' = -\frac{\pi}{2},$$

так что эти разложения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sum A\cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2), \\ x_2 &= \sum A\sin(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2), \\ x_3 &= \sum A''\cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2). \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

**72.** Рассмотрим опять ту же фигуру и заменим ее симметричной фигурой относительно плоскости $x_1x_2$. Это приводит к замене облических переменных $\xi_2$ и $\eta_2$ на $-\xi_2$, $-\eta_2$, или к замене $\omega_2$ на $\omega_2 + \pi$. При этих условиях $x_1$ и $x_2$ не должны измениться, в то время как $x_3$ должно изменить знак. Отсюда следует, что $p_2$ — четное число в разложениях $x_1$ и $x_2$ (14) и (14′) и нечетное в разложении для $x_3$.

Сопоставляя эти результаты с результатами, полученными в § 70, мы видим, что $p_0 - p_1$ и $p_0 + p_1$ всегда являются нечетными числами.

**73. Однородность.** Когда $e$, $i$, $l$, $g$, $\theta$ остаются постоянными, а большая полуось $a$ изменяется на $a(1+\varepsilon)$, координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ станут равными $x_1(1+\varepsilon)$, $x_2(1+\varepsilon)$, $x_3(1+\varepsilon)$.

При этих условиях выражения $\frac{L}{m\sqrt{M}}$, $\frac{\varrho_1}{m\sqrt{M}}$, $\frac{\varrho_2}{m\sqrt{M}}$ получат множителем величину $\sqrt{1+\varepsilon}$.

Отсюда следует, что координаты $x_i$ являются однородными функциями второй степени относительно величин

$$\frac{L}{m\sqrt{M}}, \quad \frac{\varrho}{m\sqrt{M}},$$

или

$$\frac{L}{m\sqrt{M}}, \quad \frac{\xi^2}{m\sqrt{M}}, \quad \frac{\eta^2}{m\sqrt{M}}.$$

Посмотрим, что отсюда можно заключить о форме разложений (14′).

Коэффициенты $A$ и $A''$, которые входят в эти разложения, представляют собой суммы членов следующего вида:

$$A \text{ или } A'' = \sum BL^{2-q_1-q_2}\varrho_1^{q_1}\varrho_2^{q_2}\frac{1}{m^2M},$$

где $2q_1$ — целое число такой же четности, как $p_1$, и не меньше чем $|p_1|$, а $2q_2$ — целое число такой же четности, как $p_2$, и не меньше чем $|p_2|$, и где $B$ суть числовые коэффициенты.

Мы будем иметь, кроме того,

$$y_1 = -\sum Cm^2ML^{-1-q_1-q_2}\varrho_1^{q_1}\varrho_2^{q_2}\sin(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2),$$
$$y_2 = \sum Cm^2ML^{-1-q_1-q_2}\varrho_1^{q_1}\varrho^{q_2}\cos(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2),$$
$$y_3 = -\sum C''m^2ML^{-1-q_1-q_2}\varrho^{q_1}\varrho^{q_2}\sin(p_0\lambda + p_1\omega_1 + p_2\omega_2),$$

где $C$ и $C''$ — числовые константы, равные $Bp_0$; $2q_1$ должно быть целым числом такой же четности, как $p_1$, и не меньше чем $p_1$. Действительно, таково условие того, что

$$\varrho_1^{q_1}\cos(p_1\omega_1 + h),$$

где $h$ не зависит от $\varrho_1$ и $\omega_1$, можно разложить по степеням

$$\sqrt{2\varrho_1}\cos\omega_1 = \xi_1, \quad \sqrt{2\varrho_1}\sin\omega_1 = \eta_1.$$

## ГЛАВА IV

# ОСНОВЫ МЕТОДА ЛАГРАНЖА

**74. Оскулирующие орбиты.** Вернемся к рис. 1 и предположениям § 30, т. е. рассмотрим движение двух фиктивных планет, $A'$ и $B'$. Мы видели в § 37 и 38, что можно положить $F = F_0 + \mu F_1$, где $\mu F_1$ значительно меньше, чем $F_0$, и что если $F$ заменить на $F_0$, то фиктивная планета $A'$ будет двигаться так, как если бы она притягивалась неподвижной массой $m_1 + m_7$, помещенной в начале координат, а фиктивная планета $B'$ — так, как если бы она притягивалась неподвижной массой $m_1 + m_4 + m_7$, также помещенной в начале. Из этого следует, что в первом приближении движение этих двух фиктивных планет подчиняется законам Кеплера.

Предположим, что в момент $t$ силы, действующие *) на фиктивную планету $A'$, внезапно исчезают, заменяясь единственной силой притяжения неподвижной массы $m_1 + m_7$, расположенной в начале. Тогда, начиная с момента $t$, планета $A'$ будет двигаться по эллиптической орбите, которая называется *оскулирующей орбитой планеты* $A'$. Или, если угодно, рассмотрим новую фиктивную планету $A''$, имеющую ту же массу, что и планета $A'$, т. е. $m_1'$, и которая в момент $t$ имеет те же координаты и ту же скорость как по величине, так и по направлению, что и $A'$. Пусть она притягивается только неподвижной массой $m_1 + m_7$, помещенной в начале так, что ее движение происходит в соответствии с законами Кеплера. В момент $t$ планета $A''$ имеет те же координаты, что и $A'$, т. е. $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, и те же компоненты количества движения $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$. Но в другой момент, отличный от момента $t$, планета $A''$ не будет иметь те же координаты и компоненты количества движения, как $A'$. Эллиптическая орбита $A''$ является тогда оскулирующей орбитой планеты $A'$.

Эти два определения приводят, очевидно, к одному и тому же, так как новая планета $A''$ будет совпадать с планетой $A'$, если

*) Может быть, этот язык не корректен, так как на фиктивную планету не могут действовать реальные силы. Может быть, следовало бы говорить: фиктивные силы, которые кажутся действующими; впрочем, это не так существенно, так как никакой неясности можно не опасаться.

силы, действующие на последнюю, внезапно заменятся притяжением центральной массы $m_1 + m_7$.

В момент $t'$, отличный от $t$, $A''$ не будет более совпадать с $A'$. Мы должны, следовательно, вообразить новую фиктивную планету, $A'''$, которая будет двигаться в соответствии с законами Кеплера и которая в момент $t'$ имеет те же координаты и ту же скорость, что и $A'$. Эллиптическая орбита планеты $A'''$ будет оскулирующей орбитой планеты $A'$ в момент $t'$, не совпадающей с эллиптической орбитой $A''$, т. е. с оскулирующей орбитой $A'$ в момент $t$. Следовательно, оскулирующая орбита изменяется со временем.

Однако если $F$ заменить на $F_0$, планета $A'$ будет двигаться согласно законам Кеплера; совпадая в некоторый момент с $A''$, она всегда будет совпадать с $A'''$, следовательно, $A''$ и $A'''$ совпадают, и оскулирующая орбита будет неизменной.

В действительности $F$ не равна $F_0$, но разность между ними, которую мы обозначили через $\mu F_1$, весьма мала. Из этого следует, что оскулирующая орбита изменяется, но ее изменение происходит медленно.

Аналогично мы определим оскулирующую орбиту $B'$: это — эллиптическая орбита новой фиктивной планеты $B''$, которая имеет ту же массу, что и $B'$, т. е. $m'_4$, и которая будет иметь в момент $t$ те же координаты, что и $B'$, т. е. $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$, ту же скорость по величине и направлению и, следовательно, те же компоненты количества движения, т. е. $y'_4$, $y'_5$, $y'_6$. Планета $B''$ движется по законам Кеплера под действием притяжения центральной массы $m_1 + m_4 + m_7$. Таким образом, нам остается повторить все то, что мы сказали об оскулирующих орбитах $A'$.

В главе III было показано, что форма, размеры и ориентация эллиптической орбиты, а также положение планеты на орбите могут быть определены шестью элементами, являющимися *эллиптическими элементами* или *каноническими элементами* (§ 58). Шесть элементов, которые определяют эллиптическую орбиту $A''$ (т. е. оскулирующую орбиту $A'$) и положение $A''$ на орбите (т. е. положение планеты $A'$ на своей оскулирующей орбите), будем называть *оскулирующими элементами планеты* $A'$. В кеплеровском движении только один из элементов зависит от времени (это средняя долгота $\lambda$, если применяют одну из двух последних систем, определенных в § 58, или средняя аномалия $l$, если применяется одна из двух первых), и этот элемент изменяется, кроме того, пропорционально времени. Остальные пять элементов постоянны.

Что касается оскулирующих элементов, то они все будут изменяться со временем, но изменение одного из них будет почти пропорциональным времени; изменения других пяти будут весьма медленными. Действительно, мы увидим, что оскулирующая орбита изменяется, но что она изменяется весьма медленно.

Аналогично определяются оскулирующие элементы планеты $B'$.

**75. Случай обычного метода.** В § 44 мы определили такую замену переменных, которой астрономы пользуются чаще всего. Хотя мы не будем ее употреблять, представляет интерес рассмотреть ее и определить оскулирующие орбиты, к которым она приводит.

Две планеты, $A$ и $B$, отнесены к солнцу $C$, так что, проведя $OA'$, равным и параллельным $CA$, и $OB'$, равным и параллельным $CB$, мы ввели две фиктивные планеты $A'$ и $B'$ с массами $m_1$ и $m_4$ соответственно.

Здесь опять можно вообразить новую фиктивную планету $A''$, имеющую в момент $t$ те же координаты и скорость, что и планета $A'$, и движущуюся по эллипсу под действием притяжения центральной массы $m_1+m_7$, и другую фиктивную планету, $B''$, имеющую в момент $t$ те же координаты и скорость, что и $B'$, и описывающую эллипс под действием притяжения центральной массы $m_4+m_7$ (именно $m_4+m_7$, так как, если пренебречь возмущающей функцией, определенной в § 44, то движение $B'$ будет совпадать с движением массы, притягиваемой неподвижной массой $m_4+m_7$). Таким образом, эллиптическая орбита планеты $A''$ или такая же $B''$ является оскулирующей орбитой планеты $A'$ или $B'$. Больше ничего не придется менять в том, что было сказано в предыдущем параграфе.

**76. Случай преобразования § 26.** Предположим теперь, что рассматривается замена переменных § 30.

Фиктивные планеты $A'$ и $B'$ имеют массы

$$\frac{m_1m_7}{m_1+m_7}, \quad \frac{m_4m_7}{m_4+m_7},$$

и мы получим их положения, проведя векторы $OA'$ и $OB'$, равными и параллельными векторам $CA$ и $CB$. Они имеют координаты $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$; $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$. Но переменные $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$; $y_4'$, $y_5'$, $y_6'$ не будут пропорциональными производным от $x'$, и поэтому они не представляют компоненты количества движения этих фиктивных планет. Они будут представлять, как мы знаем, составляющие абсолютного количества движения двух действительных планет.

Вот как нужно определить в этом случае оскулирующие орбиты. Вообразим новую фиктивную планету $A''$, имеющую ту же массу $\frac{m_1m_7}{m_1+m_7}$, как и $A'$; пусть в момент $t$ она имеет координаты $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ и компоненты количества движения $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$; пусть, наконец, она движется согласно законам Кеплера под действием притяжения центральной массы $m_1+m_7$.

Мы видим, что в момент времени $t$ планета $A''$ имеет те же координаты, что и планета $A'$, но не имеет тех же компонент количества движения, следовательно, не имеет той же скорости.

Планета $A''$ движется по эллиптической орбите, которая будет оскулирующей орбитой планеты $A'$.

Точно так же можно ввести фиктивную планету $B''$ и оскулирующую орбиту планеты $B'$. Отметим только, что планета $B''$ будет двигаться под действием притяжения центральной массы $m_4+m_7$.

**77. Сравнение оскулирующих орбит.** Вместо того чтобы говорить об оскулирующих орбитах $A'$ или $B'$, обыкновенно говорят об оскулирующих орбитах $A$ или $B$, т. е. об оскулирующих орбитах *реальных планет*. Такой оборот речи может быть принят без всяких затруднений, но когда будем говорить об оскулирующей орбите $A$, то нужно подразумевать, что речь идет о такой же орбите, соответствующей фиктивной планете $A'$.

Тем не менее, нужно обратить внимание на одну деталь. Мы видели, что существует несколько способов определения оскулирующих орбит и, следовательно, оскулирующих элементов. Существуют еще и другие способы. В § 74 вместо того, чтобы отнести $A$ к $C$ и $B$ к центру инерции $A$ и $C$, мы могли бы отнести $B$ к $C$ и $A$ к центру инерции $B$ и $C$.

Более того, мы могли бы приписать центральным массам другие значения. Действительно, разделение $F$ на две части, $F_0$ и $\mu F_1$, остается произвольным в достаточно широком отношении. Мы могли бы отнять какую-либо функцию от $F_0$ и прибавить ее же к $\mu F_1$, лишь бы она имела тот же порядок малости, как и возмущающая функция. Например, можно было бы заменить в $F_0$ член

$$\frac{m_4(m_1+m_7)}{BD}$$

членом

$$\frac{m_4m_7}{BD},$$

так как их разность $\frac{m_1m_4}{BD}$ — порядка $\mu F_1$. Тогда центральную массу, определяющую движение планеты $B''$, выгодно брать равной не значению $\frac{m_4(m_1+m_7)}{m_4'}=m_1+m_4+m_7$, а значению $\frac{m_4m_7}{m_4'}$. Ясно, что можно выбрать и другие значения.

Разумеется, эти различные определения приводят к оскулирующим элементам, которые вовсе не являются тождественными. Но различия между ними весьма незначительны; они — порядка возмущающих масс.

Рассмотрим сначала случай § 74 или 75. Тогда в момент $t$ планета $A''$ имеет не только те же координаты, что и $A'$, но и ту же скорость. Следовательно, оскулирующая орбита касается истинной орбиты, и в момент времени $t+\varepsilon$, если $\varepsilon$ — малая величина, отклонение $A'$ от $A''$ имеет порядок $\varepsilon^2$.

Наоборот, в случае § 76 планета $A''$ имеет в момент $t$ те же координаты, что и $A'$, но она не имеет той же скорости. Следовательно, оскулирующая орбита пересекает истинную орбиту под очень малым углом, но не касается ее. Поэтому отклонение $A'$ от $A''$ в момент $t+\varepsilon$ имеет порядок $\varepsilon$. В этом заключается несомненное неудобство, которое не следует преувеличивать, так как мы увидим, что различия суть величины порядка возмущающих масс.

**78. Замена переменных.** Мы видели в главе III, и в частности в § 64, как выражаются координаты и компоненты количества движения массы, движущейся по эллиптической орбите под действием притяжения неподвижной центральной массы, через обе массы $m$ и $M$ и шесть канонических элементов

$$L,\ \lambda,\ \varrho_1,\ \omega_1,\ \varrho_2,\ \omega_2.$$

Эти формулы мы можем применить теперь к фиктивной планете $A''$. Координаты движущейся массы, обозначенные в § 64 через $x_1$, $x_2$, $x_3$, здесь равны $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$. Аналогично вместо компонент количества движения $y_1$, $y_2$, $y_3$ будем иметь $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$. Вместо притягиваемой и притягивающей масс $m$ и $M$ здесь будем иметь $m_1'$ и $m_1+m_7$. Шесть канонических элементов обозначим через

$$L_1,\ \lambda_1,\ \varrho_1,\ \omega_1,\ \varrho_2,\ \omega_2.$$

То же сделаем для фиктивной планеты $B''$. Вместо координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ § 64 будем иметь здесь координаты $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$; составляющие количества движения будут $y_4'$, $y_5'$, $y_6'$; движущаяся и неподвижная массы будут $m_4'$ и $m_1+m_4+m_7$. А шесть канонических элементов обозначим через

$$L_2,\ \lambda_2,\ \varrho_3,\ \omega_3,\ \varrho_4,\ \omega_4.$$

Таким образом, между величинами

$$x_1',\ x_2',\ x_3',\ y_1',\ y_2',\ y_3',$$
$$m_1',\ m_1+m_7,\ L_1,\ \lambda_1,\ \varrho_1,\ \omega_1,\ \varrho_2,\ \omega_2$$

и

$$x_4',\ x_5',\ x_6',\ y_4',\ y_5',\ y_6',$$
$$m_4',\ m_1+m_4+m_7,\ L_2,\ \lambda_2,\ \varrho_3,\ \omega_3,\ \varrho_4,\ \omega_4$$

будем иметь те же соотношения, которые мы имели между

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_1,\ y_2,\ y_3$$

и

$$m,\ M,\ L,\ \lambda,\ \varrho_1,\ \omega_1,\ \varrho_2,\ \omega_2$$

в § 64 и вообще в главе III. Но мы видели в § 56, что

$$\sum x\,dy - \lambda\,dL - \sum \omega\,d\varrho$$

есть точный дифференциал. Применяя этот результат к планете $A''$ или к планете $B''$, получим

$$\sum x'\,dy' - \lambda_1\,dL_1 - \sum \omega\,d\varrho, \tag{1}$$

где величинам $x'$ и $y'$ нужно придать индексы 1, 2, 3 и величинам $\omega$ и $\varrho$ — индексы 1, 2, есть точный дифференциал, так же как и

$$\sum x'\,dy' - \lambda_2\,dL_2 - \sum \omega\,d\varrho, \tag{2}$$

где величинам $x'$ и $y'$ нужно придать индексы 4, 5, 6 и величинам $\omega$ и $\varrho$ — индексы 3, 4.

Складывая (1) и (2), мы видим, что

$$\sum x'\,dy' - \sum \lambda\,dL - \sum \omega\,d\varrho \tag{3}$$

есть точный дифференциал. В выражении (3) индексы принимают все возможные значения, т. е. индексы $x'$ и $y'$ принимают значения 1, 2, 3, 4, 5, 6; индексы $\lambda$ и $L$ — значения 1, 2 и индексы $\omega$ и $\varrho$ — значения 1, 2, 3, 4.

Отсюда следует, *что если мы возьмем за новые переменные* $\lambda$, $L$, $\omega$, $\varrho$, *то преобразование переменных является каноническим и уравнения движения сохраняют каноническую форму*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial L_i}, & \frac{dL_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\omega_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \varrho_i}, & \frac{d\varrho_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \omega_i}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

**79.** Положим теперь

$$\xi_i = \sqrt{2\varrho_i}\cos\omega_i, \qquad \eta_i = \sqrt{2\varrho_i}\sin\omega_i.$$

Выражение

$$\sum \omega\,d\varrho - \sum \eta\,d\xi$$

является точным дифференциалом.

Если, следовательно, мы возьмем за новые переменные $L$, $\lambda$, $\xi$, $\eta$, то преобразование переменных будет опять каноническим и уравнения движения примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial L_i}, & \frac{dL_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \xi_i}, & \frac{d\xi_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \eta_i}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

**80. Обычный метод.** Сказанное применимо как в случае преобразования § 30, так и в случае § 26. Если применяется обычный метод, то уравнения не будут каноническими, как мы это видели в § 44, где мы пришли к уравнениям (20).

Но предположим, что рассматриваются первые шесть уравнений системы (20), т. е. те, где индекс $i$ принимает значения 1, 2, 3, и в которых переменные $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$, $y'_4$, $y'_5$, $y'_6$ заменены их значениями в функции времени. Тогда эти шесть уравнений будут каноническими, но ее характеристическая функция будет зависеть не только от переменных $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$, но и от времени $t$.

Тем не менее, согласно § 12 можно сделать каноническую замену переменных. В частности, так как выражение (1) § 78 есть точный дифференциал, то можно преобразовать эти шесть уравнений, беря за новые переменные $L_1$, $\lambda_1$, $\varrho_1$, $\omega_1$, $\varrho_2$, $\omega_2$, и при этом уравнения остаются каноническими. Мы получим, таким образом, шесть уравнений того же вида, как и уравнения (4) § 78, но где $F$ заменена на $F'$ и где индекс $i$ принимает только значение 1 для переменных $L$ и $\lambda$ и значения 1, 2 — для переменных $\varrho$ и $\omega$.

Поступим также с шестью последними уравнениями (20) § 44. Заменим в них $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$ их значениями в функции времени. Тогда эти шесть уравнений будут каноническими с характеристической функцией $F''$, зависящей не только от переменных $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$, $y'_4$, $y'_5$, $y'_6$, но и от времени. Так как выражение (2) из § 78 является точным дифференциалом, то эти уравнения останутся каноническими, если перейти к новым переменным $L_2$, $\lambda_2$, $\varrho_3$, $\omega_3$, $\varrho_4$, $\omega_4$.

Мы получим, таким образом, шесть уравнений того же вида, что и уравнения (4) § 78, но где $F$ заменена на $F''$ и индекс $i$ принимает только значение 2 для переменных $L$ и $\lambda$ и значения 3, 4— для переменных $\varrho$ и $\omega$.

Итак, мы найдем двенадцать уравнений такого же вида, как и уравнения (4), с тем отличием, что в первых шести из них $F$ должна быть заменена на $F'$, а в последних шести — на $F''$. То же самое справедливо и для уравнений (5) предыдущего параграфа.

**81. Применение эллиптических элементов.** В § 58 мы определили четыре системы элементов, а именно, одну систему эллиптических элементов и три системы канонических элементов.

В § 78 за оскулирующие элементы мы взяли элементы третьей системы, т. е. $\varrho$ и $\omega$; в § 79 мы рассмотрели элементы четвертой системы. Равным образом мы могли бы взять вторую систему, так как она также канонична.

Но астрономы часто употребляют также первую систему, т. е. эллиптические элементы, которые не являются каноническими. Что изменится в результате?

В силу соотношений между каноническими и эллиптическими элементами производные по $t$ от эллиптических элементов выражаются линейно через производные по $t$ от канонических элементов, и коэффициенты в этих линейных формулах являются известными функциями эллиптических элементов. В силу уравнений (4) каждая из производных канонических элементов по $t$ равна с точностью до знака одной из частных производных функций $F$ по одному из канонических элементов. В свою очередь частные производные функции $F$ по каноническим элементам выражаются линейно через частные производные функции $F$ по эллиптическим элементам, и коэффициенты этих линейных соотношений являются известными функциями эллиптических элементов.

Таким образом, производные по $t$ от эллиптических элементов выразятся линейно через частные производные функции $F$ по эллиптическим элементам с коэффициентами, которые являются известными функциями эллиптических элементов. Такова форма дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют эллиптические элементы; эти уравнения гораздо сложнее, чем уравнения (4), которым удовлетворяют элементы.

С помощью скобок Лагранжа, определенных в § 14, можно получить уравнения для эллиптических элементов более прямым путем.

Пусть дана система канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Рассмотрим возможные приращения $\delta x_i$ и $\delta y_i$ переменных $x_i$ и $y_i$, и пусть $\delta F$ есть соответствующее приращение функции $F$. Умножая наши уравнения на $\delta y_i$ и $-\delta x_i$ и складывая, найдем

$$\sum (dx_i\,\delta y_i-dy_i\,\delta x_i)=\delta F\cdot dt. \tag{6}$$

Предположим, что $x$ и $y$ являются функциями $2n$ новых переменных

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{2n};$$

тогда

$$dx_i=\sum \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\,d\alpha_k, \qquad \delta x_i=\sum \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\,\delta\alpha_k.$$

Заменяя в равенстве (6) $dx_i$, $\delta x_i$ этими значениями и $dy_i$, $\delta y_i$ аналогичными выражениями и полагая

$$[\alpha_h,\ \alpha_k]=\sum_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_h}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}-\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_h}\right),$$

мы получим

$$\sum\,[\alpha_h,\alpha_k]\,(d\alpha_h\delta\alpha_k-d\alpha_k\delta\alpha_h)=\delta F\cdot dt,$$

где суммирование распространяется на все комбинации индексов $h$ и $k$, причем комбинации $h$, $k$ и $k$, $h$ не должны рассматриваться как различные. Но $[\alpha_h, \alpha_k] = -[\alpha_k, \alpha_h]$, $[\alpha_h, \alpha_h] = 0$, и мы можем также написать

$$\sum [\alpha_h, \alpha_k]\, d\alpha_h \cdot \delta\alpha_k = \delta F \cdot dt,$$

где суммирование должно быть распространено на все размещения индексов $h$ и $k$, причем на этот раз два размещения $h$, $k$ и $k$, $h$ должны рассматриваться как различные.

Если мы заменим $\delta F$ на $\sum \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \delta\alpha_k$ и отождествим два выражения, то получим

$$\sum [\alpha_h, \alpha_k] \frac{d\alpha_h}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_k}. \tag{7}$$

Применим эту формулу к интересующему нас случаю, обозначая переменные $x_i$ и $y_i$ буквами $x'_i$ и $y'_i$. Проинтегрируем сначала уравнения, в которых $F$ заменена на $F_0$. Тогда они приведутся к уравнениям кеплеровского движения и позволят нам выразить наши неизвестные в функции шести эллиптических элементов $A''$ и шести эллиптических элементов $B''$. Допустим, что эти двенадцать эллиптических элементов взяты в качестве новых переменных, которые мы обозначили $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$.

Тогда формула (7) дает нам дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять новые переменные. Коэффициенты $\alpha_h$, $\alpha_k$ являются известными функциями эллиптических элементов. Но эти коэффициенты есть не что иное (по отношению к каноническим уравнениям кеплеровского движения) как скобки Лагранжа из § 14. Действительно, среди эллиптических элементов имеются два элемента, пропорциональные времени: это — средние аномалии.

Пусть

$$\alpha_1 = l_1 = n_1 t + \varepsilon_1, \quad \alpha_2 = l_2 = n_2 t + \varepsilon_2$$

— эти два элемента, т. е. средние аномалии двух фиктивных планет. Тогда $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ будут постоянными в кеплеровском движении. Все остальные элементы в кеплеровском движении постоянны.

Рассмотрим одну из скобок $[\alpha_h, \alpha_k]$. Если $h$ и $k$ не равны 1 или 2, приходим сразу же к определению скобок Лагранжа, так как $\alpha_h$ и $\alpha_k$ постоянны. Предположим теперь, например, в $\alpha_h$, $\alpha_k$, что $h$ не равно ни 1, ни 2. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon_1}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial y_i}{\partial \varepsilon_1}$$

и, следовательно,

$$[\alpha_h, \alpha_1] = [\alpha_h, \varepsilon_1].$$

Но поскольку $\varepsilon_1$ постоянна, мы снова приходим к определению скобок Лагранжа.

Остается рассмотреть скобку $[\alpha_1, \alpha_2]$. Эта скобка равна нулю, и то же будет вообще для $[\alpha_h, \alpha_k]$, если $\alpha_h$ и $\alpha_k$ суть два элемента, не принадлежащие одной и той же фиктивной планете. Действительно,

$$[\alpha_1, \alpha_2] = \sum \left( \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial y_i'}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial y_i'}{\partial \alpha_1} \right).$$

Но если $i = 1, 2, 3$, то частные производные по $\alpha_2$ равны нулю; если же $i = 4, 5, 6$, то равны нулю частные производные по $\alpha_1$. Из этого следует, что все члены в правой части равны нулю. Утверждение доказано.

Таким образом, все коэффициенты являются скобками Лагранжа, и, как следует из § 14, они являются функциями постоянных кеплеровского движения, т. е. элементов $\alpha$, отличных от средних аномалий и двух постоянных $\varepsilon$.

Легко доказать, на чем мы не останавливаемся, что эти коэффициенты не зависят от постоянных $\varepsilon$.

Уравнения (7) по сравнению с уравнениями (4) имеют намного более сложный вид, и в дальнейшем мы их применять не будем*).

**82. Вычисление функции $F_0$.** Вернемся снова к каноническим элементам и к преобразованию § 30. В § 78 и 79 мы вывели уравнения (4) и (5). Осталось выразить $F$ через оскулирующие элементы.

Начнем с $F_0$. В § 37 мы нашли

$$F_0 = T_1 + T_2 - \frac{m_1 m_7}{AC} - \frac{m_4 (m_1 + m_7)}{BD}.$$

С другой стороны, в § 64 мы нашли следующую формулу:

$$\frac{1}{2m}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \frac{mM}{r} = -\frac{m^3 M^2}{2L^2}. \tag{8}$$

Применим эту формулу к фиктивной планете $A''$. Для этого нужно заменить $y_1, y_2, y_3$ на $y_1', y_2', y_3'$, $m$ и $M$ — на $m_1'$ и $m_1 + m_7$, $r$ на $AC$, $L$ на $L_1$, так что первый член левой части формулы (8) приведется к $T_1$ и формула примет вид

$$T_1 - \frac{m_1 m_7}{AC} = -\frac{m_1' m_1^2 m_7^2}{2L_1^2} = -\frac{M_1}{2L_1^2},$$

где положено

$$M_1 = m_1' m_1^2 m_7^2.$$

*) См. Tisserand, т. I, гл. X, где на стр. 187 приведены уравнения для эллиптических элементов в окончательном виде.

Применим ту же формулу (8) к $B''$. Для этого нужно заменить $y_1, y_2, y_3$ на $y'_4, y'_5, y'_6$, $m$ и $M$ на $m'_4$ и $m_1+m_4+m_7$, $r$ на $BD$, $L$ на $L_2$, так что первый член (8) приведется к $T_2$ и формула примет вид

$$T_2-\frac{m_4(m_1+m_7)}{BD}=-\frac{m'_4m_4^2(m_1+m_7)^2}{2L_2^2}=-\frac{M_2}{2L_2^2},$$

где положено

$$M_2=m'_4m_4^2(m_1+m_7)^2.$$

Складывая, получим

$$F_0=-\frac{m'_1m_1^2m_7^2}{2L_1^2}-\frac{m'_4m_4^2(m_1+m_7)^2}{2L_2^2}=-\frac{M_1}{2L_1^2}-\frac{M_2}{2L_2^2}. \tag{9}$$

Аналогичные выкладки проводятся в случае преобразований § 26 или 44. Только массы будут иметь другие значения.

Для преобразования § 26 следовало бы положить

$$m=\frac{m_1m_7}{m_1+m_7},\quad M=m_1+m_7 \qquad \text{для } A''$$

и

$$m=\frac{m_4m_7}{m_4+m_7},\quad M=\frac{(m_1+m_7)(m_4+m_7)}{m_7} \qquad \text{для } B''.$$

Таким образом, мы получили бы

$$F_0=-\frac{m'_1m_1^2m_7^2}{2L_1^2}-\frac{m_4^3m_7(m_1+m_7)}{m_4+m_7}\cdot\frac{1}{2L_2^2}.$$

Для обычного метода § 44 следовало бы взять

$$m=m_1,\quad M=m_1+m_7 \qquad \text{для } A''$$

и

$$m=m_4,\quad M=m_4+m_7 \qquad \text{для } B'',$$

и мы получили бы

$$F_0=-\frac{m_1^3(m_1+m_7)^2}{2L_1^2}-\frac{m_4^3(m_4+m_7)^2}{2L_2^2}.$$

Во всех случаях мы получили, что функция $F_0$ *зависит только от переменных* $L$.

**83. Вычисление $\mu F_1$.** Найдем теперь разложение возмущающей функции $\mu F_1$. В случае преобразования § 30 эта функция зависит только от координат $x'$. Эти координаты в силу § 69 разлагаются в ряды по степеням $\xi$ и $\eta$. Будет ли разложение функции $\mu F_1$ иметь тот же вид?

Для того чтобы эта функция $\mu F_1$ была разложима в ряд по степеням $\xi$ и $\eta$, достаточно, чтобы она была голоморфной относительно $x'$ при $\xi=0$ и $\eta=0$.

Пусть, в самом деле,

$$\mu F_1 = \varphi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6) = \varphi(x'_i).$$

Обозначим значения $x'_i$ при $\xi = 0$ и $\eta = 0$ через $x'^0_i$ и положим

$$x'_i = x'^0_i + \delta x'_i.$$

Тогда $x'^0_i$ представят первые члены разложений координат $x'_i$ по степеням $\eta$ и $\xi$, а $\delta x'_i$ представят совокупности всех остальных членов.

Так как функция $\varphi(x'_i) = \varphi(x'^0_i + \delta x'_i)$ голоморфна при $x'_i = x'^0_i$, то она может быть разложена по степеням $\delta x'_i$, а так как $\delta x'_i$ разложима по степеням $\xi$ и $\eta$, то и $\varphi(x'_i) = \mu F_1$ обладает тем же свойством, что и требовалось доказать.

Но

$$\mu F_1 = m_1 m_4 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right)$$

перестает быть голоморфной только при $BD = 0$, $AB = 0$ или $BC = 0$, т. е. при $x'_4 = x'_5 = x'_6 = 0$, или при

$$\frac{x'_4}{x'_1} = \frac{x'_5}{x'_2} = \frac{x'_6}{x'_3} = \frac{m_7}{m_1 + m_7},$$

или при

$$\frac{x'_4}{x'_1} = \frac{x'_5}{x'_2} = \frac{x'_6}{x'_3} = -\frac{m_1}{m_1 + m_7}.$$

С другой стороны, полагая $\xi = 0$ и $\eta = 0$, мы имеем

$$x'_1 = K_1 L_1^2 \cos\lambda_1, \quad x'_2 = K_1 L_1^2 \sin\lambda_1, \quad x'_3 = 0,$$
$$x'_4 = K_2 L_2^2 \cos\lambda_2, \quad x'_5 = K_2 L_2^2 \sin\lambda_2, \quad x'_6 = 0,$$

где

$$K_1 = \frac{1}{m'_1 m_1 m_7}, \quad K_2 = \frac{1}{m'_4 m_4 (m_4 + m_7)}$$

$\left(K_1\right.$ и $K_2$ — значения множителя $\frac{1}{m^2 M}$ для двух планет $A''$ и $\left.B''\right)$.

Но эти значения $x'$ удовлетворяют условиям неголоморфности только при

$$L_2 = 0,$$

или

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \frac{K_1 L_1^2}{K_2 L_2^2} = \frac{m_7}{m_1 + m_7},$$

или

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \frac{K_1 L_1^2}{K_2 L_2^2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_7},$$

а в приложениях эти условия совсем не выполняются.

Таким образом, возмущающая функция разложима по степеням $\xi$ и $\eta$. Коэффициенты разложения зависят от $L$ и $\lambda$ и, очевидно, должны быть периодическими функциями средних долгот $\lambda$. Следовательно, они могут быть разложены в тригонометрические ряды по синусам и косинусам кратных $\lambda$ и, следовательно, мы можем написать

$$\mu F_1 = \sum A \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h) \cdot \mathfrak{M},$$

где $k_1$ и $k_2$ — целые числа, $A$ и $h$ зависят только от $L$, и где $\mathfrak{M}$ — целый одночлен относительно $\xi$ и $\eta$.

Рассуждая, как и в § 69, мы увидим, что это разложение может быть всегда представлено в виде

$$\mu F_1 = \sum A \varrho_1^{q_1}\varrho_2^{q_2}\varrho_3^{q_3}\varrho_4^{q_4} \cos(\Sigma k_i\lambda_i + \Sigma p_i\omega_i + h). \tag{10}$$

В последней формуле $A$ и $h$ зависят лишь от $L$; $k$ и $p$ суть целые положительные или отрицательные числа, $2q_i$ — целые положительные, причем $2q_i$ имеет такую же четность, как $p_i$, и

$$2q_i \geqslant |p_i|.$$

Заметим, кстати, что $\varrho$ имеет порядок квадрата эксцентриситетов и наклонностей, и поэтому общий член разложения имеет порядок

$$2\Sigma q$$

относительно эксцентриситетов и наклонностей.

Мы ограничимся здесь этими краткими замечаниями, но в дальнейшем мы вернемся к этому вопросу, когда подробно будем рассматривать разложение возмущающей функции.

**84. Случай обычного метода.** Все, что было сказано о возмущающей функции, применимо в отдельности и к главной части, и к дополнительной части этой функции, так как каждая из них выражается через голоморфные функции переменных $x'$. Это остается верным, если пользоваться преобразованием § 30 или обычным методом § 44.

Но в последнем случае дополнительная часть возмущающей функции имеет особенно простую форму, как, впрочем, и в частном случае, рассмотренном в § 40.

Эта дополнительная часть равна, действительно,

$$\frac{m_1 m_4}{BC^3}(x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6')$$

для одной из планет и

$$\frac{m_1 m_4}{AC^3}(x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6')$$

для другой.

Положим

$$\psi = x_1' x_4' + x_2' x_5' + x_3' x_6'.$$

Разложение $\psi$ выводится чрезвычайно просто из разложений $x'$.

Заметим теперь, что в случае движения точки, притягиваемой неподвижной центральной массой $M$, мы имеем дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{M x_i}{r^3},$$

откуда

$$\frac{M x_i}{r^3} = -n^2 \frac{d^2 x_i}{d\lambda^2},$$

или, наконец,

$$\frac{x_i}{r^3} = -\frac{m^6 M^3}{L^6} \cdot \frac{d^2 x_i}{d\lambda^2}.$$

Если мы желаем применить этот результат к планете $A''$, то нужно заменить $x_1$, $x_2$, $x_3$ на $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $r$ на $AC$, $\lambda$ и $L$ на $\lambda_1$ и $L_1$, $m$ и $M$ на $m_1$ и $m_1 + m_7$, откуда

$$\frac{x_i'}{AC^3} = -\frac{m_1^6 (m_1 + m_7)^3}{L_1^6} \cdot \frac{d^2 x_i'}{d\lambda_1^2} \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Мы получим также

$$\frac{x_i'}{BC^3} = -\frac{m_4^6 (m_4 + m_7)^3}{L_2^6} \cdot \frac{d^2 x_i'}{d\lambda_2^2} \quad (i = 4,\ 5,\ 6),$$

если заметим, что, применяя формулу к $B''$, нужно положить $r = BC$, так как в обычном методе планета $B$ отнесена к Солнцу $C$.

Учитывая, что $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ не зависят от $\lambda_2$, а $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$ от $\lambda_1$, мы будем иметь

$$m_1 m_4 \frac{\psi}{AC^3} = -\frac{m_1^7 m_4 (m_1 + m_4)^3}{L_1^6} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_1^2}$$

и

$$m_1 m_4 \frac{\psi}{BC^3} = -\frac{m_4^7 m_1 (m_4 + m_7)^3}{L_2^6} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_2^2},$$

что дает нам искомые выражения для дополнительных частей возмущающей функции.

**85. Случай преобразования § 26.** Для этого случая, как мы видели в § 43, дополнительная часть возмущающей функции равна

$$T_3 = \frac{1}{m_7} (y_1' y_4' + y_2' y_5' + y_3' y_6'),$$

а используя формулы § 69 и применяя их к планетам $A''$ и $B''$, мы найдем

$$T_3 = \frac{m_1'^2 m_4'^2 m_1^2 m_4^2 m_7^3}{L_1^3 L_2^3} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_1 \, \partial \lambda_2}.$$

**86. Симметрия.** Формулу (10) можно существенно упростить по соображениям симметрии. Прежде всего заметим, что возмущающая функция не должна измениться, если фигуру, образованную двумя оскулирующими орбитами, фиктивными планетами $A'$, $B'$ и истинными телами $A$, $B$, $C$ заменить фигурой, симметричной относительно плоскости $x_1x_3$. Но это сводится, как мы видели в § 71, к замене знаков всех углов $\lambda$ и $\omega$. Разложение (10) не должно измениться при изменении всех этих знаков. Следовательно, оно содержит только косинусы, откуда следует, что $h = 0$.

Этот результат можно получить еще иначе, представляя разложение в форме

$$\sum A \cos (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h) \mathfrak{M}.$$

В этой форме постоянная $h$ должна быть равна нулю или $-\frac{\pi}{2}$, в зависимости от того, является ли одночлен $\mathfrak{M}$ четным или нечетным относительно $\eta$.

**87.** Возмущающая функция не изменится также, если упомянутую фигуру повернуть на произвольный угол $\varepsilon$ вокруг оси $x_3$. При этом, как мы видели в § 70, все долготы изменяются на $\varepsilon$, т. е. $\lambda$ заменяется на $\lambda + \varepsilon$, $\omega$ на $\omega - \varepsilon$.

При этих условиях разложение (10) не изменится, откуда следует, что целые числа $k$ и $p$ должны удовлетворять условию

$$\Sigma k = \Sigma p.$$

**88.** Возмущающая функция не изменится также, если ту же фигуру заменить симметричной фигурой по отношению к плоскости $x_1x_2$. Но так же, как мы видели в § 72, это приводит к изменению знаков облических переменных $\xi_2$, $\eta_2$, $\xi_4$, $\eta_4$. Следовательно, разложение $F$ по степеням $\xi$ и $\eta$ содержит только члены четной степени относительно этих облических переменных.

Этот поворот приводит также к замене $\omega_2$ и $\omega_4$ на $\omega_2 + \pi$ и $\omega_4 + \pi$, и так как при этом разложение (10) не должно измениться, то $p_2 + p_4$ есть всегда число четное.

**89. Однородность.** Функция $F$ является однородной функцией $(-1)$-й степени относительно больших полуосей и, следовательно, однородной $(-2)$-й степени относительно $L$ и $\varrho$. Из этого следует, что в разложении (10) коэффициент $A$ есть однородная функция степени $-2-\Sigma q$ относительно $L$.

**90. Интегралы площадей.** Посмотрим, как напишутся интегралы площадей в новых переменных. Мы видели в § 23, что эти интегралы сохраняют ту же форму, когда от переменных $x$ и $y$ переходят к переменным $x'$ и $y'$ таким образом, что каждая компонента вектора площадей является суммой соответствующих компонент вектора площадей первой фиктивной планеты $A'$ и вектора площадей второй фиктивной планеты $B'$. С другой стороны, вектор площадей в момент $t$ одинаков для планет $A'$ и $A''$, так как в этот момент они имеют те же координаты, те же массы и ту же скорость. То же будет и для планет $B'$ и $B''$.

Но в § 60 мы видели, что три компоненты вектора площадей планеты, движущейся по законам Кеплера, имеют следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} G\sin i\sin\theta &= -\eta_2\sqrt{L-\varrho_1-\frac{\varrho_2}{2}}\,,\\ -G\sin i\cos\theta &= -\xi_2\sqrt{L-\varrho_1-\frac{\varrho_2}{2}}\,,\\ \Theta &= L-\varrho_1-\varrho_2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Мы видим, что в два первых из этих равенств входят и $\xi$, и $\eta$, и $\varrho$. Но всегда легко перейти отсюда к выражению, содержащему $\varrho$ и $\omega$, либо к выражению в функции от $\xi$ и $\eta$.

Применим эти формулы к двум планетам $A''$ и $B''$, движущимся по эллиптическим орбитам. Мы увидим, что компоненты вектора площадей будут

$$-\eta_2\sqrt{L_1-\varrho_1-\frac{\varrho_2}{2}}\,,\qquad -\xi_2\sqrt{L_1-\varrho_1-\frac{\varrho_2}{2}}\,,\qquad L_1-\varrho_1-\varrho_2$$

для планеты $A''$ и

$$-\eta_4\sqrt{L_2-\varrho_3-\frac{\varrho_4}{2}}\,,\qquad -\xi_4\sqrt{L_2-\varrho_3-\frac{\varrho_4}{2}}\,,\qquad L_3-\varrho_3-\varrho_4$$

для планеты $B''$, так что интегралы площадей напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} -\eta_2\sqrt{L_1-\varrho_1-\frac{\varrho_2}{2}}-\eta_4\sqrt{L_2-\varrho_3-\frac{\varrho_4}{2}} &= \text{const},\\ -\xi_2\sqrt{L_1-\varrho_1-\frac{\varrho_2}{2}}-\xi_4\sqrt{L_2-\varrho_3-\frac{\varrho_4}{2}} &= \text{const},\\ \sum L-\sum\varrho &= \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Последнее из равенств (12) можно легко получить следующим образом.

В § 87 мы видели, что в разложении (10) возмущающей функции $\mu F_1$ имеем $\Sigma k = \Sigma p$. Следовательно,

$$\sum\frac{\partial(\mu F_1)}{\partial\lambda}=\sum\frac{\partial(\mu F_1)}{\partial\omega}\,,$$

и так как $F$ отличается от $\mu F_1$ только членом $F_0$, который не зависит от $\lambda$ и $\omega$, то

$$\sum \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum \frac{\partial F}{\partial \omega},$$

или, в силу уравнений (4),

$$\sum \frac{dL}{dt} - \sum \frac{d\varrho}{dt} = 0,$$

или, наконец,

$$\sum L - \sum \varrho = \mathrm{const}.$$

**91.** Покажем, что уравнения (12) упрощаются, если за плоскость $x_1x_2$ взять неизменную плоскость. Действительно, правые части первых двух равенств (12) будут равны нулю, и тогда из них выведем

$$\frac{\xi_2}{\eta_2} = \frac{\xi_4}{\eta_4}$$

или

$$\omega_2 = \omega_4$$

и

$$\varrho_2 \left( L_1 - \varrho_1 - \frac{\varrho_2}{2} \right) = \varrho_4 \left( L_2 - \varrho_3 - \frac{\varrho_4}{2} \right).$$

Уравнение $\omega_2 = \omega_4$ выражает свойство, отмеченное в § 25, под названием *исключение узлов*.

**92.** Все, что мы говорили до сих пор, распространяется без всяких затруднений и на случай задачи многих тел. В частности, это относится к результатам § 90. Но результаты § 91, так же как и результаты § 25, не будут верными в случае, когда мы имеем более трех тел.

**93. Последовательные приближения.** Так как $F = F_0 + \mu F_1$ и $F_0$ зависит только от $L$, то уравнения (4) § 78 могут быть написаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\mu \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}, & \frac{d\eta}{dt} &= \mu \frac{\partial F_1}{\partial \xi}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\mu \frac{\partial F_1}{\partial \eta}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial L} + \mu \frac{\partial F_1}{\partial L}, \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

а уравнения (5) § 79 напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\mu \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}, & \frac{d\omega}{dt} &= \mu \frac{\partial F_1}{\partial \varrho}, \\ \frac{d\varrho}{dt} &= -\mu \frac{\partial F_1}{\partial \omega}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial L} + \mu \frac{\partial F_1}{\partial L}. \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

Для упрощения записи мы опустили индекс $i$.

Пользуясь малостью параметра $\mu$, можно проинтегрировать уравнения (4') или (5') последовательными приближениями.

В первом приближении положим $\mu = 0$, так что переменные $L$, $\varrho$, $\omega$, $\xi$, $\eta$ будут постоянными и $\lambda$ — линейной функцией времени.

Далее, в правых частях трех первых уравнений (4') или (5') заменим неизвестные функции $L$, $\lambda$, $\varrho$, $\omega$ (или $L$, $\varrho$, $\xi$, $\eta$) их значениями, найденными в первом приближении.

Тогда эти уравнения дают простыми квадратурами новые приближенные значения $L$, $\varrho$, $\omega$ (или $L$, $\xi$, $\eta$). Далее, в правой части четвертого уравнения (4') или (5') заменяем $L$, $\varrho$, $\omega$ (или $L$, $\xi$, $\eta$) найденными новыми значениями и $\lambda$ заменяем значением первого приближения. Затем квадратурой находим новое приближенное значение $\lambda$. Таким образом получаем второе приближение.

Затем в правых частях трех первых уравнений (4') или (5') заменяем неизвестные функции их значениями, найденными во втором приближении, и находим квадратурами новые приближенные значения для $L$, $\varrho$ и $\omega$ (или для $L$, $\xi$ и $\eta$), которые подставляем в правую часть четвертого уравнения, где, сверх того, заменяем $\lambda$ его значением из второго приближения.

В результате имеем третье приближение. Таким же образом поступаем и далее. В $n$-м приближении рассматриваем сначала три первых уравнения, в правых частях которых заменяем неизвестные их значениями из $(n - 1)$-го приближения. Вычисляем квадратурами значения $n$-го приближения всех неизвестных, за исключением $\lambda$.

Затем берем четвертое уравнение. В правой части заменяем все неизвестные (за исключением $\lambda$) их значениями, полученными в $n$-м приближении, а $\lambda$ заменяем его значением из $(n - 1)$-го приближения. Наконец, квадратурами получаем значения $n$-го приближения и для $\lambda$. Мы видим, что каждое приближение получается простыми квадратурами.

**94.** Теперь нужно оценить полученные приближения. Будем искать разложения неизвестных функций по степеням $\mu$, определяя притом, сколько точных членов содержат эти разложения в каждом приближении.

Для этого будем опираться на следующие леммы:

1. Если две функции разложимы по степеням $\mu$, то их произведение также разложимо по степеням $\mu$, и если заменить функции разложениями, в которых верны только первые члены, так что первый неверный член содержит $\mu^n$, то и в разложении произведения тоже первые члены будут верными, так что первый неверный член содержит $\mu^n$.

2. Этот результат непосредственно распространяется на любой целый многочлен. Пусть $P$ является целым многочленом относительно $x$, $y$, $z$; если $x$, $y$, $z$ разложимы по степеням $\mu$, то много-

член $P$ также обладает этим свойством. При этом, если $x$, $y$, $z$ заменить их приближенными разложениями, где первые ошибочные члены содержат $\mu^n$, то первые члены разложения $P$ будут верными, так что первый неверный член содержит $\mu^n$.

3. Рассмотрим теперь какую-нибудь функцию $f(x, y, z)$. Пусть $x_0$, $y_0$, $z_0$ — значения $x$, $y$, $z$ при $\mu = 0$, т. е. первые члены в разложениях $x$, $y$, $z$ по степеням $\mu$. Мы утверждаем, что предыдущее предложение будет верным, если функция $f(x, y, z)$ голоморфна относительно $x$, $y$, $z$ при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Действительно, положим

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = z_0 + \delta z.$$

Функция $f(x, y, z)$, будучи голоморфной, разложима по степеням $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$. Поэтому можно написать

$$f = f_0 + f_1,$$

где $f_0$ содержит совокупность членов, степень которых относительно $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ меньше $n$, и $f_1$ является совокупностью членов, степень которых не меньше $n$; тогда $f_0$ есть многочлен, к которому применима предыдущая лемма.

Предположим теперь, что $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ заменяются или их точными разложениями по степеням $\mu$, или разложениями, в которых верны только первые члены, так что первый ошибочный член содержит $\mu^n$. В обоих случаях функции $f$, $f_0$ и $f_1$ будут разложимы по степеням $\mu$. Более того, так как $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ делятся на $\mu$ и так как $f_1$ содержит только члены степени не меньше чем $n$ относительно $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, то эта функция $f_1$ будет делиться на $\mu^n$.

Теперь можно утверждать, что в двух разложениях, и в точном и в приближенном, члены, степень которых меньше $n$ (т. е. члены с $\mu^i$, где $i < n$), будут одинаковы. Это верно для функции $f_0$, которая есть многочлен, к которому применима лемма. Это также верно для $f_1$, которая делится на $\mu^n$ и которая, следовательно, не содержит члены, степень которых меньше $n$ относительно $\mu$. Следовательно, это верно также для $f$.

Таким образом, в приближенном разложении $f$ первый ошибочный член содержит $\mu^n$ или, как мы будем говорить более кратко, ошибка есть величина порядка $\mu^n$.

95. Применим эти леммы к занимающему нас вопросу. Это возможно, так как $F_0$ и $F_1$, так же как и их производные, суть голоморфные функции неизвестных $L$, $\lambda$, $\varrho$, $\omega$ (или $L$, $\lambda$, $\xi$, $\eta$).

Заметим сначала, что в каждом приближении мы будем находить для наших неизвестных выражения, разложимые по степеням $\mu$. В самом деле, если это верно в $(n - 1)$-м приближении, то когда мы подставим в правые части уравнений (4′) эти приближенные значения, разложимые по степеням $\mu$, тогда после подстановки получим выражения, также разложимые по степеням $\mu$, а так как новые приближенные значения неизвестных получаются квадратурами из этих правых частей, то они также будут обладать этим свойством.

Если в приближенных разложениях неизвестных первый ошибочный член содержит $\mu^n$ и если мы подставим эти приближенные разложения в $F_1$, то в силу леммы первые члены разложения $F_1$ будут верными и первый ошибочный член будет содержать $\mu^n$. Для $\mu F_1$ первый неверный член будет содержать $\mu^{n+1}$, и если $F_1'$ есть какая-нибудь частная производная от $F_1$, то ошибка в $\mu F_1'$ будет также порядка $\mu^{n+1}$.

Для $F_0$ или для какой-нибудь частной производной от $F_0$ допущенная погрешность будет порядка $\mu^n$.

В первом приближении допускаемая погрешность неизвестных имеет порядок $\mu$.

Перейдем ко второму приближению. Подставим эти первые приближенные значения в правые части первых трех уравнений (4′) или (5′), которые имеют вид $\mu F_1'$. Допущенная погрешность этих правых частей будет порядка $\mu^2$, и такова же будет ошибка новых приближенных значений $L$, $\varrho$, $\omega$ (или $L$, $\xi$, $\eta$).

Подставим эти новые приближенные значения в правую часть четвертого уравнения и заменим одновременно $\lambda$ их значениями из первого приближения. В одних мы делаем погрешность порядка $\mu^2$, в других — погрешность порядка $\mu$. Допущенная погрешность в $\mu \frac{\partial F_1}{\partial L}$ будет, следовательно, порядка $\mu^2$. Что касается погрешности в $\frac{\partial F_0}{\partial L}$, то она тоже будет порядка $\mu^2$, так как $\frac{\partial F_0}{\partial L}$ зависит только от $L$ и погрешность в $L$ — порядка $\mu^2$. Итак, погрешность правой части нашего уравнения и, следовательно, новых приближенных значений $\lambda$ будет также порядка $\mu^2$.

Таким же образом докажем, что в третьем приближении погрешность правых частей трех первых уравнений есть величина порядка $\mu^3$; ошибка новых приближенных значений $L$, $\varrho$, $\omega$ имеет порядок $\mu^3$; наконец, ошибка в $\mu \frac{\partial F_1}{\partial L}$, $\frac{\partial F_0}{\partial L}$ и, следовательно, в правой части четвертого уравнения и в новых приближенных значениях $\lambda$ также порядка $\mu^3$.

Резюмируя, можно сказать, что после $n$-го приближения погрешность, допущенная в наших неизвестных, будет порядка $\mu^n$.

**96.** В методе приближений § 93 мы подставляли в правые части наших уравнений вместо неизвестных разложения, полученные определенным образом. Но способ получения не имеет существенного значения. Допустим, что в правые части первых трех уравнений (4′) мы подставили вместо неизвестных другие разложения, лишь бы первый ошибочный член имел порядок $\mu^n$. Анализ § 95 немедленно показывает, что эти уравнения дадут нам приближенные разложения для $L$, $\rho$, $\omega$, в которых первый ошибочный член будет порядка $\mu^{n+1}$.

Возьмем затем четвертое уравнение (4'). В правой части заменим $L$, $\rho$, $\omega$ этими новыми разложениями, а вместо $\lambda$ подставим прежние разложения, погрешность которых порядка $\mu^n$. Пользуясь анализом § 95, мы сразу увидим, что уравнение даст для $\lambda$ новые приближенные разложения, где первый ошибочный член будет порядка $\mu^{n+1}$.

В процессе наших приближений мы можем, как, впрочем, нам указывает и здравый смысл, отбросить ошибочные члены разложений и сохранить только точные члены.

В $n$-м приближении мы подставляем в правые части наши приближенные разложения и получаем для правых частей разложения, которые мы можем оборвать на членах со множителем $\mu^{n-1}$, так как все следующие члены неверны.

В правой части четвертого уравнения мы имеем два слагаемых $\frac{\partial F_0}{\partial L}$ и $\mu \frac{\partial F_1}{\partial L}$. Во втором слагаемом достаточно заменить неизвестные их прежними разложениями, которые являются точными до членов порядка $\mu^{n-2}$ включительно. Погрешность, допущенная в разложении $\mu \frac{\partial F_1}{\partial L}$, будет опять порядка $\mu^n$. Но в слагаемом $\frac{\partial F_0}{\partial L}$ следует заменить $L$ (только $L$, так как $\frac{\partial F_0}{\partial L}$ зависит только от $L$) новыми разложениями, точными до членов порядка $\mu^{n-1}$ включительно, полученными с помощью первых трех уравнений.

97. Целесообразно сделать уточнения. Рассмотрим, например, уравнения (5'). Допустим, что мы рассматриваем частное решение этих уравнений, в которых при $t=0$ переменные $L_i$, $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ принимают начальные значения $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, и предположим, что мы желаем разложить это решение по степеням $\mu$.

В первом приближении мы будем иметь

$$L_i = L_i^0, \quad \xi_i = \xi_i^0, \quad \eta_i = \eta_i^0, \quad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0, \tag{13}$$

где $n_i$ — постоянные, которые в соответствии с формулами эллиптического движения равны

$$n_i = \frac{M_i}{(L_i^0)^3},$$

где положено, как и в § 82,

$$M_1 = m_1'^3 (m_1 + m_7)^2 = m_1' m_1^2 m_7^2,$$

$$M_2 = m_4'^3 (m_1 + m_4 + m_7)^2 = m_4' m_4^2 (m_1 + m_7)^2.$$

В $n$-м приближении будем иметь

$$\left.\begin{aligned} L_i = L_i^0 - \mu \int\limits_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}\, dt, \qquad \xi_i = \xi_i^0 - \mu \int\limits_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}\, dt, \\ \eta_i = \eta_i^0 + \mu \int\limits_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}\, dt \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

и

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \int\limits_0^t \frac{\partial F_0}{\partial L_i}\, dt + \mu \int\limits_0^t \frac{\partial F_1}{\partial L_i}\, dt. \tag{15}$$

В интегралах, фигурирующих в правых частях формул (14), неизвестные должны быть заменены значениями, полученными в ($n$ — 1)-м приближении. То же самое относится ко второму интегралу в формуле (15), тогда как в первом интеграле, где подынтегральная функция зависит только от $L$, мы должны заменить переменные $L$ их значениями, полученными из уравнений (14).

ГЛАВА V

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛАГРАНЖА

98. В конце предыдущей главы мы видели, что наши уравнения могут быть проинтегрированы последовательными приближениями и эти приближения осуществляются простыми квадратурами. Все квадратуры, к которым приводит применение этого метода, имеют вид

$$\int At^m \cos(\nu t + h)\, dt,$$

где $m$ — целое положительное число или нуль, а $A$, $\nu$ и $h$ — постоянные.

Прежде всего, для $m = 0$ имеем

$$\int \cos(\nu t + h)\, dt = \frac{\sin(\nu t + h)}{\nu} \tag{1}$$

и, кроме того,

$$\int e^{i\nu t}\, dt = \frac{e^{i\nu t}}{i\nu}.$$

Если продифференцируем последнее равенство $m$ раз по $\nu$ и разделим на $i^m$, то получим

$$\int t^m e^{i\nu t}\, dt = \frac{t^m e^{i\nu t}}{i\nu} + \frac{m!}{(m-1)!}\cdot\frac{t^{m-1}e^{i\nu t}}{\nu^2} + i\,\frac{m!}{(m-2)!}\cdot\frac{t^{m-2}e^{i\nu t}}{\nu^3} + \\ + \ldots + i^{m-3}\,\frac{m!}{2!}\cdot\frac{t^2 e^{i\nu t}}{\nu^{m-1}} + i^{m-2}\cdot\frac{m!}{1!}\cdot\frac{te^{i\nu t}}{\nu^m} + i^{m-1}\cdot\frac{m!}{1!}\cdot\frac{e^{i\nu t}}{\nu^{m+1}},$$

откуда, умножая на $Ae^{ih}$ и выделяя действительную часть, имеем

$$\int At^m \cos(\nu t + h)\, dt = \frac{At^m \sin(\nu t + h)}{\nu} + mAt^{m-1}\cdot\frac{\cos(\nu t + h)}{\nu^2} - \\ - m(m-1)At^{m-2}\frac{\sin(\nu t + h)}{\nu^3} + \ldots \pm m!\,A \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\nu t + h)\frac{1}{\nu^{m+1}}. \tag{2}$$

Общий член разложения имеет вид

$$\pm m(m-1)\ldots(m-p+1)\,A \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\nu t + h)\frac{t^{m-p}}{\nu^{p+1}},$$

где следует взять

$$+\sin,\quad +\cos,\quad -\sin,\quad -\cos$$

при

$$p \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3 \pmod 4).$$

Следует подчеркнуть наличие $\nu$ в знаменателе. Следовательно, предыдущие формулы становятся бессмысленными в случае, когда $\nu = 0$. Тогда они должны быть заменены следующими:

$$\int A\,dt = At, \qquad \int At^m\,dt = \frac{A}{m+1}t^{m+1}. \tag{3}$$

99. Применим эти результаты к интересующей нас проблеме, т. е. к интегрированию уравнений (5′) § 93. В § 83 мы видели, что функции $\mu F_1$ и $F$ могут быть разложены по степеням $\xi$ и $\eta$ и по косинусам и синусам кратных $\lambda$. То же самое справедливо и для частных производных от $F$ по $L$, $\lambda$, $\xi$ и $\eta$. Таким образом, правые части уравнений (5) разложимы в ряды вида

$$\sum A\cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\,\mathfrak{M}, \tag{4}$$

где $A$ и $h$ — постоянные, зависящие только от $L$, $k$ суть целые числа и $\mathfrak{M}$ — целый одночлен относительно $\xi$ и $\eta$. При этом согласно § 86 постоянная $h$ равна нулю или $-\frac{\pi}{2}$.

В первом приближении мы имеем

$$L_i = L_i^0, \quad \xi_i = \xi_i^0, \quad \eta_i = \eta_i^0, \quad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0.$$

Если, применяя правила § 93 и 97, мы подставим эти значения в правые части трех первых уравнений (5′), то эти правые части примут вид

$$\sum B\cos(\nu t + h'),$$

где $B$ и $h'$ — постоянные и

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2.$$

Мы можем тогда интегрировать наши уравнения с помощью формул (1) и (3) и найдем для неизвестных $L_i$, $\xi_i$ и $\eta_i$ новые разложения, члены которых содержат или $\sin(\nu t + h')$ или $t$.

Переходим к уравнению (15) § 97:

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \int_0^t \frac{\partial F_0}{\partial L_i}\,dt + \mu\int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial L_i}\,dt.$$

В производной $\frac{\partial F_1}{\partial L_i}$ мы опять должны подставить вместо неизвестных их приближенные значения $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $n_i t + \lambda_i^0$; таким образом, получим для $\lambda_i$ члены с $t$ в результате применения формулы (3) и члены с $\sin(\nu t + h')$ в результате применения формулы (1).

В производной $\frac{\partial F_0}{\partial L_i}$ следует согласно правилу § 97 заменить $L_i$ новыми разложениями, которые мы только что нашли. Пусть

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i$$

будут этими новыми разложениями. Величины $\delta L_i$ разложимы по степеням $\mu$, но так как при этом

$$\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}\, dt,$$

а в функции $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}$ неизвестные заменены их приближенными значениями, не зависящими от $\mu$, то легко видеть, что разложение $\delta L_i$ сводится к единственному члену, а именно к члену с $\mu$.

При $L_i = L_i^0$ $\frac{\partial F_0}{\partial L_i}$ приводится к $n_i$. Кроме того, для $L_i = L_i^0 + \delta L_i$ частная производная $\frac{\partial F_0}{\partial L_i}$ может быть разложена по степеням $\delta L_i$ в форме

$$\frac{\partial F_0}{\partial L_i} = n_i + \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_i\, \partial L_1}\, \delta L_1 + \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_i\, \partial L_2}\, \delta L_2 + \ldots$$

В этом разложении мы можем пренебречь членами второй и более высокой степени, так как они порядка $\mu^2$ и выше, и если мы заметим, с другой стороны, что из выражения для $F_0$ (см. § 82) следует

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial L_1\, \partial L_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_i^2} = \frac{dn_i}{dL_i^0},$$

то можем написать

$$\frac{\partial F_0}{\partial L_i} = n_i + \frac{dn_i}{dL_i^0}\, \delta L_i,$$

откуда

$$\int_0^t \frac{\partial F_0}{\partial L_i}\, dt = n_i t + \frac{dn_i}{dL_i^0} \int_0^t \delta L_i\, dt.$$

Величину $\frac{dn_i}{dL_i^0}$ можно вынести из-под знака интеграла, так как она постоянна. Действительно, последовательные производные функции $F_0$ после замены $L_i$ на $L_i^0$ приводятся к постоянным.

Мы видели, что $\delta L_i$ содержит члены с $\sin(\nu t + h')$ и может содержать члены, пропорциональные $t$. Мы скоро увидим, что члены, пропорциональные $t$, появляются только тогда, когда отношение средних движений $\frac{n_1}{n_2}$ соизмеримо*). Это свойство известно под названием *неизменности больших осей.*

Это нам дает в $\int \delta L_i \, dt$ и, следовательно, в $\lambda_i$ члены с $\cos(\nu t + h)$ и члены, пропорциональные $t$. Возможно также наличие членов, пропорциональных $t^2$ [в результате применения формулы (3)], но это только в том случае, когда $\delta L_i$ содержит члены, пропорциональные $t$, т. е. в том случае, если отношение средних движений соизмеримо.

Таким образом, имеем второе приближение, которое по причине малости возмущающих масс достаточно для практических нужд в большинстве приложений.

**100.** Тем не менее, продолжим приближения далее и посмотрим, каков общий вид членов наших разложений.

Мы утверждаем, что все члены разложений имеют вид

$$At^m \cos(\nu t + h), \tag{5}$$

где $m$ — целое неотрицательное число, $A$ и $h$ — постоянны и

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2,$$

причем $k$ — целые положительные или отрицательные числа.

Заметим сначала, что произведение двух выражений вида (5) является суммой членов того же вида, и, следовательно, многочлен, целый относительно нескольких величин вида (5), также представляется в виде суммы членов того же вида.

Вообще, пусть $f$ есть функция, разложимая по степеням $x$, $y$, $z$. Если $x$, $y$, $z$ разложимы в ряды, члены которых имеют форму (5), то и сама функция $f$ разложима в ряд, члены которого имеют вид (5).

Действительно, если в разложении функции $f$ по степеням $x$, $y$, $z$ мы заменим $x$, $y$, $z$ их разложениями, то в результате замены получим ряд, каждый член которого будет произведением выражений вида (5).

Из § 98 мы видим затем, что, интегрируя по $t$ выражение вида (5), мы также получим сумму членов того же вида, так как полезно заметить, что

$$\sin(\nu t + h) = \cos\left(\nu t + h - \frac{\pi}{2}\right).$$

Установив это, рассмотрим частные производные от $F_1$ и $F_0$,

---

*) Говоря, что отношение $\frac{n_1}{n_2}$ соизмеримо, Пуанкаре имеет в виду, что оно рационально, т. е. что соизмеримы $n_1$ и $n_2$. (*Прим. ред.*)

которые входят в правые части наших уравнений. Положим

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i, \quad \xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i, \quad \eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i, \quad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i.$$

Частные производные от $F_1$ и $F_0$ могут быть разложены по степеням $\delta L$, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ в виде

$$\sum B\mathfrak{M}',$$

где $\mathfrak{M}$ — целый одночлен относительно $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$. Что касается коэффициентов $B$, то они согласно формуле Тейлора являются частными производными высших порядков от $F_1$ и $F_0$, в которых $L$, $\xi$, $\eta$, $\lambda$ должны быть заменены их приближенными значениями $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $n_i t + \lambda_i^0$.

Частные производные любого порядка $F_1$ и $F_0$ могут быть представлены, как и сами эти функции, в виде (4) из § 99, т. е. в форме

$$\sum A \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\,\mathfrak{M}.$$

Если заменить здесь неизвестные их приближенными значениями, то эти выражения приведутся к сумме членов вида (5), так как $A$ и $\mathfrak{M}$ приводятся к постоянным и $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h$ к $\nu t + h'$, где

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2, \quad h' = h + k_1\lambda_1^0 + k_2\lambda_2^0.$$

Таким образом, коэффициенты $B$ являются суммами членов вида (5).

Покажем, что $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\lambda_i$ в любом приближении содержат только члены вида (5).

Действительно, допустим, что это справедливо для $n$-го приближения, и докажем, что это будет также верно для $(n + 1)$-го. В самом деле, рассмотрим сначала первые три уравнения (5′) из § 93. Их правые части имеют вид $\Sigma B\mathfrak{M}'$, где в одночленах $\mathfrak{M}'$ следует заменить $\delta L$, ... их значениями из $n$-го приближения. По предположению, эти значения представляются суммами вида (5). Следовательно, одночлен $\mathfrak{M}'$ также есть сумма членов вида (5), и так как выражения для коэффициентов $B$ имеют тот же вид, то $\Sigma B\mathfrak{M}'$ также будет суммой членов того же вида.

Итак, правые части уравнений имеют вид суммы членов вида (5). Интегрируя по $t$, мы видим, что новые значения $\delta L_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\xi_i$, т. е. их значения в $(n + 1)$-м приближении, будут иметь тот же вид.

Наконец, рассмотрим четвертое уравнение (5′) из § 93. В его правой части следует заменить $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ их значениями из $(n + 1)$-го приближения и вместо $\delta\lambda_i$ подставить его значение из $n$-го приближения. Все эти значения представляются суммами членов вида (5).

Как и выше, заключим, что правая часть есть сумма членов вида (5) и что результат интегрирования, дающий новое значение для $\delta\lambda_i$, т. е. его значение в $(n+1)$-м приближении, также является суммой членов вида (5), что и требовалось доказать.

**101. Малые делители.** Мы видели в § 98, что в результате интегрирований коэффициент $\nu$ появляется в знаменателе. Из этого следует, что если $\nu = 0$, формулы (1) и (2) теряют смысл и в этом случае мы должны использовать формулы (3). Но

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2.$$

Следовательно, $\nu$ может обращаться в нуль, если отношение $\frac{n_1}{n_2}$ соизмеримо или если $k_1 = k_2 = 0$.

Вероятность того, что отношение $\frac{n_1}{n_2}$ в точности соизмеримо, бесконечно мала. Мы можем, следовательно, всегда допускать, что это отношение несоизмеримо и что, следовательно, $\nu$ может обратиться в нуль только, когда $k_1$ и $k_2$ одновременно равны нулю.

Но отношение средних движений, не будучи в точности соизмеримым, может быть *почти соизмеримым*. В этом случае $\nu$ не будет обращаться в нуль, но может быть весьма малым. Если же $\nu$ делается весьма малым, то члены, содержащие $\nu$ или степени $\nu$ в знаменателе, будут очень большими.

Тогда говорят, что эти члены являются весьма большими вследствие наличия *малых делителей*.

Можно показать, что каждому значению $\frac{n_1}{n_2}$ соответствует бесконечное множество малых делителей. Действительно, допустим, что мы обратили $\frac{n_1}{n_2}$ в непрерывную дробь, и пусть $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ — одна из ее подходящих дробей. Выражение $\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2$, где $\alpha$ — целые числа, весьма мало̀, так что каждой подходящей дроби соответствует малый делитель. Следовательно, мы имеем их бесконечное множество.

Но на практике приходится рассматривать только первые члены разложений, т. е. члены, которым соответствуют относительно небольшие значения целых чисел $k_1$ и $k_2$.

Следовательно, только первые подходящие дроби будут играть роль; большей частью, если отношение $\frac{n_1}{n_2}$ не очень близко к простой соизмеримости, т. е. к отношению двух небольших целых чисел, выражение $\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2$ не будет весьма малым, так как подобные выражения будут тем меньше, чем выше порядок соответствующих подходящих дробей. В этом случае малые делители не доставят нам беспокойства.

Если, наоборот, отношение $\frac{n_1}{n_2}$ очень близко к простой соизмеримости, т. е. к отношению целых положительных чисел, то выражение $\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2$, соответствующее одной из первых дробей, будет весьма мало̀. Но тогда имеет место следующее обстоятельство. Пусть $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ — следующая подходящая дробь. Мы утверждаем, что целые числа $\beta_1$ и $\beta_2$ будут очень большими, так что малый делитель $\beta_2 n_1 - \beta_1 n_2$ не будет находиться среди первых членов разложения, которые обычно сохраняют.

Действительно, пусть $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ — подходящая дробь, предшествующая $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Из теории непрерывных дробей известно, что мы будем иметь

$$\beta_1 = \gamma_1 + \alpha_1 a, \quad \beta_2 = \gamma_2 + \alpha_2 a,$$

где $a$ — соответствующее неполное частное. Если положим

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\gamma_1 + \alpha_1 x}{\gamma_2 + \alpha_2 x},$$

то $a$ — целая часть $x$, так что разность $x - a$ заключена между нулем и единицей. Тогда будем иметь

$$x = \frac{\gamma_1 n_2 - \gamma_2 n_1}{\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2}.$$

Согласно предположению знаменатель $\alpha_2 n_1 - \alpha_1 n_2$ весьма мал. Следовательно, $x$, а значит, и $a$ будут весьма большими, так же как и $\beta_1$ и $\beta_2$, что и требовалось доказать.

Таким образом, нам не придется беспокоиться ни о дроби $\frac{\beta_1}{\beta_2}$, ни, тем более, о следующих подходящих дробях. Следовательно, на практике придется принимать во внимание не больше одного малого делителя.

Если вместо трех тел мы имеем большее число, например, четыре (три планеты и Солнце), то будем иметь

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3.$$

В этом случае условие несоизмеримости отношения $\frac{n_1}{n_2}$ должно быть заменено следующим: между тремя средними движениями $n_1$. $n_2$, $n_3$ не существует линейного соотношения с целыми коэффициентами*).

**102. Форма разложений.** Рассмотрим теперь наши неизвестные как функции от начальных значений $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ величин $\xi_i$ и $\eta_i$. Покажем, что все неизвестные могут быть разложены в ряды по возрастающим степеням $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$.

*) То есть не должно существовать соотношения вида $k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3 = 0$, где все $k$ — целые. (*Прим. перев.*)

Действительно, в первом приближении это имеет место, так как в этом случае просто $\xi_i = \xi_i^0$, $\eta_i = \eta_i^0$, а $L_i$ и $\lambda_i$ не зависят от $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$. Поэтому достаточно показать, что если сказанное верно в $n$-м приближении, то оно будет верно также в $(n+1)$-м приближении. Рассмотрим сначала первые три уравнения системы (5′) из § 93, правые части которых имеют форму

$$\sum B\mathfrak{M}'.$$

Раньше было показано, что коэффициенты $B$ сами имеют форму

$$\sum A\cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\,\mathfrak{M},$$

где $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\lambda_i$ нужно заменить их приближенными значениями $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $n_it + \lambda_i^0$. Тогда $\mathfrak{M}$, который является целым одночленом относительно $\xi_i$ и $\eta_i$, сделается целым одночленом также относительно $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, и так как другие множители не зависят от $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, то мы видим, что все коэффициенты $B$ разложимы по степеням $\xi_i^0$, $\eta_i^0$.

Что касается $\mathfrak{M}'$, то он является целым одночленом относительно $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$, где эти выражения должны быть заменены их значениями из $n$-го приближения. Но, по предположению, эти величины разложимы по степеням $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, откуда следует, что $\mathfrak{M}'$ также обладает этим свойством, так же как и рассматриваемые правые части $\Sigma B\mathfrak{M}'$.

Если мы проинтегрируем, то увидим, что в $(n+1)$-м приближении величины $L$, $\xi$, $\eta$ разложимы по степеням $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$. Аналогично можно показать, что $(n+1)$-е приближение переменной $\lambda_i$ тоже представляется рядом по степеням $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$.

Итак, наши разложения будут иметь вид

$$\sum \mu^\alpha A\,\mathfrak{M}_0 t^m\cos(\nu t + h), \tag{6}$$

где $\mathfrak{M}_0$ — целый одночлен относительно $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ и где $A$ и $h$ — постоянные, зависящие только от $L_i^0$ и $\lambda_i^0$. Так как наши выражения разложимы по степеням $\mu$, то мы будем иметь в качестве множителя степень параметра $\mu$, что и написано явно. Положим

$$\xi_i^0 = \sqrt{2\varrho_i^0}\cos\omega_i^0, \qquad \eta_i^0 = \sqrt{2\varrho_i^0}\sin\omega_i^0,$$

где $\varrho_i^0$ и $\omega_i^0$ — начальные значения переменных $\varrho_i$ и $\omega_i$. Рассуждая как в § 69, мы увидим, что наше разложение может быть представлено также в форме

$$\sum \mu^\alpha A\varrho_1^{0q_1}\varrho_2^{0q_2}\varrho_3^{0q_3}\varrho_4^{0q_4}\cos\left(\nu t + \sum p_i\omega_i^0 + h\right), \tag{7}$$

где $A$ и $h$ зависят только от $L_i^0$ и $\lambda_i^0$ и где целые числа $p$ и $2q$ удовлетворяют условиям

$$2q_i \equiv p_i \pmod 2, \quad 2q_i \geqslant p_i.$$

**103. Гелиоцентрические координаты.** В § 64 мы видели, что координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$ массы, притягиваемой неподвижным центром, могут быть выражены в виде функций канонических элементов. Эти формулы могут быть применены к фиктивным планетам $A''$ и $B''$. Мы увидим, таким образом, что

$$x_1', \quad x_2', \quad x_3', \quad x_4', \quad x_5', \quad x_6'$$

разлагаются по степеням $\xi$ и $\eta$ и, кроме того, они суть функции $L$ и $\lambda$, голоморфные при

$$L_i = L_i^0, \quad \lambda_i = \lambda_i^0 + n_i t.$$

Следовательно, если положим

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i, \quad \lambda_i = \lambda_i^0 + n_i t + \delta\lambda_i,$$

то координаты $x'$ будут разложимы по степеням $\xi$, $\eta$, $\delta L$, $\delta\lambda$. Добавим, что коэффициенты разложения имеют вид $C\cos(\nu t + h)$, где $C$ и $h$ — постоянные, зависящие от $L_i^0$ и $\lambda_i^0$. Таким образом, разложения имеют форму (6). Так как величины $\xi$, $\eta$, $\delta L$, $\delta\lambda$ сами разложимы в ряды вида (6), то это будет справедливо также и для координат $x'$.

Рассуждая как в § 69, мы увидим, что $x'$ также могут быть разложены в форме (7).

Таким образом, координаты $x'$ могут быть разложены или в форме (6) или в форме (7), и то же справедливо для гелиоцентрических координат планет $x_1 - x_7$, $x_2 - x_8$, $x_3 - x_9$, $x_4 - x_7$, $x_5 - x_8$, $x_6 - x_9$, которые являются линейными функциями от $x'$.

**104. Классификация членов.** Таким образом, общий член разложений, как элементов, так и координат, имеет вид

$$\mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 t^m \cos(\nu t + h).$$

Это выражение может служить для классификации членов. Прежде всего мы будем различать *периодические члены*, *чисто вековые члены*, *смешанные вековые члены*.

Периодические члены это те, которые не содержат множителя $t^m$, в котором время $t$ находится вне знаков тригонометрических функций.

Чисто вековые члены — те, которые содержат только множитель $t^m$ и не содержат тригонометрический множитель

$$\cos(\nu t + h).$$

Смешанные вековые члены содержат одновременно и множитель $t^m$, и тригонометрический множитель.

Далее будем различать члены с точки зрения *порядка*, *степени*, *ранга* и *класса*.

Порядком члена разложения назовем показатель $\alpha$ степени параметра $\mu$. Это определение оправдывается малостью параметра $\mu$, так что члены будут тем меньше, чем больше их порядок.

Степенью члена разложения назовем степень одночлена $\mathfrak{M}_0$. Это определение оправдывается малостью эксцентриситетов и наклонностей. Так как $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ имеют порядок эксцентриситетов и наклонностей, то члены разложения будут тем меньше, чем выше их степень.

Рангом члена разложения назовем

$$\alpha - m,$$

т. е. разность показателя $\alpha$ параметра $\mu$ и показателя $m$ времени $t$. Легко видеть, что член, у которого разность $\alpha - m$ мала, может иметь большое значение, даже если $\alpha$ велико. Действительно, если $\alpha$ и $m$ оба велики, то член, сначала весьма малый, будет расти вместе со временем.

Что касается класса, то он зависит от наличия малых делителей в знаменателе. Малые делители, как мы видели, появляются в результате последовательных интегрирований.

Пусть $m'$ — показатель малого делителя, находящегося в знаменателе, или сумма показателей малых делителей, если малых делителей больше одного. В § 101 мы видели, что последний случай встречается очень редко.

Тогда класс члена, по определению, есть

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}.$$

**105. Неизменность больших осей.** Вернемся к уравнению

$$L_i = L_i^0 - \mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i} dt,$$

и допустим, что мы хотим построить второе приближение.

Для этого нужно заменить в производной $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}$ неизвестные их значениями из первого приближения. Но разложение $F_1$ имеет вид

$$F_1 = \sum A\mathfrak{M} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h),$$

где $h$ равна нулю или $-\frac{\pi}{2}$, и мы найдем

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i} = -\sum A\mathfrak{M}k_i \sin(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h).$$

В это выражение нужно подставить вместо неизвестных $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\lambda_i$ их значения из первого приближения,

$$L_i^0, \ \xi_i^0, \ \eta_i^0, \ \lambda_i = \lambda_i^0 + n_i t,$$

что дает

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i} = -\sum A_0 \mathfrak{M}_0 k_i \sin(\nu t + h'),$$

где

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2, \quad h' = k_1 \lambda_1^0 + k_2 \lambda_2^0 + h,$$

$A_0$ — значение $A$ при $L_i = L_i^0$, $\mathfrak{M}_0$ — значение $\mathfrak{M}$ при $\xi_i = \xi_i^0$ и $\eta_i = \eta_i^0$.

После интегрирования получим

$$L_i = L_i^0 - \mu \sum A_0 \mathfrak{M}_0 \frac{k_i}{\nu} [\cos(\nu t + h') - \cos h']. \tag{8}$$

Заметим, что в формуле (8) фигурируют только периодические члены, но нет вековых членов. Действительно, вековой член, пропорциональный $t$, мог бы появиться в случае, когда $\nu$ было бы нулем, т. е. в случае, когда формула (1) стала бы неприменимой и мы должны были бы обратиться к формуле (3). Но мы предположили, что отношение средних движений $\frac{n_1}{n_2}$ несоизмеримо. Тогда $\nu$ может равняться нулю только при одновременном равенстве нулю $k_1$ и $k_2$. Но тогда $k_i$ суть нули и соответствующий член исчезает.

Таким образом, если сохранить во втором приближении часть членов, достаточных для практики, то разложения $L_i$ и, следовательно, разложения больших осей, которые пропорциональны $L_i^2$, не будут содержать вековых членов. Следовательно, большие оси будут совершать только малые колебания около их средних значений.

В этом заключается теорема Лагранжа о неизменяемости больших осей, чрезвычайно важная с точки зрения устойчивости солнечной системы.

В § 99 мы видели, что во втором приближении разложение $\lambda_i$ может содержать члены, пропорциональные $t^2$, только если разложение $L_i$ содержит члены, пропорциональные $t$. Следовательно, если отношение средних движений несоизмеримо, то членов с $t^2$ нет, что и было уже отмечено в § 99.

**106. Теорема о ранге.** Можно опасаться, что для некоторых членов будем иметь $m > \alpha$, т. е. что ранг этих членов будет отрицательным. Докажем поэтому следующие важные теоремы.

1) *Разложения $\xi_i$, $\eta_i$, $\delta\lambda_i$, $L_i$ не содержат членов отрицательного ранга.* Мы пишем $\delta\lambda_i$, а не $\lambda_i$, так как в $\lambda_i$ мы имеем член $n_i t$ отрицательного ранга.

2) *Эти разложения не содержат смешанных членов нулевого ранга.* Ранг смешанных членов всегда больше или равен единице.

3) *Разложение $L_i$ не содержит членов нулевого ранга.*

Эти теоремы верны во втором приближении. Действительно, во втором приближении разложения содержат только тригонометрические члены или члены, пропорциональные $t$, а смешанных членов нет. Члены, пропорциональные $t$, имеют множителем $\mu$, т. е. их ранг равен нулю. Далее, в силу теоремы Лагранжа о неизменяемости больших осей, в разложении $L_i$ нет членов, пропорциональных $t$.

Докажем теперь, что если теоремы верны в $n$-м приближении, то они будут также верны в $(n+1)$-м приближении.

Действительно, вернемся к уравнениям (5′) или (14) и (15) § 97. В частности, уравнение (15) имеет вид

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \int_0^t \frac{\partial F_0}{\partial L_i} dt + \mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial L_i} dt.$$

Представим разложение функции $F_0$ по степеням $\delta L_i$ в форме

$$F_0 = F_0^0 + n_1 \delta L_1 + n_2 \delta L_2 + \frac{1}{2} (C_{11} \delta L_1^2 + 2C_{12} \delta L_1 \delta L_2 + C_{22} \delta L_2^2) + \Phi,$$

где $\Phi$ представляет совокупность членов, степень которых относительно $\delta L_1$ и $\delta L_2$ больше двух. Ясно, что $F_0^0$, $n_1$, $n_2$, $C_{ik}$ суть постоянные, зависящие только от $L_i^0$. Можно заметить даже, что $C_{12} = C_{21} = 0$, в силу того, что $F_0$ есть сумма функции от $L_1^0$ и функции от $L_2$, но это обстоятельство не будет играть в доказательстве никакой роли.

Итак, мы будем иметь

$$\frac{\partial F_0}{\partial L_i} = n_i + \sum C_{ik} \delta L_k + \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} = n_i + \mu \sum C_{ik} \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_k} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial L_i}.$$

Тогда наши уравнения примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i} dt, \quad \delta \xi_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \eta_i} dt, \\ &\delta \eta_i = \mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \xi_i} dt, \\ &\delta \lambda_i = \mu \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_k} dt + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt + \mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial L_i} dt. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

В правых частях этих уравнений неизвестные нужно заменить их значениями из $n$-го приближения. Таким образом, мы получим значения величины $\delta L_i$, $\delta \xi_i$, $\delta \eta_i$, $\delta \lambda_i$ в $(n+1)$-м приближении.

Так как мы ничего не изменили в трех первых уравнениях, то о $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ больше добавить нечего, но необходимо более подробно рассмотреть $\delta\lambda_i$. Если заменим неизвестные их значениями из $n$-го приближения, где погрешность имеет порядок $\mu^n$, то мы допустим в производных от $F_1$ погрешность порядка $\mu^n$ и, следовательно, в $\mu \int \frac{\partial F_1}{\partial L_i} dt$ и $\mu \int dt \int \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_k} dt$ — погрешность порядка $\mu^{n+1}$. Остается рассмотреть член $\int\limits_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt$.

Производная $\frac{\partial \Phi}{\partial L_i}$ содержит члены не ниже второго порядка относительно $\delta L$. Заметим, что $\delta L$ делятся на $\mu$.

В самом деле, пусть $x$, $y$, $z$ — три функции, разложения которых по степеням $\mu$ делятся на $\mu$. Пусть $x'$, $y'$, $z'$ — приближенные разложения $x$, $y$, $z$, в которых первые ошибочные члены имеют порядок $\mu^n$, так что разности $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ имеют порядок $\mu^n$. Покажем, что разности $xy - x'y'$, $xyz - x'y'z'$ будут делиться на $\mu^{n+1}$, т. е. если в произведениях $xy$, $xyz$ заменить $x$, $y$, $z$ их приближенными разложениями $x'$, $y'$, $z'$, то допущенная погрешность будет порядка $\mu^{n+1}$.

Действительно, имеем

$$xy - x'y' = x(y - y') + y'(x - x'),$$
$$xyz - x'y'z' = xy(z - z') + xz'(y - y') + y'z'(x - x').$$

По предположению, разности $x - x'$ и $y - y'$ делятся на $\mu^n$, тогда как $x$ и $y'$ делятся на $\mu$. Теорема, очевидно, распространяется и на произведение любого числа множителей.

Итак, если в целом относительно $\delta L$ одночлене, лишь бы его степень была не ниже второй, мы заменим $\delta L$ их значениями из $n$-го приближения, то допущенная погрешность члена будет порядка $\mu^{n+1}$. Так как частные производные $\frac{\partial \Phi}{\partial L_i}$ содержат $\delta L$ в степени не ниже второй, то допускаемая погрешность члена

$$\int\limits_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt$$

будет порядка $\mu^{n+1}$.

Установив это, заметим, что произведение двух членов положительного ранга будет суммой членов положительного ранга и что произведение двух членов положительного или нулевого ранга будет суммой членов положительного или нулевого ранга. Поэтому если в функции, которая разложена по степеням $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$, заменить последние разложениями, содержащими только члены положительного ранга (или неотрицательного), то получим разложение, содержащее только члены положительного (или неотрицательного) ранга. Если, следовательно, заменить $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ их значениями из $n$-го приближения, которые, по предположению, не содержат членов отрицательного ранга, то получим для частных производных разложения, содержащие только члены положительного или нулевого ранга.

Интегрирование по $t$ может уменьшить ранг на единицу, так как применение формулы (3) может ввести $t$ множителем. Но зато, умножая на $\mu$, мы увеличиваем ранг на единицу. Отсюда следует. что такие выражения, как

$$\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \xi_i} dt, \tag{10}$$

будут содержать лишь члены положительного или нулевого ранга. Более того, покажем, что они не могут содержать смешанные члены нулевого ранга. В самом деле, члены нулевого ранга в выражении (10) соответствуют членам отрицательного ранга в интеграле

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial \xi_i} dt.$$

Но так как $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}$ содержит только члены положительного или нулевого ранга, то интеграл мог бы их содержать только в силу применения формулы (3); но применение этой формулы может ввести только чисто вековые члены.

В итоге, мы можем прежде всего заключить, что в $(n+1)$-м приближении $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ содержат только члены положительного или нулевого ранга и не содержат смешанных членов нулевого ранга. Покажем теперь, что

$$\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i} dt$$

не может содержать члены нулевого ранга.

Согласно § 100 будем иметь

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i} = \sum B\mathfrak{M}',$$

где $\mathfrak{M}'$ — целый одночлен относительно $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$, и последние величины следует заменить их значениями из $n$-го приближения.

Что касается коэффициента $B$, то он является одной из частных производных от $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}$, в которой неизвестные нужно заменить их значениями из первого приближения

$$L_i^0,\ \xi_i^0,\ \eta_i^0,\ n_i t+\lambda_i^0.$$

Эта частная производная от $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}$, будучи также частной производной от $F_1$, согласно § 100 будет иметь форму

$$\sum A\cos(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+h)\,\mathfrak{M}.$$

Но $k_i$ не может быть нулем, так как члены, в которых $k_i$ будет нулем, исчезнут при дифференцировании по $\lambda_i$, и, следовательно, не могут существовать ни в $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}$, ни в ее производных.

Если же мы заменим неизвестные их приближенными значениями, то получим, как и в § 100, что $A\mathfrak{M}$ приводится к постоянной $C$ и $k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+h$ к $\nu t+h'$. Следовательно, будем иметь

$$B=\sum C\cos(\nu t+h'),$$

где $\nu=k_1n_1+k_2n_2$, и так как $k_i$ одновременно не равны нулю, то $\nu$ не может равняться нулю.

Рассмотрим, может ли $\mathfrak{M}'$ содержать члены нулевого ранга. Одночлен $\mathfrak{M}'$ есть произведение некоторого числа множителей $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$, и мы получим члены нулевого ранга в $\mathfrak{M}'$, заменяя каждый из множителей его членами нулевого ранга. Если, действительно, мы возьмем в одном из множителей член положительного ранга, то так как он должен умножаться на другие члены из двух множителей, ранг которых или положителен или нуль, то в произведении получим обязательно член положительного ранга. Но в каждом множителе члены нулевого ранга суть чисто вековые члены. Более того, произведение нескольких чисто вековых членов также будет, очевидно, чисто вековым членом. Таким образом, в произведении $\mathfrak{M}'$ все члены нулевого ранга будут чисто вековыми.

Так как все члены $B$ содержат тригонометрический множитель $\cos(\nu t+h')$, где $\nu\neq 0$, то все члены нулевого ранга в $B\mathfrak{M}'$ будут периодическими или смешанными. То же самое будет иметь место и относительно членов нулевого ранга в $\Sigma B\mathfrak{M}'$ или в $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}$.

Для интегрирования периодического и смешанного члена нужно применять формулу (1) или (2), что не уменьшает ранг. Следовательно, в

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}\,dt$$

будут входить только члены нулевого или положительного ранга. Умножая на $\mu$, мы увеличим ранг на единицу.

Итак, в $\delta L_i$ будут содержаться лишь члены, ранги которых не меньше единицы, что и требовалось доказать.

Полученный результат можно рассматривать как некоторое обобщение теоремы о неизменности больших осей.

Перейдем теперь к $\delta\lambda_i$ и к четвертому уравнению (9). В правой части этого уравнения имеются три слагаемых, которые мы и рассмотрим последовательно. Начнем с третьего, которое имеет такую же форму, как и правые части первых трех уравнений (9). Так же как и для этих трех первых уравнений, мы видим, что это слагаемое не может дать ни членов отрицательного ранга, ни смешанных членов нулевого ранга.

Переходим ко второму слагаемому

$$\int \frac{\partial\Phi}{\partial L_i}\,dt.$$

Прежде всего заметим, что $\frac{\partial\Phi}{\partial L_i}$ содержит только члены не ниже второй степени относительно $\delta L$. Разложения $\delta L$ содержат только члены, ранги которых не меньше единицы, поэтому произведение двух множителей $\delta L$ может содержать только члены, ранги которых не меньше двух. При интегрировании ранг может уменьшиться на единицу и останется не меньше единицы. Следовательно, здесь нет членов отрицательного ранга и смешанных членов нулевого ранга. Рассмотрим первое слагаемое:

$$\mu \sum C_{ik} \int dt \int \frac{\partial F_1}{\partial\lambda_k}\,dt.$$

Мы видели, что все члены нулевого ранга в $\frac{\partial F_1}{\partial\lambda_k}$ являются либо периодическими, либо смешанными. Двойное интегрирование не изменит их ранга, так как приходится при этом применять формулы (1) и (2). Ранги этих членов останутся равными нулю и после умножения на $\mu$ станут равными единице. Ранги других членов будут не меньше единицы. Если это периодические или смешанные члены, то двойное интегрирование не изменит их ранг и после умножения на $\mu$ ранг будет не меньше 2. Если это чисто вековые члены, то двойное интегрирование уменьшит ранг на две единицы, а умножение на $\mu$ — увеличит на единицу, так что окончательно этот ранг будет не меньше нуля. Таким образом, никогда не появятся члены отрицательного ранга и смешанные члены нулевого ранга.

Итак, значение $\delta\lambda_i$ в $(n+1)$-м приближении не содержит ни членов отрицательного ранга, ни смешанных членов нулевого ранга, что и требовалось доказать.

# РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЗЛОЖЕНИЙ

**107. Некоторые леммы.** В дальнейшем мы будем опираться на ряд лемм, которые на первый взгляд кажутся почти очевидными, но относительно которых необходимо дать некоторые разъяснения, так как мы ими часто будем пользоваться.

Пусть

$$\varphi(t) = \sum A\cos\nu t + \sum B\sin\nu t$$

является суммой тригонометрических членов. Допустим сначала, что число членов конечно.

*Тогда, если $\varphi(t)$ равна нулю для всех значений $t$, все коэффициенты $A$ и $B$ суть нули.*

Заранее, конечно, предполагаем, что подобные члены объединены (т. е. члены с одинаковыми множителями $\cos\nu t$ и $\sin\nu t$) в одно слагаемое.

В самом деле, пусть $A'\cos\nu' t$ — одно из слагаемых правой части. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)\cos\nu' t\,dt = \frac{A'}{2} + \frac{A'}{4\nu'}\cdot\frac{\sin 2\nu' t}{t} + \sum\frac{A}{2t}\left[\frac{\sin(\nu+\nu')t}{\nu+\nu'} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(\nu-\nu')t}{\nu-\nu'}\right] + \sum\frac{B}{t}\left[\frac{\sin^2(\nu+\nu')\frac{t}{2}}{\nu+\nu'} + \frac{\sin^2(\nu-\nu')\frac{t}{2}}{\nu-\nu'}\right],$$

причем, разумеется, первая сумма объединяет все члены, за исключением члена, для которого $\nu = \nu'$.

Заставим теперь $t$ неограниченно возрастать. Первый член остается постоянным, а все другие стремятся к нулю, так как $t$ находится в знаменателе, а тригонометрические функции, находящиеся в числителе, останутся конечными. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\varphi}\varphi(t)\cos\nu' t\,dt = \frac{A'}{2}$ и если $\varphi(t) = 0$, то будем иметь $A' = 0$.

Итак, все коэффициенты $A$ равны нулю; покажем также, что все $B$ тоже равны нулю.

Допустим, что

$$\nu = k_1 n_1 + k_1 n_2,$$

причем $n_1$ и $n_2$ — несоизмеримы между собой, а $k_1$ и $k_2$ — целые числа.

Введем две независимые переменные, $w_1$ и $w_2$, и положим

$$f(w_1,\ w_2) = \sum A \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2) + \sum B \sin(k_1 w_1 + k_2 w_2).$$

При $w_1 = n_1 t$ и $w_2 = n_2 t$ $k_1 w_1 + k_2 w_2$ приведется к $\nu t$ и $f(w_1,\ w_2)$ к $\varphi(t)$. Поэтому будем иметь

$$f(n_1 t,\ n_2 t) = \varphi(t).$$

*Если, как и выше, предположим, что $\varphi(t)$ равна нулю для всех значений $t$, то коэффициенты $A$ и $B$ все будут равны нулю и, следовательно, $f(w_1,\ w_2)$ будет тождественно равна нулю.*

Равным образом можно заключить, что если $f(w_1,\ w_2)$ есть какая-либо функция рассматриваемого вида и если $f(n_1 t, n_2 t) = 0$, то $f(w_1,\ w_2)$ тождественно равна нулю. Но здесь необходимо предположить, что $n_1$ и $n_2$ несоизмеримы между собой, иначе два различных члена в $f(w_1,\ w_2)$ могут дать в $f(n_1 t, n_2 t)$ два члена, содержащие один и тот же множитель $\cos \nu t$, и они могут взаимно уничтожиться.

Мы предположили вначале, что число членов конечно. Легко распространить этот результат и на сходящийся ряд, лишь бы сходимость была абсолютной и равномерной. Но обладают ли ряды небесной механики подобной сходимостью? Вообще, нет, так как они сходятся только в том случае, когда их члены сгруппированы и расположены определенным образом. Поэтому необходимо глубоко рассмотреть вопросы о сходимости, но в этом сочинении мы оставляем эти вопросы в стороне.

Здесь мы рассмотрим этот вопрос с другой стороны. Предположим, что $\varphi(t)$ получена в результате последовательных приближений и что в каждом приближении число членов конечно, но растет при переходе от одного приближения к следующему и, таким образом, неограниченно возрастает.

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$ — полученные последовательно приближенные значения для $\varphi(t)$. Допустим, что $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(t), \ldots$ равны нулю для всех значений времени $t$, так что в каждом приближении $\varphi(t)$ тождественно равна нулю. Тогда ясно, что все коэффициенты функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$ будут равны нулю, следовательно, и все коэффициенты $\varphi(t)$ также равны нулю. Итак, лемма имеет место в любом приближении.

Вот при каких условиях мы будем применять эту лемму к нашим рядам: хотя в действительности разложение функции $\mu F_1$ содержит бесконечное множество членов, очевидно, что на практике берут только конечное число членов, так что разложения, которые будем отсюда выводить, содержат также конечное число членов. Чем больше будем брать членов в $\mu F_1$, тем больше их будет и в других разложениях и тем точнее будут значения, которые мы получим для канонических элементов и координат. Достаточно, чтобы наша лемма была применима в каждом приближении. В этом и заключается обстоятельство, позволяющее применять наши леммы к рядам небесной механики. Итак, мы можем применять эти леммы, так как всегда можем предположить, что в функции $\mu F_1$ сохранено только конечное число членов.

Пусть теперь

$$\varphi(t) = \sum At^m \cos \nu t + \sum Bt^m \sin \nu t$$

— некоторая совокупность членов. Предположим, что целый показатель $m$ не превосходит некоторого значения.

*Покажем опять, что если $\varphi(t)$ равна нулю, каково бы ни было $t$, то и все члены будут равны нулю.* В самом деле, пусть $p$ — наибольший из показателей $m$. Тогда все члены с $t^p$ равны нулю, так как если $A't^p \cos \nu' t$ есть один из этих членов, то при $t \to \infty$, как легко видеть, имеем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{p+1}} \int_0^t \varphi(t) \cos \nu' t \, dt = \frac{A'}{2(p+1)}.$$

Следовательно, $A'$ равно нулю, если $\varphi(t) = 0$. Итак, членов, содержащих $t^p$, нет. Так как теперь наибольшее возможное значение показателя есть $p-1$, то аналогичным образом покажем, что нет члена с $t^{p-1}$ и т. д.

Пусть

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2,$$

и положим

$$f(\tau, w_1, w_2) = \sum A\tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2) + \sum B\tau^m \sin(k_1 w_1 + k_2 w_2),$$

так что

$$f(t, n_1 t, n_2 t) = \varphi(t).$$

*Если функция $\varphi(t)$ равна нулю для любого значения $t$, то все ее коэффициенты будут равны нулю и $f(\tau, w_1, w_2)$ будет равна нулю, каковы бы ни были $\tau$ и $w$.*

Пусть теперь

$$\varphi(\mu, t) = \sum A\mu^\alpha t^m \cos \nu t + \sum B\mu^\alpha t^m \sin \nu t.$$

Допустим, что показатель $m$ не превосходит $\alpha$, т. е. что в разложении нет членов отрицательного ранга. Будем предполагать, кроме того, что $\varphi(\mu, t)$ содержит бесконечное число членов, но одну и ту же степень $\mu$ содержат только некоторые члены. Таким образом, коэффициент при $\mu^\alpha$ состоит из конечного числа членов.

Положим также

$$f(\mu, \tau, w_1, w_2)=$$
$$=\sum A\mu^\alpha\tau^m\cos(k_1w_1+k_2w_2)+\sum B\mu^\alpha\tau^m\sin(k_1w_1+k_2w_2).$$

Если $\varphi(\mu, t)$ равна нулю, каковы бы ни были $\mu$ и $t$, то коэффициент при $\mu^\alpha$ должен быть нулем при любом $t$. В этом коэффициенте показатель $m$ ограничен, так как он не может превосходить числа $\alpha$. Следовательно, мы можем применить предыдущее рассуждение и сделать вывод, что функция $f(\mu, \tau, w_1, w_2)$ равна нулю, каковы бы ни были $\mu, \tau, w_1, w_2$. Мы можем также сказать, что функция $f(\mu, \tau, w_1, w_2)$ тождественно равна нулю, если

$$f(\mu, t, n_1t, n_2t)=0,$$

лишь бы $\frac{n_1}{n_2}$ было несоизмеримо.

**108. Преобразование разложений.** В § 102 мы нашли для канонических элементов разложения следующей формы:

$$\sum \mu^\alpha At^m\cos(\nu t+h)M_0,$$

где

$$m\leqslant\alpha, \qquad \nu=k_1n_1+k_2n_2.$$

Рассмотрим какой-нибудь из канонических элементов, например, $L_i$, и пусть

$$L_i=\sum\mu^\alpha At^m\cos(\nu t+h)M_0,$$

и, далее, пусть

$$L_i^*=\sum\mu^\alpha A\tau^m\cos(k_1w_1+k_2w_2+h)M_0 \tag{11}$$

есть функция трех переменных, $\tau$, $w_1$, $w_2$. Ясно, что если положить

$$\tau=t, \qquad w_1=n_1t, \qquad w_2=n_2t,$$

то $k_1w_1+k_2w_2$ приведется к $\nu t$ и $L_i^*$ к $L_i$. Поэтому будем иметь

$$L_i^*(t, n_1t, n_2t)=L_i.$$

Таким же образом определим $\xi_i^*$, $\eta_i^*$, $\delta\lambda_i^*$ и именно $\delta\lambda_i^*$, а не $\lambda_i^*$, вследствие наличия члена с $n_it$, который входит в $\lambda_i$; действительно, мы должны положить $\lambda_i^*=w_i+\lambda_i^0+\delta\lambda_i^*$, а не $\lambda_i^*=n_i\tau+\lambda_i^0+\delta\lambda_i^*$. Кроме того, мы видим, что

$$\frac{\partial L_i^*}{\partial\tau}+n_1\frac{\partial L_i^*}{\partial w_1}+n_2\frac{\partial L_i^*}{\partial w_2}$$

приводится к $\frac{dL_i}{dt}$ для $\tau = t$, $w_1 = n_1 t$, $w_2 = n_2 t$. Ясно, что производные от $\xi_i^*$, $\eta_i^*$, $\lambda_i^*$ обладают тем же свойством.

Обозначим через $F^*$ то, во что обращается $F$, когда $L_i$, $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ заменим на $L_i^*$, $\lambda_i^*$, $\xi_i^*, \eta_i^*$. Если тогда в частной производной $\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i^*}$ заменить $L_i^*$, $\lambda_i^*$, $\xi_i^*$, $\eta_i^*$ на $L_i$, $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$, то эта производная приведется к $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$.

Если в $\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i^*}$ мы заменим переменные $L_i^*, \ldots$ разложениями (11), то получим для $\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i^*}$ разложение того же вида:

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i^*} = \sum \mu^\alpha A' \tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h') \mathfrak{M}_0'. \tag{11'}$$

Если теперь в разложении (11′) заменить $\tau$, $w_1$, $w_2$ на $t$, $n_1 t$, $n_2 t$, то это все равно, что заменить $L_i^*, \ldots$ на $L_i, \ldots$; поэтому частная производная $\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i^*}$ приведется к $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$, и мы будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \sum \mu^\alpha A' t^m \cos(\nu t + h') \mathfrak{M}_0'.$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial L_i^*}{\partial \tau} + n_1 \frac{\partial L_i^*}{\partial w_1} + n_2 \frac{\partial L_i^*}{\partial w_2} + \frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i^*} = 0. \tag{12}$$

Левая часть этого уравнения разложима в ряд вида

$$\sum \mu^\alpha A \tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) \mathfrak{M}_0,$$

так как таким же образом разложимы $L_i^*$, их производные и $\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_i^*}$.

При $\tau = t$, $w_1 = n_1 t$, $w_2 = n_2 t$ левая часть равенства (12) приводится к

$$\frac{dL_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_i},$$

что равно нулю в силу уравнения (5) из § 79.

Следовательно, в силу лемм § 107 она будет тождественно равна нулю, каковы бы ни были $\tau$, $w_1$, $w_2$.

Таким же образом докажем справедливость равенств

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi_i^*}{\partial\tau}+n_1\frac{\partial\xi_i^*}{\partial w_1}+n_2\frac{\partial\xi_i^*}{\partial w_2}+\frac{\partial F^*}{\partial\eta_i^*}=0,\\
&\frac{\partial\lambda_i^*}{\partial\tau}+n_1\frac{\partial\lambda_i^*}{\partial w_1}+n_2\frac{\partial\lambda_i^*}{\partial w_2}-\frac{\partial F^*}{\partial L_i^*}=0,\\
&\frac{\partial\eta_i^*}{\partial\tau}+n_1\frac{\partial\eta_i^*}{\partial w_1}+n_2\frac{\partial\eta_i^*}{\partial w_2}-\frac{\partial F^*}{\partial\xi_i^*}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(12')$$

Если теперь положим

$$\tau=t+c,\qquad w_1=n_1t+\varepsilon_1,\qquad w_2=n_2t+\varepsilon_2,$$

где $c$, $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ суть какие-либо постоянные, то будем иметь еще

$$\frac{dL_i^*}{dt}=\frac{\partial L_i^*}{\partial\tau}+n_1\frac{\partial L_i^*}{\partial w_1}+n_2\frac{\partial L_i^*}{\partial w_2},$$

и уравнение (12) примет вид

$$\frac{dL_i^*}{dt}=-\frac{\partial F^*}{\partial\lambda_i^*},$$

а если учесть, что звездочки здесь можно опустить,

$$\frac{dL_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial\lambda_i}.$$

Таким же образом уравнения (12′) нам дадут

$$\frac{d\xi_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial\eta_i},\qquad\frac{d\lambda_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial L_i},\qquad\frac{d\eta_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\xi_i},$$

но это есть уравнения (5) из § 79.

*Следовательно, если разложения* (11) *удовлетворяют уравнениям движения, т. е. уравнениям* (5) *из* § 79, *при* $\tau=t$, $w_1=n_1t$, $w_2=n_2t$, *то они будут также удовлетворять уравнениям* (5) *из* § 79 *при* $\tau=t+c$, $w_1=n_1t+\varepsilon_1$, $w_2=n_2t+\varepsilon_2$, *каковы бы ни были значения постоянных* $c$ *и* $\varepsilon$.

Имели ли мы право применять лемму так, как это делали? Верно, что разложение функции $F$ содержит бесконечное число членов, но на практике мы всегда берем только конечное число членов. Чем бо́льшую точность желаем получить, тем большее число членов нужно сохранить, но их число всегда будет конечно. Поэтому мы можем рассуждать так, как если бы разложение $F$ содержало лишь конечное число членов. Мы получим тогда для переменных $L_i^*$, ... разложения в форме (11), но в этих разложениях коэффициент при $\mu^a$ содержит только конечное число членов, что является условием, при котором к функции $F$ может быть применена лемма § 107 (см. далее § 130).

109. Впрочем, уравнения (12) и (12′) можно получить без помощи лемм § 107. Покажем, что для неизвестных

$$L_i^*, \quad \xi_i^*, \quad \eta_i^*, \quad \lambda_i^* - w_i$$

можно найти разложения формы (11), удовлетворяющие уравнениям (12) и (12′) и приводящиеся к $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $\lambda_i^0$ при $\tau = w_1 = w_2 = 0$.

Действительно, в первом приближении, пренебрегая возмущающей функцией $\mu F_1$ и приводя поэтому $F$ к $F_0$, мы будем иметь

$$L_i^* = L_i^0, \quad \xi_i^* = \xi_i^0, \quad \eta_i^* = \eta_i^0, \quad \lambda_i^* = w_i + \lambda_i^0.$$

Предположим теперь, что мы получили для наших неизвестных значения в $n$-м приближении, где погрешность имеет порядок $\mu^n$. Как мы получим значения элементов с погрешностью порядка $\mu^{n+1}$?

В производных функции $F^*$ в уравнении (12), так же как в первом и в третьем уравнениях (12′), заменим неизвестные величины их значениями из $n$-го приближения. После этой замены эти производные от $F^*$ могут быть разложены в виде (11) так, что, например, уравнение (12) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial L_i^*}{\partial \tau} + n_1 \frac{\partial L_i^*}{\partial w_1} + n_2 \frac{\partial L_i^*}{\partial w_2} = \sum B\tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h), \tag{13}$$

откуда легко выведем значение $L_i^*$; мы найдем

$$L_i^* = L_i^0 + \sum C. \tag{14}$$

Каждому члену в правой части (13) соответствует в формуле (14) член, который мы для сокращения обозначили через $C$ и который имеет следующее значение:

1) члену $B\tau^m$ в (13) будет соответствовать в формуле (14) член

$$C = \frac{B\tau^{m+1}}{m+1};$$

2) члену

$$B\cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)$$

будет соответствовать

$$C = C_0 = B\frac{\sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) - \sin h}{k_1 n_1 + k_2 n_2};$$

3) члену

$$B\tau\cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)$$

будет соответствовать

$$C + B\tau\frac{\sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)}{k_1 n_1 + k_2 n_2} + B\frac{\cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) - \cos h}{(k_1 n_1 + k_2 n_2)^2};$$

4) вообще, пусть $C_m$ — член в формуле (14), который соответствует члену

$$B\tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h),$$

так что

$$\frac{\partial C_m}{\partial \tau} + n_1 \frac{\partial C_m}{\partial w_1} + n_2 \frac{\partial C_m}{\partial w_2} = B\tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)$$

и что $C_m = 0$ при $\tau = w_1 = w_2 = 0$.

Тогда будем иметь рекуррентную формулу

$$C_m = \frac{B\tau^m \sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)}{k_1 n_1 + k_2 n_2} + \frac{m}{k_1 n_1 + k_2 n_2} \cdot \frac{\partial C_{m-1}}{\partial h}. \tag{15}$$

Действительно, если положим для сокращения

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + h = \varphi, \qquad k_1 n_1 + k_2 n_2 = \nu$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \tau} + n_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial w_2} = \Delta,$$

то будем иметь

$$\Delta C_m = B\tau^m \cos\varphi, \qquad \Delta C_{m-1} = B\tau^{m-1} \cos\varphi.$$

Дифференцируя по $h$ последнее равенство, получим

$$\Delta\left(\frac{\partial C_{m-1}}{\partial h}\right) = -B\tau^{m-1} \sin\varphi.$$

Но

$$\Delta(B\tau^m \sin\varphi) = \nu B\tau^m \cos\varphi + mB\tau^{m-1} \sin\varphi,$$

и поэтому

$$\Delta\left(\frac{B\tau^m \sin\varphi}{\nu} + \frac{m}{\nu} \cdot \frac{\partial C_{m-1}}{\partial h}\right) = B\tau^{m-1} \cos\varphi.$$

Остается показать, что выражение

$$\frac{B\tau^m \sin\varphi}{\nu} + \frac{m}{\nu} \frac{\partial C_{m-1}}{\partial h}$$

обращается в нуль для $\tau = w_1 = w_2 = 0$. Но первое слагаемое обращается в нуль, так как оно содержит $\tau$ множителем; с другой стороны, $C_{m-1}$ обращается в нуль по определению и притом для любого $h$. Поэтому производная $\frac{\partial C_{m-1}}{\partial h}$, а значит, и второе слагаемое обращаются в нуль. Следовательно, формула (15) доказана и она дает возможность вычислить величину $C_m$ так, как выше было вычислено $C_0$. Эта формула может заменить формулу (2) из § 98.

Таким образом, мы можем вычислять $L_i^*$, пользуясь уравнением (12) [аналогично можно рассмотреть первое и последнее уравнения (12′)]. Как и в § 95, можно показать, что погрешность новых значений переменных $L_i^*$, $\xi_i^*$, $\eta_i^*$ в $(n+1)$-м приближении будет порядка $\mu^{n+1}$.

Рассмотрим теперь второе уравнение (12′). Заменим в производной функции $F^*$ переменные $L_i^*$, $\xi_i^*$, $\eta_i^*$ их значениями из $(n+1)$-го приближения, которые уже найдены, и переменную $\lambda_i^*$ — ее значением из $n$-го приближения. Далее, уравнение для $\lambda_i^*$ рассматривается так же, как и уравнение (13). Как и в § 95, мы увидим, что полученное таким образом значение $\lambda_i^*$ имеет погрешность порядка $\mu^{n+1}$.

Таким образом, последовательными приближениями мы получим для наших неизвестных такие разложения, которые будут вида (11), будут удовлетворять уравнениям (12) и (12′) и приводиться к $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i$, $\lambda_i^0$ при $\tau = w_1 = w_2 = 0$.

Заменим в этих разложениях $\tau$, $w_1$, $w_2$ на $t$, $n_1 t$, $n_2 t$. Тогда будем иметь разложения, удовлетворяющие уравнениям (5) из § 79. При $t=0$ (или, что то же, при $\tau = w_1 = w_2 = 0$) эти разложения приводятся к $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $\lambda_i^0$, поэтому они тождественны тем, которые мы нашли в § 100.

Итак, мы видим, что если в разложениях § 100 $\nu t$ заменить на $k_1 w_1 + k_2 w_2$, когда время стоит под знаком косинуса, и заменить $t$ на $\tau$, когда $t$ стоит вне знака косинуса, то получим разложения вида (11), удовлетворяющие уравнениям (12) и (12′), что и требовалось доказать.

Итак, мы можем получить результаты § 108 без применения лемм § 107. Мы хотели, однако, указать на первый метод не только потому, что эти леммы в дальнейшем еще понадобятся, но главным образом потому, что так лучше видно, как прийти к результатам § 108.

**110. Сравнение разложений.** В § 102 мы получили разложения в форме

$$\sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 t^m \cos(\nu t + h),$$

которые содержат 12 постоянных интегрирования, а именно: две $L_i^0$, две $\lambda_i^0$, четыре $\xi_i^0$ и четыре $\eta_i^0$.

В § 108 и 109 мы получили другие разложения в форме

$$\sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 \tau^m \cos(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h),$$

где нужно положить $\tau = t + c$, $w_i = n_i t + \varepsilon_i$; $c$, $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — постоянные интегрирования.

Эти новые разложения содержат на три постоянные интегрирования больше, чем предыдущие. Так как наши дифференциальные уравнения образуют систему двенадцатого порядка, то три из этих пятнадцати постоянных выражаются через остальные двенадцать. В дальнейшем увидим, какую выгоду можно получить из этого замечания.

Следовательно, мы можем без ограничения общности допустить, что $c = 0$. Необходимо заметить, что если мы пользуемся разложением (11), то постоянные $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ не имеют уже того же смысла, что в первоначальном разложении.

Действительно, при $t = 0$ $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\lambda_i$ не приводятся к $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $\varepsilon_i + \lambda_i^0$.

Это достигается только, если предположить $c = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, так как тогда мы вернулись бы к первоначальному разложению. Но разности между $L_i^0$ и начальным значением $L_i$, например, будут порядка $\mu$.

Рассуждая, как и в § 69, мы увидим, что от разложения (11) можно перейти к другой форме,

$$\sum \mu^\alpha A (\varrho_1^0)^{q_1}(\varrho_2^0)^{q_2}(\varrho_3^0)^{q_3} (\varrho_4^0)^{q_4} \tau^m \cos \left(\sum kw + \sum p_i \omega_i^0 + h\right), \tag{16}$$

где имеем, кроме того,

$$2q_i \equiv p_i \pmod 2), \qquad 2q_i \geqslant |p_i|.$$

Мы увидим, впрочем, как и в § 103, что гелиоцентрические координаты также могут быть разложены либо в форме (11), либо в форме (16).

**111. Симметрия.** Предположим, что мы сравниваем две системы трех тел $A$, $B$, $C$ и $A_1$, $B_1$, $C_1$, причем тела обеих систем имеют соответственно одинаковые массы. Пусть в начальный момент треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ симметричны относительно плоскости $x_1x_3$. Пусть также начальные скорости точек $A_1$, $B_1$, $C_1$ равны по величине и противоположны по направлению трем векторам, симметричным (относительно той же плоскости) трем векторам, представляющим начальные скорости точек $A$, $B$, $C$.

При этих условиях ясно, что положение треугольника $ABC$ в момент $t$ будет симметрично положению треугольника $A_1B_1C_1$ в момент $-t$.

Чтобы перейти от положения системы $ABC$ в момент $t$ к положению системы $A_1B_1C_1$ в момент $-t$, достаточно заменить

$$x_1', \; x_2', \; x_3', \; L_i, \; \lambda_i, \; \xi_i, \; \eta_i, \; \varrho_i, \; \omega_i \tag{17}$$

на

$$x_1', -x_2', \; x_3', \; L_i, \; -\lambda_i, \; \xi_i, \; -\eta_i, \; \varrho_i, \; -\omega_i. \tag{18}$$

Следовательно, если мы заменим

$$L_i^0, \; \lambda_i^0, \; \xi_i^0, \; \eta_i^0, \; \varrho_i^0, \; \omega_i^0, \; t$$

на

$$L_i^0,\ -\lambda_i^0,\ \xi_i^0,\ -\eta_i^0,\ \rho_i^0,\ -\omega_i^0,\ -t,$$

то величины (17) должны перейти в величины (18).

Положим в разложениях (16) $c=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\lambda_1^0=-\lambda_2^0=0$ и заменим в них $t$ на $-t$, $\omega_i^0$ на $-\omega_i^0$ и, следовательно, $\tau$ на $-\tau$, $w_i$ на $-w_i$.

Изменим в заключение знак $\tau$ и знаки $w$ и $\omega^0$. При этом величины (16) или не должны измениться или должны изменить знак. Отсюда следует, что их разложения будут содержать только косинусы или только синусы, т. е. постоянная $h$ всегда либо равна 0, либо $-\frac{\pi}{2}$. Она будет равна 0, если $m$ четно, $-\frac{\pi}{2}$, если $m$ нечетно в разложениях для $x_1'$, $x_3'$, $L_i$, $\xi_i$, $-\frac{\pi}{2}$, если $m$ четно, и 0, если $m$ нечетно в разложениях для $x_2'$, $\lambda_i$, $\eta_i$.

Если вместо формы (16) мы пользуемся формой (11), постоянная $h$ опять будет равна 0, или $-\frac{\pi}{2}$. Она будет равна первому или второму значению в зависимости от того, какая из неизвестных (17) разлагается в зависимости от четности или нечетности показателя степени $\tau$ и показателей $\eta_i^0$ в одночлене $\mathfrak{M}_0$ (см. § 86).

Заметим, что предыдущий результат предполагает, что $\lambda_i^0$ суть нули. Это предположение можно сделать без ограничения общности, так как с тремя новыми постоянными $c$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ мы имеем еще одну лишнюю постоянную, даже если

$$\lambda_1^0=\lambda_2^0=0.$$

**112.** Повернем теперь всю систему на угол $\varepsilon$ вокруг оси $x_3$. Наши формулы, как не зависящие от выбора осей, должны сохраниться. Но это приводит к замене $\lambda_i$, $\lambda_i^0$ на $\lambda_i+\varepsilon$, $\lambda_i^0+\varepsilon$ и $\omega_i^0$ на $\omega_i^0-\varepsilon$. При этих условиях переменные $L_i$, $x_3'$ (и $x_6'$) не изменятся, а $\lambda_i$ изменится на $\lambda_i+\varepsilon$; $x_1'$ и $x_2'$ изменятся на $x_1'\cos\varepsilon-x_2'\sin\varepsilon$ и $x_1'\sin\varepsilon+x_2'\cos\varepsilon$; $x_4'$ и $x_5'$ претерпевают аналогичное преобразование; $\xi_i$ и $\eta_i$ изменятся на $\xi_i\cos\varepsilon+\eta_i\sin\varepsilon$ и $-\xi_i\sin\varepsilon+\eta_i\cos\varepsilon$.

При этих условиях вот каким представляется естественное обобщение теорем § 70 и 87: допустим, что мы разложили, например, $L_i^*$ в форме (16); казалось бы, что мы должны иметь

$$\sum k-\sum p=0.$$

Но в этой форме теорема неверна.

**113.** Мы можем преобразовать наши разложения следующим образом. Прежде всего, в разложениях (16) фигурируют две постоянные $A$ и $h$, зависящие не только от $L_i^0$, но и от $\lambda_i^0$. Очевидно, что наши неизвестные суть периодические функции от $\lambda_i^0$, так же как и $A\cos h$ и $A\sin h$. Когда изменяются $\lambda_i^0$, т. е. начальные значения долгот $\lambda_i$, на величины, кратные $2\pi$, то наши неизвестные $\delta L_i^*, \delta\xi_i^*, \delta\eta_i^*, \delta\lambda_i^*$ не должны измениться. Следовательно, $A\cos h$ и $A\sin h$ могут быть разложены по синусам и косинусам кратных $\lambda_i^0$, так что разложения (16) примут форму

$$\sum \mu^a A_0 (\varrho_1^0)^{q_1} (\varrho_2^0)^{q_2} (\varrho_3^0)^{q_3} (\varrho_4^0)^{q_4} \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k_i'\lambda_i^0 + \sum p_i\omega_i^0 + h_0\right), \tag{16'}$$

где $A_0$ и $h_0$ не зависят уже от $L_i^0$. Добавим, что согласно § 111 $h_0$ есть числовая постоянная, кратная $\pi/2$.

Нет никаких оснований, чтобы было $k_i = k_i'$. Но мы видим, что будем иметь

$$\sum k' - \sum p = 0$$

в разложениях $\delta L_i^*$, $\delta\lambda_i^*$ и

$$\sum k' - \sum p = \pm 1$$

в разложениях $\delta\xi_i^*$, $\delta\eta_i^*$. В самом деле, если мы заменим начальные значения $\lambda_i^0$ и $\omega_i^0$ на $\lambda_i^0 + \varepsilon$ и $\omega_i^0 - \varepsilon$, то увидим, что $L_i^*$ не изменится, $\lambda_i^*$ изменится на $\lambda_i^* + \varepsilon$, а $\xi_i^*$ и $\eta_i^*$ на $\xi_i^*\cos\varepsilon + \eta_i\sin\varepsilon$ и $-\xi_i^*\sin\varepsilon + \eta_i^*\cos\varepsilon$.

В разложениях (16′) мы взяли за произвольные постоянные начальные значения наших неизвестных $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$. Но возможен и другой выбор.

Допустим, что в разложениях (16′) отброшены все члены, которые зависят от $\tau$ или от $w$, и сохранены лишь постоянные члены. Пусть $L_i^1$ означает то, что осталось от разложения $L_i^*$. Тогда $L_i^1$ есть не что иное, как интеграл

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} L_i^* dw_1\, dw_2$$

при $\tau = 0$, так что $L_i^1$ будет средним значением $L_i^*$ при $\tau = 0$. Аналогично определяются величины $\xi_i^1$ и $\eta_i^1$. Что касается $\lambda_i^1$, то это также есть то, что останется в разложении $\lambda_i^*$ после такого же отбрасывания, так что

$$\lambda_i^1 - w_i = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi} (\lambda_i^* - w_i)\, dw_1\, dw_2$$

при $\tau = 0$.

Мы видим, что $L_i^1$, $\lambda_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$ суть функции прежних постоянных $L_i^0, \lambda_i^0, \xi_i^0, \eta_i^0$ и параметра $\mu$. Они могут быть разложены по степеням $\mu$, и при $\mu = 0$ имеем

$$L_i^1 = L_i^0,\ \lambda_i^1 = \lambda_i^0,\ \xi_i^1 = \xi_i^0,\ \eta_i^1 = \eta_i^0.$$

Разности $L_i^1 - L_i^0$, $\lambda_i^1 - \lambda_i^0$, $\xi_i^1 - \xi_i^0$, $\eta_i^1 - \eta_i^0$ могут быть разложены по степеням $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ и являются периодическими относительно $\lambda_i^0$. Это непосредственно вытекает из формы разложений (11), (16) и (16′).

Пусть, следовательно,

$$L_i^1 = L_i^0 + \sum \mu^\alpha A_0 \Pi_0 \cos\left(\sum k_i' \lambda_i^0 + \sum p_i \omega_i^0 + h_0\right), \tag{19}$$

где через $\Pi_0$ обозначено для сокращения произведение

$$(\varrho_1^0)^{q_1} (\varrho_2^0)^{q_2} (\varrho_3^0)^{q_3} (\varrho_4^0)^{q_4}.$$

Разложение (19) выводится, как мы говорили, из разложения (16′) отбрасыванием в нем всех членов, зависящих от $w$ или $\tau$. Мы могли бы также написать

$$L_i^1 = L_i^0 + \sum \mu^\alpha A_0 \mathfrak{M}_0 \cos\left(\sum k_i' \lambda_i^0 + h_0\right), \tag{19′}$$

используя разложения (11).

Конечно, мы можем написать и другие уравнения вида (19′) для определения $\lambda_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$.

Из уравнений (19′) мы можем, наоборот, выразить $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ в зависимости от $L_i^1$, $\lambda_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$. Тогда $L_i^0, \lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ будут разложимы по степеням $\mu$ и при $\mu = 0$ приведутся соответственно к $L_i^1$, $\lambda_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$, Более того, разности $L_i^0 - L_i^1$, $\lambda_i^0 - \lambda_i^1$, $\xi_i^0 - \xi_i^1$, $\eta_i^0 - \eta_i^1$ могут быть разложены по степеням $\xi_i^1$ и $\eta_i^1$ и являются периодическими относительно $\lambda_i^1$. Следовательно, можно написать

$$L_i^0 = L_i^1 + \sum \mu^\alpha A_1 \mathfrak{M}_1' \cos\left(\sum k_i' \lambda_i^1 + \sum p_i \omega_i^1 + h_1\right), \tag{20}$$

где $A_1$ и $h_1$ зависят только от $L_i^1$ и где $\mathfrak{M}_1'$ — целый одночлен относительно $\xi_i^1$ и $\eta_i^1$. Аналогичные разложения будем иметь для $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$.

Вернемся теперь к разложениям (11) и заменим в них $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ их значениями (20). Ясно, что $\delta L_i^*$, $\delta\lambda_i^*$, $\delta\xi_i^*$, $\delta\eta_i^*$ будут разложимы по степеням $\mu$, $\tau$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$ и являются периодическими относительно $w$ и $\lambda_i^1$. Поэтому будем иметь

$$L_i^* = L_i^1 + \sum \mu^\alpha A_1 \mathfrak{M}_1 \tau^n \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k_i' \lambda_i' + h_1\right), \tag{21}$$

где $A_1$ и $h_1$ зависят только от $L_i^1$ и где $\mathfrak{M}_1$ — целый одночлен относительно $\xi_i^1$ и $\eta_i^1$. Для переменных $\lambda_i^*$, $\xi_i^*$, $\eta_i^*$ будем иметь разложения такого же вида, с той разницей, что в разложении $\lambda_i^*$ часть, не зависящая от $\mu$, будет $w_i + \lambda_i^1$, а не просто $\lambda_i^1$.

Если мы положим

$$\xi_i^1 = \sqrt{2\varrho_i^1} \cos \omega_i^1, \quad \eta_i^1 = \sqrt{2\varrho_i^1} \sin \omega_i^1,$$

то разложение (21), согласно § 69, примет форму

$$L_i^* = L_i^1 + \sum \mu^\alpha A_1 (\varrho_1^1)^{q_1} (\varrho_2^1)^{q_2} (\varrho_3^1)^{q_3} (\varrho_4^1)^{q_4} \times$$
$$\times \tau^m \cos \left(\sum k_i w_i + \sum k_i' \lambda_i^1 + \sum p_i w_i^1 + h_i\right), \quad (22)$$

где между целыми числами $p$ и $2q$ будем иметь всегда те же соотношения.

*Разложения* (21) *различаются, следовательно, от разложений* (22) *только тем, что за постоянные интегрирования взяты не начальные значения переменных, а их средние значения.*

**114.** Как можно непосредственно прийти к разложениям (21)? Для этого достаточно взять уравнения (12) и (12′), так же как и выводящиеся из них уравнения (13), и проводить интегрирование (§ 109), но с одной разницей. Вместо того чтобы брать

$$C_0 = B \frac{\sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) - \sin h}{k_1 n_1 + k_2 n_2},$$

мы будем брать

$$C_0 = B \frac{\sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h)}{k_1 n_1 + k_2 n_2}$$

и будем сохранять при этом рекуррентное соотношение (15).

Таким образом, мы удовлетворим нашим уравнениям, но более не будем иметь ни $C_0 = 0$, $C_m = 0$, ни, следовательно,

$$L_i = L_i^1, \ \xi_i = \xi_i^1, \ \eta_i = \eta_i^1, \ \lambda_i = \lambda_i^1$$

при

$$\tau = w_1 = w_2 = 0.$$

Значит, мы не удовлетворим начальным условиям, принятым в § 109.

Зато мы видим, что аргументы синуса и косинуса в $C_0, C_m, \ldots$ будут такими же, как и в правых частях наших уравнений, тогда как при процедуре § 109 мы вводим при каждом интегрировании новые аргументы, поскольку мы вводим члены с $\sin h$, где $h$ может зависеть от $\omega_i^0$.

Впрочем, среднее значение $C_0$ и средние значения $C_m$ были равны нулю.

Вернемся еще к каноническим уравнениям (5) из § 79. Из них мы выводим, например,

$$\delta L_i = -\mu \int \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i} dt$$

и для получения значения $\delta L_i$ в $n$-м приближении следует заменить неизвестные в правой части их значениями из $(n-1)$-го приближения. Тогда различные члены выражения, стоящего под знаком интеграла, принимают форму

$$At^m \cos(\nu t + h),$$

а мы видели в § 98, что неопределенный интеграл от этого выражения состоит из $(m+1)$-го члена вида

$$Bt^p {}^{\cos}_{\sin}(\nu t + h) \quad (p = 1, 2, \ldots, m).$$

К этому неопределенному интегралу нужно добавить постоянную интегрирования. До сих пор мы выбирали эту постоянную таким образом, чтобы $\delta L_i$ обращалась в нуль вместе с $t$, т. е. мы интегрировали всегда в пределах от нуля до $t$. Таким образом мы и пришли к разложениям (11).

Если, наоборот, мы полагаем всегда эту постоянную равной нулю, то теперь при $t = 0$ будет обращаться в нуль среднее значение $\delta L_i$, и мы придем к разложениям (21). В первом приближении мы будем брать

$$L_i = L_i^1, \ \lambda_i = w_i + \lambda_i^1, \ \xi_i = \xi_i^1, \ \eta_i = \eta_i^1,$$

Ясно, что $\varrho_i^1$ и $\omega_i^1$, определенные так, как это сделано выше, отнюдь не представляют средние значения $\varrho_i$ и $\omega_i$.

**115.** Прежде чем идти далее, заметим, что если бы мы взяли другие постоянные интегрирования (которые мы обозначим на мгновение через $L_i^1$, $\lambda_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$), связанные с начальными значениями $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ соотношениями вида (19), (19′) или (20), то все сказанное до сих пор имело бы место, и мы пришли бы опять к разложениям вида (21) или (22).

Можно было бы, например, сделать этот выбор таким образом, чтобы $\varrho_i^1$ и $\omega_i^1$ представляли средние значения $\varrho_i$ и $\omega_i$, но это не представляет интереса для дальнейшего.

**116.** Разложения (21) и (22), построенные в § 113, обладают некоторыми частными свойствами, заслуживающими внимания. Наши уравнения (12) и (12′) не изменятся при замене $w_i$ на $w_i + \varepsilon_i$ (мы, кроме того, знаем, что наши разложения удовлетворяют также уравнениям движения, если положить $\tau = t$, $w_i = n_i t + \varepsilon_i$ или $\tau = t$, $w_i = n_i t$).

Когда в разложениях (21) $w_i$ заменена на $w_i + \varepsilon_i$, эти разложения не перестанут удовлетворять уравнениям (12) и (12′). Но каковы будут при этом средние значения $L_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$, $\lambda_i^1$? Первые три не изменятся, последнее сделается равным $\lambda_i^1 + \varepsilon_i$.

Следовательно, наши разложения не изменятся, если одновременно заменить $w_i$ на $w_i + \varepsilon_i$ и $\lambda_i^1$ на $\lambda_i^1 - \varepsilon_i$. Отсюда следует, что $w_i$ и $\lambda_i^1$ входят только в комбинации $w_i + \lambda_i^1$, т. е. что

$$k_i = k_i'.$$

Предположим теперь, как и в начале § 112, что вся система получает вращение на угол $\varepsilon$ вокруг оси $x_3$. Тогда $L_i$, $L_i^1$, $\rho_i^1$ не изменятся, $\lambda_i$ и $\lambda_i^1$ изменятся в $\lambda_i+\varepsilon$, $\lambda_i^1+\varepsilon$, $\omega_i^1$ в $\omega_i^1-\varepsilon$ и $\xi_i$ и $\eta_i$ — в $\xi_i\cos\varepsilon+\eta_i\sin\varepsilon$ и $-\xi_i\sin\varepsilon+\eta_i\cos\varepsilon$.

Формулы должны будут иметь место, так как они не зависят от выбора осей. Поэтому можно заключить, что когда в разложениях (22) мы заменим $\lambda_i^1$ на $\lambda_i^1+\varepsilon$ и в то же время $\omega_i^1$ на $\omega_i^1-\varepsilon$, то неизвестные

$$L_i,\ \lambda_i,\ \xi_i,\ \eta_i$$

изменятся на

$$L_i,\ \lambda_i+\varepsilon,\ \xi_i\cos\varepsilon+\eta_i\sin\varepsilon,\ \ -\xi_i\sin\varepsilon+\eta_i\cos\varepsilon.$$

Если мы вспомним сказанное в § 70 и 87, то увидим, что это означает, что

$$\sum k'-\sum p=\sum k-\sum p=0$$

в разложениях $L$ и $\lambda$, и

$$\sum k'-\sum p=\sum k-\sum p=\pm 1$$

в разложениях $\xi$ и $\eta$ (кроме того, мы всегда можем предположить, что в этом равенстве последняя часть равна $+1$, так как если бы она была равна $-1$, то достаточно было бы изменить знак аргумента косинуса, от чего значение косинуса не меняется).

Таким образом, предыдущие результаты можно было бы получить другим способом. В § 114 мы видели, как можно построить разложения (22) непосредственно последовательными приближениями. Тогда можно было бы получить наши результаты по индукции, проверяя тем, что если они верны в $(n-1)$-м приближении, то будут также верны в $n$-м.

**117.** Выше мы говорили, что на практике не рассматривают члены, в которых малый делитель $\nu=k_1n_1+k_2n_2$ соответствует очень большим целым $k_1$ и $k_2$. Благодаря этому обстоятельству мы могли сказать в § 101, что на практике никогда нет необходимости рассматривать несколько малых делителей.

Теперь мы можем полностью оправдать это утверждение. Это лучше всего будет видно из разложения (22). Действительно, в этом разложении имеем

$$\sum k-\sum p=0.$$

Если $|k_1|$ и $|k_2|$ велики, а $\nu$ есть малый делитель, то

$$|k_1n_1+k_2n_2|$$

весьма мало́.

Так как на практике отношение $\frac{n_1}{n_2}$ не будет близко к единице, то $|\Sigma k|$ также будет весьма большой — так же как и $|\Sigma p|$. Но степень рассматриваемого члена равна

$$2\sum q \geqslant \sum |p| \geqslant \left|\sum p\right|.$$

Как видно, показатель степени этого члена будет очень большим, и поэтому член является пренебрежимо малым.

Вернемся теперь к разложению (16). Мы должны прийти к этому разложению, исходя из разложения (22), подставляя в него вместо $L_i^1$, $\lambda_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$ их значения (19). Но значения (19) разлагаются по целым положительным степеням $\varrho_i^0$, которые являются величинами второй степени. Значит, в разложениях (19) мы будем иметь члены нулевой степени и члены положительной степени.

Мы придем, таким образом, к разложению (16), каждый член которого получается из какого-нибудь члена разложения (21). Обращая внимание на способ, которым он получен, мы увидим, что его степень не меньше степени соответствующего члена в разложении (21). Но общий член (16)

$$\mu^\alpha C_1' \cos\left(\sum kw + \sum k'\lambda^1 + \sum p\omega^1 + h_0\right)$$

получается из члена разложения (21), содержащего $\sum kw$. Следовательно, его степень не меньше $\left|\sum k\right|$, хотя здесь не имеем

$$\sum k - \sum p = 0.$$

**118.** Если треугольник $ABC$ заменим другим треугольником, симметричным относительно плоскости $x_1x_2$, то уравнения движения не перестанут удовлетворяться, что является следствием симметрии функции $F$, доказанной в § 88.

Но это приводится к замене облических переменных $\xi_2$, $\eta_2$, $\xi_4$, $\eta_4$ на $-\xi_2$, $-\eta_2$, $-\xi_4$, $-\eta_4$, или также к замене $\omega_2$ и $\omega_4$ на $\omega_2+\pi$ и $\omega_4+\pi$.

Следовательно, если

$$\xi_2^0, \quad \eta_2^0, \quad \xi_4^0, \quad \eta_4^0$$

заменим на

$$-\xi_2^0, \quad -\eta_2^0, \quad -\xi_4^0, \quad -\eta_4^0$$

или, что то же, $\omega_2^0$ и $\omega_4^0$ на $\omega_2^0+\pi$ и $\omega_4^0+\pi$, то облические переменные $\xi_2$, $\eta_2$, $\xi_4$, $\eta_4$ изменят знаки, а остальные переменные не изменятся.

Если, следовательно, разложения элементов или координат представлены в форме (11), то одночлен $\mathfrak{M}_0$ будет четной степени относительно $\xi_2^0$, $\eta_2^0$, $\xi_4^0$, $\eta_4^0$ в разложениях $L$, $\lambda$, $\xi_1$, $\eta_1$, $\xi_3$, $\eta_3$,

$x'_1$, $x'_2$, $x'_4$, $x'_5$ и нечетной степени в разложениях $\xi_2$, $\eta_2$, $\xi_4$, $\eta_4$, $x'_3$, $x'_6$. Если же представить разложения в форме (16), то увидим также, что $p_2+p_4$ будет четным в первом случае и нечетным во втором. Это будет верно, кроме того, если применим результат § 109 или 113.

**119. Однородность.** Рассуждая, как и в § 73 и 89, мы увидим, что

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $L_i$, $\varrho_i$ | суть | однородные | функции | степени | 1, |
| $\xi_i$, $\eta_i$ | » | » | » | » | $\frac{1}{2}$, |
| $x'_i$ | » | » | » | » | 2, |
| $\lambda_i$, $\omega_i$ | » | » | » | » | 0 |

относительно $L_i^0$ и $\varrho_i^0$ или также относительно $L_i^0$, $(\xi_i^0)^2$, $(\eta_i^0)^2$.

**120. Выводы.** В этой главе мы преобразовали наши разложения таким образом, что наши неизвестные представляются в виде функций трех переменных $\tau$, $w_1$ и $w_2$. Эти функции разложимы по степеням $\tau$ и по косинусам и синусам кратных $w$.

Они удовлетворяют уравнениям движения, если положить

$$\tau = t + c, \quad w_1 = n_1 t + \varepsilon_1, \quad w_2 = n_2 t + \varepsilon_2,$$

*каковы бы ни были значения произвольных постоянных* $c$, $\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon_2$.

Кроме трех переменных $\tau$, $w_1$ и $w_2$, наши функции зависят от двенадцати постоянных интегрирования, а форма разложений зависит от того, как выбраны эти постоянные. Если взять начальные значения $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ переменных $L_i$, $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ при $\tau = w_1 = w_2 = 0$, то разложения принимают вид (11). Если взять начальные значения $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\varrho_i^0$, $\omega_i^0$ переменных $L_i$, $\lambda_i$, $\varrho_i$, $\omega_i$, то разложения будут иметь вид (16). Это те разложения, к которым приводит применение процедуры § 109.

Но можно сделать и другой выбор. Если, как и в § 113, можно выбрать за постоянные интегрирования не начальные значения неизвестных, но их средние значения, то мы придем к разложениям (22), обладающим замечательными свойствами.

ГЛАВА VII

# ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА

**121. Ограниченная задача.** В § 35 мы рассматривали один частный случай. Мы предположили, что имеются три тела — Солнце, большая планета и малая планета — и что масса последней настолько мала, что можно пренебречь возмущениями, которые она вызывает в движении большой планеты. При этих условиях большая планета описывает кеплеровский эллипс. Мы предположили, кроме того, что эксцентриситет этого эллипса равен нулю, так что орбита большой планеты является круговой и что малая планета в начальный момент находится в плоскости этой орбиты и ее начальная скорость также лежит в плоскости этой орбиты. Из этого, очевидно, следует, что малая планета в с е г д а будет оставаться в плоскости орбиты большой планеты.

Тогда преобразование § 30 можно применить двумя различными способами.

1. Можно, как и в § 32, принять $m_4 = 0$, что равносильно допущению, как мы раньше видели, что большая планета отнесена к Солнцу, а малая к центру масс большой планеты и Солнца.

2. Можно, как и в § 33, принять $m_1 = 0$, что означает, что обе планеты отнесены к Солнцу.

В первом случае будем иметь

$$F = \Phi_0 + m_4\Phi_1,$$

где $\Phi_0 = T_1 - \frac{m_1 m_7}{AC}$, $m_4\Phi_1 = T_2 - \frac{m_1 m_4}{AB} - \frac{m_7 m_4}{BC}$,

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1'^2}{m_1'} + \frac{y_2'^2}{m_2'} + \frac{y_3'^2}{m_3'}\right), \quad T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{y_4'^2}{m_4'} + \frac{y_5'^2}{m_5'} + \frac{y_6'^2}{m_6'}\right).$$

Во втором случае будем иметь

$$F = \Phi_0 + m_1\Phi_1,$$

где

$$\Phi_0 = T_2 - \frac{m_4(m_1 + m_7)}{BD},$$

$$m_1\Phi_1 = T_1 - \frac{m_1 m_7}{AC} + m_1 m_4\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7\left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right),$$

$T_1$ и $T_2$ сохраняют те же значения.

И в том, и в другом случае движение большой планеты происходит согласно законам Кеплера; движение малой планеты определяется каноническими уравнениями (13) или (13′) из главы II, которые имеют вид

$$\frac{dx_i'}{dt} = m_4 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -m_4 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i'} \qquad (i = 4,\ 5,\ 6) \tag{1}$$

в первом случае, и

$$\frac{dx_i'}{dt} = m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt} = -m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i'} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{2}$$

во втором случае.

В первом случае с точностью до бесконечно малых высшего порядка имеем

$$m_4' = m_5 = m_6' = m_4$$

и полагаем

$$y_i' = m_i' y_i'' = m_4 y_i'' \qquad (i = 4,\ 5,\ 6).$$

Во втором случае имеем

$$m_1' = m_2' = m_3' = m_1$$

и полагаем

$$y_i' = m_i' y_i'' = m_1 y_i'' \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Таким образом, мы приходим к уравнениям (14) главы IV, которые записываются в виде

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i''}, \qquad \frac{dy_i''}{dt} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i'}, \tag{3}$$

где нужно брать $i = 4, 5, 6$ в первом случае и $i = 1, 2, 3$ во втором.

Заметим, что $\Phi_1$ зависит не только от неизвестных $x'$ и $y'$ (или $x''$ и $y''$), но еще и от времени, так как она зависит от координат большой планеты, которые являются известными функциями времени.

**122.** Установив это, поступаем так же, как и в § 78, и выразим $x'$ и $y'$ в виде функций от канонических элементов:

$$\lambda_i,\ L_i \qquad (i = 1,\ 2),$$
$$\varrho_i,\ \omega_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Так как

$$\sum x'\,dy' - \sum \lambda\,dL - \sum \omega\,d\varrho$$

является точным дифференциалом, то эта замена переменных будет канонической.

Таким образом, мы снова выведем уравнения (4) из § 78. Воспользуемся для определенности предположением § 33, т. е.

допустим, что $m_1$ весьма мала и что

$$F = \Phi_0 + m_1\Phi_1.$$

Так как движение большой планеты является кеплеровским, то ее канонические элементы $L_2$, $\varrho_3$, $\varrho_4$, $\omega_3$, $\omega_4$ остаются постоянными, а $\lambda_2$ будет изменяться пропорционально времени.

Что касается элементов малой планеты $L_1$, $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\lambda_1$, то они определяются уравнениями (4) из § 78, но если учесть, что $\Phi_0$ не зависит от этих элементов, то эти уравнения приводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} &= -m_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda_1}, & \frac{d\lambda_1}{dt} &= m_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial L_1}, \\ \frac{d\varrho_i}{dt} &= -m_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega_i}, & \frac{d\omega_i}{dt} &= m_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varrho_i} \quad (i=1,\ 2). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Впрочем, эти уравнения могли бы быть получены и преобразованием уравнений (2). Действительно, выражение

$$\sum x_i' \, dy_i' - \lambda_1 \, dL_1 - \sum \omega \, d\varrho,$$

которое является выражением (1) из § 78, есть точный дифференциал. Таким образом, мы выполнили замену канонических переменных; согласно § 12 эта замена не нарушает каноническую форму уравнений, хотя $\Phi_1$ зависит явно от времени.

Уравнения (4) записаны в такой форме, которая иногда может казаться неудачной, так как и левая, и правая их части имеют порядок $m_1$ и, следовательно, бесконечно малы. Тогда мы положим

$$L_1 = m_1 L_1', \qquad \varrho_i = m_1 \varrho_i' \qquad (i = 1,\ 2),$$

так что $L'$ и $\varrho'$ являются конечными и наши уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_1'}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_1}{\partial\lambda_1}, & \frac{d\lambda_1}{dt} &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial L_1'}, \\ \frac{d\varrho_i'}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega_i}, & \frac{d\omega_i}{dt} &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varrho_i'}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Уравнения (5) могут быть также выведены из уравнений (3). В самом деле,

$$\sum x \, dy'' - \lambda_1 \, dL_1' - \sum \omega_i \, d\varrho_i' = \frac{\sum x \, dy' - \lambda_1 \, dL_1 - \sum \omega \, d\varrho}{m_1}$$

есть точный дифференциал, так что можно взять за переменные $L_1'$, $\lambda_1$, $\varrho_i'$, $\omega_i$, и каноническая форма уравнений не нарушится.

Мы видим, впрочем, что если рассматривать фиктивную планету, имеющую ту же траекторию, что и планета $A''$ из § 74, но имеющую массу не $m_1'$ (т. е. $m_1$, ибо $m_1 = m_1'$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка), а 1, то координаты этой планеты будут $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, компоненты ее количества движения $y_1''$, $y_2''$, $y_3''$, и ее канонические элементы $L_1'$, $\lambda_1$, $\varrho_i'$, $\omega_i$.

123. Согласно § 33 мы имеем

$$m_1\Phi_1 = T_1 + U_1 + U_3.$$

В § 82 мы нашли

$$T_1 + U_1 = -\frac{M_1}{2L_1^2}, \qquad M_1 = m_1'm_1^2m_7^2.$$

Поэтому будем иметь

$$\frac{T_1 + U_1}{m_1} = -\frac{M_1'}{2L_1'^2},$$

где

$$M_1' = \frac{M_1}{m_1^3} = m_7^2,$$

так как $m_1' = m_1$.

Что касается функции

$$U_3 = \mu F_1,$$

то в § 40 мы видели, что в интересующем нас случае она принимает частный вид. Но, как было сказано в § 41, подобные упрощения невозможны, если принять предположение, выдвинутое в § 32. Впрочем, мы им не воспользуемся, а ограничимся тем, что напомним форму возмущающей функции $\mu F_1$ и, следовательно, $\Phi_1$ из главы IV.

Мы будем иметь

$$\frac{U_3}{m_1} = \sum A m_1^{q_1+q_2-1} \varrho_1'^{q_1} \varrho_2'^{q_2} \varrho_3'^{q_3} \varrho_4'^{q_4} \cos\left(\sum k_i\lambda_i + \sum p_i\omega_i\right), \tag{6}$$

где $A$ зависит только от $L_1'$ и $L_2$.

В формуле (10) из § 83 мы заменили $\varrho_1$ и $\varrho_2$ на $m_1\varrho_1'$ и $m_1\varrho_2'$, далее разделили на $m_1$, чем и объясняется наличие множителя $m_1^{q_1+q_2-1}$. Кроме того, положим $h = 0$ в силу теоремы из § 81. Напомним также, что в силу теоремы из § 87

$$\sum k = \sum p$$

и что

$$2q_i \equiv p_i \pmod 2, \qquad 2q_i \geqslant |p_i|.$$

Мы предположили далее, что орбита большой планеты есть окружность, т. е. что

$$\varrho_3 = 0,$$

и что наклонности равны нулю, т. е.

$$\varrho_2 = \varrho_4 = 0.$$

Все члены в правой части равенства (6), следовательно, равны нулю, кроме тех, для которых

$$q_2 = q_3 = q_4 = 0$$

и для которых, следовательно,

$$p_2 = p_3 = p_4 = 0.$$

Таким образом, полагая

$$Am_1^{q_1-1} = \mu B,$$

получаем

$$\frac{U_3}{m_1} = \mu \sum B\varrho_1'^{q_1} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + p_1\omega_1),$$

или

$$\Phi_1 = -\frac{M_1'}{2L_1'^2} + \mu \sum B\varrho_1'^{q_1} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + p_1\omega_1), \tag{7}$$

где $B$ зависит лишь от $L_1'$ и $L_2$. Можно сказать даже, что $B$ зависит только от $L_1'$, так как $L_2$ есть абсолютная постоянная, являющаяся одной из данных задачи.

Имеем также

$$k_1 + k_2 = p_1. \tag{8}$$

Что касается $\lambda_2$, то мы можем считать ее равной $n_2 t$, выбирая за начало времени тот момент, когда долгота большой планеты равна нулю. С другой стороны, $n_2$ есть абсолютная постоянная, являющаяся одной из данных задачи.

Полагая тогда

$$F' = F_0' + \mu F_1' = \Phi_1 + n_2(\varrho_1' - L_1'), \qquad F_0' = -\frac{M_2'}{2L_1'^2} + n_2(\varrho_1' - L_1'),$$

$$F_1' = \sum B\varrho_1'^{q_1} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + p_1\omega_1), \quad \lambda_1' = \lambda_1 - \lambda_2, \;\; \omega_1' = \omega_1 + \lambda_2,$$

мы приведем уравнения движения к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_1'}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial \lambda_1'}, & \frac{d\lambda_1'}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial L_1'}, \\ \frac{d\varrho_1'}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial \omega_1'}, & \frac{d\omega_1'}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial \varrho_1'}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эти уравнения имеют каноническую форму только на этот раз, так как в силу соотношения (8)

$$F_1' = \sum B\varrho_1'^{q_1} \cos(k_1\lambda_1' + p_1\omega_1'),$$

*наша функция $F'$ зависит только от четырех неизвестных, $L'_1$, $\varrho'_1$, $\lambda'_1$, $\omega'_1$, и не зависит более явным образом от времени.*

**124. Интеграл Якоби.** В § 34 мы видели, что в случаях, рассмотренных в § 32 и 33, интегралы живых сил и площадей теряют смысл, и это потому, что функция $\Phi_1$ зависит явно от времени.

Здесь наша функция $F'$ не зависит явно от времени, поэтому уравнения (9) допускают интеграл

$$F' = \text{const},$$

который известен под названием *интеграла Якоби.*

**125. Замечание.** Важно сделать одно замечание, касающееся $F'_0$. Мы имеем

$$\frac{\partial F'_0}{\partial L'_1} = \frac{M'_1}{L'^3_1} - n_2,$$

$$\frac{\partial F'_0}{\partial \varrho'_1} = n_2.$$

Не существует никакого линейного соотношения с постоянными коэффициентами, ни тем более с целыми коэффициентами между $\frac{M'_1}{L'^3_1}$ и $n_2$, так как первая из этих величин зависит от $L'_1$, а вторая величина постоянна. Следовательно, между двумя частными производными функции $F'_0$ не существует линейного соотношения. Далее мы убедимся в важности этого замечания.

**126. Обобщение.** Пусть, вообще, $F$ является функцией $2n$ переменных

$$L_1, \; L_2, \; \ldots, \; L_n,$$

$$\lambda_1, \; \lambda_2, \; \ldots, \; \lambda_n.$$

Рассмотрим канонические уравнения

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \qquad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i} \qquad (i = 1, \; 2, \; 3, \; \ldots, \; n). \tag{10}$$

Допустим, что

$$F = F_0 + \mu F_1,$$

где $\mu$ — очень малая постоянная. Допустим, что $F_0$ зависит только от $L_i$, и притом *таким образом, что не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами между частными производными* $\frac{\partial F_0}{\partial L_i}$.

Что касается функции $F_1$, то она является периодической относительно $\lambda_i$, разложимой по синусам и косинусам, кратных $\lambda_i$, с коэффициентами, зависящими от $L_i$.

Уравнения (9) являются частным случаем уравнений (10), если считать, что $F_0'$ и $F_1'$ играют роль функций $F_0$ и $F_1$, $L_1'$ и $\varrho_1'$ играют роль $L_1$ и $L_2$, а $\lambda_1'$ и $\omega_1'$ — роль $\lambda_1$ и $\lambda_2$. В самом деле, $F_0'$ зависит только от $L_1'$ и $\varrho_1'$ в силу § 122, и между ее частными производными не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами. С другой стороны, $F_1'$ является периодической функцией $\lambda_1'$ и $\omega_1'$.

Заметим теперь, что все выводы, сделанные в главах V и VI, могут быть применены к уравнениям (10). В этих главах мы занимались лишь задачей трех тел, но результаты могут быть непосредственно распространены и на случай произвольного числа тел, а затем и на более общие проблемы динамики.

Каковы, в самом деле, те предположения, которые играли основную роль в доказательствах?

1. Прежде всего то, что $F_0$ зависит только от $L$. Уравнения (10) удовлетворяют этому предположению. Мы не пользовались частной формой для функции $F_0$, и, например, мы обозначили частные производные второго порядка от $F_0$ через $C_{ik}$, не используя упрощения, вытекающие из того, что $C_{12} = 0$ (см. § 106).

2. Далее мы считали, что отношение $\frac{n_1}{n_2}$ несоизмеримо. В случае, когда имеется более двух переменных $L$, это условие должно быть заменено следующим: между $n_i$ (т. е. между значениями частных производных функции $F_0$ по $L$ при $L_i = L_i^0$) не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами. Но мы предположили выше, что в случае уравнений (10) не существует никакого линейного соотношения между частными производными $F_0$, которое бы тождественно выполнялось. Поэтому всегда можно допустить, что $L_i^0$ выбираются таким образом, что между $n_i$ не существует никакого подобного линейного соотношения.

3. $F_1$ является периодической относительно $\lambda_i$. Это условие для уравнений (10) также выполняется.

4. И, наконец, то, что $F_1$ может быть разложена по степеням $\xi$ и $\eta$. В случае уравнений (10) функция $F_1$ не зависит ни от каких переменных, аналогичных $\xi$ и $\eta$. Условие, следовательно, можно считать выполненным, только разложение $F_1$ по степеням $\xi$ и $\eta$ сводится к одному члену *нулевой степени*.

Таким образом, все условия выполнены, поэтому все результаты глав V и VI могут быть применены к уравнениям (10).

**127.** Итак, мы можем удовлетворить уравнениям (10), полагая

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i, \qquad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i, \tag{11}$$

где $L_i^0$ и $\lambda_i^0$ — постоянные, представляющие начальные значения $L_i$ и $\lambda_i$, $n_i$ — постоянная, равная значению $\frac{\partial F_0}{\partial L_i}$ при $L_i = L_i^0$, и, наконец, $\delta L_i$ и $\delta\lambda_i$ суть ряды вида

$$\sum \mu^\alpha A t^m \cos(\nu t + h),$$

где $A$ и $h$ — постоянные, зависящие только от $L_i^0$ и $\lambda_i^0$,

$$\nu = \sum k_i n_i,$$

причем $k_i$ — целые числа.

Добавим, что $\delta L$ и $\delta\lambda$ содержат $\mu$ множителем и, с другой стороны, обращаются в нуль при $t = 0$.

Это есть формула (6) из § 102 с той разницей, что она не содержит одночлен $\mathfrak{M}$, так как мы не имеем здесь переменных, аналогичных $\xi$ и $\eta$. Но, более того, мы можем составить разложения, зависящие от $(n + 1)$ переменных

$$\tau, \ w_1, \ w_2, \ \ldots, \ w_n,$$

заменяя в разложениях $\delta L_i$ и $\delta\lambda_i$ букву $t$ на $\tau$, когда она не входит под знак косинуса, и $\nu t$ на $\sum k_i w_i$ — под знаком косинуса. С другой стороны, в первом члене правой части второго уравнения (11) мы заменим $n_i t$ на $w_i$.

Если, следовательно, мы имеем

$$dL_i = \sum \mu^\alpha A t^m \cos(\nu t + h),$$
$$d\lambda_i = \sum \mu^\alpha A' t^m \cos(\nu t + h'),$$

то наши новые разложения примут вид

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \sum \mu^\alpha A \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + h\right), \\ \lambda_i &= \lambda_i^0 + w_i + \sum \mu^\alpha A' \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + h'\right). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Если в этих новых разложениях положим

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t,$$

то опять придем к разложениям (11) и, следовательно, удовлетворим уравнениям (10).

Но в главе VI мы видели, что если в этих разложениях (12) положить

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

то уравнения (10) также будут удовлетворены, каковы бы ни были значения $(n + 1)$ произвольных постоянных $c$ и $\varepsilon_i$.

128. Все другие выводы, сделанные в главе V, здесь также сохраняются. Например, мы не будем иметь членов отрицательного ранга; мы не имеем смешанных членов нулевого ранга и в разложениях для $L_i$ не имеем членов нулевого ранга. Во втором приближении, т. е. если мы пренебрегаем членами с $\mu^2$, в разло-

жениях $L_i$ не будет вековых членов, что представляет обобщение теоремы о неизменности больших осей. Заметим, что здесь она применима к $n$ переменным из $2n$, тогда как в задаче трех тел эта же теорема имеет место только для двух переменных из 12. Это вытекает из того, что в уравнениях (10) функция $F_0$ зависит от $n$ переменных $L$ (они входят, можно сказать, независимым образом, так как между частными производными $F_0$ не существует никакого линейного соотношения). И, наоборот, в проблеме трех тел функция $F_0$ зависит только от двух переменных из 12.

129. Попытаемся теперь изменить наш метод таким образом, *чтобы можно было освободиться от вековых членов.*

Для этого воспользуемся теоремой из § 16.

Формула (24) этого параграфа имеет вид

$$\sum x\,dy = d\Omega + \sum A_k\,d\alpha_k - F\,dt.$$

Здесь функция $\Omega$ определяется уравнением

$$\frac{d\Omega}{dt} = F + \sum x\frac{dy}{dt} = F - \sum x\frac{\partial F}{\partial x}.$$

$\alpha_k$ — постоянные интегрирования, а $A_k$ — функции этих постоянных.

Указанная формула применялась к уравнениям (1) главы I, но от этих уравнений можно перейти к нашим уравнениям (10), заменяя $x$, $y$, $F$ на $L$, $\lambda$, $-F$.

Тогда формула принимает вид

$$\sum L\,d\lambda = d\Omega + \sum A_k\,d\alpha_k + F\,dt, \tag{13}$$

причем

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sum L\frac{\partial F}{\partial L} - F. \tag{14}$$

Заменим $L$ и $\lambda$ разложениями (12). Ясно, что после такой замены

$$\sum L\frac{\partial F}{\partial L} - F$$

представится разложением того же вида, т. е. разложением по степеням $\tau$ и по синусам и косинусам кратных $w$.

Определим затем $\Omega$ уравнением

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \sum n_i\frac{\partial\Omega}{\partial w_i} = \sum L\frac{\partial F}{\partial L} - F. \tag{15}$$

Это уравнение имеет ту же форму, что и уравнение (13) предыдущей главы. Поступая аналогичным образом, получим для $\Omega$ разложение по степеням $\tau$ и по синусам и косинусам кратных $w$.

Уравнение (15) не определяет полностью $\Omega$, но мы можем в формуле (13) взять для $\Omega$ любое решение уравнения (15). Мы выберем такое решение, которое разлагается по степеням $\tau$ и тригонометрических функций $w$.

Мы знаем, что уравнения (10) удовлетворяются, если положить

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i.$$

Таким образом, мы будем иметь $(3n + 1)$ постоянных интегрирования, а именно, $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\varepsilon_i$ и $c$. Эти постоянные не являются различными, и нам достаточно сохранить $2n$ из них, а следовательно, мы можем $(n + 1)$ из них взять равными нулю. Мы положим

$$\lambda_i^0 = c = 0.$$

При этих условиях $L$, $\lambda$, $\Omega$ будут постоянными функциями $\tau$, $\omega_i^0$, $L_i^0$. Таким образом, как мы видим, функция $\Omega$, так же как и $L_i$ и $\lambda_i - w_i$, разложима по степеням $\tau$ и тригонометрическим функциям от $w$. Выражение

$$\sum L\,d\lambda - d\Omega$$

будет, следовательно, иметь вид

$$H\,d\tau + \sum W_i\,dw_i + \sum C_i\,dL_i^0,$$

где $H$, $W_i$ и $C_i$ будут функциями $L_i^0$, $w$, $\tau$, разложимыми по степеням $\tau$ и по косинусам и синусам кратных $w$.

Если положим

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

откуда

$$d\tau = dt, \qquad dw_i = n_i\,dt + d\varepsilon_i + t\,dn_i,$$

то $L$ и $\lambda$ будут удовлетворять уравнениям (10) и, следовательно, соотношению (13). Далее, находим

$$\sum L\,d\lambda - d\Omega = \left(H + \sum W_i n_i\right) dt + \sum W_i\,d\varepsilon_i + \sum C_i^0\,dL_i^0,$$

где имеем

$$C_i^0 = C_i + t \sum W_k \frac{\partial n_k}{\partial L_i^0},$$

и так как $n_k$ зависят только от $L_i^0$, то имеем

$$dn_k = \sum \frac{\partial n_k}{\partial L_i^0}\,dL_i^0.$$

Постоянные интегрирования, которые играют роль $\alpha_k$ в формуле (13), здесь суть $L_i^0$ и $\varepsilon_i$.

Следовательно, согласно теореме § 16, величины $W_i$ и $C_i^0$, т. е. коэффициенты при $d\varepsilon_i$ и $dL_i^0$, которые играют роль $d\alpha_k$, будут постоянными, не зависящими от времени, а только от постоянных интегрирования. Более того,

$$H+\sum W_i n_i = F$$

также не будет зависеть от времени в силу интеграла живых сил.

Но $W_i$ разложимы по степеням $\mu$, $\tau$ и по синусам и косинусам кратных $w$. Следовательно, они имеют вид функции

$$f(\mu, \tau, w_k),$$

к которой применима последняя лемма из § 107. Но для

$$\tau = t, \qquad w_k = n_k t$$

наша функция

$$W_i = f(\mu, \tau, w_k)$$

должна сводиться к постоянной $f_0$, зависящей только от постоянных интегрирования $\varepsilon_i$ и $L_i^0$. Или, лучше сказать, что она будет зависеть только от $L_i^0$, так как мы положили $w_k = n_k t$, т. е. предположили, что $\varepsilon_k = 0$.

Итак, будем иметь

$$f(\mu, t, n_k t) - f_0 = 0,$$

где $f_0$ зависит только от $L_i^0$.

В силу леммы § 107, для всех значений $\tau$ и $w$ мы должны будем иметь

$$W_i - f_0 = f(\mu, \tau, w_k) - f_0 = 0,$$

откуда следует, что $W_i$ зависят только от $L_i^0$.

Рассмотрим теперь коэффициенты $C_i$ и выражения

$$C_i + \tau \sum W_k \frac{\partial n_k}{\partial L_i^0}.$$

При $\tau = t$, $w_i = n_i t$ это выражение приводится к

$$C_i + t \sum W_k \frac{\partial n_k}{\partial L_i^0},$$

т. е. к $C_i^0$, и будет зависеть, как мы видели, только от $L_i^0$. Применяя то же рассуждение, мы увидим, что для всех значений $\tau$ и $w$ мы имеем

$$C_i + \tau \sum W_k \frac{\partial n_k}{\partial L_i^0} = C_i^0$$

и что $C_i^0$ зависит только от $L_i^0$.

То же самое можно сказать и относительно $F$, которая также не зависит от времени.

Вернемся к тождеству

$$\sum L\,d\lambda - d\Omega = H\,d\tau + \sum W_i\,dw_i + \sum C_i\,dL_i^0 \tag{16}$$

и положим в нем $\tau = w_i = 0$. Для $\tau = w_i = 0$ имеем $\lambda_i = \lambda_i^0$ и, следовательно, $\lambda = 0$, так как мы предположили, что $\lambda_i^0$ равны нулю. $\Omega$ приводится к $\Omega_0$ и $C_i$ обращаются в $C_i^0$ (величина, которая, как мы видели, зависит только от $L_k^0$). Кроме того, будем иметь

$$d\tau = dw = d\lambda = 0.$$

Тогда наше тождество принимает вид

$$-d\Omega_0 = \sum C_i^0\,dL_i^0. \tag{16'}$$

Вычитая (16′) из (16), получим

$$\sum L\,d\lambda - \sum W_i\,dw_i = H\,d\tau + d(\Omega - \Omega_0) + \tau \sum W_k \frac{\partial n_k}{\partial L_i^0}\,dL_i^0,$$

и если положить $\tau = 0$, откуда следует $d\tau = 0$, то

$$\sum L\,d\lambda - \sum W\,dw = d(\Omega - \Omega_0). \tag{17}$$

Вернемся к разложениям (12), примем $\lambda_i^0 = 0$ и, кроме того, положим $\tau = 0$. Тогда их можно рассматривать как уравнения, определяющие $2n$ величин $L_i$ и $\lambda_i$ в функции $2n$ переменных $L_i^0$ и $w_i$.

С другой стороны, $n$ величин $W_i$, как мы видели, являются функциями $n$ величин $L_i^0$, и наоборот; заменим $L_i^0$ их значениями в функции от $W_i$.

Таким образом, разложения (12) при $\lambda_i^0 = \tau = 0$ можно рассматривать как определяющие $L$ и $\lambda$ в зависимости от $W$ и $w$.

Отсюда следует, что $W$ и $w$ можно взять за новые переменные. Соотношение (17) показывает, что эта замена переменных будет канонической, и, следовательно, она не нарушит канонической формы уравнений (10), которые приведутся к

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial w}, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial W}. \tag{18}$$

Но мы видели, что $F$ зависит только от $L_i^0$, поэтому если заменить $L_i^0$ их значениями, зависящими от $W_i$, то $F$ будет зависеть только от переменных $W_i$ и не будет зависеть от $w_i$.

Поэтому будем иметь $\frac{\partial F}{\partial w} = 0$; следовательно,

$$W = \text{const}.$$

Из этого следует, что функция $F$ и ее производные $\frac{\partial F}{\partial W}$, которые зависят только от $W$, также будут постоянными.

Полагая тогда

$$\frac{\partial F}{\partial W_i} = n_i' = \text{const},$$

будем иметь

$$\frac{dw_i}{dt} = n_i',$$

или

$$w_i = n_i't + w_i^0,$$

где $w_i^0$ — новые постоянные интегрирования.

Величины $L_i^0$, зависящие лишь от $W$, также будут постоянными. Следовательно, мы удовлетворим нашим уравнениям, если положим в разложениях (12)

$$\lambda_i^0 = 0, \qquad \tau = 0, \qquad L_i^0 = \text{const}, \qquad w_i = n_i't + w_i^0.$$

Отметим, что $n_i'$ — постоянные, зависящие от $L_i^0$, но они отличны от $n_i$. Самым интересным является то, что, так как мы приняли $\tau = 0$, все вековые члены исчезли*).

130. Лемма § 107 может быть применена к функции $f(\mu, \tau, w)$ при одном условии. Эта функция может содержать бесконечное число членов, но коэффициент при $\mu^\alpha$ может содержать их только в конечном числе.

Выполняется ли это условие в интересующем нас случае? Оно выполняется, если взять в функции $F$ только конечное число членов. В самом деле, имеем уравнения

$$\left.\begin{aligned} \delta L_i &= -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}\,dt, \\ \delta \lambda_i &= \mu \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_k}\,dt + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i}\,dt + \mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial L_i}\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

аналогичные уравнениям (9) главы V (§ 106). Буквы $\Phi$ и $C_{ik}$ имеют тот же смысл, что и в § 106. Не следует только путать $C_{ik}$ с $C_i$ из § 129, к которым они не имеют никакого отношения.

Предположим, что мы доказали, что в $n$-м приближении, т. е. если пренебречь членами порядка $\mu^n$ и высшего порядка, наши $\delta L_i$ и $\delta\lambda_i$ приводятся к конечному числу членов. Тогда это будет верно также в $(n+1)$-м приближении.

---

*) Предыдущий анализ приводит к теоремам, которые были доказаны другим путем в Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, т. II, § 125, 158, а также в Bulletin astronomique, т. XIV, стр. 242, проблема B.

Чтобы получить значения в $(n+1)$-м приближении, мы должны заменить в правых частях уравнений (19) $\delta L_i$ и $\delta\lambda_i$ их значениями в $n$-м приближении. Мы знаем, что $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}$ может быть разложена по степеням $\delta L$, $\delta\lambda$ в форме

$$\sum B\mathfrak{M}', \tag{20}$$

где $\mathfrak{M}'$ — целый одночлен относительно $\delta L$ и $\delta\lambda$. Мы можем отбросить в разложении все члены степени $(n+1)$ и выше (относительно $\delta L$ и $\delta\lambda$). Действительно, так как $\delta L$ и $\delta\lambda$ содержат $\mu$ множителем, эти члены будут порядка $\mu^n$, и мы имеем право их отбросить.

Итак, разложение (20) будет состоять из конечного числа членов. Что касается коэффициента $B$, то он равен с точностью до числового множителя одной из частных производных высшего порядка от $F_1$, в которой неизвестные заменены их значениями из первого приближения, и так как мы берем для $F_1$ только конечное число членов, то и $B$ также будет состоять из конечного числа слагаемых. Это имеет место и для

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_k}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial L_i}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial L_i}.$$

Таким образом, правые части уравнений (19) содержат только конечное число членов, поэтому $\delta L$ и $\delta\lambda$ также будут содержать конечное число членов, что и требовалось доказать.

Одновременно видно, что частные производные функции $F$ также удовлетворяют этому условию.

Следовательно, то же самое можно сказать и о величинах

$$\Omega = \int \sum L \frac{\partial F}{\partial L}\, dt - F\cdot t,$$

$$W_i = \sum L \frac{\partial \lambda}{\partial w_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial w_i},$$

$$C_i = \sum L \frac{\partial \lambda}{\partial L_i^0} - \frac{\partial \Omega}{\partial L_i^0}.$$

Таким образом, если пренебречь всеми членами, имеющими $\mu^n$ множителем, то все эти величины содержат лишь конечное число членов, как бы ни был велик целый показатель $n$.

Это обстоятельство позволяет применять лемму § 107.

**131.** Величины $W_i$ и $n_i'$ могут быть разложены по степеням $\mu$. Это очевидно для

$$W_i = \sum L \frac{\partial \lambda}{\partial w_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial w_i},$$

так как $L$, $\lambda$ и $\Omega$ разложимы по степеням $\mu$. Действительно, так как $L$ и $\lambda$ разложимы по степеням $\mu$, то это же верно для $F$ и $\frac{\partial F}{\partial L}$, которые являются функциями $L$ и $\lambda$ и в которых $L$ и $\lambda$ могут быть заменены их разложениями по степеням $\mu$. Наконец, то же самое справедливо и для

$$\Omega = \int \left( \sum L \frac{\partial F}{\partial L} - F \right) dt.$$

Легко видеть, каков первый член разложения. В самом деле, если положим $\mu = 0$, то найдем

$$L_k = L_k^0, \quad \lambda_k = w_k,$$

откуда

$$\sum L \frac{\partial \lambda}{\partial w_i} = L_i^0.$$

С другой стороны,

$$F = F_0, \quad \frac{\partial F}{\partial L_k} = n_k$$

и

$$\Omega = \left( \sum n_k L_k^0 - F_0 \right) \tau,$$

откуда

$$\frac{\partial \Omega}{\partial w_i} = 0$$

и

$$W_i = L_i^0.$$

Таким образом, первый член разложения равен $L_i^0$. Мы отметили, что $F$ есть постоянная, зависящая только от $L_i^0$. Так как $L_i^0$ суть функции от $W_i$ и наоборот, то $F$ можно рассматривать как функцию $W_i$. Тогда между частиыми производными $F$ по $W$ и частными производными по $L_i^0$ будем иметь следующее соотношение:

$$\frac{\partial F}{\partial L_k^0} = \sum \frac{\partial F}{\partial W_i} \cdot \frac{\partial W_i}{\partial L_k^0},$$

или, вспоминая определение $n_i'$,

$$\sum n_i' \frac{\partial W_i}{\partial L_k^0} = \frac{\partial F}{\partial L_k^0}.$$

Таким образом, мы имеем линейные уравнения, которые определят $n_i'$ через $L_i^0$ и $\mu$. Так как $F$ и $W_i$ и, следовательно, частные производные $\frac{\partial F}{\partial L_k^0}$ и $\frac{\partial W_i}{\partial L_k^0}$ разложимы по степеням $\mu$ и так как, с другой стороны, определитель наших линейных уравнений равен единице при $\mu = 0$ (т. е. при $W_i = L_i^0$), то величины $n_i'$ также будут разложимы по степеням $\mu$.

Легко найти первый член разложения. В самом деле, при $\mu = 0$

$$W_i = L_i^0, \qquad F = F_0, \qquad \frac{\partial F}{\partial L_k^0} = n_k$$

и наши линейные уравнения приведутся к равенству

$$n_k' = n_k.$$

Следовательно, первый член в разложении $n_i'$ равен $n_i$.

**132. Сравнение разложений.** Вернемся к разложениям (12), полагая в них, как и выше, $\lambda_i^0 = 0$:

$$L_i = L_i^0 + \sum \mu^\alpha A \tau^m \cos\left(\sum kw + h\right),$$
$$\lambda_i = w_i + \sum \mu^\alpha A' \tau^m \cos\left(\sum kw + h'\right).$$

Мы видели, что, принимая здесь $\tau = t$ и $w_i = n_i t$, получаем одно частное решение уравнений (10). Другое частное решение получим, полагая $\tau = 0$ и $w_i = n_i' t$.

Эти частные решения должны быть тождественными, так как и в том, и в другом при $t = 0$ начальные значения неизвестных $L_i$ и $\lambda_i$ суть $L_i^0$ и 0.

Итак, если разложим эти два решения по степеням $\mu$, то оба разложения должны быть тождественными.

Для первого решения находим

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \sum \mu^\alpha A t^m \cos(\nu t + h), \\ \lambda_i &= n_i t + \sum \mu^\alpha A' t^m \cos(\nu t + h'), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где

$$\nu = \sum k_i n_i.$$

Разложение является окончательным, так как $n_i$ и, следовательно, $\nu$ не зависят от $\mu$.

Для второго решения находим

$$L_i = L_i^0 + \sum \mu^\alpha A \cos(\nu' t + h),$$
$$\lambda_i = n_i' t + \sum \mu^\alpha A' \cos(\nu' t + h'),$$

где

$$\nu' = \sum k_i n_i'$$

и в которых сохранены только члены, где показатель $m$ равен нулю. Но разложение не является окончательным, так как $n_i'$ и $\nu'$ зависят еще от $\mu$.

Пусть, следовательно,

$$n_i' = n_i + \mu n_i^{(1)} + \mu^2 n_i^{(2)} + \ldots,$$
$$\nu' = \nu + \mu\nu^{(1)} + \mu^2\nu^{(2)} + \ldots$$

суть разложения $n_i'$ и $\nu'$ по степеням $\mu$. Нужно теперь заменить $n_i'$ и $\nu'$ этими разложениями и разложить $\cos(\nu' t + h')$ тоже по степеням $\mu$. Разлагая сначала по степеням $\nu' - \nu$, мы находим

$$\cos(\nu' t + h') = \sum \frac{1}{m!} (\nu' - \nu)^m t^m \cos\left(\nu t + h' + \frac{m\pi}{2}\right).$$

Далее, $(\nu' - \nu)^m$ может быть разложена по степеням $\mu$ в ряды следующего вида:

$$(\nu' - \nu)^m = m! \sum H_\beta \mu^\beta,$$

где $H_\beta$ — постоянные, зависящие от $\nu^{(k)}$ и, следовательно, от $L_i^0$. Из этого следует, что

$$\cos(\nu' t + h') = \sum \mu^\beta H_\beta t^m \cos\left(\nu t + h' + \frac{m\pi}{2}\right)$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \sum \mu^{\alpha+\beta} A H_\beta t^m \cos\left(\nu t + h + \frac{m\pi}{2}\right), \\ \lambda_i &= n_i t + \sum \mu^\alpha n_i^{(\alpha)} t + \sum \mu^{\alpha+\beta} A' H_\beta t^m \cos\left(\nu t + h' + \frac{m\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Разложения (21) и (22) должны быть тождественными. Рассмотрим сначала чисто вековые члены. Это те члены, для которых $\nu = 0$, $m > 0$. Но $\nu$ может равняться нулю только в том случае, когда

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0,$$

так как мы предположили, что между $n_i$ не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами.

Но тогда также будем иметь

$$\nu' = 0, \quad \nu' - \nu = 0,$$

и разложение $\cos(\nu' t + h')$ сводится к одному постоянному члену, не имеющему $t$ множителем.

Таким образом, в разложениях (21) и (22) для $L_i$ нет чисто вековых членов.

В разложениях $\lambda_i$ множители $\cos(\nu' t + h')$ не могут дать вековых членов, поэтому все чисто вековые члены возникают из разложения $n_i' t$ и имеют вид $\mu^\alpha n_i^{(\alpha)} t$.

Следовательно, в разложениях (21) или (22) для $\lambda_i$ нет других чисто вековых членов, кроме членов, пропорциональных $t$.

Сравним теперь в разложениях (21) и (22) совокупности членов

$$\sum \mu^{\alpha} A t^m \cos(\nu t + h) \tag{23}$$

и

$$\sum \mu^{\alpha+\beta} A H_{\beta} t^m \cos\left(\nu t + h + \frac{m\pi}{2}\right), \tag{24}$$

соответствующие одному и тому же значению $\nu$. Эти две совокупности членов должны быть тождественными.

Напишем разложение (23) в виде

$$\sum B_m t^m \cos \nu t + \sum C_m t^m \sin \nu t, \tag{23$'$}$$

где

$$B_m = \sum \mu^{\alpha} A \cos h, \quad C_m = -\sum \mu^{\alpha} A \sin h.$$

Здесь суммирование распространяется на все члены разложения (23), которые соответствуют данным значениям величины $\nu$ и целого $m$.

Аналогично напишем разложение (24) в форме

$$\sum D_m t^m \cos \nu t + \sum E_m t^m \sin \nu t, \tag{24$'$}$$

где

$$D_m = \sum \mu^{\alpha+\beta} A H_{\beta} \cos\left(h + \frac{m\pi}{2}\right),$$

$$E_m = -\sum \mu^{\alpha+\beta} A H_{\beta} \sin\left(h + \frac{m\pi}{2}\right).$$

В последних равенствах суммирование распространяется на все члены (24), которые соответствуют данным значениям $\nu$ и целого $m$.

Так как разложения (23$'$) и (24$'$) должны быть тождественными, то будем иметь

$$B_m = D_m, \quad C_m = E_m.$$

Но разложения (24) и (24$'$) происходят из разложения членов с $\cos \nu' t$ и $\sin \nu' t$ по степеням $\nu' - \nu$ и, следовательно, по степеням $\mu$.

Этими членами являются

$$D_0 \cos \nu' t + E_0 \sin \nu' t = B_0 \cos \nu' t + C_0 \sin \nu' t.$$

*Итак, совокупность периодических или смешанных вековых членов разложения* (21), *имеющих множителем* $\cos \nu t$ *и* $\sin \nu t$, *т. е. совокупность членов* (23), *может быть легко просуммирована. Для суммы имеем*

$$B_0 \cos \nu' t + C_0 \sin \nu' t.$$

Более того, мы видим, что:

*если в разложении, получающемся в результате непосредственного применения метода Лагранжа, т. е. в разложении* (21).

*известны периодические и чисто вековые члены, то можно сразу же получить смешанные вековые члены.*

В самом деле, совокупность периодических членов равна

$$\sum B_0 \cos \nu t + \sum C_0 \sin \nu t.$$

В разложении для $\lambda_i$ мы не имеем других чисто вековых членов, кроме члена $n'_i t$.

Смешанные вековые члены появляются в результате разложения

$$\sum B_0 \cos \nu' t + \sum C_0 \sin \nu' t.$$

Зная периодические члены, находим $B_0$ и $C_0$; зная чисто вековые члены, находим $n'_i$ и, следовательно, $\nu$. Таким образом, приходим к доказательству некоторых свойств разложений (21), т. е. разложений, полученных методом Лагранжа. Эти свойства являются намного более простыми по сравнению со свойствами общего случая задачи трех тел. Эта относительная простота легко объясняется отсутствием переменных, аналогичных $\xi$ и $\eta$, так что $F_0$ зависит от $n$ переменных из $2n$.

**133. Обобщение.** Изложенный метод можно видоизменить различным образом. Сначала, вместо того чтобы положить $\lambda_i^0 = 0$, придадим $\lambda_i^0$ произвольные значения, к о т о р ы е в д а л ь н е й ш е м б у д е м р а с с м а т р и в а т ь к а к н а в с е г д а д а н н ы е. В этом случае рассуждение может быть проведено без изменений. Например, когда положили бы $\tau = w_i = 0$, то нашли бы $\lambda_i = \lambda_i^0$ и опять имели бы $d\tau = dw = d\lambda = 0$.

Поэтому если мы возьмем разложения (12) и, не полагая в них $\lambda_i^0 = 0$, положим $\tau = 0$, $w_i = n'_i t + \overline{\omega}_i$, то удовлетворим опять уравнениям (10). Найденное таким образом решение содержит $3n$ произвольных постоянных $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\overline{\omega}_i$, которые, конечно, не могут быть различными.

В разложениях (12) величины $A$, $h$, $A'$, $h'$ зависят от $L_i^0$ и $\lambda_i^0$, и ясно, что

$$A \cos h, \quad A \sin h, \quad A' \cos h', \quad A' \sin h'$$

являются периодическими функциями от $\lambda_i^0$. Поэтому будем иметь

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \sum \mu^\alpha B \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k'_i \lambda_i^0 + h_0\right), \\ \lambda_i &= w_i + \lambda_i^0 + \sum \mu^\alpha B' \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k'_i \lambda_i^0 + h'_0\right). \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

В разложениях (25), аналогичных разложениям (16′) из предыдущей главы, $k'$ — суть целые числа, а $B$, $h_0$, $B'$ и $h'_0$ зависят только от $L_i^0$.

Нет никаких оснований для того, чтобы здесь было $k_i = k'_i$.

Из способа получения разложений (25) следует, что $L_i$ и $\lambda_i$ приводятся к $L_i^0$ и $\lambda_i^0$ при $\tau = w_k = 0$.

Таким образом, разложения (25) совпадают с разложениями, полученными в § 109.

Мы удовлетворим уравнениям (10), полагая

$$\tau = t + c, \quad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

или

$$\tau = 0, \quad w_i = n_i' t + \overline{\omega}_i.$$

Вместо того чтобы брать за произвольные постоянные начальные значения переменных $L_i^0$ и $\lambda_i^0$, мы могли бы взять другие произвольные постоянные. Таким образом, мы могли бы придать нашим разложениям другую форму. Достаточно будет заменить в равенствах (25) прежние постоянные $L_i^0$ и $\lambda_i^0$ функциями от $2n$ новых постоянных $L_i^1$ и $\lambda_i^1$.

Пусть, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} L_i^0 &= \varphi_i(\mu, L_i^1, \lambda_i^1), \\ \lambda_i^0 &= \psi_i(\mu, L_i^1, \lambda_i^1), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где $\varphi_i$ и $\psi_i$ — функции $\mu$, $L_i^1$, $\lambda_i^1$, которые можно выбрать произвольным образом. Наложим только следующие условия:

1) функции $\varphi_i$ и $\psi_i$ должны разлагаться по степеням $\mu$;

2) при $\mu = 0$ мы должны иметь $L_i^0 = L_i^1$, $\lambda_i^0 = \lambda_i^1$;

3) величины $L_i^0$ и $\lambda_i^0 - \lambda_i^1$ должны быть периодическими функциями от $\lambda_i^1$.

Заменим в разложениях (25) $L_i^0$ и $\lambda_i^0$ значениями (26). Получим новые разложения, которые мы обозначим через (27).

Какова форма этих разложений?

1) При $\mu = 0$ они приводятся к

$$L_i = L_i^1, \quad \lambda_i = w_i + \lambda_i^1. \tag{27}$$

2) Разности $L_i - L_i^1$, $\lambda_i - w_i - \lambda_i^1$ разложимы по степеням $\mu$ и $\tau$ и являются периодическими функциями от $w_k$ и $\lambda_k^1$.

Другими словами, разложения (27) будут такой же формы, как и разложения (25), с той лишь разницей, что здесь $L_i^1$ и $\lambda_i^1$ будут играть ту же роль, что $L_i^0$ и $\lambda_i^0$ в разложениях (25) *).

Но при $\tau = w = 0$ $L_i$ и $\lambda_i$ не будут равны $L_i^1$ и $\lambda_i^1$. Мы получим еще одно решение уравнений (10), полагая в разложениях (27) или $\tau = t + c$, $w_i = n_i t + \varepsilon_i$, или $\tau = 0$, $w_i = n_i' t + \overline{\omega}_i$, так как разложения (27) получаются из разложений (25) заменой $L_i^0$ и $\lambda_i^0$ их значениями (26).

*) Формулы (27) Пуанкаре не выписывает, так как они подобны формулам (25). (*Прим. перев.*)

Среди всех разложений вида (27) то, в котором $n'_i = n_i$, заслуживает нашего внимания, но мы остановимся особенно на том разложении, которое получается методом § 113. Тогда $L^1_i$ и $\lambda^1_i$ представляют собой то, что мы назвали в предыдущей главе *средними значениями* $L_i$ и $\lambda_i$.

Мы изложили подробно этот метод, чтобы больше к нему не возвращаться. Между тем имеется одно различие.

Здесь мы не имеем ничего аналогичного величинам $\varrho_i$, $\omega_i$, $\varrho^0_i$, $\omega^0_i$ из § 112, так как в уравнениях (10) нет ни одной переменной, аналогичной $\xi$ и $\eta$.

Таким образом, получим разложения

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L^1_i + \sum \mu^\alpha B \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k_i \lambda^1_i + h\right),\\ \lambda_i &= w_i + \lambda^1_i + \sum \mu^\alpha B' \tau^m \cos\left(\sum k_i w_i + \sum k_i \lambda^1_i + h'_0\right), \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

где $B$, $h_0$, $B'$, $h'_0$ зависят только от $L^1_i$. Так как все результаты, полученные в главах VI и VII, применимы к разложениям (28), то мы выведем, следовательно, решение уравнений (10), полагая в (28) $\tau = t + c$, $w_i = n_i t + \varepsilon_i$ или $\tau = 0$, $w_i = n'_i t + \overline{\omega}_i$.

Отличие разложений (28) от других разложений (27) заключается в том, что, как мы видели в § 116, коэффициент $k_i$ при $w_i$ всегда равен коэффициенту при $\lambda^1_i$. Отсюда следует, что постоянные $\lambda^1_i$ и $\varepsilon_i$ (если положить $\tau = t$, $w_i = n_i t + \varepsilon_i$) всегда входят в комбинации $\varepsilon_i + \lambda^1_i$. Аналогично, если положить $\tau = 0$, $w_i = n'_i t + \overline{\omega}_i$, то постоянные $\lambda^1_i$ и $\overline{\omega}_i$ будут входить всегда в комбинации $\overline{\omega}_i + \lambda^1_i$.

Между постоянными разложений (25), т. е. $L^0_i$ и $\lambda^0_i$, и постоянными разложений (28), т. е. $L^1_i$ и $\lambda^1_i$, существуют некоторые соотношения, а именно соотношения (26).

Каким образом их составить? Для этого в равенствах (28) нужно заменить $L_i$, $\lambda_i$, $w$, $\tau$ через $L^0_i$, $\lambda^0_i$, 0 и 0.

Соотношения, которые мы получим таким образом, совпадают с соотношениями (20) из § 113. Допустим, с другой стороны, что в разложениях (28) положено $\tau = t$ и $w_i = n_i t$. Мы получим некоторые разложения, которые будут удовлетворять уравнениям (10). Могли ли мы прийти к этому непосредственно? В этом легко убедиться.

Допустим, что мы желали интегрировать уравнения (10) последовательными приближениями, беря в первом приближении

$$L_i = L^1_i, \quad \lambda_i = w_i + \lambda^1_i.$$

Остается показать, как вычисляются значения в $n$-м приближении, если считать их известными в $(n-1)$-м приближении.

Сначала рассмотрим уравнение

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}. \tag{29}$$

В правой части заменим переменные их значениями в $(n-1)$-м приближении. В результате замены правая часть принимает форму

$$\sum Bt^m \cos(\nu t + h),$$

которую нужно проинтегрировать по $t$, чтобы получить значения в $n$-м приближении.

В § 99 мы видели, что неопределенный интеграл

$$\int Bt^m \cos(\nu t + h)\, dt$$

содержит член с $t^m \cos(\nu t + h)$, член с $t^{m-1} \sin(\nu t + h)$, член с $t^{m-2} \cos(\nu t + h)$, ..., член с $t \, {\cos \atop \sin} (\nu t + h)$ и, наконец, член с ${\sin \atop \cos} (\nu t + h)$.

К неопределенному интегралу нужно добавить произвольную постоянную. До сих пор выбирали произвольную постоянную таким образом, чтобы $\delta L_i$ обращались в нуль при $t = 0$, т. е. мы брали

$$\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}\, dt.$$

Именно таким путем мы получили разложения (12) и (25).

Для получения разложений (28) мы не можем поступать таким же образом, а должны придать произвольной постоянной значение, равное нулю.

Далее, чтобы получить значение переменной $\lambda_i$ в $n$-м приближении, рассмотрим уравнение

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i}. \tag{30}$$

В правой его части нужно заменить $\lambda_i$ их значениями в $(n-1)$-м приближении, которое уже найдено. Тогда уравнение (30) будет иметь тот же вид, что и уравнение (29), и с ним можно поступить таким же образом.

Разложения, полученные таким образом, совпадут с разложениями (28), так как анализ, который мы провели, в принципе тождествен анализу из § 114.

**134. Частный случай ограниченной задачи.** То, что мы говорили до сих пор, применимо к общему случаю уравнений (10). То, о чем мы будем говорить теперь, применимо только к ограниченной задаче, которую сначала мы и имели в виду.

В § 126 мы видели, что от уравнений (9) ограниченной задачи мы переходим к уравнениям (10), полагая

$$F' = F, \qquad L_1' = L_1, \qquad \lambda_1' = \lambda_1, \qquad \varrho_1' = L_2, \qquad \omega_1' = \lambda_2.$$

Следовательно, все уже полученные результаты применимы и к ограниченной задаче, но здесь мы можем получить и больше. Функция $F$ разложима по степеням величин

$$\sqrt{2\varrho_1'}\cos\omega_1' = \sqrt{2L_2}\cos\lambda_2, \qquad \sqrt{2\varrho_1'}\sin\omega_1' = \sqrt{2L_2}\sin\lambda_2,$$

которые мы обозначили для сокращения через $\xi$ и $\eta$. Коэффициенты разложения будут зависеть, кроме того, от $L_1$ и $\lambda_1$.

Так как выражение

$$\xi\, d\eta - \varrho_1'\, d\omega_1' = \xi\, d\eta - L_2\, d\lambda_2$$

является точным дифференциалом, то уравнения (10) останутся каноническими, если перейти к переменным $L_1$, $\lambda_1$, $\xi$, $\eta$, и напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial\lambda_1}, & \frac{d\lambda_1}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial L_1}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial\eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Правые части уравнений (31) разложимы по степеням $\xi$ и $\eta$. Но вот что мы имеем здесь нового.

Если, как и в предыдущей главе, мы положим

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial\tau} + n_1\frac{\partial}{\partial w_1} + n_2\frac{\partial}{\partial w_2}$$

и будем искать разложения наших неизвестных $L_1$, $\lambda_1$, $\xi$, $\eta$ в функции от $\tau$ и $w$ в форме (25), (27) или (28), то увидим, что эти разложения удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \Delta L_1 &= -\frac{\partial F}{\partial\lambda_1}, & \Delta\lambda_1 &= \frac{\partial F}{\partial L_1}, \\ \Delta\xi &= -\frac{\partial F}{\partial\eta}, & \Delta\eta &= \frac{\partial F}{\partial\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Если учтем, что $F_0 = F_0'$ и равно

$$-\frac{M_1'}{2L_1'^2} + n_2(\varrho_1' - L_1') = -\frac{M_1'}{2L_1^2} + n_2\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{2} - L_1\right),$$

то увидим, что наши уравнения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \Delta L_1 &= -\mu\frac{\partial F_1}{\partial\lambda_1}, & \Delta\lambda_1 &= \frac{M_1'}{L_1^3} - n_2 + \mu\frac{\partial F_1}{\partial L_1}, \\ \Delta\xi + n_2\eta &= -\mu\frac{\partial F_1}{\partial\eta}, & \Delta\eta - n_2\xi &= \mu\frac{\partial F_1}{\partial\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Остается выбрать постоянные интегрирования. Здесь мы не будем брать за постоянные интегрирования ни начальные значения неизвестных, как в разложениях (25), ни средние их значения, как в разложениях (28), а выберем в качестве постоянных следующие величины:

1. Среднее значение $L_1$ (для $\tau = 0$, разумеется), которое обозначим через $L_1^1$.

2. Среднее значение $\lambda_1$, которое положим равным нулю.

3. Среднее значение величины

$$\xi \cos w_2 + \eta \sin w_2,$$

которое будем обозначать через $E$ по причине его аналогии с эксцентриситетом.

4. Среднее значение выражения

$$\xi \sin w_2 - \eta \cos w_2,$$

которое будем полагать равным нулю.

Покажем тогда, что наши неизвестные будут разложимы по степеням величин $E \cos w_2$, $E \sin w_2$.

В первом приближении имеем

$$L_1 = L_1^1, \quad \lambda_1 = w_1, \quad \xi = E \cos w_2, \quad \eta = E \sin w_2,$$

и, следовательно, в первом приближении сказанное выполняется.

Допустим, что оно выполнено в $(n-1)$-м приближении. Тогда оно будет также выполнено в $n$-м. Рассмотрим сначала первое уравнение (33), правая часть которого имеет вид

$$\sum B\mathfrak{M}',$$

где $B$ с точностью до числового множителя суть частные производные от $F$, в которых неизвестные заменены их значениями из первого приближения; следовательно, они разложимы по степеням $E \cos w_2$ и $E \sin w_2$. $\mathfrak{M}'$ суть одночлены, целые относительно $\delta L_1$, $\delta\lambda_1$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, которые нужно заменить их значениями из $(n-1)$-го приближения. Согласно предположению эти величины разложимы по степеням $E \cos w_2$ и $E \sin w_2$, поэтому вся правая часть уравнения также разложима по степеням $E \cos w_2$ и $E \sin w_2$.

Итак, наше уравнение имеет форму уравнения (13) из главы VI. В § 109 и 114 мы видели, как можно интегрировать уравнение такого вида. Мы указали два способа, как это сделать: или беря

$$C_0 = B \frac{\sin(k_1 w_1 + k_2 w_2 + h) - \sin h}{k_1 n_1 + k_2 n_2},$$

или полагая

$$C_0 = B\,\frac{\sin(k_1w_1+k_2w_2+h)}{k_1n_1+k_2n_2}\,.$$

Здесь следует применить второй способ и добавить затем постоянную $L_1^1$, так как мы хотим, чтобы среднее значение $L_1$ было равно $L_1^1$. Легко видеть, что, действуя таким образом, мы сделали переменную $L_1$ разложимой по степеням $E\cos w_2$ и $E\sin w_2$. Так могло бы и не быть при применении первого метода, который мог бы ввести члены с $E$, $E^3$, $E^5$, ...

Переходим ко второму уравнению (33). В его правой части нужно заменить $L_1$ его значениями из $n$-го приближения, а другие переменные — их значениями из $(n-1)$-го приближения. Тогда это уравнение принимает такую же форму, как и предыдущее, и с ним поступим таким же образом.

Рассмотрим, наконец, два последних уравнения (33). В их правых частях заменим неизвестные значениями из $(n-1)$-го приближения. Как и выше, можно убедиться, что эти правые части разложимы по степеням $E\cos w_2$ и $E\sin w_2$, так что наши уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned}\Delta\xi+n_2\eta&=\sum \mu^{\alpha}E^{q}A\tau^{m}\cos(k_1w_1+k_2w_2+h),\\ \Delta\eta-n_2\xi&=\sum \mu^{\alpha}E^{q}A'\tau^{m}\cos(k_1w_1+k_2w_2+h'),\end{aligned}\right\}\qquad(34)$$

где $A$, $A'$, $h$, $h'$ зависят только от $L_1^1$ и где $q$ — целое число такой же четности, что и $k_2$, и не меньше $|k_2|$.

Как могут быть проинтегрированы эти два уравнения? Сначала отбросим в правых частях члены, в которых $k_1=0$, $k_2=\pm 1$, и сохраним только совокупность остальных членов. Тогда уравнения (34) будут иметь следующую форму:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\xi+n_2\eta&=\sum B\tau^{p}\cos\varphi+\sum C\tau^{p}\sin\varphi+\\ &\quad+\sum b\tau^{m}\cos\varphi+\sum c\tau^{m}\sin\varphi,\\ \Delta\eta-n_2\xi&=\sum B'\tau^{p}\cos\varphi+\sum C'\tau^{p}\sin\varphi+\\ &\quad+\sum b'\tau^{m}\cos\varphi+\sum c'\tau^{m}\sin\varphi.\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

Здесь $\varphi$ обозначает $k_1w_1+k_2w_2$ и $p$ — наибольшее из значений показателя $m$. Коэффициенты $B$ и $C$ — суть суммы $\sum\mu^{\alpha}A\cos h$, $\sum\mu^{\alpha}A\sin h$, распространенные на члены с $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$, где показатель $\tau$ равен $p$; коэффициенты $b$ и $c$ суть аналогичные суммы, распространенные на члены, где показатель $\tau$ равен $m<p$. Подобную структуру имеют и коэффициенты $B'$, $C'$, $b'$, $c'$. Далее положим

$$\xi=\xi'+\xi'',\qquad \eta=\eta'+\eta'',$$

где

$$\xi' = \sum \frac{B'n_2 - C\nu}{\nu^2 - n_2^2} \tau^p \cos\varphi + \sum \frac{B\nu + C'n_2}{\nu^2 - n_2^2} \tau^p \sin\varphi,$$

$$\eta' = \sum \frac{-Bn_2 - C'\nu}{\nu^2 - n_2^2} \tau^p \cos\varphi + \sum \frac{B'\nu - Cn_2}{\nu^2 - n_2^2} \tau^p \sin\varphi$$

и

$$\nu = k_1 n_1 + k_2 n_2.$$

Тогда уравнения (35) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta\xi'' + n_2\eta'' &= -\frac{d\xi'}{d\tau} + \sum b\tau^m \cos\varphi + \sum c\tau^m \sin\varphi, \\ \Delta\eta'' - n_2\xi'' &= -\frac{d\eta'}{d\tau} + \sum b'\tau^m \cos\varphi + \sum c'\tau^m \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Уравнения (36) имеют такую же форму, что и уравнения (35), только наибольший показатель при $\tau$ равен $p-1$ вместо $p$. Продолжая последовательно этот процесс, мы полностью проинтегрируем уравнения (35).

Заметим также, что если правые части уравнений (35) разложимы по степеням $E\cos w_2$, $E\sin w_2$, то это же верно для $\xi'$, для $\eta'$ и, следовательно, для правых частей уравнений (36).

Таким образом, доказанным можно считать, что $\xi$ и $\eta$ разложимы в ряды такого же вида, если предыдущие формулы не теряют смысл в случае $\nu^2 = n_2^2$, т. е. когда $k_1 = 0$, $k_2 = \pm 1$. Именно по этой причине мы отделили члены, в которых $k_1 = 0$, $k_2 = \pm 1$, откуда $\varphi = \pm w_2$. Остается изучить влияние этих отброшенных членов.

Вернемся снова к уравнениям (35) и положим в правых частях $\varphi = w_2$. Можно также опустить в правых частях знак $\sum$, так как мы имеем теперь только члены одного сорта, а именно, с $w_2$.

Положим на этот раз

$$\xi = \xi' + \xi'' + \xi''', \qquad \eta = \eta' + \eta'' + \eta''',$$

где

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{B - C'}{4n_2} \tau^p \sin w_2 - \frac{B' + C}{4n_2} \tau^p \cos w_2, \\ \xi'' &= \frac{B + C'}{2p+2} \tau^{p+1} \cos w_2 + \frac{C - B'}{2p+2} \tau^{p+1} \sin w_2, \\ \eta' &= \frac{B - C'}{4n_2} \tau^p \cos w_2 + \frac{B' + C}{4n_2} \tau^p \sin w_2, \\ \eta'' &= \frac{B + C'}{2p+2} \tau^{p+1} \sin w_2 + \frac{B' - C}{2p+2} \tau^{p+1} \cos w_2. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Тогда наши уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned}\Delta\xi''' + n_2\eta''' &= -\frac{d\xi'}{d\tau} + \sum b\tau^m \cos w_2 + \sum c\tau^m \sin w_2,\\ \Delta\eta''' - n_2\xi''' &= -\frac{d\eta'}{d\tau} + \sum b'\tau^m \cos w_2 + \sum c'\tau^m \sin w_2,\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

и мы видим, что в правых частях показатель при $\tau$ не может превосходить $p-1$. Таким образом, мы осуществим последовательно полное интегрирование уравнений.

Заметим, что можно действовать подобным образом, если правые части уравнений (35) разложимы по степеням $E\cos w_2$, $E\sin w_2$. То же верно для $\xi'$, $\xi''$, $\eta'$, $\eta''$ и, следовательно, справедливо для правых частей уравнений (38).

Поэтому переменные $\xi$ и $\eta$, которые получаются таким методом, также представляются аналогичными разложениями.

В конце концов приходим к случаю $p=0$, в котором просто имеем

$$\xi = \xi' + \xi'', \qquad \eta = \eta' + \eta''.$$

Если в формулах (37) положить $p=0$, то получим коэффициенты при $\cos w_2$ и $\sin w_2$ в $\xi^*$ и $\eta^*$, где через $\xi^*$ и $\eta^*$ обозначены выражения для $\xi$ и $\eta$, полученные изложенным способом. Мы видим также, что средние значения величин $\xi^*\cos w_2 + \eta^*\sin w_2$ и $\xi^*\sin w_2 - \eta^*\cos w_2$ равны нулю.

Так как мы хотим, чтобы эти средние значения были равны $E$ и 0, а для этого нужно добавить к $\xi^*$ и $\eta^*$ соответственно $E\cos w_2$ и $E\sin w_2$, то от этого они не перестанут удовлетворять уравнениям (35) и также не перестанут быть разложимыми по степеням $E\cos w_2$ и $E\sin w_2$. Наоборот, если мы задаем начальные значения $\xi_0$, $\eta_0$ переменных $\xi$, $\eta$, то мы должны были бы добавить к $\xi^*$ и $\eta^*$ соответственно члены $G\cos w_2 + H\sin w_2$ и $G\sin w_2 - H\cos w_2$, где $\xi_0 - G$, $\eta_0 + H$ должны были бы быть значениями $\xi^*$ и $\eta^*$ при $\tau = w_1 = w_2 = 0$.

При этих условиях $G\cos w_2 + H\sin w_2$ и $G\sin w_2 - H\cos w_2$ не будут разлагаться по степеням $E\cos w_2$, $E\sin w_2$, и то же самое относится к величинам

$$\xi = \xi^* + G\cos w_2 + H\sin w_2,$$
$$\eta = \eta^* + G\sin w_2 - H\cos w_2.$$

**135.** Предыдущий анализ можно представить в другой форме. Положим

$$X = \xi + i\eta, \qquad Y = \xi - i\eta.$$

Функция $F$ будет разлагаться по степеням $X$ и $Y$, и наши уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\Delta L_1 = -\mu\frac{\partial F_1}{\partial\lambda_1}, \qquad \Delta\lambda_1 - \frac{M_1'}{L_1^3} + n_2 = \mu\frac{\partial F_1}{\partial L_1},\\ &\Delta X - in_2X = 2i\mu\frac{\partial F_1}{\partial Y}, \qquad \Delta Y + in_2Y = -2i\mu\frac{\partial F_1}{\partial X}, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

так как выражение

$$X\,dY + 2i\xi\,d\eta$$

есть точный дифференциал.

Последние два уравнения (39) могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \Delta(Xe^{-iw_2}) &= 2i\mu e^{-iw_2}\frac{\partial F_1}{\partial Y},\\ \Delta(Ye^{iw_2}) &= -2i\mu e^{iw_2}\frac{\partial F_1}{\partial X}. \end{aligned}\right\} \tag{39'}$$

Докажем, что $L_1$, $\lambda_1$, $X$, $Y$ могут быть разложены по степеням $E\cos w_2$, $E\sin w_2$, или, что то же, по степеням

$$Ee^{iw_2}, \qquad Ee^{-iw_2}.$$

Это верно в первом приближении. Далее допустим, что это верно в $(n-1)$-м приближении, и установим справедливость сказанного в $n$-м приближении.

Для этого заменим неизвестные в правых частях уравнений (39) и (39′) их значениями из $(n-1)$-го приближения. Тогда правые части уравнений (39) разлагаются по степеням $Ee^{\pm iw_2}$. Правые части уравнений (39′) равны аналогичным разложениям, умноженным на $e^{-iw_2}$ или на $e^{iw_2}$.

Мы утверждаем, что это свойство не исчезает в результате интегрирования. В самом деле, пусть имеем уравнение

$$\Delta u = v, \tag{40}$$

где $v$ — известная функция $\tau$, $E$ и $w$. Допустим, что $ve^{isw_2}$ разлагается по степеням $\tau$ и $Ee^{\pm iw_2}$. Более того, допустим, что эта функция будет периодической по $w_1$ и разлагается, кроме того, по синусам и косинусам кратных $w_1$, или, если угодно, по степеням $e^{\pm iw_1}$. Другими словами, допустим, что $v$ разлагается в ряд следующего вида:

$$v = \sum AE^q\tau^m e^{i(k_1w_1+k_2w_2)}, \tag{41}$$

где $A$ не зависит от $E$, $\tau$, $w_1$, $w_2$ и где $q$, $m$, $k_1$ и $k_2$ — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$q \equiv k_2 + s \pmod 2, \qquad q \geqslant |k_2 + s|. \tag{42}$$

Такую же форму имеют правые части уравнений (39) и (39′), но для уравнений (39) нужно положить $s$ равным нулю, а для (39′) нужно положить $s$ равным $\pm 1$. Кроме того, правые части зависят еще от $\mu$ и $L_1^1$ и могут быть разложены по степеням $\mu$, но это нас не беспокоит.

Уравнение (40) дает также для неизвестной $u$ разложение вида (41) с тем же значением $s$, лишь бы мы проводили интегрирование так, чтобы среднее значение $u$ было равно нулю или имело вид разложения (41) (среднее значение $u$ не зависит от $\tau$ и $w$ и может быть разложено по степеням $E$, показатели которой имеют такую же четность, что и $s$, но не меньше $s$).

Действительно, возвращаясь к § 98 и 114, мы видим, что каждый член разложения вида (41) для $v$ дает $m+1$ член в выражении для $u$; эти члены будут иметь вид

$$BE^q\tau^p e^{i(k_1w_1+k_2w_2)},$$

где $B$ — постоянная и где целые числа $q$, $k_1$, $k_2$ имеют те же значения, как и в члене разложения для $v$; отсюда следует, что они удовлетворяют условиям (42). Наконец, $p$ принимает значения $0, 1, 2, \ldots, m$, если $k_1$ и $k_2$ не равны нулю, и значение $m+1$, если $k_1$ и $k_2$ равны нулю.

Таким образом, разложение для $u$ имеет действительно форму (41).

Теперь, рассматривая сначала первое уравнение (39), мы видим, что $L_1$ разлагается по степеням $Ee^{\pm iw_2}$; в силу второго уравнения (39) получаем, что $\Delta\lambda_1$ также разлагается по степеням $Ee^{\pm iw_2}$ и, следовательно, то же самое имеет место и для $\lambda_1$.

Первое уравнение (39′) показывает нам, что $Xe^{-iw_2}$ разлагается в ряд вида (41), в котором $s$ равно 1, и поэтому $X$ также может быть разложена по степеням $Ee^{\pm iw_2}$. Второе уравнение (39′) показывает, что то же верно и для $Y$.

Таким образом, сформулированная теорема доказана.

**136.** Из двух предыдущих параграфов следует, что в случае ограниченной задачи разложения (27) для неизвестных могут быть представлены в некоторой частной форме. Рассуждая, как в § 69, мы увидим, что каждая из четырех величин

$$L-L_1', \qquad \lambda_1-w_1, \qquad \xi-E\cos w_2, \qquad \eta-E\sin w_2 \tag{43}$$

имеет вид

$$\sum \mu^\alpha A\tau^m E^q \cos(k_1w_1+k_2w_2+h),$$

т. е., обращаясь в нуль при $\mu=0$, может быть разложена по степеням $\mu$, $E$, $\tau$ и по синусам и косинусам кратных $w$, причем $A$ и $h$

будут зависеть только от $L_1^1$, а целое $q$ будет удовлетворять условиям

$$q \equiv k_2 \pmod{2}, \qquad q \geqslant |k_2|. \tag{44}$$

Рассуждая, как в § 71, 86 и 111, мы увидим, что эти разложения не должны менять знак, если $\tau$ и $w_i$ заменить на $-\tau$ и $-w_i$. Отсюда следует, что $h$ должно быть равно 0 или $-\frac{\pi}{2}$.

Оно равно нулю, когда $m$ четно, и $-\frac{\pi}{2}$, когда $m$ нечетно в разложениях для

$$L - L_1^1, \quad \xi - E\cos w_2,$$

и равно нулю, когда $m$ нечетно, и $-\frac{\pi}{2}$, когда $m$ четно в разложениях для

$$\lambda_1 - w_1, \qquad \eta - E\sin w_2.$$

Мы удовлетворим уравнениям движения, полагая в разложениях (43)

$$\tau = 0, \qquad w_i = n_i' t.$$

Из всего этого можно сделать вывод, что величины, которые в § 129 мы обозначили через $W_i$ и $n_i'$, разлагаются не только по степеням $\mu$, но и по степеням $E\cos w_2$, $E\sin w_2$, и так как эти величины являются постоянными, не зависящими от $w_2$, то они разлагаются по степеням $\mu$ и $E^2$.

**137. Периодическое решение.** Полагая в уравнениях (43)

$$\tau = 0, \qquad w_i = n_i' t + \bar{\omega}_i,$$

мы будем иметь решение уравнений движения (в которые не входят вековые члены), зависящее от четырех произвольных постоянных

$$L_1^1, \quad E, \quad \bar{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_2.$$

Дадим произвольной постоянной $E$ значение, равное нулю. Тогда в разложениях (43) исчезнут все члены, кроме тех, в которых $q = 0$ и $k_2 = 0$. Эти члены, следовательно, не будут зависеть от $w_2$. Таким образом, в этом частном решении неизвестные $L_1$, $\xi$, $\eta$, $\lambda_1 - w_1$ зависят только от $w_1$. Более того, они являются периодическими функциями $w_1$ и, следовательно, времени.

Взаимные расстояния между тремя телами поэтому являются периодическими функциями времени. Это периодическое решение играет весьма большую роль. Оно изучено очень подробно в главе III первого тома «Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» под названием *«периодическое решение первого сорта»*.

Мы видим, что определенное таким образом периодическое решение зависит от двух произвольных постоянных. Действительно, мы положили $E = 0$, так что наши неизвестные не зависят более от $w_2$ и, следовательно, от $\bar{\omega}_2$. Остаются, таким образом, две постоянные $L_1^1$, $\bar{\omega}_1$.

Переменные $L_1$ и $\xi$ разлагаются по косинусам кратных $w_1$, а переменные $\omega_1$и $\eta$ разлагаются по синусам кратных $w_1$. Из этого следует, что когда $w_1$ кратно $2\pi$, мы имеем *симметричное соединение*, т. е. все три тела находятся на одной прямой (малая планета находится между Солнцем и Юпитером) и их скорости перпендикулярны к этой прямой. Наоборот, когда $w_1$ равно нечетной кратности $\pi$, мы имеем *симметричную оппозицию*, т. е. все три тела находятся на одной прямой (Солнце находится между малой планетой и Юпитером) и их скорости перпендикулярны к этой прямой.

Симметричные соединения и оппозиции следуют друг за другом периодически.

Если мы возьмем за начальный момент тот момент, когда тела находятся в симметричном соединении, то будем иметь $\bar{\omega}_1 = 0$, и остается единственная постоянная $L_1^1$. Так как среднее движение зависит от этой постоянной, то мы видим, что среднее движение может принимать все возможные значения и каждому значению среднего движения соответствует периодическая траектория этого сорта.

В действительности $E$ не равно нулю, но является весьма малой величиной, так что малая планета будет мало отклоняться от периодической траектории.

**138. Замечание.** Вернемся к разложениям (25). В § 132 мы видели, что для получения разложений (21) нужно положить или $\tau = t$, $w_i = n_i t$, или $\tau = 0$, $w_i = n_i' t$, и затем разложить по степеням $\mu$, т. е. по степеням $n_i' - n_i$.

Значит, если взять разложения (25), положить в них $\tau = 0$, заменить $w_i$ через $w_i + (n_i' - n_i)\, t$ и затем разложить по степеням $\tau$, то мы получим снова разложения (25), из которых исходили.

Мы видели, что уравнения движения удовлетворяются, если положить в разложениях (25)

$$\tau = 0, \quad w_i = n_i' t + \bar{\omega}_i.$$

Из замечания, которое мы сделали, следует, что уравнения движения удовлетворяются также, если положить

$$\tau = f(t), \quad w_i = n_i' t + \bar{\omega}_i + (n_i - n_i')\, f(t),$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени.

Если, в частности, мы положим $f(t) = f + c$, то уравнения движения удовлетворяются, если положить

$$\tau = t + c, \quad w_i = n_i t + \bar{\omega}_i + (n_i - n_i') c.$$

Таким образом, постоянная, которую мы обозначили через $\varepsilon_i$, есть не что иное, как

$$\bar{\omega}_i + (n_i - n_i') c.$$

Вместо разложений (25) рассмотрим разложения (28), содержащие постоянные $L_i^1$, $\lambda_i^1$, которые являются средними значениями неизвестных. Эти разложения характеризуются тем, что в них $w_i$ и $\lambda_i^1$ входят только в комбинации $w_i + \lambda_i^1$. Следовательно, будем иметь

$$L_i \quad \text{или} \quad \lambda_i = f(L_i^1,\ w_i + \lambda_i^1,\ \tau).$$

Согласно замечанию, которое было сделано, мы найдем снова те же разложения, заменяя $\tau$ нулем и $w_i$ величиной

$$w_i + (n_i' - n_i)\tau.$$

Поэтому будем иметь

$$L_i \quad \text{или} \quad \lambda_i = f[L_i^1,\ w_i + \lambda_i^1 + (n_i' - n_i)\tau].$$

Если $\tau$ заменить нулем и $w_i$ заменить выражением $n_i' t + \bar{\omega}_i$, то будем иметь

$$L_i \quad \text{или} \quad \lambda_i = f(L_i^1,\ n_i' t + \bar{\omega}_i + \lambda_i^1).$$

Если же заменить $\tau$ величиной $t + c$ и $w_i$ заменить величиной $n_i t + \varepsilon_i$, то будем иметь

$$L_i = \lambda_i = f[L_i^1,\ n_i' t + \lambda_i^1 + \varepsilon_i + (n_i' - n_i) c].$$

Каждая из этих формул содержит, как и нужно, $2n$ существенно различных произвольных постоянных, а именно, $L_i^1$ и $\bar{\omega}_i + \lambda_i^1$ в первом выражении и $L_i^1$, $\lambda_i^1 + \varepsilon_i + (n_i' - n_i) c$ — во втором.

ГЛАВА VIII

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

139. Вернемся к общему случаю задачи трех тел. В § 104 мы показали, что общий член разложения неизвестных имеет вид

$$\mu^{\alpha} A \mathfrak{M}_0 t^m \cos(\nu t + h)$$

и классифицировали члены по р а н г у, т. е. по значению числа $\alpha - m$.

В § 106 были доказаны три теоремы о ранге:

1) в разложениях для переменных нет членов отрицательного ранга;

2) нет смешанных вековых членов нулевого ранга;

3 в разложении $\delta L_i$ нет членов нулевого ранга.

Проблема, которой мы будем теперь заниматься, заключается в исследовании вековых возмущений планет, т. е. в и с с л е д о в а н и и   ч л е н о в   н у л е в о г о   р а н г а.

Важность этой задачи совершенно очевидна, так как именно от членов нулевого ранга зависит конфигурация солнечной системы в отдаленном будущем.

Чтобы вычислить эти члены нулевого ранга, вернемся к уравнениям (9) из § 106, которые напишем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}\,dt, \quad \delta\xi_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}\,dt, \\ &\delta\eta_i = \mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}\,dt, \\ &\delta\lambda_i = -\mu \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_k}\,dt + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i}\,dt + \mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial L_i}\,dt. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Мы знаем, что в $\delta L_i$ нет членов нулевого ранга. Сначала займемся нахождением членов нулевого ранга в разложениях $\delta\xi_i$ и $\delta\eta_i$.

Для этого возьмем второе и третье уравнения (1) и в обеих частях этих уравнений сохраним только члены нулевого ранга (действительно, обе части уравнений тождественно равны, поэтому члены нулевого ранга в левой части равны членам нулевого ранга в правой части).

Производные функции $F_1$ имеют вид

$$\sum B\mathfrak{M}', \tag{2}$$

где $B$ с точностью до постоянного множителя есть одна из производных функции $F_1$, в которой переменные $L_i$, $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ заменены их значениями из первого приближения $L_i^0$, $n_i t+\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$. Что касается $\mathfrak{M}'$, то это одночлен, целый относительно $\delta L_i$, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_i$ $\delta\eta_i$.

В § 106 мы видели, что члены нулевого ранга в $\delta\xi_i$ и $\delta\eta_i$ могут происходить только из членов нулевого ранга в разложениях $-\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$ и $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}$. Действительно, в результате умножения на $\mu$ ранг увеличивается на единицу, а потом, в результате интегрирования, ранг уменьшается на единицу.

Мы получим один из членов в разложениях $-\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$ или $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}$, беря в разложении (2) один член вида $B\mathfrak{M}'$. Этот член является произведением нескольких множителей, а именно, $B$ и различных множителей $\delta L_i$, ... в $\mathfrak{M}'$. Нужно взять по одному члену в каждом из этих множителей и составить их произведение. Именно так мы получим различные члены в разложении $B\mathfrak{M}'$.

Возьмем по одному члену в каждом из множителей. Членов отрицательного ранга не существует, поэтому ранг произведения может равняться нулю только тогда, когда все множители имеют нулевой ранг. Все члены нулевого ранга в $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ являются чисто вековыми. Все члены нулевого ранга в разложении $\mathfrak{M}'$ являются поэтому чисто вековыми, так как они получаются перемножением нескольких чисто вековых членов.

Чтобы получить некоторый член разложения $B\mathfrak{M}'$, нужно каждый член разложения $\mathfrak{M}'$ умножить на некоторый член разложения $B$. Член разложения $B\mathfrak{M}'$ может дать член нулевого ранга в $\delta\xi$ или $\delta\eta$, только если он сам имеет ранг, равный нулю, и является чисто вековым. Следовательно, он должен быть произведением члена из $\mathfrak{M}'$, который должен быть членом нулевого ранга и потому чисто вековым, на член из $B$, который тоже должен быть чисто вековым, чтобы произведение было чисто вековым. Разумеется, что члены в разложении $B$, которые мы называем *чисто вековыми*, постоянны и не содержат никакого множителя вида $t^m$. Мы их называем так просто потому, что они не содержат тригонометрических множителей.

Таким образом, мы пришли к розыску чисто вековых членов в $B$. Пусть

$$F_1=\sum A\cos(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+h),$$

где $A$ и $h$ зависят от $L$, $\xi$, $\eta$.

Чтобы получить $B$, нужно взять какую-либо частную производную функции $F_1$, умножить ее на некоторый числовой множитель и, далее, заменить $\lambda_i$ на $n_i t + \lambda_i^0$, а другие переменные — постоянными.

Рассмотрим какой-нибудь член $F_1$. Если $k_1$ и $k_2$ не равны одновременно нулю, во всех производных $F_1$ соответствующий член имеет множителем косинус или синус аргумента $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h$, и когда $\lambda_i$ заменена на $n_i t + \lambda_i^0$, то он будет иметь множителем косинус или синус аргумента $\nu t + k_1\lambda_1^0 + k_2\lambda_2^0 + h$, и так как $\nu \neq 0$, то он не будет чисто вековым.

Чтобы получить чисто вековые члены в разложении $B$, нужно взять в $F_1$ только члены, не зависящие от $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Обозначим совокупность этих членов через $R$ и назовем ее *вековой частью возмущающей функции.*

Пусть $B_0$ есть совокупность чисто вековых членов в $B$. Ясно, что $B_0$ получается из производных функции $R$, так же как и $B$ получается из $F_1$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_0'$ то, во что обращается $\mathfrak{M}'$, когда $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ заменены их чисто вековыми членами нулевого ранга. Тогда совокупность членов нулевого ранга в

$$\sum B\mathfrak{M}'$$

будет равна

$$\sum B_0\mathfrak{M}_0'.$$

Как мы составили сумму $\sum B\mathfrak{M}'$? Мы взяли одно из двух выражений $-\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$, $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}$, заменили в нем $L_i$, $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ на $L_i^0 + \delta L_i$, $\lambda_i^0 + n_i t + \delta\lambda_i$, $\xi_i^0 + \delta\xi_i$, $\eta_i^0 + \delta\eta_i$ и затем разложили по степеням $\delta L_i$, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$.

Пусть

$$DL_i, \quad D\lambda_i, \quad D\xi_i, \quad D\eta_i$$

означают совокупности членов нулевого ранга в

$$\delta L_i, \quad \delta\lambda_i, \quad \delta\xi_i, \quad \delta\eta_i.$$

$\sum B_0\mathfrak{M}_0'$ составляется из $R$, $DL_i$, $D\lambda_i$, $D\xi_i$, $D\eta_i$ так же, как и $\sum B\mathfrak{M}'$ из $F_1$, $\delta L_i$, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$. Следовательно, чтобы получить $\sum B_0\mathfrak{M}_0'$, нужно взять одно из двух выражений $-\frac{\partial R}{\partial \eta_i}$, $\frac{\partial R}{\partial \xi_i}$, заменить в нем $L_i$, $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ выражениями $L_i^0 + DL_i$, $\lambda_i^0 + n_i t + D\lambda_i$, $\xi_i^0 + D\xi_i$, $\eta_i^0 + D\eta_i$ и затем разложить по степеням $DL_i$, $D\lambda_i$, $D\xi_i$, $D\eta_i$.

Возьмем второе уравнение из (1)

$$\delta\xi_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}\,dt.$$

Мы имеем

$$-\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i} = \sum B\mathfrak{M}',$$

откуда

$$\delta\xi_i = \mu \int_0^t \sum B\mathfrak{M}'\,dt.$$

Приравнивая в обеих частях члены нулевого ранга, будем иметь

$$D\xi_i = \mu \int_0^t \sum B_0\mathfrak{M}_0'\,dt.$$

Но

$$\sum B_0\mathfrak{M}_0' = -\frac{\partial R}{\partial \eta_i}.$$

Следовательно,

$$D\xi_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \eta_i}\,dt.$$

Если сохраним в $\xi_i$ только члены нулевого ранга, т. е. $\xi_i^0 + D\xi_i$, то будем иметь

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d\,(D\xi_i)}{dt}$$

и поэтому

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu\,\frac{\partial R}{\partial \eta_i} \tag{3}$$

и точно так же

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \mu\,\frac{\partial R}{\partial \xi_i}. \tag{4}$$

В обеих частях уравнений (3) и (4) нужно заменить

$$L_i,\ \lambda_i,\ \xi_i,\ \eta_i$$

на

$$L_i^0 + DL_i,\quad \lambda_i^0 + n_i t + D\lambda_i,\quad \xi_i^0 + D\xi_i,\quad \eta_i^0 + D\eta_i.$$

Но $DL_i$ есть нуль, так как $L_i$ не содержит членов нулевого ранга. Более того, $R$ не зависит от $\lambda_i$ и то же самое можно сказать о частных производных $\frac{\partial R}{\partial \xi_i}$ и $\frac{\partial R}{\partial \eta_i}$. Следовательно, $\lambda_i$ не входят в уравнения (3) и (4).

Поэтому будет достаточно заменить $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ на $L_i^0$, $\xi_i^0 + D\xi_i$, $\eta_i^0 + D\eta_i$.

Таким образом, уравнения (3) и (4), в которых $L_i$ нужно рассматривать как постоянные, образуют систему канонических уравнений, определяющих члены нулевого ранга в $\xi_i$ и $\eta_i$, и следовательно, вековые возмущения эксцентриситетов и наклонностей.

**140.** Предыдущий анализ можно представить в несколько другой, хотя, в сущности, эквивалентной форме.

Рассмотрим общий член разложения (11) из § 108.

Он имеет вид

$$\mu^\alpha A\tau^m \cos(k_1w_1 + k_2w_2 + h),$$

и так как он не может иметь отрицательный ранг, то $m < \alpha$. Если, следовательно, положим $\mu\tau = \tau'$, то этот член напишется в виде

$$\mu^{\alpha-m} A\tau'^m \cos(k_1w_1 + k_2w_2 + h),$$

так что наши разложения будут располагаться по положительным степеням $\mu$ и $\tau'$ и по косинусам и синусам кратных $w$.

Эти разложения будут удовлетворять уравнениям движения и, в частности, уравнению

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial F_1}{\partial \eta_i},$$

когда положим в нем

$$\tau' = \mu(t + c), \qquad w_i = n_it + \varepsilon_i.$$

Но тогда имеем

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Delta\xi_i = \mu \frac{\partial \xi_i}{\partial \tau'} + n_1 \frac{\partial \xi_i}{\partial w_1} + n_2 \frac{\partial \xi_i}{\partial w_2},$$

и наше уравнение принимает вид

$$\Delta\xi_i = -\mu \frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}. \tag{5}$$

Обе части этого уравнения могут быть разложены по степеням $\mu$ и $\tau'$ и по косинусам кратных $w$.

Мы получим члены нулевого ранга в $\xi_i$ или в $-\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$, полагая в последнем $\mu = 0$ (предполагаем, разумеется, что когда полагаем $\mu = 0$, то $\tau'$ остается конечным). При этих условиях $\xi_i$ сводится к членам нулевого ранга и не будет зависеть от $w$, так как все члены нулевого ранга являются чисто вековыми, поэтому

$$\Delta\xi_i = \mu \frac{\partial \xi_i}{\partial \tau'}.$$

Аналогично положим $\mu=0$ в $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}$. Это сводится к замене в этих производных неизвестных $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\lambda_i$ на совокупность их членов нулевого ранга, т. е. на $L_i^0$, $\xi_i^0+D\xi_i$, $\eta_i^0+D\eta_i$, $\lambda_i^0+$ $+w_i+D\lambda_i$. Пусть, следовательно,

$$A \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (k_1\lambda_1+k_2\lambda_2)$$

— какой-нибудь член в $-\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$, где $A$ зависит от $\xi$, $\eta$, $L$.

Если в этом члене заменим $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\lambda_i$ на $L_i^0$, $\xi_i^0+D\xi_i$, $\eta_i^0+D\eta_i$, $\lambda_i^0+w_i+D\lambda_i$, то получим

$$A_0 \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (k_1w_1+k_2w_2+h),$$

где $A_0$ является значением $A$ после этой замены, тогда как

$$h=k_1\lambda_1^0+k_2\lambda_2^0+k_1D\lambda_1+k_2D\lambda_2.$$

Члены нулевого ранга являются чисто вековыми и, следовательно, не зависят от $w$. Из этого следует, что $A_0$ и $h$ не зависят от $w$. Таким образом, рассматриваемый член имеет аргументом $k_1w_1+k_2w_2$.

Но мы хотели сохранить лишь чисто вековые члены, т. е. члены, не зависящие от $w$. Это те члены, в которых $k_1=k_2=0$, т. е. те, которые происходят из члена в разложении $-\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$, не зависящего ни от $\lambda_1$, ни от $\lambda_2$. Но совокупность членов в $-\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$, не зависящих от $\lambda_1$ и $\lambda_2$, есть $-\frac{\partial R}{\partial \eta_i}$.

Следовательно, если приравняем в обеих частях уравнения (5) чисто вековые члены с рангом единица [мы говорим единица, а не нуль, так как член нулевого ранга в $-\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$ дает нам член с рангом единица в правой части уравнения (5) $-\mu\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$], то найдем

$$\mu\frac{d\xi_i}{d\tau'}=-\mu\frac{\partial R}{\partial \eta_i}, \tag{6}$$

где $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ нужно заменить на $L_i^0$, $\xi_i^0+D\xi_i$, $\eta_i^0+D\eta_i$, т. е. заменить $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ их членами нулевого ранга.

Аналогично находим

$$\mu\frac{d\eta_i}{d\tau'}=\mu\frac{\partial R}{\partial \xi_i}. \tag{6'}$$

Так как, кроме того, при замене $\xi$ и $\eta$ их членами нулевого ранга мы имеем

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\Delta\xi_i=\mu\frac{d\xi_i}{d\tau'},$$

то можем написать

$$\frac{d\xi_i}{dt}=-\mu\frac{\partial R}{\partial\eta_i},\quad \frac{d\eta_i}{dt}=\mu\frac{\partial R}{\partial\xi_i}. \tag{7}$$

*Таким образом, канонические уравнения* (7) *будут давать нам члены нулевого ранга в разложениях* $\xi_i$ *и* $\eta_i$.

**141.** Посмотрим, как можно использовать последнее уравнение из (1),

$$\delta\lambda_i=-\mu\sum C_{ik}\int_0^t dt\int_0^t\frac{\partial F_1}{\partial\lambda_k}dt+\int_0^t\frac{\partial\Phi}{\partial L_i}dt+\mu\int_0^t\frac{\partial F_1}{\partial L_i}dt,$$

для вычисления членов нулевого ранга в $\delta\lambda_i$, которые мы обозначили через $D\lambda_i$.

В § 106 мы видели, что интеграл

$$\int\frac{\partial\Phi}{\partial L_i}dt$$

может давать только члены ранга не меньше единицы. Что касается первого интеграла

$$\mu\int dt\int\frac{\partial F_1}{\partial\lambda_k}dt,$$

то члены нулевого ранга, которые он может дать, могли бы происходить только из чисто вековых членов ранга единица в выражении

$$dL_k=-\mu\int\frac{\partial F_1}{\partial\lambda_k}dt.$$

Но Пуассон доказал, что такие члены не существуют.

Таким образом, нам остается рассматривать только третий интеграл, но мы можем установить это только после доказательства теоремы Пуассона, что будет сделано ниже.

Что касается третьего интеграла, то мы убеждаемся, как и в предыдущем параграфе, что члены нулевого ранга, которые он может дать, заключены в формуле

$$\mu\int_0^t\frac{\partial R}{\partial L_i}dt,$$

так что имеем

$$D\lambda_i = \mu \int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_i} dt. \tag{8}$$

В правой части $\frac{\partial R}{\partial L_i}$ зависит от $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ и н е з а в и с и т от $\lambda_i$; разумеется, нужно в ней заменить $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ на $L_i^0$, $\xi_i^0 + D\xi_i$, $\eta_i^0 + D\eta_i$.

Следовательно, когда из уравнений (7) определены члены нулевого ранга в $\xi$ и $\eta$, т. е. вековые возмущения эксцентриситетов и наклонностей, то простой квадратурой определим члены нулевого ранга в $\lambda$, т. е. вековые возмущения средних долгот.

**142. Вид функции *R*.** Зная из главы IV форму $F_1$, мы можем из нее вывести $R$, так как $R$ получается из $F_1$, если отбросить в последней члены, зависящие от $\lambda$.

В § 83 и 86 мы видели, что

$$\mu F_1 = \sum A \varrho_1^{q_1} \varrho_2^{q_2} \varrho_3^{q_3} \varrho_4^{q_4} \cos\left(\sum k_i \lambda_i + \sum p_i \omega_i\right),$$

где $A$ зависит только от $L_i$. Мы видели, что целые числа $2q$ и $p$ удовлетворяют условиям

$$2q_i \equiv p_i \pmod 2, \quad 2q_i \geqslant |p_i|.$$

В § 87 мы видели, что

$$\sum k = \sum p$$

и, наконец, в § 88, что сумма $p_2 + p_4$ всегда четна.

Посмотрим, каковы следствия из всего этого. Мы видим, что $F_1$ разложима по степеням

$$\xi_i = \sqrt{2\varrho_i} \cos \omega_i, \quad \eta_i = \sqrt{2\varrho_i} \sin \omega_i.$$

Это также имеет место для $R$ и степень какого-либо члена по отношению к $\xi$ и $\eta$ в точности равна

$$2 \sum q.$$

В $R$ все $k$ равны нулю, и мы имеем

$$\sum k = 0,$$

а следовательно,

$$\sum p = 0,$$

и так как $2q$ — такой же четности, как и $p$, то

$$2 \sum q \equiv 0 \pmod 2.$$

*Таким образом, разложение функции $R$ по степеням $\xi$ и $\eta$ содержит члены только четной степени.*

Из условия $\Sigma p = 0$ мы видим, что $R$ не изменится при замене $\xi_i$ и $\eta_i$ на

$$\xi_i \cos\varepsilon - \eta_i \sin\varepsilon, \quad \xi_i \sin\varepsilon + \eta_i \cos\varepsilon,$$

и мы имеем

$$p_2 + p_4 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Другими словами, сумма целых $p$, относящихся ко всем облическим переменным (т. е. переменным, определяющим наклонности), всегда четна.

И так как имеем

$$\sum p = 0,$$

то будем иметь также

$$p_1 + p_3 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, 2),$$

т. е. сумма целых $p$, относящихся ко всем эксцентрическим переменным (т. е. переменным, определяющим эксцентриситеты), тоже четна.

Так как $2q$ имеет ту же четность, что и $p$, то заключаем, что $2q_2 + 2q_4$ и $2q_1 + 2q_3$ также четные числа.

*Таким образом, разложение функции $R$ по степеням $\xi$ и $\eta$ содержит только члены четной степени как относительно облических переменных, так и относительно эксцентрических переменных.*

Все эти свойства немедленно обобщаются и на случай задачи более трех тел.

**143.** В первом приближении мы можем, следуя Лагранжу, пренебречь четвертыми степенями эксцентриситетов и наклонностей. В этом случае уравнения (7) принимают особенно простой вид.

Пусть, в самом деле,

$$R = R_0 + R_2 + R_4 + \ldots$$

есть разложение $R$, где через $R_p$ обозначена совокупность членов степени $p$ относительно $\xi$ и $\eta$. Пренебрегая четвертыми степенями $\xi$ и $\eta$, имеем

$$R = R_0 + R_2,$$

и так как $R_0$ не зависит от $\xi$ и $\eta$, то уравнения (7) приведутся к виду

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial R_2}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial R_2}{\partial \xi_i}. \qquad (7')$$

Так как $R_2$ есть функция второй степени относительно $\xi$ и $\eta$, то правые части уравнений (7′) будут линейными относительно $\xi$ и $\eta$ и коэффициенты этих линейных выражений зависят только от постоянных $L_i^0$.

Таким образом, уравнения (7′) являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Мы также знаем, что все члены в разложении функции $R$ имеют четную степень как относительно облических переменных, так и относительно эксцентрических. Поэтому в $R_2$ будем иметь члены второй степени относительно одних переменных и нулевой степени относительно других, и наоборот, но в $R_2$ нет членов первой степени относительно одних переменных и первой степени относительно других.

Следовательно, будем иметь

$$R_2 = R_2' + R_2'',$$

где $R_2'$ зависит только от эксцентрических переменных, а $R_2''$ — только от облических переменных. В силу этого система (7′) распадается на две системы:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial R_2'}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial R_2'}{\partial \xi_i}, \tag{7''}$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial R_2''}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial R_2''}{\partial \xi_i}. \tag{7'''}$$

Уравнения (7″), в которые входят только эксцентрические переменные, определят вековые возмущения эксцентриситетов. В уравнения (7‴) входят только облические переменные, поэтому они будут определять вековые возмущения наклонностей.

С другой стороны, $F_1$ не изменяется при изменении знаков переменных $\lambda$ и $\omega$, т. е. знаков $\lambda$ и $\eta$ (см. § 86). Следовательно, $R$ и $R_2$ не изменятся при изменении знака $\eta$. Отсюда следует, что $R_2$ содержит или только члены второй степени относительно $\xi$ и нулевой степени относительно $\eta$, или наоборот, но не содержит членов первой степени относительно $\xi$ и членов первой степени относительно $\eta$. То же самое относится к $R_2'$ и $R_2''$. Поэтому будем иметь

$$R_2' = S_2' + T_2',$$
$$R_2'' = S_2'' + T_2'',$$

где $S_2'$ и $S_2''$ зависят только от $\xi$, тогда как $T_2'$ и $T_2''$ зависят только от $\eta$.

Далее, мы видели, что $R$ не изменится, если $\xi$ и $\eta$ заменить на $\xi \cos \varepsilon - \eta \sin \varepsilon$ и $\xi \sin \varepsilon + \eta \cos \varepsilon$. То же самое можно сказать и о функциях $R'_2$ и $R''_2$. Но при этих условиях $R'_2$ будет равна

$$S'_2(\xi\cos\varepsilon-\eta\sin\varepsilon)+T'_2(\xi\sin\varepsilon+\eta\cos\varepsilon)$$

или

$$\cos^2\varepsilon S'_2(\xi)-2\cos\varepsilon\sin\varepsilon\sum\eta\frac{\partial S'_2}{\partial\xi}+\cos^2\varepsilon S'_2(\eta)+$$
$$+\sin^2\varepsilon T'_2(\xi)+2\cos\varepsilon\sin\varepsilon\sum\xi\frac{\partial T'_2}{\partial\eta}+\cos^2\varepsilon T'_2(\eta).$$

Для того чтобы это выражение при любых $\varepsilon$ было равно

$$S'_2(\xi)+T'_2(\eta),$$

необходимо, чтобы мы имели

$$\left.\begin{aligned}S'_2(\xi)&=T'_2(\xi),\\ \sum\eta\frac{\partial S'_2}{\partial\xi}&=\sum\xi\frac{\partial T'_2}{\partial\eta},\\ S'_2(\eta)&=T'_2(\eta),\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

откуда следует, что $S'_2$ составлена из $\xi$, также как $T'_2$ составлено из $\eta$. То же верно и для функций $S''_2$ и $T''_2$.

Таким образом, уравнения для эксцентрических переменных будут иметь вид

$$\frac{d\xi_i}{dt}=-\mu\frac{\partial T'_2}{\partial\eta_i},\qquad\frac{d\eta_i}{dt}=\mu\frac{\partial S'_2}{\partial\xi_i}\tag{10}$$

и для облических переменных будут иметь вид

$$\frac{d\xi_i}{dt}=-\mu\frac{\partial T''_2}{\partial\eta_i},\qquad\frac{d\eta_i}{dt}=\mu\frac{\partial S''_2}{\partial\xi_i}.\tag{10'}$$

**144. Различные интегралы.** Уравнения (10) или (10′) допускают некоторое количество важных интегралов. Прежде всего, система (10) или (7″) допускает интеграл живых сил

$$R'_2=\text{const}.\tag{11}$$

Система (10′) или (7‴) тоже допускает интеграл живых сил

$$R''_2=\text{const}.\tag{11'}$$

Возьмем теперь уравнения (10). Умножим первое из них на $\xi_i$, второе — на $\eta_i$ и сложим, что дает

$$\sum\xi_i\frac{d\xi_i}{dt}+\sum\eta_i\frac{d\eta_i}{dt}=\mu\left(\sum\eta_i\frac{\partial S'_2}{\partial\xi_i}-\sum\xi_i\frac{\partial T'_2}{\partial\eta_i}\right).$$

Но в силу уравнений (9) правая часть равна нулю, а поэтому мы будем иметь

$$\sum (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \text{const}. \tag{12}$$

Суммирование распространяется на все эксцентрические переменные. Поступая так же с уравнениями (10), мы найдем

$$\sum (\xi_i^2 + \eta_i^2) = \text{const}, \tag{12'}$$

где суммирование распространяется на этот раз на все облические переменные.

Интегралы (12) и (12′) есть не что иное, как интегралы площадей. В самом деле, в § 90 мы видели, что эти интегралы имеют вид

$$-\eta_2 \sqrt{L_1 - \varrho_1 - \frac{\varrho_2}{2}} - \eta_4 \sqrt{L_2 - \varrho_3 - \frac{\varrho_4}{2}} = \text{const},$$

$$-\xi_2 \sqrt{L_1 - \varrho_1 - \frac{\varrho_2}{2}} - \xi_4 \sqrt{L_2 - \varrho_3 - \frac{\varrho_4}{2}} = \text{const},$$

$$\sum L - \sum \varrho = \text{const}.$$

Если имеется более двух планет, то можно написать более общим образом

$$\left.\begin{aligned} -\sum \eta_2 \sqrt{L_1 - \varrho_2 - \frac{\varrho_2}{2}} &= \text{const}, \\ -\sum \xi_2 \sqrt{L_1 - \varrho_1 - \frac{\varrho_2}{2}} &= \text{const}, \\ \sum (L_1 - \varrho_1 - \varrho_2) &= \text{const}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где знак суммы $\sum$ означает, что написанный в явном виде член $-\eta_2 \sqrt{L_1 - \varrho_1 - \frac{\varrho_2}{2}}$ относится к первой планете и к нему следует добавить аналогичные слагаемые, относящиеся к другим планетам.

Третье уравнение (13) можно написать в виде

$$\sum L - \frac{1}{2} \sum (\xi^2 + \eta^2) = \text{const}, \tag{14}$$

где суммирование распространяется на этот раз на все переменные $\xi$ и $\eta$, как эксцентрические, так и облические. Это уравнение должно будет выполняться тождественно при замене неизвестных $L$, $\xi$, $\eta$ их разложениями по степеням $\mu, \tau$ и по косинусам и синусам кратных $w$; или еще, полагая, как и в § 140, $\mu\tau = \tau'$, мы заменим неизвестные их разложениями по степеням $\mu$ и $\tau'$ и по синусам и косинусам кратных $w$.

Левая часть тогда представляет собой некоторую функцию от $\mu$, $\tau'$, $w$, и эта функция должна быть тождественно равна постоянной. Она будет также равна постоянной, если положить $\mu = 0$.

Но если положить $\mu = 0$, оставляя $\tau'$ конечным, то неизвестные $L$, $\xi$, $\eta$ приводятся к их членам нулевого ранга, откуда следует, что уравнение (14) удовлетворится и в том случае, когда неизвестные заменены их членами нулевого ранга.

Но при этих условиях $L_i$ приводится к $L_i^0$, так как $\delta L_i$ не содержат членов нулевого ранга. Итак, $\Sigma L$ есть величина постоянная, а поэтому будем иметь

$$\sum (\xi^2 + \eta^2) = \text{const},$$

где $\xi$ и $\eta$ предполагаются замененными их членами нулевого ранга.

Это равенство получается сложением равенств (12) и (12').

**145. Замечание.** Нужно заметить, что мы сделали неявно одно предположение, на которое необходимо обратить внимание, так как оно могло бы остаться незамеченным, а именно, что все планеты вращаются в одном направлении. Вот как оно было введено.

Мы положили

$$G = L\sqrt{1-e^2}, \qquad \Theta = G\cos i.$$

Если, следовательно, $L$ положительно, то $G$ меньше $L$ и тоже положительно. Далее, $\Theta$ также положительна и меньше $L$. Из этого следует, что

$$\varrho_1 = L - G, \qquad \varrho_2 = G - \Theta$$

положительны и что $\xi$ и $\eta$ вещественны.

Если, наоборот, $L$ отрицательно, то таким же будет и $G$, а следовательно, и

$$\varrho_1 = L\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right), \qquad \varrho_2 = G\,(1 - \cos i).$$

Поэтому $\xi$ и $\eta$ оказываются мнимыми.

Таким образом, если мы хотим, чтобы $\xi$ и $\eta$ были вещественными, нужно, чтобы $L$ были положительными. Но среднее движение планеты равно некоторому положительному множителю (зависящему от масс), разделенному на $L^3$. Допустить, что $L$ являются положительными, это все равно, что допустить, что все средние движения положительны, т. е. что все планеты вращаются в одном направлении.

Предположение, что $L$ положительны, не ограничивает общность. Действительно, планета, которая движется в обратном направлении по орбите с наклонностью $i$, может рассматриваться как движущаяся в прямом направлении по орбите с наклонностью $\pi - i$. Следовательно, можно допустить, что все планеты движутся в одном направлении.

Но в предыдущем анализе мы предположили, что наклонности весьма малы. Следовательно, предыдущие рассуждения не проходят, если планеты движутся по орбитам с малыми наклонностями, но не в одном направлении. Действительно, их нужно будет рассматривать как планеты, движущиеся в одном направлении, причем наклонности одних планет будут весьма малы, а наклонности других — очень близки к 180°.

Если, тем не менее, мы хотим применить к этому случаю предыдущие аналитические формулы, то это возможно, но при условии, что некоторые из $\xi$ и $\eta$ будут мнимыми.

Впрочем, это не так существенно, так как такой случай в природе не встречается.

**146.** Теперь остается проинтегрировать линейные уравнения (10) или (10′). В задаче с $n$ планетами, т. е. в задаче $(n+1)$-го тела, мы имеем $2n$ эксцентрических переменных и $2n$ облических, так что каждая из этих систем будет порядка $2n$.

Известно, какова форма общего решения системы порядка $p$ линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Обозначим неизвестные через $x_1, x_2, \ldots, x_p$ и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ суть корни определяющего уравнения, которое легко составить.

Каждому корню $\alpha_i$ будет соответствовать одно частное решение системы вида

$$x_k = B_{ik} e^{\alpha_i t},$$

где $B_{ik}$ — постоянные, которые легко вычисляются. Общее решение будет иметь вид

$$x_k = A_1 B_{1k} e^{\alpha_1 t} + A_2 B_{2k} e^{\alpha_2 t} + \ldots + A_p B_{pk} e^{\alpha_p t},$$

$A$ — произвольные постоянные.

В том случае, когда уравнение, определяющее $\alpha$, имеет кратные корни, мы можем иметь еще так называемые *вырожденные* решения, которые имеют вид

$$x_k = P_{ik} e^{\alpha_i t},$$

где $P_{ik}$ суть целый многочлен относительно $t$.

Будем применять эти результаты либо к системе (10), либо к системе (10′). Сначала заметим, что уравнение, определяющее $\alpha$, не может иметь вещественных корней, отличных от нуля. Действительно, если бы оно имело вещественный корень $\alpha$, то система допускала бы решение вида

$$\xi_k = C_k e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = D_k e^{\alpha t},$$

где $C$ и $D$ — постоянные. Тогда мы имели бы

$$\sum (\xi_k^2 + \eta_k^2) = \sum (C_k^2 + D_k^2)\, e^{2\alpha t}.$$

Но левая часть этого равенства должна быть постоянной, а правая часть будет постоянной $\sum (C_k^2 + D_k^2)$, умноженной на переменный множитель $e^{2\alpha t}$. Это может быть только тогда, когда обе части равны нулю. Поэтому

$$\sum (\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

т. е.

$$\xi = \eta = 0.$$

Покажем теперь, что характеристическое уравнение может иметь только чисто мнимые корни, т. е. корни с нулевыми вещественными частями. В самом деле, пусть $\alpha = \beta + i\gamma$ — один из корней и предположим, что вещественная часть $\beta$ не есть нуль. В этом случае система должна допускать частное решение вида

$$\xi_k = (C_k + iC'_k)\, e^{(\beta+i\gamma)t},$$
$$\eta_k = (D_k + iD'_k)\, e^{(\beta+i\gamma)t}.$$

Это решение является мнимым, но сопряженное ему мнимое решение также удовлетворяет линейным уравнениям, а значит, решением будет также их полусумма, которая является действительной величиной,

$$\xi_k = C_k e^{\beta t} \cos \gamma t - C'_k e^{\beta t} \sin \gamma t,$$
$$\eta_k = D_k e^{\beta t} \cos \gamma t - D'_k e^{\beta t} \sin \gamma t,$$

откуда

$$\sum (\xi_k^2 + \eta_k^2) = \sum (C_k^2 + D_k^2)\, e^{2\beta t} \cos^2 \gamma t -$$
$$-2 \sum (C_k C'_k + D_k D'_k)\, e^{2\beta t} \sin \gamma t \cos \gamma t + \sum (C'^2_k + D'^2_k)\, e^{2\beta t} \sin^2 \gamma t.$$

Но если $\beta$ не есть нуль, то функции 1, $e^{2\beta t} \cos^2 \gamma t$, $e^{2\beta t} \sin^2 \gamma t$, $e^{2\beta t} \sin \gamma t \cos \gamma t$ не связаны никаким линейным соотношением с постоянными коэффициентами. Следовательно, предыдущее равенство, левая часть которого равна постоянной в силу уравнений (12) и (12′), может иметь место только в том случае, когда все члены равны нулю. Итак, будем иметь

$$\sum (\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

откуда

$$\xi = \eta = 0.$$

Теперь покажем, что наша система не может иметь вырожденных решений. Действительно, допустим, что имеется решение

$$\xi_k = P_k e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = Q_k e^{\alpha t}, \tag{15}$$

где $P_k$ и $Q_k$ — целые многочлены относительно $t$. Всегда можно предполагать, что $P_k$ и $Q_k$ являются многочленами первой степени, так как если система допускает решение (15), она будет допускать также решение

$$\xi_k = P'_k e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = Q'_k e^{\alpha t}, \tag{15'}$$

где $P'_k$ и $Q'_k$ — производные многочленов $P_k$ и $Q_k$.

Более того, $\alpha$ будет чисто мнимым, так как если мы имеем решение (15), где $P_k$ и $Q_k$, по предположению, многочлены первой степени, то будем иметь также решение (15′), где $P'_k$ и $Q'_k$ будут постоянными и к которому применимы предыдущие рассуждения, которые установили, что $\alpha$ должна быть чисто мнимой.

Пусть $\alpha = i\gamma$. Решение (15) будет мнимым и соответствующее сопряженное решение будет удовлетворять уравнениям так же, как и его действительная часть. Эта действительная часть будет состоять из членов с $t\cos\gamma t$, $t\sin\gamma t$, $\cos\gamma t$ и $\sin\gamma t$. Пусть

$$\xi_k = \xi'_k + \xi''_k,$$
$$\eta_k = \eta'_k + \eta''_k$$

— это действительная часть, где $\xi'_k$ и $\eta'_k$ представляют совокупность двух членов с $t\cos\gamma t$ и $t\sin\gamma t$, а $\xi''_k$ и $\eta''_k$ — совокупность двух членов с $\cos\gamma t$ и $\sin\gamma t$.

Тогда будем иметь

$$\sum (\xi_k^2 + \eta_k^2) = \sum (\xi_k'^2 + \eta_k'^2) + 2\sum (\xi'_k\xi''_k + \eta'_k\eta''_k) + \sum (\xi_k''^2 + \eta_k''^2).$$

Левая часть должна быть постоянной в силу уравнения (12). Но

$\sum (\xi_k'^2 + \eta_k'^2)$ линейна относительно $t^2\cos^2\gamma t$, $t^2\sin^2\gamma t$, $t^2\sin\gamma t\cos\gamma t$,

$\sum (\xi'_k\xi''_k + \eta'_k\eta''_k)$ линейна относительно $t\cos^2\gamma t$, $t\sin^2\gamma t$, $t\sin\gamma t\cos\gamma t$,

$\sum (\xi_k''^2 + \eta_k''^2)$ линейна относительно $\cos^2\gamma t$, $\sin^2\gamma t$, $\sin\gamma t\cos\gamma t$.

Между десятью функциями 1, $t^p\cos^2\gamma t$, $t^p\sin^2\gamma t$, $t^p\sin\gamma t\cos\gamma t$ ($p = 0, 1, 2$) не существует другого линейного соотношения с постоянными коэффициентами, кроме

$$\cos^2\gamma t + \sin^2\gamma t = 1.$$

Поэтому предыдущее равенство может иметь место только тогда, когда коэффициенты при членах с $t^2$ равны нулю, т. е. будем иметь

$$\sum (\xi_k'^2 + \eta_k'^2) = 0,$$

откуда

$$\xi'_k = \eta'_k = 0.$$

Из этого следует, что многочлены $P_k$ и $Q_k$ должны приводиться к постоянным, т. е. что не существует вырожденных решений.

147. Так как $S_2$ зависит от $\xi$ так же, как $T_2$ зависит от $\eta$, то наши уравнения не изменятся, если заменить $\xi$ на $-\eta$ и $\eta$ на $\xi$. Следовательно, если они допускают решение

$$\xi_k = C_k e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = D_k e^{\alpha t},$$

то они будут также допускать решение

$$\xi_k = -D_k e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = C_k e^{\alpha t}.$$

Более того, уравнения не изменятся при замене $\eta$ на $-\eta$ и $t$ на $-t$, так что они допускают также решения

$$\xi_k = C_k e^{-\alpha t}, \qquad \eta_k = -D_k e^{-\alpha t},$$
$$\xi_k = -D_k e^{-\alpha t}, \qquad \eta_k = -C_k e^{-\alpha t}.$$

Следовательно, они допускают, кроме того, решения

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= (C_k - iD_k)\, e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = i\,(C_k - iD_k)\, e^{\alpha t}, \\ \xi_k &= (C_k + iD_k)\, e^{\alpha t}, \qquad \eta_k = -i\,(C_k + iD_k)\, e^{\alpha t}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Таким образом, если $D_k = \pm\, iC_k$, то одно из двух решений (16) исчезает и корень $\alpha$ может быть простым.

Если, наоборот, $D_k$ не равен $\pm\, iC_k$, то оба решения (16) будут различными и корень $\alpha$ должен быть двойным. Но решения (16), оба выведенные из данного решения, обладают тем же свойством; поэтому в данном решении $\eta_k$ равно $\xi_k$ с точностью до множителя $\pm\, i$. Следовательно, без ограничения общности, мы можем положить

$$D_k = \pm\, iC_k.$$

Полагая тогда

$$\alpha = i\gamma,$$

имеем

$$\xi_k = C_k e^{+i\gamma t}, \qquad \eta_k = \mp\, iC_k e^{+i\gamma t}. \tag{17}$$

Из того, что было сказано выше, следует, что наши уравнения будут иметь также решение

$$\xi_k = C_k e^{-i\gamma t}, \qquad \eta_k = \mp\, iC_k e^{-i\gamma t}. \tag{17$'$}$$

Если $\gamma$ — простой корень, то других решений ни с $e^{i\gamma t}$, ни с $e^{-i\gamma t}$ мы не имеем, так что эти два решения должны быть мнимыми и сопряженными, откуда следует, что $C_k$ вещественно.

Если $\gamma$ — двойной или многократный корень, то рассуждение нужно немного изменить. Если наши уравнения допускают решение (17), они будут допускать также мнимое сопряженное решение

$$\xi_k = C_k^0 e^{-i\gamma t}, \qquad \eta_k = \mp iC_k^0 e^{-i\gamma t},$$

где $C_k^0$ — мнимая и сопряженная с $C_k$ величина. Следовательно, заменяя $t$ и $\eta$ на $-t$ и $-\eta$, имеем решение

$$\xi_k = C_k^0 e^{i\gamma t}, \qquad \eta_k = \pm iC_k^0 e^{i\gamma t}$$

и поэтому

$$\xi_k = (C_k + C_k^0)\, e^{i\gamma t}, \qquad \eta_k = \pm i\,(C_k + C_k^0)\, e^{i\gamma t},$$

где коэффициент $C_k + C_k^0$ действителен, также есть решение.

Таким образом, мы всегда можем предполагать, что в решении (17) коэффициент $C_k$ действителен.

Теперь покажем, что всегда можно предполагать, что перед $i$ в формуле (17) стоит знак $+$ вместо $\pm$. В самом деле, если возьмем знак минус, то достаточно заменить $\gamma$ на $-\gamma$ и мы возвратимся к формуле (17′), где знак $\pm$ изменен на обратный.

Если уравнения допускают решение (17), то они будут допускать также сопряженное мнимое решение, откуда легко вывести, что действительная часть решения (17)

$$\xi_k = C_k \cos\gamma t, \qquad \eta_k = -C_k \sin\gamma t \tag{18}$$

также удовлетворяет уравнениям.

Итак, мы пришли к тому, чтобы постараться удовлетворить нашим уравнениям выражениями (18), из которых выводим

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \gamma\eta_k, \qquad \frac{d\eta_k}{dt} = -\gamma\xi_k.$$

Если подставим, например, эти выражения в уравнения (10), то получим

$$\gamma\eta_i = -\mu\frac{\partial T_2'}{\partial\eta_i},$$

$$\gamma\xi_i = -\mu\frac{\partial S_2'}{\partial\xi_i}.$$

Так как $S_2'$ зависит от $\xi$, так же как $T_2'$ зависит от $\eta$, то эти уравнения устанавливают между $\eta$ такие же линейные соотношения, что и между $\xi$. Поэтому достаточно рассмотреть одно из них, например,

$$\gamma\xi_i = -\mu\frac{\partial S_2'}{\partial\xi_i}. \tag{19}$$

Рассмотрим $n$ эксцентрических переменных $\xi$ как координаты точки в $n$-мерном пространстве. Тогда уравнение

$$S_2' = 1$$

будет представлять в этом пространстве поверхность второго порядка. Обозначим эту поверхность через $\Sigma$. Если $n = 2$, т. е. в случае задачи трех тел, то эта поверхность является эллипсом; если $n = 3$, т. е. в случае задачи четырех тел, поверхность является эллипсоидом в обычном пространстве.

Найдем оси этой поверхности $\Sigma$. Для этого рассмотрим сферу

$$\sum \xi^2 = \lambda^2.$$

Постараемся определить $\lambda^2$ таким образом, чтобы сфера дважды касалась $\Sigma$. Тогда $\lambda$ будет длиной соответствующей оси и точки касания будут ее концами.

Но известно, что для этого нужно рассмотреть коническую поверхность

$$\sum \xi^2 - \lambda^2 S_2' = 0$$

и написать условие существования двойной прямой. Таким образом, мы найдем уравнения

$$2\xi_i = \lambda^2 \frac{\partial S_2'}{\partial \xi_i}.$$

Эти уравнения дадут нам значения $\lambda^2$ и значения $\xi_i$, которые будут пропорциональны направляющим косинусам соответствующей оси. Но эти уравнения будут тождественны с уравнениями (19), если допустить

$$\frac{\lambda^2}{2} = -\frac{\mu}{\gamma}.$$

Следовательно, значения $\gamma$ обратно пропорциональны квадратам осей поверхности $S_2' = 1$ и равны

$$-\frac{2\mu}{\lambda^2}.$$

Что касается $\xi_k$ и, следовательно, коэффициентов $C_k$, то они пропорциональны направляющим косинусам соответствующей оси.

Таким образом, если известны по величине и направлению оси поверхности $S_2' = 1$, то решения вида (18) полностью определены.

Так как поверхность второго порядка в $n$-мерном пространстве имеет $n$ осей, то мы имеем $n$ различных решений вида (18). Из каждого такого решения мы можем вывести более общее решение, содержащее две произвольные постоянные $A$ и $h$:

$$\xi_k = AC_k \cos(\gamma t + h), \qquad \eta_k = -AC_k \sin(\gamma t + h).$$

Складывая эти $n$ решений, находим решение, содержащее $2n$ произвольных постоянных. Следовательно, будем иметь общее решение задачи.

**148. Квадратичные интегралы.** Итак, общее решение получается следующим образом:

Пусть $\gamma_i$ — одно из $n$ значений $\gamma$, так что соответствующее частное решение имеет вид

$$\xi_k = A_i C_{ik} \cos(\gamma_i t + h_i), \qquad \eta_k = -A_i C_{ik} \sin(\gamma_i t + h_i),$$

а общее решение дается формулами

$$\xi_k = \sum A_i C_{ik} \cos(\gamma_i t + h_i) \tag{20}$$

и

$$\eta_k = -\sum A_i C_{ik} \sin(\gamma_i t + h_i). \tag{21}$$

Из $n$ равенств (20) можно получить $n$ величин

$$A \cos(\gamma t + h)$$

в виде

$$A_i \cos(\gamma_i t + h_i) = \sum D_{ik} \xi_k.$$

Точно так же из $n$ равенств (21) можно выразить $n$ величин

$$A \sin(\gamma t + h),$$

и так как коэффициенты $C$ в уравнениях (20) и (21) одни и те же, то мы получим

$$-A_i \sin(\gamma_i t + h_i) = \sum D_{ik} \eta_k.$$

Беря сумму квадратов, найдем

$$\left(\sum D_{ik} \xi_k\right)^2 + \left(\sum D_{ik} \eta_k\right)^2 = A_i^2 = \text{const}.$$

Это — квадратичные интегралы наших уравнений. Число их равно $n$, так как индекс $i$ принимает значения $1, 2, \ldots, n$.

**149. Линейные интегралы.** Все, что было сказано, может быть применено как к формулам (10), т. е. к эксцентрическим переменным, так и к формулам (10′), т. е. к обликическим переменным. Отметим теперь одно свойство, принадлежащее исключительно уравнениям (10′).

Вернемся к первым двум уравнениям (13). Эти уравнения должны существовать и в том случае, когда $L$, $\xi$, $\eta$ заменены их членами нулевого ранга. Мы пренебрегли в $R$ членами четвертой степени $\xi$, и, следовательно, в $\frac{\partial R}{\partial \xi}$ — членами третьей степени. Будем продолжать пренебрегать кубами $\xi$ и, следовательно, членами $\xi\varrho$ и $\eta\varrho$. Тогда первые два уравнения (13) примут вид

$$\sum \eta_2 \sqrt{L_1} = \text{const}, \qquad \sum \xi_2 \sqrt{L_1} = \text{const}.$$

В этих уравнениях $L_i$ должны быть заменены их членами нулевого ранга, т. е. постоянными $L_i^0$, после чего будем иметь

$$\sum \xi_2 \sqrt{L_1^0} = \text{const}, \qquad \sum \eta_2 \sqrt{L_1^0} = \text{const}, \tag{22}$$

а это суть линейные интегралы уравнений (10′).

Это доказывает, что уравнение, определяющее $\gamma$, имеет один нулевой корень.

Действительно, если возьмем первое уравнение (22), то так как начальные значения $\xi$ могут быть выбраны произвольно, постоянная в правой части может принимать какое угодно значение. Поэтому можно допустить, что эта постоянная отлична от нуля.

Подставим в уравнение (22) вместо $\xi$ их значения (20). Тогда получим линейную комбинацию величин

$$\cos(\gamma t + h),$$

которая должна быть равна постоянной, отличной от нуля. Это возможно только в том случае, когда один из косинусов сводится к постоянной, т. е. когда одна из величин $\gamma$ равна нулю, что и требовалось доказать.

Это означает, что одна из осей поверхности второго порядка $S_2'' = 1$ бесконечна, т. е. что поверхность вырождается в цилиндр, в две параллельные прямые, если $n = 2$, и в эллиптический цилиндр, если $n = 3$.

Можно также сказать, что квадратичная форма $S_2''$ может обратиться в нуль вместе со всеми производными без того, чтобы $\xi$, $\eta$, ... обратились в нуль. В этом случае уравнения (10′) приводятся к виду

$$\frac{d\xi_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = 0,$$

так что $\xi$ и $\eta$ будут постоянными.

Это легко проверить. В самом деле, допустим, что орбиты всех планет лежат в одной плоскости, но эта плоскость не является плоскостью $x_1x_2$.

Тогда наклонности не будут равны нулю и облические переменные $\xi$ и $\eta$ тем более не будут равны нулю. Планеты будут оставаться все время в одной плоскости, а поэтому наклонности и долготы узлов будут постоянными.

Но мы имеем

$$\varrho_2 = (L_1 - \varrho_1)(1 - \cos i).$$

Выражение $\varrho_1(1 - \cos i)$ есть член четвертой степени относительно $\xi$ и $\eta$ и в предыдущем анализе мы им пренебрегали; поэтому остается

$$\varrho_2 = L_1(1 - \cos i).$$

$L_1$ сводится к постоянной $L_1^0$, а $i$ — постоянна, как мы только что видели, следовательно, $\rho_2$ также постоянна. Если $\rho_2$ и $\omega_2$ постоянны, то то же самое можно сказать и относительно $\xi_2$ и $\eta_2$ и относительно всех облических переменных, которые могут, таким образом, быть постоянными, не будучи равными нулю. А это и требовалось доказать.

150. Алгебраическое уравнение $n$-й степени, определяющее значения $\gamma$, было решено численно сначала Лагранжем, а затем Леверье. Этот вопрос детально изложен в «Traité de la Mécanique céleste» Тиссерана (глава XXVI, т. I).

Но ни Лагранж, ни Леверье не применяли канонические элементы, поэтому нужно обратить внимание на изменение обозначений.

Вместо того, чтобы разлагать, как мы делаем, по степеням $\xi$ и $\eta$, они разлагали по степеням

$$h = e \sin \bar{\omega}, \qquad l = e \cos \bar{\omega},$$

$$p = \operatorname{tg} i \sin \theta, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \theta.$$

Но пренебрегая кубами эксцентриситетов и наклонностей, как мы это делали, будем иметь

$$\xi_1 = \sqrt{L} \cdot l, \qquad \eta_1 = -\sqrt{L} \cdot h,$$

$$\xi_2 = \sqrt{L} \cdot q, \qquad \eta_2 = -\sqrt{L} \cdot p.$$

$L_i$ приводятся к постоянным $L_i^0$, так что $\xi$ и $\eta$ отличаются от $h$, $l$, $p$ и $q$ только постоянными множителями. Таким образом, от одного разложения немедленно переходим к другому.

151. **Первая замена переменных.** Вернемся к уравнениям

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial T_2'}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial S_2'}{\partial \xi_i}. \tag{10}$$

Рассмотрим поверхность второго порядка $S_2' = 1$. Эта поверхность расположена в $n$-мерном пространстве, и мы условились считать, что $n$ эксцентрических переменных

$$\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots, \xi_{2n-1}$$

представляют координаты некоторой точки в этом пространстве.

Отнесем теперь эту поверхность к ее осям, которые возьмем за новые оси координат. Пусть

$$\xi_1', \xi_3', \xi_5', \ldots, \xi_{2n-1}'$$

— новые текущие координаты. Они будут линейными функциями прежних координат $\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_{2n-1}$, и, кроме того, мы имеем тождественно

$$\sum \xi^2 = \sum \xi'^2,$$

так как обе части этого тождества представляют квадрат одного и того же расстояния точки от начала координат.

Так как поверхность $S'_2$ отнесена к своим осям, то будем иметь

$$2\mu S'_2 = -\sum \gamma_i \xi_i'^2.$$

Определим также $\eta'$, которые будут связаны с $\eta$ теми же линейными соотношениями, что и $\xi'$ с $\xi$. Следовательно, будем иметь

$$2\mu T'_2 = -\sum \gamma_i \eta_i'^2$$

и

$$\sum \eta^2 = \sum \eta'^2, \qquad \sum \xi\eta = \sum \xi'\eta'$$

и, тождественно,

$$\sum \xi_i \, d\eta_i = \sum \xi'_i \, d\eta'_i.$$

При этом суммы распространены на все нечетные значения индекса $i$. Следовательно, замена переменных является канонической, так что уравнения (10) приведутся к виду

$$\frac{d\xi'_i}{dt} = -\mu \frac{\partial T'_2}{\partial \eta'_i}, \qquad \frac{d\eta'_i}{dt} = \mu \frac{\partial S'_2}{\partial \xi'_i}. \tag{23}$$

Сделаем такие же преобразования с системой

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial T''_2}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial S''_2}{\partial \xi_i} \tag{10'}$$

с облическими переменными.

Рассмотрим точку, координаты которой суть $n$ облических переменных

$$\xi_2, \ \xi_4, \ \xi_6, \ \ldots, \ \xi_{2n},$$

и образуем поверхность второго порядка $S''_2 = 1$. Мы отнесем ее к ее осям и обозначим через

$$\xi'_2, \ \xi'_4, \ \xi'_6, \ \ldots, \ \xi'_{2n}$$

координаты относительно новых осей. Определим таким же образом $\eta'_2$, $\eta'_4$, ... так, что получим между $\eta'$ и $\eta$ те же линейные соотношения, как между $\xi'$ и $\xi$.

При этих условиях будем иметь

$$2\mu S''_2 = -\sum \gamma_i \xi_i'^2, \quad 2\mu T''_2 = -\sum \gamma_i \eta_i'^2, \quad \sum \xi_i \, d\eta_i = \sum \xi'_i \, d\eta'_i,$$

где суммирования распространены на все четные значения индекса $i$.

Замена переменных является канонической, и система (10′) принимает вид

$$\frac{d\xi_i'}{dt} = -\mu\frac{\partial T_2''}{\partial\eta_i'}, \qquad \frac{d\eta_i'}{dt} = \mu\frac{\partial S_2''}{\partial\xi_i'}. \tag{23′}$$

Кроме того, ясно, что

$$\sum \xi_i\, d\eta_i = \sum \xi_i'\, d\eta_i',$$

где суммирование распространено на все значения индекса $i$. Таким образом, замена переменных является канонической и система (7) принимает вид

$$\frac{d\xi_i'}{dt} = -\mu\frac{\partial R}{\partial\eta_i'}, \qquad \frac{d\eta_i'}{dt} = \mu\frac{\partial R}{\partial\xi_i'}. \tag{24}$$

Если мы учтем структуру $S_2'$, $T_2'$, $S_2''$, $T_2''$, то увидим, что системы (23) и (23′) будут иметь вид

$$\frac{d\xi_i'}{dt} = \gamma_i\eta_i', \qquad \frac{d\eta_i'}{dt} = -\gamma_i\xi_i',$$

откуда

$$\xi_i' = A_i\cos(\gamma_i t + h_i),$$
$$\eta_i' = -A_i\sin(\gamma_i t + h_i),$$

где $A_i$ и $h_i$ — произвольные постоянные.

Отсюда выводим

$$\xi_i'^2 + \eta_i'^2 = \mathrm{const},$$

а это есть квадратичные интегралы § 148. Комбинируя эти интегралы, найдем

$$\sum(\xi_i'^2 + \eta_i'^2) = \sum(\xi_i^2 + \eta_i^2) = \mathrm{const},$$
$$\sum\gamma_i(\xi_i'^2 + \eta_i'^2) = -\mu(S_2' + T_2') = \mathrm{const},$$

где суммирование распространяется либо на все четные значения индекса $i$, либо на все его нечетные значения. Эти равенства представляют интегралы § 144.

В случае обличических переменных одна из величин $\gamma$ равна нулю. Пусть

$$\gamma_{2n} = 0,$$

так что

$$\frac{d\xi_{2n}'}{dt} = \frac{d\eta_{2n}'}{dt} = 0,$$

откуда

$$\xi'_{2n} = \text{const}, \qquad \eta'_{2n} = \text{const},$$

т. е. мы получили линейные интегралы § 149.

Из этого видно, как легко получаются все результаты предыдущей главы.

**152. Ограниченность эксцентриситетов и наклонностей.** Выведенные формулы дают нам средство для нахождения верхних границ, которые эксцентриситеты и наклонности никогда не могут превосходить (разумеется, если сохранить только члены нулевого ранга и пренебречь высшими степенями эксцентриситетов и наклонностей).

Выше мы нашли интегралы

$$\xi_i'^2 + \eta_i'^2 = A_i^2,$$

откуда, обозначая через $\varepsilon$ произвольный угол, имеем

$$|\xi_i' \cos\varepsilon + \eta_i' \sin\varepsilon| < A_i.$$

Постоянные $A_i$ легко определяются из начальных значений $\xi$ и $\eta$; их можно рассматривать как данные задачи и считать положительными.

Если обратиться теперь к уравнениям (20) из § 148, то увидим, что можно допустить, что

$$\xi_k = \sum C_{ik}\xi_i', \qquad \xi_i' = \sum D_{ik}\xi_k.$$

Заметим, между прочим, что $C_{ik}$, так же как и $D_{ik}$, представляют косинусы угла, который прежняя ось $\xi_k$ образует с новой осью $\xi_i'$. Следовательно, имеем

$$C_{ik} = D_{ik}.$$

Поэтому будем иметь

$$\xi_k \cos\varepsilon + \eta_k \sin\varepsilon = \sum C_{ik}(\xi_i' \cos\varepsilon + \eta_i' \sin\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$|\xi_k \cos\varepsilon + \eta_k \sin\varepsilon| < \sum A_i |C_{ik}|.$$

Но всегда можно найти такой угол $\varepsilon$, чтобы

$$\xi_k \cos\varepsilon + \eta_k \sin\varepsilon = \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2},$$

так что имеем

$$\sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2} < \sum A_i |C_{ik}|. \tag{25}$$

Отсюда следует ограниченность эксцентриситетов и наклонностей.

Существует один случай, когда эта ограниченность не имеет места. В самом деле, мы имеем

$$\varrho_1 = L_1\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right), \qquad \varrho_2 = (L_1 - \varrho_1)(1 - \cos i),$$

или, пренебрегая высшими степенями эксцентриситетов и наклонностей,

$$\varrho_1 = L_1 \frac{e^2}{2}, \qquad \varrho_2 = L_1 \frac{i^2}{2}.$$

Но

$$L_1 = m_1' \sqrt{m_1 + m_7} \cdot \sqrt{a},$$

где $a$, $e$ и $i$ означают большую полуось, эксцентриситет и наклонность первой планеты.

Отсюда следует, что

$$\xi_k^2 + \eta_k^2 = 2\varrho_k$$

содержит множителем массу $m_1'$. Это выражение имеет порядок $m_1'$, умноженной на квадрат эксцентриситета. В таком случае неравенство (25) дает нам верхнюю границу для произведения $m_1'e^2$; пусть

$$m_1'e^2 < B,$$

откуда

$$e < \sqrt{\frac{B}{m_1'}}.$$

Если масса $m_1'$ весьма мала, эта верхняя граница для $e$ может быть весьма велика и может не иметь никакого практического значения.

Поэтому необходимо исследовать, в частности, движение малой планеты под влиянием возмущений одной или нескольких больших планет.

Допустим, что первая планета является малой планетой, т. е. что $m_1'$ весьма мала. Тогда с точностью до членов высшего порядка будем иметь

$$m_1 = m_1'.$$

Поэтому можно положить

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1,$$

где $\Phi_0$ будет зависеть только от координат больших планет или, точнее, от координат соответствующих фиктивных планет и от производных этих координат по времени. Что касается функции $\Phi_1$, то она зависит от координат всех планет и производных этих координат по времени. Масса $m_1'$ бесконечно мала, но $\Phi_0$ и $\Phi_1$ конечны.

Составим теперь выражения $R$, $R_2$, $R'_2$, $R''_2$, $S'_2$, $T'_2$, $S''_2$, $T''_2$. В каждом из этих выражений, например, в $S'_2$, будем различать члены, происходящие от $\Phi_0$ и от $m_1\Phi_1$. Первые будут конечными, вторые будут порядка $m_1$.

Функция $S'_2$ есть целый многочлен относительно $n$ эксцентрических переменных

$$\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_{2n-1}.$$

Первая из этих переменных относится к малой планете, поэтому она будет порядка $\sqrt{m_1}$. Другие относятся к большим планетам, поэтому они конечны. Пусть тогда

$$S'_2 = P_2 + P'_2 + 2\xi_1 P_1 + P_0\xi_1^2,$$

где $P_2 + P'_2$ есть многочлен второй степени относительно

$$\xi_3, \ldots, \xi_{2n-1},$$

$P_1$ — многочлен первой степени относительно тех же переменных и $P_0$ — постоянная.

$P_2$ представляет собой совокупность членов, происходящих от $\Phi_0$, $P'_2$ — совокупность членов, происходящих от $m_1\Phi_1$. Что касается членов

$$2\xi_1 P_1 + P_0\xi_1^2,$$

то они все происходят от $m_1\Phi_1$, так как $\Phi_0$ не зависит от координат малой планеты и, следовательно, от $\xi_1$.

Многочлен $P_2$, следовательно, конечен, тогда как

$$P'_2 + 2\xi_1 P_1 + P_0\xi_1^2$$

должен быть порядка $m_1$. Так как $\xi_1$ — порядка $\sqrt{m_1}$, то мы должны заключить, что: 1) коэффициенты многочлена $P_2$ и постоянная $P_0$ конечны; 2) коэффициенты многочлена $P_1$ имеют порядок $\sqrt{m_1}$; 3) коэффициенты многочлена $P'_2$ имеют порядок $m_1$.

Поэтому если положим

$$P'_2 = m_1 Q'_2, \quad P_1 = \sqrt{m_1}\, Q_1,$$

откуда

$$S'_2 = P_2 + m_1 Q'_2 + 2\sqrt{m_1}\xi_1 Q_1 + P_0\xi_1^2,$$

то многочлены

$$P_2, \quad Q'_2, \quad Q_1, \quad P_0$$

будут конечными.

Мы определили оси поверхности второго порядка

$$S'_2 = 1.$$

Она мало отличается от поверхности

$$P_2 + P_0 \xi_1^2 = 1.$$

Одной из осей последней является ось $\xi_1$, а другие перпендикулярны к оси $\xi_1$. Одна из осей поверхности $S_2' = 1$ (кроме одного исключительного случая, о котором будем говорить в дальнейшем) составляет с осью $\xi_1$ весьма малый угол порядка $\sqrt{m_1}$. Если, следовательно, вернемся к направляющим косинусам $C_{ik}$, то мы увидим, что

$$C_{1,3},\ C_{1,5},\ \ldots,\ C_{1,\,2n-1},$$
$$C_{3,1},\ C_{5,1},\ \ldots,\ C_{2n-1,\,1}$$

— очень малые величины порядка $\sqrt{m_1}$.

Вернемся тогда к неравенству (25) и применим его к малой планете. Будем иметь

$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} < \sum A_i \,|C_{i,\,1}|.$$

Покажем, что правая часть — порядка $\sqrt{m_1}$. В самом деле, $A_1$ будет порядка $\sqrt{m_1}$, так как она является начальным значением

$$\sqrt{\xi_1'^2 + \eta_1'^2}.$$

Но

$$\xi_1' = \xi_1 C_{11} + \xi_3 C_{13} + \ldots + \xi_{2n-1} C_{1,\,2n-1}.$$

Начальное значение $\xi_1'$ — порядка $\sqrt{m_1}$, так как начальное значение $\xi_1$ — порядка $\sqrt{m_1}$ и коэффициенты $C_{13}, \ldots, C_{1,2n-1}$ — также порядка $\sqrt{m_1}$. То же положим для начального значения $\eta_1'$, следовательно, для $A_1$.

Первый член $A_1 \,|C_{11}|$, таким образом, имеет порядок $\sqrt{m_1}$, и то же самое можно сказать и о других членах, так как

$$C_{3,\,1},\ \ldots,\ C_{2n-1,\,1}$$

— все порядка $\sqrt{m_1}$.

Итак, будем иметь

$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} < \sqrt{m_1} \cdot H,$$

где $H$ — конечно. Но, как мы видели, пренебрегая высшими степенями эксцентриситетов и массы $m_1$, получим

$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = e\sqrt{m_1} \cdot \sqrt[4]{M \cdot a},$$

где $M$ — масса Солнца, $a$ и $e$ — большая полуось и эксцентриситет орбиты малой планеты. Следовательно, имеем

$$e < \frac{H}{\sqrt[4]{Ma}},$$

что дает нам для эксцентриситета конечную верхнюю границу.

Имеется, однако, один случай, когда предыдущие рассуждения несправедливы. Это — тот случай, когда поверхность второго порядка

$$P_2 + P_0 \xi_1^2 = 1$$

имеет две равные оси (одна из этих двух осей есть ось $\xi_1$). Здесь мы не можем больше утверждать, что эти оси образуют весьма малые углы с осями поверхности $S'_2 = 1$.

Чтобы в этом убедиться, допустим, что $n = 2$, так что поверхность $S'_2 = 1$ обращается в эллипс. Этот эллипс будет очень мало отличаться от эллипса $P_2 + P_0 \xi_1^2 = 1$, оси которого совпадают с осями координат. Оси этих двух эллипсов будут очень мало отличаться друг от друга и, следовательно, очень мало будут отличаться от осей координат. Но если второй эллипс превращается в круг, мы не имеем права более утверждать, что оси эллипса, весьма мало отличающиеся от диаметров круга, будут весьма мало отличаться от осей координат.

К тем же результатам можно прийти и другим путем.

Наши уравнения могут быть записаны в следующей форме:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial P_2}{\partial \xi_i} \quad (i = 3, 5, \ldots, 2n-1),$$

так как $P'_2$ и $\xi_1 P_1$ пренебрежимо малы по сравнению с $P_2$.

Из этих уравнений и из аналогичных уравнений для $\xi_i$ можно вывести обычным путем вековые возмущения эксцентриситетов больших планет. Тогда $\xi_i$ и $\eta_i$ представляются в форме линейных выражений относительно некоторых косинусов и синусов вида

$$\cos(\gamma t + h), \quad \sin(\gamma t + h).$$

Далее,

$$\frac{d\eta_1}{dt} = 2\mu P_1 + 2\mu P_0 \xi_1,$$

или

$$\frac{d\eta_1}{dt} - 2\mu P_0 \xi_1 = \sum A \cos(\gamma t + h),$$

так как $P_1$ — линейная величина относительно $\xi_i$ и, следовательно, относительно $\cos(\gamma t + h)$.

Можно удовлетворить этому уравнению и его сопряженному

$$\frac{d\xi_1}{dt}+2\mu P_0\eta_1=\sum A\sin(\gamma t+h),$$

полагая

$$\xi_1=\alpha\cos(\gamma_0 t+h_0)+\sum\frac{A\cos(\gamma t+h)}{\gamma_0-\gamma},$$

$$\eta_1=-\alpha\sin(\gamma_0 t+h_0)-\sum\frac{A\sin(\gamma t+h)}{\gamma_0-\gamma},$$

где $\gamma_0=-2\mu P_0$, $\alpha$ и $h_0$ — произвольные постоянные.

Это выражение будет оставаться весьма малым, если только $\gamma_0$ не будет равно одному из значений $\gamma$, что соответствует случаю, в котором наша поверхность второго порядка будет иметь две равные оси.

То, что мы сказали относительно эксцентриситетов, применимо без изменений и к наклонностям.

Во втором томе «Annales de l'observatoire de Paris» Леверье показал, что между Юпитером и Солнцем имеется точка, где орбита малой планеты под действием притяжения Юпитера и Сатурна может приобрести большую наклонность, так что этот исключительный случай, о котором мы говорили, может осуществиться.

# ПОЛНАЯ ТЕОРИЯ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

**153.** Исследование вековых возмущений эксцентриситетов и наклонностей, т. е. исследование членов нулевого ранга переменных $\xi$ и $\eta$, мы привели к интегрированию канонической системы уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial R}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial R}{\partial \xi_i} \tag{1}$$

и видели, как может быть осуществлено это интегрирование, если пренебречь в $R$ четвертыми степенями $\xi$ и $\eta$.

Поставим теперь вопрос о полном интегрировании системы (1). Покажем, что уравнения (1) могут быть приведены к виду уравнений (10) из главы VII и что, следовательно, все теоремы главы VII применимы.

Если сделаем теперь замену переменных § 151, то уравнения останутся каноническими и будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_i'}{dt} &= -\mu \frac{\partial R}{\partial \eta_i'}, \\ \frac{d\eta_i'}{dt} &= \mu \frac{\partial R}{\partial \xi_i'}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

**154. Вторая замена переменных.** Благодаря малости эксцентриситетов и наклонностей в разложении § 143 члены

$$R = R_0 + R_2 + R_4 + \ldots \tag{3}$$

быстро убывают. Чтобы сделать это более очевидным, можно, выполнить новую замену переменных, которая послужит нам только для того, чтобы лучше уяснить некоторые аналогии, но которую нужно остерегаться делать на практике.

Положим

$$\xi_i' = \varepsilon \xi_i'', \qquad \eta_i' = \varepsilon \eta_i'',$$

где $\varepsilon$ — коэффициент порядка эксцентриситетов и наклонностей. Положим, кроме того,

$$R = R_0 + \varepsilon^2 S, \qquad R_p = \varepsilon^p S_p,$$

откуда

$$S = S_2 + \varepsilon^2 S_4 + \varepsilon^4 S_6 + \ldots$$

Ясно, что $S$ разлагается по степеням $\varepsilon^2$, $\xi''$, $\eta''$ и что $S_p$ есть однородная функция порядка $p$ относительно $\xi''$ и $\eta''$. Тогда наши уравнения принимают вид

$$\frac{d\xi_i''}{dt} = -\mu \frac{\partial S}{\partial \eta_i''}, \qquad \frac{d\eta_i''}{dt} = \mu \frac{\partial S}{\partial \xi_i''}. \tag{4}$$

**155. Третья замена переменных.** Положим теперь

$$\xi_i'' = \sqrt{2\varrho_i''} \cos \omega_i'', \qquad \eta_i'' = \sqrt{2\varrho_i''} \sin \omega_i''.$$

Наши уравнения сохранят каноническую форму и напишутся в виде

$$\frac{d\varrho_i''}{dt} = -\mu \frac{\partial S}{\partial \omega_i''}, \qquad \frac{d\omega_i''}{dt} = \mu \frac{\partial S}{\partial \varrho_i''}. \tag{5}$$

Используя обозначения предыдущих параграфов, имеем

$$R_2 = S_2' + T_2' + S_2'' + T_2'' = \varepsilon^2 S_2$$

и

$$-2\mu (S_2' + S_2'') = \sum \gamma_i \xi_i'^2,$$
$$-2\mu (T_2' + T_2'') = \sum \gamma_i \eta_i'^2.$$

Отсюда выводим

$$S_2 = -\frac{1}{2\mu} \sum \gamma_i (\xi_i''^2 + \eta_i''^2) = -\frac{1}{\mu} \sum \gamma_i \varrho_i''.$$

В таком случае мы можем видеть полную аналогию уравнений (5) с уравнениями (10) из главы VII.

Мы видим, что

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mu S$ | играет | роль | $F$, |
| $\varrho''$ | » | » | $L$, |
| $\omega''$ | » | » | $\lambda$, |
| $\varepsilon^2$ | » | » | $\mu$. |

Действительно,

1) функция $S$ разлагается по степеням $\varepsilon^2$;

2) при $\varepsilon^2 = 0$ она обращается в $S_2$ и $S_2$ зависит только от $\varrho_i''$;

3) в общем случае между производными $S_2$ не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами, так как $\gamma_i$ — независимые эмпирические данные.

Это верно, по крайней мере, когда все планеты движутся в одной плоскости и когда надо только беспокоиться об эксцентриситeтах, но не о наклонностях, но если необходимо учесть и наклонности, то, как мы видели в § 149, одна из постоянных $\gamma$ будет нулем.

Дальше, в § 165, мы покажем, как можно обойти эту трудность. Ограничимся здесь лишь ссылкой на этот параграф, чтобы не прерывать изложение.

4) Наконец, $S$, которая разлагается по степеням $\xi''$ и $\eta''$, есть периодическая функция от $\omega''$.

**156.** Все, что было получено в главе VII для уравнений (10), применимо к уравнениям (5).

В первом приближении (если пренебрегать $\varepsilon^2$) приводим $S$ к $S_2$; тогда находим

$$\frac{d\varrho_i''}{dt}=0, \qquad \frac{d\omega_i''}{dt}=-\gamma_i,$$

откуда

$$\varrho_i''=\text{const}, \qquad \omega_i''=-\gamma_i t+\text{const}.$$

Эти формулы выражают результаты, полученные в предыдущей главе.

Можно продолжить приближения дальше и применить метод Лагранжа. Таким образом найдем для наших неизвестных $\varrho''$, $\omega''$, $\xi''$, $\eta''$ разложения вида

$$\sum (\varepsilon^2)^\alpha A t^m \cos(\nu t+h),$$

где $A$ и $h$ — постоянные и где

$$\nu=-\sum k_i\gamma_i,$$

а $k_i$ — целые числа.

Постоянные $-\gamma_i$ играют здесь роль средних движений $n_i$.

Заменим в этих разложениях $t$ на $\tau$, когда $t$ стоит множителем перед косинусом и когда показатель $\alpha$ не равен нулю, а под знаком косинуса заменим $\nu t$ на $\Sigma k_i w_i$. В первом члене разложения для $\omega_i''$, где $t$ стоит вне знака косинуса, но где $\alpha=0$, заменим $-\gamma_i t$ на $\bar{\omega}_i$. В результате для

$$\varrho_i'', \quad \omega_i''-w_i, \quad \xi_i'', \quad \eta_i''$$

получим разложения вида

$$\sum (\varepsilon^2)^\alpha A \tau^m \cos\left(\sum kw+h\right).$$

Эти разложения совпадают с разложениями главы VI. Следовательно, мы удовлетворим уравнениям (5), полагая

$$\tau=t+c, \quad w_i=-\gamma_i t+\varepsilon_i,$$

каковы бы ни были постоянные $c$ и $\varepsilon_i$.

В силу главы VII уравнения (5) также будут удовлетворяться если в разложениях подставить

$$\tau=0, \quad w_i=-\gamma_i' t+\bar{\omega}_i,$$

где $\gamma_i'$ — определенные постоянные, мало отличающиеся от $\gamma_i$, $\bar{\omega}_i$ — произвольные постоянные интегрирования. $\gamma_i'$ разлагаются по степеням $\varepsilon^2$ и обращаются в $\gamma_i$ при $\varepsilon^2 = 0$ (см. § 131).

Значение этого результата весьма велико. Действительно, мы видели, что, пренебрегая высшими степенями эксцентриситетов и наклонностей, Лагранж и Лаплас показали, что эксцентриситеты и наклонности будут всегда оставаться весьма малыми, откуда следует устойчивость солнечной системы.

Остается ли результат верным, когда учитываются и высшие степени этих величин? В этом можно сомневаться, так как, применяя к уравнениям (5) метод Лангранжа, мы увидим, что появляются вековые члены. Но если применить другой метод, то можно показать, что устойчивость будет иметь место. Так будет, если учесть $R_4$ и использовать метод, о котором будет сказано несколько слов ниже. Но при этом возникает вопрос, можно ли уничтожить вековые возмущения, если учесть члены еще более высокого порядка?*).

Следующие рассуждения решают этот вопрос полностью в том смысле, что способ, который мы изложим, всегда позволяет уничтожить вековые члены.

Разложения

$$\sum (\varepsilon^2)^\alpha A\tau^m \cos\left(\sum kw+h\right), \tag{6}$$

как мы видели в § 138, могут быть получены следующим образом.

Сначала в разложениях (6) положим $\tau = 0$, далее заменим $w_i$ на $w_i + (\gamma_i - \gamma_i')\,\tau$ и тогда получим

$$\sum (\varepsilon^2)^\alpha A \cos\left[\sum kw+\sum k\tau\,(\gamma-\gamma')+h\right].$$

Если, далее, разложить это выражение по степеням $\tau$, то снова возвратимся к разложениям (6). Так легче понять, откуда происходят вековые члены, которые имеются в разложениях (6).

В разложения (6) входят $4n$ произвольных постоянных, если имеется $(n + 1)$ тело, т. е. $n$ планет. Коэффициенты $A$ и $h$ зависят только от этих $4n$ постоянных.

Можно выбрать значения этих постоянных равными начальным значениям $\xi_i''^0$, $\eta''^0$ наших неизвестных. Но, как было объяснено в § 133, можно определять значения постоянных интегрирования

*) В. И. Арнольд получил новые результаты по вопросам существования условно-периодических решений канонических систем, из которых вытекают теоремы, которые можно рассматривать как аналоги теоремы Лапласа (см. ДАН 137, № 2, 1961; ДАН 138, № 1, 1961). (*Прим. перев.*)

бесчисленным множеством других способов. Скоро мы увидим, какой выбор является наиболее целесообразным.

**157.** Все, что мы говорили до сих пор, применимо к общему случаю уравнений (10) главы VII. Но уравнения (5) имеют частный вид, поэтому они обладают некоторыми свойствами, аналогичными рассмотренным в § 134 и в следующих за ним.

Действительно, мы видели, что $S$ разложима по степеням $\xi''$ и $\eta''$. Положим

$$\mu S = \mu S_2 + \varepsilon^2 U,$$

так что $\mu S_2$ играет роль $F_0$ и $U$ — роль $F_1$.

Пусть, с другой стороны,

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \tau} - \sum \gamma_k \frac{\partial}{\partial w_k},$$

так что $\Delta \xi$ обращается в $\frac{d\xi}{dt}$, когда положим

$$\tau = t + c, \qquad w_i = -\gamma_i t + \varepsilon_i.$$

Тогда наши уравнения принимают вид

$$\Delta \xi_i'' - \gamma_i \eta_i'' = -\varepsilon^2 \frac{\partial U}{\partial \eta_i''}, \qquad \Delta \eta'' + \gamma_i \xi_i'' = \varepsilon^2 \frac{\partial U}{\partial \xi_i''}, \tag{7}$$

аналогичный последним двум уравнениям (33) главы VII.

Выберем за $4n$ произвольных постоянных средние значения величин

$$\xi_i'' \cos w_i + \eta_i'' \sin w_i,$$
$$\xi_i'' \sin w_i - \eta_i'' \cos w_i,$$

которые обозначим через $E_i$ и $E_i'$. Кроме того, не ограничивая общности, можно положить $E_i' = 0$. Действительно, наши формулы содержат $6n$ постоянных $E_i$, $E_i'$, $\overline{\omega}_i$, т. е. на $2n$ больше, чем нужно. Так, впрочем, мы и делали в главе VII.

Докажем теперь, что наши разложения можно расположить по степеням

$$E_i \cos w_i, \qquad E_i \sin w_i,$$

причем в первом приближении, как мы уже видели,

$$\xi_i'' = E_i \cos w_i, \qquad \eta_i'' = E_i \sin w_i.$$

Покажем это способом, подобным тому, который применялся в § 135. Положим

$$X_k = \xi_k'' + i\eta_k'', \qquad Y_k = \xi_k'' - i\eta_k'',$$

так что

$$\sum X_k \, dY_k + 2i \sum \xi_k'' \, d\eta_k''$$

есть точный дифференциал, и наши уравнения примут вид

$$\Delta X_k + i\gamma_k X_k = 2i\varepsilon^2 \frac{\partial U}{\partial Y_k}, \qquad \Delta Y_k - i\gamma_k Y_k = -2i\varepsilon^2 \frac{\partial U}{\partial X_k}. \qquad (7')$$

(Мы заменили индексы $i$ на индексы $k$, чтобы не было путаницы с $i = \sqrt{-1}$.)

Правые части уравнений (7′) разлагаются по степеням $X$ и $Y$, так что нам остается показать, что $X$ и $Y$ могут быть разложены по степеням

$$E_k e^{iw_k}, \qquad E_k e^{-iw_k}.$$

Это верно в первом приближении, где находим, что

$$X_k = E_k e^{iw_k}, \qquad Y_k = E_k e^{-iw_k}.$$

Предположим, что теорема верна в $(n-1)$-м приближении, и покажем, что она также будет верна в $n$-м приближении.

Наши уравнения, аналогично уравнениям (39′) § 135, можно написать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta (X_k e^{-iw_k}) &= 2i\varepsilon^2 e^{-iw_k} \frac{\partial U}{\partial Y_k}, \\ \Delta (Y_k e^{iw_k}) &= -2i\varepsilon^2 e^{iw_k} \frac{\partial U}{\partial X_k}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Производные функции $U$ разложимы по степеням $X$ и $Y$. Так как $X$ и $Y$ в $(n-1)$-м приближении разлагаются по степеням $E_k e^{\pm iw_k}$, то это также будет верно и для производных $U$.

Таким образом, наши уравнения (8) будут иметь вид

$$\Delta u = v,$$

т. е. вид уравнений (40) § 135, где $v$ есть известная функция $\tau$, $E_k$ и $w_k$, и притом такая, что $ve^{isw_k}$ разложимо по степеням $\tau$ и $E_k e^{\pm iw_k}$, причем число $s$ равно $-1$ в первом уравнении (8) и $+1$ во втором.

Другими словами, мы имеем

$$v = \sum A \Pi (E_j^{q_j}) \tau^m e^{i \sum p_j w_j},$$

где $A$ — постоянный коэффициент, $m$ — целое число. $\Pi E_j^{q_j}$ представляет произведение

$$E_1^{q_1} \cdot E_2^{q_2} \ldots E_{2n}^{q_n},$$

а $q$ и $p$ суть целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} q_j &\equiv p_j \pmod 2, \quad q_j \geqslant |p_j| \quad (j \gtrless k), \\ q_k &\equiv p_k + s \pmod 2, \quad q_k \geqslant |p_k + s|, \end{aligned} \qquad (9)$$

аналогичным условиям (42) § 135.

В § 135 мы видели, что $u$ будет иметь такую же форму, что и $v$, при условии, что интегрирование производится таким образом, что среднее значение $u$ равно нулю, или некоторому разложению вида (9).

Это условие выполнено, так как мы интегрируем таким образом, что средние значения $X_k e^{-iw_k}$, $Y_k e^{iw_k}$ равны $E_k$. Имеем, следовательно,

$$\text{среднее значение } X_k e^{-iw_k} = e^{-iw_k}(E_k e^{iw_k}),$$

$$\text{среднее значение } Y_k e^{iw_k} = e^{iw_k}(E_k e^{-iw_k}).$$

Эти средние значения имеют, следовательно, форму (9). Это имеет место и для неизвестных, которые играют роль $u$ в уравнениях (8), т. е. для $X_k e^{-iw_k}$, $Y_k e^{iw_k}$, причем $s$ равно $+1$ для первого и $-1$ для второго.

Итак, $X_k$ и $Y_k$ разлагаются по степеням $Ee^{\pm iw}$.

**158.** Наши уравнения (5) не изменяются, если заменить $\varepsilon$, $\xi_i''$, $\eta_i''$ на $\frac{\varepsilon}{h}$, $h\xi_i''$, $h\eta_i''$, какова бы ни была постоянная $h$. При этих условиях средние значения $E_k$ и $E_k'$, которые играют роль постоянных интегрирования, заменятся на $hE_k$ и $hE_k'$.

Мы допустили, что $E_k' = 0$, но мы видим, что если заменить $\varepsilon$ и $E_k$ на $\frac{\varepsilon}{h}$ и $hE_k$, наши неизвестные $\xi_i''$ и $\eta_i''$ заменятся на $h\xi_i''$ и $h\eta_i''$, тогда как $\xi_i' = \varepsilon\xi_i''$ и $\eta_i' = \varepsilon\eta_i''$ не изменятся.

Итак, $\xi_i'$ и $\eta_i'$ разлагаются по степеням $\tau$, $\varepsilon E_k \cos w_k$, $\varepsilon E_k \sin w_k$, причем коэффициенты разложений не зависят ни от $\varepsilon$, ни от $\tau$, ни от $E$, ни от $w$.

Это обстоятельство показывает нам практическую бесполезность замены переменных из § 145, которая служила нам лишь для упрощения изложения. Поэтому дальше будем предполагать, что $\varepsilon = 1$.

**159.** Наши уравнения не изменятся, если изменить знаки всех неизвестных $\xi''$ и $\eta''$, так как функция $S$ содержит только члены четной степени относительно этих неизвестных.

Изменить все знаки переменных — это значит изменить также и знаки средних значений $E_k$.

Следовательно, если мы изменим знаки средних значений $E_k$, то тем самым изменим знаки всех неизвестных. Отсюда вытекает следующее следствие:

Разложения $\xi''$ или $\eta''$ (или при $\varepsilon = 1$ разложения $\xi_i'$, $\eta_i'$) по степеням

$$E_k \cos w_k, \qquad E_k \sin w_k$$

будут содержать только члены нечетной степени.

Если вспомнить, что $\xi$ и $\eta$ суть линейные функции $\xi'$ и $\eta'$, то можно увидеть, что $\xi$ и $\eta$ могут быть разложены по степеням

$$\tau, \quad E_k \cos w_k, \qquad E_k \sin w_k.$$

Мы удовлетворим уравнениям движения, принимая в этих разложениях

$$\tau = 0, \qquad w_k = -\gamma'_k t + \bar{\omega}_k.$$

Тогда $\xi$ и $\eta$ разлагаются по степеням

$$E_k \cos(\gamma'_k t - \bar{\omega}_k), \qquad E_k \sin(\gamma'_k t - \bar{\omega}_k).$$

Эти разложения содержат только члены нечетной степени.

**160.** В главе VII (§ 136) мы видели, что $n'_i$ разлагаются не только по степеням $\mu$, но и по степеням $E^2$.

Точно так же здесь величины $\gamma'_i$, как и $\xi$, $\eta$, будут разложимы по степеням

$$E_k \cos w_k, \qquad E_k \sin w_k,$$

и так как они не должны зависеть от $w$, то эти разложения располагаются по степеням $E_k^2$.

Величины $E_k$, в предположении, что $\varepsilon = 1$, суть величины весьма малые, порядка эксцентриситетов и наклонностей. Если положить $E_k^2 = 0$, то $\gamma'_i$ обратятся в $\gamma_i$.

Заметим, что $\gamma_i$, согласно их определению, уже являются очень малыми величинами — порядка $\mu$, поэтому разности $\gamma_i - \gamma'_i$ будут еще более малыми, а именно, порядка $\mu E^2$.

**161. Симметрия.** Заметим, что наши уравнения не изменятся, если заменить $t$ на $-t$ и $\eta$ на $-\eta$.

Следовательно, если заменим $w$ на $-w$, $\tau$ на $-\tau$, не изменяя $E_k$, то $\xi$ не изменятся, а $\eta$ изменят знаки.

Мы можем положить

$$\tau = 0,$$

не полагая затем

$$w_i = -\gamma'_i t + \bar{\omega}_i.$$

Тогда разложения $\xi$ по косинусам и синусам кратных $w$ будут содержать только косинусы, а разложения $\eta$ будут содержать только синусы. Поэтому будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sum A \Pi (E_j^{q_j}) \cos \left(\sum p_j w_j\right), \\ \eta &= \sum A' \Pi (E_j^{q_j}) \sin \left(\sum p_j w_j\right), \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где

$$q_j \equiv p_j \pmod 2), \qquad q_j \geqslant |p_j|.$$

Это — следствие симметрии относительно плоскости $x_1x_3$.

162. Если придать системе вращение на произвольный угол $\varepsilon$ вокруг оси $x_3$, то наши уравнения не изменятся, а $\xi$ и $\eta$ заменятся на $\xi\cos\varepsilon + \eta\sin\varepsilon$ и $-\xi\sin\varepsilon + \eta\cos\varepsilon$.

Если, следовательно, увеличим все $w_j$ на одну и ту же постоянную $\varepsilon$, то выражения $\xi + i\eta$, $\xi - i\eta$ должны будут соответственно умножиться на

$$e^{i\varepsilon}, \quad e^{-i\varepsilon}.$$

Таким образом, будем иметь

$$A\cos\left(\sum p_jw_j + \sum p_j\varepsilon\right) + iA'\sin\left(\sum p_jw_j + \sum p_j\varepsilon\right) = \\ = e^{i\varepsilon}\left[A\cos\left(\sum p_jw_j\right) + iA'\sin\left(\sum p_jw_j\right)\right],$$

откуда

$$A = A', \qquad \sum p_j = +1.$$

Это новые условия, которым должны удовлетворять разложения (10).

163. Наши уравнения не изменятся также, если изменить знаки всех обликческих переменных. Это вытекает из симметрии относительно плоскости $x_1x_2$.

Согласно договоренности нечетные индексы соответствуют эксцентрическим переменным $\xi_i$ и $\eta_i$ и соответствующим постоянным $E_k$; четные индексы соответствуют обликческим переменным $\xi_i$ и $\eta_i$ и соответствующим постоянным $E_k$.

Поэтому если мы изменим знаки всех постоянных $E_k$ с четным индексом, то переменные $\xi$ и $\eta$ с нечетным индексом не изменятся, в то время как переменные $\xi$ и $\eta$ с четным индексом изменят знаки.

Следовательно, в разложениях (10) суммы

$$\sum q_j, \qquad \sum p_j,$$

распространенные на все четные значения индекса $j$, будут четными для эксцентрических переменных и нечетными для обликческих переменных.

В силу предыдущего параграфа для тех же сумм, распространенных на все нечетные значения индекса $j$, результат будет противоположным.

**164. Различные интегралы.** Уравнения (10) дают нам $\xi$ и $\eta$ в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням

$$E_k\cos w_k, \qquad E_k\sin w_k. \tag{12}$$

Эти уравнения можно решить относительно величин (12) и тогда находим

$$\left.\begin{aligned} E_k \cos w_k &= \varphi_k(\xi, \eta), \\ E_k \sin w_k &= \psi_k(\xi, \eta), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где правые части представляются рядами, расположенными по степеням $\xi$ и $\eta$. Отсюда выводятся интегралы

$$\varphi_k^2 + \psi_k^2 = E_k^2 = \text{const}. \tag{14}$$

Следовательно, наши уравнения обладают интегралами, разложимыми по степеням $\xi$ и $\eta$. Допустим, что, пренебрегая высшими степенями $\xi$ и $\eta$, приводим $R$ к первым членам ее разложения

$$R = R_0 + R_2 + R_4,$$

так что наши уравнения примут вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mu \frac{\partial (R_2 + R_4)}{\partial \eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mu \frac{\partial (R_2 + R_4)}{\partial \xi}.$$

Пренебрежем также в левой части (14) шестыми степенями $\xi$ и $\eta$ и пусть $V_2 + V_4$ обозначает оставшиеся члены (ясно, что левая часть может содержать только члены четной степени; следовательно, $V_2$ и $V_4$ представляют соответственно члены второй и четвертой степени).

Тогда будем иметь тождественно

$$\sum \left( \frac{\partial V_2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial \eta} - \frac{\partial V_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial \xi} \right) = 0,$$

$$\sum \left( \frac{\partial V_2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial R_4}{\partial \eta} - \frac{\partial V_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial R_4}{\partial \xi} \right) + \sum \left( \frac{\partial V_4}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial \eta} - \frac{\partial V_4}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Селлерье первый заметил, что существуют многочлены $V_2$ и $V_4$, удовлетворяющие этим тождествам. Это замечание позволило ему предугадать возможность уничтожения вековых членов, которая будет доказана ниже.

**165.** В § 155 мы заметили, что когда планеты не движутся в одной плоскости, приходится вычислять не только вековые возмущения эксцентриситетов, но еще и вековые возмущения наклонностей, при вычислении которых встречается трудность, происходящая из того, что один из коэффициентов $\gamma$ равен нулю.

Пришло время вернуться к этой трудности и показать, каким простым приемом можно ее преодолеть.

Мы видели, какова форма интегралов площадей. Они могут быть записаны в виде

$$H=\sum L-\sum \varrho=\mathrm{const},$$
$$U=\sum \eta_2\sqrt{L_1-\varrho_1-\frac{\varrho_2}{2}}=\mathrm{const},$$
$$V=\sum \xi_2\sqrt{L_1-\varrho_1-\frac{\varrho_2}{2}}=\mathrm{const}$$

(см. § 144). Они продолжают существовать и тогда, когда $L$, $\varrho$, $\xi$ и $\eta$ заменены их членами нулевого ранга. Действительно, это приводится к разложению неизвестных по синусам и косинусам кратных $w$ и по степеням $\mu$ и $\mu\tau=\tau'$ и затем к подстановке в них $\mu=0$, но при этом $\tau'$ считается конечным и отличным от нуля. Интегралы площадей, имеющие место для всех значений $\mu$, очевидно, будут существовать и при $\mu=0$.

Возьмем за плоскость $x_1x_2$ неизменную плоскость. Тогда $U$ и $V$ будут равны нулю.

Мы утверждаем, что в уравнениях (1) можно тогда заменить $R$ на $R+\alpha U^2+\alpha V^2$, где $\alpha$ — какой-либо постоянный коэффициент. Действительно, мы имеем

$$\frac{\partial(R+\alpha U^2+\alpha V^2)}{\partial\xi_i}=\frac{\partial R}{\partial\xi_i}+2\alpha U\frac{\partial U}{\partial\xi_i}+2\alpha V\frac{\partial V}{\partial\xi_i}=\frac{\partial R}{\partial\xi_i},$$

так как $U$ и $V$ равны нулю, и аналогично

$$\frac{\partial(R+\alpha U^2+\alpha V^2)}{\partial\eta_i}=\frac{\partial R}{\partial\eta_i}.$$

Таким образом, мы получим уравнения

$$\frac{d\xi_i}{dt}=-\mu\frac{\partial(R+\alpha U^2+\alpha V^2)}{\partial\eta_i},\qquad \frac{d\eta_i}{dt}=\mu\frac{\partial(R+\alpha U^2+\alpha V^2)}{\partial\xi_i}. \tag{15}$$

Мы не хотим сказать, что все интегралы системы (15) принадлежат системе (1) и наоборот, но только то, что системы (15) и (1) имеют бесконечное множество общих интегралов, а именно, такие интегралы, которые удовлетворяют условию $U=V=0$. Мы не нарушим общность, если ограничимся рассмотрением этих интегралов.

В самом деле, это приводится к предположению, что неизменная плоскость является плоскостью $x_1x_2$. Но мы всегда можем выбрать координатные плоскости таким образом, чтобы это условие выполнялось.

Сравним теперь функции

$$R,\ R+\alpha(U^2+V^2).$$

Мы утверждаем, что вторая из этих функций имеет ту же структуру, что и первая. Действительно, она разлагается по степеням $\xi$ и $\eta$ и содержит только члены четной степени относительно этих переменных.

Рассмотрим теперь члены второй степени. Они запишутся так:

$$R_2+\alpha\left(\sum \xi_2 \sqrt{L_1}\right)^2+\alpha\left(\sum \eta_2 \sqrt{L_1}\right)^2,$$

где

$$R_2=S_2'+T_2'+S_2''+T_2''.$$

Мы видим, что четыре выражения

$$S_2', \quad T_2',$$

$$S_2''+\alpha\left(\sum \xi_2 \sqrt{L_1}\right)^2, \quad T_2''+\alpha\left(\sum \eta_2 \sqrt{L_1}\right)^2$$

могут играть роль $S_2'$, $T_2'$, $S_2''$, $T_2''$, так как первые два зависят только от эксцентрических переменных, а последние два выражения зависят только от облических переменных. С другой стороны, первое и третье выражения зависят только от $\xi$, второе и четвертое только от $\eta$. Наконец, первое и третье выражения образованы из $\xi$, так же как второе и четвертое выражения образованы из $\eta$.

Функция

$$R+\alpha(U^2+V^2),$$

кроме того, удовлетворяет тем же условиям симметрии, что и функция $R$.

Таким образом, уравнения (15) имеют ту же форму, что и уравнения, которые мы уже рассматривали в этой главе. Отличие лишь в том, что трудность, которую мы отметили, исчезла. Никакой из коэффициентов, которые мы обозначили через $\gamma$, не равен нулю.

Мы можем, следовательно, применить к системе (15) выводы этой главы. Это система порядка $4n$ (если имеется $n+1$ тело, т. е. $n$ планет), и $4n$ переменных $\xi$ и $\eta$ могут быть разложены по степеням $4n$ величин

$$E_k \cos(\gamma_k' t-\overline{\omega}_k), \quad E_k \sin(\gamma_k' t-\overline{\omega}_k) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $E_k$ и $\overline{\omega}_k$ — $4n$ постоянных интегрирования.

Ясно, что по крайней мере один из коэффициентов $\gamma_k'$ будет зависеть от $\alpha$, так как одна из величин $\gamma_k$ зависит от $\alpha$, и что $\gamma_k'$ обращается в $\gamma_k$, когда все постоянные $E_k$ равны нулю (см. § 160). Пусть $\gamma_{2n}'$ — этот коэффициент, или один из таких коэффициентов. Мы должны сохранить только общие решения систем (1) и (15), для которых $U=V=0$. Эти решения не должны зависеть от $\alpha$. Следовательно, они не могут зависеть от аргумента

$$\gamma_{2n}' t-\overline{\omega}_{2n},$$

а это показывает, что для этих решений

$$E_{2n}=0.$$

С другой стороны, эти решения зависят еще от $4n-2$ произвольных постоянных, так как на решения наложены только два условия $U=V=0$ и они зависят от $2n-1$ аргументов $\gamma_k' t-\overline{\omega}_k$, ибо $2n-1$ из величин $\gamma$ не равны нулю при $\alpha=0$. Следовательно, другие постоянные

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_{2n-1}$$

вообще не равны нулю.

**166.** Вернемся к скобкам Якоби, определенным в § 16, т. е. положим

$$(\Phi,\ \Phi')=\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_i}\frac{\partial\Phi'}{\partial\eta_i}-\frac{\partial\Phi'}{\partial\xi_i}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_i}\right).$$

Уравнения (15) показывают, что

$$\frac{d\Phi}{dt}=-\mu(\Phi,\ R+\alpha U^2+\alpha V^2).$$

Более того, так как $H$, $U$ и $V$ являются интегралами уравнений (1), то будем иметь

$$(H,\ R)=(U,\ R)=(V,\ R)=0.$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$(U,\ V)=-H,\quad (U,\ H)=V,\quad (V,\ H)=-U.$$

Отсюда выводим равенство

$$(H,\ R+\alpha U^2+\alpha V^2)=0,$$

которое показывает, что $H$ есть интеграл уравнений (15) .

Поэтому имеем

$$H=\text{const}.$$

С другой стороны, находим

$$\frac{dU}{dt}=2\alpha\mu HV,\qquad \frac{dV}{dt}=-2\alpha\mu HU,$$

откуда, вспоминая, что $H$ постоянна, будем иметь

$$U=A\sin(2\alpha\mu Ht+\beta),\quad V=A\cos(2\alpha\mu Ht+\beta), \tag{16}$$

где $A$ и $\beta$ — постоянные интегрирования.

**167.** Чтобы кончить с этим вопросом, укажем геометрический смысл уравнений (15). Чтобы лучше его понять, допустим, что наши неизвестные $\xi$ и $\eta$ рассматриваются как функции двух независимых переменных $\tau$ и $u$ и определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=-\mu\frac{\partial R}{\partial\eta},\quad \frac{\partial\eta}{\partial\tau}=\mu\frac{\partial R}{\partial\xi},\tag{17}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=-\mu\frac{\partial(U^2+V^2)}{\partial\eta},\quad \frac{\partial\eta}{\partial u}=\mu\frac{\partial(U^2+V^2)}{\partial\xi}.\tag{18}$$

Прежде всего возникает вопрос, как узнать, что системы (17) и (18) совместны.

Мы имеем

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau\partial u}=-\mu\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)=\mu^2\left(\frac{\partial R}{\partial\eta},\ U^2+V^2\right),$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial\tau\partial u}=-\mu\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial(U^2+V^2)}{\partial\eta}\right)=\mu^2\left(\frac{\partial(U^2+V^2)}{\partial\eta},\ R\right).$$

Тождественны ли эти два выражения? Да, так как уравнения (1) имеют интеграл $V^2+U^2=\text{const}$, а поэтому

$$(R,\ U^2+V^2)=0.$$

Дифференцируя это тождество по $\eta$, получим

$$\left(\frac{\partial R}{\partial\eta},\ U^2+V^2\right)+\left(R,\ \frac{\partial(U^2+V^2)}{\partial\eta}\right)=0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, системы (17) и (18) совместны. Если теперь положим

$$\tau=t,\quad u=\text{const},$$

то возвратимся к системе (1); если же положим

$$\tau=t,\quad u=\alpha t+\text{const},$$

то придем к системе (15), так что из общего решения системы (17) и (18) мы выводим непосредственно общее решение либо системы (1), либо системы (15).

Рассмотрим, в частности, уравнения (18) и предположим, что $u$ есть независимая переменная, играющая роль времени, и изменения $\xi$ и $\eta$ определяются этой системой (18). Каков будет характер этих изменений?

Рассмотрим фигуру, образованную $(n+1)$-м телом, или, если угодно, Солнцем, расположенным в начале координат, и $n$ фиктивными планетами, определенными в главе II, с координатами $x_i'$ и, кроме того, векторами, представляющими по величине и направлению количества движения этих фиктивных планет, компоненты которых мы обозначали через $y_i'$.

Пусть $\Phi$ — какая-либо функция, зависящая только от взаимных расстояний $n$ фиктивных планет, от их гелиоцентрических расстояний и, кроме того, от величин векторов $(y'_1, y'_2, y'_3)$, ... и углов, образованных этими векторами между собой и прямыми, соединяющими фиктивные планеты с началом координат. Одним словом, пусть Ф — функция, не зависящая от выбора осей координат.

Мы утверждаем, что будем иметь

$$(\Phi, U^2+V^2)=0, \tag{19}$$

так как имеем

$$(\Phi, H)=(\Phi, U)=(\Phi, V)=0. \tag{20}$$

В самом деле, чтобы установить, что уравнения задачи трех тел допускают интегралы площадей, мы исходили из того, что функция $F$ не зависит от выбора осей.

Следовательно, система

$$\frac{dx'_i}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x'_i}$$

будет допускать интегралы площадей, что повлечет за собой равенства (20) и, следовательно, равенство (19).

Но это равенство означает в то же время, что Ф является интегралом уравнений (18).

Вернемся теперь к фигуре, о которой мы говорили, т. е. к фигуре, образованной началом, фиктивными планетами и векторами

$$(y'_1, y'_2, y'_3), \ldots$$

Из этих данных можно вывести оскулирующие орбиты различных фиктивных планет и вектор площадей $OA$ с компонентами $U$, $V$, $H$, так что эти орбиты и вектор $OA$ могут быть рассмотрены как составные части фигуры.

Если изменения этой фигуры определяются уравнениями (18), то она будет перемещаться как твердое тело, без деформаций, так как всякая функция Ф, не зависящая от выбора осей, будет оставаться постоянной.

Впрочем, начало в этом движении будет оставаться неподвижным, так что это движение будет сводиться к вращению в данный момент вокруг некоторой мгновенной оси $OI$, проходящей через начало.

Чтобы найти эту ось, вернемся от переменных

$$L, \lambda, \xi, \eta$$

к первоначальным переменным $x'_i$ и $y'_i$. Система (18) остается при этом канонической, так как замена переменных, которая связывает эти две системы переменных, является канонической.

Заметим, между прочим, что система (18) должна быть естественно дополнена уравнениями

$$\frac{dL}{du} = -\mu \frac{\partial (U^2+V^2)}{\partial \lambda}, \quad \frac{d\lambda}{du} = \mu \frac{\partial (U^2+V^2)}{\partial L}.$$

Добавление этих уравнений не будет нас беспокоить, так как $U^2+V^2$ не зависит от $\lambda$. Из этого следует, что:

1) $L$ — постоянны; 2) нам нет надобности заниматься вычислением производной $\frac{d\lambda}{du}$.

Поэтому, если мы вернемся к переменным $x'$ и $y'$, наша система будет иметь вид

$$\frac{dx'_i}{du} = \mu \frac{\partial (U^2+V^2)}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{du} = -\mu \frac{\partial (U^2+V^2)}{\partial x'_i}, \tag{21}$$

где

$$U = \sum\nolimits_3 (x'_2 y'_3 - x'_3 y'_2), \quad V = \sum\nolimits_3 (x'_3 y'_1 - x'_1 y'_3)$$

(см. главу II).

Тогда

$$\frac{dx'_1}{du} = 2\mu V x'_3.$$

Если точка $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ расположена на оси $OI$, то мы должны иметь

$$\frac{dx'_1}{du} = 0$$

и, следовательно,

$$x'_3 = 0.$$

Значит, мгновенная ось $OI$ лежит в плоскости $x_1x_2$.

С другой стороны, вектор площадей $OA$ должен быть постоянным по величине. Его проекция $H$ на плоскость $x_1x_2$ также постоянна, так как $H = \text{const}$ является интегралом. Следовательно, этот вектор образует постоянный угол с осью $x_3$ и его конец $A$ описывает окружность с центром на этой оси.

Скорость точки $A$ поэтому перпендикулярна, с одной стороны, к плоскости $x_1OA$, с другой стороны, к плоскости $IOA$. Из этого следует, что эти плоскости совпадают и что мгновенная ось $OI$ является проекцией вектора $OA$ на плоскость $x_1x_2$.

Угол $IOA$ постоянен, так что ось $OI$ постоянно остается на конусе вращения $C$, неизменно связанном с подвижной фигурой, ось которой есть вектор $OA$.

Таким образом, рассмотренное движение сводится к качению конуса $C$ по плоскости $x_1x_2$.

Теперь смысл системы (15) достаточно ясен. Пусть $v$ означает скорость какой-либо точки нашей фигуры в предположении, что изменения этой фигуры определяются системой (1); пусть $v'$ — та же самая скорость в предположении, что изменения определяются системой (18) и что $u$ означает время; пусть, наконец, $v''$ — скорость в предположении, что эти изменения определяются системой (15). Тогда скорость $v''$ будет геометрической суммой $v$ и $\alpha v'$.

Если угодно, мы можем предположить, что $+\alpha v'$ представляет скорость подвижной системы, неизменно связанной с подвижным конусом $C$, и что $v$ представляет относительную скорость точки нашей фигуры относительно подвижных осей, допуская, что это относительное движение происходит согласно закону Ньютона, т. е. согласно уравнениям (1). Тогда $v''$ представляет абсолютную скорость.

Мы можем, наоборот, рассматривать неподвижные оси как подвижные, и обратно. В этом случае система (1) представляет абсолютное движение наших $(n+1)$ тел, подчиняющихся закону Ньютона, а система (15) представляет относительное движение этих же тел относительно наблюдателя, неизменно связанного с плоскостью, которая катится по неподвижному круговому конусу $C$.

Таков геометрический смысл исследуемых уравнений.

168. Введем углы Эйлера, определяющие положение трех подвижных осей, неизменно связанных с конусом $C$, относительно неподвижных осей координат, причем третья подвижная ось есть прямая $OA$.

Легко видеть, что если будем изменять $u$, оставляя $\tau$ постоянным, то угол $\theta$ остается постоянным, а углы $\varphi$ и $\psi$ изменяются пропорционально $u$.

Неподвижные координаты будут функциями подвижных координат и трех углов Эйлера. Рассматриваемые как функции этих углов, они будут разложимы по степеням

$$\sin\frac{\theta}{2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{\psi-\varphi}{2},\quad \cos\frac{\theta}{2}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{\psi+\varphi}{2}. \tag{22}$$

Добавим, что они будут однородными многочленами второй степени относительно этих четырех величин.

То же самое имеет место, если мы вернемся к координатам $\xi$ и $\eta$. Если мы отнесем систему к нашим неподвижным осям (т. е. изменяющимся вместе с $u$, но неизменным при постоянном $u$), то неизвестные будут удовлетворять уравнениям (1). И наоборот, если отнесем систему к неподвижным осям и будем изменять одновременно $u$ и $\tau$ таким образом, что $\tau = t$, $u = \alpha t + \text{const}$, то неизвестные будут удовлетворять уравнениям (15).

Обозначим через $\xi$, $\eta$ значения неизвестных, если система отнесена к неподвижным осям, и $\xi'$, $\eta'$ — их значения, если система отнесена к подвижным осям.

Тогда $\xi$ и $\eta$ будут функциями $\xi'$, $\eta'$ и величин (22). Они будут однородными многочленами первой степени относительно $\xi'$, $\eta'$ и однородными многочленами второй степени относительно величин (22).

Но $\xi'$ и $\eta'$ представляют в точности общие решения систем (1) и (15), которые рассматривались в § 165. Поэтому они разложимы по степеням выражений

$$E_k \frac{\cos}{\sin} w_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1).$$

Положим *)

$$\sin\frac{\theta}{2}=E_{2n},\quad \frac{\psi-\varphi}{2}=\omega_1,\quad \frac{\psi+\varphi}{2}=\omega_2.$$

Так как $\cos\frac{\theta}{2}$ разлагается по четным степеням $\sin\frac{\theta}{2}$, то переменные $\xi$, $\eta$ будут разлагаться по степеням

$$E_{2n} \frac{\cos}{\sin} \omega_1$$

и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\xi&=\sum AE_{2n}^{q}\cos\left(\sum k_j w_j+p_1\omega_1+p_2\omega_2+h\right),\\ \eta&=\sum A'E_{2n}^{q}\sin\left(\sum k_j w_j+p_1\omega_1+p_2\omega_2+h'\right).\end{aligned}$$

Коэффициенты $A$, $A'$ суть постоянные, содержащие, кроме того, множитель

$$E_1^{q_1}\cdot E_2^{q_2}\ldots E_{2n-1}^{q_{2n-1}}.$$

Скоро мы определим постоянные $h$ и $h'$. Целое положительное число $q_1$ не меньше чем $p_1$ по абсолютной величине. Что касается $p_1$ и $p_2$, то они принимают только значения 0, $\pm 1$, $\pm 2$.

Вернемся к рассуждениям § 161. Будем выбирать частные решения так, чтобы начальные значения переменных $\eta'$ были равны нулю при

$$w_1=w_2=\ldots=w_{2n-1}=0.$$

Симметрия уравнений требует, чтобы в этих решениях при изменении знака $w$ $\xi'$ не менялись, а $\eta'$ меняли бы знаки.

*) Величины $\omega_1$ и $\omega_2$, введенные в этом параграфе, не имеют никакого отношения к тем, которые мы обозначали выше теми же буквами. В следующих главах мы вернем этим буквам их первоначальное значение.

Это именно те решения, которые мы рассматривали, так как они заведомо удовлетворяют условию

$$E'_1 = E'_2 = \ldots = E'_{2n-1} = 0.$$

Итак, если мы изменим знаки величин $w$ и $\omega$, то $\xi'$ не изменятся, а $\eta'$ изменят знаки. Поэтому в силу симметрии соотношений, которые связывают $\xi$ и $\eta$ с $\xi'$, $\eta'$, $\omega$, переменные $\xi$ не изменятся, а переменные $\eta$ изменят знаки. Отсюда следует, что $h$ и $h'$ равны нулю.

Вернемся теперь к рассуждениям § 162.

Допустим, что вся система повернулась на некоторый угол $\varepsilon$ или вокруг третьей неподвижной оси, или вокруг третьей подвижной оси координат.

В первом случае

$$w_1, \ w_2, \ \ldots, \ w_{2n-1}$$

не изменятся, $\psi$ не изменится, $\varphi$ увеличится на $\varepsilon$. Переменные $\xi$ и $\eta$ должны быть заменены на

$$\xi \cos \varepsilon + \eta \sin \varepsilon, \quad -\xi \sin \varepsilon + \eta \cos \varepsilon.$$

Кроме того, $\omega_1$ и $\omega_2$ заменяются на

$$\omega_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \ \omega_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что мы должны иметь

$$A = A', \quad \frac{p_1 - p_2}{2} = 1.$$

Следовательно, будем иметь одно из трех решений

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 0; \quad p_1 = p_2 = 1; \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 2.$$

Совершим теперь поворот системы вокруг третьей подвижной оси. Все $w$ увеличатся на $\varepsilon$, но если одновременно с этим мы придадим подвижной системе вращение на угол $-\varepsilon$, т. е. если мы изменим $\psi$ на $\psi + \varepsilon$, то положение системы относительно неподвижных осей не изменится; $\xi$ и $\eta$ также не изменятся.

Таким образом, переменные $\xi$ и $\eta$ не изменятся, если мы заменим $w$ на $w + \varepsilon$, $\omega_1$ на $\omega_1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $\omega_2$ на $\omega_2 + \frac{\varepsilon}{2}$. Это приводит к равенству

$$\sum k + \frac{p_1 + p_2}{2} = 0.$$

Введем теперь вспомогательные аргументы

$$w'_i = w_i - 2\omega_2 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1),$$
$$w'_{2n} = \omega_1 - \omega_2.$$

В силу значения $\Sigma k$, найденного выше, будем иметь

$$\sum kw + p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = \sum k_i w_i' + p_1 w_{2n}',$$

откуда

$$\xi = \sum AE_{2n}^{q_1} \cos\left(\sum k_i w_i' + p_1 w_{2n}'\right),$$

$$\eta = \sum AE_{2n}^{q_1} \sin\left(\sum k_i w_i' + p_1 w_{2n}'\right).$$

Легко видеть, что переменные $\xi$ и $\eta$ разлагаются по степеням

$$E_i \frac{\cos}{\sin} w_i', \quad E_{2n} \frac{\cos}{\sin} w_{2n}'.$$

Ясно также, что сумма целых коэффициентов

$$\sum k_i + p_1$$

равна $+1$, что соответствует результату, полученному в § 162. Эти аргументы $w'$ изменяются пропорционально времени $t$, но если их рассматривать как линейные функции двух независимых переменных $\tau$ и $u$, введенных выше, то

$$w_1', w_2', \ldots, w_{2n-1}'$$

будут зависеть одновременно от $\tau$ и $u$ (так как $w_i$ зависят от $\tau$, $\omega_2$, $u$), а их разности зависят лишь от $\tau$. Что касается члена $w_{2n}'$, то он зависит только от $u$. Поэтому если положить $E_{2n}=0$, то члены, которые содержат $w_n'$, обращаются в нуль, и остаются только те члены, для которых $p_1 = q_1 = 0$.

В то же самое время $\frac{d\omega_2}{du}$ обращается в нуль и $\omega_2$ приводится к постоянной, так что наши выражения более не зависят от $\alpha$ и удовлетворяют одновременно уравнениям (1) и уравнениям (15).

Таким образом, полностью выясняется геометрическое значение уравнений (15), так же как и их связь с уравнениями (1).

**169.** В результате изменения использованного приема предыдущие рассуждения могут быть значительно упрощены. Заменим систему (15) системой

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial (R + \alpha H)}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial (R + \alpha H)}{\partial \xi_i} \tag{15'}$$

и системы (17) и (18) системами

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\mu \frac{\partial R}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \mu \frac{\partial R}{\partial \xi}, \tag{17'}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\mu \frac{\partial H}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = \mu \frac{\partial H}{\partial \xi}. \tag{18'}$$

Можно проверить, как и выше, что системы (17′) и (18′) совместны и что решение уравнений (15′) можно вывести из решения системы (17′) и (18′), полагая

$$\tau = t, \qquad u = \alpha t + \text{const}.$$

Можно проверить также, что функция $R+\alpha H$ имеет ту же структуру, что и функция $R$, следовательно, уравнения (15′) имеют ту же форму, что и уравнения (1), с той лишь разницей, что никакая из величин $\gamma$ не равна нулю, т. е. отмеченная выше трудность здесь отсутствует.

Каков геометрический смысл уравнений (15′) и (18′)? Последние интегрируются непосредственно, так как они имеют вид

$$\frac{d\xi}{du} = \mu\eta, \qquad \frac{d\eta}{du} = -\mu\varepsilon.$$

Из них выводим, что когда переменная $u$ изменяется пропорционально времени, а $\tau$ остается постоянной, вся система вращается вокруг оси $x_3$ равномерно, как твердое тело.

Следовательно, уравнения (15′) представляют движение наших $(n+1)$ тел, отнесенных не к неподвижным, а к подвижным осям, вращающимся равномерно вокруг оси $x_3$.

Одно из свойств уравнений (15) здесь не имеет места, так как уравнения (1) и (15′) не имеют никакого общего решения. Но легко получить общее решение уравнений (1) из общего решения уравнений (15′). Пусть, в самом деле,

$$\xi = \sum B \cos\left(\sum k_i w_i\right), \qquad \eta = \sum B \sin\left(\sum k_i w_i\right) \tag{23}$$

есть общее решение уравнений (15′). В силу § 162 имеем

$$\sum k_i = 1.$$

Надо, конечно, положить

$$w_i = -\gamma_i' t + \bar{\omega}_i.$$

Каким образом $\gamma'$ и $B$ зависят от $\alpha$?

Если заменить $\alpha$ на $\alpha+\beta$, то угловая скорость вращения подвижных осей увеличится на $\mu\beta$, так что $\xi$ и $\eta$ заменятся выражениями

$$\xi \cos \mu\beta t + \eta \sin \mu\beta t, \qquad -\xi \sin \mu\beta t + \eta \cos \mu\beta t,$$

которые показывают, что $w_i$ должны замениться на $w_i - \mu\beta t$. Следовательно, когда $\alpha$ заменяется на $\alpha+\beta$, $\gamma'$ заменяется на $\gamma'+\mu\beta$, а $B$ не изменяются. Таким образом, $B$ не зависят от $\alpha$, а $\gamma'$ являются линейными функциями $\alpha$; более того, их разности не зависят от $\alpha$.

Чтобы получить решение уравнения (1), достаточно положить $\alpha=0$. Известно, что для $\alpha=0$ одна из величин $\gamma'$, а именно $\gamma_{2n}'$, обращается в нуль. Поэтому при $\alpha=0$ коэффициент $\gamma'_i$ заменяется на $\gamma'_i-\gamma'_{2n}$.

Итак, чтобы найти решение уравнений (1), достаточно положить в формулах (23)

$$w_i=(\gamma'_{2n}-\gamma'_i)\,t+\overline{\omega}_i.$$

Впрочем, нет необходимости составлять уравнения (15) или (15′). Можно исходить из уравнений (1), и вычисление при этом не будет встречаться ни с какой трудностью. Мы ввели вспомогательные уравнения (15) или (15′) лишь для того, чтобы *показать*, что эти трудности на самом деле отсутствуют. Это средство для доказательства, но не для вычислений.

**170. Обобщение.** До сих пор предполагалось, что функция $R$ имеет частный вид, а именно, обладает свойствами:

1. Она не изменяется при изменении знаков всех переменных $\eta$, или при изменении знаков всех облических переменных. Если отказаться от этого условия, все результаты, кроме тех, которые получены в § 163 и 166, будут иметь место.

2. Она не изменяется, когда мы заменяем $\xi$ и $\eta$ на

$$\xi\cos\varepsilon-\eta\sin\varepsilon, \qquad \xi\sin\varepsilon+\eta\cos\varepsilon.$$

Если отказаться от этого условия, то все результаты, кроме результатов § 162, также будут иметь место.

3. Она содержит только члены четной степени относительно $\xi$ и $\eta$. Если она содержит члены степени 3, 5, 7, . . ., *но не имеет члена первой степени*, то все результаты, кроме результатов § 159, также продолжают существовать.

Переменные $\xi$ и $\eta$ будут разложимы по степеням величин

$$E_k \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} w_k,$$

но эти разложения будут содержать не только члены нечетной степени, но также и члены четной степени.

4. Наконец, функция $R_2$ имеет частный вид.

Что произойдет, если отказаться от последнего условия? Пусть тогда $R_2$ есть *произвольный* однородный многочлен второй степени относительно $4n$ переменных $\xi$ и $\eta$ и пусть даны канонические уравнения

$$\frac{d\xi_i}{dt}=-\mu\frac{\partial R_2}{\partial\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt}=\mu\frac{\partial R_2}{\partial\xi_i}. \tag{24}$$

Эти уравнения являются линейными с постоянными коэффициентами. Следовательно, они допускают $4n$ решений вида

$$\xi'_i=\alpha_i^k e^{\lambda_k t}, \qquad \eta'_i=\beta_i^k e^{\lambda_k t}, \tag{25}$$

и нам остается определить постоянные $\alpha_i^k$, $\beta_i^k$, $\lambda_k$; мы находим

$$\lambda_k\alpha_i^k = -\mu\frac{\partial R_2}{\partial\beta_i^k}; \qquad -\lambda_k\beta_i^k = \mu\frac{\partial R_2}{\partial\alpha_i^k}.$$

Разумеется, в функции $R_2$ переменные $\xi_i$ и $\eta_i$ должны быть заменены постоянными $\alpha_i^k$ и $\beta_i^k$.

Из этих $4n$ уравнений (которые являются линейными и однородными относительно $\alpha$ и $\beta$) исключаем $4n$ величин $\alpha$ и $\beta$. Таким образом, мы получим алгебраическое уравнение степени $4n$ относительно $\lambda_k$. Покажем, что корни его $\lambda_k$ попарно равны и имеют противоположные знаки.

Пусть

$$\xi_i'' = \gamma_{ik}e^{\mu_k t}, \qquad \eta_i'' = \delta_{ik}e^{\mu_k t} \tag{26}$$

— другое решение уравнений (24), соответствующее другому корню $\mu_k$. Составим из решений (25) и (26) выражение

$$\sum(\xi_i'\eta_i'' - \eta_i'\xi_i''). \tag{27}$$

Это выражение постоянно, так как его производная равна

$$\sum\left(\xi'\frac{d\eta''}{dt} - \eta'\frac{d\xi''}{dt}\right) - \sum\left(\xi''\frac{d\eta'}{dt} - \eta''\frac{d\xi'}{dt}\right)$$

или

$$\mu\sum\left(\xi'\frac{\partial R_2}{\partial\xi''} + \eta'\frac{\partial R_2}{\partial\eta''}\right) - \mu\sum\left(\xi''\frac{\partial R_2}{\partial\xi'} + \eta''\frac{\partial R_2}{\partial\eta'}\right),$$

а последнее выражение равно нулю в силу хорошо известных теорем о квадратичных формах.

С другой стороны, выражение (27) равно постоянной, умноженной на

$$e^{(\mu_k+\lambda_k)t}.$$

Следовательно, нужно, чтобы эта постоянная была равна нулю или чтобы соблюдалось равенство $\mu_k+\lambda_k=0$. Но если выражение (17) равно нулю, *каков бы ни был выбранный корень* $\mu_k$, оно будет равно нулю и в том случае, когда $\xi_i''$ и $\eta_i''$ заменим *общим решением* уравнений (24), так как общее решение является линейной комбинацией выражений вида (26). Но тогда мы имели бы между $\xi$ и $\eta$ линейное соотношение и эти переменные не будут более независимыми.

Следовательно, если задан корень $\lambda_k$, всегда существует корень $\mu_k$ такой, что $\mu_k+\lambda_k=0$, т. е. все корни алгебраического уравнения попарно равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки, что и требовалось доказать.

Итак, возьмем $\mu_k = -\lambda_k$. Выражение (27) будет постоянным, отличным от нуля и без ограничения общности можно положить его равным единице. Положим

$$\xi_i = \sum \alpha_i^k X_k + \sum \gamma_i^k Y_k,$$
$$\eta_i = \sum \beta_i^k X_k + \sum \delta_i^k Y_k.$$

Мы имеем $4n$ корней $\lambda_k$, но тем не менее индексу $k$ будем придавать только $2n$ значений, так как каждая пара корней $\lambda_k$ и $-\lambda_k$ должна считаться только один раз.

Составим выражение

$$\sum (\xi_i \, d\eta_i - \eta_i \, d\xi_i).$$

Если заметим, что согласно свойствам уравнения (27) имеем

$$\sum (\alpha_i^k \delta_i^k - \beta_i^k \gamma_i^k) = \sqrt{-1},$$
$$\sum (\alpha_i^k \delta_j^k - \beta_i^k \gamma_j^k) = 0 \qquad (j \gtrless i),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

то увидим, что

$$\sum (\xi_i \, d\eta_i - \eta_i \, d\xi_i) = \sqrt{-1} \quad \sum (X_k \, dY_k - Y_k \, dX_k),$$

а это показывает, что

$$\sum \xi \, d\eta - i \sum X \, dY$$

есть точный дифференциал.

Наши уравнения (24) сохранят при этом каноническую форму и примут вид

$$\frac{dX_k}{dt} = i\mu \frac{\partial R_2}{\partial Y_k}, \qquad \frac{dY_k}{dt} = -i\mu \frac{\partial R_2}{\partial X_k}. \tag{24'}$$

Но эти уравнения должны допускать решение

$$X_k = e^{\lambda_k t}, \qquad Y_k = e^{-\lambda_k t}, \qquad X_j = Y_j = 0 \qquad (j \gtrless k).$$

Поэтому должно быть

$$i\mu \frac{\partial R_2}{\partial Y_k} = \lambda_k X_k, \qquad -i\mu \frac{\partial R_2}{\partial X_k} = -\lambda_k Y_k,$$

откуда

$$i\mu R_2 = +\sum \lambda_k X_k Y_k.$$

Пусть теперь

$$\sqrt{2}\, X_k = \xi'_k + i\eta'_k, \qquad \sqrt{2}\, Y_k = \xi'_k - i\eta'_k.$$

(Величины $\xi'$ и $\eta'$ здесь не имеют того же смысла, что в уравнениях (25).)

Мы видим, что

$$2X_k\,dY_k+2i\xi_k'\,d\eta_k'$$

есть точный дифференциал, и то же самое можно сказать, следовательно, относительно

$$\sum X\,dY+i\sum \xi'\,d\eta',$$
$$\sum \xi\,d\eta-\sum \xi'\,d\eta'.$$

Поэтому уравнения (24) принимают вид

$$\frac{d\xi'}{dt}=-\mu\frac{\partial R_2}{\partial\eta'},\qquad \frac{d\eta'}{dt}=\mu\frac{\partial R_2}{\partial\xi'},$$

где имеем, кроме того,

$$\mu R_2=\sum\frac{\lambda_k}{i}\cdot\frac{\xi_k'^2+\eta_k'^2}{2}.$$

Таким образом, функция $R_2$, выраженная в новых переменных, имеет ту же форму, что и в том случае, когда применялась замена переменных из § 151. Значит, замена переменных, которую мы сейчас определили и которая является канонической и линейной, может заменить в общем случае замену § 151.

Величины $\frac{\lambda_k}{i}$ играют роль $\gamma_k$.

Допустим теперь, что

$$R_2=R_2'+R_2'',$$

где $R_2'$ имеет форму, рассмотренную в главе VIII и в начале главы IX, тогда как $R_2''$ весьма мала. Такой факт имеет место во всех приложениях, с которыми мы можем иметь дело.

Рассмотрим значения $\gamma_k$, полученные при помощи функции $R_2'$. Все эти $\gamma_k$ являются вещественными согласно § 145, и если $R_2''$ равна нулю, будем иметь

$$\lambda_k=\pm i\gamma_k.$$

Допустим сначала, что ни одна из $\gamma_k$ не равна нулю. В этом случае все $\lambda_k$ располагаются парами. Действительно, два корня $\lambda_k$, составляющие пару, должны быть мнимыми и сопряженными и в то же время равными и противоположными по знаку. В самом деле, мы знаем, что $\lambda_k$ должны быть попарно мнимыми и сопряженными, и так как они отличаются весьма мало от $i\gamma_k$, то это значит, что два корня $\lambda_k$, которые мало отличаются от $+i\gamma_k$ и $-i\gamma_k$, являются сопряженными. С другой стороны, мы знаем, что $\lambda_k$ попарно равны и противоположны по знаку. Это может иметь место для таких двух корней $\lambda_k$, которые мало отличаются от $+i\gamma_k$ и $-i\gamma_k$. Следовательно, $\lambda_k$ и $-\lambda_k$ — мнимые и сопряженные.

Отсюда следует, что решения (25) и (26) являются мнимыми и сопряженными и наша замена переменных является вещественной.

Это рассуждение неприменимо в том случае, когда одна из величин $\gamma$ равна нулю, так как два корня, $\lambda_k$ и $-\lambda_k$, могут быть вещественными и весьма близкими к нулю. Но во всех приложениях, в которых мы имеем дело с задачей трех тел, всегда можно прийти к случаю, где ни одна из величин $\gamma$ не равна нулю, применяя для этого приемы, изложенные в § 165 и 169.

171. Можно также поставить задачу и по-другому. Допустим, что мы имеем

$$R = R' + \mu R'',$$

где $R'$ имеет форму, рассмотренную в начале этой главы, $\mu$ — весьма малый параметр, $R''$ — произвольная функция, допускающая лишь разложение по степеням $\xi$ и $\eta$ и содержащая члены всех степеней, в том числе даже первой степени и члены второй степени произвольного вида.

Уравнения (1) будут иметь вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mu\frac{\partial R'}{\partial \eta} - \mu^2\frac{\partial R''}{\partial \eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mu\frac{\partial R'}{\partial \xi} + \mu^2\frac{\partial R''}{\partial \xi}.$$

Сделаем замену переменных § 151, а потом замену § 154, полагая при этом $\mu = \varepsilon^4\mu'$. Тогда будем иметь

$$\xi' = \varepsilon\xi'', \qquad \eta' = \varepsilon\eta'', \qquad \mu = \varepsilon^4\mu',$$

а

$$R' = R'_0 + R'_2 + R'_4 + \ldots,$$

где $R'_k$ представляет совокупность членов степени $k$. Мы положим еще

$$R = R'_0 + \varepsilon^2 S, \qquad R'_2 = \varepsilon^2 S_2, \qquad \mu S = \mu S_2 + \varepsilon^2 U,$$

откуда

$$U = \frac{R'_4 + R'_6 + \ldots}{\varepsilon^4} + \mu' R''$$

и

$$\frac{d\xi''}{dt} = -\mu\frac{\partial S}{\partial \eta''}, \qquad \frac{d\eta''}{dt} = \mu\frac{\partial S}{\partial \xi''}.$$

Таким образом, мы снова возвращаемся к уравнениям § 154, и к тому, что было сказано, мы почти ничего не можем добавить. Единственное отличие заключается в том, что разложение $U$, которое в предыдущих параграфах содержало только четные степени, здесь будет содержать все степени, но это не влечет за собой никаких изменений.

Переменные $\xi$ и $\eta$, как и раньше, будут разлагаться по степеням

$$E_k \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} w_k,$$

но эти разложения будут содержать вместо членов только нечетной степени также члены четной степени и даже член нулевой степени.

Впрочем, само собой разумеется, что выводы, сделанные в § 161—163, будут иметь место, если только $R''$ обладает теми же свойствами симметрии, что и $R'$.

## ГЛАВА X

# ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

**172.** В главах V и VI мы рассматривали способ построения разложений, удовлетворяющих уравнениям движения в общем случае задачи трех тел. В главе VII мы останавливались на одном частном случае, а именно, на ограниченной задаче, и показали, каким образом в этом случае можно уничтожить в разложениях вековые члены.

В главах VIII и IX мы провели специальное исследование вековых возмущений, т. е. мы старались определить в общем случае задачи трех тел члены нулевого ранга наших разложений. Мы видели, что эти члены определяются каноническими уравнениями, имеющими тот же вид, как и в главе VII, и которые, следовательно, приводят к разложениям, в которых можно уничтожить вековые члены.

Теперь мы хотим вернуться к более общим разложениям главы VI и показать методом, подобным тому, который применялся в главе VII, что в них тоже можно уничтожить вековые члены.

Речь идет об интегрировании канонических уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial L}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \xi}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В главе VI мы видели, что им можно удовлетворить разложениями следующей формы:

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i, \quad \lambda_i = w_i + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i, \quad \xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i, \quad \eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i. \quad (2)$$

Величины $\delta L$, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ разлагаются по степеням $\mu$, $\tau$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ и по синусам и косинусам кратных $w$, т. е. они могут быть представлены в виде

$$\sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 \tau^m \cos\left(\sum kw + h\right), \qquad (3)$$

где $k$ — целые числа; $A$ и $h$ зависят только от постоянных $L_i^0$ и $\lambda_i^0$, а $\mathfrak{M}_0$ есть целый многочлен относительно $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$. Величины $\delta L$, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ обращаются в нуль при $\mu=0$; они обращаются также в нуль при $\tau=w_i=0$, так что постоянные $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$ $\eta_i^0$ являются начальными значениями неизвестных $L$, $\lambda$, $\xi$, $\eta$ при $\tau=w=0$.

Разложения (2) и (3) удовлетворяют уравнениям (1), если положить

$$\tau=t+c, \qquad w_i=n_it+\varepsilon_i,$$

каковы бы ни были постоянные $c$ и $\varepsilon_i$.

Постараемся применить к этим разложениям прием § 129. Будем исходить из теоремы § 16, которая выражается формулами

$$\sum x\,dy=d\Omega+\sum A_k\,d\alpha_k-F\,dt,$$
$$\frac{d\Omega}{dt}=F-\sum x\frac{\partial F}{\partial x}.$$

В интересующем нас случае роль $x$ играют $L$ и $\xi$, роль $y$ играют $\lambda$ и $\eta$, а роль $F$ играет $-F$. Тогда наши формулы принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\sum L\,d\lambda+\sum\xi\,d\eta=d\Omega+\sum A_k\,d\alpha_k+F\,dt,\\ \frac{d\Omega}{dt}=\sum L\frac{\partial F}{\partial L}+\sum\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}-F.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Эти формулы аналогичны формулам (13) и (14) из главы VII.

Второе уравнение (4) можно написать в форме

$$\Delta\Omega=\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+\sum n_i\frac{\partial\Omega}{\partial w_i}=\sum L\frac{\partial F}{\partial L}+\sum\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}-F,\tag{5}$$

аналогичной форме уравнения (15) из главы VII.

Правая часть равенства (5) разложима в форме (3), поэтому уравнение (5) имеет такой же вид, что и уравнение (13) главы VI; отсюда заключаем, что одно из решений этого уравнения также разложимо в форме (3). Мы рассмотрим именно это решение, поэтому будем считать, что функция $\Omega$ разложима в виде (3).

Таким образом, величины $L$, $\lambda$, $\xi$, $\eta$, $\Omega$ являются функциями $\tau$, $w$ и постоянных интегрирования $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, но мы будем считать, что $\lambda_i^0$ суть данные задачи, так что наши неизвестные будут функциями только от

$$\tau,\ w_k,\ L_i^0,\ \xi_i^0,\ \eta_i^0.$$

Следовательно, можно написать

$$\begin{aligned}&\sum L\,d\lambda+\sum\xi\,d\eta-d\Omega=\\ &\qquad=H\,d\tau+\sum W_i\,dw_i+\sum C_i\,dL_i^0+\sum X_i\,d\xi_i^0+\sum Y_i\,d\eta_i^0.\end{aligned}\tag{6}$$

В формуле (6) коэффициенты $H$, $W_i$, $C_i$, $X_i$, $Y_i$ разложимы по степеням $\tau$ и по синусам и косинусам кратных $w$; то же самое имеет место для величин $C_i^0$, если положить

$$C_i^0 = C_i + \tau \sum W_k \frac{\partial n_k}{\partial L_i^0}.$$

Впрочем, можно написать проще:

$$C_i^0 = C_i + \tau W_i \frac{\partial n_i}{\partial L_i^0},$$

так как

$$n_i = \frac{M_i}{(L_i^0)^3}$$

является функцией только от $L_i^0$.

Положим теперь

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

откуда

$$d\tau = dt, \qquad dw_i = n_i\, dt + d\varepsilon_i + t\, dn_i.$$

Мы найдем

$$\sum L\, d\lambda + \sum \xi\, d\eta - d\Omega = \left(H + \sum W_i n_i\right) dt + \sum W_i\, d\varepsilon_i + \\ + \sum C_i^0 dL_i^0 + \sum X_i\, d\xi_i^0 + \sum Y_i\, d\eta_i^0. \quad (7)$$

Замечая, что $C_i^0$ сводится к

$$C_i + tW_i \frac{\partial n_i}{\partial L_i^0},$$

имеем

$$C_i^0\, dL_i^0 = C_i\, dL_i^0 + tW_i\, dn_i.$$

Постоянными интегрирования, которые играют роль $\alpha_k$ в формуле (4), являются здесь $L_i^0$, $\varepsilon_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$. Следовательно, $W_i$, $C_i^0$, $X_i$, $Y_i$, которые играют роль $A_k$ в формуле (4), будут постоянными, не зависящими от времени, а зависящими только от постоянных интегрирования.

Более того,

$$H + \sum W_i n_i = F$$

также не будет зависеть от времени в силу интеграла живых сил. Но величины $W_i$ разложимы по степеням $\mu$, $\tau$ и по синусам и косинусам кратных $w$, поэтому к ним применима лемма § 107 и рассуждения § 129.

Для

$$\tau = t, \qquad w_k = n_k t$$

имеем

$$W_i = f_0,$$

где $f_0$, как следует из предыдущего, есть постоянная, которая может зависеть только от постоянных интегрирования

$$L_i^0,\ \varepsilon_i,\ \xi_i^0,\ \eta_i^0.$$

Но здесь постоянные $\varepsilon_i$ равны нулю, так как мы положили

$$w_k = n_k t.$$

Следовательно, $f_0$ будет зависеть только от

$$L_i^0,\ \xi_i^0,\ \eta_i^0.$$

В силу леммы из § 107 соотношение

$$W_i = f_0,$$

которое справедливо при $\tau = t$, $w_k = n_k t$, будет иметь место т о ж д е с т в е н н о, каковы бы ни были значения $\tau$ и $w$.

Отсюда следует, что $W_i$ может зависеть только от $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$.

По этой же причине то же будет и для $C_i^0$, $X_i$, $Y_i$, а также для $F$ (и следовательно, для $H$).

Вернемся к тождеству (6) и положим в нем

$$\tau = w_i = 0$$

и, следовательно,

$$d\tau = dw_i = 0.$$

Величины $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ обратятся соответственно в $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, так как эти постоянные, по определению, суть начальные значения $\lambda$, $\xi$, $\eta$ при $\tau = w = 0$. Поэтому будем иметь

$$d\lambda = 0,$$

в силу того, что $\lambda_i^0$ — раз и навсегда заданные постоянные. Будем иметь так же (так как $\tau$ равно нулю)

$$C_i = C_i^0,$$

и если $\Omega_0$ представляет значение $\Omega$ при $\tau = w = 0$, то наша формула (6) принимает вид

$$\sum \xi_i^0 d\eta_i^0 - d\Omega_0 = \sum C_i^0 dL_i^0 + \sum X_i d\xi_i^0 + \sum Y_i d\eta_i^0. \tag{8}$$

Если положим $\tau = 0$, сохраняя для $w$ произвольные значения, то $C_i$ будут все же равны $C_i^0$, а формула (6) дает

$$\sum L\, d\lambda + \sum \xi\, d\eta - d\Omega =$$
$$= \sum W_i\, dw_i + \sum C_i^0 dL_i^0 + \sum X_i\, d\xi_i^0 + \sum Y_i\, d\eta_i^0. \tag{9}$$

Важно заметить, что величины $C_i^0$, $X_i$, $Y_i$, не зависящие от $w$, принимают одинаковые значения в формуле (8) и в формуле (9).

Следовательно, если мы вычтем эти два равенства одно из другого и перенесем некоторые члены в другую часть равенства, то найдем

$$\sum L\,d\lambda + \sum \xi\,d\eta - \sum W\,dw - \sum \xi_i^0\,d\eta_i^0 = d\,(\Omega - \Omega_0). \qquad (10)$$

Эта формула предполагает, что положено

$$\tau = 0.$$

Подставим в разложения (2) и (3) $\tau = 0$. Тогда они будут определять $L$, $\lambda$, $\xi$, $\eta$ в функции $w$ и постоянных $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, так как $\lambda_i^0$ рассматриваются как заданные раз и навсегда.

Кроме того, величины $W$ суть функции от $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$. Следовательно, в свою очередь, $L_i^0$ будут функциями $W$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, так что в конечном счете неизвестные

$$L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

суть функции от

$$W_i, \quad w_i, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0,$$

и эти функции даются разложениями (2), (3) (в которых надо положить $\tau = 0$).

Таким образом, разложения (2), (3) (при $\tau = 0$) определяют некоторую замену переменных, и формула (10) показывает, что эта замена переменных является канонической.

Поэтому уравнения (1) сохранят каноническую форму и примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dW_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial w_i}, & \frac{d\xi_i^0}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \eta_i^0}, \\ \frac{dw_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial W_i}, & \frac{d\eta_i^0}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \xi_i^0}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Легко видеть, что $F$ зависит только от $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, т. е. от $W_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$. Поэтому частные производные $F$ по $w_i$ равны нулю, а $W_i$ постоянны. Мы могли бы доказать, как и в § 130, что леммы § 107 применимы.

**173.** Рассмотрим теперь, какова форма функции $F$. Разложения (2), (3) показывают, что

$$L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

разложимы по степеням $\tau$, $\mu$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, а коэффициенты этих разложений зависят от $L_i^0$ и от $w_i$. Очевидно, это справедливо и для производных неизвестных и, следовательно, для операторов

$$\Delta L_i, \quad \Delta\lambda_i, \quad \Delta\xi_i, \quad \Delta\eta_i.$$

То же верно для $F$ (рассматриваемой как функция $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $\mu$) и также для

$$\sum L\frac{\partial F}{\partial L}+\sum\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}-F=\sum L\,\Delta\lambda+\sum\xi\,\Delta\eta-F,$$

т. е. для $\Delta\Omega$. Поэтому это же верно и для $\Omega$ и, следовательно, также для

$$W_i=\sum L\frac{\partial\lambda}{\partial w_i}+\sum\xi\frac{\partial\eta}{\partial w_i}-\frac{\partial\Omega}{\partial w_i}.$$

Отсюда вытекает, что $W_i$, которые не зависят ни от $\tau$, ни от $w$, будут разлагаться по степеням $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $\mu$, и коэффициенты этих разложений зависят от $L_i^0$.

Если положим $\mu=0$, то получим

$$L_i=L_i^0,\qquad \frac{d\lambda_i}{dw_i}=1,\qquad \frac{\partial\lambda_k}{\partial w_i}=0\qquad (k\gtrless i),$$

$$\xi_i=\xi_i^0,\qquad \eta_i=\eta_i^0,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial w_i}=0,$$

$$F=F_0,\qquad \frac{\partial F}{\partial\xi}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial L_i}=n_i,$$

откуда

$$\Delta\Omega=\sum n_iL_i^0-F_0=\mathrm{const},$$

$$\Omega=\left(\sum n_iL_i^0-F_0\right)\tau,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial w_i}=0,$$

и, наконец,

$$W_i=L_i^0.$$

Таким образом, первый член разложения $W_i$ по степеням $\mu$ равен $L_i^0$. Положим для $\mu\neq 0$

$$W_i=L_i^0+\delta W_i.$$

Функция $\delta W_i$ будет разложима по степеням $\mu$, $\xi_k^0$, $\eta_k^0$ и коэффициенты разложения будут функциями $L_k^0$, голоморфными в рассматриваемой области.

Поэтому, если имеем

$$\delta W_i=f(\mu,\ \xi_k^0,\ \eta_k^0,\ L_k^0),$$

откуда

$$\delta W_i=f(\mu,\ \xi_k^0,\ \eta_k^0,\ W_k+L_k^0-W_k),$$

то функция $f$ будет разлагаться не только по степеням $\mu$, $\xi_k^0$, $\eta_k^0$, но и по степеням разностей $L_k^0-W_k$, и коэффициенты этого разложения будут зависеть только от $W$.

Тогда наше уравнение можно записать в виде

$$L_i^0 - W_i + f(\mu, \xi_k^0, \eta_k^0, W_k + L_k^0 - W_k) = 0 \tag{12}$$

и левая часть его разлагается по степеням

$$\mu, \ \xi_k^0, \ \eta_k^0, \ L_k^0 - W_k.$$

При $\mu = \xi_k^0 = \eta_k^0 = 0$ левая часть обращается в $L_i^0 - W_i$ и ее частная производная по $L_i^0 - W_i$ будет равна 1.

Поэтому в силу теоремы Коши о неявных функциях, или, как говорил Лаплас, *теоремы об обращении рядов*, мы можем найти

$$L_i^0 - W_i$$

и, следовательно, $L_i^0$ в виде рядов, расположенных по степеням $\mu$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, коэффициенты которых зависят от $W_i$.

Далее, если в функции $F$ мы подставим вместо $L_i^0$ ряды, то убедимся, что $F$ разлагается по степеням $\mu$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ и коэффициенты разложения зависят только от $W$.

Такова форма разложения функции $F$.

174. Вернемся к уравнениям (11). Вспомним, что в силу этих уравнений величины $W$ постоянны, и функция $F$ не зависит от $w$. Рассмотрим отдельно уравнения

$$\frac{d\xi_i^0}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \eta_i^0}, \qquad \frac{d\eta_i^0}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i^0}. \tag{13}$$

Сравним эти уравнения с уравнениями (1) из главы IX:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial R}{\partial \eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial R}{\partial \xi_i}.$$

Аналогия очевидна. Функция $F$ играет роль функции $\mu R$, величины $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ играют роль переменных $\xi_i$ и $\eta_i$. Более того, $F$ зависит только от $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$, так как она не зависит от переменных $w$, а $W$ постоянны. Наконец, $F$ разложима по степеням $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$.

Имеется, однако, одно различие. В то время как $\mu R$ содержало только члены четной степени относительно $\xi_i$ и $\eta_i$, разложение функции $F$ содержит и члены четной степени, и члены нечетной степени.

Какое следствие вытекает из этого различия? В главе IX мы предположили, что разложение функции $S$ начинается с членов второй степени, другими словами, разложение $\mu R$ не содержало членов первой степени. Но предположение, что разложение $\mu R$ не содержит членов 3-й, 5-й, 7-й, ... степеней, не играло никакой роли в наших доказательствах § 155—158. Только в § 159 мы ввели это предположение. Впрочем, этот вопрос уже рассматривался в § 170.

Таким образом, результаты § 155—158 применимы к уравнениям (13), в которых $F$ не будет содержать члена первой степени относительно неизвестных, но может содержать члены 3-й, 5-й, 7-й, . . . степеней. Отсюда следует, что неизвестные могут быть разложены по степеням выражений вида

$$E_k \cos w'_k, \qquad E_k \sin w'_k, \tag{14}$$

где $E_k$ — постоянные интегрирования и $w'_k$ — вспомогательные переменные. Чтобы удовлетворить уравнениям движения, нужно положить

$$w'_k = -\gamma'_k t + \overline{\omega}'_k,$$

где $\gamma'$ — постоянные, выражающиеся через $E$, и $\overline{\omega}'_k$ — новые постоянные интегрирования.

Зато результаты § 159 не будут применимы, так что разложения будут содержать не только члены нечетной степени относительно выражений (14), но и члены четной степени. Но они тем не менее не будут содержать членов нулевой степени. Действительно, легко видеть, что дифференциальные уравнения будут удовлетворены, когда все неизвестные равны нулю. Следовательно, неизвестные обращаются все в нуль, если все постоянные $E_k$ обращаются в нуль.

Можно ли привести случай, когда $F$ содержит член первой степени, к случаю, когда $F$ не содержит такого члена? Это нетрудно сделать. Достаточно положить

$$\xi_i^0 = \xi_i'^0 + \alpha_i, \qquad \eta_i^0 = \eta_i'^0 + \beta_i,$$

где $\xi_i'^0$, $\eta_i'^0$ — новые неизвестные, а $\alpha_i$ и $\beta_i$ — постоянные.

Определим эти постоянные таким образом, чтобы было

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i^0} = \frac{\partial F}{\partial \eta_i^0} = 0$$

при $\xi_i^0 = \alpha_i$, $\eta_i^0 = \beta_i$.

Тогда, действительно, частные производные функции $F$ обратятся в нуль вместе с $\xi_i'^0$ и $\eta_i'^0$, и разложение $F$ не будет содержать члена первой степени относительно $\xi_i'^0$ и $\eta_i'^0$.

Эта замена переменных снова приводит уравнения к виду, который мы изучали. Поэтому новые неизвестные $\xi_i'^0$ и $\eta_i'^0$ разлагаются по степеням выражений (14). То же верно для старых переменных, которые отличаются от новых только на постоянные величины. Единственное различие заключается в том, что разложения для $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ будут содержать члены нулевой степени, тогда как разложения $\xi_i'^0$ и $\eta_i'^0$ их не содержат.

**175.** Перед тем как идти дальше, надо показать, что постоянные $\alpha_i$ и $\beta_i$ весьма малы, порядка $\mu$.

Для этого прежде всего заметим, что среднее значение величин

$$W_i - L_i$$

делится на $\mu^2$. Напомним, что под **средним значением** некоторого разложения по степеням $\tau$ и по синусам и косинусам кратных $w$ мы понимаем совокупность всех членов разложения, не зависящих ни от $\tau$, ни от $w$.

Согласно этому определению, если $U$ — такое разложение, то среднее значение разложения

$$\frac{\partial U}{\partial w_i}$$

будет равно нулю, так как члены, не зависящие от $w$, исчезают при дифференцировании.

Заметим, кроме того, что

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial w_i}=\frac{\partial \delta\lambda_k}{\partial w_i}\ (i \gtrless k), \qquad \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i}=1+\frac{\partial \delta\lambda_i}{\partial w_i},$$

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial w_i}=\frac{\partial \delta\eta_k}{\partial w_i}, \qquad L_k=L_k^0+\delta L_k, \qquad \xi_k=\xi_k^0+\delta\xi_k.$$

Отсюда имеем

$$W_i-L_i=\sum L_k^0\frac{\partial \delta\lambda_k}{\partial w_i}+\sum \delta L_k\frac{\partial \delta\lambda_k}{\partial w_i}+$$
$$+\sum \xi_k^0\frac{\partial \delta\eta_k}{\partial w_i}+\sum \delta\xi_k\frac{\partial \delta\eta_k}{\partial w_i}-\frac{\partial \Omega}{\partial w_i}.$$

Но $L_k^0$, $\xi_k^0$ постоянны, так что средние значения выражений

$$L_k^0\frac{\partial \delta\lambda_k}{\partial w_i}, \quad \xi_k^0\frac{\partial \delta\eta_k}{\partial w_i}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial w_i}$$

равны нулю, и мы имеем

$$\text{ср. знач. } (W_i-L_i)=\text{ср. знач. }\left(\sum \delta L\frac{\partial \delta\lambda}{\partial w_i}+\sum \delta\xi\frac{\partial \delta\eta}{\partial w_i}\right).$$

Так как $\delta L$, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ делятся на $\mu$, мы видим, что среднее значение $W_i-L_i$ делится на $\mu^2$, что и нужно было доказать.

Имея это, постараемся выразить $F$ в функции $W$, $\xi^0$, $\eta^0$, пренебрегая членами с $\mu^2$. Имеем

$$F=F_0+\mu F_1.$$

Первый член $F_0$ зависит только от $L_i$, и так как $W_i-L_i$ имеет порядок $\mu$, то, пренебрегая членами с $\mu^2$, можем написать

$$F_0(L_i)=F_0(W_i)+\sum\frac{\partial F_0}{\partial L_i}(L_i-W_i).$$

Кроме того, поскольку

$$\frac{\partial F_0}{\partial L_i}-n_i$$

—порядка $\mu$, то, пренебрегая опять членами с $\mu^2$, можем написать

$$F_0(L_i) = F_0(W_i) + \sum n_i (L_i - W_i)$$

и

$$F = F_0(W_i) + \sum n_i (L_i - W_i) + \mu F_1.$$

В последнем члене $\mu F_1$ мы можем заменить неизвестные

$$L_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i$$

их приближенными значениями

$$W_i, \quad w_i + \lambda_i^0, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0.$$

Погрешность, допущенная при этом, будет порядка $\mu^2$. Так как $F$ постоянна, то она равна своему среднему значению. Но $F_0(W_i)$ постоянна; средние значения переменных $L_i - W_i$ равны нулю, если пренебречь членами с $\mu^2$, а среднее значение $F_1$ при этом приводится к $R$, т. е. к вековой части возмущающей функции.

Следовательно,

$$F = \text{ср. знач. } F = F_0(W_i) + \mu R. \tag{15}$$

В $R$ следует заменить $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ значениями $W_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ *).

Известно, что разложение функции $R$ по степеням $\xi$ и $\eta$ содержит только члены четной степени. Поэтому если пренебречь членами с $\mu^2$, то в разложении $F$ по степеням $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ будем иметь только члены четной степени. Если же выразить $F$ в функции $W_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ и разложить ее по степеням $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$, то члены первой степени и вообще члены нечетной степени будут делиться на $\mu^2$.

Каковы будут в таком случае значения постоянных $\alpha_i$ и $\beta_i$? Это будут те значения, которые, будучи подставлены вместо $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i^0} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \eta_i^0} = 0.$$

Левые части этих уравнений делятся на $\mu$. Действительно, при $\mu = 0$ $F$ обращается в $F_0(W_i)$, т. е. в постоянную, не зависящую от $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$. Поэтому если положить

$$F = F_0(W_i) + \mu F',$$

то можно написать наши уравнения в виде

$$\frac{\partial F'}{\partial \xi_i^0} = 0, \qquad \frac{\partial F'}{\partial \eta_i^0} = 0$$

и, таким образом, мы уничтожим множитель $\mu$.

*) Отметим, что $R$ не зависит от $\lambda$.

Левые части этих уравнений разлагаются по степеням $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ и $\mu$. При $\mu=0$ $F'$ обращается в $R$ и будет содержать только члены четной степени относительно $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$. Следовательно, ее частные производные обращаются в нуль вместе с $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$.

Итак, наши уравнения удовлетворяются при

$$\xi_i^0=\eta_i^0=\mu=0.$$

Поэтому из уравнений можно получить $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ в виде рядов, расположенных по степеням $\mu$, и эти ряды обращаются в нуль при $\mu=0$. Так как полученные таким путем значения $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ — не что иное, как постоянные $\alpha_i$ и $\beta_i$, то мы должны заключить, что $\alpha_i$ и $\beta_i$ суть ряды, расположенные по степеням $\mu$ и содержащие $\mu$ множителем, *так что эти постоянные будут, следовательно, порядка* $\mu$.

Если тогда в нашей функции $F$, которая разлагается по степеням

$$\mu, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0,$$

мы положим

$$\xi_i^0=\xi_i'^0+\alpha_i, \quad \eta_i^0=\eta_i'^0+\beta_i,$$

то ясно, что после этой замены $F$ будет разложима по степеням

$$\mu, \quad \xi_i'^0, \quad \eta_i'^0.$$

**176.** Рассмотрим теперь последнее уравнение (11):

$$\frac{dw_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial W_i},$$

правая часть которого зависит только от

$$W_i, \quad \xi_i^0, \quad \eta_i^0.$$

Эти величины были определены, и мы нашли, что $W_i$ — постоянные, а $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ разлагаются по степеням выражений

$$E_k \cos w_k', \quad E_k \sin w_k', \tag{14}$$

где $E_k$ — постоянные интегрирования и где $w_k'$ должны быть заменены на

$$-\gamma_k' t+\overline{\omega}_k'.$$

Таким образом, правая часть нам известна, так что $w_i$ получится простой квадратурой. Правая часть разложима по синусам и косинусам кратных $w_k'$. Пусть $n_i'$ — ее среднее значение; положим

$$w_i=w_i''+g_i,$$

где

$$\frac{dw_i''}{dt} = n_i', \quad \frac{dg_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial W_i} - n_i'.$$

Так как $\frac{\partial F}{\partial W_i}$ разложима по степеням выражений (14) и $\mu$, а коэффициенты этого разложения зависят от постоянных $W_k$, то ее среднее значение $n_i'$ будет постоянной, разложимой по степеням $\mu$ и $E_k^2$ [именно $E_k^2$, так как $n_i'$ не должно зависеть от $w_k'$ (см. § 160)].

Что касается разности

$$\frac{\partial F}{\partial W_i} - n_i',$$

то она может быть представлена в форме

$$\sum A \cos\left(\sum k_j' w_j' + h\right),$$

где $A$ и $h$ — постоянные, зависящие только от $W$, $E$, $\mu$, и где $k_j'$ — целые числа.

Тогда

$$w_i'' = n_i' t + \overline{\omega}_i$$

($\overline{\omega}_i$ — новые постоянные интегрирования) и

$$g_i = -\sum \frac{A \sin\left(\Sigma k_j' w_j' + h\right)}{\Sigma k_j' w_j'}. \tag{16}$$

Напомним, что $\gamma_j'$ делятся на $\mu$. Поэтому можно было бы опасаться того, что выражения для $g_i$ будут содержать $\mu$ в знаменателе, если коэффициенты $A$ сами не делятся на $\mu$.

К счастью, этого не будет. Если положим $\mu = 0$, то в силу формулы (15) будем иметь

$$F = F_0(W_i), \quad \frac{\partial F}{\partial \mathrm{W}_i} = \frac{dF_0}{d\mathrm{W}_i}.$$

Так как $\frac{\partial F_0}{\partial W_i}$ постоянна, то она равна своему среднему значению, так что имеем

$$\frac{\partial F}{\partial W_i} = n_i'$$

и

$$\frac{dg_i}{dt} = 0.$$

Если $\frac{dg_i}{dt}$ обращается в нуль при $\mu = 0$, то это значит, что она делится на $\mu$. Следовательно, все коэффициенты $A$ имеют множителем $\mu$. В выражении для $g_i$ множитель $\mu$ исчезает и в числителе и в знаменателе, так что это выражение разлагается по степеням $\mu$.

**177.** Возьмем теперь разложения (2) и (3). Мы удовлетворим уравнениям (1), если заменим в них:

1) $\tau$ — нулем;

2) $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ — их разложениями по степеням выражений

$$E_k \frac{\cos}{\sin} w'_k, \quad w'_k = -\gamma'_k t + \overline{\omega}'_k, \tag{14}$$

т. е. разложениями, которые получаются в результате интегрирования уравнений (13) и которые зависят от постоянных $W_i$;

3) $L_i$ — их значениями в функции от $W_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$. Эти значения, будучи разложенными по степеням $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, будут также разлагаться по степеням выражений (14);

4) $w_i$ — величиной $w''_i + g_i = n'_i t + \overline{\omega}_i + g_i$.

Общий член разложения (3) запишется в виде

$$\sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 \tau^m \cos(\Sigma k_i w_i + h).$$

Мы можем положить $m=0$, так как мы полагаем в этом разложении $\tau=0$, а следовательно, члены, имеющие множителем $\tau$, исчезают; если, кроме того, положим $w_i = w''_i + g_i$, то наше разложение примет вид

$$\sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 \cos(\Sigma k_i g_i + h) \cos(\Sigma k_i w''_i) - \\ - \sum \mu^\alpha A \mathfrak{M}_0 \sin(\Sigma k_i g_i + h) \sin(\Sigma k_i w''_i). \tag{17}$$

Одночлен $\mathfrak{M}_0$ разлагается по степеням выражений (14). Это верно и для $A$, $\cos h$, $\sin h$, которые зависят от $L_i^0$, и для $g_i$, как это следует из формулы (16), и для $\cos(\Sigma k_i g_i)$, $\sin(\Sigma k_i g_i)$, $\cos(\Sigma k_i g_i + h)$, $\sin(\Sigma k_i g_i + h)$. Таким образом, коэффициенты формулы (17) разлагаются по степеням выражений (14).

Как и в § 69, можно показать, что разложения (3) примут вид

$$\sum \mu^\alpha B E_1^{q_1} E_2^{q_2} \ldots E_{2n}^{q_{2n}} \frac{\cos}{\sin} (\Sigma k_i w''_i + \Sigma p_i w'_i), \tag{18}$$

где целые числа $q$ и $p$ удовлетворяют условиям $q_i \equiv p_i (\mathrm{mod}\ 2)$, $q_i \geqslant |p_i|$.

Коэффициенты $B$ зависят от постоянных $W_i$.

Чтобы удовлетворить уравнениям (1), в разложениях (18) надо положить

$$w'_i = -\gamma'_i t + \overline{\omega}'_i, \quad w''_i = n_i t + \overline{\omega}_i.$$

Если имеется $(n+1)$ тело, т. е. $n$ планет, то это решение содержит $6n$ произвольных постоянных, а именно: $n$ постоянных $W_i$, $2n$ постоянных $E_i$, $n$ постоянных $\overline{\omega}_i$, $2n$ постоянных $\overline{\omega}'_i$. Мы не упоминаем $\lambda_i^0$, так как они рассматриваются как величины, раз и навсегда заданные.

Система (1) является, кроме того, системой порядка $6n$.

178. Вернемся к уравнениям (13) и изучим их более подробно. Мы сопоставили их с уравнениями (1) из главы IX, и в § 174 подчеркнули, в чем их различия. Сочетая приемы из § 170 и 174, можно привести этот случай к случаю, рассмотренному в начале главы IX, но значительно проще применить метод § 171, что мы и сделаем.

Обращаясь к формуле (15), мы видим, что имеем

$$F = F_0(W_i) + \mu R' + \mu^2 R'',$$

где $R'$ есть не что иное, как $R$, в которой $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ заменены величинами $W_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, тогда как $R''$ разлагается по степеням $\mu$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, и кроме того, зависит от постоянных $W_i$. Уравнения (13) примут тогда вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi_i^0}{dt} &= -\mu\frac{\partial R'}{\partial \eta_i^0} - \mu^2\frac{\partial R''}{\partial \eta_i^0},\\ \frac{d\eta_i^0}{dt} &= \mu\frac{\partial R'}{\partial \xi_i^0} + \mu^2\frac{\partial R''}{\partial \xi_i^0}.\end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

Мы узнаем в них уравнения § 171, так как $R'$ образовано из $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$, так же как и $R$ из $\xi_i$ и $\eta_i$.

Если все планеты движутся в одной плоскости, так что не нужно учитывать наклонности, тогда никакая из величин $\gamma$ не равна нулю, и в этом случае нет никаких трудностей.

В том случае, когда нужно учитывать наклонности и когда одна из величин $\gamma$ равна нулю, можно преодолеть эту трудность одним из двух приемов, изложенных в конце главы IX, например, приемом, рассмотренным в § 169. Напомним, что суть его заключается в том, что мы относим систему не к неподвижным осям, а к подвижным, равномерно вращающимся вокруг оси $x_3$.

Пусть $L'$, $\lambda'$, $\varrho'$, $\omega'$ — канонические оскулирующие элементы, *отнесенные к неподвижным осям*, а $L$, $\varrho$, $\lambda$, $\omega$ — те же элементы, отнесенные к подвижным осям. Мы будем иметь

$$L = L', \quad \varrho = \varrho', \quad \lambda = \lambda' + \alpha\mu t, \quad \omega = \omega' - \alpha\mu t,$$

где $\alpha$ — некоторая постоянная, зависящая от скорости вращения подвижных осей.

Мы будем иметь канонические уравнения

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \lambda'}, & \frac{d\varrho'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \omega'},\\ \frac{d\lambda'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial L'}, & \frac{d\omega'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \varrho'},\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

откуда легко вывести следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=-\frac{\partial(F+\alpha\mu H)}{\partial\lambda}, & \frac{d\varrho}{dt}&=-\frac{\partial(F+\alpha\mu H)}{\partial\omega},\\ \frac{d\lambda}{dt}&=\frac{\partial(F+\alpha\mu H)}{\partial L}, & \frac{d\omega}{dt}&=\frac{\partial(F+\alpha\mu H)}{\partial\varrho},\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

где

$$H=\Sigma L-\Sigma\varrho$$

является левой частью одного из интегралов площадей.

Добавим, что когда заменим $L'$, $\varrho'$, $\lambda'$, $\omega'$ величинами

$$L,\ \varrho,\quad \lambda-\alpha\mu t,\quad \omega+\alpha\mu t,$$

то функции $F$ и $F+\alpha\mu H$ будут зависеть только от $L$, $\varrho$, $\lambda$, $\omega$ и не будут зависеть от $t$; это вытекает из частной симметрии функции $F$ (см. § 169).

Если вернемся к переменным $\xi$ и $\eta$, то уравнения (20) сохранят каноническую форму и примут вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=-\frac{\partial(F+\alpha\mu H)}{\partial\lambda}, & \frac{d\xi}{dt}&=-\frac{\partial(F+\alpha\mu H)}{\partial\eta},\\ \frac{d\lambda}{dt}&=\frac{\partial(F+\alpha\mu H)}{\partial L}, & \frac{d\eta}{dt}&=\frac{\partial(F+\alpha\mu H)}{\partial\xi}.\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

С уравнениями (21) поступим так же, как и с уравнениями (1). Заменим в $F$ и $H$ переменные выражениями, зависящими от $W_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $w_i$. Так как $H$ постоянна в силу интегралов площадей, то $H$ не будет зависеть от $w_i$, и мы можем написать

$$H=H'+\mu H'',$$

где

$$H'=\sum W_i-\frac{1}{2}\sum[(\xi_i^0)^2+(\eta_i^0)^2]$$

и где $H''$ разлагается по степеням $\mu$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ и зависит, кроме того, от постоянных $W_i$. Тогда уравнения (13) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi_i^0}{dt}&=-\mu\frac{\partial(R'+\alpha H')}{\partial\eta_i^0}-\mu^2\frac{\partial(R''+\alpha H'')}{\partial\eta_i^0},\\ \frac{d\eta_i^0}{dt}&=\mu\frac{\partial(R'+\alpha H')}{\partial\xi_i^0}+\mu^2\frac{\partial(R''+\alpha H'')}{\partial\xi_i^0}.\end{aligned}\right\}\tag{13''}$$

Эти уравнения имеют вид уравнений из § 171 и приемы главы IX к ним могут быть применимы без какого-либо затруднения.

**179. Вычисление средних движений.** Мы утверждаем, что коэффициенты $n'$ и $\gamma'$, которые аналогичны средним движениям, разлагаются по степеням $\mu$ и постоянных $E_k^2$. Это вытекает из всего предыдущего и мы могли бы доказать это многими разными способами, но лучше всего рассуждать следующим образом.

Уравнения должны удовлетворяться, если положить

$$w_i'' = n_i't + \bar{\omega}_i, \quad w_k' = -\gamma_k't + \bar{\omega}_k',$$

откуда

$$\frac{d}{dt} = \sum n_i' \frac{\partial}{\partial w_i''} - \sum \gamma_i' \frac{\partial}{\partial w_i'}.$$

Воспользуемся последней формулой для преобразования уравнений (1). Мы получим, таким образом, две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sum n_k' \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k''} - \sum \gamma_k' \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k'} &= \frac{\partial F}{\partial L_i}, \\ \sum n_k' \frac{\partial \xi_i}{\partial w_k''} - \sum \gamma_k' \frac{\partial \xi_i}{\partial w_k'} &= -\frac{\partial F}{\partial \eta_i} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \sum n_k' \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k''} - \sum \gamma_k' \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k'} &= \frac{\partial F}{\partial L_i}, \\ \sum n_k' \frac{\partial \eta_i}{\partial w_k''} - \sum \gamma_k' \frac{\partial \eta_i}{\partial w_k'} &= \frac{\partial F}{\partial \xi_i}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Эти системы уравнений являются линейными и из них можно получить постоянные $n'$ и $\gamma'$. Действительно, индекс $i$ может принимать $n$ значений (если имеется $n$ планет) для переменных $\lambda_i$ и $2n$ значений для $\xi_i$ и $\eta_i$; индекс $k$ может принимать $n$ значений для $n'$ и $w''$ и $2n$ значений для $\gamma'$ и $w'$. Таким образом, каждая из наших систем содержит $3n$ уравнений с $3n$ неизвестными.

Правые части уравнений (22) и (23), т. е. частные производные функции $F$, так же как и коэффициенты, т. е. частные производные от $\lambda$, $\xi$ и $\eta$, разложимы по степеням

$$\mu, \quad E_k \cos w_k', \quad E_k \sin w_k'. \tag{24}$$

Определители, составленные при помощи этих линейных уравнений, будут, следовательно, разлагаться аналогичным образом. Поэтому каждая из неизвестных представляется в виде

$$\frac{P}{X} = \frac{Q}{Y},$$

где $P$, $Q$, $X$, $Y$ являются рядами, расположенными по степеням величин (24). Выражение $\frac{P}{X}$ выводится из уравнений (22), выражение $\frac{Q}{Y}$ выводится из уравнений (23), следовательно, $X$ и $Y$ являются определителями уравнений (22) и (23) соответственно.

Пусть $X_0$ и $Y_0$— совокупности членов наименьшей степени в разложениях $X$ и $Y$; покажем, что если многочлены $X_0$ и $Y_0$ являются взаимно простыми, то разложение $P$ делится на $X$, а $Q$ делится на $Y$, так что каждая из наших неизвестных будет разложима по степеням величин (24).

Это, впрочем, является хорошо известной общей теоремой, которую мы докажем в нескольких словах. Будем иметь

$$PY = QX,$$

так что $PY$ делится на $X$. Покажем, что $P$ делится на $X$. В самом деле, если бы $P$ не делилось на $X$, то можно было бы написать

$$P = RX + S, \tag{25}$$

где $R$ и $S$ суть разложения того же вида, что и разложения для $P$, $Q$, $X$, $Y$, и где $S_0$ (совокупность членов наименьшей степени разложения $S$) не делится на $X_0$.

Если бы действительно $S_0$ делилось на $X_0$, то мы имели бы

$$S_0 = MX_0,$$

где $M$ — однородный многочлен, так как $S_0$ и $X_0$ являются однородными многочленами. Тогда можно было бы положить

$$P = (R+M)\,X + (S - MX).$$

Эта формула аналогична формуле (25), но в ней $R$ заменено на $R+M$, и $S$ на $S-MX$. Если сравним члены наименьшей степени в $S-MX$ и $S$, то увидим, что степень первых больше степени вторых, так как $S_0-MX_0=0$. Следовательно, можно было бы непрерывно увеличивать степень низших членов в $S$, по крайней мере до тех пор, пока $S_0$ больше не будет делиться на $X_0$.

Итак, допустим, что $S_0$ не делится на $X_0$. Тогда будем иметь равенство

$$RXY + SY = QX,$$

из которого видно, что $SY$ делится на $X$; поэтому необходимо, чтобы $S_0Y_0$ делилось на $X_0$. Но это невозможно, так как $Y_0$ и $X_0$ взаимно простые и $S_0$ не делится на $X_0$ (для многочленов теорема доказана Кронекером). Следовательно, $P$ делится на $X$, что и требовалось доказать.

Итак, остается показать, что $X_0$ и $Y_0$ взаимно простые, а для этого достаточно доказать, что это верно при $\mu=0$.

Если положим $\mu=0$, то

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + w_i, \quad \xi_i = \xi_i^0, \quad \eta_i = \eta_i^0.$$

Но величины $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ зависят только от $w'$ и не зависят от $w''$, поэтому в левых частях уравнений (22) и (23) частные производные $\frac{\partial\xi}{\partial w''}$ и $\frac{\partial\eta}{\partial w''}$ исчезают.

Отсюда следует, что $X$ является произведением двух определителей:

1) определителя, составленного из $\frac{\partial\lambda_i}{\partial w_k''}$, который равен 1, так как при $\mu=0$ $\lambda_i - w_i''$ не зависит от $w''$;

2) определителя, составленного из $\frac{\partial\xi_i^0}{\partial w_k'}$. Мы ограничимся исследованием членов наименьшей степени. Заметим, что при $\mu=0$ величины $\xi_i^0$ могут быть легко вычислены при помощи уравнений (1) из главы IX, т. е. при помощи уравнений (13') или (13''), с отброшенными в правых частях членами с $\mu^2$. Тогда $\xi_i^0$ будут разлагаться по степеням величин (14). Чтобы получить члены наименьшей степени нашего определителя, достаточно взять в выражениях $\xi_i^0$ члены первой степени, которые можно вычислить способом, изложенным в главе VIII. Следовательно, сначала надо подвергнуть $\xi_i^0$ преобразованию переменных из § 151, которое линейно и канонично. Если в таком случае новые переменные обозначим через $\xi_k'^0$, то будем иметь (оставляем только члены первой степени)

$$\xi_k'^0 = E_k \cos w_k', \quad \frac{\partial\xi_k'^0}{\partial w_k'} = -E_k \sin w_k' = -\eta_k'^0.$$

Мы должны найти функциональный определитель переменных $\xi_i^0$ по $w'$. Но он равен произведению функционального определителя переменных $\xi_i^0$ по $\xi_k'^0$, который равен единице (так как замена переменных из § 151 является заменой переменных для прямоугольных координат), и функционального определителя переменных $\xi_k'^0$ по $w'$, который равен

$$\eta_1'^0 \cdot \eta_2'^0 \ldots \eta_{2n}'^0.$$

Следовательно, имеем

$$X_0 = \eta_1'^0 \cdot \eta_2'^0 \ldots \eta_{2n}'^0 = \Pi\,(E_k \sin w_k').$$

Аналогично найдем

$$Y_0 = \xi_1'^0 \cdot \xi_2'^0 \ldots \xi_{2n}'^0 = \Pi\,(E_k \cos w_k').$$

Полученные выражения показывают, что $X_0$ и $Y_0$ являются взаимно простыми.

Скажем несколько слов, чтобы отклонить одно возможное возражение. Могут сказать, что $X_0$ и $Y_0$ являются «первыми между собой» при $\mu=0$, но отсюда не следует, что это будет так и при $\mu \gtrless 0$. В самом деле, может случиться, что члены наименьшей степени в $X$

и $Y$, которые имеют степень $2n$ относительно величин (24) при $\mu=0$, будут меньшей степени при $\mu \gtrless 0$, так как члены наименьшей степени, которые не будут «первыми между собой», могут исчезнуть при $\mu=0$.

Чтобы снять это возражение, достаточно условиться оценивать степень каждого члена, приписывая $E_k \cos w'_k$, $E_k \sin w'_k$ степень 1 и $\mu$ — степень $q$, где $q$ — целое число, большее $2n$. Тогда можно быть уверенным, что все члены, содержащие $\mu$ множителем, будут по крайней мере иметь степень $2n$.

Из этого следует, что наши средние движения $n'$ и $\gamma'$ разлагаются по степеням величин (24), а так как они являются постоянными, не зависящими от $w'$, то разложимы также по степеням $\mu$ и $E_k^2$, что и требовалось доказать.

Найдем значения $n'$ и $\gamma'$ при $\mu=0$.

При $\mu=0$ имеем

$$F=F_0, \quad \frac{\partial F}{\partial L_i}=n_i, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_i}=\frac{\partial F}{\partial \eta_i}=0,$$
$$\frac{\partial \xi_i}{\partial w''_k}=0, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial w''_i}=1, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial w''_k}=0 \quad (k \gtrless i),$$

так что уравнения (22) нам дают сначала

$$\gamma'=0,$$

а затем

$$n'_i=n_i.$$

*Итак, величины $\gamma'$ содержат $\mu$ множителем, а величины $n'_i$ при $\mu=0$ обращаются в $n_i$.*

Рассмотрим отношение $\frac{\gamma'}{\mu}$ при $\mu=E_k^2=0$.

Пренебрегая $\mu^2$ в правых частях уравнений (22) или (23), можем написать

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i}=\mu\frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{\partial F}{\partial \eta_i}=\mu\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i},$$

а в частных производных функции $F_1$ можем заменить

$$L_i, \ \lambda_i, \ \xi_i, \ \eta_i$$

их приближенными значениями

$$W_i, \ \lambda_i^0+w''_i+g_i, \ \xi_i^0, \ \eta_i^0,$$

которые с точностью до членов порядка $\mu$ равны первым.

В таком случае обе части могут быть разложены по синусам и косинусам кратных $w''$ и $w'$. Приравняем в обеих частях члены, которые не зависят от $w''$, а зависят лишь от $w'$.

В производных $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}$, $\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}$ не зависят от $w''$ те члены, которые не зависят от $\lambda$. Это будут члены, которые содержатся в выражениях

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \eta_i},$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_i^0}, \quad \frac{\partial R}{\partial \eta_i^0},$$

так как в них можно заменить $\xi_i$ и $\eta_i$ на $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$.

С другой стороны, выражения

$$n_k' \frac{\partial \xi_i}{\partial w_k''}$$

не имеют членов, не зависимых от $w''$, так как члены такой природы, которые могут существовать в $\xi_i$, исчезают при дифференцировании.

Наконец, в выражениях

$$\gamma_k' \frac{\partial \xi_i}{\partial w_k'}$$

можно заменить $\xi_i$ на $\xi_i^0$. Погрешность, получаемая при этом, будет порядка $\mu$, и так как $\gamma_k'$ — тоже порядка $\mu$, то погрешность в $\gamma_k' \frac{\partial \xi_i}{\partial w_k'}$ будет порядка $\mu^2$.

Следовательно, пренебрегая членами с $\mu^2$ и сохраняя в обеих частях уравнений (22) и (23) только члены, не зависящие от $w''$, получим

$$-\sum \gamma_k' \frac{\partial \xi_i^0}{\partial w_k'} = -\mu \frac{\partial R}{\partial \eta_i^0},$$

$$-\sum \gamma_k' \frac{\partial \eta_i^0}{\partial w_k'} = \mu \frac{\partial R}{\partial \xi_i^0}.$$

Если пренебрежем высшими степенями $E_k^2$, то можем заменить $R$ на $R_2$ и написать

$$-\sum \gamma_k' \frac{\partial \xi_i^0}{\partial w_k'} = -\mu \frac{\partial R_2}{\partial \eta_i^0},$$

$$-\sum \gamma_k' \frac{\partial \eta_i^0}{\partial w_k'} = \mu \frac{\partial R_2}{\partial \xi_i^0}.$$

Мы получили уравнения главы VIII, поэтому имеем

$$\gamma_k' = \gamma_k.$$

Итак, мы должны заключить, что при $E_k^2 = 0$ разности $\gamma'_k - \gamma_k$ будут порядка $\mu^2$.

Все, что здесь было сказано, остается справедливым, если применить способ § 169 и заменить $F$ и $R$ функциями $F + \alpha\mu H$, $R + \alpha\mu H$.

Заметим, что один из аргументов $\gamma'_k$ всегда равен $\alpha\mu$ (и, следовательно, равен нулю в случае, когда, относя систему к неподвижным осям, мы полагали $\alpha = 0$). В самом деле, пусть, как и в § 169, $U$ и $V$ — левые части первых двух интегралов площадей. Тогда легко находим

$$\frac{dU}{dt} = \alpha\mu V, \qquad \frac{dV}{dt} = -\alpha\mu U,$$

так как для скобок Пуассона имеем

$$(F, U) = (F, V) = 0, \qquad (H, U) = V, \ (H, V) = -U.$$

Отсюда выводим уравнения

$$U = C\cos(\alpha\mu t + h), \qquad V = C\sin(\alpha\mu t + h),$$

которые выражают то обстоятельство, что для наблюдателя, жестко связанного с подвижными осями координат, вектор площадей, который неподвижен в пространстве, будет казаться равномерно описывающим конус вращения. $C$ и $h$ — постоянные. Так как $U$ и $V$ должны быть разложимы по синусам и косинусам кратных $w'$ и $w''$, то это доказывает, что $\alpha\mu t + h$ является линейной комбинацией с целыми коэффициентами величин $w'$ и $w''$, т. е., что $\alpha\mu$ является линейной комбинацией с целыми коэффициентами величин $n'$ и $\gamma'$:

$$\alpha\mu = \sum k_i n'_i + \sum k'_i \gamma'_i.$$

Полагая $\mu = 0$, мы видим, что целые $k_i$ суть нули. Далее, принимая $\mu$ весьма малым, пренебрегая $\mu^2$ и полагая $E_k^2 = 0$, будем иметь

$$\alpha\mu = \sum k'_i \gamma_i.$$

Но величина $\gamma_{2n}$ равна $\alpha\mu$ и между $\gamma$ и $\alpha\mu$ не существует другого линейного соотношения с целыми коэффициентами. Поэтому все целые $k'_i$ суть нули, за исключением $k'_{2n}$, который равен единице. Итак, имеем

$$\alpha\mu = \gamma'_{2n},$$

что и требовалось доказать.

**180. Число аргументов.** В общем случае задачи $(n+1)$-го тела ($n$ планет) мы имеем $n$ аргументов $w''$ и $2n$ аргументов $w'$, т. е. всего $3n$ аргументов. Но так как $\gamma'_{2n}$ равна нулю, когда система отнесена к неподвижным осям, то аргумент $w'_{2n}$ сводится к постоянной. Следовательно, координаты $(n+1)$-го тела зависят только от $3n-1$ аргументов. Их взаимные расстояния зависят только от $3n-2$ аргументов (см. § 193).

В этом случае, когда $n+1$ тело движется в одной плоскости, имеем только $n$ аргументов $w'$, но никакая из величин $\gamma'$ не равна нулю, поэтому координаты зависят от $2n$ аргументов.

В задаче трех тел координаты зависят от пяти аргументов, если наклонности не равны нулю, и от четырех аргументов, если наклонности равны нулю. Взаимные расстояния зависят в первом случае от четырех аргументов и во втором от трех аргументов.

Если одна из масс бесконечно мала, а другие массы движутся согласно законам Кеплера, то одна из величин $\gamma'$ делается нулем, а именно та, от которой зависит движение перигелия большой планеты. Поэтому мы имеем только четыре аргумента, если наклонность малой планеты не равна нулю, и три, если она—нуль. Но взаимные расстояния будут зависеть от четырех аргументов в первом случае и от трех во втором. Уравнения более не обладают симметрией и имеется одно фиксированное направление, которое играет особую роль — это направление на перигелий большой планеты.

Перейдем, наконец, к ограниченной задаче и допустим, что орбита большой планеты является круговой. Тогда больше не будем иметь фиксированного направления, которое играет особую роль, так как перигелий круговой орбиты не определен. Из этого следует, что взаимные расстояния трех тел зависят только от трех аргументов, если наклонность не равна нулю, и от двух аргументов, если наклонность равна нулю (см. § 193).

# ТЕОРЕМА ПУАССОНА

**181. Сравнение разложений.** Сравнивая разложения (3) и (18) из предыдущей главы, мы приходим к менее простым и менее четким результатам, чем при сравнении соответствующих разложений главы VII. Между тем некоторые из этих результатов представляют определенный интерес; среди них особенно отметим знаменитую теорему Пуассона о неизменности больших осей.

Вспомним форму разложений (3) и (18) предыдущей главы, которые в этой главе обозначим номерами (1) и (2). Первое разложение напишется в виде

$$\sum \mu^{\alpha} A \mathfrak{M}_0 \tau^m \frac{\cos}{\mathrm{tin}} \left( \sum k_i w_i \right), \tag{1}$$

а второе в виде

$$\sum \mu^{\alpha} B \Pi \left( E_k^{q_k} \right) \frac{\cos}{\sin} \left( \sum k_i w_i'' + \sum p_k w_k' \right). \tag{2}$$

И первое, и второе дают значение одной из величин $\delta L$, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$: первое, если положить в нем

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$

а второе, если положить в нем

$$w_i'' = n_i' t + \overline{\omega}_i, \qquad w_k' = -\gamma_k' t + \overline{\omega}_k'.$$

С другой стороны, величины $g_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $L_i^0$ также разложимы в форме (2), так что

$$L_i = L_i^0 + \delta L_i, \quad \xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i, \quad \eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i$$

могут быть разложены одновременно и в виде (1), и в виде (2), тогда как $\lambda_i - w_i = \lambda_i^0 + \delta\lambda_i$ разлагается только в виде (1), а $\lambda_i - w_i'' = \lambda_i + g_i + \delta\lambda_i$ в виде (2).

Если мы хотим сравнить эти два разложения, то сначала нужно выбрать постоянные $c$, $\varepsilon_i$, $\overline{\omega}_i$, $\overline{\omega}_i'$ таким образом, чтобы они представляли о д н о и т о ж е решение уравнений движения.

Если подставим в разложении (1) $\tau = t$, $w_i = n_i t$, т. е. если придадим постоянным $c$ и $\varepsilon_i$ значения, равные н у л ю, то разложение (1) представит частное решение уравнений движения, в котором переменные $L_i$, $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ при $t=0$ принимают начальные значения $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$.

Следует только предотвратить возможное смешение. В разложениях (1) величины $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $\lambda_i^0$ являются постоянными, а именно, начальными значениями переменных $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\lambda_i$. В формулах (3), приведенных ниже, наоборот, величины $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ не являются постоянными. Поэтому целесообразно обозначить начальные значения переменных $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ через $L_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$.

Итак, мы должны выбрать постоянные $W$, $E$, $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'$ таким образом, чтобы разложение (2) представляло то же решение. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta L_i, \\ \lambda_i &= \lambda_i^0 + w_i'' + g_i + \delta\lambda_i, \\ \xi_i &= \xi_i^0 + \delta\xi_i, \\ \eta_i &= \eta_i^0 + \delta\eta_i. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В этих равенствах каждое из выражений $\delta L$, $\delta\lambda$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ должно быть заменено соответствующим разложением (2) и то же самое нужно сделать с $g_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $L_i^0$.

Положим теперь $t=0$, т. е.

$$w_i'' = \overline{\omega}_i, \qquad w_k' = \overline{\omega}_k'.$$

Пусть

$$g_i^0, \ \delta^0 L_i, \ \delta^0\lambda_i, \ \delta^0\xi_i, \ \delta^0\eta_i, \ L_i^{00}, \ \xi_i^{00}, \ \eta_i^{00}$$

— соответствующие значения величин

$$g_i, \ \delta L_i, \ \delta\lambda_i, \ \delta\xi_i, \ \delta\eta_i, \ L_i^0, \ \xi_i^0, \ \eta_i^0.$$

Так как $L_i$, $\lambda_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ должны принять при этом начальные значения $L_i^{00}$, $\lambda_i^{00}$, $\xi_i^{00}$, $\eta_i^{00}$, то уравнения (3) примут вид

$$\left.\begin{aligned} L_i^1 &= L_i^{00} + \delta^0 L_i, & \xi_i^1 &= \xi_i^{00} + \delta^0\xi_i, \\ \eta_i^1 &= \eta_i^{00} + \delta^0\eta_i, & \overline{\omega}_i &= -g_i^0 - \delta^0\eta_i. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Таковы соотношения, из которых мы должны вывести постоянные

$$W, \ E, \ \overline{\omega}_i, \ \overline{\omega}_k'$$

в зависимости от начальных значений

$$L_i^1, \ \xi_i^1, \ \eta_i^1.$$

Заметим прежде всего, что правые части уравнений (4) могут быть разложены по степеням $\mu$, $E_k \cos \overline{\omega}_k'$, $E_k \sin \overline{\omega}_k'$ и по синусам и косинусам кратных $\omega_i$. При этом они являются голоморфными функциями от $W$.

При $\mu=0$ уравнения (4) приводятся к

$$L_i^1 = W_i, \ \xi_i^1 = \xi_i^{00}, \ \eta_i^1 = \eta_i^{00}, \ \overline{\omega}_i = -g_i^0. \tag{5}$$

Величины $\xi_i^{00}$, $\eta_i^{00}$, $g_i^0$, в которых положено $\mu=0$, не зависят от $\overline{\omega}_i$ и разложимы по степеням

$$E_k \cos \overline{\omega}_k', \qquad E_k \sin \overline{\omega}_k'.$$

Из соотношений (5) можно получить $E_k \cos \overline{\omega}_k'$, $E_k \sin \overline{\omega}_k'$ в виде рядов, расположенных по степеням $\xi_i^1$, $\eta_i^1$. Эти ряды зависят, между прочим, от $W_i$ или, что то же самое, от $L_i^1$.

Аналогично, $g_i^0$, которая разложима по степеням

$$E_k \cos \overline{\omega}_k', \qquad E_k \sin \overline{\omega}_k',$$

сделается разложимой по степеням $\xi_i^1$ и $\eta_i^1$.

Что будем иметь теперь для произвольного $\mu$?

Заметим, что обе части равенств (4) разлагаются по степеням $\mu$, $\overline{\omega}_i$, $E_k \cos \overline{\omega}_k'$, $E_k \sin \overline{\omega}_k$ и, наконец, по степеням $W_i - L_i^1$, если заменить величину $W_i$ выражением $L_i^1 + (W_i - L_i^1)$, так как они являются голоморфными функциями от $W_i$, когда эти переменные достаточно близки к их приближенным значениям $L_i^1$.

Далее воспользуемся теоремой Коши о неявных функциях *).

Пусть имеем $n$ уравнений, правые части которых равны нулю, а левые части разлагаются по степеням $n$ неизвестных функций $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и $p$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$, и желаем найти из этих уравнений неизвестные $z$ в функции от переменных $x$. Из теоремы Коши следует, что $z$ будут разложимы по степеням $x$, если уравнения удовлетворяются при $z=x=0$ и если функциональный определитель левых частей уравнений по $z$ отличен от нуля при $z=x=0$.

Применим эту теорему к уравнениям (4) и определим из них

$$W_i - L_i^1, \qquad E_k \cos \overline{\omega}_k', \qquad E_k \sin \overline{\omega}_k', \qquad \overline{\omega}_i$$

как функции $\mu$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$.

Проверим прежде всего, что уравнения удовлетворяются при

$$\mu = \xi_i^1 = \eta_i^1 = \overline{\omega}_i = W_i - L_i^1 = E_k \cos \overline{\omega}_k' = E_k \sin \overline{\omega}_k' = 0.$$

При $\mu=0$ уравнения (4) приводятся к уравнениям (5). Следовательно, достаточно показать, что $\xi_i^{00}$, $\eta_i^{00}$, $g_i^0$ обращаются в нуль при

$$E_k \cos \overline{\omega}_k' = E_k \sin \overline{\omega}_k' = 0.$$

---

*) См. Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, т. II, Физматгиз, 1960. (*Прим. перев.*)

Мы знаем, что величины $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ определяются уравнениями (13′) или (13″) предыдущей главы. Так как мы принимаем $\mu=0$, то можно пренебречь членами с $\mu^2 R''$ и уравнения примут вид

$$\frac{d\xi_i^0}{dt}=-\mu\frac{\partial R'}{\partial\eta_i^0},\quad \frac{d\eta_i^0}{dt}=\mu\frac{\partial R'}{\partial\xi_i^0}.$$

С точностью до обозначений они совпадают с уравнениями (1) из главы IX, поэтому функция $R'$ содержит только члены четной степени относительно $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$, т. е. разложения величин $\xi_i^0$ и $\eta_i^0$ будут содержать только члены нечетной степени относительно

$$E_k\cos w_k',\quad E_k\sin w_k'.$$

Поэтому они обращаются в нуль при

$$E_k\cos w_k'=E_k\sin w_k'=0,$$

т. е. величины $\xi_i^{00}$ и $\eta_i^{00}$ обратятся в нуль при

$$E_k\cos\bar\omega_k'=E_k\sin\bar\omega_k'=0.$$

Рассмотрим теперь величину $g_i^0$. В § 176 мы вывели уравнение

$$\frac{dg_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial W_i}-n_i'.$$

Его правая часть разлагается по степеням

$$E_k\,{\cos\atop\sin}\,w_k'$$

и ее среднее значение равно нулю, так что она содержит только члены, зависящие от $w_k'$, поэтому все члены в разложении правой части имеют множителем $E_k$.

Интегрирование показывает, что $g_i$ будет иметь такой же вид, и если мы не будем прибавлять произвольную постоянную, то среднее значение $g_i$ также будет равно нулю и все члены будут содержать $E_k$ множителем. Отсюда следует, что $g_i$ обращается в нуль вместе с $E_k\,{\cos\atop\sin}\,w_k'$, а $g_i^0$ обращается в нуль вместе с $E_k\,{\cos\atop\sin}\,\bar\omega_k'$, что и требовалось доказать.

Проверим теперь, что при

$$\mu=\xi_i^1=\eta_i^1=\bar\omega_i=W_i-L_i^1=E_k\cos\bar\omega_k'=E_k\sin\bar\omega_k'=0$$

функциональный определитель относительно неизвестных

$$\bar\omega_i,\ W_i-L_i,\quad E_k\cos\bar\omega_k',\ E_k\sin\bar\omega_k'$$

не равен нулю.

В самом деле, при $\mu=0$ уравнения (4) обращаются в уравнения (5), так что искомый функциональный определитель обращается в определитель от $\xi_i^{00}$, $\eta_i^{00}$ по $E_k\,{\cos\atop\sin}\,\bar\omega'_k$.

Величины $\xi_i^{00}$, $\eta_i^{00}$ разлагаются по степеням $E_k \frac{\cos}{\sin} \bar{\omega}'_k$, и если мы желаем найти значение нашего определителя при $E_k=0$, достаточно взять в разложениях члены первой степени.

Члены первой степени совпадают с теми, которые мы определили в главе VIII, т. е. $\xi_i^{00}$, $\eta_i^{00}$ связаны с $E_k \cos \bar{\omega}'_k$, $E_k \sin \bar{\omega}'_k$ такими же линейными соотношениями, которые связывают $\xi_i$, $\eta_i$ с новыми переменными $\xi'_i$, $\eta'_i$ в замене переменных § 151. Но эта замена переменных выражает некоторое ортогональное преобразование координат, определитель которого равен единице.

Итак, наш функциональный определитель равен единице, что и требовалось доказать.

*Мы должны заключить, что из уравнений* (4) *можно определить постоянные*

$$\bar{\omega}_i,\ W_i,\ E_k \cos \bar{\omega}'_k,\ E_k \sin \bar{\omega}'_k$$

*в виде рядов, расположенных по степеням*

$$\mu,\ \xi_i^1,\ \eta_i^1,$$

*коэффициенты которых зависят, кроме того, от* $L_i^1$.

Этот результат потребовал длинного рассуждения, хотя он почти очевиден.

**182.** Вспомним, каковы те два разложения, которые предстоит отождествить. С одной стороны, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^1 + \delta L_i, & \xi_i &= \xi_i^1 + \delta\xi_i, \\ \eta_i &= \eta_i^1 + \delta\eta_i, & \lambda_i &= \lambda_i^0 + w_i + \delta\lambda_i. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Величины $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\lambda_i$ должны быть заменены их разложениями (1) и в этих разложениях в свою очередь следует заменить аргументы $w_i$ на $n_i t$, $\tau$ на $t$ и постоянные $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ на $L_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$.

С другой стороны, имеем

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta L_i, & \xi_i &= \xi_i^0 + \delta\xi_i, \\ \eta_i &= \eta_i^0 + \delta\eta_i, & \lambda_i &= \lambda_i^0 + w_i^0 + g_i + \delta\lambda_i. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Величины $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\lambda_i$ должны быть заменены разложениями (2), так же как и $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $g_i$, и в этих разложениях в свою очередь нужно заменить $w_i^0$ и $w'_k$ на $n'_i t + \bar{\omega}_i$ и $-\gamma'_k t + \bar{\omega}'_k$.

Чтобы отождествить выражения (6) и (7), мы можем поступить двумя способами. Мы можем принять за основу постоянные

$$L_i^1,\ \xi_i^1,\ \eta_i^1,$$

входящие в уравнения (6). Тогда в уравнениях (7) мы должны заменить постоянные

$$W_i, \ \overline{\omega}_i, \ E_k \frac{\cos}{\sin} \overline{\omega}'_k$$

их выражениями в функции $L_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$, т. е. выражениями, которые мы составили в предыдущем параграфе.

Какова будет в таком случае форма правых частей этих уравнений? Они являются рядами, расположенными по степеням

$$\mu, \ E_k \cos w'_k, \ E_k \sin w'_k.$$

Но так как, например, имеем

$$E_k \cos w'_k = E_k \cos \overline{\omega}'_k \cos \gamma'_k t + E_k \sin \overline{\omega}'_k \sin \gamma'_k t,$$

то мы видим, что правые части являются рядами, расположенными по степеням

$$\mu, \quad E_k \cos \overline{\omega}'_k, \quad E_k \sin \overline{\omega}'_k$$

и по синусам и косинусам кратных $\gamma'_k t$.

С другой стороны, величины $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\lambda_i - w''_i$ разлагаются по синусам и косинусам кратных $w''_i$, и, следовательно, кратных $\overline{\omega}_i$ и $n'_i t$.

Наконец, коэффициенты этих разложений зависят еще от $W_i$.

Согласно предыдущему параграфу величины

$$W_i, \quad \overline{\omega}_i, \quad E_k \cos \overline{\omega}'_k, \quad E_k \sin \overline{\omega}'_k$$

разлагаются по степеням

$$\mu, \quad \xi_i^1, \quad \eta_i^1$$

и то же будет для синусов и косинусов кратных $\overline{\omega}_i$.

Следовательно, преобразованные формулы (7) дадут нам

$$L_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad \lambda_i - n'_i t$$

в виде рядов, расположенных:

1) по степеням $\mu$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$;

2) по синусам и косинусам кратных $n'_i t$, $\gamma'_k t$;

3) кроме того, зависящих от $L_i$.

Общий член ряда имеет вид

$$A \mu^{\alpha} \mathfrak{M}_1 \frac{\cos}{\sin} \nu' t,$$

где $A$ зависит только от $W_i$, а $\mathfrak{M}_1$ разложимо по степеням $\xi_i^1$ и $\eta_i^1$ и где

$$\nu' = \sum k_i n_i' - \sum p_k \gamma_k',$$

$k_i$, $p_k$ — целые числа.

Это разложение еще не совпадает с разложением (6), так как выражение

$$\mu^\alpha \mathfrak{M}_1,$$

которое является одночленом, целым относительно $\mu$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$, имеет коэффициентом $A \frac{\cos}{\sin} \nu t$, который тоже зависит от $\mu$, $\xi_i^1$ и $\eta_i^1$.

Действительно, величины $n_i'$ и $\gamma_k'$ разлагаются по степеням $\mu$, $E_k^2$. С другой стороны, выражения

$$E_k^2 = (E_k \cos \overline{\omega}_k')^2 + (E_k \sin \overline{\omega}_k')^2$$

разлагаются по степеням $\mu$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$.

Поэтому $n_i'$ и $\gamma_k'$, а следовательно, и коэффициент $\nu'$ также будут разлагаться по степеням $\mu$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$.

Отсюда следует, что для того, чтобы эти два разложения были тождественными, необходимо разложить $\cos \nu' t$ или $\sin \nu' t$ по степеням этих величин.

При $\mu = 0$ $\nu'$ обращается в

$$\nu = \sum k_i n_i.$$

Очевидно, что, например,

$$\cos \nu' t = \cos [\nu t + (\nu' - \nu) t]$$

и поэтому может быть разложено по степеням $(\nu' - \nu) t$. Общий член равен некоторому числовому коэффициенту, умноженному на $\cos \nu t$ или $\sin \nu t$ и на некоторую степень $(\nu' - \nu) t$.

Далее, разность $(\nu' - \nu)$, которая помимо всего делится на $\nu$, может быть разложена по степеням $\mu$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$. Общий член разложения (7), преобразованный таким образом, будет

$$A \mu^\alpha \mathfrak{M}_1 (\nu - \nu')^m t^m \frac{\cos}{\sin} \nu t,$$

и тогда он должен быть тождественным общему члену разложения (6).

**183.** Легко теперь отдать себе отчет в том, чем обусловлено происхождение членов различного сорта в разложении (6), т. е. в разложении, полученном путем прямого применения метода Лагранжа.

Чисто вековыми членами являются те, которые не содержат множители $\cos \nu t$ или $\sin \nu t$. Следовательно, это те члены, для которых имеем

$$\nu = \sum k_i n_i = 0.$$

Так как между $n_i$ не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами, то отсюда

$$k_i = 0,$$

т. е. все чисто вековые члены происходят от членов, не зависящих от $w_i''$, а зависящих только от аргументов $w_k'$.

В самом деле, если $\nu'$ делится на $\mu$, то нельзя разлагать $\cos \nu' t$ по степеням $\mu$, не разлагая одновременно и по степеням $t$, и это приводит к появлению чисто вековых членов.

В чем заключается различие между этим случаем и случаем ограниченной задачи, изложенным в главе VII?

В обоих случаях координаты могут быть выражены через функции, разложимые по синусам и косинусам кратных некоторого числа аргументов, изменяющихся пропорционально времени. В данном случае некоторые из этих аргументов обладают весьма малыми средними движениями, обращающимися в нуль вместе с $\mu$. В ограниченной задаче, наоборот, все средние движения конечны. Из этого раньше вытекало, что мы не имели членов с $\cos \nu' t$, где $\nu'$ делится на $\mu$, следовательно, в разложениях Лагранжа не было чисто вековых членов.

Члены, которые зависят от $w''$, и для которых, следовательно, коэффициент $\nu$ не равен нулю, дают нам периодические члены и смешанные вековые члены.

Чему равен р а н г полученных таким способом членов? Рассмотрим один из членов

$$A\mu^\alpha \mathfrak{M}_1 \frac{\cos}{\sin} \nu' t \tag{8}$$

преобразованного разложения (7). Он нам будет давать члены вида

$$A\mu^\alpha \mathfrak{M}_1 (\nu' - \nu)^m t^m \frac{\cos}{\sin} \nu t,$$

и если, разлагая $(\nu' - \nu)^m$ по степеням $\mu$, мы имеем

$$(\nu' - \nu)^m = \sum B\mu^\beta,$$

то наш общий член будет иметь вид

$$\sum AB\mu^{\alpha+\beta} \mathfrak{M}_1 t^m \frac{\cos}{\sin} \nu t.$$

Так как $\nu' - \nu$ делится на $\mu$, то показатель $\beta$ по крайней мере равен $m$. Следовательно, ранг общего члена будет

$$\alpha + \beta - m \geqslant \alpha.$$

Так как $\alpha$ не может быть отрицательным, мы получили еще одно доказательство теоремы о ранге, а именно, что ранг любого члена разложения всегда неотрицателен.

Таким образом, все члены, выведенные из члена вида (8), всегда имеют ранг, по крайней мере равный $\alpha$.

Чтобы получить члены нулевого ранга в уравнениях (7), нужно положить $\mu=0$. Так как при этих условиях $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\lambda$ обращаются в нуль, будем иметь

$$L_i = L_i^0, \quad \xi_i = \xi_i^0, \quad \eta_i = \eta_i^0, \quad \lambda_i = w_i'' + g_i + \lambda_i^0.$$

Здесь $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $g_i$ должны быть заменены их разложениями вида (2), и в этих разложениях в свою очередь надо положить $\mu=0$. Естественно, мы придем к результатам главы IX.

Рассмотрим совокупность чисто вековых членов и прежде всего совокупность чисто вековых членов в $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$. Как мы увидим, это те члены, которые не зависят от $w''$.

Для этого мы должны вернуться к методу получения разложений (2). Мы взяли разложения (1), положили в них $\tau=0$, заменили $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $L_i^0$ их значениями в функции $w_k'$ и $W$ [значения, выведенные из уравнений (13) предыдущей главы] и, наконец, заменили $w_i$ на $w_i'' + g_i$.

При последней замене член

$$A \cos \sum k_i w_i$$

дает

$$A \cos \left(\sum k_i w_i''\right) \cos \left(\sum k_i g_i\right) - A \sin \left(\sum k_i w_i''\right) \cdot \sin \left(\sum k_i g_i\right),$$

т. е. все члены, которые из него получаются, содержат множителем синус или косинус аргумента $\sum k_i w_i''$.

Поэтому член, не зависящий от $w_i$ (т. е. член, где все $k_i$ равны нулю), дает нам только члены, не зависящие от $w_i''$ и, наоборот, член, зависящий от $w_i$, дает только члены, зависящие от $w_i''$.

Мы хотим иметь совокупность членов, не зависящих от $w_i''$. Для этого мы должны взять совокупность разложений (1), положить в них $\tau = 0$, отбросить все члены, зависящие от $w$, и заменить $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ их разложениями вида (2).

Следовательно, будем иметь:

чисто вековые члены в $L_i = L_i^0 +$ среднее значение $\delta L_i$,
» » » » $\xi_i = \xi_i^0 +$ среднее значение $\delta\xi_i$,
» » » » $\eta_i = \eta_i^0 +$ среднее значение $\delta\eta_i$.

Слова «среднее значение» имеют тот же смысл, что и в предыдущей главе, т. е. мы допускаем, что, разлагая $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ по степеням $\tau$ и синусам и косинусам аргументов кратных $w$, мы сохраняем только те члены, которые не зависят от $\tau$ и $w$.

Для $\lambda_i$, кроме того, надо учитывать и те члены, которые происходят от члена $w_i''$, так что для чисто вековых членов в переменной $\lambda_i$ будем иметь

$$\lambda_i^0 + n_i' t + \overline{\omega}_i + g_i + \text{ср. знач. } \delta\lambda_i.$$

**184.** Для сравнения разложений (6) и (7) мы могли бы также основываться на постоянных

$$W_i, \; E_k, \; \overline{\omega}_k'.$$

Тогда было бы достаточно заменить $L_i^1$, $\xi_i^1$, $\eta_i^1$ их значениями, получаемыми непосредственно из уравнений (4) в виде функций этих постоянных. Можно было бы также получить некоторые интересные результаты.

Можно также сделать сравнение разложений, не используя частный выбор значений постоянных.

Это привело бы к большим упрощениям и мы могли бы избежать как длинных выкладок, так и других трудностей. Но такое сравнение было бы менее точным.

**185. Теорема Пуассона.** Мы знаем, что Лагранж доказал теорему о неизменности больших осей, в силу которой разложения больших осей не содержат вековых членов, если пренебречь в них квадратами масс, т. е. пренебречь членами порядка $\mu^2$. Доказательство этой теоремы было изложено в § 105. Она весьма важна с точки зрения устойчивости солнечной системы.

Позже Пуассон обобщил результаты Лагранжа и доказал аналогичную теорему для случая, когда в разложениях сохранены члены с квадратами масс, т. е. члены порядка $\mu^2$, и отброшены члены порядка $\mu^3$. Доказано, что разложения больших осей содержат смешанные вековые члены, но не содержат чисто вековых членов.

Другими словами, Пуассон доказал, что в разложениях больших полуосей или, что то же самое, в разложениях переменных $L_i$, нет членов вида

$$\mu^2 t.$$

Но член вида $\mu^2 t$ является членом второй степени и имеет ранг, равный единице.

Докажем теперь теорему Пуассона, или, точнее, мы докажем более общую теорему, а именно, докажем, что в *разложениях переменных $L_i$ нет чисто вековых членов ранга единица.*

Действительно, откуда могут появиться такие члены? Выше мы видели, что для того, чтобы получить чисто вековые члены в разложении для $L_i$, необходимо взять разложение $L_i$ по степеням $\tau$

и по синусам и косинусам кратных $w$ и сохранить в этом разложении члены, не зависящие от $\tau$ и $w$ или, если угодно, искомые члены суть не что иное, как среднее значение $L_i$.

Но в § 175 мы показали, что среднее значение разности $W_i - L_i$ делится на $\mu^2$. Поэтому для чисто вековых членов в $L_i$ имеем

$$W_i + \mu^2 DL_i,$$

где $DL_i$ разлагается по степеням $\mu$ и

$$E_k \frac{\cos}{\sin} w'_k.$$

Напомним, между прочим, что

$$\mu^2 DL_i = -\text{ср. знач.} \left( \sum \delta L \frac{\partial\, \delta\lambda}{\partial w_i} + \sum \delta\xi \frac{\partial\, \delta\eta}{\partial w_i} \right).$$

Величина $W_i$ постоянна, поэтому она не является вековым членом в собственном смысле слова. Что касается выражения $\mu^2 DL_i$, то оно нам дает члены вида

$$A\mu^\alpha \mathfrak{M}_1 \frac{\cos}{\sin} \nu' t, \tag{8}$$

где показатель $\alpha$ не меньше двух, так как $\mu^2 DL_i$ делится на $\mu^2$.

Но мы видели, что члены, получаемые из выражения (8), имеют ранг не меньше $\alpha$, поэтому их ранг не меньше двух. Следовательно, разложение $L_i$ не содержит чисто вековых членов ранга меньше двух, что и требовалось доказать.

Итак, мы не имеем членов вида $\mu^2 t$, но имеем члены вида

$$\mu^2 \sin \nu' t,$$

где $\nu$ будет нулем и где, следовательно, $\nu'$ делится на $\mu$.

Пусть, разлагая $\nu'$ по степеням $\mu$, имеем

$$\nu' = \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 + \ldots;$$

тогда будем иметь

$$\mu^2 \sin \nu' t = \mu^2 \sin (\alpha_1 \mu t + \alpha_2 \mu^2 t + \ldots).$$

Если разложим по степеням $\mu$, то первый член разложения будет равен $\alpha_1 \mu^3 t$. Итак, мы имеем члены вида $\mu^3 t$.

После открытия Пуассона долгое время верили теореме вообще и считали, что, доказав ее в первом приближении, затем во втором, нетрудно будет доказать ее также и для следующих приближений. Однако огромные усилия в этом направлении оказались бесплодными.

В 1876 г. Спиру-Аретю доказал существование членов вида $\mu^3 t$ и этот результат вызвал огромное удивление, хотя в то время некоторые ученые уже подозревали это *).

186. Вернемся к главе VIII. В § 141 мы вывели формулу

$$\delta\lambda_i = -\mu \sum C_{ik} \int dt \int \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_k} dt + \int \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt + \mu \int \frac{\partial F_1}{\partial L_i} dt.$$

Там же мы отметили, что:

1) второй интеграл в правой части не может давать членов нулевого ранга;

2) члены нулевого ранга, порождаемые третьим интегралом, имеют вид

$$\mu \int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_i} dt;$$

3) первый интеграл не может давать других членов нулевого ранга, кроме тех, которые происходят из чисто вековых членов ранга 1 в выражении

$$\delta L_k = -\mu \int \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i} dt.$$

Но из предыдущего вытекает, что эти члены не существуют, поэтому первый интеграл не дает члена нулевого ранга.

Итак, членами нулевого ранга в $\lambda_i$ могут быть только

$$n_i t + \lambda_i^0 + \mu \int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_i} dt,$$

т. е. члены нулевого ранга в $\lambda_i$ могут быть получены при помощи уравнения

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = n_i + \mu \frac{\partial R}{\partial L_i}, \tag{9}$$

и притом связанного с уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= -\mu \frac{\partial R}{\partial \eta_i}, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= \mu \frac{\partial R}{\partial \xi_i}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

которые дают члены нулевого ранга в $\xi_i$ и $\eta_i$.

$R$ не зависит от $\lambda_i$, а только от $L_i$ (которые, если ограничиться членами нулевого ранга, как мы делали в главах VIII и IX,

---

*) Меффруа показал, что в работе Спиру-Аретю коэффициент при $\mu^3 t$ приведен с ошибками («Bulletin astronomique», 1958). (*Прим. перев.*)

должны рассматриваться как постоянные), так же как от $\xi_i$, $\eta_i$, которые полностью определяются из уравнений (10).

Правые части уравнений (9) являются, следовательно, известными функциями, так что уравнения (9) могут быть до конца проинтегрированы простой квадратурой.

Таким образом, члены нулевого ранга в $\lambda_i$, которые могут быть только чисто вековыми членами, получим из формулы:

$$\text{чисто вековые члены } \lambda_i = \lambda_i^0 + n_i' t + \overline{\omega}_i + g_i + \text{ср. знач. } \delta\lambda_i,$$

полагая $\mu=0$ в $g_i$ и в $\delta\lambda_i$. Тогда $\delta\lambda_i$, которое имеет $\mu$ множителем, обратится в нуль и остается

$$\lambda_i^0 + n_i' t + \overline{\omega}_i + g_i.$$

Пусть, с другой стороны,

$$n_i' = n_i + n_i^{(1)}\mu + n_i^{(2)}\mu^2 + \ldots$$

Члены

$$n_i^{(\alpha)}\mu^\alpha t$$

имеют ранг $\alpha - 1$, и мы сохраним только первый из них $n_i^{(1)}\mu t$.

Тогда для членов нулевого ранга в $\lambda_i$ будем иметь выражение

$$\lambda_i^0 + n_i + \overline{\omega}_i + n_i^{(1)}\mu t + g_i.$$

Величина $g_i$ разлагается по степеням

$$E_k \cos w_k', \quad E_k \sin w_k'.$$

Отсюда следует, что $g_i$ есть периодическая функция от $w'$, и если мы вспомним, как было составлено ее разложение, и то, что при интегрировании мы не добавляли произвольную постоянную, то увидим, что среднее значение этой периодической функции равно нулю. Это имеет место и для среднего значения $\frac{dg_i}{dt}$.

Итак, если заменим в $R$ переменные $\xi_i$ и $\eta_i$ разложениями по степеням

$$E_k \cos w_k', \quad E_k \sin w_k',$$

то среднее значение $\frac{\partial R}{\partial L_i}$ будет равно $n_i^{(1)}$.

Рассмотрим также разложения, изученные в главе IX, так как здесь мы рассматривали только члены нулевого ранга. Эти разложения содержат только члены нечетного ранга относительно $E_k$ (см. § 144 и следующие), поэтому переменные $\xi_i$ и $\eta_i$ обращаются в нуль вместе с $E_k$.

Коэффициент $n_i^{(1)}$ разлагается по степеням $E_k^2$. Чтобы получить первый член этого разложения, надо положить

$$E_k^2 = 0,$$

т. е.

$$\xi_i = \eta_i = 0.$$

В этом случае $R$ приводится к величине, которую мы в главах VIII и IX обозначали через $R_0$. Следовательно, при $E_k^2 = 0$ будем иметь

$$n_i^{(1)} = \frac{\partial R_0}{\partial L_i}.$$

Таким образом, в разложении величины $n_i^{(1)}$ по степеням $\mu$ и $E_k^2$ коэффициент при $\mu$ равен $\frac{\partial R_0}{\partial L_i}$.

# СИММЕТРИЯ РАЗЛОЖЕНИЙ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

**187. Симметрия.** Вернемся к разложениям главы X, расположенным по синусам и косинусам кратных $w'$ и $w''$. Мы можем выразить эти синусы и косинусы через мнимые показательные функции и написать эти разложения в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} L_k = \sum Ae^{i\varphi}, \quad \lambda_k = w''_k + \sum Be^{i\varphi}, \\ \xi_k + i\eta_k = \sum Ce^{i\varphi}, \ \xi_k - i\eta_k = \sum C'e^{-i\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\varphi = \sum k_j w''_j + \sum p_j w'_j.$$

Коэффициенты $A$, $B$, $C$, $C'$ зависят от постоянных $W$ и $E$.

Чтобы удовлетворить уравнениям движения, нужно положить

$$w''_j = n'_j t + \overline{\omega}_j, \quad w'_j = -\gamma'_j t + \overline{\omega}'_j,$$

откуда

$$\varphi = \nu t + h,$$

где

$$\nu = \sum k_j n'_j - \sum p_j \gamma'_j, \quad h = \sum k_j \overline{\omega}_j + \sum p_j \overline{\omega}'_j.$$

К уравнениям (1) мы присоединим интегралы площадей, которые напишем в виде

$$U = \text{const}, \quad V = \text{const},$$

сохраняя для букв $U$ и $V$ те же значения, что и в главах IX и X. В случае, в котором желательно прибегнуть к способу § 178, т. е. когда желаем отнести систему к подвижным осям, вращающимся вокруг оси $x_3$, уравнения движения принимают вид

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial (F + \alpha\mu H)}{\partial \lambda}, \ \ldots \tag{2}$$

[уравнение (20) из § 178].

В § 179 мы нашли, что $U$ и $V$ вместо того, чтобы быть постоянными, будут пропорциональными косинусу и синусу аргумента

$\alpha\mu t+h$, так что можно написать

$$U+iV=Ke^{i(\alpha\mu t+h)},\quad U-iV=Ke^{-i(\alpha\mu t+h)},$$

где $K$ и $h$ — вещественные постоянные и $K$ зависит от постоянных $W$ и $E$.

Действительно, величина

$$K^2=U^2+V^2,$$

легко выражающаяся через $L_k$, $\xi_k$, $\eta_k$, является функцией $W$, $E$, $w'$ и $w''$. Так как, кроме того, $K$ является постоянной, она не может зависеть от $w'$ и $w''$, а зависит только от $W$ и $E$.

Заметим теперь, что уравнения движения не изменяются, если всю систему повернуть на угол $\varepsilon$ вокруг оси $x_3$. Это свойство верно для обычных уравнений задачи трех тел, значит, оно верно также и для уравнений (2) [уравнение (20) из § 178].

Следовательно, нужно иметь возможность дать постоянным интегрирования

$$W,\ E,\ \overline{\omega}_j,\ \overline{\omega}'_j$$

такие приращения, чтобы вся система повернулась на угол $\varepsilon$ вокруг оси $x_3$, т. е. чтобы переменные

$$L_k,\ \lambda_k,\ \xi_k+i\eta_k,\ \xi_k-i\eta_k \tag{3}$$

заменились на

$$L_k,\ \lambda_k+\varepsilon,\ (\xi_k+i\eta_k)\,e^{-i\varepsilon},\ (\xi_k-i\eta_k)\,e^{i\varepsilon}. \tag{4}$$

И в самом деле, если мы сделаем преобразование, которое состоит в замене величин (3) величинами (4) ($\varepsilon$ — произвольный постоянный угол), уравнения движения не изменятся. Поэтому мы должны прийти к новому частному решению этих уравнений, соответствующему новым значениям постоянных интегрирования.

Если угол $\varepsilon$ бесконечно мал, то и приращения постоянных интегрирования

$$\delta W,\ \delta E,\ \delta\overline{\omega}_j,\ \delta\overline{\omega}'_j$$

будут бесконечно малы. Тогда для

$$A,\ B,\ C,\ C',\ K,\ n'_j,\ \gamma'_j$$

имеем приращения

$$\delta A,\ \delta B,\ \delta C,\ \delta C',\ \delta K,\ \delta n'_j,\ \delta\gamma'_j,$$

для $w''_j$— приращение $\delta w''_j$, а для $\varphi$ — приращение

$$\delta\varphi=t\cdot\delta\nu+\delta h,$$

где

$$\delta\nu = \sum k_j \delta n'_j - \sum p_j \delta\gamma'_j, \quad \delta h = \sum k_j \delta\bar{\omega}_j + \sum p_j \delta\bar{\omega}'_j.$$

С другой стороны, $L_k$, $\lambda_k$, $\xi_k + i\eta_k$, $\xi_k - i\eta_k$ должны получить приращения

$$0,\ \varepsilon,$$

$$(\varepsilon_k + i\eta_k)\, i\varepsilon = -i\varepsilon \sum C e^{i\varphi},$$

$$-(\xi_k - i\eta_k)\, i\varepsilon = i\varepsilon \sum C' e^{-i\varphi},$$

так что будем иметь

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sum \delta A e^{i\varphi} + i \sum A\, \delta\nu t e^{i\varphi} + i \sum A\, \delta h e^{i\varphi},\\ \varepsilon &= t\, \delta n'_k + \delta\bar{\omega}_k + \sum \delta B e^{i\varphi} + i \sum B\, \delta\nu t e^{i\varphi} + \\ &\qquad\qquad + i \sum B \delta h e^{i\varphi},\\ -i\varepsilon \sum C e^{i\varphi} &= \sum \delta C e^{i\varphi} + i \sum C\, \delta\nu t e^{i\varphi} + i \sum C\, \delta h e^{i\varphi},\\ i\varepsilon \sum C' e^{-i\varphi} &= \sum \delta C' e^{-i\varphi} - i \sum C' \delta\nu t e^{-i\varphi} - i \sum C' \delta h e^{-i\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Обе части равенств (5) разложены по степеням $t$ и по синусам и косинусам кратных $n'_j t$ и $\gamma'_j t$. Следовательно, обе части имеют вид функций, рассмотренных в лемме § 107, из чего следует, что эта лемма может быть применена. Другими словами, эти равенства не могут иметь места, если подобные члены в обеих частях не уничтожаются.

Отсюда следует, что члены с $t$ или $te^{i\varphi}$, которые отсутствуют в левых частях, должны обращаться в нуль и в правых частях. Поэтому

1) будем иметь

$$\delta n'_k = 0.$$

2) Для всех членов, коэффициенты которых $A$, $B$, $C$ или $C'$ не равны нулю, будем иметь

$$\delta\nu = 0.$$

Наиболее важными членами разложений $\xi_k \pm i\eta_k$ являются те, которые были найдены в главе VIII. Это члены с множителем

$$E_j e^{\pm i w'_j}.$$

Они вообще не обращаются в нуль и не могут уничтожиться вместе с последующими членами, так как они намного больше всех других при малых значениях $\mu$ и $E$. Если $\varphi = w'_j$, то имеем

$$\nu = -\gamma'_j$$

и, следовательно,

$$\delta\gamma_j' = 0.$$

Величины $n_k'$ и $\gamma_j'$ являются функциями постоянных $W$ и $E$. В этом случае можно поставить такой вопрос: можно ли вывести из $3n$ уравнений

$$\delta n_k' = \delta\gamma_j' = 0 \tag{6}$$

следующие $3n$ уравнений

$$\delta W = \delta E = 0? \tag{7}$$

Ответ легко находится. Очевидно, имеем

$$\delta n_k' = \sum \frac{\partial n_k'}{\partial W}\,\delta W + \sum \frac{\partial n_k'}{\partial E}\,\delta E,$$

$$\delta\gamma_j' = \sum \frac{\partial \gamma_j'}{\partial W}\,\delta W + \sum \frac{\partial \gamma_j'}{\partial E}\,\delta E.$$

Следовательно, если функциональный определитель от $n_k'$ и $\gamma_j'$ по $W$ и $E$ не равен нулю, т. е. если не существует никакой зависимости между функциями $n_k'$ и $\gamma_j'$, то уравнения (6) влекут за собой уравнения (7).

Если все планеты движутся в одной плоскости, так что не нужно беспокоиться о наклонностях, то мы имеем только $n$ аргументов $w''$ и $n$ аргументов $w'$ и между соответствующими $2n$ коэффициентами $n'$ и $\gamma'$ нет никакой зависимости (к этому мы вернемся в следующем параграфе).

Если же планеты движутся не в одной плоскости, так что нужно принимать во внимание наклонности, то можно применить способ, изложенный в § 178; мы будем иметь одно соотношение, которое согласно § 179 имеет вид

$$\gamma_{2n}' = \alpha\mu,$$

так что постоянная $\gamma_{2n}'$ не зависит от $E$ и $W$.

В этом случае удобнее рассматривать постоянную

$$K = \sqrt{U^2 + V^2},$$

т. е. проекцию вектора площадей на плоскость $x_1x_2$. Следовательно, $K$ не изменяется при повороте системы на угол $\varepsilon$ вокруг оси $x_3$ (что приводится к преобразованию координат, в котором ось $x_3$ и плоскость $x_1x_2$ сохраняются).

Поэтому будем иметь

$$\delta K = 0.$$

Но между $n_k'$, $\gamma_j'$ (за исключением $\gamma_{2n}'$) и $K$ нет никакой зависимости (мы вернемся к этому в следующем параграфе), поэтому всегда можно будет рассуждать как и выше, и из уравнений (6), к которым добавляется уравнение $\delta K=0$, можно будет вывести уравнения (7),

$$\delta W=\delta E=0.$$

Так как $A$, $B$, $C$, $C'$ зависят только от $W$ и $E$, то будем иметь

$$\delta A=\delta B=\delta C=\delta C'=0$$

и наши равенства (5) примут вид

$$\left.\begin{aligned} &0=i\sum A\,\delta he^{i\varphi}, \quad \varepsilon=i\sum B\,\delta he^{i\varphi}+\delta\overline{\omega}_k,\\ &-i\varepsilon\sum Ce^{i\varphi}=+i\sum C\,\delta he^{i\varphi},\\ &i\varepsilon\sum C'e^{-i\varphi}=-i\sum C'\,\delta he^{-i\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Из первого равенства вытекает, что для всех членов в $L_k$ имеем

$$\delta h=0.$$

То же самое $\delta h=0$ имеем и для всех периодических членов в $\lambda_k$. С другой стороны, второе равенство показывает, кроме того, что

$$\delta\overline{\omega}_k=\varepsilon.$$

Наконец, последние два равенства показывают, что для всех членов в $\xi_k$ или $\eta_k$ имеем

$$\delta h=-\varepsilon.$$

То же самое справедливо и для всех членов в разложениях $\xi'_k$ и $\eta'_k$, так как $\xi'_k$ и $\eta'_k$ связаны с $\xi_k$ и $\eta_k$ линейной заменой переменных из § 151.

Но среди членов разложения $\xi_k+i\eta_k$ имеются члены с

$$e^{iw'_k},$$

которые не обращаются в нуль, так как их коэффициенты весьма близки к $E_k$ при малых значениях $\mu$ и $E_k$.

Для этих членов имеем $\delta\varphi=\delta w'_k$ и, следовательно, $\delta h=\delta\overline{\omega}'_k$. Поэтому

$$\delta\overline{\omega}'_k=-\varepsilon$$

и вообще

$$\delta h=\varepsilon\left(\sum k_j-\sum p_j\right).$$

Отсюда вытекает следствие:

Для всех членов в разложениях $L_k$ и $\lambda_k$ между целыми $k_j$ и $p_j$ имеется соотношение

$$\sum k_j-\sum p_j=0.$$

Для всех членов в $\xi_k$ и $\eta_k$ имеем

$$\sum k_j - \sum p_j = -1.$$

Эти результаты аналогичны результатам, полученным в § 116 и 162. Заметим, что мы могли бы рассуждать здесь так же, как в главах VI и VII и, наоборот, в главе VII так же, как и здесь.

188. В предыдущем параграфе мы утверждали без доказательства, что между $n'$ и $\gamma'$ не существует никакой зависимости, если все планеты движутся в одной плоскости, а в противном случае не существует никаких соотношений между $n'$, $\gamma'$ и $K$. Из этого мы вывели уравнения

$$\delta W = \delta E = 0.$$

Легко проверить это утверждение, если ограничиться первыми членами разложений, но этот результат можно получить и более простым путем.

Действительно, вернемся к переменным $\xi'_k$ и $\eta'_k$, которые связаны с $\xi_k$ и $\eta_k$ линейными соотношениями § 151. Их можно разложить в том же виде и написать

$$\xi_k'^2 + \eta_k'^2 = D_k^0 + \sum De^{i\varphi},$$

выделяя известный член $D_k^0$. Аналогично, в разложении $L_k$ можно выделить известный член и написать

$$L_k = A_k^0 + \sum Ae^{i\psi}.$$

При повороте всей системы на угол $\varepsilon$ $\xi_k'^2 + \eta_k'^2$, так же как и $L_k$, не изменяются, поэтому имеем

$$\delta D_k^0 + \sum \delta De^{i\varphi} + i \sum D\delta\varphi e^{i\varphi} = 0,$$
$$\delta A_k^0 + \sum \delta Ae^{i\varphi} + i \sum A\,\delta\varphi e^{i\varphi} = 0.$$

Известные члены должны обратиться в нуль, откуда

$$\delta D_k^0 = 0, \qquad \delta A_k^0 = 0. \tag{8}$$

Величины $D_k^0$ и $A_k^0$ являются функциями $W$ и $E$. Влекут ли за собой уравнения (8) справедливость уравнений (7)? Для этого достаточно, как мы говорили, чтобы между $D_k^0$ и $A_k^0$ не существовало никакой зависимости, что легко проверить.

Достаточно сделать проверку при $\mu = 0$. При $\mu = 0$ имеем

$$L_k = W_k$$

и, следовательно,

$$A_k^0 = W_k.$$

При $\mu=0$ величины $\xi_k$, $\eta_k$, $\xi'_k$, $\eta'_k$ сводятся к членам нулевого ранга, т. е. к тем значениям, которые были вычислены в главе IX.

Достаточно будет сделать проверку для малых значений эксцентриситетов и наклонностей, т. е. для малых значений $E_k$. Действительно, если между $A_k^0$ и $D_k^0$ имеются какие-то зависимости, то они будут существовать и в том случае, когда разложения приводятся к их членам наименьшей степени.

Но для малых значений $E_k$ мы можем заменить $\xi_k$ и $\eta_k$ первыми членами их разложений по степеням $E_k$, т. е. теми значениями, которые были вычислены в главе VIII. В таком случае имеем

$$\xi_k'^2+\eta_k'^2=E_k^2$$

и, следовательно,

$$D_k^0=E_k^2.$$

Отсюда следует, что между $A_k^0=W_k$ и $D_k^0=E_k^2$ нет никакого соотношения, что и требовалось доказать.

Следовательно, равенства (8) влекут за собой уравнения (7) и поэтому

$$\delta A=\delta B=\delta C=\delta C'=0.$$

Далее можно вести рассуждения так же, как и в предыдущем параграфе.

189. Из этого можно вывести, каким образом величины $n'_k$ и $\gamma'_j$ зависят от коэффициента $\alpha$, который фигурирует в уравнениях (20) из § 178 [уравнение (2)]. Обозначим через (2′) уравнения, получающиеся из (2), если в последних заменить $\alpha$ на $\alpha+\delta\alpha$, придавая $\alpha$ приращение $\delta\alpha$. Тогда решению уравнений (2)

$$L_k,\quad \lambda_k,\quad \xi_k+i\eta_k,\quad \xi_k-i\eta_k,\quad \xi_k'^2+\eta_k'^2$$

будет соответствовать решение уравнений (2′):

$$L_k,\ \lambda_k+\delta\alpha\mu t,\quad (\xi_k+i\eta_k)\,e^{-i\delta\alpha\mu t},\quad (\xi_k-i\eta_k)\,e^{i\delta\alpha\mu t},\quad \xi_k'^2+\eta_k'^2.$$

С другой стороны, можно было бы думать, что для того, чтобы перейти от частного решения уравнений (2) к соответствующему решению уравнений (2′), нужно было бы придать постоянным интегрирования малые приращения.

Коэффициенты $A, \ldots, \nu, \ldots$ также получат приращения, с одной стороны, потому, что они зависят от этих постоянных, с другой стороны, потому, что они зависят от $\alpha$. Следовательно, мы придем к следующим формулам, аналогичным равенствам (5), и в которых все известные члены мы обозначили, как и в предыдущем параграфе, через $\delta A_k^0$ и $\delta D_k^0$:

$$\left.\begin{aligned}
&0=\delta A_k^0+\sum \delta A e^{i\varphi}+i\sum A\delta v t e^{i\varphi}+i\sum A\delta h e^{i\varphi},\\
&t\mu\,\delta\alpha=t\delta n_k'+\delta\overline{\omega}_k+\sum \delta B e^{i\varphi}+i\sum B\delta v t e^{i\varphi}+i\sum B\delta h e^{i\varphi},\\
&-it\mu\,\delta\alpha\sum C e^{i\varphi}=\sum \delta C e^{i\varphi}+i\sum C\delta v t e^{i\varphi}+i\sum C\delta h e^{i\varphi},\\
&it\mu\,\delta\alpha\sum C' e^{-i\varphi}=\sum \delta C' e^{-i\varphi}-i\sum C'\delta v t e^{-i\varphi}-\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-i\sum C'\delta h e^{-i\varphi},\\
&0=\delta D_k^0+\sum \delta D e^{i\varphi}+i\sum D\delta v t e^{i\varphi}+i\sum D\delta h e^{i\varphi}.
\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Приравняем здесь подобные члены. Сначала находим

$$\delta A_k^0=0,\quad \delta D_k^0=0,$$

откуда

$$\delta W=\delta E=0.$$

Далее видим, что $\delta v$ и $\delta h$ равны нулю в разложениях для

$$L_k,\quad \lambda_k,\quad \xi_k'^2+\eta_k'^2$$

и

$$\delta\overline{\omega}_k=0.$$

Но наиболее важный момент с интересующей нас точки зрения заключается в том, что, приравнивая члены, содержащие $t$ множителем во втором уравнении, имеем

$$\mu\,\delta\alpha=\delta n_k',$$

а приравнивая члены с $te^{i\varphi}$ в третьем и четвертом равенствах, имеем

$$-\mu\delta\alpha=\delta v,$$

и также для всех членов $\xi_k$ и $\eta_k$, коэффициенты которых не равны нулю. Но среди этих членов имеются, как мы видели, члены с

$$E_k e^{iw_k'},$$

где

$$v=-\gamma_k'.$$

Поэтому имеем

$$\delta\gamma_k'=\mu\,\delta\alpha.$$

Таким образом, все величины $\delta n_k'$ и $\delta\gamma_k'$ равны между собой, поэтому разности $n_k'-n_j'$, $\gamma_k'-\gamma_j'$, $n_k'-\gamma_j'$ не зависят от $\alpha$. С другой стороны, так как мы видим, что $\gamma_{2n}'$ равно $\alpha\mu$, то можем заключить, что $n_k'-\alpha\mu$ и $\gamma_k'-\alpha\mu$ не зависят от $\alpha$.

В разложениях для $L_k$ и $\lambda_k$ имеем

$$\sum k - \sum p = 0,$$

откуда

$$\nu = \sum k_j n'_j - \sum p_j \gamma'_j = \sum k_j (n'_j - \alpha\mu) - \sum p_j (\gamma'_j - \alpha\mu).$$

Это равенство показывает, что $\nu$ не зависит от $\alpha$. Поэтому если рассматривать постоянные $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'$ как не зависящие от $\alpha$, то угол $\varphi$ не будет зависеть от $\alpha$, и то же самое можно утверждать и относительно $w''_k - \alpha\mu t$. Аналогичный вывод можно сделать и относительно величин $L_k$ и $\lambda_k - \alpha\mu t$.

Следовательно, если заменить $\alpha$ на $\alpha + \delta\alpha$, то величины $L_k$ и $\lambda_k$ заменяются на $L_k$ и $\lambda_k + \delta\alpha \cdot \mu t$.

В разложениях для $\xi_k$ и $\eta_k$ имеем

$$\sum k - \sum p = -1.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\nu = \sum k_j n'_j - \sum p_j \gamma'_j = \sum k_j (n'_j - \alpha\mu) - \sum p_j (\gamma'_j - \alpha\mu) - \alpha\mu,$$

которое доказывает, что $\nu - \alpha\mu$ не зависит от $\alpha$, а значит, и $\varphi + \alpha\mu t$ не зависит от $\alpha$.

Следовательно,

$$(\xi_k + i\eta_k)\, e^{i\alpha\mu t} = \sum C e^{i(\varphi + \alpha\mu t)}$$

не зависит от $\alpha$, и то же самое справедливо и для

$$(\xi_k - i\eta_k)\, e^{-i\alpha\mu t}.$$

Таким образом, если $\alpha$ заменить на $\alpha + \delta\alpha$, то выражения $\xi_k + i\eta_k$ и $\xi_k - i\eta_k$ заменятся на

$$(\xi_k + i\eta_k)\, e^{-i\delta\alpha\mu t}, \qquad (\xi_k - i\eta_k)\, e^{i\delta\alpha\mu t}.$$

Следовательно, чтобы перейти от решения уравнений (2) к соответствующему решению уравнений (2′), достаточно заменить $\alpha$ на $\alpha + \delta\alpha$, ничего не изменяя в постоянных интегрирования $W$, $E$, $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}'$.

Можно было, впрочем, ограничиться замечанием, что, заменяя в наших разложениях

$$w'' \quad \text{на} \quad w'' + \delta\alpha\mu t,$$
$$w' \quad \text{на} \quad w' - \delta\alpha\mu t$$

и сохраняя без изменения $W$ и $E$, мы изменим $L_k$, $\lambda_k$, $\xi_k + i\eta_k$, $\xi_k - i\eta_k$ на $L_k$, $\lambda_k + \delta\alpha\mu t$, $(\xi_k + i\eta_k)\, e^{-i\delta\alpha\mu t}$, $(\xi_k - i\eta_k)\, e^{i\delta\alpha\mu t}$, т. е. что от решения уравнений (2) перейдем к решению уравнений (2′).

Это немедленно вытекает из соотношений

$$\sum k - \sum p = 0$$

или

$$\sum k - \sum p = -1,$$

без надобности снова прибегать к предыдущему анализу.

Все это показывает, что переход от общего решения уравнений (2), т. е. уравнений (20) из § 178, к общему решению задачи трех тел, отнесенных к неподвижным осям, можно осуществить немедленно. Коэффициенты разложений ($A$, $B$, $C$, $C'$) не зависят от $\alpha$. Только средние движения зависят от $\alpha$ и притом линейно. Поэтому достаточно придать каждому из этих средних движений то значение, которое соответствует $\alpha = 0$.

При этих условиях одно из них, т. е. $\gamma'_{2n}$, обращается в нуль. Если при этом за координатную плоскость $x_1x_2$ выберем неизменную плоскость, то величина, которую мы обозначили через $E_{2n}$, обращается в нуль, так что члены, которые зависят от аргумента $w'_{2n}$, также исчезают.

**190. Симметричные соединения.** Допустим, что в момент $t = 0$ все светила находятся в одной плоскости, которую мы обозначим через $P$, и что все их скорости направлены перпендикулярно к этой плоскости.

В этом случае мы будем говорить, что светила находятся в *симметричном соединении*. Два положения одного и того же светила, соответствующие моменту $t$ и $-t$, будут симметричны относительно плоскости $P$. Это является непосредственным следствием симметрии наших уравнений.

Мы можем предположить, что постоянные $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ определены таким образом, чтобы аргументы $w'$ и $w''$ обращались в нуль, т. е. в момент симметричного соединения (при $t = 0$). Тогда при замене $t$ на $-t$, т. е. при замене $w'$ и $w''$ на $-w'$ и $-w''$, положение каждого светила заменится симметричным относительно плоскости $P$. Если мы возьмем плоскость $P$ за плоскость $x_1x_3$, то $L_k$, $\lambda_k$, $\xi_k$, $\eta_k$ заменятся на $L_k$, $-\lambda_k$, $\xi_k$, $-\eta_k$. Следовательно, *в разложениях, расположенных по синусам и косинусам кратных $w'$ и $w''$, разложения для $L_k$ и $\xi_k$ будут содержать только косинусы, тогда как разложения для $\lambda_k$ и $\eta_k$ будут содержать только синусы.*

Можно было бы подумать, что наложение условия симметричного соединения ограничивает общность, но в действительности такое ограничение не является существенным. В самом деле, если имеем $n+1$ тело, центр масс которых считается неподвижным, т. е. имеем $n$ планет, то в момент симметричного соединения остается $3n$ произвольных величин, а именно, $2n$ координат $n$ планет в плоскости $P$, совпадающей с плоскостью $x_1x_3$, и их $n$ скоростей, направление которых установлено, но величины которых остаются произвольными. Тогда мы можем воспользоваться этой неопределенностью, чтобы произвольно выбрать $3n$ постоянных $W$ и $E$.

Но наши неизвестные зависят только от $3n$ постоянных и $3n$ аргументов $w'$ и $w''$. Наши разложения, одни из которых содержат только синусы, а другие только косинусы, достаточны, следовательно, для того, чтобы дать наиболее общее решение. Придавая постоянным $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'$ нулевые значения, мы будем иметь частное решение, соответствующее симметричному соединению; придавая им произвольные значения, будем иметь общее решение.

**191.** С другой стороны, если заменим систему другой системой, симметричной первой относительно плоскости $x_1x_2$, то переменные $L$ и $\lambda$ не изменяются; не изменятся и эксцентрические переменные, тогда как облические переменные изменят знаки.

Впрочем, из симметрии уравнений следует, что если начальные положения сравниваемых систем симметричны относительно плоскости $x_1x_2$, то то же самое будет иметь место и для положений в любой момент.

Пусть

$$W_k, \qquad E_k, \qquad \overline{\omega}_k, \qquad \overline{\omega}'_k$$

суть значения постоянных интегрирования для первой из этих двух систем. Посмотрим, как найти другие значения этих постоянных для второй системы, т. е. такие значения, которые, будучи подставлены вместо первоначальных, изменят знаки всех облических переменных, не изменяя другие переменные.

Пусть в таком случае для первой системы

$$Ae^{i\varphi}$$

есть любой член одного из наших разложений; величина $\varphi$ имеет тот же самый смысл, что и в § 187. Пусть $A'e^{i(\varphi+h)}$ является соответствующим членом для второй системы. Два разложения должны быть тождественными с точностью до знака. Если, следовательно, мы имеем дело с $L_k$ или $\lambda_k$, или с одной из эксцентрических переменных, то будем иметь (приравнивая члены соответствующих разложений)

$$Ae^{i\varphi} = A'e^{i(\varphi+h)}.$$

Если рассматриваем одну из облических переменных, то будем иметь

$$Ae^{i\varphi} = -A'e^{i(\varphi+h)}.$$

Это тождество соблюдается в двух случаях:

1) при $A = -A'$, $h = 0$,

2) при $A = A'$, $h = \pi$.

Для определенности мы будем предполагать, что в момент $t=0$ имеем симметричное соединение, т. е. что постоянные $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ равны нулю. Как нам известно, это не ограничивает существенно общность. Тогда будем иметь $h=0$ и $A=A'$ для $L$, $\lambda$ и эксцентрических переменных, и $A=-A'$для облических переменных.

Вспомним сначала, что согласно обозначениям, сделанным в предыдущих главах, нечетные индексы присущи эксцентрическим переменным, а также соответствующим $E$ и $w'$, тогда как четные индексы присущи облическим переменным и соответствующим $E$ и $w'$.

Каковы будут значения постоянных $W$ и $E$, когда совершается переход от первой системы ко второй, симметричной относительно плоскости $x_1x_2$?

Мы утверждаем, что $W$ не изменяются, не изменяются и величины $E$ с нечетными индексами, в то время как величины $E$ с четными индексами меняют свой знак. Сначала рассмотрим $W$. Мы видели, что величина $W_i$ является не чем иным, как средним значением выражения

$$\sum L\frac{\partial\lambda}{\partial w_i}+\sum \xi\frac{\partial\eta}{\partial w_i}\,, \tag{10}$$

вычисленным относительно $\tau$ и $w$ (среднее значение — это совокупность всех членов в разложении, не зависящих от $\tau$ и $w$). Чтобы все выразить в функции новых аргументов $w'$ и $w''$, нужно, как мы объяснили в главе X, положить

$$\tau=0,\qquad w_i=w_i''+g_i$$

и, далее, заменить $L_i^0$, $g_i$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ их значениями в функции от $w'$. Легко видеть, что члены, зависящие от $\tau$, исчезнут при $\tau=0$. Члены, не зависящие от $\tau$, но зависящие от $w$, будут давать нам члены, зависящие от $w''$, тогда как члены, не зависящие от $\tau$ и от $w$, дадут нам члены, не зависящие от $w''$.

Следовательно, среднее значение относительно $\tau$ и $w$ не отличается от среднего значения относительно $w''$. С другой стороны,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial w_i}=\frac{\partial\lambda}{\partial w_i''}\,,\qquad \frac{\partial\eta}{\partial w_i}=\frac{\partial\eta}{\partial w_i''}\,,$$

так что в конечном счете $W_i$ является средним значением по $w''$ выражения

$$\sum L\frac{\partial\lambda}{\partial w_i''}+\sum \xi\frac{\partial\lambda}{\partial w_i''}\,. \tag{10$'$}$$

Заметим, кстати, что так как $W_i$ есть постоянная, то выражение (10′) не может содержать члены, не зависящие от $w''$ и зависящие от $w'$. Но если мы вернемся к сравнению разложений главы XI, то увидим сейчас же, что чисто вековые члены происходят из членов, которые зависят от $w'$, но не зависят от $w''$. Выражение (10′), или, если угодно, выражение (10), не может содержать чисто вековые члены.

Это является некоторым обобщением теоремы Пуассона.

Как бы то ни было, при переходе от первой системы ко второй $L$, $\lambda$ не меняются, $\xi$ и $\eta$ также не меняются, когда индексы нечетны (эксцентрические переменные), а $\xi$ и $\eta$ с четными индексами меняют знаки. В итоге выражение (10′) не изменяется. Следовательно, $W_i$ не изменяется, что и требовалось доказать.

Перейдем к $E_k$. Пусть $A_k$ является коэффициентом при $\cos w'_k$ в одном из наших разложений. Так как все разложения должны быть расположены по степеням $E_j \cos w'_j$, $E_j \sin w'_j$, то мы должны сделать вывод, что отношение

$$\frac{A_k}{E_k}$$

разложимо по степеням $E_j^2$. Мы имеем, следовательно, уравнения вида

$$A_k = E_k \varphi_k (E_1^2, E_2^2, \ldots, E_{2n}^2) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

где $\varphi_k$ — ряды, расположенные по степеням $E_j^2$.

Пользуясь теоремой о неявных функциях, примененной нами уже в § 66 и 181, из этих уравнений можно выразить $E_j$ в виде рядов, расположенных по степеням $A_k$. Из предыдущих формул следует, что когда изменяется знак величины $E_k$, будет изменяться знак $A_k$. Отсюда вытекает, что разложение $E_k$ по степеням $A$ должно делиться на $A_k$ и отношение

$$\frac{E_k}{A_k},$$

которое не должно изменяться, когда меняется знак одной из величин $A_j$, должно располагаться по степеням $A_j^2$, так что будем иметь

$$E_k = A_k \psi_k (A_1^2, A_2^2, \ldots, A_{2n}^2) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

где функции $\psi$ разлагаются по степеням $A_j^2$.

Но мы видели, что при переходе от первой системы ко второй (которая является симметричной первой относительно плоскости $x_1 x_2$) коэффициент $A_k$ не изменяется, если $k$ — нечетное число, и меняет свой знак, если $k$ — четное число. Поэтому то же самое имеет место и для величин $E_k$, что и надо было показать.

С другой стороны, мы видели, что все коэффициенты $A$ в разложениях $L$, $\lambda$ и эксцентрических переменных не изменяются при переходе от первой системы ко второй. Поэтому все эти коэффициенты являются коэффициентами четной степени относительно постоянных $E_k$ с четным индексом; в каждом из этих членов, таким образом, *сумма показателей постоянных $E_k$ с четным индексом есть число четное.*

Но разложения расположены по степеням $E_k \cos w'_k$ и $E_k \sin w'_k$, и показатель $E_k$ имеет ту же четность, что и коэффициент при соответствующем $w'_j$ (см. § 69).

Следовательно, сумма коэффициентов аргументов $w'_k$ с четными индексами есть число четное.

В разложениях для облических переменных, наоборот, каждый коэффициент меняет свой знак при переходе от первой системы ко второй. Поэтому сумма показателей постоянных $E_k$ с четными индексами нечетна, так же как и сумма коэффициентов аргументов $w'_k$ с четными индексами.

**192. Гелиоцентрические координаты.** Прямоугольные гелиоцентрические координаты планет, их радиусы-векторы, синусы и косинусы их долгот и широт и их взаимные расстояния суть однозначные функции канонических элементов $L$, $\lambda$, $\xi$, $\eta$. Так как $L_k$, $\lambda_k - w''_k$, $\xi_k$, $\eta_k$ суть периодические функции аргументов $w'$, $w''$, то такими же будут и гелиоцентрические координаты, взаимные расстояния и т. д., так что эти величины будут расположены по синусам и косинусам кратных $w'$ и $w''$. Более того, так же как канонические элементы, они расположены по степеням $E_k \cos w'_k$, $E_k \sin w'_k$. Таким образом, разложения гелиоцентрических координат, взаимных расстояний и др., будут иметь вид

$$\sum A\Pi(E_j^{q_j}) \frac{\cos}{\sin}\left(\sum k_j w''_j + \sum p_j w'_j\right).$$

Постоянные коэффициенты $A$ зависят только от $W$ и $\mu$, а $\Pi(E_j^{q_j})$ означает произведение $2n$ множителей вида $E_j^{q_j}$. Рассуждая, как и в § 69, мы увидим, кроме того, что

$$q_j \equiv p_j \pmod 2, \qquad q_j \geqslant |p_j|.$$

Если придать всей системе вращение на угол $\varepsilon$ вокруг оси $x_3$, т. е. если, как показано в § 187, заменить $w''_j$ и $w'_j$ на $w''_j + \varepsilon$ и $w'_j - \varepsilon$, то взаимные расстояния $(n+1)$-го тела не изменяются, так же как и гелиоцентрические координаты

$$x'_3, \; x'_6, \; \ldots,$$

или

$$x_3, \; x_6, \; \ldots,$$

относящиеся к оси $x_3$.

Координаты относительно осей $x_1$ и $x_2$, наоборот, подвергнутся изменению. В самом деле, ясно, что

$$x_1'+ix_2',\quad x_4'+ix_5',\ \ldots,$$
$$x_1+ix_2,\quad x_4+ix_5,\ \ldots$$

изменятся на

$$(x_1'+ix_2')e^{i\varepsilon},\quad (x_4'+ix_5')e^{i\varepsilon},\ \ldots,$$
$$(x_1+ix_2)e^{i\varepsilon},\quad (x_4+ix_5)e^{i\varepsilon},\ \ldots,$$

тогда как

$$x_1'-ix_2',\quad x_4'-ix_5',\ \ldots,$$
$$x_1-ix_2,\quad x_4-ix_5,\ \ldots$$

изменятся на

$$(x_1'-ix_2')e^{-i\varepsilon},\quad (x_4'-ix_5')e^{-i\varepsilon},\ \ldots,$$
$$(x_1-ix_2)e^{-i\varepsilon},\quad (x_4-ix_5)e^{-i\varepsilon},\ \ldots$$

Отсюда следует, что

$$\sum k-\sum p=0$$

в разложениях взаимных расстояний и координат

$$x_3',\ x_6',\ \ldots;\ x_3,\ x_6,\ \ldots,$$

и что

$$\sum k-\sum p=1$$

в разложениях координат

$$x_1',\ x_2',\ x_4',\ x_5',\ \ldots;\quad x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5,\ \ldots$$

В силу симметрии относительно плоскости $x_1x_2$ (см. § 190) разложения координат

$$x_1',\ x_3',\ x_4',\ x_6',\ \ldots;\quad x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_6,\ \ldots$$

содержат только косинусы, и то же самое справедливо для разложений радиусов-векторов и взаимных расстояний.

Наоборот, разложения

$$x_2',\ x_5',\ \ldots;\quad x_2,\ x_5,\ \ldots$$

содержат только синусы.

В силу симметрии относительно плоскости $x_1x_3$ (см. § 191) разложения координат $x_1'$, $x_2'$, $x_4'$, $x_5'$, ...; $x_1$, $x_2$, $x_4$, $x_5$, ... таковы, что обе суммы

$$\sum q_j,\qquad \sum p_j$$

являются четными, когда суммирование распространяется на все четные значения индексов $j$. Аналогичный результат имеет место для взаимных расстояний и радиусов-векторов.

Наоборот, в разложениях

$$x'_3,\ x'_6,\ \ldots;\quad x_3,\ x_6,\ \ldots$$

эти две суммы являются нечетными.

**193. Число аргументов.** Предположим, что мы имеем $n+1$ тело, т. е. $n$ планет. Число аргументов равно $3n$, а именно $2n$ аргументов $w'$ и $n$ аргументов $w''$. Если отнести систему к подвижным осям, т. е. вернуться к уравнениям (20) из § 178, то все аргументы будут различными, так как между средними движениями $n'_j$ и $-\gamma'_j$ не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами.

Но это не будет иметь места, если мы возьмем неподвижные оси [т. е. если положим $\alpha=0$ в уравнениях (20) из § 178]. Действительно, в этом случае одно из средних движений $\gamma'_{2n}$ равно нулю, так что один из наших аргументов $w'_{2n}$ равен постоянной величине. Здесь имеем только $3n-1$ различных аргументов.

Заметим, что если возьмем неизменную плоскость за плоскость $x_1x_2$, то имеем

$$E_{2n}=0.$$

Чтобы это уяснить, предположим снова, что $\alpha$ отлично от нуля, и рассмотрим уравнения, приведенные выше (см. § 179):

$$U=K\sin(\alpha\mu t+h),\quad V=K\cos(\alpha\mu t+h).$$

Мы видели, что $\alpha\mu t+h$ совпадает с величиной $w'_{2n}$. Из этого следует, что $K$ содержит множителем $E_{2n}$. Если поэтому мы положим $E_{2n}=0$, то величины $U$ и $V$ будут тождественно равны нулю, т. е. вектор площадей будет оставаться перпендикулярным к плоскости $x_1x_2$; таким образом, условие $E_{2n}=0$ эквивалентно условию, что плоскость $x_1x_2$ и неизменная плоскость совпадают.

Чтобы перейти к случаю, в котором $\alpha$ не есть нуль, достаточно сохранить те же разложения, но придать средним движениям другие значения (см. § 189). Условие, при котором обе плоскости совпадают, остается тем же самым, т. е. $E_{2n}=0$.

Если положить $E_{2n}=0$, то все члены, которые зависят от аргумента $w'_{2n}$, исчезнут. В оставшихся членах будем иметь

$$\sum k_j-\sum p_j=1$$

для одних координат и

$$\sum k_j-\sum p_j=0$$

для других координат и для взаимных расстояний, придавая в них индексам $j$ величин $p_j$ все значения, кроме $j=2n$.

Поэтому общий член в разложении для взаимных расстояний имеет вид

$$A\cos\left(\sum k_j w_j'' + \sum p_j w_j'\right),$$

где

$$p_{2n}=0, \qquad \sum k_j - \sum p_j = 0,$$

или, что то же,

$$A\cos\left[\sum k_j (w_j'' + w_{2n-1}') + \sum p_j (w_j' - w_{2n-1}')\right],$$

где индекс у $k_j$ принимает значения

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

а индекс у $p_j$ — значения

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2.$$

*Итак, взаимные расстояния зависят только от $3n-2$ аргументов*

$$w_j'' + w_{2n-1}', \qquad w_j' - w_{2n-1}'.$$

Это утверждение было доказано на основе того, что неизменная плоскость была выбрана в качестве координатной плоскости $x_1x_2$. Но взаимные расстояния не зависят от выбора осей координат, поэтому сказанное будет справедливым и для любого расположения плоскости $x_1x_2$.

*В частности, взаимные расстояния в задаче трех тел зависят от четырех аргументов.*

Если движения всех тел происходят в одной плоскости, мы имеем $n$ аргументов $w''$ и $n$ аргументов $w'$. Все эти аргументы различны, так что координаты зависят от $2n$ аргументов. Разложения взаимных расстояний удовлетворяют условию

$$\sum k - \sum p = 0.$$

Следовательно, взаимные расстояния зависят только от $2n-1$ аргументов (три аргумента в задаче трех тел).

Предположим теперь, что одна из масс бесконечно мала. В этом случае будем иметь $n$ тел [$(n-1)$ планету], координаты которых зависят лишь от $3n-4$ аргументов:

$$\begin{array}{lllll} w_2'', & w_3'', & \ldots, & w_{n-1}'', & w_n'', \\ w_3', & w_5', & \ldots, & w_{2n-3}', & w_{2n-1}', \\ w_4', & w_6', & \ldots, & w_{2n-2}'. & \end{array}$$

Действительно, все для них будет происходить так, как если бы бесконечно малая масса не существовала, так как ее действие слишком мало́, чтобы возмущать их движения. Что касается бесконечно малой массы, то ее координаты будут зависеть, кроме того, от трех новых аргументов

$$w''_1, \quad w'_1, \quad w'_2.$$

Взаимные расстояния $n$ больших тел будут зависеть только от $3n - 5$ аргументов, а расстояния бесконечно малой массы от больших тел будут зависеть от $3n - 2$ аргументов, т. е. всегда будут зависеть и от трех новых аргументов.

Предположим теперь, что в задаче трех тел масса одного из них бесконечно мала. Мы приходим к предыдущему случаю, полагая $n = 2$, т. е. будем иметь два больших тела. Движение этих тел будет кеплеровским невозмущенным движением, поэтому их координаты будут зависеть от $3n - 4 = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ аргументов, но так как в этом случае положение перигелия не меняется, аргумент $w'_{2n-1} = w'_3$ принимает постоянное значение, поэтому в конечном итоге координаты больших тел будут зависеть лишь от одного аргумента.

Координаты тела с бесконечно малой массой зависят в этом случае от величин

$$\begin{array}{ll} w''_1, & w''_2, \\ w'_1, & w'_3, \\ w'_2, & \end{array}$$

или (так как $w'_3$ постоянна) от четырех различных аргументов.

Взаимное расстояние двух больших тел зависит тогда только от аргумента $w''_2$, а расстояние малого тела от больших тел, как и его координаты, зависит от четырех различных аргументов.

Покажем, что $w'_3$ представляет долготу перигелия орбиты большой планеты, а $w'_4$ — долготу узла и, кроме того, что $E_3$ обращается в нуль вместе с эксцентриситетом этой орбиты, а $E_4$ — вместе с ее наклонностью.

Если приравняем нулю величину $E_4$, то плоскость $x_1x_2$ совпадет с неизменной плоскостью, которая в данном случае является не чем иным, как плоскостью орбиты большой планеты.

При этих условиях все члены всех разложений, зависящие от $w'_4$, исчезнут. Предположим теперь, что $\alpha$ не равно нулю, т. е. что наша система отнесена к вращающимся осям. В этом случае координаты большой планеты зависят от двух различных аргументов $w''_2$ и $w'_3$, средние движения которых соответственно равны

$$\frac{dw''_2}{dt} = n_2 + \alpha\mu, \quad \frac{dw'_3}{dt} = -\alpha\mu,$$

а среднее движение малой планеты зависит от пяти аргументов: $w_1''$, $w_1'$, $w_2'$, $w_2''$, $w_3'$.

Если эксцентриситет равен нулю, координаты большой планеты пропорциональны величинам $\cos w_2''$, $\sin w_2''$ и они не зависят от $w_3'$, так что $E_3 = 0$. Если $E_3 = 0$, то все члены, зависящие от $w_3'$, во всех разложениях должны исчезать.

Следовательно, если эксцентриситет орбиты большой планеты равен нулю, то координаты малой планеты и ее расстояния до других тел могут быть разложены по синусам и косинусам аргумента

$$k_1 w_1'' + k_2 w_2'' + p_1 w_1' + p_2 w_2'$$

($p_3$ и $p_4$ равны нулю), и мы будем иметь

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_2 = 0$$

для взаимных расстояний и для $x_3$,

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_2 = 1$$

— для $x_1$ и для $x_2$.

Если, кроме того, $E_2 = 0$, то все члены, зависящие от $w_2'$, исчезнут. Так как в третьей координате $x_3$ все члены, содержащие $E$ с четным индексом (т. е. члены с $E_2$), имеют нечетную степень, то все эти члены обратятся в нуль, поэтому $x_3$ тождественно равна нулю. Малая планета будет оставаться всегда в плоскости орбиты большой планеты. Мы, следовательно, возвращаемся к ограниченной задаче.

В этом случае расстояния малой планеты от других тел разлагаются по косинусам аргумента

$$k_1 w_1'' + k_2 w_2'' + p_1 w_1',$$

где

$$p_1 = k_1 + k_2.$$

Отсюда видно, что эти расстояния зависят только от двух аргументов:

$$w_1'' + w_1', \quad w_2'' + w_1'.$$

Вспомним, что средние движения $\frac{dw_i''}{dt}$ конечны, тогда как средние движения $\frac{dw_i'}{dt}$ — малые величины порядка $\mu$. В ограниченной задаче непосредственно видно, что средние движения

$$\frac{d(w_1'' + w_1')}{dt}, \quad \frac{d(w_2'' + w_1')}{dt}$$

имеют конечные значения. В этом заключается одна из причин относительной простоты ограниченной задачи. Именно по этой причине эта задача обладает простыми свойствами, доказанными в главе VII.

**194. Периодические решения.** Если мы положим

$$E_1 = E_2 = \ldots = E_{2n} = 0,$$

то будем иметь некоторое частное решение, которое будет зависеть только от аргументов $w''$ и не будет зависеть от аргументов $w'$.

В задаче трех тел взаимные расстояния зависят тогда от косинусов с аргументами

$$k_1 w_1'' + k_2 w_2''.$$

Так как $p$ равны нулю, то будем иметь

$$\sum k = 0, \quad k_2 = -k_1,$$

откуда следует, что взаимные расстояния зависят от единственного аргумента

$$w_1'' - w_2''.$$

*Таким образом, взаимные расстояния являются периодическими функциями времени.* Мы приходим, таким образом, к *периодическим решениям первого сорта*, изученным в книге «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» (т. I, глава III). Они являются точными решениями дифференциальных уравнений.

**195. Выбор постоянных.** В главе X мы брали в качестве постоянных интегрирования начальные значения $L_i^0, \lambda_i^0, \xi_i^0, \eta_i^0$, а в главе VI было показано, что возможен другой выбор, например, вместо начальных данных можно взять средние значения элементов. Здесь, кажется, более целесообразен следующий выбор значений произвольных постоянных.

Будем брать, как и раньше, начальные значения $\xi_i^0$, $\eta_i^0$ величин $\xi_i$, $\eta_i$ и возьмем начальные значения $\lambda^0$ величин $\lambda$, выбирая их равными нулю, но вместо $L_i$ будем брать $W_i$, т. е. средние значения выражений

$$\sum L \frac{\partial \lambda}{\partial w_i} + \sum \xi \frac{\partial \eta}{\partial w_i}.$$

Рассмотрим, каким образом следует применять метод Лагранжа и производить последовательные приближения из главы V. В первом приближении возьмем $L_i = W_i$.

Далее положим

$$L_i = W_i + \delta L_i,$$
$$\lambda_i = w_i + \delta\lambda_i,$$
$$\xi_i = \xi_i^0 + \delta\xi_i,$$
$$\eta_i = \eta_i^0 + \delta\eta_i.$$

В $n$-м приближении возьмем

$$L_i = -\mu \int \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}\, dt,$$

заменяя в производной $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}$ переменные их значениями из $(n-1)$-го приближения. $L_i$ определяется с точностью до постоянной, и чтобы полностью ее определить, нужно задать среднее значение $L_i$. Мы возьмем

$$\text{ср. знач. } L_i = W_i - \text{ ср. знач. } \left(\sum \delta L \frac{\partial \delta\lambda}{\partial w_i} + \sum \delta\xi \frac{\partial \delta\eta}{\partial w_i}\right). \quad (11)$$

В самом деле, мы имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial w_i} = \frac{\partial \delta\eta}{\partial w_i}, \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} = 1 + \frac{\partial \delta\lambda_i}{\partial w_i}, \quad \frac{\partial \lambda_k}{\partial w_i} = \frac{\partial \delta\lambda_k}{\partial w_i} \quad (i \gtrless k),$$

$$\text{ср. знач. } W_i \frac{\partial \delta\lambda}{\partial w_i} = 0,$$

$$\text{ср. знач. } \xi_k^0 \frac{\partial \delta\eta_k}{\partial w_i} = 0.$$

В правой части равенства (11) мы можем заменить переменные их значениями из $(n-1)$-го приближения. Действительно, если погрешность величины $\delta L$ будет, например, порядка $\mu^{n-1}$, то погрешность произведения

$$\delta L \frac{\partial \delta\lambda}{\partial w_i}$$

будет порядка $\mu^n$, так как $\delta\lambda$ и $\frac{\partial \delta\lambda}{\partial w_i}$ сами порядка $\mu$.

Поэтому равенство (11) позволяет окончательно вычислить $L_i$. Мы ничего не добавим относительно выбора постоянных $E_k$, лишь скажем, что если вместо $E_k$ мы возьмем постоянные $E'_k$, определяемые уравнениями

$$E'_k = E_k \psi_k (E_1^2, E_2^2, \ldots, E_{2n}^2),$$

где $\psi_k$ — функции, разложимые по степеням $E_j^2$ и зависящие, кроме того, от $W$ произвольным образом, то новые постоянные $E'$ обладают наиболее важными свойствами постоянных $E$, т. е. переменные задачи будут разложимы по степеням величин

$$E'_k \cos w'_k, \quad E'_k \sin w'_k.$$

**196. Непосредственное вычисление рядов.** В предыдущих параграфах и главах мы старались установить прежде всего форму разложений, но предыдущие формулы не всегда являются наиболее удобными для конкретных вычислений. Нашей основной целью в дальнейшем будет получение таких разложений, которые были бы наиболее приспособлены для вычислений.

Пока мы хотим вкратце указать на один прием, позволяющий непосредственно получить ряды, приведенные в главах VII и X. Рассмотрим сначала ограниченную задачу и для этого вернемся к уравнениям (10) из § 126:

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i}; \quad F = F_0 + \mu F_1. \tag{12}$$

В главе VII мы видели, что можно удовлетворить этим уравнениям разложениями по синусам и косинусам кратных $n$ аргументов

$$w_1, w_2, \ldots, w_n,$$

полагая в них

$$w_i = n_i' t + \bar{\omega}_i.$$

В таком случае уравнения (12) могут быть заменены следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \sum n_k' \frac{\partial L_i}{\partial w_k} &= -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \\ \sum n_k' \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k} &= \frac{\partial F}{\partial L_i}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Положим $n_k' = n_k + \delta n_k$. Тогда наши уравнения могут быть написаны в виде

$$\sum n_k \frac{\partial L_i}{\partial w_k} = -\sum \delta n_k \frac{\partial L_i}{\partial w_k} - \mu \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}, \tag{14}$$

$$\sum n_k \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k} = -\sum \delta n_k \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k} + \frac{\partial F_0}{\partial L_i} + \mu \frac{\partial F_1}{\partial L_i}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь средние значения различных рассматриваемых величин. Если $U$ есть какая-либо периодическая функция аргументов $w$, разложенная в тригонометрический ряд, то ее среднее значение, которое мы обозначим через $[U]$, будет равно члену ряда, не зависящему от $w$.

Величины $L_i$ являются периодическими функциями $w$, поэтому будем иметь

$$\left[\frac{\partial L_i}{\partial w_k}\right] = 0.$$

Разности $\lambda_i - w_i$ также являются периодическими функциями $w$, поэтому

$$\left[\frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i}\right] = 1, \quad \left[\frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k}\right] = 0 \quad (i \gtrless k).$$

Отсюда вытекает, что если приравняем средние значения обеих частей равенств (14) и (15), то получим

$$\mu\left[\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}\right]=0 \tag{16}$$

и

$$n_i+\delta n_i=\left[\frac{\partial F_0}{\partial L_i}\right]+\mu\left[\frac{\partial F_1}{\partial L_i}\right]. \tag{17}$$

Уравнение (16) должно удовлетворяться само собой и это действительно так и будет, так как мы знаем заранее, что разложение возможно. Что касается равенства (17), то оно будет определять $\delta n_i$.

В таком случае вот каким образом должны быть построены последовательные приближения. Допустим, что мы имеем $(n-1)$-е приближение величин

$$\delta n_i,\quad L_i,\quad \lambda_i,$$

так что погрешность имеет порядок $\mu^{n-1}$. Подставим их в правую часть равенства (14). Погрешность в выражениях

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i},\quad \frac{\partial L_i}{\partial w_k},\quad \delta n_k$$

будет иметь порядок $\mu^{n-1}$. С другой стороны, $\delta n_k$ и $\frac{\partial L_i}{\partial w_k}$ сами порядка $\mu$, так как при $\mu=0$ имеем

$$n_k'=n_k,\quad L_i=\text{const}.$$

Следовательно, погрешность в выражениях

$$\mu\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i},\quad \delta n_k\frac{\partial L_i}{\partial w_k}$$

будет порядка $\mu^n$.

Итак, уравнения (14) будут давать для $L_i$ $n$-е приближение, и погрешность при этом будет порядка $\mu^n$.

Рассмотрим теперь уравнение (17) и заменим в правой части переменные $\lambda_i$ их значениями из $(n-1)$-го приближения, а переменные $L_i$ — их значениями из $n$-го приближения. Так как $F_0$ зависит только от $L_i$, то погрешность, допущенная в

$$\left[\frac{\partial F_0}{\partial L_i}\right],$$

будет порядка $\mu^n$; погрешность в $F_1$ будет порядка $\mu^{n-1}$, и, следовательно, погрешность в

$$\mu\left[\frac{\partial F_1}{\partial L_i}\right]$$

будет порядка $\mu^n$. Отсюда следует, что уравнение (17) будет давать новые значения $\delta n_i$ с погрешностью порядка $\mu^n$.

Заменим в правой части уравнения (15) $\delta n_i$ и $L_i$ их значениями из $n$-го приближения, а $\lambda_i$ — их значениями из $(n-1)$-го приближения.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Погрешность в | $\frac{\partial F_0}{\partial L_i}$ | будет | порядка | $\mu^n$, |
| » | $\frac{\partial F_1}{\partial L_i}$ | » | » | $\mu^{n-1}$, |
| » | $\delta n_k$ | » | » | $\mu^n$, |
| » | $\mu \frac{\partial F_1}{\partial L_i}$ | » | » | $\mu^n$, |
| » | $\frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k}$ | » | » | $\mu^{n-1}$, |
| » | $\delta n_k \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k}$ | » | » | $\mu^n$, |

так как $\delta n_k$ имеет порядок $\mu$.

Уравнение (15), таким образом, будет давать для $\lambda_i$ новые значения, погрешность которых имеет порядок $\mu^n$.

**197.** Рассмотрим общий случай задачи $(n+1)$-го тела. В главе X мы видели, что искомые переменные могут быть выражены в виде периодических функций от $3n$ аргументов

$$w_i'' = n_i' t + \bar{\omega}_i, \qquad w_i' = -\gamma_i' t + \bar{\omega}_i'.$$

Пусть также

$$n_i' = n_i + \delta n_i.$$

Тогда можно написать уравнения в следующем виде:

$$\sum n_k \frac{\partial L_i}{\partial w_k''} = -\sum \delta n_k \frac{\partial L_i}{\partial w_k''} + \sum \gamma_k' \frac{\partial L_i}{\partial w_k'} - \mu \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i}, \tag{18}$$

$$\sum n_k \frac{\partial \xi_i}{\partial w_k''} = -\sum \delta n_k \frac{\partial \xi_i}{\partial w_k''} + \sum \gamma_k' \frac{\partial \xi_i}{\partial w_k'} - \mu \frac{\partial F_1}{\partial \eta_i}, \tag{19}$$

$$\sum n_k \frac{\partial \eta_i}{\partial w_k''} = -\sum \delta n_k \frac{\partial \eta_i}{\partial w_k''} + \sum \gamma_k' \frac{\partial \eta_i}{\partial w_k'} + \mu \frac{\partial F_1}{\partial \xi_i}, \tag{20}$$

$$\sum n_k \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k''} = -\sum \delta n_k \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k''} + \sum \gamma_k' \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_k'} + \frac{\partial F_0}{\partial L_i} + \mu \frac{\partial F_1}{\partial L_i}. \tag{21}$$

Приравняем, как и выше, средние значения обеих частей равенства (21); тогда

$$n_i + \delta n_i = \left[\frac{\partial F_0}{\partial L_i}\right] + \mu \left[\frac{\partial F_1}{\partial L_i}\right]. \tag{22}$$

С другой стороны, удвоенный коэффициент при $\sin w_k'$ в разложении произвольной периодической функции $U$ будет $[\sin w_k' U]$, и ясно, что если $U$ — периодическая функция, то будем иметь

$$\left[\sin w'_k \frac{\partial U}{\partial w''_j}\right] = 0, \quad \left[\sin w'_k \frac{\partial U}{\partial w'_j}\right] = 0 \quad (j \gtrless k).$$

Поэтому если приравняем коэффициенты при $\sin w'_k$ в обеих частях равенства (19), получим

$$\gamma'_k \left[\sin w'_k \frac{\partial \xi_i}{\partial w'_k}\right] = \mu \left[\frac{\partial F_1}{\partial \eta_i} \sin w'_k\right]. \tag{23}$$

Заменим в правых частях равенств (18) и (23) переменные $(n-1)$-м приближением, в котором погрешность имеет порядок $\mu^{n-1}$. Тогда погрешность в $L_i$ будет порядка $\mu^n$, так как $\delta n_k$, $\gamma'_k$, $\frac{\partial L_i}{\partial w''_k}$, $\frac{\partial L_i}{\partial w'_k}$ сами порядка $\mu$ (разность $W_i - L_i$ имеет порядок $\mu$).

Уравнение (23) будет давать $\gamma'_k$ и так как коэффициент

$$\left[\sin w'_k \frac{\partial \xi_i}{\partial w'_k}\right],$$

погрешность которого имеет порядок $\mu^{n-1}$, не обращается в нуль при $\mu = 0$, а правая часть содержит $\mu$ множителем, то погрешность в $\gamma'_k$ будет порядка $\mu^n$.

Заменим в правой части равенства (22) переменные $L_i$ $(n-1)$-м приближением, а другие переменные $n$-м приближением; тогда погрешность в $\delta n_i$ будет порядка $\mu^n$.

Заменим в правых частях равенств (19) и (20) величины $\delta n$ и $\gamma'$ $n$-м приближением, а другие величины $(n-1)$-м приближением; тогда погрешность в $\xi_i$ и $\eta_i$ будет порядка $\mu^n$.

Наконец, заменим в правой части равенства (21) величины $\delta n$, $\gamma'$, $L$ их значениями из $n$-го приближения, а другие величины их значениями из $(n-1)$-го приближения; тогда погрешность в $\lambda_i$ будет порядка $\mu^n$.

Таков способ построения последовательных приближений.

ГЛАВА XIII

# ОСНОВЫ МЕТОДА ДЕЛОНЕ

**198. Теорема о классе.** В § 104 мы классифицировали с разных точек зрения различные члены, возникающие в результате применения метода Лагранжа, общий вид которых

$$\mu^{\alpha} A \mathfrak{M}_0 t^m \cos(\nu t + h).$$

Предположим, что средние движения почти соизмеримы, так что интегрирование может ввести малые делители. Пусть $m'$ есть показатель этого малого делителя в знаменателе.

Тогда мы говорим, что рассматриваемый член принадлежит к классу

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}.$$

Покажем, что нет членов отрицательного класса, поэтому число

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2}$$

всегда положительно или равно нулю, а в разложениях $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ класс любого члена не меньше $1/2$.

Для этого возьмем уравнения (9) § 106:

$$\left.\begin{aligned} &\delta L_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_i} dt; \qquad \delta\xi_i = -\mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \eta_i} dt; \\ &\delta\eta_i = \mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \xi_i} dt; \\ &\delta\lambda_i = -\mu \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_k} dt + \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt + \mu \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial L_i} dt. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Допустим, что теорема имеет место в $(n-1)$-м приближении, и покажем, что она верна также для значений $\delta L_i$, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ в $n$-м приближении, которые получаются, если в правых частях уравнений (1) заменить все переменные их значениями из $(n-1)$-го приближения.

Согласно § 100 частные производные функции $F_1$, которые входят в правые части уравнений (1), имеют вид

$$\sum B\mathfrak{M}',$$

где $B$ с точностью до числового множителя является одной из частных производных высшего порядка функции $F_1$, в которых переменные $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$, $\lambda_i$ нужно заменить их значениями из первого приближения

$$L_i^0,\ n_i t+\lambda_i^0,\ \xi_i^0,\ \eta_i^0.$$

Что касается $\mathfrak{M}'$, то он является целым одночленом относительно

$$\delta L_i,\quad \delta\lambda_i,\quad \delta\xi_i,\quad \delta\eta_i,$$

в котором последние величины должны быть заменены их значениями из $(n-1)$-го приближения.

Мы утверждаем, что после такой замены $\Sigma B\mathfrak{M}'$ будет содержать только такие члены, для которых

$$\alpha-\frac{m}{2}-\frac{m'}{2}\geqslant 0.$$

В самом деле, согласно предположению, все члены значений $\delta L_i$, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ из $(n-1)$-го приближения принадлежат положительному или нулевому классу. То же самое справедливо и для $B$, так как для всех членов $B$, которые получены без операции интегрирования и не содержат $\mu$ множителем, имеем

$$\alpha=m=m'=0.$$

Произведение двух членов положительного или нулевого класса, очевидно, также принадлежит положительному или нулевому классу. Поэтому это будет иметь место и для всех членов

$$\sum B\mathfrak{M}'.$$

Рассмотрим теперь первые три уравнения (1). Они показывают, что $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$ имеют вид

$$\pm\mu\int\limits_0^t\sum B\mathfrak{M}'\,dt.$$

Интегрирование может ввести множитель $t$ или малый делитель в знаменателе, но оно не может ввести и то и другое. Действительно, множитель $t$ может появиться только при интегрировании чисто векового члена, а малый делитель $\nu_0$ появляется только при интегрировании члена, имеющего множителем

$\cos(\nu_0 t + h)$. Поэтому $m + m'$ или не изменяется, или увеличивается на единицу.

Результат интегрирования надо умножить на $\mu$, так что показатель $\alpha$ увеличивается на единицу, поэтому после обеих операций будем иметь

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Итак, теорема выполняется для значений $n$-го приближения величин $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$. Классы всех членов разложений $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ не меньше $1/2$.

Переходим к последнему уравнению (1), которое дает $\delta\lambda_i$. В правой части имеется три интеграла. Первый из этих интегралов имеет вид

$$\mu \int\int \sum B\mathfrak{M}' \, dt.$$

Все члены $\Sigma B\mathfrak{M}'$ удовлетворяют условию

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqslant 0.$$

Двукратное интегрирование может увеличить $m + m'$ на две единицы. Умножая результат этого интегрирования на $\mu$, мы увеличиваем показатель $\alpha$ на единицу, поэтому в конечном счете имеем

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqslant 0.$$

Итак, все члены, содержащиеся в этом интеграле, принадлежат к положительному или нулевому классу. Что касается второго интеграла,

$$\int \frac{\partial\Phi}{\partial L_i} \, dt,$$

то заметим, что мы имеем еще

$$\frac{\partial\Phi}{\partial L_i} = \sum B\mathfrak{M}',$$

где $B$ с точностью до числового множителя является одной из частных производных функции $F_0$, в которых $L_i$ заменены их значениями $L_i^0$ из первого приближения, а $\mathfrak{M}'$ является одночленом не ниже второй степени относительно $\delta L_i$, которые должны быть заменены их значениями из $(n-1)$-го приближения. Согласно предположению эти значения содержат только члены, удовлетворяющие условию

$$\alpha - \frac{m}{2} - \frac{m'}{2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Произведение двух таких членов будет иметь класс не меньше единицы, и это тем более будет иметь место для произведения более двух членов. Поэтому это будет иметь место и для всех членов $\mathfrak{M}'$. Что касается $B$, то это просто постоянная величина. Таким образом, все члены $\sum B\mathfrak{M}'$ имеют классы не меньше единицы, т. е. они таковы, что

$$\alpha-\frac{m}{2}-\frac{m'}{2}\geqslant 1.$$

После интегрирования $m+m'$ может увеличиться на единицу, но мы еще будем иметь

$$\alpha-\frac{m}{2}-\frac{m'}{2}\geqslant \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим третий интеграл. Он имеет вид

$$\mu\int\sum B\mathfrak{M}'\,dt,$$

т. е. он имеет такой же вид, что и правые части первых трех уравнений (1), поэтому все его члены удовлетворяют условию

$$\alpha-\frac{m}{2}-\frac{m'}{2}\geqslant \frac{1}{2}.$$

Итак, все члены $\delta\lambda_i$ принадлежат к положительному или нулевому классу.

Теорема о классе, таким образом, доказана.

**199.** Посмотрим, как составляются уравнения, дающие члены нулевого класса разложения $\delta\lambda_i$ и члены класса $^1/_2$ разложений $\delta L_i$, $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$.

Пусть $\nu_0$ — рассматриваемый малый делитель. Тогда

$$\nu_0=\sum k_j n_j,$$

где $n_j$ — средние движения и $k_j$ — целые числа, выбранные таким образом, чтобы $\nu_0$ было весьма малым.

Сначала покажем, что все члены класса $^1/_2$ разложений $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ будут иметь вид

$$A\mu^\alpha t^m\cos(\beta\nu_0 t+h),$$

где $\beta$ — целое число, и такой же вид имеют все члены нулевого класса в разложении $\delta\lambda$.

В самом деле, допустим, что это верно в $(n-1)$-м приближении, и покажем, что это также будет верно в $n$-м приближении. Для этого мы воспользуемся первыми тремя уравнениями (1), которые могут быть написаны, как мы видели в предыдущем параграфе, в виде

$$\delta L,\ \delta\xi,\ \delta\eta = \mu \int \sum B\mathfrak{M}'\,dt. \tag{2}$$

В правых частях нужно заменить переменные их значениями из $(n-1)$-го приближения. Возьмем любой член $\sum B\mathfrak{M}'$ и посмотрим, что нужно для того, чтобы он давал члены класса $^1/_2$ в разложениях $\delta L$, $\delta\xi$ или $\delta\eta$.

Для этого нужно:

1) чтобы он был членом нулевого класса,

2) чтобы при интегрировании его класс уменьшился на $^1/_2$, потому что при умножении на $\mu$ его класс увеличится на единицу.

Так как класс всех членов в $B$ есть нуль, то нужно, чтобы рассматриваемый член в $\mathfrak{M}'$ также принадлежал к нулевому классу. Но так как все члены нулевого класса [в $(n-1)$-м приближении] имеют форму (2), то легко видеть, что рассматриваемый член в $\mathfrak{M}'$ должен иметь такой же вид.

Обозначим через $B_1$ рассматриваемый член из $B$, а через $\mathfrak{M}_1'$ — рассматриваемый член из $\mathfrak{M}'$, и пусть

$$\mu \int B_1\mathfrak{M}_1'\,dt$$

является соответствующим членом в $\delta L$, $\delta\xi$ или $\delta\eta$. Из сказанного следует, что член $\mathfrak{M}_1'$ имеет форму (2), так что имеем

$$\mathfrak{M}_1' = A\mu^\alpha t^m \cos(\beta\nu_0 t + h) \quad (\beta \text{ — целое}).$$

Пусть

$$B_1\mathfrak{M}_1' = C\mu^\alpha t^m \cos(\nu t + h').$$

Если $\nu$ не равно нулю, то интегрирование введет делитель $\nu$. Чтобы класс уменьшился на $^1/_2$, нужно, чтобы $\nu$ было кратным $\nu_0$, т. е. чтобы мы имели

$$\nu = \gamma\nu_0 \qquad (\gamma \text{ — целое число}).$$

Если $\nu$ есть нуль, то интегрирование введет новый множитель $t$ и класс уменьшится на $^1/_2$.

Таким образом, если мы желаем, чтобы класс уменьшился на $^1/_2$ после интегрирования, нужно, чтобы

$$\nu = \gamma\nu_0,$$

где $\gamma$ — целое положительное или отрицательное число, или нуль.

Тогда $B_1$ будет иметь вид

$$B_1 = K\cos(\delta\nu_0 t + h''), \tag{3}$$

где $K$, $h''$ — постоянные и $\delta$ — целое число, равное $\beta \pm \gamma$. Мы не будем иметь при этом в $B_1$ ни множителя $\mu$, ни множителя $t$. Действительно, $B_1$ есть одна из частных производных функции $F_1$, в которых $L$, $\xi$, $\eta$ заменены постоянными величинами, а $\lambda_i$ — выражением $n_i t + \lambda_i^0$. Следовательно, оно не может ввести ни множителя $\mu$, ни множителя $t$. Мы можем написать

$$F_1 = \sum H \frac{\cos}{\sin} \left( \sum p_j \lambda_j \right),$$

где $H$ зависит от $L$, $\xi$, $\eta$ и где $p_j$ — целые числа. Пусть $DF_1$ означает частную производную какого-либо порядка от $F_1$, умноженную на числовой множитель. Ясно, что разложение $DF_1$ имеет такой же вид, как и разложение $F_1$, и если некоторый член $F_1$ содержит множителем какую-либо тригонометрическую функцию угла $\sum p_j \lambda_j$, то соответствующий член $DF_1$ также будет содержать множителем тригонометрическую функцию того же угла $\sum p_j \lambda_j$. Таким образом, мы будем иметь

$$DF_1 = \sum H' \frac{\cos}{\sin} \left( \sum p_j \lambda_j \right),$$

где $H'$ (так же как и $H$) зависит от $L$, $\xi$, $\eta$.

Чтобы получить $B$, нужно заменить в $DF_1$ переменные $L$, $\xi$, $\eta$, $\lambda_i$ на $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$, $n_i t + \lambda_i^0$. Таким образом, найдем

$$B = \sum H'_0 \frac{\cos}{\sin} (\nu t + h''),$$

где $H'_0$ — значение $H'$ при $L_i = L_i^0$, $\xi_i = \xi_i^0$, $\eta_i = \eta_i^0$ (следовательно, $H'_0$ есть постоянная). Кроме того, имеем

$$\nu = \sum p_j n_j, \quad h'' = \sum p_j \lambda_j^0.$$

Единственными членами в разложении для $B$, которые нужно брать во внимание (т. е. члены, которые могут дать в разложениях $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ члены класса $^1/_2$), являются те, которые имеют вид $B_1$ в равенстве (4), т. е. те, для которых $\nu = \delta\nu_0$, где $\delta$ — целое число.

Таким образом, мы должны иметь

$$\nu = \sum p_j n_j = \delta\nu_0 = \delta \sum k_j n_j,$$

откуда

$$p_j = \delta k_j;$$

$\delta$ — целое число.

Отсюда видно, что $p_j$ должны быть целыми кратными чисел $k_j$, соответствующими малому делителю $\nu_0$.

Следовательно, в $F_1$ нужно рассмотреть только те члены, аргумент которых $\sum p_j n_j$ есть кратное аргумента $\sum k_j \lambda_j$, соответствующего малому делителю.

Обозначим этот аргумент особой буквой, полагая

$$\theta = \sum k_j \lambda_j.$$

Поэтому если мы рассмотрим функцию $F_1$, то те ее члены, которые содержат тригонометрический множитель, аргумент которого не является кратным $\theta$, должны быть отброшены, так как они не играют никакой роли при определении членов класса $^1/_2$ в $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$.

Таким образом, мы должны сохранить только члены, не зависящие от $\lambda$, т. е. члены, не содержащие никакого тригонометрического множителя (совокупность таких членов в главах VIII и IX мы обозначали через $R$), и, кроме того, члены, содержащие тригонометрические множители, аргументы которых кратны $\theta$.

Обозначим через $\Psi$ совокупность оставленных членов.

С другой стороны, член $B_1\mathfrak{M}_1'$ дает нам в правой части равенства (3) член

$$\mu \int B_1 \mathfrak{M}_1' \, dt,$$

аргумент которого равен $\delta\nu_0 t + h''$, и в этом аргументе коэффициент при $t$ равен $\delta\nu_0$, т. е. кратен $\nu_0$.

Таким образом, сформулированная теорема верна в $n$-м приближении для $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$.

Переходим к $\delta\lambda$, которое определяется последним уравнением (1). В правой части этого уравнения мы заменим все переменные их значениями из $(n-1)$-го приближения. Таким образом, будем иметь значения $\delta\lambda$ в $n$-м приближении.

Покажем, что члены нулевого класса зависят опять от аргумента, кратного $\nu_0 t$.

Согласно предыдущему параграфу последние два интеграла в правой части последнего уравнения (1) могут давать только члены класса $^1/_2$. Поэтому достаточно рассмотреть первый интеграл и написать

$$\delta\lambda_i = \mu \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial \lambda_k} dt, \tag{4}$$

или

$$\delta\lambda_i = \mu \sum C_{ik} \iint \sum B\mathfrak{M}' \, dt.$$

Чтобы получить члены нулевого класса в $\delta\lambda_i$, нужно рассматривать члены нулевого класса в $B\mathfrak{M}'$. Затем нужно, чтобы после двойного интегрирования класс уменьшился на 1, а после умножения на $\mu$ увеличился на 1.

Но чтобы в результате двукратного интегрирования класс уменьшился на единицу, нужно, чтобы аргумент рассматриваемого члена был кратным $\nu_0 t$. Из этого следует, что члены нулевого класса в значении $n$-го приближения для $\delta\lambda_i$ имеют также аргументы, кратные $\nu_0 t$, что и требовалось доказать.

**200.** Уравнение (4) можно написать в виде

$$\delta\lambda_i = \mu \sum C_{ik} \int\limits_0^t \delta L_k \, dt.$$

С другой стороны, мы видели, что при вычислении членов класса $^1/_2$ в разложениях $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ функцию $F_1$ можно заменить функцией $\Psi$, так что первые три уравнения (1) принимают вид

$$\delta L_i = -\mu \int\limits_0^t \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i} dt, \quad \delta\xi_i = -\mu \int\limits_0^t \frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i} dt, \quad \delta\eta_i = \mu \int\limits_0^t \frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i} dt,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dL_i}{dt} &= \frac{d\,\delta L_i}{dt} = -\mu \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}, \\
\frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{d\,\delta\xi_i}{dt} = -\mu \frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i}, \\
\frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{d\,\delta\eta_i}{dt} = \mu \frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}, \\
\frac{d\lambda_i}{dt} &= n_i + \frac{d\,\delta\lambda_i}{dt} = n_i + \sum C_{ik}\delta L_k,
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

или

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = n_i + \sum C_{ik}(L_k - L_k^0).$$

Это еще не все. Когда мы хотим получить члены класса $^1/_2$ в $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, нужно, как мы видели в предыдущем параграфе, исходить из членов нулевого класса в $\mathfrak{M}'$. Но $\mathfrak{M}'$ является одночленом, целым относительно $\delta\lambda$, $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$. Чтобы получить один из членов $\mathfrak{M}'$, нужно взять в каждом из множителей этого одночлена по одному слагаемому и перемножить их. Класс произведения будет равен сумме классов всех членов, входящих в данное произведение.

Чтобы получить один из членов нулевого класса в $\mathfrak{M}'$, нужно взять в каждом из множителей только члены нулевого класса. Но $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ не содержат членов нулевого класса, а только члены класса, не меньшего $^1/_2$. Поэтому чтобы получить члены нулевого класса в $\mathfrak{M}_1'$, достаточно положить

$$\delta L = \delta\xi = \delta\eta = 0,$$

а в $\delta\lambda$ взять только члены нулевого класса.

Обозначим через

$$\Psi_0, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i}\right)_0$$

значения величин

$$\Psi, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i}$$

при

$$\delta L = \delta\xi = \delta\eta = 0,$$

т. е. при

$$L_i = L_i^0, \quad \xi_i = \xi_i^0, \quad \eta_i = \eta_i^0.$$

Очевидно, будем иметь

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}\right)_0 = \frac{\partial\Psi_0}{\partial\lambda_i}.$$

Отсюда вытекает, что при вычислении членов класса $^1/_2$ в $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$ мы можем в правых частях уравнений (5) положить $\delta L = \delta\xi = \delta\eta = 0$.

В этом случае уравнения принимают вид

$$\frac{dL_i}{dt} = -\mu\frac{\partial\Psi_0}{\partial\lambda_i}, \quad \frac{d\xi_i}{dt} = -\mu\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i}\right)_0, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \mu\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}\right)_0. \tag{6}$$

Положим теперь

$$\Phi_0 = C_0 + \sum n_i (L_i - L_i^0) + \frac{1}{2}\sum C_{ik}(L_i - L_i^0)(L_k - L_k^0),$$

где $C_0$ обозначает какую-нибудь постоянную. Во второй сумме следует считать, что $C_{ik} \neq C_{ki}$. Тогда имеем

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial L_i} = n_i + \sum C_{ik}(L_k - L_k^0),$$

и, следовательно,

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial L_i}. \tag{7}$$

Так как $\Phi_0$ зависит только от $L$, а $\Psi_0$ только от $\lambda$ (так как мы положили $L_i = L_i^0$, $\xi_i = \xi_i^0$, $\eta_i = \eta_i^0$), то уравнение (7) и первое уравнение (6) принимают каноническую форму:

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial(\Phi_0 + \mu\Psi_0)}{\partial\lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial(\Phi_0 + \mu\Psi_0)}{\partial L_i}. \tag{8}$$

**201.** Уравнения (6) и (7) дают нам все члены класса $^1/_2$ в $L$, $\xi$, $\eta$ и все члены нулевого класса в $\delta\lambda$ и *не дают других членов*. Это вытекает из того, что мы отбросили в наших уравнениях все члены, которые могли бы дать члены более высокого класса.

Если мы не будем заботиться об этом, то мы можем взять и другие аналогичные системы уравнений, например,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial(F_0+\mu\Psi)}{\partial\lambda}, & \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial(F_0+\mu\Psi)}{\partial\eta}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial(F_0+\mu\Psi)}{\partial L}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial(F_0+\mu\Psi)}{\partial\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Интегрируя уравнения (9), мы найдем все члены класса $^1/_2$ в $L$, $\xi$, $\eta$, все члены нулевого класса в $\delta\lambda$, но, кроме них, мы найдем также и другие члены.

Каким образом перейти от уравнений (9) к уравнениям (6) и (7)? Для этого нужно заменить $F_0$ на $\Phi_0$. Кроме того, в уравнениях (9) нужно заменить $\Psi$ на $\Psi_0$ и $\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}$ заменить на $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)_0$, $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)_0$. Мы видим, что

$$F_0 = \Phi_0 + \Phi.$$

Заменяя $F_0$ на $\Phi_0$, мы отбрасываем члены, которые содержатся в $\Phi$, т. е. во втором интеграле правой части последнего уравнения (1), который, как мы видели, может давать только члены, класс которых выше нуля.

Аналогично, замена $\Psi$ на $\Psi_0$, или $\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}$ на $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)_0$, $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)_0$ в уравнениях (9) означает, что в членах, получаемых из производных $\Psi$, положено $\delta L = \delta\xi = \delta\eta = 0$. Но, как нам известно, члены, получаемые из частных производных $\Psi$ и зависящие от $\delta L$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, не могут давать членов, классы которых меньше $^1/_2$.

**202.** В задаче $n$ тел мы имеем

$$F_0 = -\sum \frac{M_i}{2L_i^2},$$

где $M_i$ — постоянные, зависящие только от масс. Далее, имеем

$$n_i = \frac{M_i}{(L_i^0)^3}, \qquad C_{ii} = -\frac{3M_i}{(L_i^0)^4}, \qquad C_{ik} = 0 \qquad (i \gtrless k),$$

и поэтому

$$\Phi_0 = -\sum \frac{M_i}{2(L_i^0)^4}(6L_i^{0\,2} - 8L_iL_i^0 + 3L_i^2).$$

В ограниченной задаче трех тел (см. § 123) для функции $F_0'$, которая играла роль $F_0$, мы нашли

$$F_0' = -\frac{M_1'}{2L_1'^2} + n_2(\varrho_1' - L_1').$$

Отбрасывая ненужные теперь штрихи и заменяя $\varrho_1'$ на $L_2$, т. е. пользуясь обозначениями § 126, имеем

$$F_0 = -\frac{M_1}{2L_1^2} + n_2(L_2 - L_1),$$

откуда

$$n_1 = \frac{M_1}{(L_1^0)^3} + n_2, \quad n_2 = n_2,$$

$$C_{11} = -\frac{3M_1}{(L_1^0)^4}, \quad C_{12} = C_{21} = C_{22} = 0.$$

Поэтому

$$\Phi_0 = -\frac{M_1}{2L_1^{0^4}}(6L_1^{0^2} - 8L_1L_1^0 + 3L_1^2) + n_2(L_2 - L_1).$$

Такова форма функции $\Phi_0$ в тех двух случаях, которые мы будем рассматривать.

**203. Основы метода Делоне.** Уравнения (6) и (7) могут быть легко проинтегрированы. Действительно, функция $\Phi_0$ зависит только от $L_i$ (она является многочленом второй степени относительно $L_i$), а функция $\Psi_0$ зависит только от

$$\theta = \sum k_j\lambda_j.$$

Итак, мы получили функцию $\Psi$ из $F_1$, отбрасывая в последней все члены, аргументы которых $\sum p_j\lambda_j$ не являются кратными $\theta$. Поэтому $\Psi$ является функцией только величин

$$\theta, \ L_i, \ \xi_i, \ \eta_i,$$

и то же самое можно сказать о ее производных

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}, \ \frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i}.$$

Далее, мы получили

$$\Psi_0, \ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}\right)_0, \ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i}\right)_0$$

из

$$\Psi, \ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}\right), \ \frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i},$$

заменяя в последних $L_i$, $\xi_i$, $\eta_i$ постоянными $L_i^0$, $\xi_i^0$, $\eta_i^0$. Следовательно,

$$\Psi_0, \ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}\right)_0, \ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i}\right)_0$$

зависят только от $\theta$.

Рассмотрим теперь канонические уравнения (8). Мы видим, что имеем

$$\frac{\partial(\Phi_0+\mu\Psi_0)}{\partial\lambda_i}=k_i\frac{\partial(\Phi_0+\mu\Psi_0)}{\partial\theta}=k_i\mu\frac{d\Psi_0}{d\theta},$$

откуда

$$\frac{1}{k_1}\cdot\frac{dL_1}{dt}=\frac{1}{k_2}\cdot\frac{dL_2}{dt}=\ldots=\frac{1}{k_n}\frac{dL_n}{dt}=-\mu\frac{d\Psi_0}{d\theta}.$$

Это нам показывает уже, что

$$\frac{L_i}{k_i}-\frac{L_j}{k_j}$$

есть постоянная. Этот результат можно представить в более симметричной форме, вводя вспомогательную переменную $U$ и полагая

$$L_i-k_iU=L_i^0, \tag{10}$$

где $L_i^0$ — постоянная. В самом деле, мы можем определять вспомогательную переменную $U$ таким образом, чтобы ее начальное значение было равно нулю.

Далее, имеем интеграл живых сил для уравнений (8). Он может быть записан в форме

$$\Phi_0+\mu\Psi_0=\text{const}. \tag{11}$$

В $\Phi_0$ мы должны заменить $L_i$ значениями, определяемыми формулами (10), так что $\Phi_0$ будет многочленом второй степени относительно $U$. Так как $\Psi_0$ зависит только от $\theta$, уравнение (11) выражает зависимость между $U$ и $\theta$. Далее, имеем

$$\frac{d\theta}{dt}=\sum k_j\frac{d\lambda_j}{dt}=\sum k_j\frac{\partial\Phi_0}{\partial L_j}=\frac{\partial\Phi_0}{\partial U}.$$

Отсюда получаем соотношение между $\frac{d\theta}{dt}$ и $U$ и, следовательно, соотношение между $\frac{d\theta}{dt}$ и $\theta$.

Каков вид этого соотношения? Пусть

$$\Phi_0=A+2BU+CU^2,$$

где $A$, $B$, $C$ — постоянные. Пусть $A+H$ — постоянная в правой части равенства (11). Тогда

$$CU^2+2BU=H-\mu\Psi_0,$$

откуда

$$CU+B=\sqrt{B^2+HC-\mu C\Psi_0}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial\Phi_0}{\partial U}=2CU+2B,$$

откуда

$$\frac{d\theta}{dt}=2\sqrt{B^2+HC-\mu C\Psi_0}.$$

Наконец,

$$t=\int\frac{d\theta}{2\sqrt{B^2+HC-\mu C\Psi_0}}.$$

Так как радикал зависит только от $\theta$, то связь между $\theta$ и $t$ дается простой квадратурой. Следовательно, будем иметь $\theta$, $U$ и $L_i$ как функции $t$. С другой стороны, имеем

$$\frac{d\lambda_i}{dt}=\mu\frac{\partial\Phi_0}{\partial L_i}.$$

Здесь правая часть является функцией $L_i$, и, следовательно, функцией $U$. Поэтому правая часть является известной функцией времени $t$, так что $\lambda$ находится простой квадратурой. Можно даже заметить, что правая часть является многочленом первой степени относительно $U$, так что между $\lambda_i$ будем иметь линейные соотношения.

Наконец, будем иметь

$$\frac{d\xi_i}{dt}=-\mu\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_i}\right)_0,\quad \frac{d\eta_i}{dt}=\mu\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_i}\right)_0.$$

Так как правые части зависят только от $\theta$, они являются известными функциями времени $t$, поэтому переменные $\xi_i$ и $\eta_i$ находятся простыми квадратурами.

**204.** Такова суть метода Делоне. Мы видим, что этот метод позволяет очень просто вычислить сумму членов наименьшего класса, т. е. членов класса $^1/_2$ в $L$, $\xi$, $\eta$ и членов нулевого класса в $\lambda$. Кроме того, мы видели, что этот метод существенно состоит в том, что в функции $F_1$ отброшены все короткопериодические члены, т. е. члены, в аргументах которых $\sum p_j\lambda_j$ целые числа $p_j$ не являются кратными числами $k_j$ и сохранены только долгопериодические члены или наиболее значительные из них.

Легко понять значение членов наименьшего класса. Иногда случается, что средние движения почти соизмеримы. Это, например, имеет место для Юпитера и Сатурна, отношение средних движений которых близко к $^2/_5$. Это имеет место и для некоторых малых планет, средние движения которых составляют 2 или почти $1^1/_2$ среднего движения Юпитера. Наиболее интересной из этих планет является Гекуба.

Члены наименьшего класса имеют большие коэффициенты в силу наличия малых делителей, появляющихся в результате интегрирования. Период этих членов, зависящих от $w'$, например, членов, вычисленных в главе VIII, является очень большим и составляет сотни веков.

Какой вывод мы должны сделать из этого? Для краткосрочного промежутка времени самую главную роль играют члены наименьшего п о р я д к а, для более длительного промежутка времени необходимо учесть члены наименьшего к л а с с а, наконец, для весьма больших промежутков времени необходимо учесть члены наименьшего р а н г а.

205. Метод Делоне может быть применен и в более общих случаях. Пусть имеем каноническую систему уравнений

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i},$$

где $F$ есть функция от $L$ и $\lambda$, причем она зависит от $\lambda$ только посредством комбинации

$$\theta = \sum k_j \lambda_j.$$

Допустим также, что она является периодической функцией по $\lambda$. Другими словами, функция $F$ разложима по синусам и косинусам кратных $\theta$ и коэффициенты этого разложения зависят только от $L$. Мы опять найдем

$$L_i = k_i U + L_i^0,$$

где $U$ — вспомогательная переменная и $L_i^0$ — постоянная. Система имеет интеграл живых сил

$$F = \text{const},$$

который дает соотношение между $U$ и $\theta$. Далее, находим

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum k_j \frac{\partial F}{\partial L_j},$$

откуда

$$t = \int \frac{d\theta}{\sum k_j \frac{\partial F}{\partial L_j}}.$$

Так как подынтегральная функция зависит только от $\theta$ и $U$, а $U$ связана с $\theta$ уравнением живых сил, то подынтегральная функция есть известная функция от $\theta$, так что $t$ получается простой квадратурой.

Следовательно, $\theta$, $U$, $L_i$ можно рассматривать как известные функции времени $t$. Правые части уравнений

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i};$$

зависящие только от $L$ и $\theta$, также будут известными функциями $t$, так что мы получим $\lambda_i$ простыми квадратурами.

Таким образом, интегрирование полностью выполнено.

**206. Применение метода Делоне к Гекубе.** Наилучшим примером применения метода Делоне является применение его к планете Гекуба. Эта малая планета, среднее движение которой почти равно удвоенному среднему движению Юпитера, была объектом многих исследований, среди которых отметим диссертацию Симонина.

Выберем систему единиц таким образом, чтобы средняя долгота Юпитера была равна $t$. Обозначим через $R$ сумму отношений массы Солнца к расстоянию от Солнца до Гекубы и массы Юпитера к расстоянию от Юпитера до Гекубы минус половина квадрата скорости Гекубы.

Введем канонические элементы Делоне

$$L=\sqrt{a},\quad G=L\sqrt{1-e^2},\quad \Theta=G\cdot\cos i,$$
$$l=nt,\quad g=\omega,\quad \theta=\Omega.$$

При этих условиях уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dt}=\frac{\partial R}{\partial l},\quad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial R}{\partial g},\quad \frac{d\Theta}{dt}=\frac{\partial R}{\partial \theta},\\
&\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial L},\quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial G},\quad \frac{d\theta}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial \Theta}.
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Функция $R$ зависит от шести переменных $L, G, \Theta, l, g, \theta$ и времени $t$. Уравнениям (1) можно придать и другую форму, если положить

$$F=R+\Theta,$$

ввести вместо $\theta$ переменную $\theta-t$ и воспользоваться анализом, сходным с тем, который мы проделали в § 123. В этом случае уравнения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l},\quad \frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g},\quad \frac{d\Theta}{dt}=\frac{\partial F}{\partial (\theta-t)},\\
&\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L},\quad \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G},\quad \frac{d(\theta-t)}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \Theta}.
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Функция $F$ рассматривается как функция шести переменных $L, G, \Theta, l, g, \theta-t$ и времени $t$. Мы должны заметить, что если эксцентриситет орбиты Юпитера равен нулю, $F$ не будет зависеть от $t$, а будет зависеть только от шести первых переменных.

Сделаем теперь замену переменных. Допустим, что отношение средних движений весьма близко к $\frac{n+1}{n}$, где $n$ — целое число, равное для Гекубы 1. Положим

$$\lambda = l + g + \theta - t,\ s = -nl - (n+1)g - (n+1)(\theta - t),$$
$$\tau = -nl - ng - (n+1)(\theta - t),$$
$$U = L + nS + nT,\ S = L - G,\ T = G - \Theta.$$

Легко проверить, что имеет место тождество

$$Ll + Gg + \Theta(\theta - t) = U\lambda + Ss + T\tau,$$

и, следовательно, имеем равенство

$$L\,dl + G\,dg + \Theta d(\theta - t) = U\,d\lambda + S\,ds + T\,d\tau,$$

показывающее, что новые переменные также определяются каноническими уравнениями, которые имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dU}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \lambda},\quad \frac{dS}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s},\quad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \tau},\\ &\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial U},\quad \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial S},\quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial T}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Посмотрим, каков смысл новых переменных. Прежде всего, $\lambda$ представляет собой разность средних долгот. С другой стороны,

$$\frac{ds}{dt} = -n\frac{dl}{dt} - (n+1)\left(\frac{dg}{dt} + \frac{d\theta}{dt} - 1\right),\ \frac{d\tau}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{dg}{dt}.$$

Так как $\frac{dg}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ весьма малы, а $\frac{dl}{dt}$ весьма близко к $\frac{n+1}{n}$, то отсюда следует, что $\frac{ds}{dt}$ и $\frac{d\tau}{dt}$ весьма малы. $S$ будет величиной порядка квадрата эксцентриситета, $T$ — порядка квадрата наклонности.

Так как $S$ и $T$ весьма малы, $U$ будет мало отличаться от квадратного корня из величины большой полуоси.

Обозначим через $l'$ и $\bar{\omega}'$ эксцентриситет и долготу перигелия Юпитера и положим

$$v = n\lambda - t + \bar{\omega}'.$$

Так как $\frac{d\bar{\omega}'}{dt}$ есть нуль или по крайней мере весьма мало́, то будем иметь

$$\frac{dv}{dt} = n\frac{d\lambda}{dt} - 1 = n\frac{dl}{dt} - n + 1,$$

откуда следует, что $\frac{dv}{dt}$ также весьма мала.

Положим теперь

$$x = \sqrt{2S}\cos s,\ \ y = \sqrt{2S}\sin s;\ \ \xi = \sqrt{2T}\cos\tau,\ \ \eta = \sqrt{2T}\sin\tau.$$

Так как

$$x\,dy - S\,ds,\quad \xi\,d\eta - T\,d\tau$$

являются точными дифференциалами, то уравнения остаются каноническими и будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dU}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\lambda},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial F}{\partial\eta},\\ &\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial U},\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{d\eta}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial\xi}. \end{aligned}\right\}\tag{4}$$

**207. Вид возмущающей функции.** Как известно, функция $F$ разложима по степеням $e\cos l$, $e\sin l$, $i\cos(l+g)$, $i\sin(l+g)$, $e'\cos(t-\overline{\omega}')$, $e'\sin(t-\overline{\omega}')$ и по синусам и косинусам кратных разности средних долгот $\lambda$, а коэффициенты этого разложения зависят от больших полуосей, т. е. от $L$. Но легко видеть (см. § 65 и след.), что $e\cos l = e\cos[s+(n+1)\lambda]$, $e\sin l$, $i\cos(l+g) = i\cos[l+(n+1)\lambda]$, $i\sin(l+g)$ разложимы по степеням $x$, $y$, $\xi$, $\eta$ и по синусам и косинусам кратных $\lambda$, а, с другой стороны,

$$e'\cos(t-\overline{\omega}') = (e'\cos v)\cos n\lambda + (e'\sin v)\sin n\lambda,$$

$$e'\sin(t-\overline{\omega}') = (e'\cos v)\sin n\lambda - (e'\sin v)\cos n\lambda.$$

Отсюда заключим, что $F$ разложима по степеням $x$, $y$, $\xi$, $\eta$, $e'\cos v$, $e'\sin v$ и по синусам и косинусам кратных $\lambda$. Коэффициенты разложения зависят от $L = U - nS - nT$, поэтому они могут быть (с помощью формулы Тэйлора) разложены по возрастающим степеням величины $n(S+T)$, т. е.

$$\frac{n}{2}(x^2+y^2+\xi^2+\eta^2).$$

Таким образом, в конечном итоге $F$ разлагается по степеням $x$, $y$, $\xi$, $\eta$, $e'\cos v$, $e'\sin v$, $\cos p\lambda$, $\sin p\lambda$ и коэффициенты этого разложения зависят только от $U$.

Заметим, что в силу симметрии $F$ не должна изменяться в двух случаях:

1) если заменить $\xi$ и $\eta$ на $-\xi$ и $-\eta$,

2) если заменить $y$, $\eta$ и $v$ на $-y$, $-\eta$ и $-v$.

Это указывает на то, что в разложении отсутствует большое количество членов.

Посмотрим теперь, какие из этих членов являются короткопериодическими. Это те члены, которые содержат $\lambda$ вне комбинаций $s$, $\tau$ или $v$, потому что, как мы видели, $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d\tau}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ весьма малы, тогда как $\frac{d\lambda}{dt}$ конечна. Если, согласно смыслу метода Делоне, мы отбрасываем все короткопериодические члены, то можем сказать, что $F$ разложима по степеням $x$, $y$, $\xi$, $\eta$, $e'\cos v$, $e'\sin v$ и коэффициенты этого разложения зависят только от $U$.

Если мы пренебрежем, как и Симонин, членами с

$$e^3,\ i^4,\ i^2e,\ e^2e',\ e'^2$$

и если отбросим все члены, которые должны быть равны нулю в силу симметрии, то найдем, что

$$F = A + Bx + Cx^2 + Dy^2 + E\xi^2 + \\ + H\eta^2 + Ke'\cos v + Lxe'\cos v + Mye'\sin v. \qquad (5)$$

$A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $H$, $K$, $L$, $M$ являются функциями $U$.

Заметим прежде всего, что $F$ зависит еще от $\lambda$ косвенным образом. Здесь $F$ зависит от $U$, $x$, $y$, $\xi$, $\eta$ и $v = n\lambda - t + \overline{w}'$. Поэтому $F$ зависит от $\lambda$ и от $t$ через посредство $v$.

Если допустить, что массой Юпитера мы пренебрегаем, то будем иметь просто

$$F = \frac{1}{2L^2} + \Theta = \frac{1}{2(U - nS - nT)^2} + U - (n+1)(S+T),$$

или, пренебрегая квадратами $S$ и $T$,

$$F = \frac{1}{2U^2} + U + \left(\frac{n}{U^3} - n - 1\right)(S+T) = \\ = \frac{1}{2U^2} + U + \left(\frac{n}{U^3} - n - 1\right)\frac{x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2}{2}.$$

так что, если положить

$$A = A_0 + mA_1, \quad B = B_0 + mB_1, \ldots,$$

где $m$ — масса Юпитера и $A_0$, $A_1$, ... зависят только от $U$ и не зависят от $m$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} A_0 = \frac{1}{2U^2} + U;\ C_0 = D_0 = E_0 = H_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{U^3} - n - 1\right);\\ B_0 = K_0 = L_0 = M_0 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

**208. Метод Делоне.** В первом приближении положим

$$e' = \xi = \eta = 0.$$

При этих условиях функция $F$ будет зависеть только от $x$, $y$, и $U$. Тогда можно произвести до конца интегрирование по методу Делоне; при этом нет никакой надобности пренебрегать высшими степенями $x$ и $y$.

Сразу же находим два интеграла,

$$U = \text{const}, \quad F = \text{const},$$

так как $F$ не зависит ни от $\lambda$, ни от $t$.

Будем рассматривать $x$ и $y$ как координаты точки на плоскости, а $U$ как заданную постоянную, и построим кривые

$$F = C,$$

изменяя для этого постоянную $C$.

Если предположить, что $m = 0$, то

$$F = \frac{1}{2\left[U - \frac{n}{2}(x^2+y^2)\right]^2} + U - \frac{n+1}{2}(x^2+y^2),$$

и наши кривые обращаются в концентрические окружности с центром в начале координат.

Следует обратить особое внимание на те точки, для которых

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

и, следовательно,

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}.$$

Эти точки соответствуют периодическим решениям. При $m = 0$ такими точками будут следующие: начало координат $x = y = 0$, которое соответствует круговой орбите, и все точки окружности

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{n}{(U - nS)^3} - (n+1) = 0,$$

которые соответствуют случаю, когда отношение средних движений в точности равно $\frac{n+1}{n}$.

В зависимости от значения $U$ уравнение $\frac{\partial F}{\partial S} = 0$ может или не иметь никакого положительного корня, или иметь только один. Будем предполагать, что имеет место последний случай.

Отметим тогда три точки, а именно, начало координат $O$ и две точки пересечения $A$ и $B$ оси $x$ с окружностью

$$\frac{\partial F}{\partial S} = 0.$$

Перейдем к случаю, когда $m \neq 0$, но весьма мала. Два уравнения,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

могут быть заменены следующими:

$$y=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=0,$$

которым соответствуют различные точки на оси $x$. Так как $m$ весьма мала, то эти точки будут весьма близкими к точкам $O$, $A$, $B$, соответствующим случаю $m = 0$.

Итак, мы будем иметь три точки: точку $C'$, близкую к $O$, $A'$, близкую к $A$, $B'$, близкую к $B$. Эти точки соответствуют трем периодическим решениям, первое из которых является периодическим решением первого сорта, а два других — второго сорта.

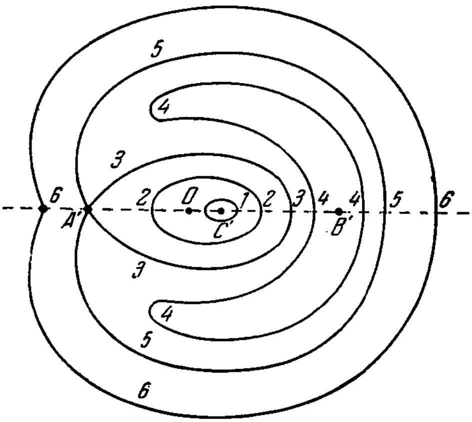

Рис. 3.

Кривые $F = C$ имеют тогда вид, изображенный на рис. 3. Кривые имеют номера *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Заметим, что кривые *1* и *2* суть замкнутые кривые, окружающие точку $C'$. Кривые *3* и *5* имеют общую точку и образуют кривую, подобную улитке Паскаля. Кривая *4* замкнутая, окружающая точку $B'$, и, наконец, кривая *6*—также замкнутая кривая, окружающая три точки: $A'$, $B'$, $C'$.

Соответствующая точка $(x, y)$ описывает одну из этих кривых со скоростью, компоненты которой равны $\frac{\partial F}{\partial y}$, $-\frac{\partial F}{\partial x}$. Она, следовательно, обратно пропорциональна расстоянию по нормали между двумя бесконечно близкими кривыми. Направление этой скорости зависит от направления нормали, следуя которому $F$ возрастает.

Кривые *1*, *2*, *3* будут описываться, следовательно, в направлении часовой стрелки, а кривые *4*, *5*, *6* — в обратном направлении.

Кроме того, тогда как точка $(x, y)$ сделает бесконечное множество оборотов на кривых *1*, *2*, *4*, *6*, на кривой *3* или *5* она сделает только один оборот за бесконечный промежуток времени.

Кривая *4* соответствует случаю *либрации*.

Замкнутые кривые будут мало отличаться от окружностей.

Вспомним, что полярные координаты точки $(x, y)$ равны $\sqrt{2S}$ и $s$. Легко видеть, что когда точка делает один оборот, двигаясь по одной из наших кривых, величина $S$ достигает своего максимума и минимума на оси $x$ и разность между максимумом и минимумом вообще порядка $m$, за исключением кривых *3*, *4*, *5*, или даже кривых, мало отличающихся от кривых *3* или *5*, для которых эта разность будет порядка $\sqrt{m}$.

Рассмотрим теперь изменения полярного угла $s$. В общем случае, когда точка $(x, y)$ описывает одну из наших кривых, $s$ изменяется от 0 до $2\pi$, или от $2\pi$ до 0. Исключение составляет кривая *4*, так как начало координат $O$ находится вне этой кривой. Для таких кривых угол $s$ колеблется около нуля.

Эти два случая являются существенно различными. В обоих случаях имеет место в точности следующее соотношение: среднее движение Гекубы равно удвоенному среднему движению Юпитера минус удвоенное среднее движение перигелия Гекубы (мы предполагаем, что $n = 1$, как это и имеет место в случае Гекубы). Это соотношение означает, что среднее значение $\frac{ds}{dt}$ равно нулю.

Но известно, что движение перигелия будет порядка масс, если только сам эксцентриситет не имеет порядок масс. Действительно, если эксцентриситет весьма мал, то достаточно малого возмущения, чтобы намного изменить положение перигелия. В случае кривой *4* эксцентриситет конечен, движение перигелия будет порядка масс, так что отношение средних движений равно $2 = \frac{n+1}{n}$ с точностью до величин порядка масс. Это будет случай истинной либрации. В случае кривой *1*, наоборот, эксцентриситет весьма мал, движение перигелия конечно, так что отношение средних движений отличается от $2 = \frac{n+1}{n}$. Здесь мы не имеем случая либрации.

**209. Влияние наклонности.** Уравнения, определяющие изменения наклонности, имеют весьма простую форму

$$\frac{d\xi}{dt} = H\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -E\xi; \tag{7}$$

$E$ и $H$ должны рассматриваться как постоянные, так как $U = \text{const}$. Интегрирование уравнений (7) выполняется непосредственно.

Мы утверждаем, что $U = \text{const}$. Действительно, если мы учитываем наклонность, но пренебрегаем эксцентриситетом Юпитера и короткопериодическими членами, функция $F$ будет зависеть только от $U$, $x$, $y$, $\xi$, $\eta$, но не будет зависеть ни от $\lambda$, ни от $t$. Поэтому имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \quad U = \text{const}, \quad F = \text{const}.$$

**210. Вычисление $\lambda$.** Разность средних долгот $\lambda$ определяется простой квадратурой.

В самом деле, имеем

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial U} = -A' - B'x - C'x^2 + D'y^2 - E'\xi^2 - H'\eta^2; \qquad (8)$$

$A'$, $B'$, ... означают производные $A$, $B$, ... по $U$. Так как $U$ постоянна, коэффициенты $A'$, $B'$, ... также постоянны. Что касается величин $x$, $y$, $\xi$, $\eta$, то они являются известными периодическими функциями времени. Это вытекает в случае переменных $x$, $y$ из того, что кривые $F = C$ замкнуты, а в случае переменных $\xi$ и $\eta$ — из вида уравнений (7).

Поэтому правая часть уравнения (8) представляется тригонометрическим рядом и квадратура немедленно может быть сделана. Известный член этого ряда будет представлять среднее движение $\lambda$.

Андуайе рассматривал приближения более высокого порядка, учитывая высшие степени $x$ и $y$ (см. «Bulletin astronomique», том XX).

Том II

# РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

# ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

ГЛАВА XIV

# ПРОБЛЕМА ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

**211.** Напомним основы метода вариации постоянных, которые мы излагали в главе IV. Возьмем за независимые переменные одну из систем, которые мы назвали *системами кеплеровских переменных*, например систему переменных $L$, $\lambda$, $\xi$, $\eta$ (см. § 56, 57, 78, 79).

Таким образом, мы приходим к уравнениям (4′) § 93:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\mu\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}, & \frac{d\eta}{dt} &= \mu\frac{\partial F_1}{\partial\xi}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -\mu\frac{\partial F_1}{\partial\eta}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial L}+\mu\frac{\partial F_1}{\partial L}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Функции $F_0$ и $F_1$ определены в § 36 и в следующих: первая очень проста, вторую мы назвали возмущающей функцией.

В § 83 и 99 мы видели, что эта функция может быть разложена в ряд вида

$$\mu F_1 = \sum A\cos(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+h)\,\mathfrak{M}, \tag{2}$$

где $k_1$ и $k_2$ — целые числа, $A$ и $h$ зависят только от $L$, и $\mathfrak{M}$ есть целый одночлен относительно $\xi$ и $\eta$.

Метод Лагранжа заключается, как известно, в следующем.

1. В первом приближении нужно рассматривать все кеплеровские переменные как постоянные, за исключением переменных $\lambda$, которые будут линейными функциями времени. Таким образом, будем иметь

$$L_i = L_i^0,\quad \xi_i=\xi_i^0,\quad \eta_i=\eta_i^0,\quad \lambda_i = n_i t+\lambda_i^0. \tag{3}$$

Кроме того, будем иметь

$$F_0 = -\frac{M_1}{2L_1^2}-\frac{M_2}{2L_2^2},\qquad n_i\,(L_i^0)^3 = M_i$$

(см. § 82 и 97).

2. Во втором приближении нужно заменить в частных производных $F_1$ переменные их значениями (3), так что правые части уравнений (1) сделаются известными функциями времени. Тогда уравнения (1) легко интегрируются квадратурами.

3. В третьем приближении нужно заменить в частных производных функции $F_1$ переменные их значениями, полученными во втором приближении, и проинтегрировать снова уравнения (1) квадратурами и т. д.

Вообще второго приближения достаточно. Если заменить функцию разложением (2), то во втором приближении мы немедленно найдем

$$L_i = L_i^0 + \sum \frac{k_i}{\nu} A \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\,\mathfrak{M},$$

$$\eta_i = \eta_i^0 + \sum \frac{A}{\nu} \sin(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + h)\,\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\xi_i},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

так что проблема планетных возмущений (по крайней мере до второго приближения включительно) будет полностью решена, если известно разложение (2).

Раньше было показано, что разложение (2) возможно, но не было показано, как получить это разложение практически. Этой задачей, важное значение которой легко понять, мы и будем теперь заниматься, но сначала укажем ее различные случаи.

**212.** В главе II мы видели, что возмущающая функция может быть представлена в трех различных формах, именно, в тех, которые указаны в § 26 и 43, в § 30 и 38 и в § 44.

Во всех трех случаях мы разлагали возмущающую функцию на две части — *главную* и *дополнительную*.

В § 38 главная часть возмущающей функции была представлена в виде

$$m_1 m_4 \left[ \frac{1}{\sqrt{x_4'^2 + x_5'^2 + x_6'^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_4' - x_1')^2 + (x_5' - x_2')^2 + (x_6' - x_3')^2}} \right], \tag{4}$$

а в § 43 — так же как и в § 44, т. е. в виде

$$-\frac{m_1 m_4}{\sqrt{(x_4' - x_1')^2 + (x_5' - x_2')^2 + (x_6' - x_3')^2}}. \tag{5}$$

Легко перейти от одного из этих выражений к другому. Действительно, они отличаются только первым членом в скобках (4). Но этот член зависит только от координат $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$ одной из двух фиктивных планет, и его разложение, как мы увидим в ближайшей главе, может быть легко получено.

Перейдем к дополнительной части возмущающей функции. С переменными § 30 мы вывели в § 38 выражение этой дополнительний части и затем показали также, каким образом можно перейти от разложения главной части к разложению полной возмущающей функции и, следовательно, к разложению дополнительной ее части. Дальше мы вернемся к этому вопросу.

Если же воспользоваться переменными § 26, то дополнительная часть выражается более просто и, как мы видели в § 43, может быть написана в виде

$$T_3=\frac{1}{m_7}(y'_1y'_4+y'_2y'_5+y'_3y'_6). \tag{6}$$

Если, наконец, взять обычные переменные, т. е. переменные § 44, то дополнительная часть не будет одинакова для двух планет. Для одной она имеет вид

$$\frac{m_1m_4}{BC^3}(x'_1x'_4+x'_2x'_5+x'_3x'_6), \tag{7}$$

а для другой

$$\frac{m_1m_4}{AC^3}(x'_1x'_4+x'_2x'_5+x'_3x'_6). \tag{7'}$$

Мы увидим далее, что разложения выражений (6), (7) и (7′) получить очень легко.

Таким образом, задача приводится к разложению выражения (5), которым мы будем главным образом заниматься. Мы увидим, как можно перейти от разложения выражения (5) к разложению дополнительной части в различных формах и какие существуют соотношения между разложениями различных выражений (5), (6), (7) и (7′).

213. В § 59 мы определили четыре системы кеплеровских переменных, а именно:

1) систему эллиптических элементов

$$a,\quad e,\quad i,\quad l,\quad g+\theta,\quad \theta;$$

2) первую систему канонических элементов

$$L,\quad G,\quad \Theta,\quad l,\quad g,\quad \theta;$$

3) вторую систему канонических элементов

$$L,\quad \varrho_i,\quad \lambda,\quad \omega_i;$$

4) третью систему канонических элементов

$$L,\quad \xi_i,\quad \lambda,\quad \eta_i.$$

Очевидно, что применение той или иной системы переменных приводит к различным разложениям возмущающей функции. К счастью, легко перейти от одного разложения к другому.

Применение канонических элементов заключается в том, что уравнения движения задачи сохраняют каноническую форму. Между тем астрономы чаще всего применяют эллиптические элементы, и в этом случае уравнения не сохраняют каноническую форму. Тем не менее, как мы видели в § 81, уравнения всегда представляются в следующей форме.

Производные эллиптических элементов по времени $t$ выражаются линейно через частные производные функции $F$ по эллиптическим элементам с коэффициентами, являющимися известными функциями эллиптических элементов. Добавим, что эти коэффициенты зависят только от элементов

$$a, \quad e, \quad i, \quad g+\theta, \quad \theta,$$

которые являются постоянными в первом приближении, тогда как средняя аномалия $l$, меняющаяся в первом приближении пропорционально времени, в них не входит.

Полученные таким методом уравнения могут быть названы *уравнениями Лагранжа.*

В случае канонических переменных и канонических уравнений правые части уравнений содержат только одну из частных производных функции $F$, умноженную на $\pm 1$. Наоборот, в случае эллиптических переменных и уравнений Лагранжа правые части содержат несколько частных производных, умноженных на коэффициенты, также зависящие от эллиптических элементов. Мы не будем выписывать здесь уравнения Лагранжа, а ограничимся, как и в § 81, ссылкой на трактат Тиссерана (т. I, стр. 187).

Все, что было установлено в предыдущих главах при помощи канонических уравнений, очевидно, может быть получено и при помощи уравнений Лагранжа, но это требует выполнения длинных выкладок. Более того, в практических вычислениях применение канонических уравнений сокращает громоздкость выкладок, но различие начинает становиться ощутимым лишь в третьем приближении, тогда как обычно мы останавливаемся на втором.

Как бы то ни было, для астрономов эллиптические элементы являются более привычными и в большинстве работ, посвященных разложению возмущающей функции, использованы именно эллиптические элементы. Может быть, было бы нетрудно получить разложения, пользуясь каноническими элементами с самого начала. Но тогда нужно было бы заново выполнить уже сделанную работу, а поэтому лучше использовать результаты, уже полученные нашими предшественниками. К счастью, как мы уже говорили, легко перейти от разложения, в котором использованы эллиптические элементы, к разложению, в котором использована какая-либо система канонических элементов.

Мы мало будем пользоваться первой канонической системой элементов; действительно, если эксцентриситеты и наклонности весьма малы, то и некоторые переменные второй и третьей канонических систем также весьма малы. Мы не имеем этого для первой канонической системы, которая, таким образом, мало пригодна для приближенных методов, где малость эксцентриситетов и наклонностей играет главную роль. Именно поэтому мы оставляем ее в стороне.

Взамен этого мы будем рассматривать другую систему эллиптических переменных,

$$a, \quad e, \quad i, \quad u, \quad g+\theta, \quad \theta,$$

где средняя аномалия $l$ заменена эксцентрической аномалией $u$.

Применение этих переменных мало пригодно при интегрировании, хотя Ганзен и извлек из этого некоторую пользу, но зато разложение, опирающееся на эти новые переменные, получается намного легче, чем при использовании обычных эллиптических переменных. Легко перейти от одной формы разложения к другой, а именно, через посредство первого разложения наиболее удобно перейти ко второму. Это служит обоснованием для детального изучения первой формы разложения.

Таким образом, мы будем изучать четыре формы разложения возмущающей функции, используя

1) переменные

$$a, \quad e, \quad i, \quad u, \quad g+\theta, \quad \theta; \tag{8}$$

2) эллиптические переменные

$$a, \quad e, \quad i, \quad l, \quad g+\theta, \quad \theta,$$

или, так как $\lambda = l + g + \theta$, переменные

$$a, \quad e, \quad i, \quad \lambda, \quad g+\theta, \quad \theta, \tag{9}$$

которые также являются эллиптическими;

3) канонические переменные

$$L, \quad \varrho_i, \quad \lambda, \quad \omega_i; \tag{10}$$

4) канонические переменные

$$L, \quad \xi_i, \quad \lambda, \quad \eta_i. \tag{11}$$

Главным образом мы будем рассматривать, как можно перейти от одной формы разложения к другой.

**214.** Если применять одну из систем элементов (9), (10) или (11), то разложение возмущающей функции будет иметь вид

$$\sum B \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2) + \sum C \sin(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2), \tag{12}$$

где $k_1$ и $k_2$ — целые числа; $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — средние долготы. Коэффициенты $B$ и $C$ суть функции других переменных, т. е. оскулирующих элементов $a$, $e$, $i$, $g+\theta$, $\theta$ двух планет, или канонических элементов $L$, $\varrho$, $\omega$ или $L$, $\xi$, $\eta$.

Если воспользоваться переменными (8), то разложение возмущающей функции представится в форме

$$\sum B' \cos(k_1 u_1 + k_2 u_2) + \sum C' \sin(k_1 u_1 + k_2 u_2), \qquad (13)$$

где $u_1$ и $u_2$ — эксцентрические аномалии, а $B'$ и $C'$ являются функциями элементов $a$, $e$, $i$, $g+\theta$, $\theta$.

Наша задача состоит в том, чтобы определить функции $B$, $C$, $B'$, $C'$. Но она может быть рассматриваема различными способами.

1. Можно постараться разложить эти функции по степеням $e$ и $i$, если применять переменные (9), или по степеням $\varrho$, если взять переменные (10), или по степеням $\xi$ и $\eta$, если иметь в виду переменные (11), а далее изучать отдельно различные члены разложений.

Тогда мы получим аналитические формулы, пригодные во всех случаях, и которые в дальнейшем могут быть применены в каждом частном случае, лишь бы эксцентриситеты и наклонности были малы. При этом возникает вопрос об условиях сходимости этих разложений, и это один из вопросов, который будет нами рассмотрен.

2. Можно также для двух конкретных планет определить только численные значения этих функций и некоторых их производных. Число членов, которые должны быть вычислены, оказывается тогда не очень большим, так что работа намного облегчается, особенно если не требуется проводить приближения слишком далеко. С этой точки зрения наиболее важный вопрос состоит в определении верхней границы для каждого коэффициента, чтобы иметь возможность пренебречь членами, коэффициенты которых заведомо очень малы.

3. Можно, наконец, изучить аналитические свойства этих функций, имея в виду облегчить числовые вычисления, которые приходится производить.

Мы увидим, что эти функции удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых являются рациональными функциями от $L$, $\xi$, $\eta$ или от

$$a, \quad e, \quad \operatorname{tg}\frac{i}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{g}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Мы также выведем замечательные рекуррентные соотношения, связывающие эти функции.

**215.** Мы уже подчеркивали, что больше всего нас будет интересовать разложение той части возмущающей функции, которая имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{D}},$$

где

$$D = (x_1' - x_4')^2 + (x_2' - x_5')^2 + (x_3' - x_6').$$

Но нам придется также разлагать не только $\frac{1}{\sqrt{D}}$, но еще и

$$\frac{1}{\sqrt{D^3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{D^5}}, \ \ldots$$

и вот почему. Предположим, что координаты планет, а следовательно, и $D$, зависят от малого параметра $\alpha$ (например, от эксцентриситета), и что мы хотим получить разложения по степеням параметра $\alpha$.

Обозначим через $D_0$ значение $D$ при $\alpha = 0$ и положим

$$D = D_0 + \varepsilon.$$

Прежде всего будем искать разложение по степеням $\varepsilon$, после чего легко перейти к разложению по степеням $\alpha$. Таким образом, находим

$$\frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{D_0}} - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{D_0^3}} + \frac{3\varepsilon^2}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{D_0^5}} - \ldots,$$

откуда видно, что в правую часть входит не только $\frac{1}{\sqrt{D_0}}$, но и величины $\frac{1}{\sqrt{D_0^3}}, \frac{1}{\sqrt{D_0^5}}, \ldots$

Но это не все. Например, в канонических уравнениях (4') и (5') из § 93 входит не сама возмущающая функция, а ее частные производные. Но если возмущающая функция содержит член вида $\frac{1}{\sqrt{D}}$, то дифференцирование введет члены вида $\frac{1}{\sqrt{D^3}}$.

Допустим теперь, что мы желаем идти далее второго приближения. Как мы видели в § 100, правые части наших уравнений принимают вид

$$\sum B\mathfrak{M}',$$

где $B$ являются частными производными возмущающей функции, порядка выше первого, а это приводит к тому, что в правых частях будет входить не только член $\frac{1}{\sqrt{D^3}}$, но и члены $\frac{1}{\sqrt{D^5}}, \ldots$

Этими двумя причинами и объясняется тот факт, что наряду с разложением $\frac{1}{\sqrt{D}}$ мы должны изучать и разложения $\frac{1}{\sqrt{D^3}}, \ldots$

**216.** Вернемся к формулам (12) и рассмотрим разложение $B$ или $C$ по степеням эксцентриситетов и наклонностей. Пусть $m$ — показатель степени одного из членов этого разложения. Раньше мы видели, что $m$ не меньше $|k_1 - k_2|$ и имеет ту же четность, что и $|k_1 - k_2|$.

Но если эксцентриситеты и наклонности малы, то член разложения тем меньше, чем выше его степень. Таким образом, будем иметь достаточно хорошие приближенные значения коэффициента $B$ или $C$, если ограничимся членами, степени которых точно равны $|k_1 - k_2|$. Эту совокупность членов можно назвать главной частью коэффициента $B$ или $C$. Представляет интерес исследовать, к чему приводится возмущающая функция, если в формуле (12) заменить каждый из коэффициентов его главной частью.

То, что мы сказали, имеет место и в том случае, если разлагать не по степеням эксцентриситетов и наклонностей, а по степеням величин $\xi$ и $\eta$.

**217.** Иногда нужно вычислять в возмущающей функции члены более высокой степени, не вычисляя члены низшей степени. Вообще коэффициенты различных членов убывают очень быстро по мере того, как возрастает степень. Но может случиться, что член с малым коэффициентом все же будет играть очень большую роль, так как интегрирование вводит малые делители, благодаря которым малый член иногда порождает значительное возмущение.

Возьмем в возмущающей функции один из ее членов

$$B \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2),$$

и допустим, что целые числа $k_1$ и $k_2$ принимают весьма большие значения, но так, что отношение $-\frac{k_1}{k_2}$ близко к отношению средних движений $\frac{n_2}{n_1}$. Тогда разность $|k_1 - k_2|$ и, следовательно, степень этого члена будут очень большими. Поэтому коэффициент $B$ будет очень малым, но зато и делитель $k_1n_1 + k_2n_2$ будет весьма малым, так что в конечном счете возмущение будет весьма заметным.

Точное вычисление коэффициента $B$ в этом случае будет очень громоздким, так как для этого необходимо предварительно вычислить предыдущие члены, которые непосредственно не нужны. Можно этого избежать, пользуясь приближенными формулами, пригодными лишь для членов высших степеней и основанными на свойствах функций с очень большими номерами, причем эти формулы или дают достаточное приближение, или позволяют узнать, будет ли данный член в данном вопросе существенным и, следовательно, нужно ли вычислять его точно.

**218.** Мы будем рассматривать особо некоторые частные случаи, среди которых главными являются следующие:

1. Случай, когда эксцентриситеты и наклонности равны нулю.

2. Случай, когда только эксцентриситеты равны нулю. В этих случаях средняя и эксцентрическая аномалии совпадают, поэтому разложения (12) и (13) не будут отличаться друг от друга.

3. Случай, когда наклонности равны нулю.

Другим частным случаем, заслуживающим нашего внимания, является случай Луны. Отношение больших осей в этом случае мало́, поэтому выгодно вести разложение по ступеням этого отношения, откуда и вытекает один из частных случаев разложения.

Отметим, что создано много теорий движения Луны и в каждой из них построено свое разложение возмущающей функции, о которых мы будем иметь случай сказать в дальнейшем несколько слов.

**219.** Мы уже имели случай, кроме разложения (12), расположенного по кратным средним аномалиям, рассмотреть разложение (13), расположенное по кратным эксцентрическим аномалиям.

Последнее разложение было использовано Ганзеном, который также пользовался разложениями по эксцентрической аномалии одной из планет и средней аномалии другой. С другой стороны, Гюльден пользовался разложениями, расположенными по истинным аномалиям.

Когда, как это делали упомянутые астрономы, берут за независимую переменную истинную или эксцентрическую аномалию одной из планет, то это вызывает весьма длинные и громоздкие преобразования. Действительно, между истинной и эксцентрической аномалиями планеты и ее средней аномалией имеются простые, хорошо известные соотношения. Кроме того, средние аномалии двух планет связаны линейным соотношением. Наоборот, соотношение между двумя эксцентрическими аномалиями (или между истинными аномалиями) относительно громоздко. Поэтому, если разлагать возмущающую функцию по двум эксцентрическим аномалиям (или истинным аномалиям) и далее все выражать через независимую переменную, которой является эксцентрическая аномалия или истинная аномалия одной из планет, необходимо заменить в разложении эксцентрическую (или истинную) аномалию второй планеты эксцентрической (или истинной) аномалией первой, а это приводит к вычислительным трудностям, о которых мы скажем несколько слов.

**220.** В канонические уравнения возмущающая функция непосредственно не входит, а входят ее частные производные первого порядка, поэтому их разложения представляют особенный интерес. Если разложение возмущающей функции задано в аналитической форме, и особенно в виде ряда, расположенного по степеням эксцентриситетов и наклонностей, или по степеням величин $\xi$ и $\eta$, то легко перейти от одного разложения к другому. Но если мы ограничились определением числовых значений коэффициентов, как об этом было сказано в § 214, то для каждой частной производной возмущающей функции приходится выполнять всю работу сначала.

Это привело к тому, что некоторые астрономы стали предпочитать вместо канонических уравнений или уравнений Лагранжа другую форму уравнений. Заметим, что мы имеем шесть частных производных возмущающей функции, но можно составить уравнения движения таким образом, чтобы в правых частях входили не частные производные, а три составляющие возмущающей силы, например, составляющие по трем координатным осям или составляющие по радиусу-вектору, по перпендикуляру к нему в плоскости орбиты и по перпендикуляру к плоскости орбиты. В этом случае нужно будет получить только три разложения вместо шести. Это говорит о том, что шесть частных производных не являются независимыми, а между ними и самой возмущающей функцией существуют некоторые соотношения. Некоторые соотношения существуют и между частными производными и составляющими силы, разложенной одним из двух указанных способов.

Поэтому можно поставить задачу о нахождении этих соотношений и затем показать, каким образом ими пользоваться, чтобы вывести все разложения из одного, например, из разложения возмущающей функции.

Этот беглый обзор показывает, сколько различных сторон имеет проблема разложения возмущающей функции, которая и будет составлять содержание следующих глав.

## ГЛАВА XV

# ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

**221.** Прежде всего нужно выразить прямоугольные или полярные координаты планет в виде функций одной из систем оскулирующих канонических или эллиптических элементов, определенных в § 59 и 213.

Мы видели в § 65 и следующих, что координаты разложимы по степеням $\xi$ и $\eta$, и изучили некоторые из свойств этих разложений. Сейчас уместно продолжить это исследование и мы начнем с получения разложений координат в функциях эллиптических элементов

$$a,\ e,\ i,\ \lambda,\quad g+\theta,\ \theta. \tag{1}$$

Предположим сначала, что за плоскость $x_1x_2$ взята плоскость орбиты, а ось $x_1$ совпадает с большой осью, так что наклонность $i$ равна нулю, так же как долгота перигелия $g+\theta$, а средняя долгота $\lambda$ равна средней аномалии $l$. При этих условиях координаты не зависят от долготы узла $\theta$, так что нам остается выразить эти координаты в функции

$$a,\ e,\ l=\lambda.$$

В этом случае, вводя эксцентрическую аномалию $u$, имеем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a(\cos u - e), & x_2 &= a\sin u\sqrt{1-e^2}, \\ x_3 &= 0, & l &= u - e\sin u. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Теперь предстоит выразить координаты $x_1$ и $x_2$ в функции средней аномалии $l$, для чего мы должны напомнить свойства функций Бесселя, которыми будем пользоваться.

**222.** Рассмотрим выражение

$$F = E^{ix\sin u},$$

где через $E$ обозначен предел $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ при $m\to\infty$, чтобы не путать неперово число с эксцентриситетом $e$.

$F$ суть периодическая функция $u$ и поэтому может быть разложена по методу Фурье в ряд показательных функций

$$E^{imu},$$

где $m$ — целое положительное или отрицательное число. Коэффициенты суть функции от $x$, так что можем написать

$$E^{ix\sin u} = \sum J_m(x) E^{imu}. \tag{3}$$

Функции $J_m(x)$ называются *функциями Бесселя*. Левая часть равенства (3) является произведением двух показательных функций

$$E^{\frac{x}{2}E^{iu}} = \sum \left(\frac{x}{2}E^{iu}\right)^{\alpha} \frac{1}{\alpha!}$$

и

$$E^{-\frac{x}{2}E^{-iu}} = \sum \left(-\frac{x}{2}E^{-iu}\right)^{\beta} \frac{1}{\beta!},$$

откуда, перемножая их, получим

$$F = \sum \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} \cdot \frac{(-1)^{\beta}}{\alpha!\beta!} E^{iu(\alpha-\beta)}.$$

Чтобы получить $J_m(x)$, нужно в правой части выделить множитель $E^{imu}$, т. е. положить $\alpha = \beta + m$. Поэтому находим

$$J_m(x) = \sum \frac{(-1)^{\beta}}{\beta!(\beta+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\beta}. \tag{4}$$

Если $m \geqslant 0$, то индексу $\beta$ нужно придавать значения

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

и считать, что $0! = 1! = 1$. Из этого следует, что $J_m(x)$ является целой функцией от $x$, делящейся на $x^m$. Ряд (4) сходится очень быстро для всех значений $x$.

Если $m$ отрицательно, то нужно давать $\beta$ значения

$$-m, \quad -m+1, \quad -m+2,\ \ldots,$$

так, чтобы $\alpha$ было положительным или нулем. Тогда $J_m(x)$ также будет целой функцией $x$, которая делится на этот раз на $x^{-m}$.

Заметим, между прочим, что разложение (4) содержит только члены четной степени, если $m$ четно, и члены нечетной степени, если $m$ нечетно. Отсюда следует, что

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x). \tag{5}$$

С другой стороны, если в формуле (3) мы заменим $x$ на $-x$ и $u$ на $-u$, то будем иметь

$$E^{ix\sin u} = \sum J_m(-x) E^{-imu}. \tag{3'}$$

Сравнивая разложения (3) и (3′), найдем

$$J_{-m}(x) = J_m(-x),$$

откуда

$$J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x). \tag{6}$$

Формула (6) позволяет рассматривать функции Бесселя только с положительным индексом.

**223.** Дифференцируя равенство (3) по $u$, получим

$$ix\cos u\, E^{ix\sin u}=\sum imJ_mE^{imu},$$

или

$$\frac{x}{2}(E^{iu}+E^{-iu})\sum J_mE^{i\,nu}=\sum mJ_mE^{imu}.$$

Сравнивая коэффициенты при $E^{imu}$ в обеих частях равенства, получаем рекуррентное соотношение между тремя последовательными функциями Бесселя

$$x(J_{m-1}+J_{m+1})=2mJ_m. \tag{7}$$

Далее, дифференцируя равенство (3) по $x$, находим

$$i\sin uE^{ix\sin u}=\sum J'_m(x)\,E^{imu} \tag{8}$$

или

$$(E^{i\,\iota}-E^{-iu})\sum J_mE^{imu}=2\sum J'_m\,E^{imu}.$$

Из сравнения левой и правой частей последнего равенства выводим формулу, позволяющую вычислять производную функции $J_m$:

$$2J'_m=J_{m-1}-J_{m+1}. \tag{9}$$

**224.** Дифференцируя теперь равенство (3) дважды по $u$ и дважды по $x$, получим следующие две формулы:

$$-ix\sin uE^{ix\sin u}-x^2\cos^2 uE^{ix\sin u}=-\sum m^2J_mE^{imu}, \tag{10}$$

$$-\sin^2 u\,E^{ix\sin u}=\sum J''_m(x)E^{imu}. \tag{11}$$

Сложим теперь четыре формулы (3), (8), (10), (11), умножив их соответственно на

$$x^2,\ +x,\ 1,\ x^2.$$

Мы получим

$$\sum[x^2J''_m+xJ'_m+(x^2-m^2)J_m]E^{imu}=0,$$

откуда

$$x^2J''_m+xJ'_m+(x^2-m^2)J_m=0. \tag{12}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_m$.

**225.** Хотя ряд (4) сходится очень быстро для всех значений $x$, может представить интерес вывод приближенного значения функции $J_m$ для очень больших значений $x$. Из формул Фурье имеем

$$2\pi J_m = \int_0^{2\pi} E^{ix\sin u}\cdot E^{-imu}\,du,$$

или, полагая $\sin u = z$,

$$\pi J_m = \int_{-1}^{+1} E^{ixz}\cdot E^{-imu}\cdot\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{13}$$

Предположим, что $x$ вещественно, положительно и очень велико. Вместо того чтобы интегрировать вдоль прямой, соединяющей точку $z = -1$ с точкой $z = +1$, т. е. придавая переменной $z$ вещественные значения, мы можем выполнить интегрирование вдоль другого пути, имеющего те же концы.

Выберем такой путь, чтобы мнимая часть $z$ была постоянно положительной, за исключением, разумеется, двух концов $z = \pm 1$. При этих условиях вещественная часть $ixz$ будет отрицательна и очень велика, а поэтому $E^{ixz}$ весьма мала. Следовательно, только части пути, близкие к концам, дадут заметные части интеграла, так как на концах $z$ делается вещественным, а вещественная часть $ixz$ обращается в нуль.

Но вблизи конца $z = 1$ с большой точностью имеем

$$u = \frac{\pi}{2}, \qquad E^{-imu} = E^{-im\frac{\pi}{2}}, \qquad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{2(1-z)},$$

а вблизи конца $z = -1$ точно так же имеем

$$u = -\frac{\pi}{2}, \qquad E^{-imu} = E^{im\frac{\pi}{2}}, \qquad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{2(1+z)}.$$

Важно установить, какой знак нужно взять перед радикалами. Мы должны допустить, что знак $\sqrt{1-z^2}$ выбран таким образом, что для вещественных $z$, заключенных между $-1$ и $+1$, радикал $\sqrt{1-z^2}$ веществен и положителен. С другой стороны, мы можем допустить, что путь интегрирования заканчивается на концах $\pm 1$ двумя малыми отрезками длины $\varepsilon$, перпендикулярными к вещественной оси. Это и будут те части пути, которые мы сохраним. Тогда вдоль отрезка, оканчивающегося в точке $z = -1$, аргумент $\sqrt{1-z^2}$ будет равен $\frac{\pi}{4}$, а вдоль отрезка, оканчивающегося в точке $z = 1$, он будет равен $-\frac{\pi}{4}$. Вдоль первого отрезка мы можем взять $\arg\sqrt{z+1} = \frac{\pi}{4}$ и вдоль второго $\arg\sqrt{z-1} = \frac{\pi}{4}$.

Следовательно, будем иметь

$$\sqrt{1-z^2} = -i\sqrt{2}\sqrt{z-1},$$
$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{2}\sqrt{1+z},$$

откуда

$$\pi J_m = \int_{-1}^{-1+\varepsilon i} E^{ixz} E^{im\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2}\sqrt{1+z}} - i\int_{1}^{1+\varepsilon i} E^{ixz} E^{-im\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2}\sqrt{z-1}}. \quad (14)$$

Но мы можем заменить верхние пределы $\pm 1 + i\varepsilon$ в обоих интегралах на бесконечность, так как мы добавляем этим к пути интегрирования части, вдоль которых мнимая часть $z$ положительна и где $E^{ixz}$ пренебрежимо мала.

Но

$$\int_0^\infty \frac{E^{ixz}\,dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{i}{x}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\,E^{\frac{i\pi}{4}},$$

поэтому

$$\int_h^\infty \frac{E^{ixz}\,dz}{\sqrt{z-h}} = E^{ixh}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,E^{\frac{i\pi}{4}},$$

откуда

$$\pi J_m = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left[E^{i\left(-x+\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + E^{i\left(x-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right],$$

или, наконец,

$$J_m = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (15)$$

**226.** Посмотрим теперь, как можно применить функции Бесселя к разложению координат эллиптического движения. Рассмотрим показательную функцию

$$E^{piu},$$

где $p$ — целое число. Она является периодической функцией $u$, а следовательно, и периодической функцией $l$, и поэтому может быть разложена в ряд Фурье вида

$$\sum A_m E^{mil}.$$

Вычислим коэффициенты $A_m$. Формулы Фурье дают

$$2\pi A_m = \int_0^{2\pi} E^{piu}\cdot E^{-mil}\,dl.$$

Но

$$E^{-mil}\,dl = \frac{i}{m}\,dE^{-mil}; \qquad dE^{piu} = ipE^{piu}\,du,$$

поэтому, интегрируя по частям, получим

$$2\pi A_m = \frac{p}{m}\int_0^{2\pi} E^{piu}\cdot E^{-iml}\,du,$$

или, в силу уравнения Кеплера,

$$2\pi A_m = \frac{p}{m}\int E^{(p-m)\,iu}\cdot E^{ime\sin u}\,du.$$

Но интеграл, умноженный на $2\pi$, очевидно, дает коэффициент при $E^{(m-p)\,iu}$ в разложении функции $E^{ime\sin u}$, т. е. он равен

$$2\pi J_{m-p}(me),$$

откуда имеем искомую формулу

$$A_m = \frac{p}{m} J_{m-p}(me). \tag{16}$$

**227.** Эти рассуждения неприменимы, если $m = 0$, так как в этом случае предыдущая формула теряет смысл. В этом случае имеем

$$2\pi A_0 = \int_0^{2\pi} E^{piu}\,du,$$

или

$$2\pi A_0 = \int E^{piu}(1 - e\cos u)\,du,$$

или

$$2\pi A_0 = \int \left(E^{piu} - \frac{e}{2}E^{(p+1)\,iu} - \frac{e}{2}E^{(p-1)\,iu}\right)du.$$

Последняя формула показывает, что коэффициент $A_0$ равен единице при $p = 0$, $-\frac{e}{2}$ при $p = \pm 1$ и нулю для всех других значений $p$.

**228.** Поставим теперь задачу о разложении по показательным функциям $E^{iml}$ какой-либо периодической функции от $u$,

$$F(u) = \sum B_p E^{ipu},$$

и о представлении ее в форме

$$F(u) = \sum A_m E^{iml}.$$

Из предыдущих параграфов легко выводим, что

$$A_m = \sum \frac{p}{m} B_p J_{m-p}(me) \tag{17}$$

для $m \gtrless 0$ и

$$A_0 = B_0 - \frac{e}{2}(B_1 + B_{-1}) \tag{18}$$

для $m = 0$. Можно добавить, что, исходя из тождества

$$E^{ipu} E^{iqu} = E^{i(p+q)u},$$

заменяя в нем экспоненты их разложениями и сравнивая обе части равенства, мы придем к большому числу соотношений, в которых левая часть будет функцией Бесселя, а правая часть представится рядом, все члены которого будут произведениями функций Бесселя.

**229.** Благодаря формулам (17) и (18) предыдущего параграфа, разложение какой-либо функции от $u$ по степеням $E^{il}$ легко получается из разложения по степеням $E^{iu}$. Но большая часть функций, представляющих интерес для эллиптического движения, выражается через $E^{iu}$ весьма просто.

Допустим прежде всего, что за плоскость $x_1x_2$ мы берем плоскость орбиты, а за ось $x_1$ — большую ось. Тогда будем иметь

$$x_1 = a(\cos u - e) = -ae + \frac{a}{2}E^{iu} + \frac{a}{2}E^{-iu},$$

$$x_2 = a\sqrt{1-e^2}\sin u = \frac{a}{2i}\sqrt{1-e^2}\,(E^{iu} - E^{-iu}),$$

$$x_3 = 0,$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a(1 - e\cos u).$$

Применение формул (17) и (18) дает нам

$$\frac{x_1}{a} = \sum A_m E^{mil}, \qquad \frac{x_2}{a} = \sum A'_m E^{mil},$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{2m}[J_{m-1}(me) - J_{m+1}(me)], \\ A'_m &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2im}[J_{m-1}(me) + J_{m+1}(me)], \\ A_0 &= -\frac{3e}{2}, \qquad A'_0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Рекуррентные формулы (7) и (9) позволяют написать

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{m} J'_m(me), \\ A'_m &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{iem} J_m(me). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Таким же образом находим

$$r = a + \frac{ae^2}{2} - ae \sum \frac{J'_m(me)}{m} E^{mil},$$

где индекс суммирования $m$ принимает все целые положительные и отрицательные значения, за исключением нуля. Эта формула непосредственно выводится из соотношения

$$r = a(1-e^2) - ex_1.$$

Мы можем также написать равенства

$$\frac{x_1+ix_2}{a} = -e + \frac{E^{iu}}{2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right) + \frac{E^{-iu}}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right),$$
$$\frac{x_1-ix_2}{a} = -e + \frac{E^{-iu}}{2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right) + \frac{E^{iu}}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right),$$

из которых с помощью формул (17) и (18) можно вывести разложения для

$$x_1 \pm ix_2.$$

**230.** Вернемся теперь к величинам, которые в § 63 были обозначены через $X$ и $Y$. Мы будем иметь

$$X + iY = (x_1 + ix_2) E^{-il}$$

и, следовательно, применяя формулы (17) и (18), получаем

$$X + iY = -\frac{3ae}{2} E^{-il} + \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right) \sum \frac{J_{m-1}(me)}{2m} E^{i(m-1)l} -$$
$$- \frac{a}{2}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) \sum \frac{J_{m+1}(me)}{2m} E^{i(m-1)l}. \tag{21}$$

Заменяя $i$ на $-i$, выведем отсюда разложение для $X - iY$ и, следовательно, разложения для $X$ и $Y$.

Пусть теперь наша система отнесена к произвольным осям. Вспомогательные величины $X$ и $Y$ всегда определяются как в § 63, и их разложения в функции переменных $a$, $e$ и $l$ не изменятся. Прямоугольные координаты, отнесенные к новым осям, будут связаны с $X$ и $Y$ посредством равенств (12) из § 63.

Эти формулы могут быть также написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1+ix_2 &= \cos^2\frac{J}{2}(X+iY)E^{i\lambda}+\sin^2\frac{J}{2}(X-iY)E^{-i(\lambda-2\theta)},\\ x_3 &= \operatorname{Im}\left[\frac{\sin J}{2}(X+iY)E^{i(\lambda-\theta)}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Мы заменим букву $i$, обозначающую в формулах § 63 наклонность, буквой $J$, чтобы избежать путаницы с $i=\sqrt{-1}$. Выражение для $x_1-ix_2$ получим, заменяя $i$ на $-i$.

Пользуясь формулами (21) и (22), находим

$$\begin{aligned} x_1+ix_2 = a\cos^2\frac{J}{2}\Big[-\frac{3e}{2}E^{i(g+\theta)}&+\\ +\sum\frac{E^{i(ml+g+\theta)}}{4m}&(\varepsilon_1 J_{m-1}-\varepsilon_2 J_{m+1})\Big]+\\ +a\sin^2\frac{J}{2}\Big[-\frac{3e}{2}E^{i(\theta-g)}+\sum\frac{E^{i(-ml+g+\theta)}}{4m}&(\varepsilon_1 J_{m-1}-\varepsilon_2 J_{m+1})\Big], \end{aligned} \qquad (23)$$

где для сокращения через $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ обозначены выражения $1+\sqrt{1-e^2}$ и $1-\sqrt{1-e^2}$. Аргумент функций Бесселя $J_{m-1}$ и $J_{m+1}$ равен $me$.

Можно найти также, что

$$x_3=\frac{a\sin J}{2}\left[-\frac{3e}{2}\sin g+\sum\frac{\sin(ml+g)}{4m}(\varepsilon_1 J_{m-1}-\varepsilon_2 J_{m+1})\right]. \qquad (23')$$

**231.** Кроме разложений, полученных методом § 228, можно получить и другие. Пусть, например, мы хотим разложить

$$\frac{du}{dl}=\frac{1}{1-e\cos u}.$$

Очевидно, что можно разложить выражение $\frac{1}{1-e\cos u}$ в ряд Фурье и далее применить метод § 228. Но имеется и другой, более простой путь. Мы имеем

$$u=l+e\sin u,$$

откуда с помощью разложения $x_2$ из § 229 и формул (20) получим

$$u=l+\sum\frac{1}{im}J_m(me)E^{mil}.$$

Далее, дифференцируя, будем иметь

$$\frac{du}{dl}=1+\sum J_m(me)E^{mil}. \qquad (24)$$

Это разложение дает нам одновременно и разложение для

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a(1-e\cos u)}.$$

Вообще формула (24) может быть применена для разложения выражений вида

$$\frac{F(u)}{1-e\cos u}.$$

В самом деле, если имеем

$$F(u)=\sum C_p E^{ipu},$$

то будем иметь

$$\frac{F(u)}{1-e\cos u}=\frac{d}{dl}\sum\frac{C_p}{ip}E^{ipu}.$$

Теперь разложим $\sum\frac{C_p}{ip}E^{ipu}$ в ряд по степеням $E^{iml}$ и затем продифференцируем по $l$.

Этот метод может быть более выгодным, чем метод § 228, если разложение функции $F(u)$ по степеням $E^{ipu}$ проще разложения для функции $\frac{F(u)}{1-e\cos u}$, например, если оно сводится к конечному числу членов. В частности, мы можем найти разложения для $\frac{\cos u}{r}$ и $\frac{\sin u}{r}$, которые связаны с $\cos v$ и $\sin v$ линейными соотношениями ($v$ — истинная аномалия).

**232.** Мы можем также дифференцировать по $e$, что дает

$$(1-e\cos u)\frac{du}{de}=\sin u.$$

Тогда, имея разложение какой-либо периодической функции $\Phi(u)$, мы немедленно можем вывести разложение для

$$\frac{\sin u\,\frac{d\Phi(u)}{du}}{1-e\cos u},$$

которое может быть полезным, если разложение $\frac{d\Phi}{du}$ проще разложения $\sin u\,\frac{d\Phi}{du}$. В частности, таким образом можно вычислить величину $\frac{\sin u}{r}$, которая отличается от $\sin v$ только постоянным множителем.

Но мы можем также дифференцировать два раза или большее число раз по $l$, или, наоборот, проинтегрировать по $l$. Например, уравнения кеплеровского движения дают

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=-\frac{a^3x_i}{r^3}. \tag{25}$$

Но мы знаем разложения координат $x_i$, коэффициенты которых зависят только от конечного числа функций Бесселя. Уравнение

(25) дает разложение $\frac{x_i}{r^3}$, каждый член которого будет содержать лишь конечное число функций Бесселя. В частности, если оси координат взять как в § 229, то мы будем знать разложения

$$\frac{x_1}{r^3}=\frac{\cos v}{r^2}, \qquad \frac{x_2}{r^3}=\frac{\sin v}{r^2},$$

где $v$ — истинная аномалия.

Умножая каждое из уравнений (25) на $x_i$ и складывая, найдем

$$\frac{d^2r^2}{dl^2}-\sum\left(\frac{dx_i}{dl}\right)^2=-\frac{M}{r}. \tag{26}$$

Так как второе слагаемое левой части (26) в силу интеграла живых сил является линейной функцией от $\frac{1}{r}$, то уравнение (26) устанавливает линейное соотношение между $\frac{1}{r}$ и $\frac{d^2r^2}{dl^2}$. Но уравнение (24) дает нам разложение для $\frac{1}{r}$, так что мы имеем также разложение для $\frac{d^2r^2}{dl^2}$, откуда двукратным интегрированием получим разложение для $r^2$. Итак, будем иметь разложения для $r$, $\frac{1}{r}$ и $r^2$.

Уравнение эллипса в полярных координатах дает

$$e\cos v=\frac{a(1-e^2)}{r}-1,$$

$$er^2\cos v=a(1-e^2)\,r-r^2.$$

Из разложений $\frac{1}{r}$, $r$ и $r^2$ выводим, следовательно, разложения $\cos v$ и $r^2\cos v$. Впрочем, выше мы уже показали, каким образом разложить $\cos v$.

Все разложения, о которых мы говорим, таковы, что каждый их член зависит только от конечного числа функций Бесселя. Следует отметить, что, используя соотношения (7), (9) и (12), можно сделать так, чтобы каждый член содержал лишь $J_m(me)$ и $J'_m(me)$.

233. Мы могли бы также разложить координаты в функции канонических элементов

$$L,\ \lambda,\ \rho,\ \omega,\ \xi,\ \eta.$$

Если обратимся к формулам (23) и (23′), то увидим, что для этого достаточно разложить выражения

$$E^{im\lambda},\qquad a\cos^2\frac{J}{2},\qquad e^m E^{\pm im(g+\theta)},\qquad \operatorname{tg}^2\frac{J}{2}E^{\pm 2i\theta},\qquad \operatorname{tg}\frac{J}{2}e^{\pm i\theta} \tag{27}$$

и, наконец, функцию

$$K_m = \frac{\varepsilon_1 J_{m-1} - \varepsilon_2 J_{m+1}}{e^{|m-1|}}.$$

Функции $E^{im\lambda}$ уже выражены через канонические элементы. Выражения (27) с точностью до постоянных множителей приводятся к

$$L^2 \frac{2L-2\varrho_1-\varrho_2}{L-\varrho_1}, \quad \frac{(\xi_1 \pm i\eta_1)^m}{L^{\frac{m}{2}}},$$

$$\frac{(\xi_2 \pm i\eta_2)^2}{2L-2\varrho_1-\varrho_2}, \quad \frac{\xi_2 \pm i\eta_2}{\sqrt{2L-2\varrho_1-\varrho_2}}.$$

Наконец, $K_m$ разлагается по возрастающим степеням $e^2 = 2\frac{\varrho_1}{L} - \left(\frac{\varrho_1}{L}\right)^2$ и разложение легко выводится из разложений функций Бесселя (см. § 65—69).

**234.** Заметим теперь, что при очень малом $e$ первый член каждой функции Бесселя будет более значительным, чем другие. Тогда, если воспользуемся идеей, изложенной в § 216, мы можем ограничиться этим членом. Используя формулы (16) и заменяя каждую функцию Бесселя ее разложением, мы найдем

$$E^{ipu} = \sum \frac{p}{m} \cdot \frac{(-1)^\beta}{\beta!\,(m-p+\beta)!} \left(\frac{me}{2}\right)^{m-p+2\beta} E^{iml} \tag{28}$$

и, заменяя каждую из функций Бесселя ее первым членом, будем иметь

$$\sum \frac{p}{m} \left(\frac{me}{2}\right)^{m-p} \cdot \frac{E^{iml}}{(m-p)!} + \sum \frac{p}{m} \left(\frac{me}{2}\right)^{p-m} \cdot \frac{(-1)^{p-m}}{(p-m)!} E^{iml}. \tag{29}$$

В первой сумме $m$ принимает такие целые значения, что $m - p \geqslant 0$, а во второй сумме такие значения, что $m - p < 0$. Но мы должны заметить, что каждая функция Бесселя представляется своим первым членом тем менее точно, чем больше порядок этой функции. Действительно, отношение второго члена к первому (например, в случае $m - p > 0$) равно

$$\left(\frac{me}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{m-p+1}.$$

Последнее выражение очень мало́, если $e$ очень мало́, а $m$ конечно, но, с другой стороны, каково бы ни было $e$, оно неограниченно возрастает вместе с $m$. Поэтому для членов более высокого порядка мы получим лучшее приближение, заменяя функции Бесселя их приближенными значениями, приведенными в § 225.

**235.** Разложение (28) и аналогичные ему разложения расположены по степеням $e$ и $E^{iml}$. Если *сначала* расположим разложения по степеням $E^{iml}$, то коэффициент каждого члена, будучи функцией Бесселя, может быть разложен по степеням $e$ в ряд, всюду сходящийся. Более того, из того, как вычислены коэффициенты различных членов ряда Фурье, следует, что сам этот ряд всегда будет сходящимся.

Таким образом, если расположить члены ряда указанным образом, то сходимость обеспечена, но этого не будет, если сначала разлагать в ряд по степеням $e$, коэффициенты которого будут функциями $l$.

Эти соображения приводят к постановке следующей задачи:

Пусть задана произвольная функция $u$, зависящая, следовательно, от $e$ и $l$. Мы разлагаем ее по степеням $e$. Каков радиус сходимости этого ряда, т. е. каково наибольшее значение $|e|$, при котором ряд еще сходится? Это значение, очевидно, зависит от $l$, и мы обозначим его через $\varphi(l)$. Если тогда $M$ есть наименьшее из значений $\varphi(l)$, когда $l$ принимает все возможные вещественные значения, то сходимость ряда будет несомненной, пока $e$ не превзойдет $M$.

Для вычисления $\varphi(l)$ и $M$ применим теорему Коши. Для того чтобы ряд перестал быть сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы функция перестала быть голоморфной. Но мы имеем

$$l = u - e \sin u,$$

откуда

$$du\,(1 - e\cos u) = dl + \sin u\, de,$$

которое показывает, что $u$ (и вообще всякая функция от $u$) перестает быть голоморфной функцией $e$ и $l$ для

$$e = \frac{1}{\cos u}. \tag{30}$$

Комбинируя уравнение (30) с уравнением Кеплера, находим

$$u - \operatorname{tg} u = l. \tag{31}$$

Уравнения (30) и (31) определяют $e$ и ее абсолютное значение $|e|$ в функции $l$ и наименьшее из всех значений $|e|$ есть $\varphi(l)$.

Заметим, что $\varphi(l)$ одинаково для всех функций $F(u)$. Исключение составляет тот случай, когда производная $\frac{dF}{du}$ обращается в нуль для того значения $u$, которое удовлетворяет уравнению (31). Это позволяет нам утверждать, что результат пригоден для произвольной функции $F(u)$, достаточно лишь, чтобы исключительное условие не выполнялось.

**236.** Теперь нужно определить то значение $l$, для которого $\varphi(l)$ достигает своего наименьшего значения $M$. Для этого продифференцируем формулу (28) по $l$, что дает

$$\frac{E^{ipu}}{1-e\cos u}=\sum\frac{(-1)^{\beta}}{\beta!\,(m-p+\beta)!}\left(\frac{me}{2}\right)^{m-p+2\beta}E^{iml}=\Phi(l). \tag{32}$$

Эта функция не принадлежит к исключительному случаю, указанному в конце предыдущего параграфа, так как, когда имеем

$$1-e\cos u=0,$$

то ее производная не обращается в нуль, а наоборот, становится бесконечной.

Уравнения (30) и (31) не изменятся, если заменить $u$, $l$ и $e$ на $u+\pi$, $l+\pi$, $-e$. Отсюда следует, что критические значения $e$, соответствующие $l$ и $l+\pi$, имеют одно и то же абсолютное значение $\varphi(l)=\varphi(l+\pi)$, но имеют разные знаки.

Предположим теперь, что для некоторого вещественного значения $l=l_1$ и для некоторого значения $e=e_1$ ряд (32) расходится. Ясно, что ряд будет расходиться и для $l=l_1+\pi$, и то же самое можно утверждать о сумме

$$\Phi(l_1)+\Phi(l_1+\pi).$$

Действительно, рассмотрим $\Phi(l)$ как функцию $e$ и $l$, и положим в ней $l=l_1$. Эта функция будет иметь особую точку для

$$e=e', \qquad |e'|=\varphi(l_1)<e_1$$

и не будет иметь такую точку для $e=-e'$, так как если заменить в уравнениях (30) и (31) $e$ на $-e$, то $l$ заменится на $\pi\pm l$, что отлично от $l$, за исключением случая $l=\frac{\pi}{2}$.

Функция $\Phi(l_1+\pi)$ также имеет особую точку для $e=-e'$ и не имеет ее при $e=e'$. Поэтому сумма

$$\Phi(l_1)+\Phi(l_1+\pi)$$

будет иметь две особые точки $e=e'$ и $e=-e'$, и так как эти особые точки различны, то соответствующие особенности не могут уничтожиться. Следовательно, эта сумма будет расходиться при $e=e_1$. Поэтому можно написать

$$\Psi(l,e)=\Phi(l)+\Phi(l+\pi)=2\sum\frac{(-1)^{\beta}}{\beta!\,(m-p+\beta)!}\left(\frac{me}{2}\right)^{m-p+2\beta}\cdot E^{iml}, \tag{33}$$

где $m$ должно принимать только четные значения. Из предыдущего следует, что ряд $\Psi(l_1,e_1)$ расходится. Перейдем от этого ряда к следующему:

$$\Psi\left(-\frac{\pi}{2},\ +i|e_1|\right)=\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

заменяя среднюю аномалию на $-\frac{\pi}{2}$, а эксцентриситет на $i$, помноженное на абсолютное значение $e_1$, которое существенно вещественно и положительно.

Если сделать такую замену в последнем члене равенства (33), то абсолютная величина каждого члена остается той же; но все члены должны стать положительными или, по крайней мере, все должны иметь тот же аргумент (предполагая, как мы и делали, что $p$ — четное число). В самом деле, знаменатель существенно положителен, аргумент $(-1)^\beta$ равен $\beta\pi$, аргумент величины

$$\left(\frac{me}{2}\right)^{m-p+2\beta}$$

равен нулю, если $m$ и $p$ — четные числа, что мы и предположили; аргумент величины $(i\,|e_1|)^{m-p+2\beta}$ равен $(m-p)\frac{\pi}{2}+\beta\pi$, а аргумент $E^{iml}$ равен $-m\frac{\pi}{2}$. Поэтому общий аргумент будет равен

$$-p\frac{\pi}{2}+2\beta\pi$$

$\left(\text{или } -\frac{p\pi}{2}\text{, если отбросить кратность } 2\pi\right)$. Итак, общий аргумент постоянен и не зависит от $m$ и $\beta$, что и требовалось доказать.

Следовательно, если ряд $\Psi(l_1)$ расходится, то тем более будет расходиться ряд $\Psi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, все члены которого имеют одно и то же абсолютное значение и постоянный аргумент. Поэтому $\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ тоже расходится. Отсюда вытекает, что по крайней мере один из рядов $\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ расходится. Но мы видели, что $\varphi(l+\pi)=\varphi(l)$, т. е. что $\Phi(l+\pi)$ расходится, если $\Phi(l)$ расходится, и наоборот. Следовательно, ряд $\Phi\left(\frac{\pi}{2},\ i\,|e_1|\right)$ расходится, и поэтому $|e_1|>\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Но все, что мы предположили относительно $e_1$, выражается неравенством

$$|e_1|>\varphi(l),$$

следовательно, это второе неравенство влечет за собой предыдущее, т. е.

$$\varphi(l)>\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, минимум функции $\varphi(l)$ достигается при $l=\frac{\pi}{2}$.

**237.** Чтобы определить $M$, нужно исследовать уравнение

$$u - \operatorname{tg} u = \frac{\pi}{2} \tag{34}$$

или, полагая $\frac{\pi}{2} - u = \varepsilon$, уравнение

$$\varepsilon + \operatorname{ctg} \varepsilon = 0. \tag{34'}$$

Покажем теперь, что уравнение (34′) имеет только чисто мнимые корни. Действительно, положим

$$\varphi = \cos \varepsilon\varrho.$$

Тогда

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \varepsilon^2\varphi = 0$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\varrho} &= \varphi \quad \text{при} \quad \varrho = 1, \\ \frac{d\varphi}{d\varrho} &= 0 \quad \text{при} \quad \varrho = 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Допустим, что уравнение (34) имеет два корня, $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$. Этим двум корням соответствуют две функции, $\varphi$ и $\varphi_1$, и мы будем иметь

$$\int_0^1 \left(\varphi \frac{d^2\varphi_1}{d\varrho^2} - \varphi_1 \frac{d^2\varphi}{d\varrho^2}\right) d\varrho = \left(\varphi \frac{d\varphi_1}{d\varrho} - \varphi_1 \frac{d\varphi}{d\varrho}\right)\Bigg|_0^1.$$

Правая часть уравнения в силу равенств (35) обращается в нуль как при $\varrho = 0$, так и при $\varrho = 1$, и мы имеем

$$(\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2) \int_0^1 \varphi\varphi_1\, d\varrho = 0.$$

Если уравнение (34′) имеет корень $\varepsilon$, то оно будет иметь и сопряженный мнимый корень $\varepsilon_1$; поэтому функции $\varphi$ и $\varphi_1$ будут мнимыми и сопряженными, а их произведение будет существенно положительным, так что будем иметь

$$\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2 = 0.$$

Последнее равенство может иметь место, если только $\varepsilon^2$ вещественно. Если $\varepsilon^2$ вещественно и положительно, то $\varepsilon$ вещественно. Но вещественные корни не будут пригодны, так как тогда из уравнения (30) следует, что $e > 1$. Если $\varepsilon^2$ вещественно и отрицательно, то $\varepsilon$ чисто мнимо. Следовательно, нужно найти наименьший по абсолютной величине чисто мнимый корень уравнения (34′) или, заменяя $\varepsilon$ на $i\varepsilon$, найти наименьший вещественный корень уравнения

$$\varepsilon\left(E^{-\varepsilon}-E^{\varepsilon}\right)+\left(E^{-\varepsilon}+E^{\varepsilon}\right)=0, \tag{36}$$

после чего найдем $M$ по формуле

$$M=\frac{2}{E^{\varepsilon}-E^{-\varepsilon}}.$$

Таким образом, мы найдем

$$M=0{,}6627\ldots,$$

которое показывает, что наши ряды сходятся, если $e<0{,}6627\ldots$ Можно отметить, что уравнение (36) имеет лишь единственный положительный корень*).

*) По вычислениям Стильтьеса, единственный положительный корень уравнения (36) есть $1{,}19\ldots$, что и дает приведенное значение для $M$. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА XVI

# ОБЩИЕ СВОЙСТВА ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

**238.** Теперь перейдем к разложению самой возмущающей функции, но прежде всего выскажем некоторые общие соображения, касающиеся постановки задачи.

В § 212 мы напомнили различные формы представления возмущающей функции. Сначала мы должны заняться разложением выражения (5) из § 212,

$$\frac{-m_1 m_4}{\sqrt{(x_4'-x_1')^2+(x_5'-x_2')^2+(x_6'-x_3')^2}},$$

т. е. разложением главной части возмущающей функции. Это наиболее трудная задача и если она будет решена, то разложения других частей возмущающей функции будут выведены почти сразу. Действительно, допустим, что мы получили разложение выражения (5) как функции оскулирующих эллиптических элементов первой и второй планет,

$$\begin{gathered} a_1,\ e_1,\ i_1,\ l_1,\ g_1+\theta_1,\ \theta_1, \\ a_2,\ e_2,\ i_2,\ l_2,\ g_2+\theta_2,\ \theta_2\,^*), \end{gathered}$$

и что, таким образом, найдено

$$\frac{1}{\sqrt{\sum (x_4'-x_1')^2}} = f(a_1,\ a_2,\ \ldots), \tag{1}$$

где $f$ является функцией двенадцати оскулирующих эллиптических элементов. Отсюда выводим, что

$$\frac{1}{\sqrt{\sum (x_4'-hx_1')^2}} = f(ha_1,\ a_2,\ \ldots), \tag{2}$$

где $h$ — произвольный постоянный коэффициент. В самом деле, если заменить $a_1$ на $ha_1$, а другие элементы первой планеты и все элементы второй планеты оставить без изменения, то координаты первой планеты $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ заменятся на $hx_1'$, $hx_2'$, $hx_3'$, а координаты второй планеты $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$ не изменятся.

*) Иногда для экономии индексов будем обозначать эти элементы через $a$, $a'$, ...

В § 36 мы видели, что если использовать переменные § 30. то возмущающая функция принимает вид

$$m_1 m_4\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{AB}\right)+m_4 m_7\left(\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}\right),$$

где

$$BD^2 = x_4'^2 + x_5'^2 + x_6'^2 = \sum x_4'^2,$$

$$AB^2 = \sum\left(x_4' - \frac{m_7}{m_1+m_7}x_1'\right)^2,$$

$$BC^2 = \sum\left(x_4' + \frac{m_1}{m_1+m_7}x_1'\right)^2.$$

Следовательно, нужно получить разложения

$$\frac{1}{AB}, \quad \frac{1}{BC}, \quad \frac{1}{BD}.$$

Но применение формулы (2) сразу дает

$$\frac{1}{AB} = f\left(\frac{m_7}{m_1+m_7}a_1,\ a_2,\ \ldots\right),$$

$$\frac{1}{BC} = f\left(\frac{-m_1}{m_1+m_7}a_1,\ a_2,\ \ldots\right),$$

$$\frac{1}{BD} = f(0,\ a_2,\ \ldots).$$

Последнее выражение $f(0,\ a_2,\ \ldots)$, очевидно, зависит лишь от элементов второй планеты. Разложение для $\frac{1}{BD}$ получается непосредственно, если заметим, что оно есть не что иное, как обратное расстояние $\frac{1}{r}$ для второй планеты, а в § 231 было получено разложение для $\frac{1}{r}$.

Предположим теперь, что вместо переменных § 30 мы пользуемся переменными § 26 или 44. Тогда нужно получить разложение дополнительной части возмущающей функции, которая, как мы видели в § 213, может иметь одну из трех следующих форм:

$$\frac{m_1 m_4}{BC^3}\sum x_1' x_4', \qquad \frac{m_1 m_4}{AC^3}\sum x_1' x_4', \qquad \frac{1}{m_7}\sum y_1' y_4'.$$

Вернемся к формуле (2) и разложим обе части по степеням $h$, пренебрегая членами с $h^2$ и следующими. Замечая, что с переменными § 26 и 44 мы имеем $BC^2 = \sum x_4'^2$, а не $BD^2 = \sum x_4'^2$, получим

$$\frac{1}{BC} + h\,\frac{\sum x_1' x_4'}{BC^3} = f(0,\ a_2,\ \ldots) + h a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1},$$

откуда выводим

$$\frac{\sum x_1' x_4'}{BC^3} = a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} \tag{3}$$

$\left(\text{в производной } \frac{\partial f}{\partial a_1}\right.$ после дифференцирования нужно положить $\left. a_1 = 0 \right)$.

Аналогично найдем

$$\frac{\sum x_1' x_4'}{AC^3} = a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} \tag{3'}$$

$\left(\text{и здесь в производной } \frac{\partial f}{\partial a_2}\right.$ после дифференцирования нужно положить $\left. a_2 = 0 \right)$.

239. Остается разложить выражение

$$\sum y_1' y_4'.$$

Чтобы привести это выражение к функции $f(a_1, a_2, \ldots)$, достаточно выразить его через выражения

$$\frac{\sum x_1' x_4'}{BC^3}, \qquad \frac{\sum x_1' x_4'}{AC^3},$$

которые связаны с $f$ соотношениями (3) и (3′).

С этой целью установим связь тех и других с функцией

$$\Psi = \sum x_1' x_4'.$$

Уравнения кеплеровского движения дают нам

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{M x_1}{r^3},$$

где $M$ — центральная притягивающая масса, $r$ — радиус-вектор, или

$$n^2 \frac{d^2 x_1}{dl^2} = -\frac{M x_1}{r^3},$$

где $n$ — среднее движение, а $l$ — средняя аномалия.

Мы можем применить эту формулу к нашей второй фиктивной планете, так как согласно определению оскулирующих элементов соотношения между координатами планеты и оскулирующими элементами такие же, как и в кеплеровском движении.

Итак, мы должны заменить

$$x_1, \ r, \ l, \ n^2, \ M$$

на

$$x_4', \; BC, \; l_2, \; n_2^2 = \frac{M}{a_2^3}, \; M,$$

откуда

$$\frac{d^2 x_4'}{dl_2^2} = -\frac{a_2^3 x_4'}{BC^3}.$$

Аналогичные уравнения получатся и для координат $x_5'$ и $x_6'$. Умножая эти уравнения соответственно на $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ и складывая, получим

$$\sum x_1' \frac{d^2 x_4'}{dl_2^2} = -a_2^3 \frac{\Sigma x_1' x_4'}{BC^3},$$

или, учитывая формулу (3) и вспоминая, что $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ не зависят от $l_2$, а только от оскулирующих элементов первой планеты, получаем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial l_2^2} = -a_2^3 a_1 \frac{\partial f}{\partial q_1}. \tag{4}$$

Точно так же найдем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial l_1^2} = -a_1^3 a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2}. \tag{4'}$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\sum y_1' y_4'.$$

Это выражение появляется, когда мы пользуемся переменными § 26. В этом случае массы фиктивных планет $m_1'$ и $m_4'$ принимают значения

$$m_1' = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \quad m_4' = \frac{m_4 m_7}{m_1 + m_7}$$

(см. § 43). Поэтому в кеплеровском движении будем иметь

$$y_1' = m_1' \frac{dx_1'}{dt}, \quad y_4' = m_4' \frac{dx_4'}{dt} \tag{5}$$

или

$$y_1' = m_1' n_1 \frac{dx_1'}{dl_1}, \quad y_4' = m_4' n_2 \frac{dx_4'}{dl_2}, \tag{6}$$

где $n_1$ и $n_2$ — средние движения. Формулы (5) не имеют места в возмущенном движении, но формулы (6) остаются верными, так как они выражают зависимость между $x'$, $y'$ и оскулирующими элементами, а эти зависимости одинаковы и в возмущенном и в кеплеровском движении, в соответствии с определением оскулирующих элементов.

Следовательно, будем иметь

$$\sum y_1' y_4' = m_1' m_4' n_1 n_2 \sum \frac{dx_1'}{dl_1} \cdot \frac{dx_4'}{dl_2} = m_1' m_4' n_1 n_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial l_1 \partial l_2}. \tag{7}$$

Таким образом, $\Sigma y_1' y_4'$ связана с функцией $\Psi$ и отсюда с функцией $f$.

**240.** Рассмотрим теперь какую-нибудь периодическую функцию

$$F(u, u')$$

от двух эксцентрических аномалий $u$ и $u'$. Она может быть разложена в ряд Фурье вида

$$\sum B_{pp'} E^{i(pu+p'u')}, \tag{8}$$

где $p$ и $p'$ — целые числа, положительные или отрицательные, но ее можно также разложить в ряд Фурье по средним аномалиям $l$ и $l'$ в виде

$$\sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')}. \tag{9}$$

Выведем теперь соотношения между коэффициентами двух рядов (8) и (9). Эти коэффициенты выражаются определенными интегралами

$$4\pi^2 B_{pp'} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F \cdot E^{-i(pu+p'u')}\, du\, du' \tag{10}$$

и

$$4\pi^2 A_{mm'} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F \cdot E^{-i(ml+m'l')}\, dl\, dl'. \tag{11}$$

Преобразуем формулу (11) путем двукратного интегрирования по частям. Мы можем положить

$$E^{-i(ml+m'l')} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial l\, \partial l'},$$

где

$$\Phi = \frac{-1}{mm'} E^{-i(ml+m'l')}.$$

Тогда интегрирование по частям по переменным $u$ и $l$ дает

$$\int\int F \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial l\, \partial l'}\, dl\, dl' = -\int\int \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \Phi}{\partial l'}\, du\, dl'.$$

Последующее интегрирование по частям по переменным $u'$ и $l'$ дает

$$\int\int F \frac{\partial^2 \Phi}{\partial l\, \partial l'}\, dl\, dl' = \int\int \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial u'} \Phi\, du\, du'.$$

Следовательно,

$$-4\pi^2 A_{mm'} \cdot mm' = \int\int \frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial u'} E^{-i(ml+m'l')}\, du\, du'.$$

Но из разложения (8) функции $F$ можно вывести, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\, \partial u'} = -\sum pp' B_{pp'} E^{i(pu+p'u')},$$

откуда, имея в виду уравнение Кеплера, получим

$$4\pi^2 mm' A_{mm'} = \sum pp' B_{pp'} \int\int E^{iA} E^{\Omega}\, du\, du',$$

где

$$A = (p-m)\,u + (p'-m')\,u',$$
$$\Omega = i\,(me \sin u + m'e' \sin u')$$

и где $e$ и $e'$, само собой разумеется, обозначают два эксцентриситета.

Коэффициент $pp'B_{pp'}$ есть двойной интеграл, который можно представить в виде произведения двух обыкновенных интегралов

$$\int E^{i(p-m)\,u} E^{ime \sin u}\, du \int E^{i(p'-m')\,u'} E^{im'e' \sin u'}\, du',$$

что равно

$$4\pi^2 J_{m-p}(me)\, J_{m'-p'}(m'e').$$

Итак, мы имеем формулу

$$A_{mm'} = \sum \frac{pp'}{mm'} B_{pp'} J_{m-p}(me) \cdot J_{m'-p'}(m'e'), \tag{12}$$

аналогичную формуле (17) из предыдущей главы. Эта формула получена Белло.

**241.** Выведенная формула не имеет смысла, когда $m$ или $m'$ суть нули. Но в этом случае ее можно преобразовать в другую, аналогичную формуле (18) предыдущей главы.

Действительно, имеем

$$F(u,\ u') = \sum B_{pp'} E^{i(pu+p'u')}$$

и, с другой стороны,

$$E^{ipu} = \sum \frac{p}{m} J_{m-p}(me)\, E^{i\,nl}.$$

В последней формуле при $m = 0$ коэффициент $\frac{p}{m} J_{m-p}$ нужно заменить на 1 для $p = 0$, на $-\frac{e}{2}$ для $p = \pm 1$, на 0 во всех других случаях. Точно так же имеем

$$E^{ip'u'} = \sum \frac{p'}{u'} J_{m'-p'}(m'e') E^{im'l'}$$

с тем же условием для случая $m' = 0$.

Заменяя $E^{ipu}$ и $E^{ip'u'}$ их разложениями в разложении $F(u, u')$, мы выводим

$$F(u, u') = \sum \frac{pp'}{mm'} B_{pp'} J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e') E^{i(ml+m'l')}.$$

Таким образом, мы пришли к формуле (12) для случая, когда $m$ и $m'$ отличны от нуля. Эту формулу можно записать в виде символического произведения

$$A_{mm'} = \left[\sum \frac{p}{m} J_{m-p}(me) B_p\right]\left[\sum \frac{p'}{m'} J_{m'-p'}(m'e') B'_{p'}\right],$$

если условиться заменить символическое произведение $B_p B'_{p'}$ на $B_{pp'}$. Аналогично находятся в виде символических произведений

$$\left.\begin{aligned} A_{0,m'} &= \left[B_0 - \frac{e}{2}(B_1 + B_{-1})\right]\left(\sum \frac{p'}{m'} J_{m'-p'} B'_{p'}\right), \\ A_{m,0} &= \left(\sum \frac{p}{m} J_{m-p} B_p\right)\left[B'_0 - \frac{e'}{2}(B'_1 + B'_{-1})\right], \\ A_{0,0} &= \left[B_0 - \frac{e}{2}(B_1 + B_{-1})\right]\left[B'_0 - \frac{e'}{2}(B'_1 + B'_{-1})\right]. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Соотношения (13) аналогичны формуле (18) предыдущей главы.

**242.** Допустим, например, что нужно разложить главную часть возмущающей функции, т. е. функцию

$$\frac{1}{\sqrt{\Sigma(x'_1 - x'_4)^2}} = \frac{1}{\Delta},$$

приведенную в § 238. Заметим, что

$$\Delta^2 = \sum (x'_1 - x'_4)^2$$

представляется в виде многочлена второй степени относительно величин

$$E^{iu},\ E^{-iu},\ E^{iu'},\ E^{-iu'},$$

где $u$, $u'$ — эксцентрические аномалии первой и второй планет. В самом деле, координаты $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ являются многочленами первой степени относительно $E^{iu}$, $E^{-iu}$, а $x'_4$, $x'_5$, $x'_6$ — многочленами первой степени относительно $E^{iu'}$, $E^{-iu'}$.

Рассматривая более внимательно, мы увидим, что этот многочлен содержит только известный член и члены с

$$E^{\pm 2iu},\ E^{\pm iu},\ E^{\pm 2iu'},\ E^{\pm iu'},\ E^{i(\pm u \pm u')},$$

т. е. всего тринадцать членов. В дальнейшем мы изучим этот многочлен более подробно, а сейчас заметим, что если положить

$$x=E^{iu}, \quad y=E^{iu'},$$

то выражение $x^2y^2\Delta^2$ сделается целым многочленом шестой степени относительно $x$ и $y$, который можем обозначить через $R(x, y)$, так что

$$x^2y^2\Delta^2=R(x, y).$$

Если положить $F=\frac{1}{\Delta}$, то формула (10) принимает вид

$$-4\pi^2B_{pp'}=\int\int\frac{dx\,dy}{\Delta\cdot x^{p+1}y^{p'+1}}=\int\int\frac{dx\,dy}{x^py^{p'}\sqrt{R(x, y)}}. \tag{14}$$

Отсюда видно, что $B_{pp'}$ выражается двойным определенным интегралом, зависящим от $\sqrt{R(x, y)}$. Значения, которые должны принимать $x$ и $y$, являются мнимыми, поэтому эти переменные должны меняться вдоль окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

Можно выразить также и коэффициент $A_{mm'}$ с помощью двойного интеграла, но этот интеграл значительно сложнее. Действительно, мы нашли

$$-4\pi^2mm'A_{mm'}=\int\int\frac{\partial^2F}{\partial u\,\partial u'}E^{-i(ml+m'l')}du\,du'.$$

Двойной интеграл можно написать в виде

$$\int\int\frac{\partial^2\frac{1}{\Delta}}{\partial x\,\partial y}\cdot E^{\Omega}\cdot\frac{dx\,dy}{x^my^n},$$

где $\Omega$ имеет вид

$$\Omega=\frac{1}{2}\left[me\left(x-\frac{1}{x}\right)+m'e'\left(y-\frac{1}{y}\right)\right].$$

Вторая производная $\dfrac{\partial^2\frac{1}{\Delta}}{\partial x\,\partial y}$ будет равна рациональной функции от $x$ и $y$, деленной на $\sqrt{R(x, y)}$, но лучше прямо исходить из формулы (11), замечая, что

$$E^{-i(ml+m'l')}=x^{-m}\cdot y^{-m'}\cdot E^{\Omega},$$

$$dl=\frac{dx}{ix}\left[1-\frac{e}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right],\quad dl'=\frac{dy}{iy}\left[1-\frac{e'}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)\right].$$

Таким образом, найдем

$$-4\pi^2A_{mm'}=\int\int\frac{Q\cdot E^{\Omega}dx\,dy}{x^my^{m'}\sqrt{R(x, y)}}, \tag{15}$$

где

$$Q = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right].$$

Интеграл (15) является значительно более сложным, чем интеграл (14), так как подынтегральная функция более не является алгебраической, а содержит показательную функцию $E^{\Omega}$. Отсюда понятно, почему разложение по средним аномалиям намного сложнее разложения по эксцентрическим аномалиям.

**243.** Имеются два частных случая, которые в дальнейшем мы рассмотрим более подробно, а сейчас скажем о них несколько слов.

Это прежде всего случай, когда эксцентриситеты равны нулю. В этом случае исчезает различие между средними и эксцентрическими аномалиями и $\Omega = 0$. Более того, так как начало отсчета этих аномалий произвольно, то мы можем их отсчитывать от линии узлов. Тогда найдем

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos\sigma,$$

где $\sigma$ означает угол между двумя радиусами-векторами, или

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos^2\frac{J}{2}\cos(u - u') - 2aa' \sin^2\frac{J}{2}\cos(u + u'),$$

или, наконец,

$$R(x, y) = xy\left[(a^2 + a'^2)\,xy - aa' \cos^2\frac{J}{2}(x + y) - aa' \sin^2\frac{J}{2}(x^2y^2 + 1)\right]. \qquad (16)$$

**244.** Второй случай, это когда взаимная наклонность двух орбит равна нулю. Здесь можно выбрать оси координат таким образом, что

$$x'_3 = x'_6 = 0,$$

откуда

$$\Delta^2 = [(x'_1 - x'_4) + i(x'_2 - x'_5)]\,[(x'_1 - x'_4) - i(x'_2 - x'_5)].$$

Таким образом, видим, что $R(x, y)$ является произведением двух целых многочленов третьей степени,

$$R(x, y) = R_1(x, y) \cdot R_2(x, y).$$

Первый из этих двух многочленов содержит только члены с

$$x^2y, \ xy^2, \ xy, \ x, \ y.$$

Две кривые третьего порядка $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ проходят через начало координат и имеют общие точки на бесконечности. Кроме того, они пересекаются в четырех точках, смысл которых легко установить.

Каждой точке $M$ первой орбиты соответствует одно значение $u$ и, следовательно, одно значение $x$. Каждой точке $M'$ второй орбиты соответствует одно значение $u'$ и, следовательно, одно значение $y$. Уравнение $R_1=0$ выражает, что прямая $MM'$ имеет угловой коэффициент, равный $i$, а уравнение $R_2=0$ означает, что прямая $MM'$ имеет угловой коэффициент $-i$.

Четыре пересечения двух кривых третьего порядка $R_1 = R_2 = 0$ соответствуют четырем пересечениям (вообще мнимым) двух эллиптических орбит.

Если допустить, что $y$, а следовательно и $M'$, известны, то уравнение $R_1 = 0$ является уравнением второй степени относительно $x$. Это объясняется тем, что прямая с угловым коэффициентом $i$, проходящая через $M'$, пересекает эллиптическую орбиту в двух точках $M$ и $M_1$. Точки $M$ и $M_1$ совпадают, так что уравнение $R_1 = 0$ имеет два равных корня, и поэтому $\frac{\partial R_1}{\partial x} = 0$, если прямая $MM'$ касается первой эллиптической орбиты. Эта касательная к эллипсу, имея угловой коэффициент $+i$, проходит через один из фокусов второй эллиптической орбиты.

Аналогично, если прямая $MM'$ проходит через один из двух фокусов второй эллиптической орбиты, то $\frac{\partial R_1}{\partial y} = 0$. Но два эллипса имеют общий фокус, который является началом координат. Итак, для соответствующей прямой $MM'$ имеем равенства

$$\frac{\partial R_1}{\partial x}=\frac{\partial R_1}{\partial y}=0,$$

которые показывают ($x$ и $y$ рассматриваются как прямоугольные координаты точки на плоскости), что кривая третьего порядка $R_1 = 0$ (то же самое и кривая $R_2 = 0$) имеет двойную точку. Для $R_1 = 0$ эта двойная точка имеет координаты

$$x=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},\qquad y=\frac{e'}{1+\sqrt{1-e'^2}},$$

а для $R_2 = 0$

$$x=\frac{e}{1-\sqrt{1-e^2}},\qquad y=\frac{e'}{1-\sqrt{1-e'^2}}.$$

**245.** В § 238 мы видели, что разложение дополнительной части возмущающей функции легко выводится из разложения главной ее части. Но первое вычисление значительно проще второго, и поэтому предпочтительнее получить ее разложение непосредственно.

В § 239 мы видели, что если положить

$$\Psi=\sum x_1'x_4',$$

то три формы дополнительной части возмущающей функции, к которым она приводится, если применять переменные § 26 и 44, соответственно пропорциональны трем производным второго порядка функции $\Psi$.

Найдем разложение функции $\Psi$ и прежде всего изучим разложение этой функции по степеням $E^{ipu+ip'u'}$. Из него будет легко найти разложение по степеням $E^{iml+im'l'}$ посредством соотношения (12). Координаты $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ являются многочленами первой степени относительно $E^{\pm iu}$, а координаты $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$ — многочленами первой степени относительно $E^{\pm iu}$, следовательно, $\Psi$ является многочленом первой степени относительно $E^{\pm iu}$, с одной стороны, и многочленом первой степени относительно $E^{\pm iu'}$, с другой стороны, так что разложение функции $\Psi$ по степеням $E^{ipu+ip'u'}$ содержит лишь девять членов.

Отсюда следует, что если к разложению функции $\Psi$ применяется равенство (12), то каждый коэффициент $A_{mm}$ будет зависеть только от конечного числа функций Бесселя. Поэтому можно, пользуясь рекуррентными соотношениями между функциями Бесселя, выразить этот коэффициент только через функции

$$J_m(me), \quad J'_m(me), \quad J_{m'}(m'e'), \quad J'_{m'}(m'e').$$

**246.** Ганзен взял за независимую переменную эксцентрическую аномалию $u$ одной из планет. Допустим в этом случае, что возмущающая функция, или одна из ее производных, или одна из ее составляющих разложена в виде

$$F = \sum B_{pp'} E^{i(pu+p'u')}.$$

Имеем

$$l = u - e\sin u,$$
$$l' = u' - e'\sin u'.$$

С другой стороны, все члены возмущающей функции содержат в качестве множителя возмущающую массу, поэтому, пренебрегая квадратами этой массы, мы можем применять формулы кеплеровского движения. Тогда $l$ и $l'$ являются линейными функциями времени и, следовательно, связаны друг с другом линейным соотношением:

$$l' = kl + \varepsilon,$$

где $k$ — отношение средних движений, $\varepsilon$ — постоянная. Далее имеем уравнение

$$l' = ku + \varepsilon - ke\sin u,$$

полагая в котором

$$u_1 = ku + \varepsilon,$$
$$l' = u_1 - ke\sin u,$$

получим

$$u_1 = u' - e' \sin u' + ke \sin u.$$

Будем разлагать $F$ в форме

$$F = \sum A_{mm'} E^{i(mu+m'u'_1)},$$

так что

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F \cdot E^{-i(mu+m'u_1)}\, du\, du_1.$$

Интегрируя по частям по $u_1$ и $u'$, т. е. считая $u$ постоянным, получим

$$4\pi^2 A_{mm'} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{i}{m'} \cdot \frac{\partial F}{\partial u'} E^{-i(mu+m'u_1)}\, du\, du_1.$$

Но

$$\frac{\partial F}{\partial u'} = i \sum p' B_{pp'} \cdot E^{i(pu+p'u')},$$

откуда

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum \frac{p'}{m'} B_{pp'} E^{i(pu+p'u')} E^{-i(mu+m'u_1)}\, du\, du'.$$

Так как произведение показательных функций под знаком интеграла можно написать в виде

$$E^{i(p-m)u} E^{-ikm'e \sin u} E^{i(p'-m')u'} E^{im'e' \sin u'},$$

то окончательно находим

$$A_{mm'} = \sum \frac{p'}{m'} B_{pp'} J_{m-p}(-km'e) J_{m'-p'}(m'e'). \tag{16'}$$

**247.** Гюльден искал разложение возмущающей функции не по средним или эксцентрическим аномалиям, а по истинным аномалиям. Пусть $v$ и $v'$ — две истинные аномалии, и будем искать разложение $F$ в виде

$$F = \sum C_{mm'} E^{i(mv+m'v')}.$$

Тогда коэффициенты выражаются формулой

$$-4\pi^2 C_{mm'} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F \cdot E^{-i(mv+m'v')}\, dv\, dv'.$$

Если положить $E^{iv} = x$, $E^{iv'} = y$, то этот двойной интеграл преобразуется в другой, под знаком которого будет рациональная функция величин $x$, $y$, $\Delta$, а величина $\Delta$ является квадратным корнем из рациональной функции $x$ и $y$. То же самое мы имели в случае разложения по эксцентрическим аномалиям, так что оба разложения получаются с одинаковой степенью трудности. Впрочем, можно вывести формулы, аналогичные формулам (12), которые давали бы возможность перейти от одного разложения к другому.

Далее, можно было бы выразить все в виде функции, в которой роль независимой переменной играла бы истинная аномалия одной из планет. Для этого нужно было бы выполнить вычисления, аналогичные вычислениям предыдущего параграфа.

Величины $l$ и $v$ связаны соотношением $l = v + \varphi(v, e)$, где $\varphi(v, e)$—периодическая функция $v$. Аналогично

$$l' = v' + \varphi(v', e')$$

и

$$l' = kl + \varepsilon.$$

Полагая

$$v_1 = kv + \varepsilon,$$

получим

$$v_1 = v' + \varphi(v', e') - k\varphi(v, e). \tag{17}$$

Далее, с помощью уравнения (17) надо разложить функцию

$$E^{i(mv + m'v')}$$

в ряд по степеням

$$E^{i(\mu v + \mu' v_1)}.$$

Аналогия с вычислениями предыдущего параграфа теперь очевидна.

# КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛАПЛАСА

**248.** Начнем с того случая, в котором эксцентриситеты обеих орбит так же, как и взаимная наклонность, равны нулю. Выражение для $\Delta^2$ принимает тогда вид (см. § 243)

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(l - l').$$

Требуется разложить в ряд $\frac{1}{\Delta}$, но учитывая соображения, приведенные в § 215, мы рассмотрим разложение $\Delta^{-2s}$, где $2s$—произвольное целое нечетное число *).

Заметим прежде всего, что $\Delta^2$ есть однородная функция второй степени относительно $a$ и $a'$ и, с другой стороны, зависит от углов $l$ и $l'$ только через посредство соотношения

$$\cos(l - l') = \cos(u - u') = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

(если эксцентриситеты равны нулю, то средние аномалии не отличаются от эксцентрических).

Положим теперь $\alpha = \frac{a}{a'}$, $z = \frac{x}{y}$, так что

$$\Delta^{-2s} = (a')^{-2s}\left[1 + \alpha^2 - \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{-s}.$$

Мы всегда можем считать, что $\alpha < 1$, так как для этого достаточно предположить, что $a$ означает меньшую из двух больших полуосей.

Итак, мы должны разложить выражение

$$\left[1 + \alpha^2 - \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{-s} = \left[(1 - \alpha z)\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)\right]^{-s}$$

по целым положительным и отрицательным степеням $z$ в виде

$$\sum b_s^{(k)} z^k = \sum b_s^{(k)} E^{ik(l-l')}.$$

Коэффициенты $b_s^{(k)}$ называются *коэффициентами Лапласа.*

---

*) Таким образом, $2s = 2k + 1$, где $k$—целое число. (*Прим. перев.*)

**249.** Если мы положим

$$F=(1-\alpha z)\left(1-\frac{\alpha}{z}\right),$$

то увидим, что $F$, а следовательно и $F^{-s}$, не меняются при замене $z$ на $\frac{1}{z}$. Но такая замена приводит к замене $k$ на $-k$, а поэтому

$$b_s^{(k)}=b_s^{(-k)}. \tag{1}$$

С другой стороны, замена $k$ на $-k$ означает замену $i$ на $-i$ и предыдущее равенство показывает, что коэффициенты Лапласа не изменяются при этой замене. Следовательно, эти коэффициенты вещественны, и мы можем написать

$$F^{-s}=b_s^0+2\sum b_s^{(k)}\cos k(l-l'). \tag{2}$$

Между коэффициентами Лапласа существуют некоторые рекуррентные соотношения, которые легко выводятся из тождества

$$F^{-s}=\sum b_s^{(k)}z^k. \tag{3}$$

Мы имеем тождественно

$$s\frac{dF}{dz}\cdot F^{-s}+\frac{dF^{-s}}{dz}\cdot F=0 \tag{4}$$

или

$$s\alpha\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\sum b_s^{(k)}z^k+\sum kb_s^{(k)}z^{k-1}\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]=0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициент при $z^{k-1}$, получим

$$0=s\alpha\left(b_s^{(k+1)}-b_s^{(k-1)}\right)+(1+\alpha^2)kb_s^{(k)}-$$
$$-\alpha\left[(k+1)b_s^{(k+1)}+(k-1)b_s^{(k-1)}\right].$$

Отсюда получаем рекуррентное соотношение

$$\alpha b_s^{(k+1)}(s-k-1)+\alpha b_s^{(k-1)}(-s-k+1)+(1+\alpha^2)kb_s^{(k)}=0. \tag{5}$$

Далее имеем

$$F^{-s}=\left[1-\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)+\alpha^2\right]F^{-s-1}$$

или

$$\sum b_s^{(k)}z^k=\left[1-\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)+\alpha^2\right]\sum b_{s+1}^{(k)}z^k.$$

Приравнивая коэффициенты при $z^k$, получаем рекуррентную формулу, которая дает возможность перейти от $b_{s+1}^{(k)}$ к $b_s^{(k)}$:

$$b_s^{(k)}=(1+\alpha^2)b_{s+1}^{(k)}-\alpha\left(b_{s+1}^{(k+1)}+b_{s+1}^{(k-1)}\right). \tag{6}$$

Но предпочтительнее вывести такое рекуррентное соотношение, которое позволяет перейти от $b_s^{(k)}$ к $b_{s+1}^{(k)}$. Для этого мы можем взять два последовательных соотношения (6), дающие нам два уравнения $b_s^{(k)}$, $b_s^{(k+1)}$ и четырьмя неизвестными $b_{s+1}^{(k-1)}$, $b_{s+1}^{(k)}$, $b_{s+1}^{(k+1)}$, $b_{s+1}^{(k+2)}$. С другой стороны, соотношения (5) дадут еще два уравнения между этими четырьмя неизвестными.

Следовательно, мы сможем определить эти четыре неизвестных в зависимости от $b_s^{(k)}$ и $b_s^{(k+1)}$.

Чтобы получить непосредственно тот же результат, будем исходить из тождества

$$zF\cdot P+z^2\frac{dF}{dz}Q=1, \tag{7}$$

где $P$ и $Q$ суть многочлены первой степени; его легко можно установить и определить многочлены $P$ и $Q$. Далее заметим, что коэффициенты ряда (3) могут быть выражены с помощью формулы Фурье

$$2i\pi b_s^{(k)}=\int\limits_{|z|=1}F^{-s}z^{k-1}\,dz, \tag{8}$$

где интеграл должен быть взят по $l-l'$ от нуля до $2\pi$ и, следовательно, по $z$ вдоль окружности единичного радиуса.

В силу тождества (7) мы можем умножить подынтегральную функцию на левую часть этого тождества, что дает

$$2i\pi b_s^{(k)}=\int F^{1-s}z^k\cdot P\,dz+\int\frac{dF}{dz}F^{-s}z^{k+1}\cdot Q\,dz.$$

Мы можем преобразовать второй интеграл, интегрируя по частям и замечая, что интегрирование производится вдоль замкнутого контура, так что проинтегрированная часть исчезает.

Тогда интеграл принимает вид

$$\frac{1}{s-1}\int F^{1-s}\left[(k+1)z^kQ+z^{k+1}\frac{dQ}{dz}\right]dz.$$

Но ясно, что

$$P+\frac{1}{s-1}\left[(k+1)Q+z\frac{dQ}{dz}\right]$$

есть многочлен первой степени относительно $z$. Обозначим его через $\beta z+\gamma$. Тогда наша формула принимает вид

$$2i\pi b_s^{(k)}=\int F^{1-s}(\beta z^{k+1}+\gamma z^k)\,dz,$$

откуда

$$b_s^{(k)}=\beta b_{s-1}^{(k+2)}+\gamma b_{s-1}^{(k+1)}. \tag{8'}$$

Это и есть искомое рекуррентное соотношение.

С помощью рекуррентных соотношений (5), (6) и (8′) вычисление коэффициентов Лапласа приводится к вычислению каких-либо двух из них, например,

$$b_{\frac{1}{2}}^{0}, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)}.$$

**250.** Рассмотрим теперь производную

$$\frac{db_s^{(k)}}{d\alpha}.$$

Дифференцируя формулу (8), получим

$$2i\pi \frac{db_s^{(k)}}{d\alpha} = \frac{1}{s} \int F^{-s-1}\left(z + \frac{1}{z} - 2\alpha\right) z^{k-1}\,dz,$$

откуда

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{db_s^{(k)}}{d\alpha} = b_{s+1}^{(k+1)} + b_{s+1}^{(k-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(k)}, \tag{9}$$

что позволяет выразить производные от $b_s$ через $b_{s+1}$ и, следовательно, через $b_s$.

Поэтому в конечном счете мы можем выразить производную $\frac{db_s^{(k)}}{d\alpha}$ через $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ в виде

$$\frac{db_s^{(k)}}{d\alpha} = P b_{\frac{1}{2}}^{(0)} + Q b_{\frac{1}{2}}^{(1)}, \tag{10}$$

где $P$ и $Q$ суть рациональные функции $\alpha$.

Дифференцируя равенство (10), находим

$$\frac{d^2 b_s^{(k)}}{d\alpha^2} = b_{\frac{1}{2}}^{(0)} \frac{dP}{d\alpha} + b_{\frac{1}{2}}^{(1)} \frac{dQ}{d\alpha} + P \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} + Q \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha},$$

так что вторая производная выражается через $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ и их производные и, следовательно, если еще раз применить формулу (10), то можно выразить $\frac{d^2 b_s^{(k)}}{d\alpha^2}$ только через $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$ и $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$.

Аналогично можно выразить и производные более высокого порядка коэффициента $b_s^{(k)}$.

**251.** Имеем

$$F^{-s}=(1-\alpha z)^{-s}\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)^{-s}.$$

Но формула бинома нам дает

$$(1-\alpha z)^{-s}=1+s\alpha z+\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\alpha^2z^2+\ldots,$$

или, в более общем виде,

$$(1-\alpha z)^{-s}=\sum\frac{\Gamma(s+p)}{\Gamma(s)\cdot\Gamma(p+1)}\alpha^pz^p,$$

где $\Gamma(s)$ представляет эйлеровскую гамма-функцию. Аналогично имеем

$$(1-\alpha z^{-1})^{-s}=\sum\frac{\Gamma(s+q)}{\Gamma(s)\cdot\Gamma(q+1)}\cdot\alpha^qz^{-q}.$$

Перемножая оба разложения, находим

$$F^{-s}=\sum\frac{\Gamma(s+p)\cdot\Gamma(s+q)}{\Gamma^2(s)\,\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q+1)}\alpha^{p+q}z^{p-q}.$$

Коэффициент при $z^k$ в этом разложении равен $b_s^{(k)}$, поэтому

$$b_s^{(k)}=\sum\frac{\Gamma(s+q)\cdot\Gamma(s+q+1)}{\Gamma^2(s)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(q+k+1)}\cdot\alpha^{k+2q}. \tag{11}$$

Формула (11) дает разложение коэффициентов Лапласа по возрастающим степеням $\alpha$. Заметим прежде всего, что $b_s^{(k)}$ делится на $\alpha^k$ и является четной или нечетной функцией $\alpha$ в зависимости от того, четно или нечетно $k$.

Сравним ряд (11) с гипергеометрическим рядом Гаусса, который определяется формулой

$$F(A,B,C,x)=\sum\frac{\Gamma(A+q)\cdot\Gamma(B+q)\,\Gamma(C)}{\Gamma(q+1)\,\Gamma(C+q)\cdot\Gamma(A)\cdot\Gamma(B)}x^q.$$

Сравнение дает

$$b_s^{(k)}=\frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)\cdot\Gamma(k+1)}\alpha^kF(s,\ s+k,\ k+1,\ \alpha^2).$$

**252.** Известно, что гипергеометрический ряд Гаусса удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Таким же свойством должен обладать и $b_s^{(k)}$, что легко проверить. Действительно, мы видим, что отношение общего члена ряда (11) к предыдущему равно

$$\frac{(s+q-1)(s+q+k-1)}{q(q+k)}\alpha^2.$$

Следовательно, если обозначим коэффициент при $\alpha^{k+2q}$ через $C_q$, то будем иметь

$$q(q+k)C_q=(s+q-1)(s+q+k-1)C_{q-1},$$

откуда

$$\sum q(q+k)C_q\alpha^{2q+k}=\sum(s+q-1)(s+q+k-1)C_{q-1}\alpha^{2q+k}. \quad (12)$$

Заметим теперь, что

$$b=\sum C_q\alpha^{2q+k},\quad \alpha\frac{db}{d\alpha}=\sum(2q+k)C_q\alpha^{2q+k},$$
$$\alpha^2\frac{d^2b}{d\alpha^2}=\sum(2q+k)(2q+k-1)C_q\alpha^{2q+k}$$

и что точно так же

$$\alpha^2 b=\sum C_{q-1}\alpha^{2q+k},\quad \alpha^3\frac{db}{d\alpha}=\sum(2q+k-2)C_{q-1}\alpha^{2q+k},$$
$$\alpha^4\frac{d^2b}{d\alpha^2}=\sum(2q+k-2)(2q+k-3)C_{q-1}\alpha^{2q+k}.$$

Кроме того, заметим, что коэффициенты левой и правой частей равенства (12), т. е. $q(q+k)$, $(s+q-1)(s+q+k-1)$ являются многочленами второй степени относительно $q$ и, следовательно, могут быть выражены линейным образом; первый — через $1, 2q+k, (2q+k)(2k+k-1)$ и второй — через $1, 2q+k-2, (2q+k-2)(2q+k-3)$ с коэффициентами, зависящими только от $k$ и $s$; поэтому существует линейное соотношение между шестью величинами

$$b,\ \alpha\frac{db}{d\alpha},\ \alpha^2\frac{d^2b}{d\alpha^2},\ \alpha^2 b,\ \alpha^3\frac{db}{d\alpha},\ \alpha^4\frac{d^2b}{d\alpha^2},$$

коэффициенты которого зависят только от $k$ и $s$. Это соотношение и является искомым дифференциальным уравнением для $b_s^{(k)}$.

Отбрасывая индексы $s$ и $k$ у $b_s^{(k)}$, мы напишем это уравнение в виде

$$(\alpha^2-\alpha^4)\frac{d^2b}{d\alpha^2}+[\alpha-(4s+1)\alpha^3]\frac{db}{d\alpha}-[4s^2\alpha^2+k^2(1-\alpha^2)]b=0. \quad (13)$$

Это уравнение может указать на то, как ведет себя ряд (11) для значений $\alpha$, близких к 1. Действительно, из теории Фукса следует, что это уравнение имеет особенности, только когда коэффициент при $\frac{d^2b}{d\alpha^2}$ обращается в нуль т. е. при

$$\alpha=0,\quad \alpha=\pm1.$$

При $\alpha=0$ корни определяющего уравнения равны $\pm k$, откуда следует, что уравнение допускает частное решение, разложение по степеням $\alpha$ и начинающееся с $\alpha^k$ (это частное решение есть не что иное, как функция $b_s^{(k)}$, которая нас интересует), и что общее решение имеет вид

$$S+hb_s^{(k)}\ln\alpha,$$

где $h$ — произвольная постоянная, а $S$ является рядом, расположенным по целым положительным или отрицательным степеням $\alpha$ и начинающимся членом с $\alpha^{-k}$.

Остаются особые точки $\alpha=\pm 1$. Достаточно рассмотреть особую точку $\alpha=+1$, так как дифференциальное уравнение не меняется, если заменить $\alpha$ на $-\alpha$.

При $\alpha=+1$ корни определяющего уравнения суть 0 и $1-2s$. Это показывает, что помимо частного решения, разложимого по степеням $\alpha-1$, общее решение представляется в виде

$$S+P\ln(\alpha-1),$$

где $P$ и $S$ разложимы по возрастающим степеням $\alpha-1$, причем разложение для $P$ начинается с члена нулевой степени, а разложение для $S$ — с члена степени $1-2s$.

Для $s=\frac{1}{2}$ имеем $1-2s=0$ и функция $S$ не становится бесконечной; второе слагаемое будет преобладающим, так что $b_s^{(k)}$ принимает бесконечно большое значение вместе с $\ln(\alpha-1)$ при $\alpha=1$. При $s=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ $S$ принимает бесконечно большое значение и становится преобладающей, так что $b_s^{(k)}$ тоже делается бесконечным вместе с $(\alpha-1)^{1-2s}$.

Отсюда видно, что ряд (11) сходится при $|\alpha|<1$ и расходится при $|\alpha|>1$. Можно также заметить, что эти результаты вытекают непосредственно из известных свойств гипергеометрического ряда.

253. Было предложено весьма большое число приемов вычисления коэффициентов Лапласа, среди которых лучшим является прием, основанный на применении эллиптических функций.

Известно, что функция Вейерштрасса $\wp(u)$ определяется уравнением

$$[\wp'(u)]^2=4\wp^2(u)-g_2\wp(u)-g_3=4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3),$$

где $e_1$, $e_2$, $e_3$ — три постоянные, связанные соотношениями $e_1+e_2+e_3=0$ и $\wp(0)=\infty$.

Кроме того, известно, что функция Вейерштрасса удовлетворяет условиям

$$\wp(u)=\wp(-u)=\wp(u+2\omega_1)=\wp(u+2\omega_2)=\wp(u+2\omega_3);$$

$$\wp(\omega_1)=e_1,\quad \wp(\omega_2)=e_2,\quad \wp(\omega_3)=e_3.$$

С другой стороны, функция $\zeta(u)$, определяемая равенством $\zeta'(u) = -\wp(u)$, обладает свойствами

$$\zeta(u) = -\zeta(-u), \quad \zeta(u+2\omega_i) = \zeta(u) + 2\eta_i,$$

где

$$\eta_i = \zeta(\omega_i), \quad \eta_1+\eta_2+\eta_3 = 0.$$

Возьмем интеграл

$$b_{\frac{1}{2}}^{(k)} = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^k\,dz}{\sqrt{z(1-\alpha z)(z-\alpha)}}$$

и, в общем случае, еще следующий:

$$b_s^{(k)} = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^{k-1}\,dz}{F^s} = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^{k-1+2s}\,dz}{[z(1-\alpha z)(z-\alpha)]^s}\,.$$

Чтобы привести эти формулы к эллиптическим функциям, мы должны положить

$$z = \wp(u) - e_3, \quad \alpha = e_2 - e_3, \quad \frac{1}{\alpha} = e_1 - e_3, \quad e_1+e_2+e_3 = 0,$$

откуда

$$z(1-\alpha z)(z-\alpha) = -\frac{\alpha}{4}\wp'^2(u),$$

а из этого следует

$$\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^s 2i\pi b_s^{(k)} = \int (\wp - e_3)^{k-1+2s}(\wp')^{1-2s}\,du \tag{14}$$

и, в частности,

$$\pi\sqrt{\alpha}\, b_{\frac{1}{2}}^{(k)} = \int (\wp - e_3)^{k-1+2s}\,du. \tag{15}$$

**254.** Вспомним одно важное свойство двояко-периодических функций, заключающееся в возможности их разложения на простые элементы.

Пусть $F(u)$ — двояко-периодическая функция и пусть $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$ — ее различные полюсы *).

Пусть $a_j$ — один из этих полюсов и пусть его порядок есть $k$. Разложим $F(u)$ по возрастающим степеням $u - a_j$ и пусть сумма

$$\frac{A_k}{(u-a_j)^k} + \frac{A_{k-1}}{(u-a_j)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(u-a_j)^2} + \frac{A_1}{u-a_j}$$

*) Само собой разумеется, что два полюса, отличающиеся только на кратное периодов $2\omega_i$, не считаются различными.

представляет совокупность членов этого разложения, имеющих отрицательные показатели. Положим

$$\Phi_j(u) = A_1\zeta(u-a_j) - \frac{A_2}{1!}\zeta'(u-a_j) + \\ + \frac{A_3}{2!}\zeta''(u-a_j) - \ldots \pm \frac{A_k}{(k-1)!}\zeta^{(k-1)}(u-a_j),$$

где $\zeta^{(k)}(u)$ означает производную порядка $k$ функции $\zeta(u)$ по $u$.

В этом случае разность $F(u) - \Phi_j(u)$ остается конечной при $u = a_j$, поэтому будем иметь

$$F(u) = \sum \Phi_j(u) + C; \tag{16}$$

$C$ — некоторая постоянная. Формула (16) и представляет разложение функции $F(u)$ на простые элементы.

Вернемся к интегралам (14) и (15), которые должны быть взяты от 0 до $2\omega_1$. Обозначим в них подынтегральную функцию через $F(u)$, разложим ее на простые элементы и проинтегрируем отдельно каждый из этих элементов. При $k \geqslant 2$ интеграл

$$\int_0^{2\omega_1} \zeta^{(k)}(u-a_j)\,du$$

обращается в нуль. Действительно, неопределенный интеграл есть

$$\zeta^{(k-1)}(u-a_j),$$

а последнее выражение пропорционально либо функции $\wp(u-a_j)$ при $k = 2$, либо одной из ее производных (при $k > 2$). Во всех этих случаях мы получим двояко-периодическую функцию, которая при верхнем и нижнем пределах интегрирования принимает одно и то же значение. Следовательно, определенный интеграл есть нуль.

Если $k = 1$, то получаем

$$\int_0^{2\omega_1} \zeta'(u-a_j)\,du = \zeta(u-a_j)\Big|_0^{2\omega_1} = \zeta(2\omega_1 - a_j) - \zeta(-a_j) = 2\eta_1.$$

Если $k = 0$, то будем иметь

$$\int \zeta(u-a_j)\,du = \ln\sigma(u-a_j)\ ^{*})$$

и определенный интеграл равен

$$\ln\frac{\sigma(2\omega_1 - a_j)}{\sigma(-a_j)} = i\pi + 2\eta_1(\omega_1 - a_j). \tag{17}$$

*) $\sigma(u)$—эллиптическая функция Якоби. (*Прим. перев.*)

Впрочем, в этой главе формула (17) не будет иметь применения. Наконец, постоянная $C$ дает

$$\int C\,du = 2C\omega_1.$$

В нашем случае, т. е. при рассмотрении интегралов (14) и (15), функция $F(u)$ может обратиться в бесконечность только вместе с $\wp(u)$ или $\wp'(u)$, т. е. при

$$u = 0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3.$$

Добавим, что при $s = \frac{1}{2}$ подынтегральная функция в интеграле (15) обращается в бесконечность только при $u = 0$.

Более того, показатель $1 - 2s$ является четным и так как $\wp'^2(u)$ является рациональной функцией $\wp(u)$, то такой же будет и функция $F(u)$. Следовательно, $F(u)$ является четной функцией от $u$, так же как и от $u - \omega_i$:

$$F(u) = F(-u), \quad F(u) = F(2\omega_i - u).$$

Отсюда вытекает, что разложение функции $F(u)$ по возрастающим степеням $u$ или $u - \omega_i$ содержит только члены четной степени. Оно не содержит члена степени $-1$ [который мог бы дать простой элемент в $\zeta(u)$ или $\zeta(u - \omega_i)$], что и является причиной неприменимости формулы (17). Мы не должны также беспокоиться и о членах степени $-4$, $-6$, ..., так как мы видели, что после интегрирования соответствующие члены обращаются в нуль. Поэтому для нашего интеграла находим соотношение

$$2i\pi\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^s b_s^{(k)} = 2C\omega_1 - 2\eta_1 \sum A_2, \tag{18}$$

где $\sum A_2$ — сумма коэффициентов членов степени $-2$ в разложениях относительно четырех полюсов $0$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$.

255. Коэффициенты $C$ и $A_2$ являются рациональными функциями $\alpha$. Действительно, коэффициенты разложения функции $\wp(u)$ или $\wp'(u)$ по возрастающим степеням $u$ или $u - \omega_i$ являются рациональными функциями величин $e_1$, $e_2$, $e_3$ и, следовательно, рациональными функциями $\alpha$. То же самое можно сказать и о разложении функции

$$F(u) = (\wp - e_3)^{k-1+2s}(\wp')^{1-2s}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты $A_2$ — рациональные функции $\alpha$. Рассмотрим теперь $C$. Заметим, что $F(u)$ не только может обратиться в бесконечность только при $u = 0$, $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, но и в нуль может обратиться также только при одном из этих четырех значений. Отсюда вытекает, что $F(u)$ не может иметь четыре полюса, а только часть из них, что, впрочем, легко проверить. Для тех значений $u = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, для которых функция не обращается в бесконечность, она обращается в нуль, так что будем иметь

$$0 = C + \sum (-1)^{k-1} \frac{A_k}{(k-1)!} \zeta^{(k-1)}(u-\omega_i) \tag{19}$$

при $u = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ и при $\omega_i = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Но $u$ не может равняться $\omega_i$, так как $u$ принимает одно из тех значений, для которых $F(u)$ обращается в нуль, а $\omega_i$ принимает одно из тех значений, для которых $F(u)$ бесконечна. Следовательно,

$$u - \omega_i = \omega_1, \ \omega_2 \text{ или } \omega_3.$$

Но $A_k$ зависит рациональным образом от $\alpha$. То же самое имеет место и для $\zeta^{(k)}(\omega_1), \zeta^{(k)}(\omega_2), \zeta^{(k)}(\omega_3)$, которые являются производными функции $\wp(u)$ при $u = \omega_1, \omega_2$ или $\omega_3$, а мы помним, что эти производные являются рациональными функциями величин $e_1, e_2, e_3$ и, следовательно, $\alpha$. Равенство (19), следовательно, указывает на то, что $C$ является рациональной функцией $\alpha$.

В частности, $F(u) = 1$ при $s = \frac{1}{2}$, $k = 0$, откуда

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{2\omega_1}{\pi \sqrt{\alpha}}.$$

При $s = \frac{1}{2}$, $k = 1$

$$F(u) = \wp(u) - e_3 = -e_3 - \zeta'(u),$$

откуда

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{-2\eta_1 + \frac{2}{3}\omega_1\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}{\pi \sqrt{\alpha}}.$$

Для произвольного коэффициента $b_s^{(k)}$ также находим

$$b_s^{(k)} = \frac{P\eta_1 + Q\omega_1}{\pi \sqrt{\alpha}},$$

где $P$ и $Q$ — рациональные функции $\alpha$. С помощью рекуррентных соотношений из § 249 эти рациональные функции легко определяются.

256. Осталось вычислить $\omega_1$ и $\eta_1$, чтобы определить $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$ и $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$. Для этого можно обратиться к руководству по эллиптическим функциям Вейерштрасса, исправленному Шварцем и переведенному на французский язык Падэ (Paris, Gauthier — Villars, 1894). Нужно различать два случая.

Прежде всего рассмотрим случай

$$e_2 - e_3 < e_1 - e_2, \quad \text{т. е.} \quad \alpha < \frac{1}{\alpha} - \alpha, \quad \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Положим

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - \alpha^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - \alpha^2}}$$

и тогда, полагая

$$h = E^{\frac{\pi\omega_3 \cdot i}{\omega_1}}$$

(у Якоби эта величина обозначается буквой $q$), будем иметь

$$l = \frac{2h + 2h^9 + \ldots}{1 + 2h^4 + 2h^{16} + \ldots},$$

откуда

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \ldots \tag{20}$$

Вычислив $h$ по формуле (20), находим далее

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\alpha b_{\frac{1}{2}}^{(0)}} &= \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\alpha} = 2\left(h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + h^{\frac{25}{4}} + \ldots\right), \\ \sqrt{b_{\frac{1}{2}}^{(0)}} &= \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \ldots, \\ \sqrt{(1-\alpha^2)\, b_{\frac{1}{2}}^{(0)}} &= \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha} - \alpha} = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Формулы (21) называются формулами Шварца, но мы будем пользоваться для вычисления $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$ другой формулой Шварца,

$$\sqrt{b_{\frac{1}{2}}^{(0)}} = \frac{2}{1 + \sqrt[4]{1 - \alpha^2}}\left(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \ldots\right), \tag{22}$$

и для вычисления $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ формулой

$$\frac{12\eta_1\omega_1}{\pi^2} = \frac{1 - 3^3h^2 + 5^3h^6 - \ldots}{1 - 3h^2 + 5h^6 - \ldots}, \tag{23}$$

которая также приведена в руководстве Шварца.

Рассмотрим второй случай, $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пользуясь формулой (18) и следующими из руководства Шварца и полагая

$$l_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}-\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}} = \frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}, \quad h_1 = E^{-\frac{\omega_1 i\pi}{\omega_3}},$$

найдем формулу

$$h_1 = \frac{l_1}{2} + 2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5 + \ldots, \tag{20'}$$

аналогичную формуле (20).

Далее будем иметь

$$\sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}} = \frac{2}{\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}}+\sqrt[4]{\alpha}}\,(1+2h_1^4+\ldots), \tag{22'}$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{2\omega_1}{\pi\sqrt{\alpha}} = \left(\frac{\omega_3}{\pi i}\right)\left(\ln\frac{1}{h_1}\right)\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{\alpha}}.$$

Что касается $\eta_1$, $\eta_3$ и, следовательно, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, то они выводятся из формул

$$2\eta_3\omega_3 = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1-3^3h_1^2+\ldots}{1-3h_1^2+\ldots}, \tag{23'}$$

$$\eta_1\omega_3 - \omega_1\eta_3 = \pi i. \tag{24}$$

Заметим, что $\omega_3$ и $\eta_3$ — чисто мнимые величины.

**257.** Важно выяснить скорость сходимости разложений. Эта скорость весьма большая. В самом деле, если $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то имеем

$$l < \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}, \quad h < E^{-\pi},$$

а если $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$, то имеем

$$l_1 < \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}, \quad h_1 < E^{-\pi}.$$

Поэтому $l$ или $l_1$ меньше 0,08, тогда как $h$ или $h_1$ меньше 0,04. Ряды, расположенные по степеням $h$, которые являются не чем иным, как рядами Якоби для функции $\Theta$ или аналогичными разложениями, содержат только такие члены, показатели которых являются точными квадратами целых чисел. Поэтому они сходятся очень быстро.

Ряды (20) и (20′) для $h$ и $h_1$ также имеют быструю сходимость, так как в самом неблагоприятном случае последовательные члены соответственно меньше, чем

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{10^6}, \quad \frac{1}{10^{10}}, \quad \frac{1}{10^{15}}.$$

Пренебрегая членом с $2h^4$, т. е. величиной $\frac{1}{200\,000}$, для $\alpha < \frac{1}{2}$ будем иметь

$$\sqrt[4]{b_{\frac{1}{2}}^{(0)}} = \frac{2}{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}},$$

а для $\alpha > \frac{1}{2}$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{2}{\left(\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}} + \sqrt[4]{\alpha}\right)^2} \ln \frac{2+2\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}.$$

## ГЛАВА XVIII

# МНОГОЧЛЕНЫ ТИССЕРАНА

**258.** Рассмотрим теперь случай, в котором эксцентриситеты по-прежнему равны нулю, а взаимная наклонность орбит отлична от нуля. В этом случае истинная, эксцентрическая и средняя аномалии совпадают, и, как было указано в § 243, будем иметь

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \sigma,$$

$$\cos \sigma = \cos^2 \frac{J}{2} \cos (u - u') + \sin^2 \frac{J}{2} \cos (u + u').$$

Надо разложить $\frac{1}{\Delta^{2s}}$. Прежде всего, применяя формулу (2) из предыдущей главы, находим, что

$$F^{-s} = \left(\frac{a'}{\Delta}\right)^{2s} = b_s^0 + 2 \sum b_s^{(k)} \cos k\sigma. \tag{1}$$

Поэтому остается разложить $\cos k\sigma$, что и сделал Тиссеран, который применил следующие приемы.

**259.** Введем обозначения:

$$\cos^2 \frac{J}{2} = \mu, \ \sin^2 \frac{J}{2} = \nu, \quad \xi = u - u', \quad \eta = u + u',$$

$$\cos \sigma = \mu \cos \xi + \nu \cos \eta, \qquad x = E^{iu}, \quad y = E^{iu'},$$

$$z = \frac{x}{y}, \ w = xy, \quad 2 \cos \xi = z + z^{-1}, \quad 2 \cos \eta = w + w^{-1},$$

$$Z = F^{-s} = (1 - \alpha\mu z - \alpha\mu z^{-1} - \alpha\nu w - \alpha\nu w^{-1} + \alpha^2)^{-s}.$$

Полиномиальная формула, являющаяся обобщением формулы бинома, дает

$$Z = \sum A (-\alpha\mu z)^a (-\alpha\mu z^{-1})^p (-\alpha\nu w)^c (\alpha\nu w^{-1})^q (\alpha^2)^e,$$

где

$$A = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-a-p-c-q-e-s)\,\Gamma(a+1)\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(c+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(e+1)} \tag{2}$$

и $a$, $p$, $c$, $q$, $e$ — какие-либо целые положительные числа; Г — функция Эйлера. Можно также написать

$$Z = \sum A(-1)^{a+p+c+q} \cdot \alpha^{a+p+c+q+2e} \cdot \mu^{a+p} \cdot \nu^{c+q} \cdot z^{a-p} \cdot w^{c-q}. \qquad (3)$$

Разложим функцию $Z$ по степеням $\alpha$, с одной стороны, и по синусам и косинусам кратных аномалиям, или, что то же самое, по положительным и отрицательным степеням $z$ и $w$, с другой стороны. Следовательно, будем искать коэффициент при

$$\alpha^m z^h w^k,$$

где $m$ — целое положительное число, $h$ и $k$ — целые положительные или отрицательные числа.

Положим, следовательно,

$$m = a + p + c + q + 2e,$$
$$h = a - p, \quad k = c - q.$$

Показатель $a + p$ при $\mu$ по абсолютной величине больше $h$ и отличается от последнего на четное число. Показатель $c + q$ при $\nu$ по абсолютной величине больше $k$ и также отличается от него на четное число. Сумма этих двух показателей меньше $m$ и отличается от него на четное число. Отсюда следует, что искомый коэффициент является целым многочленом относительно $\mu^2$ и $\nu^2$ степени

$$\frac{m - |h| - |k|}{2},$$

умноженным на

$$(-1)^{h+k} \cdot \mu^{|h|} \nu^{|k|}.$$

Действительно, заметим, что

$$(-1)^{a+p+c+q} = (-1)^{a-p+c-q} = (-1)^{h+k}.$$

Предположим прежде всего, что $h$ и $k$ положительны, так что $h = |h|$, $k = |k|$, и составим многочлен $P$, который нас интересует, и пусть искомый коэффициент имеет вид

$$(-1)^{h+k} \mu^h \nu^k \cdot P.$$

Далее положим

$$m - h - k = 2g, \quad m + h + k = 2f,$$
$$a + p = h + 2p, \quad c + q = k + 2q,$$

так что

$$a + p + c + q + e = \frac{m + h + k}{2} + p + q,$$

$$e = \frac{m - h - k}{2} - p - q.$$

Пользуясь формулами (2) и (3), находим

$$P=\sum \frac{\Gamma(1-s)\,\mu^{2p}\nu^{2q}}{\Gamma(1-f-s-p-q)\,\Gamma(h+p+1)\,\Gamma(k+q+1)\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\times \Gamma(1+g-p-q)}. \qquad (4)$$

Заметим, что $m$ и $h+k$ имеют одинаковую четность, поэтому $f, g, \alpha+s$ и $\beta$ являются целыми числами. Это даст нам возможность преобразовать эту формулу. В самом деле, если $l$ — целое, то из соотношений

$$\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi},$$

$$\sin(s+l)\pi=(-1)^l\sin s\pi$$

имеем

$$\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-l)}=\frac{\Gamma(s+l)}{\Gamma(s)}(-1)^l. \qquad (5)$$

260. Многочлен $P$ с точностью до постоянного множителя является одним из частных случаев гипергеометрического ряда двух переменных, изучаемого Аппелем. Действительно, следуя Аппелю, введем обозначение

$$(\alpha,\ m)=\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-m)}(-1)^m.$$

Первое выражение представляется неопределенным, когда $\alpha$ и $\alpha+m$ — целые отрицательные числа, но легко видеть, что истинное значение в этом случае равно произведению

$$(\alpha+m-1)(\alpha+m-2)\ldots(\alpha+1)\alpha$$

и при этом второе выражение является определенным.

Тогда будем иметь

$$(1,\ p)=\Gamma(p+1),\quad (1,\ q)=\Gamma(q+1),$$

$$(h+1,\ p)=\frac{\Gamma(h+p+1)}{\Gamma(h+1)},\ (k+1,\ q)=\frac{\Gamma(k+q+1)}{\Gamma(k+1)},$$

$$(f+s,\ p+q)=(-1)^{p+q}\cdot\frac{\Gamma(1-f-s)}{\Gamma(1-f-s-p-q)},$$

$$(-g,\ p+q)=(-1)^{p+q}\frac{\Gamma(1+g)}{\Gamma(1+g-p-q)},$$

откуда

$$P=\frac{\Gamma(1-s)\cdot P_1}{\Gamma(1-f-s)\,\Gamma(h+1)\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(g+1)} \qquad (6)$$

и

$$P_1=\sum\frac{(f+s,\ p+q)\,(-g,\ p+q)}{(h+1,\ p)\,(1,\ p)\,(k+1,\ q)\,(1,\ q)}\,\mu^{2p}\nu^{2q}. \qquad (7)$$

Выражение (7) и есть гипергеометрический ряд двух переменных Аппеля.

Мы допустили выше, что $h$ и $k$ являются положительными, но этим мы не ограничили общность, так как $Z$ не изменяется, если заменить $z$ на $z^{-1}$ или $w$ на $w^{-1}$, или делать обе замены сразу. Отсюда следует, что коэффициент при $\alpha^m z^h w^k$ равен коэффициентам при $\alpha^m z^{-h} w^k$, $\alpha^m z^h w^{-k}$, $\alpha^m z^{-h} w^{-k}$.

**261.** Известно, что функция Аппеля удовлетворяет двум уравнениям в частных производных. Нужно ожидать, что многочлен $P$, отличающийся от нее на постоянный множитель, также удовлетворяет подобным уравнениям. Покажем это.

Пусть $Z'$ и $Z''$ — первая и вторая производные функции $Z$ по

$$F=\alpha^2-2\alpha(\mu\cos\xi+\nu\cos\eta)+1.$$

Далее находим

$$\frac{\partial Z}{\partial\alpha}=2Z'(\alpha-\mu\cos\xi-\nu\cos\eta), \tag{8}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\mu}=-2Z'\alpha\cos\xi, \qquad \frac{\partial Z}{\partial\nu}=-2Z'\alpha\cos\eta, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi^2}&=4\alpha^2\mu^2Z''\sin^2\xi+2\alpha\mu Z'\cos\xi,\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial\eta^2}&=4\alpha^2\nu^2Z''\sin^2\eta+2\alpha\nu Z'\cos\eta,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 Z}{\partial\mu^2}=4\alpha^2Z''\cos^2\xi, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial\mu\,\partial\nu}&=4\alpha^2Z''\cos\xi\cos\eta,\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial\nu^2}&=4\alpha^2Z''\cos^2\eta,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha^2}=4Z''(\alpha-\cos\sigma)^2+2Z', \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\mu}&=-4\alpha Z''(\alpha-\cos\sigma)\cos\xi-2Z'\cos\xi,\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\nu}&=-4\alpha Z''(\alpha-\cos\sigma)\cos\eta-2Z'\cos\eta.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Формулы (8)—(13) показывают, что одиннадцать производных функции $Z$ могут быть выражены линейным образом через следующие девять величин:

$$\left.\begin{matrix} Z', & Z'\cos\xi, & Z'\cos\eta,\\ Z'', & Z''\cos\xi, & Z''\cos\eta,\\ Z''\cos^2\xi, & Z''\cos\xi\cos\eta, & Z''\cos^2\eta.\end{matrix}\right\} \tag{14}$$

При этом коэффициенты этих линейных соотношений являются целыми многочленами относительно $\alpha$, $\mu$, $\nu$.

Впрочем, величины (14) не являются независимыми, а связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned}&(1+\alpha^2)Z''-2\alpha\mu Z''\cos\xi-2\alpha\nu Z''\cos\eta=-(s+1)Z',\\&(1+\alpha^2)Z''\cos\xi-2\alpha\mu Z''\cos^2\xi-2\alpha\nu Z''\cos\xi\cos\eta=\\&\qquad\qquad=-(s+1)Z'\cos\xi,\\&(1+\alpha^2)Z''\cos\eta-2\alpha\mu Z''\cos\xi\cos\eta-2\alpha\nu Z''\cos^2\eta=\\&\qquad\qquad=-(s+1)Z'\cos\eta.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

Легко понять происхождение этих трех соотношений. Из $Z=F^{-s}$ выводим

$$FZ''=-(s+1)Z'.$$

Заменяя $F$ его значением, получим первое из соотношений (15). Второе и третье соотношения получаются из первого путем умножения на $\cos\xi$ или на $\cos\eta$.

Но мы можем пойти дальше. Формулы (8)—(13) показывают нам, что 11 производных

$$\left.\begin{aligned}&\alpha\frac{\partial Z}{\partial\alpha},\ \frac{\partial Z}{\partial\mu},\ \frac{\partial Z}{\partial\nu},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial\xi^2},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial\eta^2},\\&\frac{\partial^2 Z}{\partial\mu^2},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial\mu\,\partial\nu},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial\nu^2},\\&\alpha^2\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha^2},\ \alpha\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\mu},\ \alpha\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\nu}\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

выражаются линейно через десять величин

$$\left.\begin{array}{llll}Z'\alpha, & Z'\alpha\cos\xi, & Z'\alpha\cos\eta, & \\ Z''\alpha^2, & Z''\alpha^2\cos^2\xi, & Z''\alpha^2\cos\xi\cos\eta, & Z''\alpha^2\cos^2\eta,\\ Z''\alpha^3, & Z''\alpha^3\cos\xi, & Z''\alpha^3\cos\eta & \end{array}\right\}\tag{17}$$

и коэффициенты этих линейных выражений являются целыми многочленами относительно $\mu$ и $\nu$ и не зависят от $\alpha$. С другой стороны, первое из равенств (15) умноженное на $\alpha^2$, тоже дает некоторую линейную зависимость между величинами (17). Следовательно, мы имеем двенадцать соотношений между 22 величинами (16) и (17). Исключая десять величин (17), мы получаем два соотношения между величинами (16).

*Итак, между одиннадцатью величинами* (16) *существуют два линейных соотношения, коэффициенты которых являются целыми многочленами относительно* $\mu$ *и* $\nu$.

Мы можем положить

$$Z=\sum U\alpha^m z^h w^k=\sum U\alpha^m E^{i(h\xi+k\eta)},$$

где (если, например, $h$ и $k$ положительны)

$$U=(-1)^{h+k}\mu^h\nu^k P.$$

Тогда видно, что коэффициент при $\alpha^m E^{i(h\xi+k\eta)}$ в выражениях (16) будет равен соответственно

$$mU,\quad \frac{\partial U}{\partial \mu},\quad \frac{\partial U}{\partial \nu},\quad -h^2U,\quad -k^2U, \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu\,\partial \nu},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2},$$

$$m(m-1)U,\quad m\frac{\partial U}{\partial \mu},\quad m\frac{\partial U}{\partial \nu}.$$

Поэтому если возьмем одно из двух линейных соотношений, связывающих производные (16), и в нем приравняем нулю коэффициент при

$$\alpha^m E^{i(h\xi+k\eta)},$$

то получим линейное соотношение между производными

$$U, \frac{\partial U}{\partial \mu},\quad \frac{\partial U}{\partial \nu},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu\,\partial \gamma},\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2}. \tag{18}$$

*Таким образом, коэффициент $U$ удовлетворяет двум линейным уравнениям в частных производных второго порядка, коэффициенты которых являются целыми многочленами относительно $\mu$ и $\nu$.* Эти уравнения назовем *уравнениями Аппеля.*

262. Рассмотрим эти уравнения в форме, установленной Аппелем *).

$$\left.\begin{aligned} &(x-x^2)\,r-y^2t-2xys+\\ &\quad+[\gamma+(\alpha+\beta+1)\,x]\,p-(\alpha+\beta+1)\,yq-\alpha\beta z=0,\\ &(y-y^2)\,t-x^2r-2xys+\\ &\quad+[\gamma'-(\alpha+\beta+1)\,y]\,q-(\alpha+\beta+1)\,xp-\alpha\beta z=0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

В этих уравнениях $x$ и $y$ — независимые переменные, $z$ — неизвестная функция, $p$ и $q$ — ее производные первого порядка, $r$, $s$, $t$ — производные второго порядка.

Чтобы перейти от этих уравнений к уравнениям, которым должна удовлетворять $U$, достаточно положить

$$x=\mu^2,\ y=\nu^2,\ z=\mu^{-h}\nu^{-k}\,U,\ \alpha=f+s,\ \beta=-g,\ \gamma=h+1,\ \gamma'=k+1.$$

Нужно заметить, что совместные линейные уравнения (19) допускают не одно-единственное решение, а, как показал Аппель, четыре линейно независимых решения. Поэтому возникает вопрос: каков в интересующем нас случае смысл этих различных решений?

Вернемся к тому, что мы говорили в § 24, и применим аналогичный прием к занимающей нас задаче. Мы увидим, что

*) «Journal de Liouville», 1882, p. 182.

коэффициент при $z^h w^k$ в разложении $Z$ будет равен

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\int\frac{Z\,dz\,dw}{z^{h+1}\,w^{k+1}}\,. \tag{20}$$

Интегрирование должно производиться по $z$ вдоль окружности единичного радиуса с центром в начале координат и по $w$ — вдоль такой же окружности в плоскости $w$. Комбинация этих двух окружностей определяет замкнутую двумерную область, которая является областью для двойного интеграла. Другими словами, искомый коэффициент является периодом двойного интеграла (20).

Чтобы получить $U$, нужно разложить этот коэффициент, который зависит от $\alpha$, по возрастающим степеням $\alpha$ и взять коэффициент при $\alpha^m$.

Но двойной интеграл (20), кроме указанного периода, обладает другими периодами; любой из этих периодов зависит от $\alpha$ и может быть разложен по степеням $\alpha$. Коэффициент при $\alpha^m$ в этом разложении будет удовлетворять тем же дифференциальным уравнениям для $U$.

Следовательно, множество решений уравнений (19) объясняется тем, что существует множество периодов интеграла (20).

263. Гипергеометрический ряд Аппеля

$$\sum\frac{(\alpha,\,m+n)\,(\beta,\,m+n)}{(\gamma,\,m)\,(\gamma',\,n)\,(1,\,m)\,(1,\,n)}\,x^m y^n$$

можно выразить с помощью определенного интеграла, о чем мы скажем здесь несколько слов. Рассмотрим интеграл

$$\int u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du,$$

который мы будем брать по пути, идущему из бесконечности в бесконечность и проходящему между двумя точками 0 и 1.

Можно положить, например, $u=\frac{1}{2}+iu'$, и изменять $u'$ в области действительных значений от $-\infty$ до $+\infty$. Этот интеграл будет иметь конечное и определенное значение, если только

$$p+q<1.$$

При этих условиях с точностью до постоянного множителя $C$, который легко определяется и не меняется, когда к $p$ или $q$ добавляется целое число, наш интеграл равен

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,.$$

С другой стороны, гипергеометрический ряд (с точностью до постоянного множителя, не зависящего от $x$, $y$, $m$, $n$) равен

$$\sum \frac{\Gamma(1-\gamma-m)\,\Gamma(\gamma-\alpha-n)}{\Gamma(1-\alpha-m-n)} \cdot \frac{\Gamma(1-\gamma'-n)\,\Gamma(\gamma'-\beta-m)}{\Gamma(1-\beta-m-n)} \times \\ \times \frac{(1+\beta-\gamma',\, m)\, x^m}{(1,\, m)} \cdot \frac{(1+\alpha-\gamma,\, n)\, y^n}{(1,\, n)}$$

Отсюда видно, что каждый член под знаком суммы разлагается на четыре множителя. Первый множитель представляет интеграл

$$\int u^{-\gamma-m}(1-u)^{\gamma-1-\alpha-n}\,du$$

с точностью до множителя $C$, не зависящего от $m$ и $n$, так как $m$ и $n$ — целые числа (множитель $C$, как мы заметили, не меняется, если к показателям добавить целое число).

Аналогично, второй множитель с точностью до постоянного множителя представляет интеграл

$$\int v^{-\gamma'-n}(1-v)^{\gamma'-1-\beta-m}\,dv.$$

Заметим, что все наши интегралы конечны, по крайней мере для значений $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\gamma'$, которые удовлетворяют определенным неравенствам.

Третий множитель является общим членом разложения

$$(1-x)^{\gamma'-\beta-1} = \sum A_m x^m,$$

а четвертый — общим членом разложения

$$(1-y)^{\gamma-\alpha-1} = \sum B_n y^n.$$

Мы находим, следовательно,

$$\sum \iint u^{-\gamma-m}(1-u)^{\gamma-1-\alpha-n}\, v^{-\gamma'-n}(1-v)^{\gamma'-1-\beta-m} A_m x^m B_n y^n\,du\,dv$$

или

$$\sum \iint u^{-\gamma}(1-u)^{\gamma-1-\alpha} v^{-\gamma'}(1-v)^{\gamma'-1-\beta} A_m \left[\frac{x}{u(1-v)}\right]^m \times \\ \times B_n \left[\frac{y}{v(1-u)}\right]^n du\,dv,$$

или

$$\iint u^{-\gamma}(1-u)^{\gamma-1-\alpha} v^{-\gamma'}(1-v)^{\gamma'-1-\beta}\left[1-\frac{x}{u(1-v)}\right]^{\gamma'-\beta-1} \times \\ \times \left[1-\frac{y}{v(1-u)}\right]^{\gamma-1-\alpha} du\,dv,$$

или, наконец,

$$\int\int u^a v^b (u-uv-x)^c (v-uv-y)^d\,du\,dv, \tag{21}$$

где

$$a=1+\beta-\gamma-\gamma', \quad b=1+\alpha-\gamma-\gamma',$$
$$c=\gamma'-\beta-1, \qquad d=\gamma-1-\alpha.$$

Интеграл должен быть взят как по $u$, так и по $v$, вдоль линии, идущей из бесконечности в бесконечность и проходящей между 0 и 1. Другие решения уравнений (19) могут быть представлены тем же интегралом (21), взятым вдоль других, подходящим образом выбранных контуров.

**264.** Рассмотрим все ряды типа

$$\sum \frac{(\alpha_1, m+n)(\beta_1, m+n)}{(\gamma_1, m)(\gamma_1', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

где постоянные $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\gamma_1'$ равны постоянным $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\gamma'$, увеличенным на некоторое целое число. Мы утверждаем, что все эти ряды могут быть выражены линейным образом с помощью четырех из них, причем коэффициенты этих линейных соотношений являются рациональными функциями $x$, $y$.

Действительно, пусть $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ — четыре решения уравнений (19). Общее решение этих уравнений будет линейной комбинацией этих четырех решений. Когда $x$ и $y$, изменяясь непрерывно, возвращаются к своим первоначальным значениям, то может оказаться, что эти решения не вернутся к своим первоначальным значениям, если переменные $x$ и $y$ опишут путь вокруг одной из особых точек. Но тогда решения $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ подвергнутся линейному преобразованию с постоянными коэффициентами; здесь имеется аналогия с обычными линейными дифференциальными уравнениями.

Установив это, рассмотрим четыре системы, аналогичные уравнениями (19), но с различными постоянными $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\gamma'$, и допустим, что разность значений $\alpha$ для двух из этих систем равна целому числу (то же самое справедливо и для $\beta$, $\gamma$, $\gamma'$).

Пусть

$$\begin{array}{cccc} z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & z_3^{(1)}, & z_4^{(1)}, \\ z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, & z_3^{(2)}, & z_4^{(2)}, \\ z_1^{(3)}, & z_2^{(3)}, & z_3^{(3)}, & z_4^{(3)}, \\ z_1^{(4)}, & z_2^{(4)}, & z_3^{(4)}, & z_4^{(4)} \end{array}$$

представляют собой четыре фундаментальных решения каждой из этих четырех систем уравнений. Так как разности между $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\gamma'$, по предположению, являются целыми числами, то, как это показывает исследование уравнений (19), если $x$ и $y$ описывают замкнутый контур, то

$$z_1^{(i)}, \quad z_2^{(i)}, \quad z_3^{(i)}, \quad z_4^{(i)}$$

испытывают то же самое линейное преобразование, что и

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad z_4.$$

Следовательно, определители, содержащиеся в матрице

$$\left\| \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1^{(1)} & z_2^{(1)} & z_3^{(1)} & z_4^{(1)} \\ z_1^{(2)} & z_2^{(2)} & z_3^{(2)} & z_4^{(2)} \\ z_1^{(3)} & z_2^{(3)} & z_3^{(3)} & z_4^{(3)} \\ z_1^{(4)} & z_2^{(4)} & z_3^{(4)} & z_4^{(4)} \end{matrix} \right\|$$

будут умножаться на один и тот же множитель. Отношения этих определителей будут, следовательно, однозначными функциями и легко проверить (так как мы не имеем трансцендентных особых точек), что эти однозначные функции являются рациональными. Итак, наши определители пропорциональны функциям

$$R, \ R_1, \ R_2, \ R_3, \ R_4,$$

которые являются целыми многочленами относительно $x$ и $y$, так что будем иметь соотношение

$$Rz_1 + R_1 z_1^{(1)} + R_2 z_1^{(2)} + R_3 z_1^{(3)} + R_4 z_1^{(4)} = 0, \tag{22}$$

которое показывает, что все функции можно выразить линейным образом с помощью четырех из них.

Можно легко получить тот же результат из интеграла (21), который позволяет эффективно получать соотношения (22). Дальше мы вернемся к этому вопросу.

Может показаться, что этот результат, весьма важный для общей теории гипергеометрических рядов, не представляет интереса для интересующего нас частного случая, в котором эти ряды приводятся к целым многочленам. Но следует заметить, что эти многочлены могут быть весьма высокой степени, поскольку число $m$ из § 259, от которого зависят степени многочленов, может быть очень большим, между тем как степени многочленов $R$ из равенства (22) остаются ограниченными, если разности между $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\gamma'$ остаются целыми конечными числами, особенно если эти разности равны 0 или $\pm 1$. Это дает возможность установить между гипергеометрическими многочленами Аппеля совокупность рекуррентных соотношений, которые существенно облегчают вычисления.

Эти рекуррентные соотношения аналогичны соотношениям, установленным Гауссом для гипергеометрических рядов одной переменной*).

**265.** Выявим особые точки рядов Аппеля, рассматриваемых как функции $x$ и $y$. Их можно найти двумя различными способами, используя уравнения (19). Продифференцируем эти два уравнения по переменным $x$ и $y$, что дает четыре уравнения, в которые входят линейно четыре производные третьего порядка функции $z$. Коэффициенты при этих производных в упомянутых уравнениях соответственно равны

$$\begin{array}{cccc} x-x^2, & -2xy, & -y^2, & 0, \\ 0, & x-x^2, & -2xy, & -y^2, \\ -x^2, & -2xy, & y-y^2, & 0, \\ 0, & -x^2, & -2xy, & y-y^2 \end{array}$$

и их определитель равен

$$x^2y^2(x^2+y^2+1-2xy-2x-2y).$$

Поэтому особые точки получаются при $x=0$, $y=0$ и при

$$x^2+y^2+1-2xy-2x-2y=0,$$

т. е.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1. \tag{23}$$

Можно также прийти к этому результату, используя интеграл (21). Особые точки функции, определяемой этим интегралом, получаются из рассмотрения четырех множителей подынтегральной функции

$$u, \quad v, \quad u-uv-x, \quad v-uv-y.$$

Если рассматривать временно $u$ и $v$ как прямоугольные координаты и приравнять нулю эти множители, то мы получим уравнения двух прямых и двух гипербол. Особая точка появится, если гиперболы касаются или если три из этих множителей одновременно обращаются в нуль.

Когда переменная $x$ делает один оборот около начала, два из частных решений уравнений (19) не изменяются, а другие два умножаются на постоянный множитель. Когда же $x$ и $y$ делают оборот вокруг особой точки, удовлетворяющей уравнению (23), то три частных решения не изменяются, а четвертое умножается на постоянный множитель.

Эти результаты можно легко проверить и можно определить упомянутые множители, исследуя уравнения (19).

---

*) Gauss, «Oeuvres complètes», т. III, Göttingen.

В занимающем нас частном случае ряд Аппеля приводится к многочлену и, следовательно, не имеет никакой особой точки, так что особые точки, которые мы определили, принадлежат только решениям уравнений (19).

С другой стороны, в этих частных случаях имеем

$$x=\mu^2=\cos^4\frac{J}{2}, \quad y=\nu^2=\sin^4\frac{J}{2},$$

откуда

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1.$$

Итак, мы снова пришли к одной из особых точек, определяемых уравнением (23). Это доставляет неудобство, так как особые точки, как мы говорили, не принадлежат многочлену, а только другим решениям уравнений (19). Мы увидим скоро, что следует из этого упрощения.

**266.** До сих пор мы считали, что $\mu$ и $\nu$ являются независимыми переменными. На самом деле они связаны соотношением

$$\mu+\nu=1,$$

так что многочлен $P$, целый относительно $\mu^2$ и $\nu^2$, может быть представлен как целый только относительно $\nu$. Аппель*) преобразовал уравнения (19), заменяя в них $y$ через $\nu^2$ и $x$ через $(1-\nu)^2$. Он также показал, что общее решение $z$ этих уравнений (19) и, следовательно, многочлен $P$ удовлетворяют некоторому уравнению третьего порядка, которое имеет вид

$$(\nu-\nu^2)^2 z'''+(\nu-\nu^2)(a+b\nu)z''+(c+d\nu+e\nu^2)z'+(l\nu+p)z=0, \tag{24}$$

где $z'$, $z''$, $z'''$ — производные $z$ по $\nu$, а постоянные $a$, .., $p$ задаются формулами

$$\begin{aligned}
&a=A-\gamma+2\gamma'=3k+2+s,\\
&b=-2A-\gamma-\gamma'=-3(h+k+1)-2s,\\
&c=(2\gamma'-1)(A-\gamma)=(2k+1)(k+s),\\
&d=-2(2B+2A\gamma'-\gamma')=-4B+4(k+1)\left(h+k+s-\frac{1}{2}\right),\\
&e=4B+(2A-1)(\gamma+\gamma')4B+2\left(h+k+s-\frac{1}{2}\right)(h+k+2),\\
&l=4B(\gamma+\gamma'-1)=4B(h+k+1),\\
&p=2B(1-2\gamma')=-2B(2k+1),\\
&A=\alpha+\beta+1, \quad B=\alpha\beta=-g(f+s).
\end{aligned}$$

*) «Journal de Liouville», 1884, p. 418.

Как можно объяснить тот факт, что уравнения (19), допускающие четыре независимых решения, могут быть преобразованы в уравнение третьего порядка, которое имеет не более трех таких решений? Это легко объяснить. Действительно, соотношение $\mu + \nu = 1$ эквивалентно соотношению (23), определяющему одну из особых точек. Когда совершается вращение вокруг особой точки, три решения остаются голоморфными, тогда как четвертое решение умножается на постоянный множитель и обращается в нуль или в бесконечность в особой точке. Следовательно, когда делается подстановка $\mu = 1 - \nu$, одно из частных решений исчезает и остается не более трех решений.

**267.** В частном случае, когда $s = \frac{1}{2}$, имеют место большие упрощения, как показал Тиссеран, а позже Аппель, результаты которого мы здесь вкратце изложим.

Обозначим, как и всегда, производные первого и второго порядка функции $z$ по $x$ и $y$ через $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ и положим

$$x = \mu^2 = (1-\nu)^2, \quad y = \nu^2.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{d\nu} = 2(q\nu - p\mu), \\ &\frac{d^2z}{d\nu^2} = 4(r\mu^2 - 2s\mu\nu + t\nu^2) + 2(p+q). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Исключая $r$, $s$ и $t$ из этих двух уравнений и из двух уравнений (19), и учитывая, что $\mu + \nu = 1$, найдем

$$\nu(1-\nu)\frac{d^2z}{d\nu^2} + (A\nu + B)\frac{dz}{d\nu} + Cz = 2D(p\mu + q\nu), \tag{25'}$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — постоянные, причем

$$D = \alpha + \beta - \gamma - \gamma' + \frac{3}{4}.$$

Заменяя в этом равенстве $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\gamma'$ их значениями

$$f + s, \quad -g, \quad h + 1, \quad k + 1$$

и помня, что $f - g = h + k$, мы находим

$$D = s - \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если $s = \frac{1}{2}$, наша неизвестная $z$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка, которое получается, если приравнять нулю левую часть равенства (25'). Мы получаем уравнение того же вида, которому удовлетворяет гипергеометрический ряд Гаусса с одной переменной.

*Итак, в случае $s=\frac{1}{2}$ многочлен $P$ приводится к гипергеометрическому ряду Гаусса с одной переменной.* Отсюда следует, что второе решение уравнений (19) тождественно обращается в нуль при $\mu+\nu=1$. Исключение $r$, $s$, $t$ из уравнений (19) и (25) представляет некоторые особенности. Если сложить уравнения (19) и второе уравнение (25), соответственно умноженные на $\mu$, $\nu$ и $\frac{\mu\nu}{4}$, то члены с $r$, $s$, $t$ исчезают одновременно при $\mu+\nu=1$. Таким образом, после исключения остается не одно, а два уравнения, комбинация которых приводит к равенству (25′).

**268.** Пусть теперь $s=1$. Сначала кажется, что этот случай не представляет интереса, так как $s$ всегда должно быть половиной нечетного числа. Но мы увидим дальше, что упрощения, которые получаются при этом, имеют весьма важное приложение.

В случае $s=1$ многочлен $P$ приводится при $\mu=1-\nu$ не к гипергеометрическому многочлену Гаусса, как в случае $s=\frac{1}{2}$, а к квадрату подобного многочлена.

Действительно, так как гипергеометрический ряд Гаусса удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, то его квадрат будет удовлетворять уравнению третьего порядка, которое легко получить. Если мы пожелаем отождествить это уравнение с уравнением (14), то мы убедимся в том, что они тождественны при $s=1$.

Этот результат, впервые полученный Тиссераном, позже был доказан весьма изящно Стильтьесом. Вернемся к уравнениям (19) и сделаем в них замену

$$x=(1-\varrho)(1-\varrho'), \quad y=\varrho\varrho'.$$

Мы увидим, что в случае $s=1$ уравнения (19) приводятся к двум линейным уравнениям второго порядка, одно из которых содержит только $\varrho$, $z$, $\frac{\partial z}{\partial\varrho}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}$, тогда как второе содержит только величины $\varrho'$, $z$, $\frac{\partial z}{\partial\varrho'}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho'^2}$. При этом можно получить из одного уравнения другое простой заменой $\varrho$ на $\varrho'$.

Первое из этих уравнений является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением относительно функции $z$ с независимой переменной $\varrho$, и легко видеть, что оно определяет обыкновенный гипергеометрический ряд Гаусса. Поэтому если $z=F(\varrho)$ является одним из решений этого уравнения, то мы удовлетворим системе из двух уравнений, полагая

$$z=F(\varrho)\cdot F(\varrho').$$

Отсюда заключаем, что наш гипергеометрический многочлен двух переменных с точностью до постоянного множителя является произведением двух гипергеометрических многочленов, каждый из которых зависит от одной переменной: один из них — от $\varrho$, второй — от $\varrho'$.

Положим теперь $\mu+\nu=1$, т. е. $\varrho=\varrho'$. Отсюда следует, что $y=\varrho^2=\nu^2$, $x=(1-\varrho)^2=\mu^2$, $\varrho=\nu$, так что получим

$$z=[F(\nu)]^2.$$

*Таким образом, если учесть, что $\mu+\nu=1$, то гипергеометрический многочлен, зависящий от двух переменных, с точностью до постоянного множителя равен квадрату некоторого гипергеометрического многочлена одной переменной $\nu$*, что и требовалось доказать.

Подробные вычисления, связанные с этим вопросом, можно найти в сочинении Тиссерана *).

**269.** Чтобы увидеть возможные приложения полученного результата, вернемся к началу этой главы. Если

$$F^{-s}=\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^{2s}=(1-2\alpha\cos\sigma+\alpha^2)^{-s},$$

то мы имели

$$F^{-s}=\sum P\alpha^m(-1)^{h+k}z^hw^k\mu^h\nu^k,$$

где $P$ — гипергеометрический многочлен двух переменных, который мы рассматривали. При $s=1$ мы видели, что этот многочлен с точностью до постоянного множителя равен квадрату некоторого гипергеометрического многочлена одной переменной. Но в этом случае имеем

$$F^{-1}=\frac{1}{(1-\alpha E^{i\sigma})(1-\alpha E^{-i\sigma})}=\frac{1}{E^{i\sigma}-E^{-i\sigma}}\left[\frac{E^{i\sigma}}{1-\alpha E^{i\sigma}}-\frac{E^{-i\sigma}}{1-\alpha E^{-i\sigma}}\right].$$

Правую часть легко разложить по степеням $\alpha$, так что

$$F^{-1}=\sum\alpha^m\frac{\sin(m+1)\sigma}{\sin\sigma}.$$

Следовательно, многочлен $P$ является коэффициентом при

$$(-z\mu)^h(-w\nu)^k,$$

если в выражении $\dfrac{\sin(m+1)\sigma}{\sin\sigma}$ подставить

$$2\cos\delta=\mu(z+z^{-1})+\nu(w+w^{-1}).$$

Отсюда видно, что этот коэффициент выражается с помощью многочленов Гаусса (гипергеометрические многочлены одной переменной).

*) Tisserand, Traité de Mécanique céleste, т. I, p. 488.

Допустим теперь, что $s$ — произвольное число. Тогда формулу (1) можно написать в виде

$$F^{-s}=b_s^{(0)}+\sum b_s^{(k)}\frac{\sin(k+1)\sigma}{\sin\sigma}-\sum b_s^{(k)}\frac{\sin(k-1)\sigma}{\sin\sigma}. \tag{26}$$

Выражение вида $\frac{\sin(k+1)\sigma}{\sin\sigma}$ может быть разложено с помощью многочленов Гаусса, поэтому то же самое можно сказать и о величине $F^{-s}$.

**270.** Этот результат можно получить и другим путем. Напишем

$$F^{-s}=(1+\alpha^2)^{-s}(1-2\beta\cos\sigma)^{-s},$$

где

$$\beta=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Далее разложим

$$(1-2\beta\cos\sigma)^{-s}.$$

Очевидно, что мы получим нужное разложение, если заменим в формулах (2) и (3) $\alpha$ на $\beta$ и сохраним в них те члены, где $e=0$. Это будут те члены, в которых

$$m=h+k+p+q,$$

т. е. такие члены, для которых показатель $\beta$ (заменивший $\alpha$) равен сумме показателей при $\mu$ и $\nu$; поэтому достаточно сохранить в многочлене $P$ члены наивысшей степени относительно $\mu$ и $\nu$. Выше мы нашли, что

$$F^{-s}=\sum P\alpha^m(-\mu z)^h(-\nu w)^k, \tag{27}$$

а теперь имеем

$$F^{-s}=(1+\alpha^2)^{-s}\sum P_0\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)^m(-\mu z)^h(-\nu w)^k, \tag{28}$$

где $P_0$ — та часть $P$, которая содержит только члены высших степеней относительно $\mu$ и $\nu$. Но с точностью до постоянного множителя мы имеем

$$P=\sum\frac{(a,p+q)(b,p+q)}{(c,p)(c',q)(1,p)(1,q)}\mu^{2p}\nu^{2q},$$

где $a$, $b$, $c$, $c'$ — постоянные, причем $b$ — целое отрицательное число. Нужно теперь сохранить члены высшего порядка, т. е. положить

$$p+q=-b,$$

откуда

$$(b,\ p+q) = \pm(-b)!$$

Множитель $(a,\ p+q) = (a,\ -b)$ постоянен. Далее,

$$(c',\ q) = (c',\ -b-p) = (-1)^p \frac{\Gamma(1-c')}{\Gamma(1-c'+b+p)} =$$

$$= (-1)^p \frac{\Gamma(1-c')}{\Gamma(1-c'+b)\cdot(1-c'+b,\ p)},$$

так что $(c',\ q)$ находится в обратном отношении с величиной

$$(1-c'+b,\ p).$$

Аналогично, $(1,\ q)$ находится в обратном отношении с $(b,\ p)$. Итак, с точностью до постоянного множителя имеем

$$P_0 = \nu^{-2b} \sum \frac{(1-c'+b,\ p)\,(b,\ p)}{(c,\ p)\,(1,\ p)} \left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\right)^p,$$

т. е. $P_0$ равен $\nu^{-2b}$, умноженному на гипергеометрический многочлен Гаусса относительно

$$\frac{\mu^2}{\nu^2} = \operatorname{ctg}^4 \frac{J}{2}.$$

Если сопоставим соотношения (26), (27) и (28), то можно сделать следующие выводы из наших результатов.

Мы можем разложить $\Delta^{-2s}$ и найти коэффициент при

$$E^{i\,(pu+p'u')}$$

Эту функцию всегда можно представить в форме

$$z^h w^k = E^{i\,(h\xi+k\eta)}.$$

Искомый коэффициент делится на $\mu^h\nu^k$, и мы обозначаем его через

$$M\mu^h\nu^k,$$

где $M$ зависит от $\alpha$, $\mu$ и $\nu$. Величину $M$ можно разложить:

1. По степеням $\alpha$, и тогда коэффициент при $\alpha^m$ является гипергеометрическим рядом Аппеля двух переменных $\left(\cos^4 \frac{J}{2}\right.$ и $\left.\sin^4 \frac{J}{2}\right)$. При $s = \frac{1}{2}$ этот ряд приводится к гипергеометрическому ряду Гаусса относительно $\sin^2 \frac{J}{2}$.

2. С помощью коэффициентов Лапласа $b_s^{(k)}$, которые являются функциями $\alpha$. Коэффициент $b_s^{(k)}$ равен тогда разности квадратов двух многочленов Гаусса относительно $\sin^2 \frac{J}{2}$.

3. По степеням величин

$$\frac{\alpha^m}{(1+\alpha^2)^{m+s}},$$

причем коэффициент при каждой из этих величин равен в этом случае $\sin^{4(m-h-k)} \frac{J}{2}$, умноженному на многочлен Гаусса относительно $\operatorname{ctg}^4 \frac{J}{2}$.

Во всех случаях вычисление многочленов Гаусса можно упростить, если воспользоваться рекуррентными соотношениями между ними *), о которых было сказано выше.

*) Gauss, Oeuvres complètes, T. III, p. 130.

## ГЛАВА XIX

# ОПЕРАТОРЫ НЬЮКОМБА

**271.** Теперь будем считать, что эксцентриситеты орбит не равны нулю и поставим своей целью получить разложение главной части возмущающей функции по степеням эксцентриситетов. Лучшим методом для этого является метод Ньюкомба, основанный на применении некоторых операторов *).

Чтобы сделать более понятным смысл этого метода, рассмотрим сначала один простой пример. Пусть $F(x)$ — некоторая функция $x$. Заменим $x$ на

$$x+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+\alpha_3 h^3=x+\varepsilon$$

и разложим $F(x+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+\alpha_3 h^3)$ по возрастающим степеням $h$. Для этого нужно только применить формулу Тейлора

$$F(x+\varepsilon)=\sum \frac{\varepsilon^m}{m!} F^{(m)},$$

заменить $\varepsilon^m$ на $(\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+\alpha_3 h^3)^m$, разложить это выражение и расположить по степеням $h$. Коэффициент при $h^k$ будет многочленом вида

$$b_1 F'+b_2 F''+\ldots+b_k F^{(k)},$$

где $b$ — постоянные коэффициенты, $F^{(k)}$ — производная $k$-го порядка функции $F$. Последнее выражение можно написать в виде

$$(b_1 D+b_2 D^2+\ldots+b_k D^k) F,$$

где $D^k$ есть знак $k$-кратного дифференцирования. Это выражение

$$b_1 D+\ldots+b_k D^k,$$

представляющее символ некоторой операции, называется *оператором*. Если мы обозначим этот оператор через $\Pi_k$, то можно написать

$$F(x+\varepsilon)=F(x)+h\Pi_1 F+h^2\Pi_2 F+\ldots \tag{1}$$

*) Newcomb, Astronomical papers, 1891, т. 3.

Здесь уже виден смысл излагаемого метода, но мы хотим показать еще, как можно составить эти операторы. Для этого положим

$$F(x)=E^{\lambda x},$$

откуда

$$F(x+\varepsilon)=E^{\lambda x}\cdot E^{\lambda\varepsilon},$$
$$\Pi_k E^{\lambda x}=E^{\lambda x}(b_1\lambda+\ldots+b_k\lambda^k).$$

Следовательно, полагая $F(x)=E^{\lambda x}$ в формуле (1), находим

$$E^{\lambda\varepsilon}=\sum h^k\Pi_k,$$

в котором $D^m$ надо заменить через $\lambda^m$ и считать, что $\Pi_0=1$.

Другими словами, мы получили оператор $\Pi_k$, разлагая $E^{D\varepsilon}$ по степеням $h$ так, как будто $D$ является некоторой обычной величиной, и беря коэффициент при $h^k$. Следовательно, мы можем рассматривать $E^{D\varepsilon}$ как некоторый оператор и написать

$$F(x+\varepsilon)=E^{D\varepsilon}(F). \tag{2}$$

Рассмотрим теперь функцию двух переменных $F(x, y)$ и найдем разложение $F(x+\varepsilon,\ y+\varepsilon')$, где

$$\varepsilon=\alpha_1h+\alpha_2h^2+\alpha_3h^3+\ldots,$$
$$\varepsilon'=\alpha_1'h+\alpha_2'h^2+\alpha_3'h^3+\ldots$$

Мы можем действовать так же, как и выше, т. е. разложим $F(x+\varepsilon,\ y+\varepsilon')$ по степеням $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ с помощью формулы Тейлора. Далее разложим $\varepsilon^m\varepsilon'^n$ по степеням $h$ и расположим разложение по возрастающим степеням $h$, что дает

$$F(x+\varepsilon,\ y+\varepsilon')=\sum h^k\Pi_kF, \tag{1'}$$

где $\Pi_k$ является оператором, который имеет вид многочлена, целого относительно $D$ и $D'$, с условием, что символ $D^pD'^q$ обозначает операцию дифференцирования по $x$ $p$ раз и по $y$ $q$ раз.

Чтобы определить многочлен $\Pi_k$, достаточно взять за $F(x, y)$ выражение $E^{(\lambda x+\mu y)}$, что дает, так же как и выше,

$$E^{\lambda\varepsilon+\mu\varepsilon'}=\sum h^k\Pi_k,$$

где в правой части $D$ и $D'$ надо заменить на $\lambda$ и $\mu$.

Поэтому символически можно написать

$$F(x+\varepsilon,\ y+\varepsilon')=E^{D\varepsilon+D'\varepsilon'}(F), \tag{2'}$$

рассматривая $E^{D\varepsilon+D'\varepsilon'}$ как оператор.

**272.** Можно также предположить, что $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ зависят не от одной переменной $h$, а от двух переменных $h$ и $h'$ или от большего числа переменных, и что нужно разложить $F(x+\varepsilon,\ y+\varepsilon')$ по степеням $h$ и $h'$. Это, по существу, не меняет изложенный метод. Формула (2′) при этом не меняется, а формула (1′) примет вид

$$F(x+\varepsilon,\ y+\varepsilon')=\sum h^i h'^j \Pi_{ij} F.$$

Рассматривая более внимательно оператор $\Pi_{ij}$, мы убедимся в том, что существует случай, когда

$$\Pi_{ij}=\Pi_{i0}\Pi_{0j},$$

так что наш оператор с двойным индексом может рассматриваться как произведение двух операторов с одним индексом. Это случай, в котором $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ равны суммам двух функций, одна из которых зависит только от $h$, а другая только от $h'$. Действительно, допустим, что

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2,$$
$$\varepsilon'=\varepsilon_1'+\varepsilon_2',$$

где $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_1'$ зависят только от $h$, тогда как $\varepsilon_2$ и $\varepsilon_2'$ зависят от $h'$. Тогда будем иметь

$$E^{D\varepsilon+D'\varepsilon'}=E^{D\varepsilon_1+D'\varepsilon_1'}\cdot E^{D\varepsilon_2+D'\varepsilon_2'},$$

откуда видно, что коэффициент при $h^i\, h'^j$ в разложении функции $E^{D\varepsilon+D'\varepsilon'}$, т. е. $\Pi_{ij}$, будет равен произведению коэффициента при $h^i$ в разложении $E^{D\varepsilon_1+D'\varepsilon_1'}$, т. е. $\Pi_{i0}$, на коэффициент при $h'^j$ в разложении $E^{D\varepsilon_2+D'\varepsilon_2'}$, т. е. $\Pi_{0j}$.

Этот результат, очевидно, распространяется и на случай большего числа переменных.

Заметим также, что из определения операторов следует, что они обладают свойством п е р е м е с т и м о с т и, так как простые операторы $D$ и $D'$ обладают им.

**273.** Применим эти результаты к разложению $\frac{1}{\Delta}$. Выберем за начало отсчета долгот в каждой плоскости орбиты общую линию узлов; средняя долгота равна сумме средней аномалии и долготы перигелия (которая в данном случае равна угловому расстоянию перигелия от узла). Но вместо того чтобы взять в качестве переменных среднюю долготу и долготу перигелия, или среднюю аномалию и долготу перигелия, как это обычно делается, мы можем взять также среднюю аномалию и среднюю долготу.

Мы будем рассматривать, следовательно, $\frac{1}{\Delta}$ как функцию девяти переменных, которыми будут, кроме взаимной наклонности орбит: 1) логарифмы больших полуосей; 2) эксцентриситеты; 3) средние долготы; 4) средние аномалии.

В результате разложения будем иметь

$$\frac{1}{\Delta}=\sum Ae^{m}e'^{m'}E^{i(p\zeta+p'\zeta'+ql+q'l')}, \tag{3}$$

где $m$, $m'$, $p$, $p'$ $q$, $q'$ — целые числа, $l$ и $l'$ — средние аномалии, $\zeta$ и $\zeta'$ — средние долготы и где $A$ есть функция от наклонности и логарифмов больших полуосей.

Если эксцентриситеты равны нулю, то средние долготы совпадают с истинными долготами, а большие полуоси с радиусами-векторами, и обратное расстояние не будет больше зависеть от средних аномалий, а только от больших полуосей и $\zeta$, $\zeta'$. Следовательно, в разложении (3) исчезнут все члены, зависящие от $e, e'$, $l, l'$, т. е. все члены, в которых $m, m'$, $q$, $q'$ отличны от нуля.

Но в случае нулевых эксцентриситетов разложение (3) известно, так как оно получено в предыдущей главе; теперь нам нужно вывести из него разложение в общем случае.

Ясно, что $\Delta$ может зависеть только от истинных долгот и радиусов-векторов. Поэтому мы получим разложение в общем случае, если заменим в разложении для нулевых эксцентриситетов логарифмы больших полуосей ($\ln a$, $\ln a'$) и средние долготы ($\zeta$, $\zeta'$) логарифмами радиусов-векторов

$$\ln r=\ln a+\ln\frac{r}{a}, \quad \ln r'=\ln a'+\ln\frac{r'}{a'}$$

и истинными долготами

$$v=\zeta+(v-\zeta), \quad v'=\zeta'+(v'-\zeta').$$

Для этого достаточно применить результаты предыдущего параграфа, считая, что роль функции $F(x, y)$ выполняет $\frac{1}{\Delta}$, роль $x$, $y$ — $\ln a$, $\ln a'$, $\zeta$, $\zeta'$ и роль $x+\varepsilon$, $y+\varepsilon'$ — $\ln r$, $\ln r'$, $v$, $v'$, а следовательно, роль $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ играют

$$\ln\frac{r}{a}, \quad \ln\frac{r'}{a'}, \quad v-\zeta, \quad v'-\zeta'. \tag{4}$$

Действительно, последние четыре величины разложимы по степеням

$$eE^{il}, \quad eE^{-il}, \quad e'E^{il'}, \quad e'E^{-il'},$$

которые играют роль $h$ и $h'$ и не зависят при этом от $a$, $a'$, $\zeta$, $\zeta'$.

Обозначим через $F$ разложение для нулевых эксцентриситетов и через $F_1$ разложение в общем случае; пусть

$$D, \quad D_1, \quad D', \quad D_1'$$

означают операции дифференцирования по

$$\ln a, \quad \zeta, \quad \ln a', \quad \zeta'.$$

Тогда выражение, аналогичное оператору $D\varepsilon + D'\varepsilon'$, имеет вид

$$D \ln \frac{r}{a} + D_1(v-\zeta) + D' \ln \frac{r'}{a'} + D_1'(v'-\zeta'),$$

так что будем иметь символически по формуле (2')

$$F_1 = \left(\frac{r}{a}\right)^D \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} \cdot E^{D_1(v-\zeta)+D_1'(v'-\zeta')} F. \tag{5}$$

Выражение

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} \cdot E^{D_1(v-\zeta)+D_1'(v'-\zeta')} \tag{6}$$

можно разложить по степеням

$$eE^{\pm il}, \quad e'E^{\pm il'},$$

производя выкладки так, как будто $D$, $D'$, $D_1$, $D_1'$ суть обыкновенные величины. Коэффициенты разложения будут тогда целыми многочленами относительно $D$, $D'$, $D_1$, $D_1'$. Пусть

$$\sum \Pi\, (eE^{il})^{\alpha} (eE^{-il})^{\beta} (e'E^{il'})^{\alpha'} (e'E^{-il'})^{\beta'}$$

будет полученное таким образом разложение, которое можно написать в виде

$$\sum \Pi e^m e'^{m'} E^{i(ql+q'l')},$$

где $m = \alpha + \beta$, $m' = \alpha' + \beta'$, $q = \alpha - \beta$, $q' = \alpha' - \beta'$. Коэффициент $\Pi$ является оператором, зависящим от четырех чисел $m$, $m'$, $q$, $q'$, что мы отметим явно, обозначая его символом

$$\Pi_{qq'}^{mm'}.$$

Тогда будем иметь

$$F_1 = \sum e^m e'^{m'} E^{i(ql+q'l')} \Pi_{qq'}^{mm'} F.$$

В последней формуле $F$ нужно заменить разложением для нулевых эксцентриситетов, полученным в предыдущей главе.

Пусть

$$\sum AE^{i(p\zeta+p'\zeta')}$$

есть это разложение. Мы должны вычислить

$$\Pi_{qq'}^{mm'}\, [AE^{i(p\zeta+p'\zeta')}].$$

Чтобы применить этот оператор к функции $AE^{i(p\zeta+p'\zeta')}$, нужно выполнить различные дифференцирования по $\ln a$, $\ln a'$, $\zeta$, $\zeta'$. Но для дифференцирования по $\zeta$ или $\zeta'$, очевидно, достаточно умножить функцию на $ip$ или $ip'$. Следовательно, мы можем написать

$$\Pi_{qq'}^{mm'}\left[AE^{i(p\zeta+p'\zeta')}\right]=E^{i(p\zeta+p'\zeta')}\Pi_{qq'}^{mm'}(A).$$

В левой части $\Pi_{qq'}^{mm'}$ имеет тот же смысл, что и раньше, т. е. это целый многочлен относительно $D$, $D'$, $D_1$, $D_1'$; в правой части имеем тот же многочлен, но в нем символы $D_1$ и $D_1'$ должны быть заменены величинами $ip$ и $ip'$, так что он содержит только два оператора ($D$ и $D'$); кроме того, он применяется к функции $A$, зависящей лишь от $\ln a$ и $\ln a'$.

Окончательно получаем

$$\frac{1}{\Delta}=F_1=\sum e^m e'^{m'} E^{i(p\zeta+p'\zeta'+ql+q'l')}\Pi_{qq'}^{mm'}A.$$

Коэффициент при члене $e^m e'^{m'} E^{i(p\zeta+p'\zeta'+ql+q'l')}$ равен $\Pi_{qq'}^{mm'}A$, где $A$ означает коэффициент члена в разложении

$$E^{i(p\zeta+p'\zeta')},$$

который не зависит от эксцентриситетов и был определен в предыдущей главе.

274. В § 240 мы видели, что можно легко перейти от разложения по эксцентрическим аномалиям к разложению по средним аномалиям. Следовательно, вместо того чтобы получить последнее разложение непосредственно, можно прийти к нему косвенным путем, с помощью первого разложения, как это и сделал Ньюкомб.

Для этого возьмем в качестве переменных взаимную наклонность орбит и для каждой планеты логарифм большой полуоси, эксцентриситет, эксцентрическую аномалию $u$ и угол, который можно назвать *эксцентрической долготой* и который равен сумме эксцентрической аномалии и долготы перигелия, всегда отсчитываемой от линии узлов. Тогда нашей целью будет построить разложение

$$\frac{1}{\Delta}=\sum Ae^m e'^{m'} E^{i(p\eta+p'\eta'+qu+q'u')}, \tag{3'}$$

где $u$ и $u'$ обозначают две эксцентрические аномалии, а $\eta$ и $\eta'$ — две эксцентрические долготы.

275. Ньюкомб ввел еще другое упрощение, полагая

$$e=\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \quad e'=\frac{2\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2}.$$

Затем он разлагает не по степеням $e$ и $e'$, а по степеням $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ и, таким образом, получает разложение вида

$$\frac{1}{\Delta}=\sum A\varepsilon^m \varepsilon'^{m'} E^{i(p\eta+p'\eta'+qu+q'u')}. \tag{3''}$$

Очевидно, что от разложения (3″) легко перейти к разложению (3′) и, далее, к разложению (3).

Если положим

$$e = \sin \varphi,$$

то

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Заметим, между прочим, что канонические элементы $\xi_1$ и $\eta_1$ из § 58 пропорциональны $\sin \frac{\varphi}{2}$.

**276.** В разложениях (3), (3′), (3″) имеются известные члены, а именно те, для которых $m = m' = q = q' = 0$. Мы их определили в предыдущей главе. Они будут при этом одинаковыми для трех разложений, при условии, что $\eta$ и $\eta'$ заменены на $\zeta$ и $\zeta'$. Из этих известных членов теперь нужно вывести все другие. Для этого, и в случае применения переменных из § 274 или из § 275, достаточно использовать прием, изложенный в § 273, считая, что величины

$$e, \quad e', \quad \eta, \quad \eta', \quad u, \quad u',$$

или

$$\varepsilon, \quad \varepsilon', \quad \eta, \quad \eta', \quad u, \quad u'$$

играют ту же роль, какую играют в § 273 величины

$$e, \quad e', \quad \zeta, \quad \zeta', \quad l, \quad l'.$$

Как и в § 273, найдем, что коэффициент при

$$e^m e'^{m'} E^{i(p\eta + p'\eta' + qu + q'u')}$$

или при

$$\varepsilon^m \varepsilon'^{m'} E^{i(p\eta + p'\eta' + qu + q'u')}$$

будет равен

$$\Pi_{qq'}^{mm'} A,$$

где $A$ означает коэффициент при

$$E^{i(p\eta + p'\eta')},$$

тогда как $\Pi_{qq'}^{mm'}$ является оператором, который представляет собой не что иное, как коэффициент при

$$e^m e'^{m'} E^{i(qu + q'u')}$$

или при

$$\varepsilon^m \varepsilon'^{m'} E^{i(qu + q'u')}$$

в разложении символического выражения

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} E^{ip(v-\eta)+ip'(v'-\eta')} \tag{7}$$

по степеням $eE^{\pm iu}$, $e'E^{\pm iu'}$ или по степеням $\varepsilon E^{\pm iu}$, $\varepsilon' E^{\pm iu'}$.

Заметим, что в выражении (7) мы заменили $D_1$ и $D_1'$ через $ip$ и $ip'$, так же, как мы делали в § 273.

Различие в том, что операторы $\Pi$ имеют намного более простой вид, если используются переменные из § 274 и особенно из § 275.

**277.** Прежде всего сделаем одно замечание, которое остается справедливым независимо от того, применяются переменные § 273, 274 или 275.

Символическое выражение (6) равно произведению двух других таких же:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D E^{D_1(v-\zeta)}, \quad \left(\frac{r'}{a'}\right)^{D'} E^{D_1'(v'-\zeta')}. \tag{8}$$

То же самое относится и к выражению (7) при условии замены $\zeta$ и $\zeta'$ на $\eta$ и $\eta'$. Что касается операторов $D_1$ и $D_1'$, то они могут быть заменены на $ip$ и $ip'$ так же, как об этом было сказано выше.

Первое из выражений (8) зависит только от $eE^{\pm il}$ или от $eE^{\pm iu}$, или от $\varepsilon E^{\pm iu}$; второе, наоборот, зависит только от $e'E^{\pm il'}$, или от $e'E^{\pm iu'}$, или от $\varepsilon' E^{\pm iu'}$.

Учитывая замечание, сделанное в § 272, мы видим, что оператор $\Pi$ с четырьмя индексами может рассматриваться как произведение двух операторов с двумя индексами,

$$\Pi_{qq'}^{mm'} = \Pi_{q0}^{m0}\,\Pi_{0q'}^{0m'}. \tag{9}$$

Первый множитель зависит только от $D$ и $D_1$, т. е. от $D$ и $p$; второй — от $D'$ и $D_1'$, т. е. от $D'$ и $p'$. Кроме того, мы имеем соотношение между $D$ и $D'$. В самом деле,

$$DF = \frac{\partial F}{\partial \ln a} = a\,\frac{\partial F}{\partial a}$$

и точно так же

$$D'F = a'\,\frac{\partial F}{\partial a'}.$$

Но функция $\frac{1}{\Delta}$ является однородной минус первой степени относительно $a$ и $a'$. Это свойство не изменяется ни операцией $D$, ни операцией $D'$, а принадлежит всем функциям, к которым мы хотим применять или оператор $D$, или $D'$, так что будем иметь

$$a\frac{\partial F}{\partial a} + a'\frac{\partial F}{\partial a'} = -F,$$

т. е.

$$D+D'=-1.$$

Это равенство позволяет выразить $D'$ через $D$, так что наши операторы $\Pi$ будут целыми многочленами относительно простого оператора $D$ и относительно целых чисел $p$ и $p'$.

278. Мы будем иметь еще бо́льшие упрощения, если воспользуемся переменными § 275. Действительно, мы имеем тогда

$$\frac{r}{a}=1-e\cos u=\frac{1-2\varepsilon\cos u+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2},$$

откуда

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D=(1+\varepsilon^2)^{-D}(1-\varepsilon E^{iu})^D(1-\varepsilon E^{-iu})^D.$$

Остается рассмотреть множитель $E^{D_1(v-\eta)}$.

Заметим, что в силу интеграла площадей имеем

$$r^2\frac{dv}{dt}=na^2\sqrt{1-e^2}, \quad \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{dv}{dl}=\sqrt{1-e^2},$$

а, с другой стороны,

$$\frac{dl}{du}=1-e\cos u=\frac{r}{a},$$

откуда

$$\frac{dv}{du}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}=\frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos u+\varepsilon^2}=\frac{1}{1-\varepsilon E^{iu}}+\frac{\varepsilon E^{-iu}}{1-\varepsilon E^{-iu}},$$

$$\frac{dv}{du}=1+\sum\varepsilon^m E^{imu}+\sum\varepsilon^m E^{-imu}.$$

Интегрируя, будем иметь

$$v=u+\sum\frac{\varepsilon^m E^{imu}}{mi}-\sum\frac{\varepsilon^m E^{-imu}}{im}.$$

Отсюда видно, что $E^{D_1(v-\eta)}$ распадается на два множителя; первый из них зависит только от $\varepsilon E^{iu}$, как и второй множитель в выражении $\left(\frac{r}{a}\right)^D$, а второй множитель зависит только от $\varepsilon E^{-iu}$, так же как и третий множитель в $\left(\frac{r}{a}\right)^D$. Но лучше действовать, как указано ниже. Рассмотрим выражение

$$\frac{r}{a}E^{iv}.$$

Если предположить на мгновение долготу перигелия равной нулю, то это выражение будет равно

$$\cos u-e+i\sin u\sqrt{1-e^2}=\frac{E^{iu}(1-2\varepsilon+\varepsilon^2E^{-2iu})}{1+\varepsilon^2}$$

или

$$\frac{E^{iu}}{1+\varepsilon^2}(1-\varepsilon E^{-iu})^2.$$

Следовательно, какова бы ни была долгота перигелия, будем иметь

$$\frac{r}{a}E^{i(v-\eta)}=\frac{(1-\varepsilon E^{-iu})^2}{1+\varepsilon^2}.$$

Вернемся к символическому выражению

$$\left(\frac{r}{a}\right)^D E^{D_1(v-\eta)}=\left(\frac{r}{a}\right)^{D-p}E^{ip(v-\eta)}\left(\frac{r}{a}\right)^p,$$

которое можно написать в виде

$$(1+\varepsilon^2)^{-D}(1-\varepsilon E^{iu})^{D-p}(1-\varepsilon E^{-iu})^{D+p}.$$

Но по формуле бинома мы имеем

$$(1+\varepsilon^2)^D=\sum\frac{(D-k+1,\,k)}{k!}\varepsilon^{2k},$$

$$(1-\varepsilon E^{iu})^{D-p}=\sum\frac{(D-p-k'+1,\ k')}{k'!}(-\varepsilon)^{k'}E^{ik'u},$$

$$(1-\varepsilon E^{-iu})^{D+p}=\sum\frac{(D+p-k''+1,\ k'')}{k''!}(-\varepsilon)^{k''}E^{-ik''u},$$

где символ $(D,\,k)$ имеет тот же смысл, что и в предыдущей главе.

Эти формулы сразу же дают наши операторы П. Действительно, рассматривая сначала только два последних множителя и полагая

$$(1-\varepsilon E^{iu})^{D-p}(1-\varepsilon E^{-iu})^{D+p}=\sum H_q^m\varepsilon^m E^{iqu},$$

мы будем иметь

$$H_q^m=(-1)^m\frac{\left(D-p+1-\frac{m+q}{2},\ \frac{m+q}{2}\right)\left(D+p+1-\frac{m-q}{2},\ \frac{m+q}{2}\right)}{\left(\frac{m+q}{2}\right)!\left(\frac{m-q}{2}\right)!}$$

и, далее,

$$\Pi_{q0}^{m0}=H_q^m+\frac{(D,\ 1)}{1!}H_q^{m-2}+\frac{(D-1,\ 2)}{2!}H_q^{m-4}+\ldots$$

или

$$\Pi_{q0}^{m0}=\sum\frac{(D-k+1,\ k)}{k!}H_q^{m-2k}.$$

Отсюда видно, что все наши операторы представляются многочленами, целыми относительно $D$.

Шассин предпочитает получать операторы, которые входят в разложение (3), непосредственно, не прибегая к промежуточным разложениям (3'') и (3'). Эти операторы также являются многочленами, целыми относительно $D$, но имеют намного более сложные коэффициенты. Но им выведены рекуррентные соотношения для коэффициентов, которые существенно облегчают вычисления.

**279.** После того как построены операторы, легко уже получить и сами разложения. В предыдущей главе мы получили разложение величины $\frac{1}{\Delta}$ в различных формах, предполагая, что эксцентриситеты равны нулю. Прежде всего мы нашли

$$\frac{1}{\Delta}=\sum B\frac{a^m}{a'^{m+1}}E^{i(p\zeta+p'\zeta')},$$

где $B$ равен многочлену Гаусса относительно $\nu=\sin^2\frac{J}{2}$, умноженному на числовой множитель и на степени $\mu=\cos^2\frac{J}{2}$ и $\nu=\sin^2\frac{J}{2}$. Это — формула (27) из предыдущей главы. Вычисляя теперь

$$D\frac{a^m}{a'^{m+1}},\quad D'\frac{a^m}{a'^{m+1}},$$

находим

$$m\frac{a^m}{a'^{m+1}},\quad -(m+1)\frac{a^m}{a'^{m+1}}.$$

Следовательно, достаточно заменить $D, D', D_1, D_1'$ на $m, -(m+1)$, $ip$, $ip'$, так что выражение (6) просто приведется к виду

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m\left(\frac{r'}{a'}\right)^{-(m+1)}E^{ip(v-\zeta)+ip'(v'-\zeta')},$$

а разложение (3) — к виду

$$\frac{1}{\Delta}=\sum B\frac{r^m}{r'^{m+1}}E^{i(pv+p'v')},$$

впрочем, очевидному без лишних соображений.

Мы также нашли и другую форму разложения величины $\frac{1}{\Delta}$:

$$\frac{1}{\Delta}=\sum B\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(k)}E^{i(p\zeta+p'\zeta')},$$

где $B$ равно $\mu^{\frac{p+p'}{2}}\nu^{\frac{p-p'}{2}}$, умноженному на разность квадратов двух многочленов Гаусса. Это формула (26) предыдущей главы. В этом случае необходимость применения операторов оправдывается. Наши операторы П нужно применить к величине

$$\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(k)},$$

а для этого надо уметь применять к этому выражению простой оператор $D$ один или много раз. Но мы находим

$$D\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(k)}=\frac{\alpha}{a'}\cdot\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(k)}}{d\alpha},$$

и

$$D^m\frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(k)}$$

будут выражаться также очень просто с помощью высших производных коэффициента Лапласа $b_{\frac{1}{2}}^{(k)}$. Но в § 250 мы научились вычислять с помощью рекуррентных соотношений производные коэффициентов Лапласа. Следовательно, задача может считаться полностью решенной.

# ГЛАВА XX

# СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

**280.** В § 240 мы видели, что главная часть возмущающей функции $\frac{1}{\Delta}$ может быть разложена в виде

$$\sum B_{mm'} E^{i(mu+m'u')}.$$

или в виде

$$\sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')}.$$

Коэффициенты этих разложений (см. § 242) могут быть выражены определенными интегралами

$$-4\pi^2 B_{mm'} = \int\int \frac{dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x,y)}} \tag{1}$$

и

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{Q \cdot E^{\Omega}\,dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x,y)}}, \tag{2}$$

где

$$x = E^{iu}, \quad y = E^{iu'}, \quad R = x^2 y^2 \Delta^2,$$

$$Q = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right],$$

$$2\Omega = me\left(x - \frac{1}{x}\right) + m'e'\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

а интегрирование производится и по $x$ и по $y$ вдоль окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

Коэффициенты $A_{mm'}$, $B_{mm'}$ являются функциями наклонности, эксцентриситетов, долгот перигелиев, отсчитываемых от линии узлов и, наконец, больших полуосей. В двух предыдущих главах мы научились разлагать эти функции по степеням эксцентриситетов и наклонностей и теперь надо исследовать условия сходимости этих рядов.

Для этого нужно только применить метод Коши и найти особые точки этих функций.

**281.** Теперь нужно показать, как находятся особые точки функций, представляемых определенными интегралами и прежде всего простыми определенными интегралами. Пусть

$$\int R(x, z)\,dx$$

представляет собой определенный интеграл по $x$, взятый вдоль некоторого контура. Этот интеграл является тогда функцией параметра $z$.

Для того чтобы эта функция имела некоторое критическое значение $z$, необходимо прежде всего, чтобы одна из особых точек функции $R(x, z)$, рассматриваемой как функция $x$, находилась бы на контуре интегрирования. Но так как контур интегрирования можно деформировать непрерывным образом, то можно избежать прохождения через особую точку; отсюда следует, что можно остановиться на том случае, когда контур заключается между особыми точками. Таким образом, мы получим все критические значения $z$, считая, что две особые точки функции $R$, рассматриваемой как функция $x$, совпадают. Но не все критические значения, найденные таким образом, являются подходящими. В самом деле, нужно, чтобы две особые точки, которые впоследствии совместятся, перед совмещением находились бы по разные стороны контура интегрирования.

Пусть уравнение

$$\varphi(x, z) = 0$$

выражает то, что функция $R(x, z)$ имеет особенность, и допустим, что оно распадается на некоторое число независимых уравнений, например, на три:

$$\varphi_1(x, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, z) = 0, \qquad \varphi_3(x, z) = 0.$$

Тогда критические значения $z$ можно получить одним из двух следующих способов:

1. Приравнивая нулю две из трех функций $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, например,

$$\varphi_1(x, z) = \varphi_2(x, z) = 0.$$

Исключая $x$ и разрешая относительно $z$, находим критическое значение $z$.

2. Приравнивая нулю одну из трех функций и ее производную, например,

$$\varphi_1(x, z) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0.$$

Исключая отсюда $x$ и разрешая относительно $z$, найдем критическое значение $z$.

282. Рассмотрим теперь двойной интеграл

$$\iint R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

зависящий от параметра $z$ и взятый по какой-нибудь области. Самым простым частным случаем является тот случай, когда интегрирование производится по $x$ вдоль контура, не зависящего от $y$, и по $y$ — вдоль контура, не зависящего от $x$. Как раз этот случай имеет место при вычислении интегралов (1) и (2). Действительно, здесь два контура $C_x$ и $C_y$ не зависят соответственно от $y$ и $x$ и являются окружностями единичного радиуса с центром в начале координат соответственно в плоскости $x$ и в плоскости $y$.

Итак, пусть $C_x$ и $C_y$ — два определенных контура интегрирования по $x$ и по $y$. Пусть

$$\theta(y, z) = \int R(x, y, z)\,dx$$

представляет собой интеграл, взятый вдоль $C_x$. Тогда наш двойной интеграл равен

$$\eta(z) = \int \theta(y, z)\,dy$$

и берется вдоль $C_y$.

Остается применить принципы предыдущего параграфа к двум простым интегралам

$$\int R\,dx, \qquad \int \theta\,dy.$$

Мы должны заметить, однако, что таким образом мы рискуем получить только необходимые условия. Действительно, выше мы заметили, что не все критические значения будут пригодны.

Мы получим и другие, также необходимые, условия, производя преобразования координат и, в частности, меняя местами $x$ и $y$, т. е. меняя порядок интегрирования.

Пусть уравнение

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

выражает условие, что функция $R$ имеет особенность. Разложим это уравнение на три неприводимых уравнения:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_3(x, y, z) = 0. \tag{3}$$

Тогда особенности функции $\theta(y, z)$ можно получить следующим образом:

1) приравнивая нулю две из трех функций $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, например,

$$\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) = 0;$$

2) приравнивая нулю одну из функций и ее производную, например

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0.$$

Не все эти особенности могут быть для нас подходящими, так как может случиться, что две совпадающие особые точки были расположены по одну сторону контура интегрирования.

Чтобы получить особенности функции $\eta(z)$, рассмотрим теперь те особенности функции $\theta(y, z)$, которые получаются из одной из двух систем уравнений,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0,$$

и найдем условия, при которых две из этих особенностей совпадают.

Если будем рассматривать $z$ как параметр, а $x$ и $y$ — как координаты точки на плоскости, то уравнения (3) представляют некоторые плоские кривые.

Особенности функции $\theta$, вытекающие из системы вида

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

будут соответствовать точкам пересечения этих кривых, а особенности, вытекающие из системы вида

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0,$$

будут соответствовать точкам касания одной из этих кривых с касательной, параллельной оси $y$.

Чтобы эти две особенности совпадали, необходимо, чтобы:

1) обращались в нуль одновременно все три функции

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0,$$

2) или одновременно выполнялись равенства

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \qquad \varphi_2 = 0,$$

но так как это условие не должно зависеть от выбора координат и, в частности, должно существовать при перемене местами $x$ и $y$, то должно иметь место также

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \qquad \varphi_2 = 0$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0.$$

Последние равенства говорят о том, что кривые (3) будут иметь двойную точку.

3) Кривые

$$\varphi_1=0, \qquad \varphi_2=0$$

касаются друг друга,

4) или, наконец, касаются друг друга кривые

$$\varphi_1=0, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0,$$

но это влечет за собой или

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0,$$

или $\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}=0$. Так как это условие не должно меняться при перемене местами $x$ и $y$, то во всех случаях мы должны иметь

$$\varphi_1=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0.$$

Итак, критическими значениями $z$ являются:

1) значения, при которых все три кривые (3) пересекаются в одной точке;

2) значения, при которых две из этих кривых касаются;

3) значения, при которых одна из этих кривых имеет двойную точку.

Эти значения могут нас не устраивать лишь потому, что две особые точки, которые совпадают, до этого могут быть расположены по одну сторону от контура интегрирования. Кроме того, мы видели, что наши условия являются только необходимыми.

**283.** Применим этот прием к интегралам (1) и (2). Подынтегральная функция будет голоморфной как относительно $x$ и $y$, так и относительно эксцентриситетов $e$, $e'$ и $\sin\frac{J}{2}$, где $J$ — наклонность.

Исключением будут только следующие случаи:

1) когда $e=1$ и $e'=1$ (условие, в которое не входят $x$ и $y$ и к которому мы еще вернемся);

2) когда $x$ и $y$ обращаются в нуль или в бесконечность;

3) когда $\Delta$ обращается в нуль, т. е. когда

$$R=\Delta^2\cdot x^2y^2,$$

который является многочленом, целым относительно $x$ и $y$, обращается в нуль.

Это имеет место, каковы бы ни были целые числа $m$ и $m'$; это, впрочем, имеет место так же и для интеграла (2), как и для интеграла (1), так как

$$Q \text{ и } E^{\Omega}$$

не перестают быть голоморфными функциями, если $x$ и $y$ не обращаются в нуль или в бесконечность.

Кривые, соответствующие уравнениям (3), т. е. те уравнения, которые выражают, что подынтегральная функция перестает быть голоморфной, приводятся для интегралов (1) и (2) к четырем прямым

$$x=0, \quad y=0, \quad x=\infty, \quad y=\infty \tag{4}$$

и к кривой шестой степени

$$R=0. \tag{4'}$$

Последняя кривая в случае нулевой наклонности распадается на две кривые третьего порядка,

$$R_1=0, \qquad R_2=0. \tag{4''}$$

Чтобы найти критические значения эксцентриситетов или наклонностей, мы должны искать такие значения, для которых три кривые из (4) или (4′) пересекаются, или для которых две из этих кривых касаются, или, наконец, для которых одна из этих кривых имеет двойную точку.

Но так как интегралам (1) и (2) соответствуют те же самые кривые, то значения, для которых имеет место один из указанных случаев, будут одинаковыми как для интеграла (1), так и для интеграла (2).

Итак, критические значения эксцентриситетов или наклонностей для интегралов (1) и (2) совпадают.

Можно поставить еще один вопрос: мы видели, что не все критические значения являются подходящими. Не может ли случиться так, что одно из критических значений будет годиться для интеграла (1) и не будет пригодно для интеграла (2), или наоборот?

Ответ должен быть отрицательным. В самом деле, как сделать, чтобы некоторые критические значения были подходящими, а другие не подходящими? Для этого мы должны менять непрерывным образом один из наших параметров, например, эксцентриситет $e$, и в то же время должны деформировать непрерывным образом контуры интегрирования. Мы должны так деформировать контуры, чтобы ни одно из особых значений, определяемых уравнениями (4) и (4′), не находилось в области интегрирования. Если, изменяя $e$ непрерывно от нуля до некоторого значения $e_0$, можно сделать так, чтобы это условие никогда не переставало выполняться, то это значит, что $e_0$ не является истинным критическим значением; в этом случае $e_0$ не подходит. Если, наоборот, невозможно распорядиться так, чтобы условие выполнялось (потому что, как мы объясняли выше, контур интегрирования находится между двумя особыми точками), то это значит, что $e_0$ является истинным критическим значением; $e_0$ подходит.

Будем варьировать, следовательно, $e$ от нуля до $e_0$, и в то же время будем деформировать контуры интегрирования, исходя из двух начальных контуров

$$|x|=1, \qquad |y|=1,$$

которые одинаковы для интегралов (1) и (2). Если $e_0$ не подходит для интеграла (1), то это значит, что мы можем деформировать наши контуры таким образом, что ни в какой момент ни одно из особых значений, удовлетворяющих уравнениям (4) и (4′), не находится в области интегрирования. Но если это условие никогда не перестает выполняться для интеграла (1), то тем более оно не перестанет выполняться для интеграла (2), так как уравнения (4) и (4′), которые определяют их особые значения и для интеграла (1), и для интеграла (2), совпадают. Следовательно, $e_0$ тем более не подходит для интеграла (2), что и требовалось доказать.

Итак, сформулируем первый результат.

*Коэффициенты $B_{mm'}$ разложения возмущающей функции по эксцентрическим аномалиям, так же как и коэффициенты $A_{mm'}$ разложения по средним аномалиям, разлагаются по степеням эксцентриситетов и наклонностей.*

*Интервалы сходимости этих новых разложений и для коэффициентов $B_{mm'}$ и для коэффициентов $A_{mm'}$ являются одними и теми же. Они являются одинаковыми для всех коэффициентов, каковы бы ни были целые числа $m$* и *$m'$.*

284. Рассмотрим особо случай нулевых эксцентриситетов и случай нулевой наклонности. Если эксцентриситеты равны нулю, то эксцентрические и средние аномалии совпадают, поэтому

$$Q=1, \qquad \Omega=0,$$

$$A_{mm'}=B_{mm'}=-\frac{1}{4\pi^2}\int\int\frac{dx\,dy}{x^m y^{m'}\sqrt{R(x, y)}}.$$

Последний интеграл можно написать и в виде

$$\int\int\frac{dx\,dy}{x^{m+1}y^{m'+1}\Delta}$$

или, полагая, как и в § 259, что

$$z=\frac{x}{y}, \qquad w=xy,$$

мы можем написать

$$\frac{1}{2}\iint \frac{dz\,dw}{x^m y^{m'+2}\Delta}=\frac{1}{2}\iint \frac{dz\,dw}{z^p w^{p'}\Delta},$$

где

$$p=\frac{m-m'-2}{2}, \qquad p'=\frac{m+m'+2}{2}.$$

Когда каждая из переменных $x$ и $y$ описывает в своей плоскости окружность единичного радиуса, $z$ и $w$ делают то же; но каждой паре значений $z$ и $w$, расположенных на этих окружностях, соответствуют д в е пары значений $x$ и $y$. Следовательно, получается интеграл, умноженный на два, так что окончательно можно написать

$$-4\pi^2 A=\iint \frac{dz\,dw}{z^p w^{p'}\Delta}, \tag{5}$$

где интегрирование производится как по $z$, так и по $w$ вдоль окружности единичного радиуса с центром в начале координат, т. е. при

$$|z|=|w|=1.$$

Нам удобнее иметь дело с интегралом (5), чем с интегралом (1). Будем иметь тогда

$$\Delta^2=a^2+a'^2+\mu aa'\left(z+\frac{1}{z}\right)+\nu aa'\left(w+\frac{1}{w}\right).$$

Тогда особые кривые представляются уравнениями

$$z=0, \quad w=0, \quad z=\infty, \quad w=\infty, \quad \Delta^2=0.$$

Далее, мы должны найти условие, при котором три из этих кривых пересекаются в одной точке, или две из них касаются, или одна из них имеет двойную точку.

Первое условие не должно нас беспокоить, так как кривая $\Delta^2=0$ в с е г д а проходит через начало координат; но для того чтобы функция, определенная определенным интегралом, имела особую точку, необходимо, чтобы две п е р в о н а ч а л ь н о р а з л и ч н ы е особые точки подынтегральной функции совпали, т. е., например, чтобы три особые кривые, которые п е р в о н а ч а л ь н о н е п р о х о д и л и ч е р е з о д н у т о ч к у, стали иметь общую точку. Этот случай здесь не имеет места, так как кривые $\Delta^2=0$, $z=0$, $w=0$ в с е г д а проходят через одну общую точку.

Кривая $\Delta^2=0$ также всегда проходит через точки

$$z=0, \quad w=\infty; \quad z=\infty, \quad w=0; \quad z=w=\infty,$$

так что нам нет необходимости заниматься этим условием.

Для того чтобы кривые $z = 0$ или $z = \infty$ касались кривой $\Delta^2 = 0$, необходимо, чтобы

$$\mu a a' = 0, \quad \text{откуда} \quad \mu = 0.$$

Для того чтобы кривые $w = 0$ или $w = \infty$ касались кривой $\Delta^2 = 0$, необходимо, чтобы

$$\nu a a' = 0, \quad \text{откуда} \quad \nu = 0.$$

Для того чтобы кривая $\Delta^2 = 0$ имела двойную точку, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial w} = \frac{\partial \Delta^2}{\partial z} = 0,$$

т. е.

$$w = \pm 1, \qquad z = \pm 1,$$

и

$$a^2 + a'^2 \pm 2\mu a a' \pm 2\nu a a' = 0. \tag{6}$$

**285.** Рассмотрим подробнее эти результаты. Прежде всего убедимся в том, что решения $\mu = 0$ или $\nu = 0$ непригодны. Действительно, допустим сначала, что, заменяя $\mu$ на $1 - \nu$, мы разлагаем затем по степеням $\nu$. Если значение $\nu = 0$ является истинной особой точкой для ветви рассматриваемой функции, то разложение по степеням $\nu$ всегда будет расходиться. Но мы знаем, что это не так.

Если же значение $\mu = 0$ (или $\nu = 1$) является особой точкой, то мы должны сделать вывод, что ряд расходится при $|\nu| > 1$, но нас не должно это беспокоить, так как $\nu$ всегда меньше 1.

Допустим теперь, что мы разлагаем по степеням $\mu$ и $\nu$, рассматриваемые как две независимые переменные. Если $\mu = 0$ или $\nu = 0$ являются действительными особыми точками ветви рассматриваемой функции, то разложение всегда расходится, но нам известно, что это не так и что при достаточно малых значениях $\mu$ и $\nu$ разложение сходится.

Легко, впрочем, убедиться, что при малых значениях $\mu$ и $\nu$ особые точки, совпадающие, например, при $\nu = 0$, лежат или обе внутри или обе вне контура интегрирования.

Возникает вопрос, будет ли это соблюдаться для больших значений $\mu$? Но на это легко ответить. Пусть две особые точки при малом $\mu$ обе лежат внутри контура. При непрерывном изменении $\mu$ обе особые точки $A$ и $B$ и контур интегрирования также будут изменяться непрерывным образом; эти две точки могут перестать находиться внутри контура только в том случае, когда одна из них, например $A$, пересечет этот контур.

Но тогда мы всегда можем заставить контур «б е ж а т ь» от точки $A$, по крайней мере до тех пор, пока $A$ не совпадет с другой особой точкой $C$, которая сначала была вне контура, и которая поэтому отлична от $B$. Но тогда сходимость нарушится уже из-за совпадения точек $A$ и $C$.

Следовательно, нам не придется беспокоиться о возможном совпадении точек $A$ и $B$, так как такое совпадение может привести к особенности функции только после того, как сходимость будет нарушена другими причинами.

Таким образом, особые точки $\mu = 0$, $\nu = 0$ не подходят для ветви рассматриваемой функции. Нужно добавить, что они могут подходить к другим ветвям функции, которые определяются интегралами (5), вычисленными вдоль других контуров, а не вдоль контуров, определяемых уравнениями

$$|z| = |w| = 1.$$

**286.** Итак, для рассматриваемой ветви нужно исследовать только условие (6).

Положим, что $\nu = \sin^2 \frac{J}{2}$, и допустим, что имеем разложение по возрастающим степеням $\nu$. Условие (6) принимает вид

$$a^2 + a'^2 + 2aa' [\pm (1 - \nu) \pm \nu] = 0,$$

и это равенство можно написать двумя способами, в зависимости от знаков,

$$(a' \pm a)^2 = 0, \quad a^2 + a'^2 \pm 2aa' (1 - 2\nu) = 0. \tag{5'}$$

В первое из этих соотношений $\nu$ не входит; из второго получаем

$$\pm \nu = \frac{(a' \pm a)^2}{4aa'}.$$

Радиус сходимости, следовательно, будет равен меньшему из двух значений

$$\left| \frac{(a' \pm a)^2}{4aa'} \right|,$$

т. е.

$$\frac{(a' - a)^2}{4aa'}.$$

Итак, условие сходимости разложения будет

$$\sin^2 \frac{J}{2} < \frac{(a' - a)^2}{4aa'}.$$

Анализ равенств (5') показывает также, что коэффициенты $A_{mm'}$ разлагаются по степеням $a$, если только

$$a < a'.$$

Будем рассматривать теперь $\mu$ и $\nu$ как независимые переменные и разложим по степеням $\mu$ и $\nu$.

Соотношение (6), которое определяет границы сходимости, можно написать в виде

$$a^2 + a'^2 \pm 2aa'\mu \pm 2aa'\nu = 0$$

или

$$\pm\mu \pm \nu = \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Поэтому условие сходимости будет иметь вид

$$|\mu| + |\nu| < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Это условие всегда выполняется, так как $|\mu| = \mu$, $|\nu| = \nu$ и

$$|\mu| + |\nu| = 1 < \frac{a^2 + a'^2}{2aa'}.$$

Таким образом, наши коэффициенты всегда могут быть разложены по степеням $\cos^2\frac{J}{2}$ и $\sin^2\frac{J}{2}$.

В § 270 мы получили одно разложение по степеням величин

$$\frac{\mu\alpha}{1+\alpha^2}, \quad \frac{\nu\alpha}{1+\alpha^2}.$$

[Это разложение (28) из главы XVIII.] Из изложенного выше следует, что это разложение сходится, если только

$$\left|\frac{\mu\alpha}{1+\alpha^2}\right| + \left|\frac{\nu\alpha}{1+\alpha^2}\right| < 1.$$

Но так как $\mu$, $\nu$ и $\alpha$ существенно положительны и меньше 1 и, следовательно, $\frac{\alpha}{1+\alpha^2} < \frac{1}{2}$, и так как $\mu + \nu = 1$, то мы будем иметь

$$\left|\frac{\mu\alpha}{1+\alpha^2}\right| + \left|\frac{\nu\alpha}{1+\alpha^2}\right| = (\mu + \nu)\frac{\alpha}{1+\alpha^2} < \frac{1}{2},$$

Отсюда следует, что условие сходимости всегда выполняется.

От разложения (28) главы XVIII легко перейти к разложению (27) по степеням $\alpha$, $\mu$ и $\nu$, для чего достаточно разложить каждый член вида

$$\left(\frac{\mu\alpha}{1+\alpha^2}\right)^m \left(\frac{\nu\alpha}{1+\alpha^2}\right)^n$$

по степеням $\alpha$, а это возможно, если $\alpha < 1$. Так как это условие всегда выполняется, то разложение (27) всегда сходится.

**287.** Рассмотрим теперь частный случай, в котором наклонность равна нулю, и разложим по степеням эксцентриситетов $e$ и $e'$. Кривые, соответствующие (3), даются уравнениями (4) и (4'):

$$x=0, \quad y=0, \quad x=\infty, \quad y=\infty, \quad R_1=0, \quad R_2=0.$$

1. Прежде всего найдем условие, при котором кривая $R_1 = 0$ имеет двойную точку. Для этого выясним смысл этих уравнений. Пусть $C$ является орбитой первой планеты, а $C'$ — орбитой второй планеты. По предположению, эти два конических сечения лежат в одной плоскости. Каждому значению $x$ соответствует точка $M$ на орбите $C$ и каждому значению $y$ соответствует точка $M'$ на орбите $C'$.

Уравнение $R = 0$ выражает в этом случае то, что расстояние $MM'$ равно нулю, но из этого еще не следует, что точки $M$ и $M'$ совпадают, так как эти две точки могут быть мнимыми.

Уравнение $R_1 = 0$ выражает то условие, что угловой коэффициент прямой $MM'$ равен $\sqrt{-1}$, а уравнение $R_2 = 0$ говорит о том, что этот коэффициент равен $-\sqrt{-1}$.

Уравнения $x = 0$, $x = \infty$ выражают то, что точка $M$ является бесконечно удаленной на одной из двух бесконечных ветвей конического сечения $C$; уравнения $y = 0$, $y = \infty$ выражают то, что точка $M'$ находится в бесконечности на коническом сечении $C'$.

Для того чтобы кривая $R_1 = 0$ имела двойную точку, необходимо и достаточно, чтобы прямая $MM'$ была касательной одновременно к коническим сечениям $C$ и $C'$. Конические сечения $C$ и $C'$ имеют общий фокус — Солнце. Прямая $MM'$, которая является изотропной касательной к $C$, должна проходить через один из фокусов орбиты $C$ и точно так же она должна проходить через один из фокусов $C'$. Пусть $S$ является общим фокусом $C$ и $C'$, $R$ — вторым фокусом орбиты $C$, $R'$ — вторым фокусом орбиты $C'$.

Чтобы два конических сечения имели общую изотропную касательную (кроме той, которая проходит через $S$ и которая всегда существует и поэтому не подходит), необходимо, чтобы прямая $MM'$ проходила через $R$ и $R'$, т. е. чтобы прямая $MM'$ имела угловой коэффициент, равный $\sqrt{-1}$. Это условие аналитически выражается следующим образом:

$$aeE^{-i\bar{\omega}} = a'e'E^{-i\bar{\omega}'},$$

где через $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ обозначены долготы перигелиев.

Это и является условием того, что $R_1 = 0$ имеет двойную точку (кроме той, которой соответствует изотропная касательная, проходящая через $S$, всегда существующая и поэтому для нас не подходящая).

2. Аналогично, условие, что кривая $R_2 = 0$ имеет двойную точку, можно написать в виде

$$aeE^{i\bar{\omega}} = a'e'E^{i\bar{\omega}'}.$$

3. Для того чтобы кривые $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ касались друг друга, необходимо, чтобы конические сечения $C$ и $C'$ пересекались, ибо конечные точки пересечения кривых $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ соответствуют четырем точкам пересечения конических сечений. Следовательно, нужно, чтобы расстояние между фокусами $R$ и $R'$ было равно сумме или разности больших полуосей. Это записывается в виде

$$(aeE^{i\bar{\omega}} - a'e'E^{i\bar{\omega}'})(aeE^{-i\bar{\omega}} - a'e'E^{-i\bar{\omega}'}) = (a' \pm a)^2.$$

4. Далее, нужно убедиться, не может ли совпадать одна из точек пересечения кривых (4″) с одной из точек пересечения одной из этих кривых и одной из прямых (4), или с точкой пересечения двух прямых. Эти два типа точек соответствуют четырем точкам пересечения кривых $C$ и $C'$ ($M$ и $M'$ совпадают) и случаю, в котором две точки, $M$ и $M'$, находятся в бесконечности на конических сечениях $C$ и $C'$.

Итак, условие состоит в том, что одна из четырех точек пересечения, $C$ и $C'$, удаляется в бесконечность, т. е. что одна из асимптот $C$ параллельна одной из асимптот $C'$.

Это обстоятельство можно записать одним из четырех способов:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}E^{2i\bar{\omega}} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi'}{2}E^{2i\bar{\omega}'}, \qquad \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}E^{-2i\bar{\omega}} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi'}{2}E^{-2i\bar{\omega}'},$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}E^{2i\bar{\omega}} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi'}{2}E^{2i\bar{\omega}'}, \qquad \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}E^{-2i\bar{\omega}} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi'}{2}E^{-2i\bar{\omega}'},$$

где

$$e = \sin\varphi, \quad e' = \sin\varphi'.$$

Мы можем также написать

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{1 \mp \sqrt{1-e^2}}E^{2i\bar{\omega}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-e'^2}}{1 \mp \sqrt{1-e'^2}}E^{2i\bar{\omega}'}.$$

причем в каждой дроби следует брать верхние или нижние знаки.

Таким образом, уравнения, определяющие критические значения, имеют вид

$$aeE^{-i\bar{\omega}} = a'e'E^{-i\bar{\omega}'}, \tag{7}$$

$$aeE^{i\bar{\omega}} = a'e'E^{i\bar{\omega}'}, \tag{8}$$

$$(aeE^{i\bar{\omega}} - a'e'E^{i\bar{\omega}'})(aeE^{-i\bar{\omega}} - a'e'E^{-i\bar{\omega}'}) = (a' \pm a)^2, \tag{9}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-e^2}}{1 \mp \sqrt{1-e^2}}E^{2i\bar{\omega}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-e'^2}}{1 \mp \sqrt{1-e'^2}}E^{2i\bar{\omega}'}. \tag{10}$$

К ним следует добавить условия

$$e=1, \quad e'=1. \tag{11}$$

Но мы видели, что все найденные таким образом значения могут оказаться не подходящими и даже легко видеть, что они не могут все подходить.

В самом деле, рассмотрим уравнение (7). Оно удовлетворяется при

$$e=e'=0.$$

Следовательно, если критические значения, определенные этим уравнением, подходят, то наша функция представляет особенности для малых значений $e$ и $e'$. Тогда наши коэффициенты не могут быть разложены по степеням $e$ и $e'$, *даже для очень малых значений этих величин*. Но мы знаем, что на самом деле это не так, следовательно, значения, определенные уравнением (7), не могут быть подходящими.

Аналогичные рассуждения применимы и к уравнениям (8) и (10). Важно заметить, что уравнение (10), несмотря на присутствие двойных знаков, представляет только одно неприводимое уравнение, которое оказывается алгебраическим, если освободиться от радикалов.

Остались нерассмотренными уравнения (9) и (11). Чтобы найти предел сходимости, определяемый уравнением (9), заметим, что $a$, $a'$, $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$ заданы и являются вещественными, но что $e$ и $e'$, которые играют роль независимых переменных, могут принимать и мнимые значения.

Придадим величине $e$ различные значения с постоянным модулем $|e|$, но с переменным аргументом. То же самое сделаем и с $e'$. Максимум модуля левой части уравнения (9) будет равен

$$a^2|e^2|+a'^2|e'^2|+2aa'|ee'\cos(\bar{\omega}-\bar{\omega}')|;$$

поэтому условие сходимости имеет вид

$$a^2|e^2|+a'^2|e'^2|+2aa'|ee'\cos(\bar{\omega}-\bar{\omega}')|<(a'-a)^2.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что единственные условия сходимости нашего разложения следующие:

$$\left.\begin{array}{c} |e|<1, \quad |e'|<1, \\ a^2|e^2|+a'^2|e'^2|+2aa'|ee'\cos(\bar{\omega}-\bar{\omega}')|<(a'-a)^2. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Не будем входить во все детали этого вопроса, но все же объясним в нескольких словах, как можно придать нашим рассуждениям полную строгость.

Рассмотрим область $D$, определяемую неравенствами (12). Она не содержит особых значений, удовлетворяющих уравнениям (9) и (11), но содержит те особые значения, которые удовлетворяют уравнениям (7), (8) и (10). Если одно из этих значений является подходящим, то такими же будут и все другие, удовлетворяющие тому же уравнению, и которые могут встретиться при непрерывном изменении $e$ и $e'$. Это имеет место по крайней мере тогда, когда функция определяется в результате непрерывного изменения переменных.

Этого можно достичь путем непрерывного изменения одного из особых значений, которые удовлетворяют уравнениям (7), (8) и (10) и неравенствам (12), при условии, что $e = 0$, $e' = 0$, не нарушая этих уравнений и не выходя из области $D$. Особое значение $e = 0$, $e' = 0$ не является подходящим, и никакое из этих значений в отдельности также не подходит.

Итак, условия (12) являются единственными условиями сходимости.

Третье из условий (12) всегда выполняется, каковы бы ни были $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}'$, если имеем

$$|ae|+|a'e'|<a'-a,$$

т. е. если расстояние перигелия одной из планет больше расстояния афелия другой планеты.

288. Теорема, которую мы применили в конце предыдущего параграфа, аналогична теореме, с которой мы встречались в § 285, и может быть доказана тем же методом. Но лучше всего обратиться к одной теореме анализа.

Если функция двух переменных $F(x, y)$ является голоморфной в некоторой односвязной области $D$, кроме, быть может, точек, удовлетворяющих аналитическому соотношению

$$x=\varphi(y),$$

то если одна из этих точек $y = y_0$, $x = \varphi(y_0)$ является обыкновенной, то такими же будут и все близкие точки.

Опишем теперь в плоскости $x$ вокруг сомнительной точки $x = \varphi(y)$ малый контур. Пусть $x = \psi(y)$ является одной из точек этого контура. Мы можем допустить, что контур деформируется непрерывным образом, когда $y$ изменяется непрерывно, и что функция $\psi(y)$ является аналитической. Тогда прежде всего покажем, что функция $F(x, y)$ явлется однозначной.

Действительно, допустим, что она не является таковой, и что $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ являются двумя ее определениями (ветвями) и что мы переходим от одного к другому, когда $x$ описывает контур. Тогда

$$F_1[\psi(y),\ y]-F_2[\psi(y),\ y]=\Theta(y)$$

является аналитической функцией $y$, но эта функция равна нулю при $y = y_0$ и для близких к нему значений, так как функция $F(x, y)$ является однозначной для $y = y_0$ и для близких значений. Итак, функция $\Theta(y)$ равна нулю при всех близких значениях $y$ и, следовательно, $F(x, y)$ является однозначной для всех значений $y$.

Так как $F$ является однозначной, то условие того, что $x = \varphi(y)$ является обыкновенной точкой, заключается в том, что интеграл

$$\int x^m F(x, y)\, dx,$$

взятый вдоль контура, равен нулю, каково бы ни было положительное число $m$.

Этот интеграл является аналитической функцией $y$. Он равен нулю при $y = y_0$ и для близких к нему значений, так как $x = \varphi(y_0)$ является обыкновенной точкой, так же как и близкие к ней точки. Следовательно, он тождественно равен нулю и точка $x = \varphi(y)$ является обыкновенной, каково бы ни было $y$.

Теорема легко распространяется и на случай, когда все точки области $D$ являются обыкновенными, кроме, быть может, тех, которые удовлетворяют одному из $n$ аналитических соотношений

$$x = \varphi_1(y), \quad x = \varphi_2(y), \quad \ldots, \quad x = \varphi_n(y),$$

и для которых известно, что точки

$$\begin{aligned} &y = y_1, \quad x = \varphi_1(y_1), \\ &y = y_2, \quad x = \varphi_2(y_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y = y_n, \quad x = \varphi_n(y_n) \end{aligned}$$

являются обыкновенными.

Мы ограничимся этими частными случаями, хотя тот же самый метод может быть применен и в общем случае. Заметим также, что Феро рассматривал другие частные случаи *).

*) Feraud, Annales de l'Observatoire de Bordeaux, т. X.

ГЛАВА XXI

# РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**289.** Вернемся к формулам § 280:

$$-4\pi^2 B_{mm'} = \iint \frac{dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x,\ y)}}, \tag{1}$$

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \iint \frac{Q \cdot E^{\Omega}\,dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x,\ y)}}, \tag{2}$$

которые определяют коэффициенты разложения как по эксцентрическим, так и по средним аномалиям. Напомним, что

$$R = x^2 y^2 \Delta^2, \quad Q = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right],$$

$$2\Omega = me\left(x - \frac{1}{x}\right) + m'e'\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Коэффициенты $A$ и $B$ являются функциями элементов, например, больших полуосей, эксцентриситетов и наклонностей, и можно провести аналитическое исследование этих функций. Покажем, что:

1. Эти функции удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых суть рациональные функции элементов.

2. Между этими функциями или по крайней мере между коэффициентами $B$ существуют линейные рекуррентные соотношения, коэффициенты которых суть рациональные функции элементов.

**290.** Для этого мы рассмотрим более общее выражение, определяемое, так же как $A$ и $B$, двойным интегралом. Пусть

$$\Pi = \iint \frac{H E^{\Omega}\,dx\,dy}{xyF^s} \tag{3}$$

есть двойной интеграл, взятый вдоль замкнутых контуров, где $H$, $\Omega$ и $F$ суть целые многочлены относительно $x$, $\frac{1}{x}$, $y$, $\frac{1}{y}$ степени $k$, $\omega$, $f$ соответственно. Наконец, $s$ есть половина нечетного числа.

Прежде чем пойти дальше, необходимо объяснить, что̀ мы подразумеваем под степенью многочлена относительно $x$, $\frac{1}{x}$, $y$, $\frac{1}{y}$. Подобный многочлен имеет вид

$$\sum Ax^a y^b,$$

где $a$ и $b$ являются целыми положительными или отрицательными числами. Мы будем говорить, что он является многочленом степени $m$, если

$$|a| \leqslant m, \quad |b| \leqslant m.$$

Многочлен степени $m$ содержит $(2m+1)^2$ произвольных коэффициентов, так как $a$, так же как и $b$, может принимать $(2m+1)$ значений.

Установив это, предположим, что $\Omega$ и $F$ являются заданными многочленами, а многочлен $H$ будет варьироваться. Имеется $(2h+1)^2$ многочленов $H$ линейно независимых, степени $h$, но для некоторых из них функция $\Pi$ равна нулю. Действительно, если $P$ является многочленом, то интеграл

$$\int\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{PE^\Omega}{yF^{s-1}}\right) dx\, dy$$

будет равен нулю. В самом деле, проинтегрируем прежде всего по $x$. Найдем

$$\frac{PE^\Omega}{yF^{s-1}}.$$

Так как мы интегрируем вдоль замкнутого контура, эта величина примет одинаковые значения на концах промежутка интегрирования, и поэтому интеграл равен нулю.

Таким же образом мы убеждаемся в том, что если $Q$ является многочленом, то интеграл

$$\int\int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{QE^\Omega}{xF^{s-1}}\right) dx\, dy$$

равен нулю; для этого достаточно проинтегрировать сначала по $y$. Следовательно, функция $\Pi$ равна нулю, если

$$\frac{HE^\Omega}{xyF^s} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{PE^\Omega}{yF^{s-1}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{QE^\Omega}{xF^{s-1}}\right),$$

т. е. если

$$H = x\frac{\partial P}{\partial x}F + x\frac{\partial \Omega}{\partial x}PF + (1-s)\,x\frac{\partial F}{\partial x}P + y\frac{\partial Q}{\partial y}F + \\ + y\frac{\partial \Omega}{\partial y}QF + (1-s)\,y\frac{\partial F}{\partial y}Q. \qquad (4)$$

Если $P$ и $Q$ являются многочленами степени $p$, то правая часть будет многочленом степени $p+f+\omega$. Поэтому мы должны иметь

$$p=h-f-\omega.$$

Итак, имеем $(2h-2f-2\omega+1)^2$ различных многочленов $P$ и столько же многочленов $Q$, поэтому мы можем составить $2(2h-2f-2\omega+1)^2$ соотношений вида (4). Но эти соотношения будут различны, если только правая часть равенства (4) не есть тождественный нуль. Это случится, если

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{PE^{\Omega}}{yF^{s-1}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{QE^{\Omega}}{xF^{s-1}}\right)=0,$$

т. е. если

$$\frac{QE^{\Omega}}{F^{s-1}}\cdot\frac{dx}{x}-\frac{PE^{\Omega}}{F^{s-1}}\cdot\frac{dy}{y}$$

является точным дифференциалом. Мы представим этот дифференциал в виде

$$d\left(\frac{SE^{\Omega}}{F^{s-2}}\right)=dU,$$

что дает

$$\left.\begin{aligned} Q&=x\frac{\partial S}{\partial x}F+x\frac{\partial\Omega}{\partial x}SF+(2-s)\,x\,\frac{\partial F}{\partial x}S,\\ -P&=y\frac{\partial S}{\partial y}F+y\frac{\partial\Omega}{\partial y}SF+(2-s)\,y\frac{\partial F}{\partial y}S. \end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Покажем, что $S$ есть целый многочлен относительно $x$, $\frac{1}{x}$, $y$, $\frac{1}{y}$, и прежде всего, что это есть однозначная функция.

1. Интеграл $\int dU$ не имеет циклических периодов. Допустим, что мы вычисляем этот интеграл, рассматривая в нем $y$ как постоянную, и заставим $x$ описывать в своей плоскости замкнутую кривую, внутри которой имеем четное число значений $x$, для которых $F=0$. Из этого следует, что когда мы опишем эту замкнутую кривую, то $\sqrt{F}$ и $F^{s-1}$ примут первоначальные значения. Интеграл, взятый вдоль такого контура, является циклическим периодом для $\int dU$.

Этот период, если он существует, будет функцией переменной $y$. Мы утверждаем, что эта функция приводится к постоянной. Действительно, если функция $U$ допускает два определения (ветви) $U$ и $U''$, то будем иметь

$$\frac{\partial U'}{\partial y}=\frac{\partial U''}{\partial y}=-\frac{PE^{\Omega}}{yF^{s-1}}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial (U'-U'')}{\partial y}=0. \tag{6}$$

Если обратиться теперь к исследованию Пикара *), то можно сделать вывод, что это не может иметь места без того, чтобы циклический период не обращался в нуль, если $F$ есть наиболее общий многочлен своей степени.

2. Интеграл не имеет полярного периода. Он мог бы иметь его, если бы подынтегральная функция обращалась в бесконечность, но эта функция может обращаться в бесконечность только при $x = 0$, или при $y = 0$, или при $F = 0$.

При $F = 0$ функция является бесконечно большой $(s - 1)$-го порядка, если только $F$ не делится на некоторый полный квадрат, а этого не может быть, если $F$ является многочленом наиболее общего вида. Если же функция не делается бесконечной целого порядка, то из этого следует существование полярного периода.

Пусть теперь $x = 0$. Разложим подынтегральную функцию по целым положительным и отрицательным степеням $x$, так что будем иметь

$$\frac{QE^{\Omega}}{xF^{s-1}}=\sum C_m x^m,$$

где $C_m$ являются функциями $y$. Тогда будем иметь полярный период, равный $2i\pi C_{-1}$.

В силу уравнения (6) этот период должен быть постоянным, не зависящим от $y$. *Мы утверждаем, что эта постоянная равна нулю.*

Пусть $y = y_0$ является простым корнем уравнения

$$F(0, y)=0.$$

Конечно, перед тем как положить $x = 0$, нужно умножить $F$ на такую степень $x$, чтобы $F$ оставалась конечной при $x = 0$. Будем изменять $y$ таким образом, чтобы она приняла первоначальное значение после одного поворота вокруг точки $y_0$. Тогда $\sqrt{F}$ изменится на $-\sqrt{F}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$ на $-\frac{\partial U}{\partial x}$ и, следовательно, $C_{-1}$ на $-C_{-1}$; но так как $C_{-1}$ является постоянной, то имеем

$$C_{-1}=-C_{-1},$$

откуда

$$C_{-1}=0,$$

что и требовалось доказать.

---

*) Picard, «Ouvrage sur les fonctions algébriques de deux variables», T. 1, p. 88—90.

Итак, при $x = 0$ не существует полярного периода. Мы также увидим, что это верно и при $y = 0$.

Предыдущие рассуждения не проходят всякий раз, когда $F$ приводится к полному квадрату при $x = 0$.

3. Но $S$ может также не быть однозначной и по другой причине. Допустим, что мы берем интеграл $U$ вдоль контура, охватывающего нечетное число значений $x$, обращающих в нуль функцию $F$. Тогда $\sqrt{F}$ изменяется на $-\sqrt{F}$ после обхода контура.

Следовательно, $U$ изменяется на $U' = h - U$, где $h$ — постоянная, которая не может зависеть от $y$. Здесь уравнение (6) неприменимо и разность $U - U'$ не является независимой от $y$. Так как $\sqrt{F}$ меняет свой знак, то $\frac{\partial U}{\partial y}$ и $\frac{\partial U'}{\partial y}$ равны только по абсолютной величине, так что

$$\frac{\partial U'}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

Таким образом, $h$ является абсолютной постоянной. Более того, если взять другой аналогичный контур, который изменяет $U$ на $U'' = h' - U$, то постоянные $h$ и $h'$ будут тождественно равны; в противном случае интеграл допускал бы период $h' - h$. Так как постоянная $h$ одинакова для всех контуров, то мы можем выбрать постоянную интегрирования таким образом, чтобы $h = 0$. Тогда наш интеграл будет допускать только два значения, $U$ и $-U$. Кроме того, знак $U$ изменится одновременно со знаком $\sqrt{F}$, так что $\frac{U}{\sqrt{F}}$ и, следовательно, $S$ есть однозначная функция.

4. $S$ является многочленом, целым относительно

$$x, \quad \frac{1}{x}, \quad y, \quad \frac{1}{y}.$$

Действительно, интеграл и $S$ могут обращаться в бесконечность только тогда, когда производные

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}$$

обращаются в бесконечность, т. е. если

$$x = \infty, \quad y = \infty, \quad y = 0, \quad y = 0, \quad F = 0.$$

При $F = 0$ производные будут бесконечными $(s - 1)$-го порядка, $U$ будет бесконечной $(s - 2)$-го порядка и $S$ остается конечной.

Посмотрим, как ведет себя функция $S$ при очень больших значениях $x$. Преобладающими членами в $F$, $Q$, $\Omega$ будут соответственно $x^b$, $x^p$ и $x^\omega$, умноженные на некоторую функцию $y$ ($f$, $p$ и $\omega$ есть степени $F$, $Q$, $\Omega$). Следовательно, $\frac{\partial U}{\partial x}$, приведенная к своим преобладающим членам, приведется к

$$\varphi(y)\, x^{f(1-s)+p-1} \cdot E^{\psi(y)x^\omega},$$

а $U$ — к

$$\theta(y)\, x^{f(1-s)+p-\omega} \cdot E^{\psi(y)x^\omega},$$

и, наконец, $S$ — к

$$\eta(y)\, x^{p-f-\omega},$$

где $\theta(y)$ и $\eta(y)$ суть легко вычисляемые функции от $y$. Можно получить такой же результат, рассматривая поведение $S$ при $x = 0$. Для этого достаточно заменить $f$, $p$ и $\omega$ на $-f$, $-p$ и $-\omega$. Таким же образом рассуждаем при очень больших или очень малых значениях $y$.

Итак, $S$ ведет себя как многочлен степени

$$p-f-\omega=h-2f-2\omega.$$

Следовательно, $S$ есть многочлен $(h-2f-2\omega)$-й степени, зависящий от $(2h-4f-4\omega+1)^2$ произвольных коэффициентов.

Таким образом, между $2(2h-2f-2\omega+1)$ соотношениями вида (4) существует лишь $2(2h-2f-2\omega+1)-(2h-4f-4\omega+1)^2$ различных соотношений. Поэтому мы имеем только

$$(2h+1)^2+(2h-4f-4\omega+1)^2-2(2h-2f-2\omega+1)^2$$

выражений П, которые являются линейно независимыми. Это число равно

$$8(f+\omega)^2.$$

Мы видим, что оно не зависит от $h$ и $s$. Следовательно, какова бы ни была бо́льшая степень $h$ многочлена $H$, мы всегда будем иметь лишь $8(f+\omega)^2$ различных выражений П.

Заметим, что выражения, для которых $s = s_0$, являются частными случаями тех, для которых $s = s_0 + 1$, так как мы можем заменить $s$ на $s+1$, $H$ на $HF$, не изменяя при этом выражения П. Итак, все выражения вида П, каково бы ни было число $s$, степень многочлена $H$ и сам этот многочлен, можно выразить линейным образом при помощи $8(f+\omega)^2$ из них.

Если мы возьмем $8(f+\omega)^2+1$ каких-либо выражений П, то они будут связаны одним линейным соотношением, *коэффициенты которого будут рациональными функциями от коэффициентов многочленов $F$, $\Omega$, которые являются одними и теми же* *для всех выражений* П, *так же как и от коэффициентов многочленов* $H$, *которые не являются одними и теми же для различных выражений* П. Это вытекает из способа составления соотношений (4).

**291.** Число различных выражений П может уменьшиться, если многочлены обладают некоторой симметрией. Допустим, например, что $F$, $\Omega$ и $H$ не изменяются, если заменить $x$ на $-x$ и $y$ на $-y$. Если тогда мы напишем эти многочлены в виде

$$\sum Ax^a y^b,$$

то увидим, что целые числа $a$ и $b$ должны иметь одинаковую четность.

Многочлен степени $m$, обладающий такой симметрией, содержит только $2m^2 + 2m + 1$ произвольных коэффициентов, поэтому мы будем иметь $2h^2 + 2h + 1$ многочленов $H$.

Если многочлены $P$ и $Q$ обладают такой же симметрией, то тем же свойством будет обладать и правая часть равенства (4); кроме того, мы получим таким же образом все симметричные многочлены $H$. Действительно, пусть $\Phi(P, Q)$ — правая часть равенства (4). Будем считать, что многочлены $P$ и $Q$ не обладают симметрией, так что, например, $P(x, y) \neq P(-x, -y)$, и допустим, что $\Phi[P(x, y), Q(x, y)]$ равно некоторому симметричному многочлену $H$:

$$H(x, y) = H(-x, -y).$$

Мы будем иметь одновременно

$$H(x, y) = \Phi[P(x, y), Q(x, y)]$$

и

$$H(x, y) = H(-x, -y) = \Phi[P(-x, -y), Q(-x, -y)].$$

Беря полусумму этих равенств, получим

$$H(x, y) = \Phi\left[\frac{P(x, y) + P(-x, -y)}{2}, \frac{Q(x, y) + Q(-x, -y)}{2}\right],$$

а это есть соотношение вида (4), в котором многочлены $P$ и $Q$ заменены симметричными многочленами

$$\frac{P(x, y) + P(-x, -y)}{2}, \quad \frac{Q(x, y) + Q(-x, -y)}{2}.$$

Из этого следует, что можно рассматривать соотношения вида (4), образованные лишь при помощи симметричных многочленов. Но здесь будем иметь не $2(2h - 2f - 2\omega + 1)^2$ соотношений вида (4), а

$$2[2(h - f - \omega)^2 + 2(h - f - \omega) + 1].$$

Аналогично, если обратимся к соотношениям (5), то увидим, что если $P$ и $Q$ обладают симметрией, то и $S$ также обладает симметрией. Поэтому будем иметь в этом случае

$$2(h-2f-2\omega)^2+2(h-2f-2\omega)+1$$

многочленов $S$.

В результате этого число различных выражений $\Pi$ будет не

$$(2h+1)^2+(2h-2f-2\omega+1)^2-2(2h-f-\omega+1)^2=8(f+\omega)^2,$$

а лишь

$$\theta(h)+\theta(h-2f-2\omega)-2\theta(h-f-\omega).$$

Здесь положено $\theta(h) = 2h^2+2h+1$. Следовательно, это число будет равно $4(f+\omega)^2$.

**292.** Применим предыдущее рассуждение к выражениям (1) и (2), но прежде целесообразно их преобразовать, полагая

$$x=\xi\eta, \quad y=\frac{\xi}{\eta}.$$

Тогда $\Delta^2$, который является многочленом, содержащим члены с

$$1,\ x^2,\ x^{-2},\ y^2,\ y^{-2},\ xy,\ xy^{-1},\ x^{-1}y,\ x^{-1}y^{-1},\ x,\ y,\ x^{-1},\ y^{-1},$$

будет целым многочленом второй степени относительно

$$\xi,\ \frac{1}{\xi},\ \eta,\ \frac{1}{\eta}.$$

Этот многочлен не изменится, если заменить $\xi$ и $\eta$ на $-\xi$ и $-\eta$, и будет играть роль многочлена $F$. При этом будем иметь $f=2$.

Многочлен $\Omega$ в свою очередь будет симметричным многочленом первой степени относительно $\xi$, $\frac{1}{\xi}$, $\eta$, $\frac{1}{\eta}$, так что $\omega=1$.

В формуле (1), в которую не входит $E^\Omega$, нужно взять $\omega=0$. Роль многочлена $H$ для выражения (1) будет играть $\frac{1}{x^m y^{m'}}$, а для выражения (2) $\frac{Q}{x^m y^{m'}}$, и оба они дают нам симметричные многочлены относительно

$$\xi,\ \frac{1}{\xi},\ \eta,\ \frac{1}{\eta}.$$

Коэффициенты $A_{mm'}$ и $B_{mm'}$ с точностью до числового множителя представятся интегралом

$$\iint HE^\Omega \frac{d\xi\, d\eta}{\xi\eta\Delta},$$

где $\Omega$ имеет степень 0 или 1,

$$H = \frac{1}{x^m y^{m'}} \quad \text{или} \quad \frac{Q}{x^m y^{m'}},$$

и где, наконец, $\Delta$ играет роль $F^{\frac{1}{2}}$. Отсюда делаем вывод, что эти выражения имеют вид выражений П.

Коэффициенты многочленов $F$, $\Omega$ и $H$ являются рациональными функциями больших полуосей $a$ и $a'$, эксцентриситетов $e$, $e'$ и величин $\sqrt{1-e^2}$, $\sqrt{1-e'^2}$ или, если это удобно, величин $\varepsilon$ и $\varepsilon'$, в предположении, что

$$e = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \quad e' = \frac{2\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2}.$$

Они также являются рациональными функциями тригонометрических выражений, зависящих от наклонности и долгот перигелиев, т. е. от $\operatorname{tg}\frac{J}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\overline{\omega}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\overline{\omega}'}{2}$.

В конечном счете они являются рациональными функциями семи величин

$$a, \; a', \; \varepsilon, \; \varepsilon', \; \operatorname{tg}\frac{J}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\overline{\omega}}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\overline{\omega}'}{2};$$

долготы перигелиев отсчитываются в плоскостях обеих орбит от линии пересечения этих плоскостей. Эти семь величин мы назовем *элементами*.

Рассмотрим теперь производную $A_{mm'}$ или $B_{mm'}$ по одному из этих элементов, который мы обозначим через $\alpha$. Она будет равна

$$\int\int H' E^{\Omega} \frac{d\xi\, d\eta}{\xi\eta\Delta^3},$$

где

$$H' = \Delta^2 \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} + H \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{2} H \frac{\partial \Delta^2}{\partial \alpha}$$

будет многочленом такого же вида, как и $H$. Поэтому мы снова приходим к выражению вида П с той разницей, что показатель $s$, который раньше был равен $\frac{1}{2}$, теперь будет равен $\frac{3}{2}$.

Если будем рассматривать частную производную второго порядка, то этот показатель будет равен $\frac{5}{2}$ и т. д.

*Таким образом, как коэффициенты $A_{mm'}$ и $B_{mm'}$, так и их частные производные любого порядка по элементам являются выражениями вида* П.

Выводы § 290 имеют место и в том случае, когда $F$ является наиболее общим многочленом своей степени. Они также имеют место и в частных случаях, которые получаются с помощью предельного перехода. Но здесь эти выводы применимы и непосредственно.

В самом деле, теорема Пикара применима всякий раз, когда многочлен $F$ не разлагается на множители.

Это имеет место для многочлена $\Delta^2$ в общем случае задачи трех тел. Когда наклонность равна нулю, многочлен $\Delta^2$ является разложимым, и в этом случае теорема Пикара также применима.

Таким образом, циклического периода не существует.

Далее, чтобы показать, что нет и полярного периода, мы допустили, что $F(x, y)$ не обращается в полный квадрат после умножения на некоторую подходящую степень $x$ и после подстановки в этом выражении $x = 0$.

Если применить это правило к многочлену

$$\Delta^2 = F(\xi, \eta),$$

то оно приведет $\Delta^2$ к членам с $x^2$, $xy$, $y^2$, или с $x^{-2}$, $x^{-1}y^{-1}$, $y^{-2}$, или с $x^2$, $xy^{-1}$, $y^{-2}$, или, наконец, с $x^{-2}$, $x^{-1}y$, $y^2$. Этот многочлен, таким образом, не приводится к полному квадрату, а поэтому указанное условие выполняется.

**293.** Применим сказанное прежде всего к выражению (1) и к коэффициентам $B_{mm'}$. Мы имеем

$$f = 2, \quad \omega = 0.$$

Следовательно, число различных выражений равно

$$4(f+\omega)^2 = 16.$$

Другими словами, мы будем иметь только 16 различных коэффициентов. Итак,

*Если рассматривается разложение возмущающей функции по эксцентрическим аномалиям, то коэффициенты разложения связаны линейными рекуррентными соотношениями, коэффициенты которых являются рациональными функциями элементов. Эти соотношения дают возможность выразить все коэффициенты через* 16 *из них.*

Эти рекуррентные соотношения подобны тем, которые связывают коэффициенты Лапласа, и могут быть получены следующим образом. Напишем два тождества:

$$x \frac{\partial \Delta^2}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right) + 2x \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x} = 0,$$

$$y \frac{\partial \Delta^2}{\partial y}\left(\frac{1}{\Delta}\right) + 2y \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y} = 0.$$

Заменим в этих тождествах $\Delta^2$ и $\frac{1}{\Delta}$ разложениями по положительным и отрицательным степеням $x$ и $y$ и приравняем нулю в одном из тождеств коэффициент при $x^p y^q$.

Мы находим у Якоби*) без доказательства утверждение относительно того, что число различных коэффициентов равно не 16, а 15. Это возможно, так как число 16 является только максимумом. Было бы интересно довести рассмотрение этого вопроса до конца.

**294.** Допустим теперь, что рассматривается один из коэффициентов и его частные производные разных порядков по элементам. Они также будут выражениями вида П, следовательно, они также связаны с шестнадцатью из них линейными соотношениями.

*Таким образом, всякий коэффициент $B$, рассматриваемый как функция какого-либо из элементов, удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению не выше шестнадцатого порядка, коэффициенты которого являются рациональными функциями элементов.*

Если два или большее число элементов рассматриваются как независимые переменные, то можно таким образом составить большое число линейных уравнений в частных производных. Все коэффициенты $B$ и все их частные производные могут быть выражены линейным образом в виде функций шестнадцати из них или же в виде функции, зависящей от одного из них и его пятнадцати частных производных.

**295.** Перейдем теперь к выражению (2) и к коэффициентам $A_{mm'}$, входящим в разложение возмущающей функции по средним аномалиям. На этот раз

$$f=2, \quad \omega=1, \quad 4(f+\omega)^2=36.$$

Но многочлен $\Omega$ зависит от $m$ и $m'$, поэтому он не будет одним и тем же для двух различных коэффициентов $A_{mm'}$. Отсюда следует, что выводы § 293 на этот случай не распространяются. И наоборот, многочлен $\Omega$ является одним и тем же для некоторого коэффициента $A_{mm'}$ и всех его частных производных, так что теорема § 294 здесь имеет место.

*Каждый из коэффициентов $A$, рассматриваемый как функция какого-либо из элементов, удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению не выше тридцать шестого порядка.* Кроме того, он удовлетворяет множеству линейных дифференциальных уравнений в частных производных, если рассматривать различные элементы как независимые переменные.

---

*) Jakobi K., Nachlass. Есть русский перевод: К. Якоби, Лекции по динамике, ОНТИ, 1936.

**296.** Перейдем к случаю, когда эксцентриситеты суть нули. Это приведет к большим упрощениям. Действительно, прежде всего здесь нет различия между эксцентрическими и средними аномалиями, так что имеем

$$\Omega=0, \quad A_{mm'}=B_{mm'}.$$

Более того, будем иметь

$$\Delta^2=a^2+a'^2+aa'\mu\left(z+\frac{1}{z}\right)+aa'\nu\left(w+\frac{1}{w}\right),$$

где положено

$$z=\frac{x}{y}=\eta^2, \quad w=xy=\xi^2.$$

Кроме того, все коэффициенты $A_{mm'}$ выражаются с точностью до некоторого числового коэффициента с помощью интеграла

$$\int\int H\frac{dz\,dw}{zw\,\Delta},$$

где $H$ является целым многочленом относительно $z$, $w$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{w}$. Следовательно, имеем

$$f=1, \quad \omega=0.$$

Многочлен, который здесь играет роль $F$, равен $\Delta^2$, и мы видим, что при $z=0$ выражение $z\Delta$ приводится к постоянной. Соображения, с помощью которых было доказано, что нет полярных периодов, здесь непосредственно неприменимы [так как мы должны были допустить выше, что левая часть уравнения $F(x, y)=0$ не приводится к полному квадрату при $x=0$].

Мы можем прийти к цели несколькими различными способами:

1) воспользоваться эллиптическими функциями*),

2) вернуться снова к переменным $x$ и $y$. Но мы предпочитаем воспользоваться симметрией многочлена $\Delta^2$. Действительно, этот многочлен не изменяется при замене $z$ на $\frac{1}{z}$ и $w$ на $\frac{1}{w}$. Многочлен, удовлетворяющий этому двойному условию, в дальнейшем мы будем называть *симметричным*.

В разложении $\frac{1}{\Delta}$ коэффициенты при

$$z^a w^b, \quad z^{-a} w^b, \quad z^a w^{-b}, \quad z^{-a} w^{-b}$$

*) «Bulletin astronomique», т. XIV.

равны между собой и с точностью до постоянного множителя $-\frac{1}{4\pi^2}$ они могут быть представлены двойным интегралом

$$\iint z^{\pm a} w^{\pm b} \frac{dz\,dw}{zw\,\Delta} = \iint H \frac{dz\,dw}{zw\Delta},$$

где

$$H = \frac{z^a w^b + z^{-a} w^b + z^a w^{-b} + z^{-a} w^{-b}}{4}.$$

*Таким образом, мы всегда можем допустить, что многочлен $H$ является симметричным.*

Далее мы должны найти те симметричные многочлены $H$, для которых двойной интеграл тождественно равен нулю. Это те многочлены, которые представляются в виде формулы (4). В правой части выражения (4) необходимо при этом положить $\Omega = 0$ и заменить $x$ и $y$ новыми переменными $z$ и $w$.

Теперь заметим, что если в измененном таким образом выражении (4) заменить $P(z, w)$, $Q(z, w)$ на $-P\left(\frac{1}{z}, w\right)$ и $Q\left(\frac{1}{z}, w\right)$, то выражение $H(z, w)$ заменится на $H\left(\frac{1}{z}, w\right)$. Аналогично, если заменить $P(z, w)$, $Q(z, w)$ на $P\left(z, \frac{1}{w}\right)$, $-Q\left(z, \frac{1}{w}\right)$, то выражение $H(z, w)$ заменится на $H\left(z, \frac{1}{w}\right)$.

Тогда, если имеем

$$P(z, w) = -P\left(\frac{1}{z}, w\right) = P\left(z, \frac{1}{w}\right) = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right),$$

$$Q(z, w) = Q\left(\frac{1}{z}, w\right) = -Q\left(z, \frac{1}{w}\right) = -Q\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right),$$

мы будем говорить, что $P$ и $Q$ представляют скрещенную симметрию. Ясно, что если $P$ и $Q$ представляют скрещенную симметрию, то выражение $H$ будет обладать прямой симметрией.

Если $H$ обладает обычной симметрией, то мы утверждаем, что, не ограничивая общности, всегда можно допустить, что $P$ и $Q$ обладают скрещенной симметрией. Действительно, если $H$ — симметрично, то, не изменяя $H$, можно заменить $P$ и $Q$ на

$$-P\left(\frac{1}{z}, w\right), \; Q\left(\frac{1}{z}, w\right)$$

или на

$$P\left(z, \frac{1}{w}\right), \quad -Q\left(z, \frac{1}{w}\right),$$

или на

$$-P\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right), \quad -Q\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right),$$

или, наконец, многочленами

$$\frac{P(z,\ w)-P\left(\frac{1}{z},\ w\right)+P\left(z,\ \frac{1}{w}\right)-P\left(\frac{1}{z},\ \frac{1}{w}\right)}{4},$$

$$\frac{Q(z,\ w)+Q\left(\frac{1}{z},\ w\right)-Q\left(z,\ \frac{1}{w}\right)-Q\left(\frac{1}{z},\ \frac{1}{w}\right)}{4},$$

обладающими скрещенной симметрией.

Если теперь $P$ и $Q$ обладают скрещенной симметрией, то выражение

$$\int\left(\frac{Q}{F^{s-1}}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{P}{F^{s-1}}\cdot\frac{dw}{w}\right)=\int dU=\int d\left(\frac{S}{F^{s-2}}\right),$$

которое, по предположению, интегрируемо, будет представлять третьего ряда симметрию, которую мы будем называть *обратной симметрией*, т. е. $S$ и $U$ изменяют знак, когда $z$ заменяется на $\frac{1}{z}$, или $w$ на $\frac{1}{w}$.

При этих условиях

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{Q}{F^{s-1}.z}$$

изменяет знак, когда $w$ заменяется на $\frac{1}{w}$. Если мы положим

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\sum C_m z^m,$$

то наш полярный период, если он существует, будет равен $2i\pi C_{-1}$. Он не зависит от $w$ (которая здесь играет роль $y$). С другой стороны, он должен менять знак, когда $w$ заменяется на $\frac{1}{w}$. Отсюда вытекает, что он равен нулю, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь степень этих различных многочленов. Но мы не будем определять степень, так же как и в предыдущих параграфах.

Пусть имеем некоторый многочлен относительно $z$, $\frac{1}{z}$, $w$, $\frac{1}{w}$,

$$\sum Az^a w^b.$$

Мы будем говорить, что он является многочленом $m$-й степени, если

$$|a|+|b|\leqslant m.$$

Тогда, если степень многочлена $H$ равна $h$, то степень многочленов $P$ и $Q$ равна $h-1$, а степень многочлена $S$ равна $h-2$.

Многочлен $h$-й степени содержит вообще $2h^2+2h+1$ произвольных коэффициентов, но если он обладает прямой симметрией, тогда он будет содержать только $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$ произвольных коэффициентов. Действительно, коэффициенты при $z^{\pm a}w^{\pm b}$ выводятся из одного из них, так что нам остается рассматривать только члены, в которых оба показателя равны нулю или положительны. Если многочлен обладает скрещенной симметрией, то все члены, не зависящие от $z$, равны нулю (например, многочлен $P$), так что мы должны рассматривать только члены, в которых один показатель есть нуль, а другой равен нулю или положителен. Поэтому здесь остается $\frac{h(h+1)}{2}$ различных коэффициентов. Если, наконец, имеет место обратная симметрия, то члены, не зависящие и от $w$, и от $z$, равны нулю, а оба показателя должны быть положительными, так что остается $\frac{h(h-1)}{2}$ различных коэффициентов.

Поэтому можно составить следующую таблицу:

| Многочлен | Степень | Симметрия | Число коэффициентов |
|---|---|---|---|
| $H$ | $h$ | прямая | $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$ |
| $P$ | $h-1$ | скрещенная | $\frac{h(h-1)}{2}$ |
| $Q$ | $h-1$ | » | $\frac{h(h-1)}{2}$ |
| $S$ | $h-2$ | обратная | $\frac{(h-2)(h-3)}{2}$ |

Итак, число различных выражений типа П равно

$$\frac{(h+1)(h+2)}{2}+\frac{(h-2)(h-3)}{2}-h(h-1)=4.$$

*Таким образом, между коэффициентами разложения возмущающей функции существуют линейные рекуррентные соотношения, коэффициенты которых являются рациональными функциями элементов. Эти соотношения позволяют выразить все коэффициенты разложения через четыре из них. Каждый из них, рассматриваемый как функция одного из элементов, удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка. Если его рассматривать как функцию всех элементов, то он удовлетворяет множеству уравнений в частных производных. Все коэффициенты и все их частные производные можно выразить* *линейно при помощи четырех из коэффициентов или при помощи одного из коэффициентов и его трех частных производных.*

**297.** Мы придем к такому результату, сохраняя переменные $x$ и $y$. Тогда будем иметь

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 + aa'\mu\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + aa'\nu\left(xy+\frac{1}{xy}\right).$$

Этот многочлен будет степени 1 в смысле § 290, но не § 296. Он будет обладать к тому же симметрией в смысле § 291, но не § 296. Наконец, выражение $x\,\Delta^2$ при $x = 0$ обращается в

$$aa'\left(\mu y + \frac{\nu}{y}\right),$$

которое не является полным квадратом. Следовательно, мы можем применять выводы § 291, и так как $f = 1$, $\omega = 0$, число различных выражений типа П равно

$$4(f+\omega)^2 = 4,$$

что и требовалось доказать.

**298.** Уравнения в частных производных, к которым приводится предыдущий анализ, нам уже встречались. Эти уравнения мы изучали в § 261. Мы видели, что одиннадцать частных производных функции $Z$, определяемые формулами (8)—(13), выражаются линейно через девять выражений (14), которые сами связаны тремя соотношениями (15). Таким образом, имеется пять соотношений, связывающих эти одиннадцать производных.

Пусть

$$Z = \sum U z^h w^k.$$

Коэффициенты при $z^h w^k$ в выражениях для этих одиннадцати частных производных будут равны

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha},\ \frac{\partial U}{\partial \mu},\ \frac{\partial U}{\partial \nu},\ -h^2U,\ -k^2U,\ \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \mu\,\partial \nu},\ \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2},\ \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2},\ \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha\,\partial \mu},\ \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha\,\partial \nu}.$$

Итак, будем иметь между функцией $U$ и ее девятью частными производными первого и второго порядков пять соотношений. Впрочем, кроме соотношений (15), выражения (14) связаны между собой и с функцией $Z = \Sigma U z^h w^k$ соотношением

$$(1+\alpha^2)Z' - 2\alpha\mu Z'\cos\xi - 2\alpha\nu Z'\cos\eta = -sZ.$$

Таким образом, будем иметь шесть соотношений между $U$ и ее девятью производными, т. е. $U$ удовлетворяет шести уравнениям в частных производных второго порядка. Поэтому среди всех десяти выражений (функция $U$ и ее производные) остаются четыре, которые являются независимыми.

Среди этих шести уравнений мы имеем и такие, которые были изучены в конце § 261, и которые, как мы видели, имеют сходство с уравнениями Аппеля. Мы видели, что эти уравнения допускают четыре различных решения, так что $U$, рассматриваемая как функция лишь одного элемента, удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению четвертого порядка.

**299.** Функции, которые мы изучали в этой главе, определяются двойными интегралами, взятыми вдоль замкнутых контуров. Другими словами, они являются *периодами* неопределенного двойного интеграла

$$\iint HE^{\Omega} \frac{dx\,dy}{xy\,F^s}.$$

Допустим, что мы варьируем один из элементов, который мы обозначим через $\alpha$, придавая ему, разумеется, мнимые значения, и пусть элемент $\alpha$ описывает в своей плоскости некоторый замкнутый контур. Наш коэффициент, представляемый двойным интегралом, является аналитической функцией элемента $\alpha$. Когда элемент $\alpha$ опишет замкнутый контур, мы придем к другому определению этой аналитической функции, и это определение может быть только другим периодом нашего неопределенного двойного интеграла.

Допустим, что этот неопределенный двойной интеграл имеет $k$ основных периодов

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k.$$

Все другие периоды и, значит, все другие определения нашей функции будут линейными комбинациями с целыми коэффициентами этих основных периодов.

Следовательно, когда переменная описывает замкнутый контур, различные определения функции подвергаются линейному преобразованию с целыми коэффициентами. Рассмотрим теперь несколько функций П, которые могут отличаться многочленами $H$ и $\Omega$, но не многочленом $F$. Все эти функции подвергнутся *одному и тому же* линейному преобразованию, так как оно зависит лишь от деформации контуров интегрирования.

Итак, пусть $\Delta$ — определитель, составленный из $k$ соответствующих определений $k$ функций П. Этот определитель будет просто умножаться на некоторый числовой множитель, когда переменная опишет замкнутый контур. Отношение двух из этих определителей будет оставаться постоянным, следовательно, оно будет однозначной функцией.

Таким образом, между $(k+1)$ функциями П существует некоторое линейное соотношение, коэффициенты которого являются однозначными функциями элементов.

*Следовательно, число основных периодов равно числу функций* П, *а все другие могут быть выражены через них с помощью линейных соотношений, коэффициенты которых являются однозначными функциями элементов.*

Если функции П имеют только алгебраические особенности, то эти однозначные функции ведут себя как рациональные функции. Коэффициенты наших соотношений будут не только однозначными функциями, но и рациональными функциями. Это получается, когда $\Omega = 0$.

Мы можем тогда предвидеть, что число основных периодов равно 16 в общем случае и четырем, если эксцентриситеты равны нулю. Это подтверждает результат, полученный при разложении по эксцентрическим аномалиям.

Но в таком случае мы можем сделать вывод, относящийся к разложению по средним аномалиям. Между коэффициентами этого разложения имеются рекуррентные линейные соотношения, коэффициенты которых являются не рациональными функциями элементов, но однозначными функциями, и эти соотношения позволяют выразить все коэффициенты через шесть из них. Более того, каждый из этих коэффициентов будет удовлетворять некоторому линейному дифференциальному уравнению шестнадцатого порядка (и не более тридцать шестого), но его коэффициенты не будут более рациональными функциями, а лишь однозначными.

Эти рекуррентные соотношения и дифференциальные уравнения аналогичны тем, с которыми мы встречались при изучении коэффициентов Лапласа. Нет никакого сомнения, что они могут быть использованы в случае, когда эксцентриситеты равны нулю. Но они не являются теми же в общем случае; их порядок намного больше. К счастью, можно надеяться, что эти уравнения не являются неприводимыми и что изучение периодов двойного интеграла позволит понизить их порядок.

Добавим, что Феро *) показал, что в некоторых частных случаях этот порядок можно понизить, используя некоторые свойства симметрии.

---

*) Feraud, Annales de l'Observatoire de Bordeaux, т. VIII.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

**300.** В предыдущих главах мы старались получить аналитическое разложение коэффициентов с помощью рядов, расположенных по степеням эксцентриситетов и наклонностей. Использование этих разложений не представляет никаких трудностей, если число членов не очень велико. Но это пугает большинство астрономов, которые поэтому вынуждены переходить к численному вычислению коэффициентов, не пользуясь разложениями.

Мы видели, что коэффициенты могут быть выражены с помощью определенных интегралов. Такими являются интегралы (1) и (2) из § 280 и 289:

$$-4\pi^2 B_{mm'} = \int \frac{dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x,\ y)}}, \tag{1}$$

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{QE^{\Omega}\,dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x,\ y)}}. \tag{2}$$

Можно вычислить, следовательно, значения этих двойных интегралов с помощью механических квадратур; действительно, мы можем написать равенство (2) в виде

$$4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{QE^{\Omega}}{\Delta} E^{-i(mu+m'u')}\,du\,du', \tag{3}$$

или в виде

$$4\pi^2 A_{mm'} = \int\int \frac{1}{\Delta} E^{-i(ml+m'l')}\,dl\,dl', \tag{4}$$

откуда выводим приближенные формулы

$$n^2 A_{mm'} = \sum \frac{QE^{\Omega}}{\Delta} E^{-i(mu+m'u')}, \tag{3'}$$

$$n^2 A_{mm'} = \sum \frac{1}{\Delta} E^{-i(ml+m'l')}. \tag{4'}$$

В формуле (3′) под знаком суммы нужно придавать величинам $u$ и $u'$ $n$ равноудаленных значений. Следовательно, так как нужно комбинировать $n$ значений $u$ с $n$ значениями $u'$, сумма будет содержать $n^2$ членов.

В формуле (4') поступаем таким же образом, с той лишь разницей, что здесь переменным $l$ и $l'$ нужно придавать $n$ равноудаленных значений

$$0, \ \frac{2\pi}{n}, \ \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Леверье, желая вычислить большое неравенство в системе Паллада — Юпитер, т. е. коэффициент $A_{18,-7}$, применял формулу (4'). Он мог бы воспользоваться с большей выгодой формулой (3'). Но нужно было обладать вычислительным опытом Леверье, чтобы иметь смелость начать такую труднейшую работу. К счастью, можно избежать применения механических квадратур или по крайней мере избежать этого применения к двойным интегралам. Для этого существует большое число методов, важнейшими из которых являются методы Ганзена, Коши и Якоби.

**301. Метод Ганзена.** Рассмотрим вычисление коэффициентов $B_{mm'}$ разложения по эксцентрическим аномалиям. Далее будет легко перейти к коэффициентам $A_{mm'}$ разложения по средним аномалиям, применяя формулу § 240, или перейти к специальному разложению Ганзена, применяя формулу § 246.

Итак, возьмем выражение для $\Delta^2$; оно является многочленом второй степени относительно $E^{\pm iu}$, $E^{\pm iu'}$, так что мы можем написать

$$\Delta^2 = A + BE^{iu'} + B'E^{-iu'} + CE^{2iu'} + C'E^{-2iu'}. \tag{5}$$

Коэффициенты $A$, $B$ и $C$ зависят только от $u$; мы увидим в дальнейшем, что имеем просто

$$C = C'\,\frac{a'^2e'^2}{4},$$

так что $C$ и $C'$ не зависят от $u$, и, более того, они второй степени относительно эксцентриситетов. Следовательно, в первом приближении мы можем пренебречь этими членами, и, обозначая через $\Delta_0^2$ сумму первых трех членов в правой части равенства (5), а через $R$ — сумму двух последних членов, написать

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\Delta_0^3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{R^2}{\Delta_0^5} - \ldots \tag{6}$$

Ряд (6) сходится очень быстро в силу малости величины $R$, поэтому разложение для $\frac{1}{\Delta}$ приводится к разложениям для $\frac{1}{\Delta_0}$, $\frac{1}{\Delta_0^3}$, ... Но мы можем положить, что

$$\Delta_0^2 = A + BE^{iu'} + B'E^{-iu'} = H^2\,[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(u' - \beta)],$$

где $H$, $\alpha$ и $\beta$ суть функции от $u$. Отсюда выводим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2s}}=\frac{1}{H^{2s}}\sum b_s^{(k)}E^{ik(u'-\beta)}, \tag{7}$$

где $b_s^{(k)}$ — коэффициенты Лапласа, зависящие от $\alpha$ (метод их составления изложен в главе XVII).

$A$, $B$, $B'$ можно рассматривать как известные функции $u$; то же самое можно сказать и о величинах $H$, $\alpha$ и $\beta$ и, следовательно, о $b_s^{(k)}$. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{\Delta_0^{2s}}=\sum C_{hk}E^{i(ku'+hu)},$$

где $C_{hk}$ является коэффициентом при $E^{ihu}$ в разложении

$$\frac{1}{H^{2s}}\,b_s^{(k)}E^{-ik\beta},$$

т. е.

$$2\pi C_{hk}=\int_0^{2\pi}\frac{b_s^{(k)}E^{-i(k\beta+hu)}}{H^{2s}}\,du. \tag{8}$$

Будем вычислять интеграл (8) с помощью механических квадратур, применяя формулу

$$C_{hk}=\sum\frac{b_s^{(k)}E^{-i(k\beta+hu)}}{H^{2s}}. \tag{9}$$

Функция под знаком суммы зависит от $u$; в этой сумме нужно придавать величине $u$ последовательно $n$ равноудаленных значений

$$0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

где $n$ — целое большое число.

Таков метод Ганзена, детальное изложение которого имеется в сочинении Тиссерана*).

**302. Метод Якоби.** Якоби также получил разложение по эксцентрическим аномалиям. Он также разлагает $\Delta^2$ на две части, $\Delta_0^2$ и $R$, причем вторая часть является выражением второй степени относительно эксцентриситетов и наклонностей. Но Якоби не пользовался механическими квадратурами. Его способ представления $\Delta^2$ в виде суммы

$$\Delta_0^2+R$$

не такой, как у Ганзена. Чтобы сделать это более понятным, допустим сначала, что наклонность равна нулю. Тогда, обозначая

*) Tisserand, Traité de la Mécanique céleste, т, IV, гл. XXI, стр. 341—344.

через $\xi$, $\eta$ и $\xi'$, $\eta'$ координаты двух планет, находим

$$\Delta^2 = (\xi + i\eta - \xi' - i\eta')(\xi - i\eta - \xi' + i\eta').$$

С другой стороны, если положить

$$e = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \quad e' = \frac{2\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2},$$

то получим

$$\xi + i\eta = \frac{aE^{i\bar{\omega}}}{1+\varepsilon^2}(E^{iu} - 2\varepsilon + \varepsilon^2 E^{-iu}).$$

Из последнего равенства, заменяя $i$ на $-i$, находим выражение для $\xi - i\eta$, и далее, заменяя в них $a$, $\varepsilon$, $\bar{\omega}$, $u$ на $a'$, $\varepsilon'$, $\bar{\omega}'$, $u'$, находим выражения для $\xi' + i\eta'$ и $\xi' - i\eta'$.

Если в этом равенстве мы пренебрежем членом $\varepsilon^2 E^{-iu}$, то сделаем ошибку второй степени и найдем

$$\Delta_0^2 = (2b'\varepsilon' - 2b\varepsilon + bE^{iu} - b'E^{iu'})(2b_1'\varepsilon' - 2b_1\varepsilon + b_1E^{-iu} - b_1'E^{-iu'}),$$

где для сокращения принято

$$b = \frac{aE^{i\bar{\omega}}}{1+\varepsilon^2}, \quad b' = \frac{a'E^{i\bar{\omega}'}}{1+\varepsilon'^2}, \quad b_1 = \frac{aE^{-i\bar{\omega}}}{1+\varepsilon^2}, \quad b_1' = \frac{a'E^{-i\bar{\omega}'}}{1+\varepsilon'^2}.$$

Если теперь обозначим через $\Delta_0^2$ приближенное значение $\Delta^2$ и через $R$ — допущенную погрешность, то будем иметь

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + R,$$

причем $R$ будет величиной второй степени относительно эксцентриситетов.

Если наклонность не равна нулю, то мы можем получить разложения по степеням наклонности и в разложении будут фигурировать только **четные** степени наклонности. Если пренебречь наклонностью, то допущенная ошибка будет величиной второй степени малости, поэтому можем сохранить для $\Delta_0^2$ то же самое выражение, и погрешность $R = \Delta^2 - \Delta_0^2$ будет величиной второго порядка малости относительно эксцентриситетов и наклонностей.

Далее можно написать

$$\Delta_0^2 = \\ = H^2[1 - \gamma E^{i(u-u'-\omega)} - \gamma' E^{-i(u'-\omega')}][1 - \gamma E^{-i(u-u'-\omega)} - \gamma' E^{i(u'-\omega')}],$$

где

$$H = \frac{a'}{1+\varepsilon'^2}, \quad \gamma E^{-i\omega} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{1+\varepsilon'^2}{1+\varepsilon^2} E^{i(\bar{\omega}-\bar{\omega}')} = \frac{b}{b'},$$

$$\gamma' E^{i\omega'} = 2\varepsilon' - 2\varepsilon\frac{b}{b'}.$$

Впрочем, ясно, что мы могли бы видоизменить выражения для коэффициентов $H$, $\gamma$, $\omega$, $\gamma'$, $\omega'$, которые фигурируют в $\Delta_0^2$, лишь бы эти видоизменения были величинами второй степени малости относительно эксцентриситетов и наклонностей. В этом случае порядок погрешности $R$ также будет равен двум.

Якоби воспользовался этим соображением, чтобы уничтожить некоторые члены в $R$, а именно, члены с

$$\cos(u-u'), \quad \sin(u-u'), \quad \cos u, \quad \sin u.$$

Мы отсылаем читателя, желающего познакомиться с детальным анализом этого вопроса, к сочинению Тиссерана *).

Как бы то ни было, мы имеем

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta_0}-\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\Delta_0^3}+\frac{3}{8}\frac{R^2}{\Delta_0^5}-\ldots,$$

так что ($R$ выражается через конечное число членов) разложение $\frac{1}{\Delta}$ приводится к разложению $\frac{1}{\Delta_0^{2s}}$. Если для сокращения положим

$$E^{i(u-u'-\omega)}=z, \quad E^{-i(u'-\omega')}=\bar{\omega},$$

то

$$\frac{1}{\Delta_0^{2s}}=H^{-2s}(1-\gamma z-\gamma'\bar{\omega})^{-s}(1-\gamma z^{-1}-\gamma'\bar{\omega}^{-1})^{-s},$$

и теперь предстоит осуществить разложение по целым положительным и отрицательным степеням величин $z$ и $\bar{\omega}$.

Легко проверить, что коэффициент при $z^h\bar{\omega}^k$ будет с точностью до множителя $C\gamma^h\gamma'^k$ (где $C$ — некоторая постоянная) гипергеометрическим рядом двух переменных Аппеля относительно $\gamma^2$ и $\gamma'^2$.

Эти ряды во всем аналогичны тем, которые мы изучили в главе XVIII, с той лишь разницей, что они не приводятся к многочленам.

Якоби не пользуется этими рядами, которые в его время еще не были известны. Анализ, проделанный им, немного отличается от анализа Аппеля. Его можно найти в упомянутом сочинении Тиссерана (т. IV, стр. 306—311).

Коэффициенты разложений $\frac{1}{\Delta_0}$, $\frac{1}{\Delta_0^3}$, $\frac{1}{\Delta_0^5}$, ..., связаны рекуррентными соотношениями, и эти соотношения позволяют выразить все коэффициенты с помощью четырех из них (наиболее пригодных с практической точки зрения). Чтобы убедиться

*) Tisserand, Traité de la Mécanique céleste, т. IV, гл. XVIII, стр. 301—306.

в этом, достаточно обратиться к § 264 или применить результаты главы XXI, замечая, что здесь $\omega = 0$, $f = 1$ и что многочлен $\Delta_0^2$ обладает частной симметрией, так как он не меняется, если заменить $z$ на $\frac{1}{z}$ и $\bar{\omega}$ на $\frac{1}{\bar{\omega}}$.

**303. Метод Коши.** Коши, как и Якоби и Ганзен, искал сначала разложение по эксцентрическим аномалиям, чтобы из него вывести, пользуясь функциями Бесселя, разложение по средним аномалиям. Мы не будем снова рассматривать вопрос о переходе от одного разложения к другому, а рассмотрим способ получения разложения по эксцентрическим аномалиям.

Метод Коши совпадает с методом Ганзена в одном пункте. Коши начинает разлагать $\frac{1}{\Delta}$ по эксцентрическим аномалиям второй планеты в форме

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B_{n'} E^{in'u'}.$$

Коэффициенты $B_{n'}$ являются функциями $u$ и, если положим

$$B_{n'} = \sum B_{nn'} E^{inu},$$

то окончательно будем иметь

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B_{nn'} E^{i(nu+n'u')}.$$

Коши вычисляет коэффициенты $B_{n'}$ *аналитическим методом* и далее из них получает коэффициенты $B_{nn'}$ *механическими квадратурами* с помощью интеграла

$$2\pi B_{nn'} = \int_0^{2\pi} B_{n'} E^{-inu}\, du. \tag{10}$$

Различие особенно проявляется в способе получения коэффициентов $B_{n'}$; возьмем формулу (5):

$$\Delta^2 = A + BE^{iu'} + B'E^{-iu'} + CE^{2iu'} + C'E^{-2iu'}. \tag{5}$$

Если приравняем $\Delta^2$ нулю, то получим некоторое уравнение четвертой степени относительно $y = E^{iu'}$, которое можно написать в виде

$$A + By + \frac{B'}{y} + Cy^2 + \frac{C'}{y^2} = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим это уравнение; прежде всего заметим, что его коэффициенты не вещественны, или в крайнем случае $A$, $C$, $C'$

вещественны, а $B$ и $B'$ — мнимые и сопряженные. Уравнение не меняется, если в нем заменить $y$ на $\frac{1}{y}$ и $i$ на $-i$. Поэтому его корни разделяются на две пары:

$$\alpha^{\pm 1}E^{i\omega}, \quad \beta^{\pm 1}E^{i\omega'},$$

где $\alpha$ и $\beta$ — вещественные числа, меньшие единицы, так что при замене $y$ на $\frac{1}{y}$ и $i$ на $-i$ корни одной и той же пары меняются местами. Более того,

$$C = C' = \frac{a'^2 e'^2}{4},$$

поэтому произведение корней равно $+1$, откуда следует, что

$$\omega' = -\omega.$$

Из этого вытекает, что мы можем представить $\Delta^2$ в виде произведения двух множителей:

$$\Delta^2 = H^2 [1 - 2\alpha \cos(u' - \omega) + \alpha^2] [1 - 2\beta \cos(u' + \omega) + \beta^2].$$

$H$ вычисляется легко, если известны $\alpha$, $\beta$ и $\omega$.

Заметим, далее, что если пренебречь $e'^2$, степень уравнения уменьшается, так как $C$ и $C'$ обращаются в нуль и уравнение (11) принимает вид

$$A + By + \frac{B'}{y} = 0.$$

Таким образом, уравнение четвертой степени приводится к уравнению второй степени; один из корней обращается в нуль, а другой — в бесконечность. Следовательно, при $C = C' = 0$ уравнение легко разрешается. Далее, мы можем разлагать корни уравнения по степеням $C$, считая в нем $A$, $B$, $B'$ и $C$ независимыми переменными и считая также $C' = C$. Так как $C$ является величиной второго порядка малости относительно эксцентриситетов, то ряды будут быстро сходящимися. В то же время мы видим, что $\beta$ является величиной второго порядка малости относительно эксцентриситетов.

Остается выполнить разложение $\frac{1}{\Delta}$; для этого разложим два множителя:

$$[1 - 2\alpha \cos(u' - \omega) + \alpha^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum c_p E^{ipu'},$$

$$[1 - 2\beta \cos(u' + \omega) + \beta^2]^{-\frac{1}{2}} = \sum c'_q E^{iqu'}.$$

Перемножая эти ряды, находим, что коэффициент $B_{n'}$ будет равен

$$B_{n'}=\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_p c_p c'_{n'-p}. \tag{12}$$

Величины $c_p E^{ip\omega}$, $c'_q E^{-iq\omega}$ являются не чем иным, как коэффициентами Лапласа $b_{\frac{1}{2}}^{(p)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(q)}$, вычисленными при условии, что $\alpha=\alpha$ и $\alpha=\beta$. Они определяются с помощью способа, изложенного в главе XVII. Коши предпочитает использовать для их определения ряды по степеням $\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$ $\left(\text{или } \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)$, несколько более удобные в случае, когда $p$ (или $q$) принимает большие значения.

Что касается ряда

$$\sum c_p c'_{n'-p},$$

то он сходится очень быстро в силу малости $\beta$. Действительно, разложение $c'_{n'-p}$ по степеням $\beta$ начинается с члена $\beta^{|n'-p|}$, следовательно, $c'_{n'-p}$ является величиной степени $2|n'-p|$ относительно эксцентриситетов и поэтому является малой величиной.

Умея вычислять таким образом коэффициенты $B_{n'}$ с помощью формулы (12), Коши мог бы далее получить коэффициенты $B_{nn'}$ с помощью формулы (10) и далее, имея их, получить коэффициенты $A_{nn'}$ с помощью формулы (12) из главы XVI. Но он поступает иначе, конструируя вспомогательное смешанное разложение по эксцентрической аномалии $u'$ и средней аномалии $l$:

$$\frac{1}{\Delta}=\sum C_{nn'}E^{i(nl+n'u')},$$

так что

$$B_{n'}=\sum C_{nn'}E^{inl},$$

$$2\pi C_{nn'}=\int_0^{2\pi} B_{n'}E^{-inl}\,dl=\int_0^{2\pi} B_{n'}E^{-inl}(1-e\cos u)\,du.$$

Коши вычисляет $C_{nn'}$ с помощью этой формулы и для этого он пользуется механическими квадратурами, т. е. полагает, что

$$KC_{nn'}=\sum B_{n'}E^{-inl}(1-e\cos u).$$

$K$ — целое, достаточно большое число, $B_{n'}$ и $E^{-inl}$ являются функциями $u$. Величине $u$ под знаком суммы даем $K$ равноудаленных значений

$$0,\ \frac{2\pi}{K},\ \ldots,\ \frac{2(K-1)\pi}{K}.$$

Наконец, с помощью формулы

$$A_{nn'} = \sum \frac{p'}{n'} C_{p,\,p'} J_{n'-p'}(n'e'),$$

аналогичной формуле (12) из главы XVI, вычисляются коэффициенты $A_{nn'}$. Коши применял этот метод при вычислении большого неравенства Паллада — Юпитер, полагая $n = -18$, $n' = 7$, а для этого ему пришлось вычислить только функции Бесселя, зависящие от единственного аргумента $7e'$.

Детальный анализ этого вопроса можно найти в сочинении Тиссерана *).

**304.** Очевидно, можно было создать другие аналогичные методы, основанные на свойствах эллиптических функций, и на применении таких же формул, какие мы использовали в § 256. Мы ограничимся здесь некоторыми общими указаниями. Допустим сначала, что эксцентриситеты равны нулю и что мы хотим вычислить, например, интеграл

$$\iint \frac{z^{-h} w^{-1}\, dz\, dw}{\sqrt{A + B\left(z + \frac{1}{z}\right) + C\left(w + \frac{1}{w}\right)}}, \tag{13}$$

где $A = a^2 + a'^2$, $B = aa'\nu$, $C = aa'\mu$. Проинтегрируем сначала по переменной $w$. Мы получим эллиптический интеграл, который мы можем взять приемом арифметико-геометрического среднего.

Этот прием основан на равенстве

$$\int \frac{w^{-1}\, dw}{\sqrt{a + b\left(w + \frac{1}{w}\right)}} = \int \frac{w^{-1}\, dw}{\sqrt{a' + b'\left(w + \frac{1}{w}\right)}},$$

которое имеет место, когда

$$\sqrt{a + 2b} = \alpha, \quad \sqrt{a - 2b} = \beta, \quad \sqrt{a' + 2b'} = \alpha' = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\sqrt{a' - 2b'} = \sqrt{\alpha\beta},$$

Если рассмотрим интеграл, который дает коэффициент Лапласа $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$,

$$2i\pi b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \int \frac{w^{-1}\, dw}{\sqrt{1 + \alpha^2 - \alpha\left(w + \frac{1}{w}\right)}},$$

то величины, играющие роль $\sqrt{a + 2b}$, равны

$$1 + \alpha, \quad 1 - \alpha.$$

*) Tisserand, Traité de la Mécanique céleste, т. IV, гл. XVII.

Вычисляя средние арифметическое и геометрическое, находим

$$1, \quad \sqrt{1-\alpha^2}.$$

Повторяя эту операцию второй раз, имеем

$$\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}, \quad \sqrt[4]{1-\alpha^2},$$

третий раз —

$$\left(\frac{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}}{2}\right)^2, \ldots$$

и т. д.

Отсюда

$$2i\pi b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \int \frac{w^{-1}\,dw}{\left(\frac{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}}{2}\right)^2}$$

или

$$\sqrt{b_{\frac{1}{2}}^{(0)}} = \frac{2}{1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}}.$$

Последняя формула была уже выведена в главе XVII. Мы видели, какое приближение дает эта формула, когда $\alpha$ меньше $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Применим такой же метод к интегралу (13). Мы можем представить его в виде

$$\iint \frac{z^{-h} w^{-1}\,dz\,dw}{\sqrt{a^2+a'^2+aa'\left(w+\frac{1}{w}\right)}},$$

полагая

$$A+B\left(z+\frac{1}{z}\right) \pm 2C = (a \pm a')^2 = a'^2 (1 \pm \alpha)^2$$

и

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \sqrt{\frac{A+B\left(z+\frac{1}{z}\right)+2C}{A+B\left(z+\frac{1}{z}\right)-2C}},$$

$$2a' = \sqrt{A+B\left(z+\frac{1}{z}\right)+2C} + \sqrt{A+B\left(z+\frac{1}{z}\right)-2C}.$$

Наш интеграл в результате применения предыдущего правила приводится к обычному интегралу

$$\int \frac{8i\pi z^{-h}\,dz}{a'\left(1+\sqrt[4]{1-\alpha^2}\right)^2},$$

где $a'$ и $\alpha$ являются функциями $z$, определенными предыдущими формулами. Этот интеграл можно вычислять с помощью механических квадратур или с помощью следующего приема.

Так как $B$ — малая величина порядка квадрата наклонности, то можно разложить подынтегральную функцию по степеням $B\left(z+\frac{1}{z}\right)$, что одновременно даст разложение этой функции по целым положительным и отрицательным степеням $z$.

305. Можно было бы сделать аналогичную вещь и в общем случае; здесь всегда приходится вычислять интеграл

$$\iint \frac{dx\,dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x, y)}}.$$

Начнем, например, с интегрирования по $y$. Интеграл, который надо вычислить, является в этом случае эллиптическим интегралом, который можно написать в виде

$$\int \frac{Ay^{-m'}\,dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}.$$

Требуется вычислить один из периодов этого интеграла. Здесь $A$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ являются функциями $x$. Когда $e'$ равен нулю, один из корней $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ равен нулю, а один обращается в бесконечность. Мы приходим к вычислению интеграла

$$\int \frac{y^m\,dy}{\sqrt{y(y-\gamma)(y-\delta)}}. \tag{14}$$

Вычисление корней $\gamma$ и $\delta$ в этом случае выполняется легко и далее можно применять непосредственно приемы главы XVII и, в частности, § 256. Впрочем, все интегралы могут быть приведены к двум из них при помощи рекуррентных соотношений из главы XVII.

При $e' \neq 0$ имеем более сложный случай. Прежде всего нужно определить корни $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. В § 303 мы объясняли, как это можно сделать, пользуясь малостью $e'$. С другой стороны, мы должны будем вычислять не интеграл

$$\int (\wp - e_3)^m\,du,$$

как в главе XVII, а более сложный интеграл

$$\int \frac{(\wp-a)^m}{(\wp-b)^m}\,du, \tag{15}$$

в котором $a$ и $b$ — постоянные, $m$ — целое положительное или отрицательное число. И действительно, чтобы привести интеграл

(14) к канонической форме, нужно положить

$$y=\frac{\wp-a}{\wp-b},$$

где $\wp(u)$ — функция Вейерштрасса.

Период интеграла (15) зависит от периодов следующих четырех интегралов:

$$\int du, \quad \int \zeta'(u\pm u_0)\,du, \quad \int [\zeta(u+u_0)-\zeta(u-u_0)]\,du,$$
$$\int [\zeta(u+u_1)-\zeta(u-u_1)]\,du,$$

где $u_0$ и $u_1$ определяются уравнениями

$$\wp(u_0)=a, \quad \wp(u_1)=b.$$

В этом можно убедиться, разлагая двояко-периодическую функцию $\left(\frac{\wp-a}{\wp-b}\right)^m$ на простые элементы.

Но эти четыре интеграла имеют периоды

$$2\omega_1, \quad 2\eta_1, \quad 4\eta_1 u_0, \quad 4\eta_1 u_1.$$

В § 256 мы видели, как можно вычислить $\omega_1$ и $\eta_1$. В превосходном сочинении Шварца*) имеются ряды, также всюду сходящиеся, для вычисления $u_0$ и $u_1$.

Здесь рекуррентные формулы позволяют выразить все интегралы в виде функций не двух, а четырех из них.

С другой стороны, величины $2\omega_1$, $2\eta_1$, $4\eta_1 u_0$, $4\eta_1 u_1$ здесь не являются постоянными, а суть функции $x$, и теперь нужно их разлагать по целым положительным и отрицательным степеням $x$. Это разложение можно выполнить с помощью механических квадратур или аналитическими методами, так же, как было объяснено в конце предыдущего параграфа.

Заметим, что предпочтительнее выполнить первое интегрирование не по $y$, как мы делали выше, а по переменной $\frac{y}{x}$. Тогда наши величины $\omega_1$, $\eta_1$ и т. д. при изменении $x$ меняются мало; их изменения будут порядка эксцентриситетов.

**306.** Однако в дифференциальные уравнения движения входит не сама возмущающая функция, а ее частные производные (если применяется метод вариации постоянных) или составляющие возмущающей силы в других методах.

Если мы имеем коэффициенты разложения возмущающей функции в аналитическом виде, то из них легко вывести соответ-

*) Schwarz, Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques, Paris, 1894, pp. 67—73.

ствующие коэффициенты разложений частных производных или составляющих силы. Но это не так, если мы имеем только численные значения этих коэффициентов, полученные методами, изложенными в данной главе. Это нас обязывает рассмотреть вопрос с этой новой точки зрения.

Нетрудно вычислить производную по одной из средних аномалий $l$ или $l'$.

Если имеем

$$\frac{1}{\Delta}=\sum A_{mm'}E^{i(ml+m'l')},$$

то сразу же находим

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\Delta}\right)=\sum imA_{mm'}E^{i(ml+m'l')}.$$

Для других частных производных нужно вычислять ($\alpha$ — некоторый из элементов)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\Delta}\right)=\frac{P}{\Delta^3},$$

где

$$P=-\frac{1}{2}\frac{\partial \Delta^2}{\partial \alpha}.$$

Если рассматриваем составляющие силы по трем прямоугольным осям, то нужно разложить

$$\frac{\xi-\xi'}{\Delta^3},\quad \frac{\eta-\eta'}{\Delta^3},\quad \frac{\zeta-\zeta'}{\Delta^3},$$

где $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ — прямоугольные координаты двух планет.

В методе Ганзена рассматриваются составляющие силы по трем особым осям, и это приводит к рассмотрению комбинаций

$$\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\xi'^2-\eta'^2-\zeta'^2}{\Delta^3},\qquad \frac{\zeta-\zeta'}{\Delta^3}.$$

Во всех случаях приходится разлагать выражение вида $\frac{P}{\Delta^3}$, и $\frac{1}{\Delta}$ имеет такой же вид, если положить $P=\Delta^2$. То, что нас интересует, заключается в том, что когда $P$ разлагается по эксцентрическим аномалиям, т. е. по целым положительным и отрицательным степеням $x$ и $y$, это разложение будет содержать только конечное число членов.

Это верно в отношении координат $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\xi'$, $\eta'$ и $\zeta'$, следовательно, это верно и в отношении их комбинаций

$$\xi-\xi',\quad \eta-\eta',\quad \zeta-\zeta',\quad \sum\xi^2-\sum\xi'^2.$$

Это верно для $\Delta^2$ и, следовательно, для $\frac{\partial \Delta^2}{\partial \alpha}$.

Итак, нужно будет поступать следующим образом.

1. Разлагаем $\frac{1}{\Delta^3}$ по эксцентрическим аномалиям. Методы предыдущих параграфов, которые годились, в частности, для $\frac{1}{\Delta}$, применяются без изменений к $\frac{1}{\Delta^{2s}}$ и, в частности, к $\frac{1}{\Delta^3}$.

2. Умножаем разложение $\frac{1}{\Delta^3}$ на разложение $P$. Так как последнее разложение сводится к конечному числу членов, то такое умножение не представляет никакой трудности.

3. Переходим от разложения $\frac{P}{\Delta^3}$ по эксцентрическим аномалиям к разложению по средним аномалиям с помощью формулы (12) из главы XVI.

Сделаем еще одно замечание. Производные $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\Delta}\right)$, $\frac{\partial\Delta^2}{\partial\alpha}$, о которых мы говорим и которые встречаются в методе вариации произвольных постоянных, являются производными, вычисленными по элементам некоторой системы элементов, среди которых есть и средние аномалии. Обозначим через $\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]$ производные, взятые по элементам такой системы, среди которых есть эксцентрические аномалии. Мы имеем $\Delta^2$ и отсюда легко вычислить $\left[\frac{\partial\Delta^2}{\partial\alpha}\right]$ и $\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right]$. Но нам нужно знать $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\Delta}\right)$. Прежде всего, если элемент $\alpha$ не является одним из эксцентриситетов $e$ или $e'$, просто имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\Delta}\right).$$

Если $\alpha=e$, $l=u-e\sin u$, то

$$\left[\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{\Delta}\right)+\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\Delta}\right)\cdot\frac{\partial l}{\partial e}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{\Delta}\right)+\sin u\,\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\Delta}\right).$$

Разложения для $\frac{1}{\Delta}$ и $\left[\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right]$ нам известны. Остается поэтому найти разложение функции

$$\sin u\,\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\Delta}\right).$$

Итак, пусть

$$\frac{1}{\Delta}=\sum B_{pp'}E^{i(pu+p'u')}=\sum A_{mm'}E^{i(ml+m'l')},$$

где

$$A_{mm'} = \sum CA_{pp'}, \qquad C = \frac{pp'}{mm'} J_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e').$$

Отсюда получаем

$$\left[\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right] = \sum \left[\frac{\partial B_{pp'}}{\partial e}\right] E^{i(pu+p'u')} = \sum D_{mm'} E^{i(ml+m'l')},$$

где

$$D_{mm'} = \sum C \left[\frac{\partial B_{pp'}}{\partial e}\right].$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \sum \frac{\partial A_{mm'}}{\partial e} E^{i(ml+m'l')},$$

где

$$\frac{\partial A_{mm'}}{\partial e} = \sum C \left[\frac{\partial B_{pp'}}{\partial e}\right] + \sum B_{pp'} \frac{dC}{de}.$$

Остается, следовательно,

$$\sin u \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \sum G_{mm'} E^{i(ml+m'l')},$$

где

$$G_{mm'} = \sum B_{pp'} \frac{dC}{de}$$

и

$$\frac{dC}{de} = \frac{pp'}{m'} J'_{m-p}(me) J_{m'-p'}(m'e').$$

Эта формула аналогична формуле (12) из главы XVI. Нам известны $B_{pp'}$ и $\frac{\partial B_{pp'}}{\partial e}$. Предыдущие формулы позволяют получить $A_{mm'}$, $D_{mm'}$, $G_{mm'}$ и, следовательно, разложение $\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{\Delta}\right)$ по средним аномалиям.

# ГЛАВА XXIII

# ЧЛЕНЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

307. Можно поставить задачу о нахождении приближенного значения коэффициента $A_{mm'}$, когда целые числа $m$ и $m'$ очень велики по абсолютной величине, что представляет интерес по двум причинам.

1. Таким образом можно составить представление о быстроте сходимости рядов.

2. Член высшего порядка $A_{mm'}$ может дать заметные возмущения, если средние движения $n$ и $n'$ почти соизмеримы, так что делитель $mn + m'n'$ становится весьма малым. Коэффициент возмущения в долготе будет тогда порядка

$$\frac{A_{mm'}}{(mn + m'n')^2}$$

и поэтому целесообразно вычислить входящий в это выражение коэффициент $A_{mm'}$, не прибегая к вычислению предыдущих коэффициентов. Чаще всего, проделав это вычисление, мы узнаем, что оно было бесполезным, так как найденное значение для $A_{mm'}$ весьма мало́. Поэтому представляет интерес заранее получить представление о порядке величины этих коэффициентов и постараться быстро найти их приближенное значение. Такова цель, которую можно надеяться достигнуть, применяя метод Дарбу для вычисления функций от очень больших чисел. Этот метод основывается на следующих принципах:

а) если ряд

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n$$

сходится в круге радиуса $\varrho$, а на окружности этого круга имеется особая точка $z_0$, такая, что в ее окрестности функция $\varphi(z)$ разлагается по целым степеням, всюду возрастающим и, кроме того, по дробным степеням и даже по несоизмеримым, положительным или отрицательным степеням величины $1 - \frac{z}{z_0}$, так что первый член разложения, показатель которого не является целым, есть

$$A\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{-s},$$

то будем иметь приближенно для очень больших $n$

$$a_n=\frac{A}{z_0^n}\cdot\frac{n^{s-1}}{\Gamma(s)}.$$

б) Если особая точка является логарифмической, т. е. если $\varphi(z)$ представляется в виде

$$\varphi(z)=\varphi_1(z)+\ln\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\varphi_2(z).$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ разлагаются по действительным и возрастающим степеням $\left(1-\frac{z}{z_0}\right)$, то необходимо поступать следующим образом. Пусть $s_1$ и $s_2$ — показатели первых членов разложений $\varphi_1$ и $\varphi_2$, которые не являются целыми. Пусть $s_0$ — показатель первого члена в разложении $\varphi_2$, в котором целые показатели не исключены. Если $s_1 < s_0$, то можно будет применить предыдущую формулу, заменяя $s$ на $s_1$. Если $s_1 \geqslant s_0$, то необходимо будет исследовать первый член в функции $\varphi_2$

$$A_0\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{-s_0}.$$

Если $s_0$ не является целым отрицательным числом, то имеем приближенно

$$a_n=\frac{A_0}{z_0^n}\cdot\frac{n^{s_0-1}\cdot\ln n}{\Gamma(s_0)},$$

и если $s_0$ является целым отрицательным числом или нулем, то

$$a_n=\frac{A_0}{z_0^n}(-1)^{s_0+1}\Gamma(1-s_0)\,n^{s_0-1}.$$

в) Если функция $\varphi(z)$ имеет несколько особых точек на окружности круга сходимости, то приближенное значение коэффициента $a_n$ будет равно сумме приближенных значений соответствующих коэффициентов, получаемых в случае, если рассматривать каждую особую точку в отдельности.

г) Предположим, что $\varphi(z)$ представляется формулой

$$\varphi(z)=\sum a_n z^n+\sum b_n z^{-n}$$

и этот ряд сходится в кольце, заключенном между двумя окружностями $|z|=\varrho_1$, $|z|=\varrho_0$, $\varrho_1>\varrho_0$. Тогда ряд $\sum a_n z^n$ будет сходиться при $|z|<\varrho_1$ и не имеет никакой особой точки ни на окружности $|z| = \varrho_0$, ни внутри ее. И наоборот, ряд $\sum b_n z^{-n}$ будет сходиться при $|z| > \varrho_0$ и не будет иметь никакой особой точки ни на окружности $|z| = \varrho_1$, ни вне ее. Асимптотическое значение коэффициента $a_n$ получится, согласно предыдущим правилам, если рассматривать особые точки функции $\varphi(z)$ на окружности $|z| = \varrho_1$, а асимптотическое значение коэффициента $b_n$ получится, согласно тем же правилам, если рассматривать особые точки функции $\varphi(z)$, или, лучше, $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ на окружности $|z| = \varrho_0$.

308. Посмотрим, как применить эти принципы к интересующей нас задаче. Прежде всего кажется, что она относится к функции от одной-единственной переменной. Поэтому Фламм начал с того, что разложил оцениваемый член на сумму, любой элемент которой является произведением двух множителей, каждый из которых зависит только от одной переменной. В первом множителе эта переменная есть средняя аномалия первой планеты, а во втором — средняя аномалия второй планеты.

Но можно действовать и другим образом. Пусть

$$m = an + b, \qquad m' = cn + d, \tag{1}$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ являются целыми конечными числами, данными раз и навсегда, $n$ — целое, очень большое число, $a$ и $c$ — первые между собой. Надо вычислить

$$A_{mm'} = A_{an+b,\ cn+d}.$$

Имеем

$$-4\pi^2 A_{mm'} = \int \frac{E^{\Omega} Q\, dx\, dy}{x^m y^{m'} \sqrt{R(x,y)}},$$

где

$$\Omega = \frac{me}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{m'e'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

$$Q = \left[1 - \frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{e'}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right].$$

Пусть

$$\Omega = n\Omega_0 + \Omega_1,$$

$$\Omega_0 = \frac{ae}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{ce'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

$$\Omega_1 = \frac{be}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{de'}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Наш интеграл принимает вид

$$\iint \left(\frac{E^{\Omega_0}}{x^a y^c}\right)^n \cdot \frac{E^{\Omega_1} Q\, dx\, dy}{x^b y^d \sqrt{R(x,\ y)}}. \tag{2}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = -4\pi^2 \sum z^n A_{mm'},$$

где индексы суммирования $m$ и $m'$ принимают не все возможные значения, а лишь такие, которые удовлетворяют формулам (1). Но здесь также можно действовать двумя способами.

1. Мы можем придавать $n$ всевозможные положительные значения, исключая нуль. Таким способом получим *интеграл Феро*

$$\Phi(z) = \int\int \frac{E^{\Omega_1} \cdot Q\,dx\,dy}{\left(1 - \frac{zE^{\Omega_0}}{x^a y^c}\right) x^b y^d \sqrt{R}}. \tag{3}$$

2. Мы можем также придавать $n$ всевозможные целые положительные, отрицательные или нулевые значения. Тогда функция $\Phi(z)$ может быть представлена в виде обычного интеграла. Всегда можно найти такие два целых числа $\alpha$ и $\gamma$, что

$$a\alpha + c\gamma = 1,$$

так как $a$ и $c$ являются первыми между собой. Положим тогда

$$E^{il} = z^\alpha t^{-c}, \qquad E^{il'} = z^\gamma t^a.$$

Имеем разложение

$$\frac{1}{\Delta} = \sum A_{mm'} E^{i(ml+m'l')} = \sum A_{mm'} z^{\alpha m+\beta m'} t^{am'-cm}.$$

Рассмотрим тогда обычный интеграл

$$\int \frac{1}{\Delta} t^{bc-ad-1} \cdot z^{-(\alpha b+\gamma d)}\,dt, \tag{4}$$

взятый вдоль окружности $|t| = 1$. Этот интеграл может быть написан в виде

$$\sum A_{mm'} z^\lambda \int t^\mu\,dt,$$

где

$$\lambda = \alpha(m-b) + \beta(m'-d),$$
$$\mu = a(m'-d) - c(m-b) - 1.$$

Интеграл $\int t^\mu\,dt$ равен нулю, а если $\mu = -1$, то он равен $2i\pi$. Для того чтобы $\mu$ равнялось $-1$, нужно, чтобы $m$ и $m'$ представлялись в виде (1); но тогда $\lambda = n$, так что интеграл (4) приводится к

$$2i\pi \sum A_{mm'} z^n = \frac{1}{2i\pi} \Phi(z).$$

Таким образом, чтобы решить интересующую нас задачу, мы должны исследовать расположение и природу особых точек функции $\Phi(z)$, а чтобы избежать путаницы, мы будем различать функцию Феро $\Phi_1(z)$, определяемую двойным интегралом (3), и функцию $\Phi_2(z)$, определяемую обычным интегралом (4).

**309.** Применим эти принципы к вычислению коэффициентов Лапласа, которые даются формулой

$$2i\pi b_s^{(k)} = \int F^{-s} z^{k-1} dz,$$

где

$$F = (1 - \alpha z)\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right).$$

Будем считать сначала, что $s$ фиксировано, а $k$ возрастает, и будем искать коэффициент при $z^k$ в разложении

$$F^{-s} = (1 - \alpha z)^{-s}\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)^{-s}.$$

Эта функция имеет две особые точки, одна из которых находится на внешней окружности кольца сходимости $z = \frac{1}{\alpha}$, а другая находится на внутренней окружности $z = \alpha$; если предположим, что $k$ — очень большое положительное число, то первую из этих особых точек и нужно рассматривать.

В окрестности этой точки имеем

$$F^{-s} = (1 - \alpha z)^{-s}(1 - \alpha^2)^{-s},$$

откуда вытекает асимптотическая формула

$$b_s^{(k)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \alpha^k (1 - \alpha^2)^{-s} \cdot k^{-s}.$$

Допустим теперь, что $k$ фиксировано, а $s$ — очень большое число. Пусть

$$s = n + \frac{1}{2}.$$

Тогда $2i\pi b_s^{(k)}$ будет коэффициентом при $\beta^n$ в разложении интеграла

$$\int \frac{z^{k-1}\, dz}{\left(1 - \frac{\beta}{F}\right)\sqrt{F}}.$$

Особые точки подынтегральной функции даются уравнениями

$$F = 0, \qquad F = \beta.$$

Для этого нужно, чтобы или эти два уравнения имели общий корень (тот, который будет давать $\beta = 0$), и это решение надо отбросить, или одно из уравнений имело бы кратный корень. Первое уравнение, не зависящее от $\beta$, мы можем исключить из рассмотрения. Остается второе уравнение, которое имеет кратный корень, если

$$z = \pm 1, \qquad \beta = (1 \pm \alpha)^2.$$

Корень, который является подходящим, равен $(1-\alpha)^2$.

Какова природа этой особой точки? Для $\beta$, близких к $(1-\alpha)^2$, главная часть интеграла будет та, которая соответствует значениям $z$, близким к 1. При $z = 1$ $\sqrt{F} = 1 - \alpha$, так что интеграл запишется в виде

$$\int \frac{(1-\alpha)\,dz}{1+\alpha^2-\beta-\alpha\left(z+\frac{1}{z}\right)}.$$

Подынтегральная функция является рациональной функцией, для которой нужно найти вычет. Этот вычет равен

$$\frac{1-\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{z^2}-1\right)},$$

где $z$ дается уравнением

$$1+\alpha^2-\beta = \alpha\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Но это уравнение дает

$$z = 1 \pm \sqrt{\frac{(1-\alpha)^2-\beta}{\alpha}}, \qquad \frac{1}{z^2} = 1 \pm 2\sqrt{\frac{(1-\alpha)^2-\beta}{\alpha}}.$$

Поэтому вычет равен

$$\frac{(1-\alpha)\sqrt{\alpha}}{2\alpha\sqrt{(1-\alpha)^2-\beta}}$$

и интеграл равен этому вычету, умноженному на $2i\pi$. Таким образом, $b_s^{(k)}$ является коэффициентом при $\beta^n$ в разложении

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left[1-\frac{\beta}{(1-\alpha)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

т. е.

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}\,(1-\alpha)^{2s-1}}\cdot\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

в формуле, которая, как легко заметить, не зависит от $k$.

**310.** Нахождение особых точек функции $\Phi(z)$ не представляет трудности; для этого можно применить к интегралам (3) и (4) рассуждения § 282. Нет затруднений и при исследовании природы особых точек*).

Трудность порождается тем, что не все особые точки являются подходящими и они не принадлежат рассматриваемой ветви функции $\Phi(z)$. В самом деле, в § 282 и 283 мы видели, каковы условия, при которых особенность функции $\Phi(z)$ подходит для рассмотрения. Эта особенность появляется, когда две особые точки подынтегральной функции совпадают, и для того, чтобы особенность подходила, нужно, чтобы эти особые точки до совмещения находились по разные стороны контура интегрирования.

Особые точки, которые подходят, мы назовем допустимыми, и нам надо выбрать, если пользуемся интегралом (3), те из допустимых особых точек, которые имеют весьма малый модуль, а если пользуемся интегралом (4), те из допустимых особых точек, модули которых близки к единице.

Исследование на допустимость особых точек является настолько тонким, что здесь оно является основным препятствием в применении этого метода. В «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» нами указаны общие принципы, которые позволяют выполнить такое исследование. Но мы применяли эти принципы только в случае нулевой наклонности, одного нулевого эксцентриситета и другого малого эксцентриситета. Гами **) рассмотрел эту проблему, не накладывая эти три условия. Кокулеску в своей диссертации (1895 г.) рассмотрел компланарные орбиты с малыми, но отличными от нуля эксцентриситетами и с одной и той же долготой перигелия. Наконец, Феро в диссертации (1897 г.) рассмотрел случай конечной наклонности и двух нулевых эксцентриситетов; впрочем, он получил заново и результаты Гами.

Кажется, что исследование должно быть более легким, если применяется интеграл (4), чем если применять двойной интеграл (3). Это не так, если один из эксцентриситетов отличен от нуля, так как подынтегральная функция не является однозначной функцией относительно $t$, а обладает бесконечным множеством значений, так что исследование не может быть сделано, если учесть, что риманова поверхность имеет бесконечное множество листов. Поэтому Феро, вводя интеграл (3), существенно продвинул решение проблемы вперед. Но нужно было облегчить исследование двойных интегралов и для этого изучить свойства

---

*) Poincaré, Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Paris, 1892, т. I, p. 322.

**) Hamy, Journal de Liouville, 1894 и 1896.

их периодов. В главах XX и XXI мы уже отметили значение, которое могло бы иметь это исследование.

Если вместо того чтобы исследовать разложение по средним аномалиям, рассматривать разложение по эксцентрическим аномалиям, то задача становится значительно проще. Известно, например, что функция $\Phi(z)$ удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению, коэффициенты правой части которого и сама правая часть являются рациональными функциями $z$.

Мы не рассматриваем более этот вопрос, а ограничимся ссылкой на указанные сочинения и, в частности, на главу VI из «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste».

# ГЛАВА XXIV

# ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ЛУНЫ

311. Теорию движения Луны можно разделить на две части. В первой части движение Луны рассматривается в предположении, что Луна, Солнце и Земля являются материальными точками и образуют замкнутую систему. Во второй части рассматривается, как возмущается это движение притяжением других планет и влиянием сжатия Земли.

Первая часть является частным случаем задачи трех тел и возникающие трудности обусловливаются только относительно большой величиной возмущений. Отношение возмущающей силы к притяжению центрального тела, как мы видели в главе II, будет порядка

$$\frac{m_4}{m_7}\left(\frac{AC}{BC}\right)^3,$$

где $m_4$ — масса возмущающего тела, $m_7$ — масса центрального тела, $AC$ и $BC$ — взаимные расстояния трех тел. Это отношение является произведением двух множителей, из которых один равен отношению масс, а другой равен кубу отношения взаимных расстояний. В случае планет первый множитель очень мал, а второй конечен; в случае Луны, наоборот, первый множитель велик, а второй — весьма мал. Произведение этих двух множителей, без сомнения, является малым (иначе проблема не могла бы быть решена методом последовательных приближений), но оно не является столь малым, как в случае планет, так что приближения сходятся гораздо медленнее.

Трудность и важность задачи привлекли к ней внимание многих математиков, и изучение их исследований чрезвычайно интересно с исторической точки зрения; об этом можно прочесть с пользой в третьем томе упомянутого сочинения Тиссерана. Но можно сказать, что заслуживают внимания только три метода: метод Ганзена, метод Делоне и метод Хилла — Брауна.

Метод Ганзена служит для построения таблиц, применяемых в настоящее время. Эти таблицы обладают замечательной точностью, и если они расходятся с наблюдениями, то расхождения порождены не каким-либо недостатком метода (по крайней мере, пока рассматриваются только Солнце, Земля и Луна), так как другие методы, более совершенные с теоретической точки зрения, также приводят к таким же расхождениям, а пренебрежением некоторых членов, происходящих от притяжения планет, или еще какой-нибудь неизвестной причиной. Тем не менее этот метод настолько сложен, что мы отказываемся от его изложения здесь и отсылаем читателя к оригинальным работам Ганзена, изложение которых можно найти в главе XVII третьего тома Тиссерана. Успех Ганзена объясняется его высоким искусством и его личным терпением в особенности, а также тем, что он искал непосредственно численные значения коэффициентов, не переходя к алгебраическим выражениям, где постоянные обозначены буквами.

Делоне поступал наоборот; все его коэффициенты выражены рядами, в которых фигурируют различные постоянные, характеризующие движение Луны, а коэффициентами этих рядов являются известные рациональные числа. Поэтому эти формулы применимы не только к Луне, но и к любому спутнику (в предположении, что он один). Для этого достаточно заменить постоянные, относящиеся к Луне, соответствующими постоянными для данного спутника. Из этих формул легко также видеть, каково влияние ошибки, внесенной в какой-либо из элементов Луны. Определение рациональных чисел, которые служат коэффициентами, требует огромной работы. Если Андуайе нашел несколько ошибок, то они относятся только к членам высшего порядка и они не влияют на точность, заданную таблицами.

Браун занимает промежуточную позицию. Его коэффициенты не являются ни чисто числовыми, как у Ганзена, ни чисто аналитическими, как у Делоне. Они представляются в виде рядов, расположенных по степеням различных элементов, за исключением отношения средних движений. Находятся численные значения коэффициентов этих рядов, но эти коэффициенты уже не являются рациональными числами, а функциями отношения средних движений, которые также могут быть представлены рядами, но Браун ограничивался нахождением их численных значений. Так как, с другой стороны, метод Брауна является более непосредственным по сравнению с другими, то можно получить более далекие приближения по сравнению с предыдущими методами.

Мы излагаем здесь метод Брауна с некоторыми изменениями, так как здесь мы можем воспользоваться результатами предыдущих глав и связать теорию Луны с общей теорией задачи трех тел.

**312.** Мы будем пользоваться обозначениями главы II и, в частности, § 42. Следовательно, мы будем обозначать:

через

$$m_1 = m_2 = m_3 \text{ — массу Луны,}$$
$$m_4 = m_5 = m_6 \text{ — массу Солнца,}$$
$$m_7 = m_8 = m_9 \text{ — массу Земли;}$$

через

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ — координаты Луны,}$$
$$x_4,\ x_5,\ x_6 \text{ — координаты Солнца,}$$
$$x_7,\ x_8,\ x_9 \text{ — координаты Земли;}$$

через $A$, $B$, $C$ — положения трех тел (Луны, Солнца и Земли), через $D$ — центр масс системы Луна — Земля, а через

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3 \text{ — проекции вектора } AC,$$
$$x'_4,\ x'_5,\ x'_6 \text{ — проекции вектора } BD.$$

Мы положим также

$$m'_1 = m'_2 = m'_3 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}, \qquad m'_4 = m'_5 = m'_6 = \frac{m_4 (m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7},$$

$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt},$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{y'^2_1}{m'_1} + \frac{y'^2_2}{m'_2} + \frac{y'^2_3}{m'_3}\right), \qquad T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{y'^2_4}{m'_4} + \frac{y'^2_5}{m'_5} + \frac{y'^2_6}{m'_6}\right),$$

так что $T_1$ представляет кинетическую энергию Луны в ее движении относительно Земли, если приписать ей фиктивную массу $m'_1$, тогда как $T_2$ представляет кинетическую энергию Солнца в его движении относительно точки $D$, если приписать ему массу $m'_4$.

Кроме того, мы будем полагать

$$U_1 = -\frac{m_1 m_7}{AC}, \qquad U_2 = -\frac{m_4 (m_1 + m_7)}{BD},$$

$$U_3 = m_1 m_4 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right),$$

$$F = T_1 + T_2 + U_1 + U_2 + U_3 = \Phi_0 + m'_1 \Phi_1 \text{ *)},$$

$$\Phi_0 = T_2 + U_2, \qquad m'_1 \Phi_1 = T_1 + U_1 + U_3.$$

---

*) Мы находим более целесообразным положить здесь

$$F = \Phi_0 + m'_1 \Phi_1, \qquad y' = m'_1 y''$$

вместо ранее употреблявшихся обозначений

$$F = \Phi_0 + m_1 \Phi_1, \qquad y' = m_1 y''.$$

Мы видели, что $U_3$ составляет примерно 0,01 от $T_1$ и $U_1$ и 0,0000001 от $T_2$ и $U_2$, что позволяет нам пренебречь $U_3$ по сравнению с $\Phi_0$.

313. Уравнения движения имеют каноническую форму

$$\frac{dx_i'}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i'}. \tag{1}$$

Полагая $i = 4, 5, 6$, мы видим, что частные производные от $T_1 + U_1$ равны нулю, а частные производные от $U_3$ пренебрежимо малы по сравнению с частными производными от $\Phi_0$, так что получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_i'}{dt}=\frac{\partial \Phi_0}{\partial y_i'},\\ &\frac{dy_i'}{dt}=-\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i'}\\ &\quad (i=4, 5, 6),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

которые показывают, что движение Солнца относительно центра масс $D$ может рассматриваться как кеплеровское движение.

При $i = 1, 2, 3$ частные производные от $\Phi_0$ обращаются в нуль, поэтому получим

$$\frac{dx_i'}{dt}=m_1'\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i'}, \qquad \frac{dy_i'}{dt}=-m_1'\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i'} \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{3}$$

Правые части уравнений (3) зависят также от $x_4'$, $x_5'$, $x_6'$, которые определяются уравнениями (2). Поэтому их можно рассматривать как известные функции времени, так что характеристическая функция $\Phi_1$ будет зависеть явно от времени (как и в § 12).

С другой стороны, чтобы избавиться от малого множителя $m_1$, достаточно положить, как и в § 121,

$$y_i'=m_1'y_i'' \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Уравнения (3) остаются при этом каноническими и принимают вид

$$\frac{dx_i'}{dt}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i''}, \quad \frac{dy_i''}{dt}=-\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i'}. \tag{3'}$$

314. Теперь нужно применить методы X и XII глав, результаты которых приведены, в частности, в § 177. Мы видим, что оскулирующие элементы могут быть разложены по степеням $\mu$ и по степеням выражений

$$E_k\cos w_k', \qquad E_k\sin w_k' \tag{4}$$

и по синусам и косинусам кратных аргументов $w''$, а коэффициенты этих разложений зависят еще от $n$ постоянных интегрирования $W_i$ (если мы имеем $n+1$ тело).

Величины $E$ суть постоянные интегрирования порядка эксцентриситетов и наклонностей. Аргументы $w'$ и $w''$ изменяются пропорционально времени, и мы имеем

$$w'_k = -\gamma'_k t + \overline{\omega}'_k, \qquad w''_i = n'_i t + \overline{\omega}_i,$$

где $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'$ суть постоянные интегрирования, а $n'$ и $\gamma'$ — постоянные, разложимые по степеням $\mu$ и $E^2$ (см. § 179).

В § 192 мы видели, что гелиоцентрические координаты (здесь геоцентрические координаты), т. е. $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, разлагаются таким же образом, и то же самое можно утверждать о $y'_1$, $y'_2$, $y'_3$. Эти разложения имеют вид

$$\sum A\Pi(E^q) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left( \sum kw'' + \sum pw' \right), \tag{5}$$

где $q$, $k$, $p$ — целые числа, причем

$$\sum k - \sum p = 0 \tag{6}$$

в разложениях для $x'_3$, $x'_6$, $y'_3$, $y'_6$ и

$$\sum k - \sum p = 1 \tag{7}$$

в разложениях для $x'_1$, $x'_2$, $x'_4$, $x'_5$, $y'_1$, $y'_2$, $y'_4$, $y'_5$ (см. §§ 116, 162, 187, 192).

Известно также, что разложения для $x'_1$, $x'_3$, $x'_4$, $x'_6$, $y'_2$, $y'_5$ содержат только косинусы, и наоборот, разложения для $x'_2$, $x'_5$, $y'_1$, $y'_3$, $y'_4$, $y'_6$ — только синусы (см. § 190 и 192).

Количество аргументов $w'$ равно четырем, число аргументов $w''$ — двум (§ 193). Но одно из средних движений $\gamma'_4$ равно нулю, поэтому $w'_4$ приводится к постоянной. Если взять неизменную плоскость за координатную плоскость $x_1x_2$, то $E_4 = 0$, так что аргумент $w'_4$ не будет входить в разложения, и мы будем иметь только пять аргументов

$$\left.\begin{matrix} w'_1, & w''_1, \\ w'_2, & w''_2, \\ w'_3 & . \end{matrix}\right\} \tag{8}$$

Новое упрощение возникает в результате того, что масса Луны мала и движение Солнца относительно точки $D$ может быть рассматриваемо как кеплеровское. Неизменная плоскость, которую мы взяли за плоскость $x_1x_2$, тогда есть просто плоскость солнечной орбиты. С другой стороны, $w'_3$, которая с точностью до знака есть долгота перигелия солнечной кеплеровской орбиты, обращается в постоянную, поэтому остаются только четыре различных аргумента, $w'_1$, $w'_2$, $w''_1$, $w''_2$, смысл которых легко заметить: $w''_1$ — средняя долгота Луны (не средняя долгота в оскулирующей орбите, но, так сказать, средняя средняя долгота); $w''_2$ — средняя долгота Солнца; $-w'_1$ — средняя долгота лунного перигелия; $-w'_2$ — средняя долгота узла.

Точно так же $E_1$ есть постоянная, которая играет роль, аналогичную эксцентриситету лунной орбиты; $E_2$ играет роль наклонности, $E_3$ — эксцентриситета орбиты Солнца, и мы можем даже воспользоваться неопределенностью этой постоянной $E_3$, чтобы считать, что она в точности равна эксцентриситету орбиты Солнца.

В разложениях для

$$x'_1,\ x'_2,\ y'_1,\ y'_2$$

показатель величины $E_2$ и коэффициент при $w'_2$ всегда будут четными. Наоборот, в разложениях для $x'_3$, $y'_3$ они всегда будут нечетными (см. § 191).

Если $E_3 = 0$, т. е. если допустить, что орбита Солнца является круговой, то наши разложения не будут зависеть от $w'_3$, а лишь от аргумента

$$k_1 w''_1 + k_2 w''_2 + p_1 w'_1 + p_2 w'_2,$$

в котором

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_2$$

равно нулю для взаимных расстояний и для $x'_3$ и равно 1 для $x'_1$ и $x'_2$.

Если, кроме того, наклонность равна нулю, т. е. если $E_2 = 0$, то члены, зависящие от $w'_2$, исчезают; следовательно, $x'_3 = 0$, и в разложениях для взаимных расстояний трех тел имеем только аргумент

$$k_1 w''_1 + k_2 w''_2 + p_1 w'_1,$$

причем

$$p_1 = k_1 + k_2.$$

Другими словами, разложения зависят только от двух аргументов $w''_1 + w''_2$, $w''_2 + w'_1$ и располагаются по степеням величин

$$E_1 \cos(w''_2 + w'_1), \quad E_1 \sin(w''_2 + w'_1).$$

Это случай ограниченной круговой задачи трех тел.

Если мы вернемся к предположению $E_2 \gtrless 0$, $E_3 = 0$, то интеграл Якоби еще существует.

315. Выше мы положили (§ 312)

$$m_1 \Phi_1 = T_1 + U_1 + U_3.$$

Прежде всего должны заметить, что:

1. $U_3$ намного меньше, чем $T_1 + U_1$.

2. $T_1$ и $U_1$ зависят только от масс $m_1$ и $m_7$ и от координат Луны, т. е. от переменных $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $y_1'$, $y_2'$, $y_3'$.

3. $U_3$ зависит, кроме того, от массы $m_4$ Солнца и от координат Солнца, которые являются известными функциями времени и элементов орбиты Солнца.

С другой стороны, так как $AC$ намного меньше $BD$, имеем

$$U_3 = -m_4 \sum \frac{m_1 m_7^n \pm m_7 m_1^n}{(m_1+m_7)^n} P_n \frac{AC^n}{BD^{n+1}}, \tag{9}$$

где $P_n$ есть функция угла между двумя направлениями $AC$ и $BD$ (см. § 38), и ряд (9) сходится очень быстро. Мы видим, каким образом $U_3$ зависит от масс и элементов орбиты Солнца:

1) она пропорциональна $m_4$;

2) $\frac{U_3}{m_1'}$ зависит только от отношения $\frac{m_1}{m_7}$;

3) $U_3$ зависит, кроме того, от элементов орбиты Земли, а именно: от долготы перигелия $-w_3'$, которая равна постоянной, от средней долготы Солнца $-w_2''$, которая меняется пропорционально времени, от эксцентриситета орбиты Солнца, который мы выше обозначили через $E_3$, и, наконец, от большой полуоси орбиты Солнца, которую будем обозначать через $a'$.

Посмотрим, как каждый из членов ряда (9) зависит от $a'$. Расстояние $AC$ зависит лишь от координат Луны; множитель $P_n$ зависит от угла, следовательно, он не зависит от $a'$, а зависит от других элементов орбиты Солнца. Что касается $BD^{n+1}$, то это есть $(n+1)$-я степень некоторой длины, поэтому она будет пропорциональна $a'^{n+1}$. Отношение $\frac{a'}{BD}$ не будет зависеть от $a'$. Поэтому можно написать

$$U_3 = -m_4 \sum \frac{m_1 m_7^n \pm m_7 m_1^n}{(m_1+m_7)^n} P_n AC^n \left(\frac{a'}{BD}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{a'^{n+1}}, \tag{10}$$

и так как все множители, кроме последнего, не зависят от $a'$, то мы имеем разложение функции $U_3$ по убывающим степеням $a'$. Первый член разложения (10) равен

$$-m_4 \frac{m_1 m_7}{m_1+m_7} P_2 AC^2 \left(\frac{a'}{BD}\right)^3 \frac{1}{a'^3},$$

так что мы можем написать

$$\frac{U_3}{m_1'} = \frac{m_4}{a'^3} \sum Q_n \frac{1}{a'^n},$$

где $Q_n$ не зависит от $m_4$ и от $a'$.

Множитель $\frac{m_4}{a'^3}$ мал и он играет роль параметра $\mu$. Впрочем, $a'$ есть постоянная, и наша возмущающая функция разлагается в быстро сходящийся ряд по степеням $\frac{1}{a'}$. Постоянная величина $\frac{1}{a'}$ также могла бы играть роль параметра $\mu$, так что, применяя предыдущие методы, мы найдем, что наши неизвестные могут быть разложены по степеням величин

$$\frac{m_4}{a'^3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{a'}.$$

С другой стороны, третий закон Кеплера дает

$$m_7 + m_4 = a'^3 n_2^2,$$

откуда

$$\mu = \frac{m_4}{a'^3} = n_2^2 \frac{1}{1 + \frac{m_7}{m_4}}.$$

Второй множитель есть известная постоянная. Она так близка к единице, что можно просто взять

$$\mu = n_2^2.$$

Поэтому, кажется, мы должны сделать вывод, что наши координаты должны быть разложимы по степеням $n_2^2$ и $\frac{1}{a'}$. Но прежде чем согласиться с этим выводом, нужно рассмотреть вопрос подробнее.

$\Phi_1$ и $U_2$ зависят от $n_2$ двумя способами:

1) непосредственно через множитель $\mu = \frac{m_4}{a'^3}$, который содержится в $U_3$;

2) косвенно, так как $U_3$ зависит, кроме того, от $w_2''$, который равен $n_2 t$.

Чтобы можно было применять результаты главы X, необходимо рассмотреть $n_2$ (поскольку он входит в $w_2''$) и $\mu$ как две независимые переменные. При этих условиях наши разложения будут расположены по степеням $\mu$, но их коэффициенты будут функциями различных постоянных и, в частности, $n_2$. Мы видели, что интегрирование приводит к появлению малых делителей вида $k_1 n_1 + k_2 n_2$. Один из этих делителей в точности равен $n_2$.

Рассмотрим некоторый член разложения, зависящий от этого малого делителя $n_2$. Пусть $\alpha$ — показатель $\mu$, а $\beta$ — показатель малого делителя, так что наш член содержит в качестве множителя величину

$$\mu^\alpha n_2^{-\beta} = n_2^{2\alpha - \beta}.$$

Выражение $\alpha-\frac{\beta}{2}$ является классом данного члена, и как было показано в § 198, он всегда неотрицателен. Следовательно, показатель $2\alpha-\beta$ величины $n_2$ не может быть отрицательным, но нет никакой причины, чтобы он был четным.

*Следовательно, наши разложения располагаются не по степеням $n_2^2$ и $\frac{1}{a'}$, а по степеням $n_2$ и $\frac{1}{a'}$.* Мы убедимся далее, в конце главы XXVIII, что могут появиться, но только для членов высшего порядка, малые делители с $n_2^2$ и $n_2^3$. Отсюда следует, что $n_2$ может в некоторых членах разложения войти с отрицательным показателем.

316. Итак, окончательно находим, что

$$x'=f(m_1,\ m_4,\ m_7;\ n_1,\ E_1,\ E_2;\ w_1'',\ w_1',\ w_2';\ a',\ E_3,\ w_2'',\ w_3').$$

В самом деле, наши координаты зависят от трех масс, четырех аргументов $w_1'$, $w_2'$, $w_1''$, $w_2''$, двух постоянных интегрирования $E_1$ и $E_2$, введенных выше, третьей постоянной, за которую мы можем выбрать среднее движение $n_1$, и элементов солнечной орбиты $a'$, $E_3$ и $w_3'$.

Мы можем заменить $m_4$ через $a'^3n_2^2$ и ввести новую постоянную $a$, определенную равенством

$$m_1+m_7=n_1^2a^3.$$

Тогда $m_1$ и $m_7$ будут функциями $\frac{m_1}{m_7}$ и $n_1^2a^3$, так что можно написать

$$x'=f\left(\frac{m_1}{m_7},\ a,\ n_1,\ E_1,\ E_2,\ w_1'',\ w_2'',\ w_1',\ w_2',\ a',\ n_2,\ E_3,\ w_3'\right).$$

Теперь нужно ввести условия однородности: $a$ и $a'$ имеют размерность длины, так же как и $x'$; $\frac{1}{n_1}$ и $\frac{1}{n_2}$ имеют размерность времени; $E$ являются числами, или по крайней мере можно воспользоваться неопределенностью их определения, чтобы это допустить; $\frac{m_1}{m_7}$ и $w$ являются числами.

При этих условиях, чтобы формула не зависела от единиц длины и времени, мы должны иметь

$$x'=a\cdot f\left(\frac{n_2}{n_1},\ \frac{a}{a'}\right).$$

Мы не отмечаем явно те переменные, которые являются числами. Положим

$$\frac{n_2}{n_1}=m',\quad \frac{a}{a'}=\alpha,$$

и так как наши выражения разложимы по степеням $n_2$ и $\frac{1}{a'}$, то мы видим, что они будут разложимы также по степеням $m'$ и $\alpha$; постоянная $m'$ есть отношение средних движений; $\alpha$ — это величина, называемая *параллаксом*.

Прежде всего, дифференцируя по времени, будем иметь

$$y_i'' = \frac{m_1'}{m_1}\frac{dx_i'}{dt} = \frac{1}{1+\frac{m_1}{m_7}}\cdot\frac{dx_i'}{dt}$$

и, следовательно, в силу однородности

$$y_i'' = n_2 a f\left(\frac{n_2}{n_1}, \frac{a}{a'}\right) = n_2 a f(m', \alpha),$$

а, с другой стороны,

$$\Phi_1 = n_1^2 a^2 f\left(m', \alpha; \frac{x_i'}{a}, \frac{y_i''}{n_1 a}; \frac{m_1}{m_7}; E_3, w_2'', w_3'\right).$$

317. Полезно сделать еще несколько замечаний относительно симметрии. Наши разложения расположены по степеням величин

$$m', \alpha, E_1 \frac{\cos}{\sin} w_1', \quad E_2 \frac{\cos}{\sin} w_2', \quad E_3 \frac{\cos}{\sin} w_3'$$

и аргумент общего члена равен

$$k_1 w_1'' + k_2 w_2'' + p_1 w_1' + p_2 w_2' + p_3 w_3'.$$

Для $x_3'$ $\sum k - \sum p = 0$, а для $x_1'$ и $x_2'$ $\sum k - \sum p = 1$. Кроме того, $p_2$ четно для $x_1'$ и $x_2'$ и нечетно для $x_3'$, откуда следует, что

$$k_1 + k_2 - p_1 - p_3$$

всегда нечетно. С другой стороны, $p_3$ всегда имеет ту же четность, что и показатель $E_3$, поэтому $k_1 + k_2 - p_1 - 1$ всегда имеет четность, противоположную этому показателю.

Пусть теперь $q_0$ есть показатель параллакса $\alpha$; мы видим, что положение Солнца не меняется, если переменные

$$a', \quad w_2'', \quad w_3'$$

заменить на

$$-a', \quad w_2'' + \pi, \quad w_3' + \pi.$$

В этом случае координаты Солнца не изменятся, поэтому ничего не должно измениться, так как в наших уравнениях $a'$, $w_2''$, $w_3'$ вводятся только через координаты Солнца.

Но при этом любой член умножится на $(-1)^{q_0+k_2+p_3}$, следовательно, мы должны иметь

$$q_0+k_2+p_3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2).$$

С другой стороны, мы нашли, что

$$k_1+k_2-p_1-p_3 \equiv 1$$

для трех координат $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ и, следовательно,

$$k_1+p_1+q_0 \equiv 1.$$

Для взаимных расстояний мы имели

$$k_1+k_2-p_1-p_2-p_3=0, \quad p_2 \equiv 0,$$
$$k_1+k_2-p_1-p_3 \equiv 0,$$

откуда

$$k_1+p_1+q_0 \equiv 0.$$

Немного дальше (см. § 320) мы положим

$$x=x_1'\cos w_2+x_2'\sin w_2,$$
$$y=-x_1'\sin w_2+x_2'\cos w_2.$$

Отсюда видно, что если $k_2$ четное в разложениях $x_1'$ и $x_2'$, то оно будет нечетным в разложениях $x$ и $y$, и наоборот. Поэтому для $x$ и $y$ будем иметь

$$q_0+k_2+p_3 \equiv 1$$

и для членов, не зависящих от $\alpha$ и $E_3$, т. е. если $q_0=p_3=0$, будем иметь

$$k_2 \equiv 1.$$

**318.** Сейчас мы выведем одну важную для дальнейшего формулу, для чего воспроизведем отчасти рассуждения § 120, опираясь на теорему из § 16. Согласно этой теореме если имеется система канонических уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x},$$

и если допустим, что переменные $x$ и $y$ выражены в виде функций от постоянных интегрирования $\alpha$ и времени $t$, то имеет место тождество

$$\sum x\,dy=d\Omega+\sum A\,d\alpha-F\,dt,$$

где $\Omega$ определяется уравнением

$$\frac{d\Omega}{dt}=F+\sum x\frac{dy}{dt}=F-\sum x\frac{\partial F}{\partial x},$$

а величины $A$ не зависят от времени, а только от $\alpha$.

Здесь имеем уравнения (3′):

$$\frac{dx'_i}{dt}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial y''_i}, \qquad \frac{dy''_i}{dt}=-\frac{\partial \Phi_1}{\partial x'_i}.$$

Они тоже являются каноническими, но функция $\Phi_1$ зависит не только от неизвестных $x'$ и $y''$, но еще и от времени, и это обязывает нас применять прием § 12. $\Phi_1$ зависит явно от времени через посредство координат Солнца, которые являются периодическими функциями аргумента $w''_2$. Введем, следовательно, две вспомогательные переменные $u$ и $v$. Мы можем написать $\Phi_1$ в виде

$$\Phi_1(x', y''; w''_2)$$

и положить

$$F'=\Phi_1(x', y''; u)+n_2 v.$$

Тогда, если мы хотим, чтобы соблюдалось условие $u=w''_2=n_2t+\bar{\omega}_2$, мы должны иметь

$$\frac{du}{dt}=n_2=\frac{\partial F'}{\partial v}$$

и можем написать канонические уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx'}{dt}&=\frac{\partial F'}{\partial y''}, &\qquad \frac{dy''}{dt}&=-\frac{\partial F'}{\partial x'},\\ \frac{du}{dt}&=\frac{\partial F'}{\partial v}, &\qquad \frac{dv}{dt}&=-\frac{\partial F'}{\partial u}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Мы присоединили произвольно четвертое уравнение, которое может рассматриваться как уравнение для определения $v$. Кроме того, для унификации обозначений мы положим

$$w_1=w''_1, \qquad w_2=w''_2,$$
$$w_3=w'_1, \qquad w_4=w'_2$$

и, с другой стороны,

$$w_i=n_it+\bar{w}_i,$$

что не изменит определение $n_1$, $n_2$, $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$.

Уравнения остаются каноническими и $F'$ более не зависит явно от времени. Следовательно, мы можем написать

$$\sum x'\,dy''+u\,dv=d\Omega+\sum A\,d\alpha-F'\,dt. \tag{12}$$

Но

$$F'\,dt=(\Phi_1+n_2v)\,dt=\Phi_1\,dt+v\,(du-d\overline{\omega}_2),$$

что позволяет написать

$$\sum x'\,dy''=d\,(\Omega-uv)+\sum A\,d\alpha-\Phi_1\,dt+v\,d\overline{\omega}_2. \tag{13}$$

Каковы наши постоянные интегрирования $\alpha$? Мы имеем сначала $m'$, $E_1$ и $E_2$, которые мы обозначим через $\beta$, затем мы имеем постоянные $\overline{\omega}$, входящие в аргументы $w$. Так как система (11) есть система восьмого порядка, то мы имеем и восьмую постоянную, но нас это не должно беспокоить, так как она входит только в лишнюю переменную $v$. Это постоянная $K$, которая входит в правую часть равенства

$$n_2v+\Phi_1=K.$$

Что касается других постоянных, то они относятся к характеристикам орбиты Солнца, поэтому они должны рассматриваться как известные величины, а не как постоянные интегрирования. Среди семи постоянных, которые мы сохранили, мы будем различать постоянные $\overline{\omega}$ и другие три ($m'$, $E_1$, $E_2$), которые будем обозначать через $\beta$. Тогда, различая коэффициенты двух видов, мы можем написать уравнение

$$\sum x'\,dy''=d\,(\Omega-uv)+\sum A\,d\overline{\omega}+\sum B\,d\beta-\Phi_1\,dt+v\,d\overline{\omega}_2.$$

Полагая в нем

$$\Omega'=\Omega-uv,$$

получаем формулу

$$\sum x'\,dy''=d\Omega'+\sum A\,d\overline{\omega}+\sum B\,d\beta-\Phi_1\,dt+v\,d\overline{\omega}_2. \tag{14}$$

Функция $\Omega'$ определяется с точностью до произвольной функции от постоянных $\beta$ и $\overline{\omega}$ из уравнения

$$\frac{d\Omega'}{dt}=\Phi_1+\sum x'\,\frac{dy''}{dt}. \tag{15}$$

Правая часть есть функция постоянных $\beta$ и аргументов $w$, периодическая относительно $w$.

Обозначим через $H$ среднее значение этой периодической функции, которая будет функцией только от $\beta$. Тогда можно допустить, что

$$\Omega'=Ht+\Omega'',$$

где $\Omega''$ — некоторая функция величин $\beta$ и $w$, периодическая по $w$. Среднее значение этой периодической функции может быть выбрано произвольно, так как $\Omega'$ определяется только с точностью до произвольной функции постоянных, и мы будем полагать ее равной нулю. При этих условиях $\Omega''$ является функцией только $\beta$ и $w$. Как и в § 129, будем полагать

$$\sum x'\,dy'' - d\Omega'' = \sum W_i\,dw_i + \sum C_i\,d\beta_i \tag{16}$$

и будем иметь, что $W$ и $C$ являются функциями $\beta$ и $w$, периодическими по $w$. Итак, имеем равенство, которое вытекает из сложения (14) и (16):

$$\sum W\,dw + \sum C\,d\beta - d(Ht) = \sum A\,d\overline{\omega} + \sum B\,d\beta - \Phi_1\,dt + v\,d\overline{\omega}_2. \tag{17}$$

Это равенство должно обратиться в тождество, если заменить $w_i$ через $n_i t + \overline{\omega}_i$. Поэтому соотношение (17) может быть записано в виде

$$\sum W(n\,dt + t\,dn + d\overline{\omega}) + \sum C\,d\beta - H\,dt - t\,dH = \\ = \sum A\,d\overline{\omega} + \sum B\,d\beta - \Phi_1\,dt + v\,d\overline{\omega}_2,$$

откуда, отождествляя коэффициенты при различных дифференциалах, получим

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= H - \sum Wn, \\ W_i &= A_i \qquad (i \gtrless 2), \\ W_2 &= A_2 + v, \\ t\sum W\frac{\partial n}{\partial\beta} + C &= B + t\frac{\partial H}{\partial\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Рассмотрим уравнения (18) и применим к ним леммы § 108 и последующих параграфов. Если сначала возьмем уравнение $W_i = A_i$, то увидим, что левая часть должна быть функцией $\beta$ и $w$, периодической относительно последних, а правая часть должна быть функцией $\beta$ и $\overline{\omega}$. К тому же это уравнение должно обратиться в тождество при замене $w$ на $nt + \overline{\omega}$. Это возможно, если $W_i$ и $A_i$ являются функциями только $\beta$ (для $i = 1$, 3 или 4).

Если рассмотрим последнее из уравнений (18), то увидим, что левая часть равна сумме функции $C$, периодической по $w$, и функции, периодической по $w$, умноженной на $t$. Правая же часть равна сумме функции $B$, зависящей от $\beta$ и $\overline{\omega}$, и функции, зависящей от $\beta$, умноженной на $t$. Тождество возможно только тогда, если имеют место в отдельности равенства

$$\sum W\frac{\partial n}{\partial\beta} = \frac{\partial H}{\partial\beta};$$

$$C = B$$

как функции постоянных $\beta$.

Поэтому будем иметь

$$\sum W\,dn = dH \tag{19}$$

и, учитывая первое из уравнений (18), получим

$$d\Phi_1 = -\sum n\,dW. \tag{20}$$

Заметим, что в сумму $\sum W\,dn$ не входит член $W_2\,dn_2$, так как $n_2$ — заданная постоянная и, следовательно, $dn_2 = 0$.

Мы говорили, что $W_1$, $W_3$, $W_4$ зависят только от $\beta$. Посмотрим, что мы можем сказать относительно $W_2$. Мы имеем уравнение

$$W_2 = A_2 + v,$$

где $W_2$ — функция от $\beta$ и $w$, периодическая по $w$, а

$$n_2 v = K - \Phi_1.$$

$K$ — восьмая постоянная, тогда как $\Phi_1$ является функцией $\beta$ и $w$, периодической по $w$; что касается $A_2$, то эта функция восьми постоянных $\beta$, $\bar{\omega}$ и $K$. Поэтому имеем тождество

$$n_2 W_2 + \Phi_1 = n_2 A_2 + K, \tag{21}$$

в котором левая часть есть функция $\beta$ и $w$, периодическая относительно $w$, а правая часть ее есть функция $\beta$, $K$ и $\bar{\omega}$. Тождество возможно, если только обе части зависят лишь от $\beta$. В таком случае будем писать первое из уравнеиий (18) в виде

$$(n_2 W_2 + \Phi_1) + n_1 W_1 + n_3 W_3 + n_4 W_4 = H,$$

в котором каждый член левой и правой частей являются функциями лишь $\beta$.

Выше мы видели, что некоторые из наших координат являются четными функциями, а другие — нечетными функциями аргументов

$$w_1'', \; w_2'', \; w_1', \; w_2', \; w_3'.$$

Последний из этих аргументов, $w_3'$, есть постоянная, которую можно рассматривать как величину, заданную раз и навсегда. В частности, мы можем положить ее равной нулю, что будет означать, что координатная ось $x_1$ совпадает с большой осью земной орбиты. При этих условиях наши координаты будут четными или нечетными функциями четырех аргументов

$$w_1 = w_1'', \; w_2 = w_2'', \; w_3 = w_1', \; w_4 = w_2'.$$

Следующие функции,

$$x_1', x_3', y_2'', \frac{dx_2'}{dt}, \frac{dy_1''}{dt}, \frac{dy_3''}{dt}, \Phi_1, \frac{d\Omega'}{dt},$$

$$H, W, A, v, n, x'\frac{dy''}{dt}, x'\frac{\partial y''}{\partial w}, \frac{\partial\Omega'}{\partial w},$$

будут четными, а функции

$$x_2', y_1'', y_3'', \frac{dx_1'}{dt}, \frac{dx_3'}{dt}, \frac{dy_2''}{dt},$$

$$\Omega', \Omega'', C, B, x'y'', x'\frac{\partial y''}{\partial\beta}, \frac{\partial\Omega'}{\partial\beta}$$

будут нечетными.

Заметим, что $C$ не зависит от $w$ и в то же время должно быть нечетной функцией $w$, поэтому она должна быть равна нулю, так что будем иметь

$$\sum x'\,dy'' - d\Omega'' = \sum W\,dw$$

и в силу уравнений (18) и (21)

$$\sum x'\,dy'' - d\Omega'' = \sum A_i'\,dw_i - \frac{\Phi_1\,dw_2}{n_2}, \tag{22}$$

в котором положено

$$A_i' = A_i = W_i \qquad (i = 1, 3, 4),$$

$$A_2' = A_2 + \frac{K}{n_2},$$

так что величины $A'$ зависят только от $\beta$.

**319.** Из формулы (22) можно вывести ряд важных формул, которые мы напишем в виде

$$\sum x'\frac{\partial y''}{\partial\beta} - \frac{\partial\Omega''}{\partial\beta} = 0,$$

$$\sum x'\frac{\partial y''}{\partial w_i} - \frac{\partial\Omega''}{\partial w_i} = A_i' \qquad (i = 1, 3, 4),$$

$$\sum x'\frac{\partial y''}{\partial w_2} - \frac{\partial\Omega''}{\partial w_2} = A_2' - \frac{\Phi_1}{n_2}$$

и, в частности, для постоянной $m'$

$$\sum x'\frac{\partial y''}{\partial m'} - \frac{\partial\Omega''}{\partial m'} = 0.$$

Но при использовании последней формулы необходимо обратить внимание на одну вещь. Выше мы приводили выражения

$$x' = af(m', \alpha), \quad y'' = n_2 af(m', \alpha),$$

где $\alpha = \frac{a}{a'}$. В этом случае надо обратить внимание на то, что $x'$ и $y''$ зависят от $m'$ не только непосредственно, но и через посредство $a$, которая является функцией $m$, и через посредство $\alpha$, которая равна $\frac{a}{a'}$.

**320. Вращающиеся оси.** Можно получить большую выгоду, если отнести нашу систему к осям, вращающимся вокруг начала с угловой скоростью $n_2$. Эти преимущества следуют уже из того, что мы говорили выше, в § 313. Действительно, мы видели, что когда $E_3 = 0$, уравнения движения в этой системе координат принимают особенно простой вид.

Легко вывести уравнения движения элементарными преобразованиями, но предпочтительнее получить преобразование уравнений из результатов главы I. Для этого возьмем уравнения (11) § 318; с другой стороны, чтобы прийти к обозначениям Хилла и Брауна, мы обозначим через $x$, $y$, $z$ координаты Луны относительно вращающихся осей, так что будем иметь

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1' \cos u + x_2' \sin u, \\ y &= -x_1' \sin u + x_2' \cos u, \\ z &= x_3'. \end{aligned}\right\}$$

Здесь $u$ есть угол между подвижными и неподвижными осями, т. е. он имеет тот же смысл, что и в § 318. Поэтому $w_2 = w_2'' = n_2 t + \bar{\omega}_2$.

Далее, будем полагать

$$\begin{aligned} y_1'' &= X \cos u - Y \sin u, \\ y_2'' &= X \sin u + Y \cos u, \\ y_3'' &= Z \end{aligned}$$

и, наконец,

$$v' = v - (Xy - Yx).$$

При этих условиях имеем

$$\begin{aligned} dx &= dx_1' \cos u + dx_2' \sin u + y\,du, \\ dy &= -dx_1' \sin u + dx_2' \cos u - x\,du \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum y''\,dx' + v\,du = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + v'\,du.$$

Отсюда вытекает, что замена переменных является канонической и уравнения (11) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{\partial F'}{\partial X}, & \frac{dX}{dt}&=-\frac{\partial F'}{\partial x},\\ \frac{du}{dt}&=\frac{\partial F'}{\partial v'}, & \frac{dv'}{dt}&=-\frac{\partial F'}{\partial u},\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

из которых уравнения для других координат получаются круговой перестановкой переменных $x$, $y$, $z$ и $X$, $Y$, $Z$.

Кроме того, имеем

$$F'=\frac{T_1+U_1+U_3}{m_1'}+n_2v'+n_2(Xy-Yx),$$

$$T_1=\frac{m_1'}{2}\sum y''^2=\frac{m_1'}{2}\sum X^2,$$

и из уравнений (23) получим

$$\frac{dx}{dt}=X+n_2y,\quad \frac{dy}{dt}=Y-n_2x,\quad \frac{dz}{dt}=Z,$$

$$\frac{dX}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi_1'}{\partial x},\quad \frac{du}{dt}=n_2.$$

В этих уравнениях положено

$$\psi=\frac{U_1+U_3}{m_1'}+n_2(Xy-Yx),\quad \Phi_1'=\psi+\frac{1}{2}\sum X^2=F'-n_2v'.$$

Заметим, что

$$\left.\begin{aligned}&n_2(Xy-Yx)=n_2\left(\frac{dx}{dt}y-\frac{dy}{dt}x\right)-n_2^2(x^2+y^2),\\ &\frac{1}{2}\sum X^2=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-n_2\left(\frac{dx}{dt}y-\frac{dy}{dt}x\right)+\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{n_2^2}{2}(x^2+y^2),\\ &\frac{1}{2}\sum X^2+n_2(Xy-Yx)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{n_2^2}{2}(x^2+y^2),\\ &n_2(Xy-Yx)=n_2(y_1''x_2'-y_2''x_1').\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

Последнее из равенств (24) делает понятным смысл дополнительного члена $n_2(Xy-Yx)$. Он представляет собой с точностью до постоянного множителя $n_2$ постоянную площадей в абсолютном движении.

В случае, когда $E_3=0$, $F'$ зависит только от $x$, $y$, $z$, $X$, $Y$, $Z$ и не зависит от $u$. Следовательно, мы снова приходим к интегралу

Якоби, который может быть написан в виде

$$F'-n_2v'=\frac{1}{2}\sum X^2+\frac{U_1+U_3}{m_1'}+n_2(Xy-Yx)=\mathrm{const}$$

или

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{U_1+U_3}{m_1'}-\frac{n_2^2}{2}(x^2+y^2)=\mathrm{const}.$$

Далее находим

$$\sum y''dx'=\sum X\,dx-(Xy-Yx)\,du,$$
$$\sum y''x'=\sum Xx,$$

откуда

$$\sum x'\,dy''=\sum x\,dX+(Xy-Yx)\,du.$$

Учитывая формулу (22) и замечая, что $u=w_2$, получим

$$\sum x\,dX-d\Omega''=\sum A_i'\,dw_i-\frac{\Phi_1'\,dw_2}{n_2}, \tag{25}$$

где положено

$$\Phi_1'=\Phi_1+n_2(Xy-Yx)=F'-n_2v'.$$

С другой стороны, $\Omega''$ определяется также из уравнения

$$\frac{d\Omega''}{dt}=\Phi_1'+\sum x\frac{dX}{dt}-H, \tag{26}$$

где $H$ — постоянная, выбранная таким образом, чтобы среднее значение правой части было равно нулю. В самом деле, для этого достаточно обратиться к формуле (15) и заметить, что

$$\sum x'\frac{dy''}{dt}=\sum x\frac{dX}{dt}+n_2(Xy-Yx).$$

**321. Выбор постоянных.** Важно сравнить предыдущие обозначения с теми, которыми пользовались Ганзен, Делоне или Браун. Делоне применял следующие аргументы:

$D=w_1''-w_2''=w_1-w_2$ (среднее угловое расстояние Луна — Солнце),

$F=w_1''+w_2'=w_1+w_4$ (среднее угловое расстояние Луна — узел),

$l=w_1''+w_1'=w_1+w_3$ (средняя аномалия Луны),

$l'=w_2''+w_3'$ (средняя аномалия Солнца).

Если $w_3'=0$, как мы и предположили, то $l'=w_2''=w_2=u$. Ганзен пользовался следующими аргументами:

$$g=w_1+w_3,\qquad g'=w_2,$$
$$\omega=w_4+w_3,\qquad \omega'=w_4.$$

Браун применял аргументы Делоне, но в его формулах обычно фигурируют мнимые показательные функции

$$\zeta = e^{iD}, \quad \zeta^m = e^{il'}, \quad \zeta^g = e^{iF}, \quad \zeta^c = e^{il}.$$

Следует также сравнить обозначения для различных постоянных.

Постоянная $E_3$, эксцентриситет орбиты Солнца, у всех обозначается через $e'$; отношение двух средних движений, которое мы обозначили через $m'$, Делоне обозначал через $m$. Браун же через $m$ обозначал отношение

$$\frac{n_2}{1-n_2} = \frac{m'}{1-m'} = \frac{\text{сидерическое движение Солнца}}{\text{синодическое движение Луны}}.$$

Мы будем полагать, как и он,

$$m = \frac{m'}{1-m'}.$$

Легко видеть, что $m'$ может быть разложено по степеням $m$ и, следовательно, все наши ряды, расположенные по степеням $m'$, могут быть разложены по степеням $m$; быстрота сходимости от этого даже увеличится, почему — будет видно дальше.

Постоянные, соответствующие $a$ и $E_1$, обозначены Делоне и Брауном через $a$ и $e$. Но они определены другими способами. У Брауна $a$ есть коэффициент при $\zeta = e^{iD}$ в разложении для $x + iy$ и, следовательно, коэффициент при $\cos D$ в разложении для $x$ или, точнее, $a$ определяется так, как если бы мы пренебрегли величинами $E_1$, $E_2$ и $E_3$. У Делоне $a$ определяется равенством

$$m_1 + m_7 = n_1^2 a^3.$$

Делоне определяет $e$ таким образом, чтобы главный член уравнения центра имел такой же вид, что и в кеплеровском движении. У Брауна, наоборот, $e$ является коэффициентом при $a \sin l$ в разложении выражения $x_1' \sin w_1 - x_2' \cos w_1$. Здесь различие существенно, так как величина $e$ Брауна почти равна удвоенной величине $e$ Делоне.

Постоянная наклонности, которая соответствует величине $E_3$, у Делоне обозначена через $\gamma$ и определяется таким образом, чтобы главный член в широте был таким же, как и в эллиптическом движении. У Брауна она обозначена через $K$ и определяется как коэффициент при $2a \sin F$ в разложении для $z$.

Можно видеть, что все определения Делоне играют первостепенную роль для полярных координат, а определения Брауна — для прямоугольных координат. Эти различия не имеют никакого значения и можно определять их и другими способами без изменения существа.

**322.** Важно отдавать себе отчет в величине этих различных постоянных. Имеем

$$m=\frac{1}{12},\quad m'=\frac{1}{13},\quad e'=\frac{1}{60},\quad K \text{ или } \gamma=\frac{1}{20},$$

$$e=\frac{1}{10}\,(\text{Браун}) \text{ или } \frac{1}{20}\,(\text{Делоне}),\quad \alpha=\frac{1}{400}.$$

Наши ряды располагаются по степеням этих величин, но важно заметить, что в коэффициенте при том же косинусе или при том же синусе показатели $e$, $e'$, $K$, $\alpha$ всегда имеют ту же четность, так что на самом деле ряды расположены по степеням величин

$$m=\frac{1}{12},\quad e^2=\frac{1}{100} \text{ или } \frac{1}{400},\quad K^2=\frac{1}{400},$$

$$e'^2=\frac{1}{3600},\quad \alpha^2=\frac{1}{160000}.$$

Поэтому сходимость будет гораздо более быстрой для рядов, расположенных по степеням эксцентриситетов и наклонностей, чем для рядов, расположенных по степеням $m$, которое играет роль параметра $\mu$ в теории планет, изложенной ранее. Это противоположно тому, что было в случае движения планет. Поэтому в теории движения Луны целесообразно получить разложения сначала не по степеням $\mu$ и потом по степеням эксцентриситетов, а, наоборот, сначала по степеням эксцентриситетов и потом по степеням $m$. В этом существенное различие между теорией движения Луны и теориями движения планет.

ГЛАВА XXV

# ВАРИАЦИЯ

323. Будем сначала определять члены нулевого порядка относительно эксцентриситетов, наклонности и параллакса, т. е. относительно $E_1$, $E_2$, $E_3$ и $\alpha$. Эти члены не могут зависеть от $w'_1$, $w'_2$, $w'_3$. Поэтому они будут содержать

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,(k_1w_1+k_2w_2).$$

Если применим переменные $x$, $y$, $z$ из § 320, то убедимся в том, что $z$ равно нулю, так как наклонность, по предположению, равна нулю. С другой стороны, из § 192 имеем, что

$$k_1=-k_2.$$

Далее, согласно § 190, $x$ и $Y$ содержат только косинусы, тогда как $y$ и $X$ содержат только синусы.

Наконец, согласно § 317, показатель $\alpha$ равен нулю и $k_2$ должно быть нечетным. В конечном итоге общие члены разложения для $x$ и $y$ соответственно будут содержать

$$\cos(2k+1)(w_1-w_2),\quad \sin(2k+1)(w_1-w_2)$$

или $\cos(2k+1)D$, $\sin(2k+1)D$, если ввести аргумент Делоне $D$ (см. § 321).

Чтобы вывести уравнения задачи, необходимо взять общие уравнения из § 320 и положить в них $\alpha=E_3=0$. Полагая $\alpha=0$, мы пренебрегаем параллаксом, т. е. сохраняем в $U_3$ только первый член, что дает

$$\frac{U_3}{m'_1}=-\frac{m_4}{a'^3}P_2AC^2,$$

где $P_2$ — многочлен Лежандра второго порядка

$$P_2=\frac{3\cos^2\gamma-1}{2}.$$

Кроме того, так как $z=0$, имеем

$$AC^2=x^2+y^2$$

и так как $BD$ параллельно оси $x$ (эксцентриситет $E_3$ равен нулю и, следовательно, движение тела $B$ вокруг центра масс $D$ является равномерным и круговым), а $\gamma$ есть угол между $AC$ и осью $x$, то

$$AC \cos \gamma = x,$$

откуда окончательно имеем

$$P_2 AC^2 = \frac{2x^2 - y^2}{2}.$$

Но выше, в § 320, мы нашли, что

$$F' - n_2 v' = \frac{X^2 + Y^2}{2} + \frac{U_1 + U_3}{m_1'} + n_2 (Xy - Yx).$$

С другой стороны, вспомним, что

$$\frac{U_1}{m_1'} = -\frac{m_1 + m_7}{AC}, \qquad \frac{m_4}{a'^3} = n_2^2,$$

откуда

$$\frac{U_3}{m_1'} = -n_2^2 \frac{2x^2 - y^2}{2},$$

или, наконец,

$$F' = n_2 v' + \frac{X^2 + Y^2}{2} - \frac{m_1 + m_7}{AC} - n_2^2 \frac{2x^2 - y^2}{2} + n_2 (Xy - Yx).$$

Так как $F'$ не зависит от $u$, то вспомогательная переменная $v'$ сводится к постоянной и не играет никакой роли, и канонические уравнения (23) из предыдущей главы примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X + n_2 y, \quad \frac{dy}{dt} = Y - n_2 x, \\ &\frac{dX}{dt} = -\frac{m_1 + m_7}{AC^3} x + 2n_2^2 x + n_2 Y, \\ &\frac{dY}{dt} = -\frac{m_1 + m_7}{AC^3} y - n_2^2 y - n_2 X. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Но первые два уравнения показывают, что

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} - n_2 \frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dY}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} + n_2 \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dX}{dt} - n_2 Y = \frac{d^2x}{dt^2} - 2n_2 \frac{dy}{dt} - n_2^2 x,$$

$$\frac{dY}{dt} + n_2 X = \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_2 \frac{dx}{dt} - n_2^2 y,$$

так что последние два уравнения (1) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}-2n_2\frac{dy}{dt}-3n_2^2x+\frac{m_1+m_7}{AC^3}x=0,\\ &\frac{d^2y}{dt^2}+2n_2\frac{dx}{dt}\qquad\qquad+\frac{m_1+m_7}{AC^3}y=0. \end{aligned}\right|$$

Эти уравнения могут быть написаны и в другой форме. Если мы положим

$$w_1''-w_2''=D=\tau$$

(это приводит к изменению единицы времени), то аргумент Делоне будет играть роль времени. Тогда согласно § 321 получим

$$\frac{d\tau}{dt}=n_1-n_2=\frac{n_2}{m}.$$

Если еще положим

$$\varkappa=\frac{m_1+m_7}{(n_1-n_2)^2},$$

то уравнения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2}-2m\frac{dy}{d\tau}-3m^2x+\frac{\varkappa x}{AC^3}=0,\\ &\frac{d^2y}{d\tau^2}+2m\frac{dx}{d\tau}\qquad\qquad+\frac{\varkappa y}{AC^3}=0. \end{aligned}\right\}\qquad(3)\,*)$$

Такова особенно простая форма, которую принимают уравнения движения Луны, когда пренебрегаем:

а) параллаксом,

б) эксцентриситетом орбиты Солнца,

в) наклонностью.

Задача, которую мы предполагаем теперь решить, заключается в нахождении некоторого частного решения этих уравнений, а именно того частного решения, которое соответствует случаю, в котором $E_1$ равно нулю. Так как мы пришли к тому, что $x$ и $y$ разлагаются по синусам и косинусам кратных $2D$ или $2\tau$, то мы видим, что это частное решение является периодическим. Эта задача полностью была решена Хиллом **), и мы здесь изложим его основные результаты.

**324. Однородные уравнения.** Так же, как мы видели в предыдущей главе, эти уравнения имеют интеграл Якоби, который

---

*) Довольно часто в специальной литературе уравнения (3) называются уравнениями Хилла. (*Прим. перев.*)

**) «The American Journal of Mathematics», т. I, 1874.

запишется в виде

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\right]-\frac{3m^2}{2}x^2=\frac{\varkappa}{r}+C.$$

Впрочем, этот интеграл можно получить и сразу из уравнений (3). Здесь $r=\sqrt{x^2+y^2}$ означает расстояние $AC$.

Таким образом, имеем три уравнения, и если мы обозначим $\frac{dx}{d\tau}$ и $\frac{d^2x}{d\tau^2}$ через $x'$ и $x''$, то получим

$$\left.\begin{aligned} &x''-2my'-3m^2x+\frac{\varkappa x}{r^3}=0,\\ &y''+2mx' \qquad\qquad +\frac{\varkappa y}{r^3}=0,\\ &\frac{x'^2+y'^2}{2}-\frac{3m^2}{2}x-\frac{\varkappa}{r}=C. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из этих уравнений исключим $\varkappa$. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} &xx''+yy''+2m(yx'-xy')+\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-\frac{9m^2x^2}{2}=C,\\ &yx''-xy''-2m(xx'+yy')-3m^2xy \qquad\qquad\qquad =0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Первое уравнение получается в результате сложения уравнений (4), умноженных соответственно на $x$, $y$, и 1, а второе получается в результате сложения тех же уравнений, но умноженных на $y$, $-x$ и 0 соответственно.

Также видно, что левые части уравнений (5) являются однородными многочленами второй степени относительно $x$, $y$ и их производных.

**325. Мнимые уравнения.** Хилл приводит эти уравнения к новой форме, вводя обозначения

$$u=x+iy, \qquad s=x-iy.$$

В новых переменных имеем

$$\left.\begin{aligned} &us''+u''s-2mi(us'-su')+u's'-\frac{9m^2}{4}(u+s)^2=2C,\\ &us''-u''s-2mi(us'+su')-\frac{3m^2}{2}(u^2-s^2) \qquad =0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и эти два уравнения могут быть заменены уравнением

$$us''-2mius'+\frac{u's'}{2}-\frac{m^2}{8}(15u^2+18us+3s^2)=C, \tag{7}$$

к которому нужно добавить сопряженное ему уравнение

$$u''s+2misu'+\frac{u's'}{2}-\frac{m^2}{8}(15s^2+18us+3u^2)=C. \tag{8}$$

Действительно, легко проверить, что уравнения (6) являются не чем иным, как суммой и разностью уравнений (7) и (8).

**326.** Уравнения (3) образуют систему четвертого порядка и они пригодны для изучения членов нулевого порядка и членов, зависящих только от эксцентриситета лунной орбиты $E_1$, но не зависящих ни от наклонности $E_2$, ни от параллакса $\alpha$, ни от эксцентриситета солнечной орбиты $E_3$. Эксцентриситет лунной орбиты $E_1$ является одной из наших постоянных интегрирования. Если положим ее равной нулю, то останутся только члены нулевого порядка, которые мы и предполагаем изучать. Таким образом, совокупность членов нулевого порядка представляет частное решение уравнений (3). Так как эти члены зависят только от единственного аргумента $D = \tau$, то они являются периодическими.

Поэтому задача сводится к нахождению некоторого периодического решения уравнений (3).

Если построим траекторию $T$ точки с координатами $(x, y)$ относительно вращающихся осей, то эта траектория будет замкнутой кривой, так как $x$ и $y$ являются периодическими функциями времени. В силу того, что разложение для $y$ содержит только косинусы, а разложение для $x$—только синусы, и так как, с другой стороны, разложения $x$ и $y$ содержат только члены, аргументы которых равны $\tau$, умноженному на нечетные числа, то оси $x$ и $y$ являются осями симметрии для замкнутой кривой $T$.

Исключая $\varkappa$ из уравнений (4) и рассматривая $C$ как произвольную постоянную, мы образовали систему (5) или (6), или (7) и (8), которые могут рассматриваться как более общий случай, так как система не изменится, если заменить $x$, $y$ и $C$ на $\lambda x$, $\lambda y$ и $\lambda^2 C$, где через $\lambda$ обозначена некоторая постоянная. Если некоторая замкнутая кривая удовлетворяет уравнениям (3), то она также будет удовлетворять уравнениям (7) и (8); но уравнения (7) и (8) будут допускать, кроме того, в качестве решения всякую подобную кривую $T$ относительно начала координат.

Задача была целиком решена Хиллом так, как изложено в сочинении автора «Les Methodes nouvelles de la Mécanique céleste», т. I. Для малых значений $m$ Хилл находит кривую, имеющую общую форму эллипса; для $m = 1{,}78$ он нашел кривую с двумя точками возврата, расположенными на оси $x$.

Если идти далее, то, без сомнения, можно найти кривую с двумя двойными точками, симметрично расположенными на оси $x$; далее, обе двойные точки будут стремиться совпасть с началом координат, а затем они исчезнут, и кривая $T$ образуется в замкнутую кривую без двойных точек, но с обратным движением. Но только первые кривые, определенные Хиллом, представляют интерес для изучения движения нашего спутника.

**327. Вычисление коэффициентов.** Вот к чему сводится метод Хилла для малых значений $m$. Вместо уравнений (3) рассмотрим более общие уравнения

$$\left.\begin{aligned} x''-2py'-\frac{3}{2}p^2x-\frac{3}{2}m^2x+\frac{\varkappa x}{r^3}=0,\\ y''+2px'-\frac{3}{2}p^2y+\frac{3}{2}m^2y+\frac{\varkappa y}{r^3}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Поступая так же, как и выше, из них выведем вместо уравнений (7) и (8) уравнения

$$us''-2pius'+\frac{u's'}{2}-\frac{9}{4}p^2us=\frac{m^2}{8}(15u^2+3s^2)+C, \tag{7'}$$

$$su''+2pisu'+\frac{u's'}{2}-\frac{9}{4}p^2us=\frac{m^2}{8}(15s^2+3u^2)+C. \tag{8'}$$

Будем разлагать решение по возрастающим степеням $m^2$. Если решение найдено, то, чтобы вернуться к уравнениям (3), положим в нем $p = m$.

Предположим, что задача решена, и положим

$$\left.\begin{aligned} \zeta=E^{i\tau}, \qquad \frac{u}{\zeta}=u_0+m^2u_1+\ldots+m^{2q}u_q+\cdots,\\ \frac{s}{\zeta-1}=s_0+m^2s_1+m^4s_2+\cdots+m^{2q}s_q+\cdots,\\ C=C_0+m^2C_1+m^4C_2+\cdots+m^{2q}C_q+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Теперь нужно определить последовательно сначала $u_0$, $s_0$, $C_0$,, потом $u_1$, $s_1$, $C_1$, потом $u_2$, $s_2$, $C_2$ и т. д.

Прежде всего имеем

$$u_0=s_0=1, \qquad C_0=-\frac{1}{2}-2p-\frac{9}{4}p^2.$$

Если заменить в уравнениях (7′) и (8′) $u$, $s$ и $C$ разложениями (9), то в левой части будем иметь члены вида

$$m^{2\alpha+2\beta}u_\alpha s_\beta$$

и другие аналогичные формы, где $u_\alpha$ или $s_\beta$, или оба должны быть заменены одной из производных первого или второго порядка. В правой части будем иметь члены вида

$$m^{2\alpha+2\beta+2}\zeta^2u_\alpha u_\beta,$$

или

$$m^{2\alpha+2\beta+2}\zeta^{-2}s_\alpha s_\beta,$$

или

$$m^{2\alpha}C_\alpha.$$

Допустим, что в результате применения метода последовательных приближений определены величины

$$u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{q-1},$$
$$s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_{q-1},$$
$$C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_{q-1},$$

и мы хотим определить $u_q$, $s_q$, $C_q$. Для этого приравниваем коэффициенты при $m^{2q}$.

В левой части мы должны сохранить члены, которые имеют множителем $m^{2q}$, т. е. те члены, для которых

$$\alpha+\beta=q.$$

Эти члены, кроме тех, для которых $\alpha = q$, $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, $\beta = q$, содержат известные величины. В правой части мы должны сохранить те члены, для которых

$$\alpha+\beta=q-1.$$

Все эти члены известны. Кроме того, мы должны сохранить также член $m^{2q} C_q$, который является неизвестным.

Неизвестные члены в левой части уравнения (7′) получаются следующим образом. Возьмем, например, член

$$us''.$$

Тогда можно написать

$$us''=u\,[s\zeta\zeta^{-1}]''=u\zeta^{-1}\,[(s\zeta)''-2i\,(s\zeta)'+(s\zeta)].$$

Из разложений (9) имеем

$$(s\zeta)=\sum m^{2\beta}s_\beta,\qquad (s\zeta)'=\sum m^{2\beta}s'_\beta,$$
$$(s\zeta)''=\sum m^{2\beta}s''_\beta,\qquad u\zeta^{-1}=\sum m^{2\alpha}u_\alpha.$$

Согласно нашему методу мы должны сохранить члены, для которых $\alpha + \beta = q$; выделим среди них те члены, которые содержат неизвестные величины $s_q$ или $u_q$, т. е. члены, для которых $\alpha = 0, \beta = q$ или $\alpha = q$, $\beta = 0$. Такими членами будут следующие (учитывая, что $u_0 = 1$, $s_0 = 1$, $s'_0 = 0$, $s''_0 = 0$):

$$s''_q-2is'_q-s_q-u_q.$$

Таким же образом мы действуем и в отношении других членов левой части, так что остаются следующие члены, содержащие одну из неизвестных:

$$s''_q+\left(2p+\frac{3}{2}\right)is'_q-\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)s_q-$$
$$-i\,\frac{u'_q}{2}-\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)u_q. \qquad (10)$$

Сохраним члены (10) в левой части и перейдем к правой части, в которой сохраним члены, которые содержат только известные величины. В результате получим уравнение вида

$$\Delta(s_q,\ u_q)=\Phi_q+C_q. \tag{11}$$

В уравнении (11) $\Delta\ (s_q, u_q)$ есть не что иное, как выражение (10); следовательно, оно является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами величин $s_q$, $u_q$ и их производных. Функция $\Phi_q$ представляет совокупность и з в е с т н ы х членов из правой части. Она является периодической функцией $\tau$.

Делая такие же преобразования и с уравнением (8′), получим

$$\Delta'(s_q,\ u_q)=\Phi'_q+C_q, \tag{12}$$

где $\Delta'\ (s_q, u_q)$ есть выражение

$$u''_q-\left(2p+\frac{3}{2}\right)iu'_q-\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)u_q+ \\ +\frac{is'_q}{2}-\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)s_q,$$

мнимое и сопряженное с $\Delta\ (s_q, u_q)$. Следовательно, оно выводится из $\Delta(s_q, u_q)$, если поменять местами $s_q$ и $u_q$ и заменить $i$ на $-i$. $\Phi'_q$ — мнимая и сопряженная функция для $\Phi_q$, т. е. является известной периодической функцией $\tau$, разлагающейся по положительным и отрицательным степеням $\zeta^2$. Чтобы перейти от $\Phi_q$ к $\Phi'_q$, достаточно заменить $\zeta$ на $\zeta^{-1}$ и численные коэффициенты на их мнимые сопряженные значения. Дальше мы увидим, что эти коэффициенты всегда вещественные и поэтому последняя операция оказывается лишней.

Как бы там ни было, наши неизвестные функции определяются из уравнений (11) и (12), которые образуют систему линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть, например, $a$, $a'$, $\xi$ и $\eta$ суть коэффициенты при $\zeta^k$ в $\Phi_q$ и $\Phi'_q$, $u_q$ и $s_q$. Предстоит определить неизвестные коэффициенты $\xi$ и $\eta$ с помощью известных коэффициентов $a$ и $a'$.

Для этого из уравнений (11) и (12) получаем

$$\left.\begin{aligned}&\eta\left[-k^2-\left(2p+\frac{3}{2}\right)k-\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)\right]+\\&\qquad+\xi\left[\frac{k}{2}-\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)\right]=a,\\&\xi\left[-k^2+\left(2p+\frac{3}{2}\right)k-\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)\right]+\\&\qquad+\eta\left[-\frac{k}{2}-\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)\right]=a'.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Эти два уравнения первой степени дадут нам $\xi$ и $\eta$.

Случай $k=0$ заслуживает особого рассмотрения. Прежде всего левые части уравнений (13) становятся тождественными; далее, необходимо учесть в правых частях член $C_q$, поэтому уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} -(\xi+\eta)\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)=a+C_q,\\ -(\xi+\eta)\left(\frac{9p^2}{4}+2p+\frac{1}{2}\right)=a'+C_q. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Они могут быть совместными, если только $a=a'$. Но $a$ и $a'$, по определению, являются мнимыми и сопряженными, поэтому уравнения могут удовлетворяться, только когда $a$ — вещественная величина. Дальше мы увидим, что это всегда так.

Уравнения (14), следовательно, дадут нам для $\xi+\eta$ некоторое вещественное значение $A$. Будем считать, что $\xi=\eta=\frac{A}{2}$, так что $\xi$ и $\eta$ будут мнимыми сопряженными и в то же время вещественными.

Наличие величины $C_q$ вводит некоторую неопределенность в данной задаче. Можно допустить, что $C$ задана в конкретном случае. Тогда $C$ не зависит от $m$ и мы должны считать в равенствах (14), что $C_q=0$.

Можно также наложить условие, что коэффициент при $\zeta$ в $u$ и коэффициент при $\zeta^{-1}$ в $s$ равны 1. Этот коэффициент не зависит от $m$, поэтому мы должны иметь $\xi=\eta=0$, так что первое уравнение (14) обращается в равенство

$$a+C_q=0,$$

которое определяет $C_q$.

328. Прежде всего мы утверждаем, что коэффициенты всех членов в разложениях для $u$ и $s$ вещественны. Действительно, предположим, что это верно для

$$u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{q-1},$$

$$s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_{q-1}.$$

Покажем, что это имеет место и для коэффициентов при $u_q$ и $s_q$. В самом деле, если это верно для

$$u_\alpha, \quad s_\alpha \quad (\alpha<q), \qquad (15)$$

то это также верно для

$$iu'_\alpha, \quad is'_\alpha, \quad u''_\alpha, \quad s''_\alpha \quad (\alpha<q) \qquad (16)$$

и, следовательно, для всех и з в е с т н ы х членов уравнения (7′), которые являются произведениями двух выражений вида (15) с вещественными коэффициентами.

Поэтому в разложении для $\Phi_q$ по степеням $\zeta^2$ все коэффициенты вещественны. В уравнениях (13) и (14) величины $a$ и $a'$ вещественны. Отсюда следует, что коэффициенты уравнений первой степени (13) и (14) также вещественны. Из этого выводим, что $\xi$ и $\eta$, т. е. коэффициенты при $u_q$ и $s_q$, также вещественны, что и требовалось доказать.

Теперь мы утверждаем, что в $u_0$ и $s_0$ будем иметь члены только с $\zeta^0$; в $u_1$ и $s_1$ — только члены с $\zeta^2$ и $\zeta^{-2}$; в $u_2$ и $s_2$ — только члены с $\zeta^4$, $\zeta^0$ и $\zeta^{-4}$; в $u_3$ и $s_3$ — только члены с $\zeta^6$, $\zeta^2$, $\zeta^{-2}$ и $\zeta^{-6}$; и т. д. Другими словами, мы утверждаем, что $u\zeta^{-1}$ и $s\zeta$ разлагаются по степеням $m^2\zeta^2$ и $m^2\zeta^{-2}$.

Действительно, мы утверждаем, что если это справедливо для первых приближений, то это будет также справедливо и для следующего приближения. Таким образом, мы допускаем, что

$$u_\alpha,\ s_\alpha \quad (\alpha < q)$$

являются однородными многочленами степени $\alpha$ относительно $\zeta^2$ и $\zeta^{-2}$, и предполагаем доказать, что $u_q$, $s_q$ будут также однородными многочленами степени $q$ относительно $\zeta^2$ и $\zeta^{-2}$. Сначала легко видеть, что производные $u'_\alpha$ и т. д. будут, как и $u_\alpha$ и т. д., однородными многочленами степени $\alpha$. Рассмотрим теперь различные члены функции $\Phi_q$. Прежде всего имеем:

1. Те из членов левой части уравнения (7′), которые перешли в правую часть, так как они не содержали неизвестных величин; с точностью до числового множителя они равны

$$u_\alpha s_\beta \quad (\alpha < q,\ \beta < q,\ \alpha + \beta = q),$$

где $u_\alpha$ или $s_\beta$ могут быть заменены на одну из их производных; поэтому они являются однородными многочленами степени $q$ относительно $\zeta^2$ и $\zeta^{-2}$.

2. Члены, происходящие из $\frac{15m^2u^2}{8}$; они имеют вид

$$\zeta^2 u_\alpha u_\beta \quad (\alpha + \beta = q - 1)$$

и, следовательно, также суть однородные многочлены степени $q$ относительно $\zeta^2$, $\zeta^{-2}$.

3. Члены, происходящие из $\frac{3m^2s^2}{8}$; они имеют вид

$$\zeta^{-2} s_\alpha s_\beta \quad (\alpha + \beta = q - 1),$$

поэтому также являются однородными многочленами степени $q$.

Итак, $\Phi_q$ является однородным многочленом степени $q$ относительно $\zeta^2$, $\zeta^{-2}$. Но $u_q$ и $s_q$ выводятся из $\Phi_q$ с помощью уравнений (13); члены с $u_q$ и $s_q$ соответствуют таким же из функции $\Phi_q$ и содержат те же степени $\zeta$. Поэтому $u_q$ и $s_q$ суть однородные многочлены степени $q$ относительно $\zeta^2$, $\zeta^{-2}$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что если коэффициент при $\zeta^{2k}$ или $\zeta^{-2k}$ разлагается в ряд по степеням $m$, то разложение будет содержать только члены, в которых показатель параметра $m$ принимает значения

$$2k,\ 2k+4,\quad 2k+8,\ \ldots$$

Таким образом, это разложение будет расположено не по степеням $m$, а по степеням $m^4$. Это и объясняет чрезвычайно быструю сходимость метода Хилла, каждое приближение которого дает 4 или 5 новых десятичных знаков *).

329. Теперь покажем, что коэффициенты $\xi$ и $\eta$, вычисленные предыдущими методами, суть рациональные функции $p$. В самом деле, предположим, что это верно для первых приближений. Мы утверждаем, что это верно и для следующего приближения. Действительно, это верно для коэффициентов функции $\Phi_q$, образованных в результате произведения коэффициентов в $u_\alpha$, $s_\alpha$ $(\alpha < q)$; поэтому это будет верно и для коэффициентов $a$ и $a'$, фигурирующих в уравнениях (13); итак, коэффициенты уравнений (13) суть рациональные функции $p$, и то же самое будет иметь место относительно неизвестных $\xi$ и $\eta$, т. е. коэффициентов при $u_q$ и $s_q$, что и требовалось доказать.

Какими будут множители знаменателей этих рациональных функций? Их легко определить. В самом деле, решение уравнений (13) порождает в знаменателе множитель, который является определителем этой системы, равным

$$\frac{k^2}{2}(p^2-4p-2+2k^2).$$

Следовательно, множители знаменателя будут многочленами вида

$$p^2-4p-2+2k^2,$$

где $k$ нужно придавать значения

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,$$

что дает многочлены

$$\left.\begin{aligned} &p^2-4p+6,\\ &p^2-4p+30,\\ &p^2-4p+70,\\ &\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

*) Автор имеет в виду конкретные вычисления в теории движения Луны. (*Прим. перев.*)

Поэтому если разлагать коэффициент при $\zeta^{2k+1}$ по степеням $m$, то коэффициент каждой степени есть рациональная функция $p$, знаменатель которой является произведением вида (17), и каждый из этих множителей может возводиться в степень, бо́льшую 1. Нельзя, тем не менее, из этого вывести, что коэффициент при $\zeta^{2k+1}$, рассматриваемый как функция $p$ и $m$, есть мероморфная функция этих величин, или еще, что он сводится к мероморфной функции $m$, когда $p = m$.

329′. Как бы то ни было, приближения этого метода чрезвычайно быстро сходятся. Хилл вычислил коэффициенты, или, точнее, их отношения с пятнадцатью знаками. Первое приближение ему давало вообще шесть точных знаков, второе приближение — одиннадцать знаков и третье — пятнадцать знаков. С другой стороны, убывание коэффициентов происходит также весьма быстро. В разложении для $u$, например, коэффициенты при $\zeta$, $\zeta^3$, $\zeta^5$, ... уменьшаются очень быстро: каждый из них составляет примерно трехсотую часть предыдущего. Коэффициент при $\zeta$, который является, естественно, самым большим, дает нам основной член невозмущенной орбиты. Далее следуют коэффициенты при $\zeta^3$ и $\zeta^{-1}$, которые соответствуют значительному неравенству, известному с конца средних веков под названием *вариации*.

Таким образом, численные значения весьма точно известны. Но мы имеем пока только о т н о ш е н и я наших коэффициентов. Действительно, уравнения (7′) и (8′) содержат неопределенную величину $C$, и мы воспользуемся этой неопределенностью, чтобы предположить, что коэффициент при $\zeta$ в $u$, а также коэффициент при $\zeta^{-1}$ в $s$ равны 1. Это приводит к тому, что уравнения (14) удовлетворяются, если положить в них

$$\xi = \eta = 0, \quad a + C_q = 0.$$

Это то, о чем мы говорили в конце § 327. Мы также нашли одно частное решение уравнений (7′) и (8′)

$$u = \psi(\zeta), \quad s = \psi_1(\zeta),$$

характеризующееся тем, что $\psi$ и $\psi_1$ являются мнимыми и сопряженными функциями и коэффициент при $\zeta$ в $\psi(\zeta)$ равен 1. В таком случае будем иметь и другое решение, полагая

$$u = a_0\psi(\zeta), \quad s = a_0\psi_1(\zeta)$$

и заменяя неопределенную величину $C$ на $a_0^2 C$. Остается определить $a_0$.

Для этого необходимо (после того как положено $p = m$) вернуться к первоначальным уравнениям, которые могут быть записаны в виде

$$u'' + 2miu' - \frac{3}{2} m^2 (u + s) + \frac{\varkappa u}{r^3} = 0,$$

и посмотреть, каково значение $a_0$, соответствующее данному значению $\varkappa$.

Пусть для этого

$$\psi(\zeta) = \sum a_k \zeta^{2k+1}$$

и при $\tau = 0$, $\zeta = 1$ имеем

$$r = u = s = a_0 \sum a_k = a_0 \psi(1),$$

$$u' = ia_0 \sum (2k+1) a_k, \quad u'' = -a_0 \sum (2k+1)^2 a_k.$$

Коэффициенты $a_k$ известны, поэтому легко можно вычислить $\psi(1)$, $\psi'(1)$, $\psi''(1)$; далее находим

$$a_0^3 \psi^2(1) [\psi''(1) + 2mi\psi'(1) - 3m^2 \psi(1)] = \varkappa, \tag{18}$$

откуда без труда находим $a_0$.

330. Легко видеть, что решение уравнения (18) сопровождается извлечением кубического корня. Поэтому мы должны ожидать, что в окрестности некоторых особых значений $m_0$ выражение $a_0$, и, следовательно, выражения для других коэффициентов в $u$, которые равны $a_0 a_1$, $a_0 a_2$, ..., содержат в качестве множителя, например, $(m - m_0)^{-\frac{1}{3}}$ или $(m - m_0)^{\frac{2}{3}}$.

Действительно, это получается при $m_0 = 1$.

Допустим, что мы хотим разложить $a_0$ по степеням $m$. Тогда сходимость будет сравнимой со сходимостью некоторой геометрической прогрессии со знаменателем

$$\frac{m}{m_0},$$

где $m_0$ — наиболее близкая особая точка. Если эта точка есть 1, то, так как $m = \frac{1}{12}$, знаменатель прогрессии равен

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{12}.$$

Если разлагать по степеням величины

$$m' = \frac{n_2}{n_1} = \frac{m}{1+m},$$

как это делал Делоне, то знаменатель прогрессии будет равен

$$\frac{m'}{m_0'} = \frac{2}{13},$$

т. е. значительно больше.

Мы придем к такому же результату, если коснемся разложения для $a_1$; в этом случае наиболее близкая особая точка обусловлена прежде всего наличием множителя $p^2 - 4p + 6$ в знаменателях (см. конец § 328). В этих знаменателях полагаем $p = m$, так что имеем

$$m_0^2 - 4m_0 + 6 = 0,$$

откуда

$$|m_0| = \sqrt{6},$$

а знаменатель геометрической прогрессии будет равен

$$\left|\frac{m}{m_0}\right| = \frac{1}{12\sqrt{6}}.$$

Далее, для $m'$ имеем

$$|m'| = \frac{|m_0|}{|1+m_0|} = \sqrt{\frac{6}{1+4+6}} = \sqrt{\frac{6}{11}},$$

поэтому для знаменателя

$$\left|\frac{m'}{m_0'}\right| = \frac{\sqrt{11}}{12\sqrt{6}}.$$

Из этого видно, насколько более выгодно выбрать $m$ в качестве параметра вместо $m'$. Естественно, та же разница будет и при вычислении последующих членов, так как новые разложения, получаемые для этих членов, выводятся из тех, которые мы получили для членов нулевого порядка.

330'. Интересное частное решение получается при $\varkappa = 0$. В таком случае находим

$$u = \alpha\zeta^k + \beta\zeta^{-k}, \quad s = \beta\zeta^k + \alpha\zeta^{-k},$$

где $\alpha$, $\beta$ и $k$ связаны соотношениями

$$\alpha\left(-k^2 - 2pk - \frac{3}{2}p^2\right) - \frac{3}{2}\beta m^2 = 0,$$

$$\beta\left(-k^2 + 2pk - \frac{3}{2}p^2\right) - \frac{3}{2}\alpha m^2 = 0,$$

откуда

$$\left(k^2 + \frac{3}{2}p^2\right)^2 - 4p^2k^2 - \frac{9}{4}m^4 = 0.$$

Полагая $p = m$, получим

$$k^4 - m^2k^2 = 0.$$

Для того чтобы это решение подходило, нужно, чтобы $k$ было целым нечетным числом и, следовательно, чтобы

$$m = 1, \quad m = 3, \quad m = 5, \ \ldots$$

Кривая, описываемая точкой $(x, y)$, обращается тогда в эллипс. Но при $\varkappa = 0$ уравнение (18) обращается в равенство

$$\psi^2(1)\,[\psi''(1) + 2mi\psi'(1) - 3m^2\psi(1)] = 0.$$

Следовательно, если величине $\varkappa$ придавать конечное значение, то нужно, чтобы $a_0 = \infty$.

Поэтому когда $m$ приближается к 1, траектория $T$ точки $(x, y)$ стремится быть все более и более близкой к эллипсу, но размеры фигуры будут все больше возрастать. Именно таким путем появляются в $a_0$ множители вида

$$(m-1)^{-\frac{1}{3}},$$

как мы объясняли выше.

Эллипсы, которым соответствует $m = 3$, $m = 5$ и т. д., не относятся к множеству решений, которые мы здесь изучаем, так как их период более не равен $2\pi$, а равен $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}$, ...

# ДВИЖЕНИЕ УЗЛА

331. Определим теперь члены первого порядка относительно наклонности $E_2$. Как и в предыдущей главе, будем пренебрегать параллаксом и эксцентриситетом солнечной орбиты $E_3$, но не будем более предполагать, что $z = 0$.

При этих условиях имеем

$$\frac{U_3}{m_1'} = -\frac{m_4}{a'^3} P_2 AC^2,$$

$$P_2 = \frac{3\cos^2\gamma - 1}{2}, \quad AC\cos\gamma = x.$$

Но мы имеем

$$AC^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

откуда

$$\frac{U_3}{m_1'} = -n_2^2 \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2}.$$

При этом

$$\frac{U_1}{m_1'} = -\frac{m_1 + m_7}{r},$$

откуда

$$F' = n_2 v' + \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2} - \frac{m_1 + m_7}{r} + n_2 (Xy - Yx) - n_2^2 \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2}.$$

Установив это, мы опять приходим к уравнениям (1) предыдущей главы, с той разницей, что $AC = r$ не представляет более $\sqrt{x^2 + y^2}$, а равно $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Затем находим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial Z} = Z,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dZ}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial z} = -n_2^2 z - \frac{m_1 + m_7}{r^3} z.$$

Если, как и в предыдущей главе, мы положим

$$\tau = (n_1 - n_2)t, \quad m = \frac{n_2}{n_1 - n_2}, \quad \varkappa = \frac{m_1 + m_7}{(n_1 - n_2)^2}, \quad z'' = \frac{d^2 z}{d\tau^2},$$

то предыдущее уравнение принимает вид

$$z''+\Theta z=0, \tag{1}$$

где

$$\Theta=m^2+\frac{\varkappa}{r^3}.$$

Если мы отыскиваем члены порядка наклонности, то мы пренебрегаем квадратом наклонности и, следовательно, величиной $z^2$. Тогда можем положить

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

и снова придем к уравнениям (1) из предыдущей главы без изменений. Желая вычислить члены, не зависящие от эксцентриситета лунной орбиты $E_1$, мы должны положить $E_1=0$, а поэтому мы должны взять для $x$ и $y$ частное решение, изученное в предыдущей главе. Следовательно, $x$ и $y$ являются известными функциями времени, разложимыми по нечетным положительным и отрицательным степеням величины $\zeta=E^{i\tau}$. Затем $\frac{\varkappa}{r}$ определяется интегралом Якоби

$$\frac{\varkappa}{r}=\frac{x'^2+y'^2}{2}-\frac{3m^2x^2}{2}-C,$$

откуда легко получаем $\frac{\varkappa}{r}$ и $\Theta$.

Следовательно, $\Theta$ есть известная функция времени, разложимая по четным положительным и отрицательным степеням $\zeta$.

Мы видели, что если ввести параметры $p$ и $m$, входящие в уравнения (3'), (7'), (8') предыдущей главы, то

$$u\zeta^{-1}=\zeta^{-1}(x+iy),$$

$$s\zeta=\zeta(x-iy)$$

разложимы по степеням $p$, $m^2\zeta^2$, $m^2\zeta^{-2}$. То же самое относится и к $\Theta$, так что после того как мы положили $p=m$, величина $\Theta$ будет разложимой по степеням

$$m,\quad m^2\zeta^2,\quad m^2\zeta^{-2}.$$

Более того, если заменить $\tau$ на $-\tau$, или $\zeta$ на $\zeta^{-1}$, то $u$ обращается в $s$, так что $r$ и $\Theta$ не изменятся.

Поэтому если положим

$$\Theta=\sum\Theta_k\zeta^{2k},$$

то будем иметь

$$\Theta_k=\Theta_{-k}$$

и можно будет написать

$$\Theta = \Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2\tau + 2\Theta_2 \cos 4\tau + \ldots$$

Так как $\Theta$ разлагается по степеням $m$, $m^2\zeta^2$, $m^2\zeta^{-2}$, то коэффициент $\Theta_k$ содержит множителем $m^{2k}$ и коэффициенты ряда для $\Theta$ быстро убывают.

**332.** Теперь нужно проинтегрировать уравнение (1). Это уравнение имеет такой же вид, что и уравнение, изученное в главе XVII книги «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste». Таким образом, нам известно, что:

1. Это уравнение допускает два частных решения вида

$$z = E^{ig\tau}\psi(\tau), \quad z = E^{-ig\tau}\psi(-\tau), \tag{2}$$

где $\psi(\tau)$ — периодическая функция вида

$$\psi(\tau) = \sum b_k \zeta^{2k},$$

причем $k$ принимает все целые положительные и отрицательные значения.

В самом деле, мы должны заметить, что уравнение (1) не изменится, если заменить $\tau$ на $-\tau$; поэтому существование первого из решений (2) влечет за собой существование второго.

2. Далее будем иметь два решения:

$$z = F(\tau) = E^{ig\tau}\psi(\tau) + E^{-ig\tau}\psi(-\tau),$$

$$z = f(\tau) = \lambda\,[E^{ig\tau}\psi(\tau) - E^{-ig\tau}\psi(-\tau)],$$

из которых первое является четной функцией, а второе — нечетной функцией $\tau$.

Мы можем закончить определение функции $\psi(\tau)$ (которая еще не определена, кроме как с точностью до постоянного множителя) и постоянной $\lambda$ таким образом, чтобы было

$$F(0) = 1, \quad F'(0) = 0,$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$$

т. е.

$$\psi(0) = \frac{1}{2}.$$

3. В силу теоремы, изложенной в мемуаре автора «Sur les groupes des équations linéares» (Acta mathematica, т. IV, p. 212) и приведенной также в «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» (т. II, гл. XVII, стр. 230), функция $F(\tau)$, рассматриваемая как функция $\Theta_k$, есть целая функция. Тогда мы найдем

$$F(\tau) = \sum b_k \cos(g + 2k)\tau,$$

где $k$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Функция $\psi(\tau)$ является периодической с периодом $\pi$, так что имеем

$$\psi(\pi)=\psi(0)=\frac{1}{2}, \quad F(\pi)=\cos g\pi. \tag{3}$$

**333.** Уравнение $F(\pi)=\cos g\pi$ имеет очень большое значение. Действительно, это то уравнение, которое позволяет определить $g$, т. е. движение узла.

В самом деле, общее решение уравнения (1) может быть написано в виде

$$z=E_2F(\tau+\overline{\omega}_4),$$

где $E_2$ и $\overline{\omega}_4$ — постоянные интегрирования, первая из которых представляет постоянную наклонности, а вторая постоянная $\overline{\omega}_4$ входит в формулу

$$w_4=w_2'=n_2t+\overline{\omega}_4$$

из главы XXIV.

Действительно, если положим $g=\frac{n_2}{n_1-n_2}$, то увидим, что предыдущая формула может быть написана в виде

$$z=\sum E_2b_k\cos(w_4+w_1+2kw_1-2kw_2),$$

в которой мы узнаем вид формул главы XXIV. (Достаточно заменить произвольную постоянную $\overline{\omega}_4$ на $\overline{\omega}_4+\frac{\pi}{2}$, чтобы иметь синус вместо косинуса.)

Установив это, замечаем, что прохождения через узел имеют место при $z=0$, а так как главный член разложения равен

$$E_2b_0\cos w_4,$$

то прохождения через восходящий узел будут иметь место при

$$w_1+w_4=g\tau+\overline{\omega}_4=\frac{\pi}{2}.$$

В промежутке между двумя последовательными прохождениями через узел разность средних долгот Луны и Солнца возрастет на $\frac{2\pi}{g}$; если рассматривать $(n+1)$ последовательных прохождений через восходящий узел, то эта разность увеличится на $\frac{2\pi n}{g}$, и будет тем точнее, чем больше $n$. Таким образом, $g$ измеряет *среднее* движение узла.

**334.** Чтобы вычислить $F(\tau)$, нужно поступать следующим образом. Положим

$$\Theta_0=q_2$$

и напишем уравнение (1) в виде

$$z'' + q^2 z = (\Theta_0 - \Theta) z. \tag{4}$$

Далее постараемся разложить $F(\tau)$ по степеням $\Theta_1$, $\Theta_2$ и т. д.; разложение будет быстро сходящимся, так как мы видели, что эти коэффициенты весьма малы и, с другой стороны, $F(\tau)$ есть целая функция этих коэффициентов.

Обозначим через $z_0, z_1, \ldots, z_k$ члены $0, 1, \ldots, (k-1)$-й степени относительно $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ в функции $F(\tau)$; для последовательного определения величин

$$z_0, z_1, \ldots, z_k, \ldots$$

будем иметь систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &z_0'' + q^2 z_0 = 0, \\ &z_1'' + q^2 z_1 = (\Theta_0 - \Theta) z_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &z_k'' + q^2 z_k = (\Theta_0 - \Theta) z_{k-1}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Это — линейные уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка, и они непосредственно интегрируются. Чтобы завершить определение функций $z_0, z_1, \ldots, z_k$, необходимо задать начальные условия в виде

$$z_0 = 1, \quad z_0' = 0, \quad z_1 = z_1' = 0, \ \ldots, \quad z_k = z_k' = 0.$$

Прежде всего находим

$$z_0 = \cos q\tau$$

и для $z_k$ получаем выражение, в которое входят члены с

$$\cos(2j+q)\tau, \quad \tau^{2\mu+1}\sin(2j+q)\tau, \quad \tau^{2\mu}\cos(2j+q)\tau, \tag{6}$$

где $j$ и $\mu$ — целые числа, $2\mu + 1 \leqslant k$.

Действительно, легко проверить, что если это верно для $z_{k-1}$, то также будет верно для $z_k$.

Итак, общий член разложения $F(\tau)$ будет вида (6); легко увидеть причину этого: мы нашли

$$F(\tau) = \sum b_j \cos(g + 2j)\tau.$$

С другой стороны, $g$ разлагается по степеням $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ и обращается в $q$ при $\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = 0$. Поэтому, можно написать

$$F(\tau) = \sum b_j \cos[(q+2j)\tau + (g-q)\tau]$$

и разложить по степеням $g - q$; но

$$\cos\tau = \sum \alpha_\mu \tau^{2\mu}, \quad \sin\tau = \sum \beta_\mu \cdot \tau^{2\mu+1},$$

где коэффициенты $\alpha_\mu$ и $\beta_\mu$ имеют известные числовые значения. Поэтому будем иметь

$$F(\tau)=\sum b_j\alpha_\mu (g-q)^{2\mu}\tau^{2\mu}\cos(q+2j)\tau-$$
$$-\sum b_j\beta_\mu (g-q)^{2\mu+1}\tau^{2\mu+1}\sin(q+2j)\tau. \quad (7)$$

Далее можно разложить $b_j$ по степеням $g-q$ и по степеням $\Theta_1$, $\Theta_2$, ... и мы должны будем получить то же разложение, которое получается, если использовать уравнения (5). Отсюда видно, что общий член имеет вид (6).

**335.** Посмотрим, как можно воспользоваться этими разложениями, чтобы определить $g$ и коэффициенты $b_j$.

Допустим, что определены величины

$$z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_k,$$

так что с точностью до величин порядка $m^{2k+2}$ имеем

$$F(\tau)=z_0+z_1+\ldots+z_k,$$

где $F(\tau)$ представляется в виде разложения (7), все члены которого имеют вид (6).

В этом разложении сохраним только чисто периодические члены с $\cos(q+2j)\tau$, т. е. те, которые не содержат $\tau$ вне знаков тригонометрических функций. Коэффициенты этих членов с той же степенью приближения, т. е. с точностью до величин порядка $m^{2k+2}$, и будут искомыми коэффициентами $b_j$ и, действительно, $\alpha_0$ равен 1.

Чтобы определить $g$, найдем $F(\pi)$, полагая $\tau=\pi$ в разложении (7), и далее получим $g$ из уравнения

$$F(\pi)=\cos g\pi.$$

Делая эту замену, находим

$$F(\pi)=H\cos q\pi+H'\sin q\pi,$$

где $H$ и $H'$ суть целые функции величин $\Theta_1$, $\Theta_2$, ...

С другой стороны, коэффициенты этих целых функций будут рациональными функциями $q$, так как если коэффициенты величины $z_{k-1}$ зависят рационально от $q$, то это будет верно, в силу уравнений (5), и для коэффициентов величины $z_k$.

Первые члены равны

$$\cos g\pi=\cos q\pi\left[1-\frac{\pi^2\Theta_1^4}{2^5q^2(1-q^2)^2}\right]+$$
$$+\sin q\pi\left[\frac{-\pi\Theta_1^2}{4q(1-q^2)}+\frac{(15q^4-35q^2+8)\pi\Theta_1^4}{64q^3(1-q^2)^3(4-q^2)}\right].$$

Если $\tau$ заменим на $\tau+\frac{\pi}{2}$, то $\Theta_1$, $\Theta_3$, $\Theta_5$, ... изменяют знак, но значение $\cos g\pi$ не должно измениться. Поэтому в разложении $F(\pi)$ $\Theta_1, \Theta_3, \Theta_5$, ... будут входить с четными показателями.

Предположим на мгновение, что

$$0=\Theta_1=\Theta_3=\Theta_5=\ldots$$

Тогда $\Theta$ будет допускать период $\frac{\pi}{2}$ и если заменить $\tau$ на $\tau+\frac{\pi}{2}$, то величины

$$\Theta_2, \quad \Theta_6, \quad \Theta_{10}, \ldots$$

будут менять знак; поэтому $\Theta_2, \Theta_6, \Theta_{10}$, ... могут фигурировать только в четной степени; по крайней мере они должны умножаться на

$$\Theta_1^2, \quad \Theta_3^2, \ldots, \Theta_1\Theta_3, \quad \Theta_1\cdot\Theta_5, \ldots$$

Точно так же

$$\Theta_4, \quad \Theta_{12}, \quad \Theta_{20}, \ldots$$

могут встречаться только в четных степенях или по крайней мере должны умножаться на

$$\Theta_1^2, \Theta_3^2, \ldots, \Theta_1\Theta_3, \ldots, \Theta_2^2, \Theta_6^2, \ldots, \Theta_2\Theta_6, \ldots$$

**336. Метод Хилла.** Хилл привел задачу к решению бесконечной системы уравнений первой степени с бесконечным числом неизвестных. Можно поставить вопрос, является ли этот метод достаточно строгим? Он может быть полностью обоснованным, но здесь ограничимся ссылкой на обоснование метода, данное в «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» (т. II, гл. XVII, стр. 60 и далее).

Полагая в уравнении (1)

$$z=E^{ig\tau}\psi(\tau)=\sum b_k\zeta^{2k+g},$$

получим

$$-\sum b_k(2k+g)^2\zeta^{2k+g}+\sum\Theta_j b_k\zeta^{2k+2j+g}=0,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\zeta^{2j+g}$, будем иметь

$$[\Theta_0-(2j+g)^2]\,b_j+\sum\Theta_{j-k}b_k=0. \tag{8}$$

Таким образом, получаем бесконечную систему линейных уравнений с неизвестиыми $b_j$. Чтобы их определить, рассмотрим линейные выражения

$$b_j+\sum_k\frac{\Theta_{j-k}}{\Theta_0-(2j+\xi)^2}\,b_k.$$

Эти выражения должны обращаться в нуль при $\xi = g$. Составим их определитель и обозначим его через $\square(\xi)$.

Предположим, что $j$ и $k$ принимают все целые положительные и отрицательные значения от $-\mu$ до $+\mu$ включительно. В этом случае определитель будет состоять из $2\mu+1$ строк и $2\mu+1$ столбцов. Тогда $\square(\xi)$ определим как предел этого определителя, когда $\mu$ неограниченно возрастает.

Этот определитель сходится; действительно, можно заметить, что элементы главной диагонали равны 1.

При этих условиях имеем

$$|\Delta| < E^{\Sigma |a|},$$

где через $a$ обозначены различные элементы определителя, не расположенные на главной диагонали. Определитель будет сходиться вместе с $\Sigma |a|$; это изложено во втором томе «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste» (т. II, гл. XVII, стр. 260). Здесь

$$\sum |a| = 2 \sum |\Theta_j| \sum \frac{1}{|\Theta_0 - (2j+\xi)^2|}.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно, за исключением

$$\Theta_0 = (2j+\xi)^2,$$

или, так как $\Theta_0 = q^2$, за исключением

$$\xi = -2j \pm q.$$

Следовательно, $\square(\xi) = \lim \Delta$ существует. Он является функцией $\xi$, которая не изменяется, если заменить $\xi$ на $\xi+2$ или на $-\xi$; действительно, это приводит к изменению порядка строк и столбцов нашего бесконечного определителя передвижением всех строк и столбцов на одно место (если $\xi$ заменяется на $\xi+2$), или возвратом к тому же определителю (если $\xi$ заменяется на $-\xi$). Поэтому будем иметь

$$\square(\xi+2) = \square(\xi) = \square(-\xi);$$

таким образом, $\square(\xi)$ есть мероморфная функция от $\xi$, которая имеет простые полюсы при

$$\xi = -2j \pm q.$$

Мы утверждаем, что эти значения соответствуют именно *простым полюсам*. В самом деле, только элементы $j$-й строки становятся бесконечными при $\xi = -2j \pm q$, и эта бесконечность первого порядка.

Но любой член нашего определителя может содержать в качестве множителя только один элемент $j$-й строки.

Когда мнимая часть $\xi$ стремится к бесконечности, все элементы, не расположенные на главной диагонали, будут стремиться к нулю, поэтому

$$\lim \square(\xi) = 1.$$

Пусть

$$F(\xi) = \square(\xi) \frac{\cos \pi\xi - \cos \pi q}{\cos \pi\xi - \cos \pi g}.$$

Эта функция мероморфна; она может обращаться в бесконечность только при

$$\xi = -2j \pm q,$$

что делает $\square(\xi)$ бесконечным, но это обращает в нуль $\cos \pi\xi - \cos \pi q$, или при

$$\xi = -2j \pm g,$$

что обращает в нуль знаменатель $\cos \pi\xi - \cos \pi g$, но это обращает также в нуль $\square(\xi)$, так как мы видели, что

$$\square(g) = 0$$

и, следовательно,

$$\square(\pm g) = \square(-2j \pm g) = 0.$$

Функция $F(\xi)$ поэтому является целой, но она стремится к 1, когда мнимая часть $\xi$ стремится к бесконечности; следовательно, она приводится к единице, так что имеем

$$\square(\xi) = \frac{\cos \pi\xi - \cos \pi g}{\cos \pi\xi - \cos \pi q}.$$

Пользуясь этим равенством, можно вычислить многими методами величину $g$; например, с помощью уравнения

$$\cos \pi g = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi q}{2} \square(0). \tag{9}$$

**337.** Легко видеть, какова форма нашего определителя. Предположим, что некоторый член разложения содержит множителем элемент $a$-й строки и $b$-го столбца $\Theta_{a-b}$; он должен содержать элемент $b$-й строки; пусть это элемент из $c$-го столбца, т. е. $\Theta_{b-c}$; далее, он должен содержать элемент $c$-й строки и $d$-го столбца, т. е. $\Theta_{c-d}$, и таким образом постепенно возвращаемся к $a$-му столбцу, и это будет показывать, например, что найдется элемент из $d$-й строки и $a$-го столбца, зависящего от $\Theta_{d-a}$.

Итак, рассмотренный член будет содержать множителем произведение

$$\Theta_{a-b} \cdot \Theta_{b-c} \cdot \Theta_{c-d} \cdot \Theta_{d-a},$$

или аналогичное произведение, или несколько аналогичных произведений.

Во всех случаях **алгебраическая сумма индексов должна равняться нулю.**

Если заметим, что

$$\Theta_j = \Theta_{-j},$$

что впоследствии позволяет не обращать внимания на знак индексов, то мы будем говорить, что все индексы, рассматриваемые как положительные, могут быть разделены на два класса таким образом, что сумма индексов первого класса будет равна сумме индексов второго класса. Например, можно иметь члены с

$$\Theta_1^2,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^2\Theta_2,\ \Theta_1^3\Theta_3,\ \Theta_1\Theta_2\Theta_3,\ \Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4,\ \ldots$$

Коэффициент каждого члена представляется в виде бесконечного ряда, но все эти ряды могут быть суммированы с помощью формулы

$$\sum \frac{1}{x+n} = \pi \operatorname{ctg} x\pi. \tag{10}$$

Действительно, рассмотрим один из членов разложения. Это будет произведение некоторых элементов определителя; среди этих членов некоторые принадлежат главной диагонали, и мы ими не будем заниматься, так как они равны 1; другие не будут принадлежать главной диагонали и их будет конечное число (в противном случае наш член, содержащий в качестве множителя $m$ с бесконечно большим показателем, был бы бесконечно малым).

Обозначим через $[i, k]$ элемент $i$-й строки и $k$-го столбца и предположим, например, что рассматриваемый член равен произведению элементов

$$[a, b]\,[b, c]\,[c, d]\,[d, a]\,[a', b']\,[b', c']\,[c', a'].$$

Как мы уже видели, он будет содержать в качестве множителя произведение

$$\Theta_{a-b}\cdot\Theta_{b-c}\cdot\Theta_{c-d}\cdot\Theta_{d-a}\cdot\Theta_{a'-b'}\cdot\Theta_{b'-c'}\cdot\Theta_{c'-a'} \tag{11}$$

и коэффициент произведения (11) будет рациональной функцией $\xi$, которую обозначим через $R(\xi)$.

Рассмотрим теперь член

$$[a+n,\ b+n]\ \ldots\ [d+n,\ a+n]\,[a'+n,\ b'+n]\ldots[d'+n,\ a'+n].$$

Он также будет содержать множителем произведение (11), но его коэффициент будет равен $R(\xi+2n)$.

Поэтому в конечном счете коэффициент будет равен

$$\sum R(\xi+2n).$$

Чтобы оценить эту сумму, разложим рациональную функцию $R(\xi)$ на простые элементы:

$$R(\xi)=\sum \frac{A}{\xi-\alpha},$$

откуда

$$\sum R(\xi+2n)=\sum\sum \frac{A}{\xi+2n-\alpha}.$$

Суммировать по $n$ можно с помощью формулы (10). Если в разложении $R(\xi)$ содержится член

$$\frac{A}{(\xi-\alpha)^p},$$

то сумма по $n$

$$\sum \frac{A}{(\xi+2n-\alpha)^p}$$

вычисляется дифференцированием формулы (10).

В самом деле, наша функция $R(\xi)$ будет допускать полюсы, как мы видели выше, только при $\xi=-2j\pm q$, и эти полюсы простые; применение формулы (10) поэтому вводит лишь член

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\xi+2j\pm q}{2}\right)\pi=\pm\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}(\xi\pm q).$$

Это применимо в случае, когда имеем в качестве множителя только одно произведение вида

$$\Theta_{a-b}\cdot\Theta_{b-c}\cdot\Theta_{c-d}\cdot\Theta_{d-a}.$$

В том случае, когда имеются в качестве множителя два (или несколько) произведений такого вида, например в случае произведения (11), дело обстоит немного сложнее.

Допустим, что мы хотим рассмотреть произведение элементов

$$[n,\ n+a]\,[n+a,\ n+b]\,[n+b,\ n]\,[n',\ n'+a']\,[n'+a',\ n'],$$

и будем менять $n$ и $n'$, предполагая, что $a$, $b$, $a'$ не изменяются.

В этом случае будем иметь всюду в качестве множителя произведение

$$\Theta_a\cdot\Theta_{b-a}\cdot\Theta_{-b}\cdot\Theta_{a'}\Theta_{-a'},$$

которое не зависит ни от $n$, ни от $n'$; это произведение будет умножаться на некоторый коэффициент, который будет зависеть от $\xi$, $n$, $n'$ и имеет вид

$$R(\xi+n)\cdot R'(\xi+n'),$$

где $R$ и $R'$ — рациональные функции. Таким образом, мы должны вычислить

$$\sum R(\xi+n)\cdot R'(\xi+n'),$$

придавая $n$ и $n'$ всевозможные комбинации положительных значений, за исключением только тех, для которых разность $n-n'$ принимает определенные частные значения, а именно, одна из величин $n$, $n+a$, $n+b$ не должна быть равна одной из величин $n'$, $n'+a'$.

Допустим, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ суть те различные значения, которые не должна принимать разность $n-n'$.

Выражение, которое нужно вычислить,

$$\sum R(\xi+n)\cdot R'(\xi+n'),$$

можно написать в виде

$$\sum R(\xi+n)\sum R'(\xi+n)-\sum P(\xi+n,\ \alpha_1)-\ldots-\sum P(\xi+n,\ \alpha_p),$$

где

$$P(\xi,\ \alpha_i)=R(\xi)\,R'(\xi+\alpha_i).$$

Каждая из сумм, которая входит в это выражение, имеет вид $\Sigma R(\xi+n)$ и может быть вычислена способом, который изложен выше. Таким образом, $\square(\xi)$ имеет вид

$$\square(\xi)=A+B\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}(\xi+q)+C\operatorname{ctg}(\xi-q)+\\ +D\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}(\xi+q)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}(\xi-q), \qquad (12)$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ разлагаются по степеням $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$, и коэффициенты этих разложений будут рациональными функциями $q$.

С другой стороны, мы нашли, что

$$\square(\xi)=\frac{\cos\pi\xi-\cos\pi g}{\cos\pi\xi-\cos\pi q}$$

и

$$F(\pi)=\cos\pi g=H\cos q\pi+H'\sin q\pi,$$

где $H$ и $H'$, так же как и $A$, $B$, $C$, $D$, являются рядами по степеням $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ с рациональными коэффициентами относительно $q$. Поэтому имеем

$$\square(\xi)=1+\frac{(1-H)\cos q\pi-H'\sin q\pi}{\cos\pi\xi-\cos\pi q}.$$

Чтобы вернуться к разложению (12), достаточно заменить

$$(\cos\pi\xi-\cos\pi q),\quad \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ q\pi$$

через

$$2\sin\frac{\pi}{2}(\xi+q)\sin\frac{\pi}{2}(\xi-q), \qquad {\cos \atop \sin}\left[\frac{\pi}{2}(\xi+q)-\frac{\pi}{2}(\xi-q)\right]$$

и таким образом выразить все в виде функции тригонометрических величин, зависящих от двух углов $\frac{\pi}{2}(\xi \pm q)$.

338. Остается определить коэффициенты $b_k$. Для этого возьмем определитель $\square(\xi)$ и заменим в нем в строке нулевого ранга

$$\ldots, \frac{\Theta_{-2}}{q^2-\xi^2}, \quad \frac{\Theta_{-1}}{q^2-\xi^2}, \quad 1, \frac{\Theta_1}{q^2-\xi^2}, \ldots$$

неопределенными величинами

$$\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$$

Определитель будет оставаться сходящимся, лишь бы эти неопределенные величины были ограниченны (см. «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste», т. II, гл. XVII, стр. 265).

Тогда он будет иметь вид

$$\Delta = \ldots + B_{-1}x_{-1} + B_0x_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots,$$

где $B$ — суть функции $\xi$, имеющие одни и те же простые полюсы, что и $\square(\xi)$, кроме $\xi = \pm q$. Поэтому

$$B_j(\cos\pi\xi - \cos\pi q)$$

есть целая функция.

Мы утверждаем, что при $\xi = g$ $B_k = b_k$; для этого достаточно показать, что $B_k$ удовлетворяют уравнениям (8), т. е. что $\Delta$ обращается в нуль, если заменить $x_j$ единицей, а $x_k$ $(j \gtrless k)$ выражением

$$\frac{\Theta_{j-k}}{\Theta_0-(2j+g)^2}.$$

Это верно, так как при $j \gtrless 0$ получаем определитель с двумя одинаковыми строками, а при $j = 0$ получаем определитель $\square(g)$, который равен нулю, что и требовалось доказать.

339. Мы можем также оценить порядок малости коэффициентов $b_k$. Для этого вернемся к равенствам (5) и постараемся с помощью этих уравнений составить не решение $F(\tau)$, а решение

$$z = E^{ig\tau}\psi(\tau) = \sum b_k\zeta^{g+2k}.$$

Заметим в этом случае, что $\Theta_0 - \Theta$ разлагается по степеням величин $m$, $m^2\zeta^2$, $m^2\zeta^{-2}$. Утверждаем, что это имеет место и для $z\zeta^{-q}$.

Если проинтегрировать уравнения (5) последовательными приближениями, то можно убедиться, производя анализ, аналогичный тому, который мы сделали в § 334, в том, что $z$ представляется в следующей форме:

$$\sum \beta_{k\mu} \tau^{\mu} \zeta^{q+2k},$$

так что $z\zeta^{-q}$ разлагается по степеням $m$, $\tau$, $\zeta^2$, $\zeta^{-2}$. Мы предполагаем установить, что $z\zeta^{-q}$ разлагается по степеням $m$, $\tau$, $m^2\zeta^2$, $m^2\zeta^{-2}$; это можно доказать методом индукции, так как уравнения (5) показывают, что если это верно для $z_{k-1}$, то будет верно и для $z_k$.

Из этого следует, что $b_k$ содержит в качестве множителя $m^{2k}$, что и указывает на то, что $b_k$ должны быстро убывать.

340. Мы видели, что $g$ определяет движение узла, но мы имеем это только в первом приближении. Действительно, мы пренебрегаем величинами $E_1$, $E_3$ и квадратом $E_2$.

Истинное движение узла, согласно главе XXIV, разлагается по степеням величин

$$E_1^2,\ E_2^2,\ E_3^2,\ \alpha^2$$

и $g(n_1 - n_2)$ дает нам только члены нулевой степени этого разложения.

ГЛАВА XXVII

# ДВИЖЕНИЕ ПЕРИГЕЯ

**341.** Допустим, что дана какая-нибудь система дифференциальных уравнений. Для упрощения предположим, что имеется только два уравнения с двумя неизвестными $x$ и $y$ вида

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, x', y', x'', y'', \alpha_1, \alpha_2)=0, \\ F_1(x, y, x', y', x'', y'', \alpha_1, \alpha_2)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — малые параметры.

Допустим, что при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ найдено частное решение $S$ уравнений (1). Поставим своей целью вывести отсюда в с е решения, мало отличающиеся от $S$ при малых значениях параметров $\alpha_1$ и $\alpha_2$ (очевидно, такие решения существуют, если $\alpha_1$ и $\alpha_2$ очень малы).

Будем разлагать эти решения по степеням параметров $\alpha$ и некоторых постоянных интегрирования $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, обращающихся в нуль для частного решения $S$.

Так как мы уже знаем члены нулевой степени этих разложений, то наша задача заключается в последовательном определении членов первой степени, второй степени и т. д.

Пусть $x = x_0$, $y = y_0$ есть решение $S$, и положим

$$X=\frac{\partial}{\partial x_0}[F(x_0, y_0, x_0', y_0', x_0'', y_0'', 0, 0)],$$

где производная вычисляется в предположении, что $x_0, y_0, x_0', y_0', x_0'', y_0''$ — независимые переменные. Аналогично введем обозначения

$$Y=\frac{\partial F}{\partial y_0}, \quad X'=\frac{\partial F}{\partial x_0'}, \ \ldots \quad X_1=\frac{\partial F_1}{\partial x_0}, \ \ldots$$

Допустим, что мы нашли точное разложение до членов $k$-го порядка включительно, и пусть

$$x=x_k, \qquad y=y_k$$

есть это разложение; если подставим эти разложения вместо $x$ и $y$ в уравнения (1), то первые члены до $(k+1)$-го порядка должны уничтожиться. Поэтому

$$F(x_k, y_k), \quad F_1(x_k, y_k)$$

будут известными функциями, разложения которых будут начинаться с членов $(k+1)$-го порядка. Пусть теперь

$$x = x_k + \delta x, \quad y = y_k + \delta y;$$

предположим, что нужно вычислить $\delta x$ и $\delta y$ до членов $(k+1)$-го порядка включительно, пренебрегая членами $(k+2)$-го порядка. Функцию

$$F(x, y) = F(x_k + \delta x, y_k + \delta y)$$

можно разложить по формуле Тейлора в виде

$$F(x_k, y_k) + \sum \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2!}\sum \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\delta x^2 + \ldots$$

Членами $\delta x^2$ (а также и членами $\delta x\, \delta y$, $\delta x\, \delta x'$ и т. д.) пренебрегаем, так как члены $\delta x^2$ имеют порядок $(2k+2)$.

В коэффициенте при $\delta x$ мы можем положить

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Это дает погрешность первого порядка в коэффициенте $\frac{\partial F}{\partial x}$ и, следовательно, дает погрешность $(k+2)$-го порядка в произведении $\frac{\partial F}{\partial x}\delta x$, так как $\delta x$ имеет порядок $(k+1)$.

Это равносильно замене

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial x'}, \ldots$$

на

$$X, Y, X', \ldots$$

Остается, следовательно (с этой же степенью точности),

$$F(x, y) = F(x_k, y_k) + \sum X\, \delta x,$$

где положено

$$\sum X\, \delta x = X\, \delta x + Y\, \delta y + X'\, \delta x' + Y'\, \delta y' + X''\, \delta x'' + Y''\, \delta y'';$$

поэтому уравнения (1) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \sum X\, \delta x &= -F(x_k, y_k), \\ \sum X_1\, \delta x &= -F_1(x_k, y_k). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Правые части суть известные функции, так же как и $X$, так что уравнения (2) являются линейными уравнениями с правыми частями.

Левые части остаются теми же самыми для всех приближений.

Допустим, в частности, что мы желаем определить члены первой степени в предположении, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; тогда правые части примут вид (например, для первого уравнения)

$$F(x_0, y_0, x_0', y_0', x_0'', y_0'', \alpha_1, \alpha_2)$$

или, так как $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$,

$$F(x_0, y_0, x_0', y_0', x_0'', y_0'', 0, 0).$$

Но это выражение равно нулю, так как

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

есть решение уравнений (1) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Поэтому уравнения (2) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \sum X\,\delta x = 0, \\ \sum X_1\,\delta x = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а это линейные уравнения с нулевыми правыми частями.

Известно, что для интегрирования линейных уравнений с правыми частями достаточно уметь интегрировать однородные уравнения, а далее воспользоваться простыми квадратурами.

Итак, *если определены члены нулевой и первой степени при* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ [т. е. если проинтегрированы уравнения (3)], *то с помощью квадратур определяются члены высших степеней, каковы бы ни были* $\alpha_1$ *и* $\alpha_2$.

Уравнения (3) называются уравнениями в вариациях (см. «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste», т. I, гл. IV).

В интересующем нас случае роль параметров $\alpha_1$ и $\alpha_2$ играют параллакс $\alpha$ и эксцентриситет орбиты Солнца $E_3$; роль постоянных $\beta$ играют

$$E_1 \cdot E^{i\overline{\omega}_1},\ E_1 \cdot E^{-i\overline{\omega}_1},\ E_2 \cdot E^{i\overline{\omega}_2},\ E_2 \cdot E^{-i\overline{\omega}_2}. \tag{4}$$

В главе XXV мы уже определили члены нулевой степени. Остается теперь определить члены первой степени относительно постоянных (4), т. е. относительно $E_1$ и $E_2$, в предположении, что

$$\alpha = E_3 = 0,$$

а далее надо будет применять простые квадратуры. В главе XXVI мы вычислили члены первой степени относительно $E_2$; теперь вычислим члены первой степени относительно $E_1$.

Таков метод, которым мы воспользуемся для вычисления различных членов наших разложений; в следующих главах мы рассмотрим те изменения, которые целесообразно внести в этот метод, чтобы его приспособить к нашей задаче.

**342.** Для вычисления членов первой степени относительно $E_1$ мы должны положить

$$E_2 = E_3 = \alpha = 0,$$

в результате чего опять получаем уравнения главы XXV; прежде всего полагаем $z = 0$ и рассматриваем уравнения (4) из § 324:

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2my' - 3m^2x + \frac{\varkappa x}{r^3} &= 0, \\ y'' + 2mx' \qquad\qquad + \frac{\varkappa y}{r^3} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Выше, в главе XXV, мы нашли частное решение уравнений (5), и пусть это решение будет

$$x = x_0, \qquad y = y_0.$$

Будем искать теперь близкое решение

$$x = x_0 + \delta x, \qquad y = y_0 + \delta y,$$

пренебрегая квадратом $E_1$ и, следовательно, квадратами $\delta x$ и $\delta y$. Составим уравнения в вариациях для уравнений (5). Они имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \delta x'' - 2m\,\delta y' - 3m^2\,\delta x + A\,\delta x + B\,\delta y &= 0, \\ \delta y'' + 2m\,\delta x' \qquad\qquad + B\,\delta x + C\,\delta y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{\varkappa}{r}\right), \qquad B = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(-\frac{\varkappa}{r}\right), \qquad C = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(-\frac{\varkappa}{r}\right)$$

и где нужно, разумеется, заменить после дифференцирования $x$ и $y$ на $x_0$ и $y_0$.

Так как $A$, $B$, $C$ — известные функции, то уравнения (6) суть линейные дифференциальные уравнения относительно $\delta x$ и $\delta y$. Система, состоящая из двух уравнений второго порядка, имеет четвертый порядок, поэтому она допускает четыре независимых решения. Два из этих четырех решений уже известны. Действительно, решения из главы XXV

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

в действительности зависят от двух произвольных постоянных; в самом деле, мы нашли для $x_0$ решение вида

$$x_0 = \varphi(\tau,\ m);$$

такой же вид имеет $y_0$. Но

$$\tau=(n_1-n_2)t, \qquad m=\frac{n_2}{n_1-n_2}.$$

Решение продолжает оставаться решением, если заменить $t$ на $t+\varepsilon$, так что имеем

$$x_0=\varphi\left[(n_1-n_2)(t+\varepsilon),\ \frac{n_2}{n_1-n_2}\right]$$

с двумя произвольными постоянными $\varepsilon$ и $n_1$, или

$$x_0=\varphi\left[\frac{n_2}{m}(t+\varepsilon),\ m\right].$$

Уравнения в вариациях (6) будут иметь, следовательно, частные решения

$$\delta x=\frac{\partial x_0}{\partial\varepsilon}, \qquad \delta y=\frac{\partial y_0}{\partial\varepsilon},$$

$$\delta x=\frac{\partial x_0}{\partial m}, \qquad \delta y=\frac{\partial y_0}{\partial m},$$

где $t$, $\varepsilon$ и $m$ играют роль независимых переменных. Если возвратиться к независимым переменным $\tau$ и $m$, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&\delta x=-\frac{n_2}{m}\cdot\frac{\partial x_0}{\partial\tau}, && \delta y=-\frac{n_2}{m}\cdot\frac{\partial y_0}{\partial\tau},\\
&\delta x=-\frac{\tau}{m}\cdot\frac{\partial x_0}{\partial\tau}+\frac{\partial x_0}{\partial m}, && \delta y=-\frac{\tau}{m}\cdot\frac{\partial y_0}{\partial\tau}+\frac{\partial y_0}{\partial m}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Добавим, что в первой строке формулы (7) постоянный множитель $\frac{n_2}{m}$ можно опустить, так как уравнения линейны.

Зная два частных решения системы четвертого порядка, можно, как известно, привести эту систему к системе второго порядка, но лучше поступить иначе, так как второе решение (7) не является периодическим.

Возьмем интеграл Якоби

$$\frac{x'^2+y'^2}{2}-\frac{3m^2}{2}x^2-\frac{\varkappa}{r}=C$$

и составим для него уравнение в вариациях.

Если допустим $\delta C=0$, чтобы исключить второе из решений (7), то получим

$$x_0'\,\delta x'+y_0'\,\delta y'-3m^2x_0\,\delta x+\frac{\varkappa x_0}{r_0^3}\,\delta x+\frac{\varkappa y_0}{r_0^3}\,\delta y=0,$$

или, так как $x_0$ и $y_0$ удовлетворяют уравнениям (5),

$$x_0'\,\delta x'+y_0'\,\delta y'-(x_0''-2my_0')\,\delta x-(y_0''+2mx_0')\delta y=0. \tag{8}$$

Можно проверить без труда, что первое решение (7) удовлетворяет равенству (8).

Объединяя первое уравнение (6) с (8), имеем систему (9) третьего порядка, которая будет допускать в качестве частного решения

$$\delta x = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} = x_0', \qquad \delta y = \frac{\partial y_0}{\partial \tau} = y_0',$$

благодаря чему мы можем привести эту систему к системе второго порядка. В самом деле, положим

$$(\delta x + i\,\delta y) = (\xi + i\eta)(x_0' + iy_0'),$$
$$(\delta x - i\,\delta y) = (\xi - i\eta)(x_0' - iy_0)]$$

и возьмем за новые переменные $\xi$ и $\eta$. Тогда наши уравнения допускают частное решение

$$\delta x = x_0', \qquad \delta y = y_0',$$

откуда

$$\xi + i\eta = \xi - i\eta = 1, \qquad \xi = 1, \ \eta = 0,$$

следовательно, $\xi$ удовлетворяет некоторому линейному уравнению третьего порядка, которое допускает в качестве решения 1, а $\eta$ удовлетворяет некоторому уравнению второго порядка вида

$$\eta'' + H\eta' + K\eta = 0. \tag{10}$$

Чтобы привести это уравнение к канонической форме, положим

$$\eta = \varrho\varphi(\tau),$$

где $\varrho$ — новая неизвестная, а $\varphi$ — такая периодическая функция $\tau$, что

$$\frac{2\varphi'}{\varphi} + H = 0.$$

В таком случае $\varrho$ удовлетворяет уравнению второго порядка вида

$$\varrho'' + \Theta\varrho = 0, \tag{11}$$

где $\Theta$ — известная функция $\tau$.

343. Теперь покажем, что уравнение (11) имеет такой же вид, что и уравнение (1) предыдущей главы, т. е. что $\Theta$ есть четная функция $\tau$ с периодом $\pi$ и всюду конечная.

Коэффициенты $A$, $B$, $C$ в уравнениях (6) суть периодические функции, так что эти уравнения не изменятся, если заменить $\tau$ на $\tau + \pi$. Следовательно, если мы обозначим на время через $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\xi_1$, $\eta_1$ значения, которые принимают $\delta x$, $\delta y$, $\xi$, $\eta$ при замене $\tau$ на $\tau + \pi$, и если $\delta x$, $\delta y$ есть решение, то решением также будет

$\delta_1 x$, $\delta_1 y$. Но мы имеем

$$\delta x + i\,\delta y = (\xi + i\eta)(x_0' + iy_0'),$$

$$\delta x - i\,\delta y = (\xi - i\eta)(x_0' - iy_0').$$

Если в первом из этих уравнений заменим $\tau$ на $\tau + \pi$, то

$$\delta x,\ \delta y,\ \xi,\ \eta,\ x_0',\ y_0'$$

примут значения

$$\delta_1 x,\ \delta_1 y,\ \xi_1,\ \eta_1,\ -x_0',\ -y_0',$$

откуда получим равенство

$$\delta_1 x + i\,\delta_1 y = -(\xi_1 + i\eta_1)(x_0' + iy_0').$$

Оно показывает, что если $\xi$, $\eta$ есть решение, то то же самое можно сказать и о $-\xi_1$, $-\eta_1$ и, следовательно, о $\xi_1$, $\eta_1$; таким образом, уравнения для $\xi$ и $\eta$ не изменятся, если заменить $\tau$ на $\tau + \pi$. Следовательно, в уравнении (10) $H$ и $K$ — периодические функции.

Если заменить $\tau$ на $-\tau$ и $\delta y$ на $-\delta y$, то уравнения (6) не изменятся, так как $A$, $B$, $C$ принимают при этом значения $A$, $-B$ и $C$. С другой стороны, $x_0'$ и $y_0'$ примут значения $-x_0'$ и $y_0'$. Следовательно,

$$\xi + i\eta = \frac{\delta x + i\,\delta y}{x_0' + iy_0'}$$

заменится на

$$-\frac{\delta x - i\,\delta y}{x_0' - iy_0'} = -\xi + i\eta,$$

откуда следует, что $\xi$ меняет знак, а $\eta$ не изменяется.

Так как уравнение (10) не должно изменяться, то отсюда следует, что $K$ есть четная функция, а $H$ — нечетная.

Если мы возьмем уравнение

$$\frac{2\varphi'}{\varphi} + H = 0,$$

то увидим, что

$$\varphi = E^{-\frac{1}{2}\int H\,d\tau}.$$

Но $H$ есть периодическая функция и ее среднее значение равно нулю, так как она — нечетная функция; поэтому $\int H\,d\tau$ и, следовательно, $\varphi$ — периодическая и четная функция. Отсюда выводим, что $\Theta$ — периодическая и четная функция. Ниже мы увидим, как можно полностью определить $\varphi$.

Остается показать, что $\Theta$ всегда конечна. Для этого заметим, что $\delta x$ и $\delta y$ — конечные величины; следовательно,

$$\xi + i\eta = \frac{\delta x + i\,\delta y}{x_0' + iy_0'}$$

может обращаться в бесконечность ($\tau$ — вещественная величина), если только одновременно

$$x_0' = y_0' = 0,$$

а этого не может быть, так как замкнутые траектории Луны (отнесенные к вращающимся осям), изученные в главе XXV, могут иметь точку возврата только при $\frac{1}{m} = 1{,}78$.

Необходимо теперь показать, что $\varphi$ и, следовательно, $\Theta$ конечны.

Для этого нужно определить $\varphi$, для чего необходимо вернуться немного назад.

344. Легко определить $\varphi$ непосредственно, выполняя длинные и громоздкие вычисления, но лучше поступить иначе. Уравнения (6) допускают четыре линейно независимых интеграла; мы уже знаем два из них, т. е. интегралы (7).

Два других интеграла согласно общим свойствам линейных уравнений с периодическими коэффициентами, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \delta x + i\,\delta y &= \sum b_k \zeta^{c+2k+1}, \\ \delta x - i\,\delta y &= \sum c_k \zeta^{c+2k+1}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Заменяя $\tau$ на $-\tau$ и $\delta y$ на $-\delta y$, в результате чего уравнения не изменяются, получим

$$\left.\begin{aligned} \delta x - i\,\delta y &= \sum b_k \zeta^{-c-2k-1}, \\ \delta x + i\,\delta y &= \sum c_k \zeta^{-c-2k-1}. \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

Складывая эти решения, найдем вещественное решение

$$\delta x = \sum (b_k + c_k) \cos [w_3 + w_1 + (2k+1)\tau],$$
$$\delta y = \sum (b_k - c_k) \sin [w_3 + w_1 + (2k+1)\tau],$$

где коэффициенты $b_k$ и $c_k$ вещественны. Величина $c$ определяет движение перигея, так же как и величина $g$ определяла движение узла, и замечание из § 340 остается справедливым. Положим

$$w_1 + w_3 = c\tau + \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ — произвольная постоянная, а $w_3$ равна величине

$$w_3 = w_1' = n_3 t + \bar{\omega}_3,$$

определенной в главе XXIV условиями

$$c = \frac{n_3 + n_1}{n_1 - n_2}, \quad \varepsilon = \bar{\omega}_3, \quad c = 1 + m + \frac{n_3}{n_1 - n_2}.$$

Между четырьмя решениями (7), (12) и (12′) существуют некоторые билинейные соотношения, на происхождение которых мы укажем.

Рассмотрим систему канонических уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{13}$$

Согласно теореме § 16 существует функция $\Omega$, такая, что имеем

$$\sum x\,dy = d\Omega + \sum A\,d\alpha - F\,dt,$$

где $A$ зависят только от постоянных интегрирования $\alpha$; следовательно, будем иметь, например,

$$\sum x \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + A_1,$$

$$\sum x \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + A_2.$$

Если продифференцируем первое равенство по $\alpha_2$, а второе по $\alpha_1$, то получим

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} + \sum x \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2},$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} + \sum x \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1},$$

или, вычитая одно из другого,

$$\sum \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}.$$

Так как $A$ зависят только от постоянных интегрирования, то правая часть приводится к постоянной.

Предположим, что составлены уравнения в вариациях для уравнений (13); мы получим два частных решения этих уравнений, полагая

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \alpha_1}, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha_1},$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \alpha_2}, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha_2};$$

таким образом, мы получим все независимые решения уравнений в вариациях. Следовательно, если

$$\delta x = \xi, \quad \delta y = \eta, \quad \delta x = \xi^* \quad \delta y = \eta^*$$

суть какие-нибудь два решения этих уравнений, то между ними существует билинейное соотношение

$$\sum(\xi\eta^*-\eta\xi^*)=\text{const}.$$

Мы можем применить этот результат к уравнениям нашей задачи, так как уравнения (4) и (6) главы XXV непосредственно вытекают из канонических уравнений (1). Сопряженными переменными будут тогда

$$(x,\ X),\quad (y,\ Y),$$

и их вариации равны

$$\delta x,\ \delta X=\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)-n_2\,\delta y=(n_1-n_2)\,(\delta x'-m\,\delta y),$$

$$\delta y,\ \delta Y=\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)+n_2\,\delta x=(n_1-n_2)\,(\delta y'+m\,\delta x).$$

Пусть в таком случае

$$\delta x=\delta_1 x,\quad \delta X=\delta_1 X,\quad \delta y=\delta_1 y,\quad \delta Y=\delta_1 Y$$

есть частное решение уравнений в вариациях. Отметим индексом 2 второе частное решение; тогда будем иметь

$$(\delta_1 x\,\delta_2 X-\delta_1 X\,\delta_2 x)+(\delta_1 y\,\delta_2 Y-\delta_1 Y\,\delta_2 y)=\text{const},$$

или, заменяя $\delta X$, $\delta Y$ их значениями и деля на $n_1-n_2$, получим

$$(\delta_1 x\cdot\delta_2 x'-\delta_2 x\,\delta_1 x')+(\delta_1 y\,\delta_2 y'-\delta_2 y\,\delta_1 y')+\\+2m\,(\delta_1 y\,\delta_2 x-\delta_2 y\,\delta_1 x)=\text{const}.\qquad(14)$$

Постоянная в правой части равна нулю, если два решения тождественны; она также равна нулю, если комбинировать одно из решений (7) с одним из решений (12) или (12′). Действительно, если комбинировать второе решение (7) с (12), то левая часть равенств (14) будет содержать члены только с

$$\tau\zeta^{c+n}\ \text{или}\ \zeta^{c+n}\qquad(n\text{ — целое число}).$$

Никакой из этих членов не может быть постоянным, не будучи нулем.

С другой стороны, если будем рассматривать решение $\delta_1$, то постоянная в правой части не может быть нулем, каково бы ни было решение $\delta_2$; иначе между четырьмя решениями

$$\delta_1 x,\ \delta_1 y,\ \delta_1 x',\ \delta_1 y'$$

существовало бы четыре однородных соотношения первой степени с определителем, отличным от нуля, и поэтому эти четыре величины должны были бы обращаться одновременно в нуль.

Следовательно, мы должны сделать вывод, что постоянная в правой части не равна нулю, когда комбинируются между собой два решения (7) или два решения (12), (12′).

345. Как преобразуется соотношение (14), если сделать с уравнениями преобразования § 342? Ясно, что мы должны иметь одно билинейное соотношение между двумя определенными решениями преобразованных уравнений

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \xi_1',\ \eta_1',$$
$$\xi_2,\ \eta_2,\ \xi_2',\ \eta_2'.$$

Это билинейное соотношение должно будет, очевидно, выполняться, и постоянная в правой части равна нулю, когда одно из этих двух решений будет соответствовать первому решению (7), т. е. когда

$$\xi_1=1, \qquad \xi_1'=\eta_1=\eta_1'=0,$$

или

$$\xi_2=1, \qquad \xi_2'=\eta_2=\eta_2'=0.$$

Из этого мы должны сделать вывод, что $\xi_1$ и $\xi_2$ не должны входить в билинейное соотношение, поэтому будем иметь билинейное соотношение между

$$\xi_1',\quad \eta_1,\quad \eta_1',$$
$$\xi_2',\quad \eta_2,\quad \eta_2'.$$

Если в соотношении (14) возьмем в качестве решения $\delta_1$ первое решение (7), то мы возвратимся к уравнению (8), выведенному выше из интеграла Якоби. Преобразуем уравнение (8), полагая

$$\delta x+i\,\delta y=(\xi+i\eta)(x'+iy'),$$

что дает

$$\frac{\xi'}{2\eta}=\frac{x_0'y_0''-y_0'x_0''}{x_0'^2+y_0'^2}-m. \tag{15}$$

Если в уравнении (15) заменим $\xi_1'$ и $\xi_2'$ их выражениями через $\eta_1$ и $\eta_2$, то останется простое билинейное соотношение между

$$\eta_1,\quad \eta_1',\quad \eta_2,\quad \eta_2',$$

которое должно иметь вид

$$\psi(\tau)(\eta_1\eta_2'-\eta_2\eta_1')=\text{const},$$

где $\psi(\tau)$ — известная функция $\tau$; впрочем, легко видеть, что

$$\psi(\tau)=\frac{1}{\varphi^2(\tau)},$$

где $\varphi$ есть функция из § 342.

346. Возьмем уравнения (6) и перейдем к переменным $\xi$ и $\eta$. Мы будем иметь два линейных соотношения между

$$\xi'', \quad \eta'', \quad \xi', \quad \eta', \quad \xi, \quad \eta,$$

в которые $\xi$ не входит, так как они должны удовлетворяться при $\xi = 1$, $\eta = 0$.

Умножим эти соотношения на $-y_0'$ и $x_0'$ и сложим так, чтобы исключить $\xi''$, так что останутся

$$\eta'', \quad \xi', \quad \eta', \quad \eta.$$

Заменим далее $\xi'$ в функции $\eta$ с помощью равенства (15); таким образом, найдем

$$\eta''(x_0'^2 + y_0'^2) + 2\eta'(x_0'x_0'' + y_0'y_0'') + M\eta = 0, \tag{16}$$

где $M$ — известная функция $\tau$; если сравним его с уравнением (10), то найдем

$$H = 2\frac{x_0'x_0'' + y_0'y_0''}{x_0'^2 + y_0'^2},$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}}.$$

Прежде всего из этого выводим, что $\varphi$ не может обращаться ни в нуль, ни в бесконечность, следовательно, $\varrho$ — конечная величина, и, наконец, что $\Theta$ (которую легко можно составить) всегда конечна, так как если бы $\Theta$ обратилась в бесконечность, то один из двух интегралов уравнения (11) должен тоже обращаться в бесконечность.

Таким образом, уравнение (11) имеет такой же вид, что и уравнение (1) из главы XXVI, и все, о чем мы говорили в предыдущей главе, здесь применимо. Можно, в частности, воспользоваться определителем Хилла для вычисления движения перигея. Единственное различие заключается в том, что здесь $\Theta_1$ значительно больше, и из этого вытекают две вещи: прежде всего сходимость разложения менее быстра, чем в случае движения узла, и это объясняет те обстоятельства, которые так удивили математиков XVIII века; далее, некоторые неравенства имеют значительные коэффициенты. Кроме членов с $b_0$ и $c_0$, которые представляют главные члены в *уравнении центра*, такими же будут члены с $b_{-1}$ и $c_1$, которые дают большое неравенство, известное под названием *эвекции*.

347. Можно непосредственно получить систему второго порядка, которой удовлетворяют $\delta x$ и $\delta y$, т. е. решения (12) и (12′), которые нас интересуют. В самом деле, возьмем билинейное соотношение (14), и пусть $\delta_2 x$, $\delta_2 y$ (которые мы обозначим просто

через $\delta x$ и $\delta y$, опуская индекс 2) представляют одно из решений (12) или (12′), а $\delta_1 x$, $\delta_1 y$ представляют одно из решений (7); постоянная в правой части будет равна нулю, но решения (7) должны рассматриваться как известные, и это нам будет давать билинейное соотношение между $\delta x$, $\delta y$, $\delta x'$, $\delta y'$; так как мы имеем два решения (7), то это нам дает систему двух дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными $\delta x$ и $\delta y$.

Возьмем прежде всего первое решение (7):

$$\delta_1 x = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} = x_0', \qquad \delta_1 y = \frac{\partial y_0}{\partial \tau} = y_0',$$

откуда

$$\delta_1 x' = x_0'', \qquad \delta_1 y' = y_0'';$$

далее находим

$$x_0' \,\delta x' + y_0' \,\delta y' - x_0'' \,\delta x - y_0'' \,\delta y + 2m\,(y_0' \,\delta x - x_0' \,\delta y) = 0. \qquad (16')$$

Возьмем далее второе решение (7)

$$\delta_1 x = -\frac{\tau}{m} x_0' + \frac{\partial x_0}{\partial m}, \qquad \delta_1 y = -\frac{\tau}{m} y_0' + \frac{\partial y_0}{\partial m},$$

откуда

$$\delta_1 x' = -\frac{\tau}{m} x_0'' + \frac{\partial x_0'}{\partial m} - \frac{x_0'}{m}, \qquad \delta_1 y' = -\frac{\tau}{m} y_0'' + \frac{\partial y_0'}{\partial m} - \frac{y_0'}{m}.$$

Найдем $\left[\text{учитывая соотношение (16), в силу которого члены с } \frac{\tau}{m} \text{ уничтожаются}\right]$

$$\frac{\partial x_0}{\partial m}\delta x' + \frac{\partial y_0}{\partial m}\delta y' - \frac{\partial x_0'}{\partial m}\delta x - \frac{\partial y_0'}{\partial m}\delta y + \\ + \frac{x_0' \,\delta x + y_0' \,\delta y}{m} + 2m\left(\frac{\partial y_0}{\partial m}\delta x - \frac{\partial x_0}{\partial m}\delta y\right) = 0. \qquad (17)$$

Теперь надо проинтегрировать систему (16) и (17). Эту систему можно привести к канонической форме; можно также упростить интегрирование, пользуясь приемом из § 327. Возьмем уравнения (3) из § 327, которые напишем в виде

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2py' - \frac{3}{2}p^2 x - \frac{3}{2}m^2 x + \frac{\varkappa x}{r^3} = 0,\\ y'' + 2px' - \frac{3}{2}p^2 y - \frac{3}{2}m^2 y + \frac{\varkappa y}{r^3} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5')$$

Заметим, что эти уравнения могут быть выведены из канонических уравнений; для этого достаточно взять в качестве сопряженных переменных величины

$$X,\ Y,\ x,\ y,$$

характеристическую функцию в виде

$$F=\frac{X^2+Y^2}{2}-\frac{m_1+m_7}{r}+n_2(Xy-Yx)-n_2^2\frac{x^2+y^2}{4}-3h^2\frac{x^2-y^2}{4},$$

составить канонические уравнения

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial F}{\partial X}, \qquad \frac{dX}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x}, \ldots,$$

исключить из них $X$ и $Y$ и положить

$$d\tau=(n_1-n_2)\,dt, \quad n_2=p(n_1-n_2), \quad h=m(n_1-n_2), \quad \varkappa=\frac{m_1+m_7}{(n_1-n_2)^2}.$$

Применим к уравнениям (5′) те же рассуждения, что и к уравнениям (5). Уравнения (5′) допускают систему периодических решений, полученных в главе XXV, которые мы напишем в виде

$$x_0=\varphi(\tau,\ p,\ m), \qquad y_0=\varphi_1(\tau,\ p,\ m).$$

Образуем уравнения в вариациях, аналогичные уравнениям (6), полагая $\qquad x=x_0+\delta x, \qquad y=y_0+\delta y.$

Эти уравнения будут допускать решения, аналогичные решениям (7), которые получаются в результате дифференцирования по постоянным интегрирования $\varepsilon$ и $n_1$ выражения

$$x_0=\varphi\left[(n_1-n_2)(t+\varepsilon),\ \frac{n_2}{n_1-n_2},\ \frac{h}{n_1-n_2}\right],$$

откуда будем иметь два частных решения

$$\delta x=\frac{\partial x_0}{\partial \varepsilon}=(n_1-n_2)\frac{\partial x_0}{\partial \tau},$$

$$\delta x=\frac{\partial x_0}{\partial n_1}=(t+\varepsilon)\frac{\partial x_0}{\partial \tau}-\frac{n_2}{(n_1-n_2)^2}\cdot\frac{\partial x_0}{\partial p}-\frac{h}{(n_1-n_2)^2}\frac{\partial x_0}{\partial m},$$

или, отбрасывая постоянные множители, решения

$$\delta x=x_0', \qquad \delta x=-\tau\frac{\partial x_0}{\partial \tau}+p\frac{\partial x_0}{\partial p}+m\frac{\partial x_0}{\partial m},$$

которые заменяют решения (7).

При этих условиях (16) и (17) принимают вид

$$\sum x_0'\,\delta x'-\sum x_0''\,\delta x+2p(y_0'\,\delta x-x_0'\,\delta y)=0, \tag{16′}$$

$$\sum\left(m\frac{\partial x_0}{\partial m}+p\frac{\partial x_0}{\partial p}\right)\delta x'-\sum\left(m\frac{\partial x_0'}{\partial m}+p\frac{\partial x_0'}{\partial p}\right)\delta x+$$
$$+\sum x_0'\,\delta x+2pm\left(\frac{\partial y_0}{\partial m}\delta x-\frac{\partial x_0}{\partial m}\delta y\right)+2p^2\left(\frac{\partial y_0}{\partial p}\delta x-\frac{\partial x_0}{\partial p}\delta y\right)=0. \tag{17′}$$

Разлагая далее по степеням $m^2$, обнаружим обстоятельство, отмеченное уже в конце § 328, а именно, что разложение коэффициента того же члена будет расположено не по степеням $m^2$, а по степеням $m^4$.

Но при $m = 0$ имеем просто

$$x_0 = A\cos\tau, \qquad y_0 = A\sin\tau,$$

где $A$ — функция $p$, которую легко можно составить; таким образом, будем иметь

$$x_0' = -A\sin\tau, \qquad y_0' = A\cos\tau,$$

$$p\frac{\partial x_0}{\partial p} = B\cos\tau, \qquad p\frac{\partial y_0}{\partial p} = B\sin\tau,$$

в которых ради сокращения положено

$$B = p\frac{\partial A}{\partial p}.$$

Пусть в таком случае

$$F(x_0, y_0, m), \qquad F_1(x_0, y_0, m)$$

суть левые части равенств (16′) и (17′), причем здесь мы не отмечали зависимости ни от $p$, ни от неизвестных $\delta x$, $\delta y$ и их производных. Обозначим также через

$$F(A\cos\tau, A\sin\tau, 0)$$

значение функции $F(x_0, y_0, m)$, если заменить в ней $m$ нулем, $x_0$ и $y_0$ их приближенными значениями $A\cos\tau$, $A\sin\tau$, и, следовательно, $x_0'$, $y_0'$, $\frac{\partial x_0}{\partial p}$, $\frac{\partial y_0}{\partial p}$, ... соответствующими значениями. Тогда соотношения

$$F(x_0, y_0, m) - F(A\cos\tau, A\sin\tau, 0) = -M,$$

$$F_1(x_0, y_0, m) - F_1(A\cos\tau, A\sin\tau, 0) = -M_1$$

будут содержать $m^2$ в качестве множителя. Равенства (16′) и (17′) могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} F(A\cos\tau, A\sin\tau, 0) &= M, \\ F_1(A\cos\tau, A\sin\tau, 0) &= M_1 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

и могут быть проинтегрированы последовательными приближениями; пренебрежем прежде всего величиной $m$, так что правые части будут равны нулю. Далее, заменим в правых частях $\delta x$ и $\delta y$ их значениями из первого приближения, поэтому правые части будут известными и уравнения (18) будут иметь вид линейных уравнений с правыми частями; мы получим с помощью этих уравнений новое приближенное значение и т. д.

Легко видеть, что левые части имеют вид

$$\left.\begin{aligned} A(-\sin\tau\,\delta x'+\cos\tau\,\delta y')+C(\cos\tau\,\delta x+\sin\tau\,\delta y),\\ B(\cos\tau\,\delta x'+\sin\tau\,\delta y')+D(-\sin\tau\,\delta x+\cos\tau\,\delta y),\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где $A$, $B$ (уже определенные), так же как и $C$, $D$, суть числовые коэффициенты, зависящие от $p$, и их легко найти.

Уравнения (18) суть линейные уравнения с правыми частями, и поэтому можно проинтегрировать сначала линейные уравнения без правых частей, т. е. уравнения, получаемые в результате приравнивания нулю выражений (19). Если положим

$$\xi=\zeta^{-1}\delta u=\zeta^{-1}(\delta x+i\,\delta y),$$
$$\eta=\zeta^{-1}\delta s=\zeta^{-1}(\delta x-i\,\delta y),$$

то эти уравнения без правых частей примут вид

$$\left.\begin{aligned}\xi'+\alpha\xi+\beta\eta=0,\\ \eta'+\gamma\xi+\delta\eta=0,\end{aligned}\right\}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — постоянные коэффициенты; уравнения (18) примут вид

$$\xi'+\alpha\xi+\beta\eta=P,$$
$$\eta'+\gamma\xi+\delta\eta=Q,$$

где $P$ и $Q$ — известные функции. Эти уравнения легко интегрируются.

348. Можно также воспользоваться системой (16'), (17') и методом последовательных приближений, который мы изложили при определении $c$ и коэффициентов $b_k$ и $c_k$. Для этого достаточно применить метод § 335.

Определим, например, изложенным способом частное решение уравнений (16'), (17'), которое при $\tau=0$ дает в качестве начальных значений

$$\delta x=1,\qquad \delta y=0.$$

Тогда будем иметь

$$\delta x+i\,\delta y=\sum b_k\zeta^{c+2k+1}+\sum c_k\zeta^{-c-2k-1},$$

причем

$$\sum b_k+\sum c_k=1.$$

Значение $\delta x$ при $\tau=\pi$ будет тогда равно

$$-\cos c\pi,$$

а это определяет $c$.

# ЧЛЕНЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

**349.** Определение членов высшего порядка может быть выполнено по методу § 341. Допустим, что наши координаты определены с точностью до членов $k$-го порядка включительно, и пусть, например, $x = x_k$ есть полученное таким образом приближенное значение; положим $x = x_k + \delta x$ и будем определять $\delta x$ с точностью до членов $(k+1)$-го порядка включительно; для этого составим уравнения, аналогичные уравнениям (2) из § 341; это суть линейные уравнения с правыми частями. Левые части этих уравнений всегда одни и те же, каково бы ни было $k$. Мы научились интегрировать уравнения без правой части в главах XXVI и XXVII, определяя члены первого порядка. Интегрирование уравнений с правой частью и, следовательно, определение членов высшего порядка может быть получено простыми квадратурами.

Однако имеется одно осложнение; мы имеем не только три неизвестные функции, которыми являются наши координаты $x$, $y$, $z$, а имеем еще две неизвестные постоянные, $g$ и $c$, от которых зависят движения узла и перигея.

Эти две постоянные разложимы по степеням

$$E_1^2, \quad E_2^2, \quad E_3^2, \quad \alpha^2.$$

До сих пор в главах XXVI и XXVII, так же как мы отмечали в § 340, мы определили только первые члены этих разложений, которые не зависят от $E_i^2$ и $\alpha^2$.

Предположим теперь, что $g$ и $c$ определены с точностью до членов $(k-1)$-го порядка включительно, и пусть $g_{k-1}$ и $c_{k-1}$ — эти приближенные значения; пусть, далее, $g_{k-1} + \delta g$, $c_{k-1} + \delta c$— их приближенные значения с точностью до членов $k$-го порядка включительно; $\delta g$ и $\delta c$ нужно определить одновременно с $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$. Мы выполним это определение, как будет показано далее, таким образом, чтобы исчезали вековые члены.

**350.** Вспомним, в чем состоит метод Лагранжа для интегрирования уравнений с правой частью. Чтобы показать существо метода, рассмотрим систему третьего порядка, состоящую из трех уравнений первого порядка. Пусть $X$, $Y$, $Z$ суть три линейные комбинации переменных $x$, $y$, $z$; пусть $A$, $B$, $C$ — известные функции, $x'$, $y'$, $z'$ — производные $x$, $y$, $z$; наши три уравнения могут быть написаны в виде

$$x'+X=A, \quad y'+Y=B, \quad z'+Z=C. \tag{1}$$

Предположим, что уравнения без правых частей

$$x'+X=y'+Y=z'+Z=0 \tag{2}$$

проинтегрированы, и пусть

$$x=x_i, \quad y=y_i, \quad z=z_i \quad (i=1, 2, 3)$$

суть три независимых решения системы (2). Положим

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3,$$
$$y=\sum\lambda_iy_i, \quad z=\sum\lambda_iz_i$$

и будем определять новые неизвестные функции $\lambda_i$. Система (1) примет вид

$$\sum\lambda_i'x_i=A, \quad \sum\lambda_i'y_i=B, \quad \sum\lambda_i'z_i=C. \tag{3}$$

Из нее выведем $\lambda_i'$ в виде

$$\lambda_i'=\alpha_iA+\beta_iB+\gamma_iC \quad (i=1, 2, 3),$$

где $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ — неизвестные функции $t$, так что определение $\lambda_i$ и, следовательно, определение $x$, $y$, $z$ приводится к квадратурам. Функции $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ могут быть получены решением уравнений первой степени (3).

Таков классический метод, но имеются случаи, в которых возможны упрощения. Допустим прежде всего, что имеется система второго порядка вместо системы третьего порядка, так что уравнения (3) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1'x_1+\lambda_2'x_2=A,\\ \lambda_1'y_1+\lambda_2'y_2=B.\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Допустим также, что между решениями однородной системы существует билинейное соотношение

$$x_1y_2-y_1x_2=H,$$

где $H$ — известная функция $t$. Будем иметь

$$\lambda_1'H=Ay_2-Bx_2,$$

откуда

$$\alpha_1=\frac{y_2}{H}, \qquad \beta_1=-\frac{x_2}{H}$$

и

$$\alpha_2=-\frac{y_1}{H}, \qquad \beta^2=\frac{x_1}{H}.$$

Предположим, например, что имеем уравнение вида

$$x'' + \Theta x = B,$$

которое можно заменить системой

$$x' - y = 0, \qquad y' + \Theta x = B;$$

тогда будем иметь

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1,$$

откуда

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$
$$\lambda_1' = -x_2 \cdot B, \qquad \lambda_2' = x_1 \cdot B.$$

**351.** Пусть имеем систему канонических уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X}, \qquad \frac{dX}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{4}$$

с сопряженными переменными

$$x, \ y, \ z,$$
$$X, \ Y, \ Z.$$

Пусть $x_0$, $X_0$, ... — некоторое частное решение этих уравнений; положим

$$x = x_0 + \delta x, \qquad X = X_0 + \delta X, \ \ldots$$

и, пренебрегая квадратами $\delta x$, ..., образуем уравнения в вариациях для уравнений (4); обозначая через $(x)$, $(X)$, ..., линейные функции шести переменных $x$, $X$, ..., получим эти уравнения в вариациях в виде

$$\delta x' + (x) = 0, \qquad \delta X' + (X) = 0, \ \ldots \tag{5}$$

Пусть

$$\delta x = x_i, \quad \delta X = X_i, \ \ldots \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

суть шесть независимых решений уравнений (5). Рассмотрим теперь уравнения с правыми частями

$$\delta x' + (x) = A, \quad \delta X' + (X) = A^*, \ \ldots, \tag{6}$$

где $A$, $A^*$ — известные функции. Положим

$$x = \sum \lambda_i x_i, \quad X = \sum \lambda_i X_i, \ \ldots,$$

откуда

$$\sum \lambda_i' x_i = A, \quad \sum \lambda_i' X_i = A^*, \ \ldots$$

и

$$\lambda_i' = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C + \alpha_i^* A^* + \beta_i^* B^* + \gamma_i^* C^*.$$

Чтобы определить функции $\alpha, \ldots,$ вспомним, что согласно § 344 имеем равенство

$$(x_i X_k - x_k X_i) + (y_i Y_k - y_k Y_i) + (z_i Z_k - z_k Z_i) = \text{const},$$

которое можно написать так:

$$\sum (x_i X_k - x_k X_i) = \text{const}. \tag{7}$$

Частные решения $x_i, \ldots$ системы можно выбрать таким образом, чтобы постоянная в правой части была равна единице при $i = 1$, $k = 2$; $i = 3$, $k = 4$; $i = 5$, $k = 6$ и равна нулю во всех других случаях.

Пользуясь в этом случае уравнениями (7), легко находим

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = X_2, \quad \beta_1 = Y_2, \quad \gamma_1 = Z_2,\\
&\alpha_1^* = -x_2, \ \beta_1^* = -y_2, \ \gamma_1^* = -z_2,\\
&\alpha_2 = -X_1, \ldots,\\
&\alpha_2^* = x_1, \ldots
\end{aligned}$$

и также

$$\alpha_3 = X_4, \quad \alpha_4 = -X_3, \quad \alpha_5 = X_6, \quad \alpha_6 = -X_5.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

352. Вернемся к каноническим уравнениям (23) § 320:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial X}, \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{\partial F'}{\partial x}. \tag{8}$$

Допустим, что решение с точностью до членов $k$-го порядка (относительно $E$ и $\alpha$) найдено. Пусть

$$x = x_k, \quad y = y_k, \quad z = z_k, \quad X = X_k, \ldots$$

будет это решение. Необходимо, как мы объясняли в начале главы, учесть постоянные $c$ и $g$. Предположим, что мы имеем приближенные значения этих постоянных

$$c = c_{k-1}, \quad g = g_{k-1}$$

с точностью до членов $(k-1)$-го порядка включительно. Прежде всего мы утверждаем, что погрешность, допущенная в обеих частях уравнений (8), будет $(k+1)$-го порядка. Это очевидно для правой части, так как мы заменили в правой части неизвестные их приближенными значениями с точностью до членов $k$-го порядка включительно. Левые части, в которых фигурируют постоянные $c$ и $g$, требуют немного больше внимания.

В самом деле, $x$, например, есть периодическая функция четырех аргументов $w_i = n_i t + \omega_i$. Поэтому будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \sum n_i \frac{\partial x}{\partial w_i},$$

но так как

$$n_3=(c-1-m)(n_1-n_2), \qquad n_4=(g-1-m)(n_1-n_2),$$

то $\frac{dx}{dt}$ зависит от $c$ и $g$. Какова погрешность, получаемая при замене $x, c$ и $g$ приближенными значениями $x_k$, $c_{k1-}$ и $g_{k-1}$? Если заменяем $x$ величиной $x_k$, то делаем погрешность $(k+1)$-го порядка; далее, если заменим $c$ величиной $c_{k-1}$, то мы допускаем погрешность

$$(n_1-n_2)(c-c_{k-1})\frac{\partial x_k}{\partial w_3}.$$

Разность $c-c_{k-1}$ есть величина $k$-го порядка; тогда $\frac{\partial x_k}{\partial w_3}$ — первого порядка, так как $x_k - x_0$ — первого порядка, и $\frac{\partial x_0}{\partial w_3}$ равна нулю, так как $x_0$ зависит от $w_1-w_2$. Поэтому погрешность будет $(k+1)$-го порядка; то же самое имеет место при замене $g$ на $g_{k-1}$, что и требовалось доказать.

Обозначим через

$$A,\ A^*,\ B,\ B^*,\ C,\ C^* \tag{9}$$

значения выражений

$$-\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F'}{\partial X}, \quad -\frac{dX}{dt}-\frac{\partial F'}{\partial x}, \quad -\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F'}{\partial Y}, \ \ldots$$

после указанной замены.

Выражения (9) будут и з в е с т н ы м и функциями, которые будут $(k+1)$-го порядка малости.

Положим тогда

$$x=x_k+\delta x, \quad X=X_k+\delta X, \quad c=c_{k-1}+\delta c \ \ldots$$

и найдем приближения $(k+1)$-го порядка для $x$ и $k$-го порядка для $c$. Мы можем пренебречь квадратами $\delta x$, $\delta c$, ..., так что наши уравнения примут вид

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)-\delta\left(\frac{\partial F'}{\partial X}\right)=A, \quad \delta\left(\frac{dX}{dt}\right)+\delta\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)=A^*, \ldots \tag{10}$$

Правые части суть известные функции; что касается левых частей, то они являются линейными выражениями относительно неизвестных и их производных. Имеем, например,

$$\delta\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F'}{\partial x^2}\delta x+\frac{\partial^2 F'}{\partial x\,\partial X}\delta X+\ldots,$$

где в производных второго порядка функции $F'$ неизвестные должны быть заменены приближенными значениями $x=x_0$, $X=X_0$, .

(одновременно $E$ и $\alpha$ должны быть заменены нулями), как это мы объясняли в § 341. С другой стороны,

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\sum n_i\frac{\partial\delta x}{\partial w_i}+\sum \delta n_i\frac{\partial x}{\partial w_i}.$$

В первом члене $\sum n_i\frac{\partial\delta x}{\partial w_i}$ мы можем заменить $n_3$ и $n_4$ их приближенными значениями

$$(c_0-1-m)(n_1-n_2),\quad (g_0-1-m)(n_1-n_2),$$

выведенными из анализа, сделанного в главах XXVI и XXVII. Погрешность величины $n_i$ будет первого порядка (и даже второго), и так как $\delta x$ есть величина $(k+1)$-го порядка малости, то погрешность произведения $n_i\frac{\partial\delta x}{\partial w_i}$ будет величиной не меньше $(k+2)$-го порядка малости.

Во втором члене $\sum\delta n_i\frac{\partial x}{\partial w_i}$, в который входят

$$\delta n_3=(n_1-n_2)\,\delta c,\quad \delta n_4=(n_1-n_2)\,\delta g,$$

можно заменить $x$ величиной $x_1$; погрешность, получаемая при этом, будет второго порядка, и так как $\delta n_i$ есть величина $k$-го порядка малости, то погрешность произведения будет величиной $(k+2)$-го порядка малости.

Если перенести член $\sum\delta n_i\frac{\partial x_1}{\partial w_i}$ в правую часть, то уравнения (10) примут вид

$$\left.\begin{aligned}&\sum n_i\frac{\partial\delta x}{\partial w_i}-\delta\left(\frac{\partial F'}{\partial X}\right)=A-\sum\delta n_i\frac{\partial x_1}{\partial w_i},\\&\sum n_i\frac{\partial\delta X}{\partial w_i}+\delta\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)=A^*-\sum\delta n_i\frac{\partial X_1}{\partial w_i},\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Левые части этих уравнений остаются теми же самыми для всех приближений.

При вычислении членов первого порядка мы полагаем $\alpha$, $E_3$, $\delta c$, $\delta g$ и, следовательно, $\delta n_i$ (так как в этом приближении $c$ и $g$ приводятся к $c_0$ и $g_0$), а также правые части равными нулю; в таком случае уравнения (11) должны приводиться к тем уравнениям, которые мы интегрировали в главах XXVI и XXVII и в которых мы определили именно члены первой степени, т. е. левые части уравнений (11) приводятся к выражениям

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \delta x}{\partial t}-\delta X-n_2\,\delta y,\\
&\frac{\partial \delta X}{\partial t}+(m_1+m_7)\,\delta\left(\frac{x}{r^3}\right)-2n_2^2\delta x-n_2\,\delta Y,\\
&\frac{\partial \delta y}{\partial t}-\delta Y+n_2\,\delta x,\\
&\frac{\partial \delta Y}{\partial t}+(m_1+m_7)\,\delta\left(\frac{y}{r^3}\right)+n_2^2\,\delta y+n_2\,\delta X,\\
&\frac{\partial \delta z}{\partial t}-\delta Z,\\
&\frac{\partial \delta Z}{\partial t}+(n_1-n_2)\,\Theta\,\delta z
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

[см. уравнения (1) из § 323 главы XXV, уравнения (1) из § 331 главы XXVI, уравнения (6) из § 342 главы XXVII]. Заметим, между прочим, что справедливы равенства

$$\varkappa\delta\left(\frac{x}{r^3}\right)=A\,\delta x+B\,\delta y,$$

$$\varkappa\delta\left(\frac{y}{r^3}\right)=B\,\delta x+C\,\delta y,$$

где $A$, $B$, $C$ имеют тот же смысл, что и в уравнениях (6) главы XXVII; мы пишем также ради сокращения

$$\frac{\partial}{\partial t}=\sum n_i\frac{\partial}{\partial w_i},$$

в которых $n_i$ заменяются приближенными значениями

$$n_1,\ n_2,\ (c_0-1-m)(n_1-n_2),\ (g_0-1-m)(n_1-n_2).$$

**353.** Если допустим на один момент, что постоянные $\delta c$ и $\delta g$ (и, следовательно, $\delta n_i$) заданы, то правые части известны; в левых частях будут выражения (12), а мы умеем интегрировать уравнения без правых частей; таким образом, задачу можно считать решенной, если применить классический прием, изложенный в § 350. Вместе с тем мы должны сделать следующее замечание.

Правые части представляются в виде периодических функций от четырех аргументов $w_i$, но в левые части входят не производные

$$\frac{d}{dt}=\sum n_i\frac{\partial}{\partial w_i},$$

а производные

$$\frac{d}{dt}=\sum n_i^0\frac{\partial}{\partial w_i},$$

в которых $n_i^0$ суть приближенные значения

$$n_1^0=n_1, \quad n_2^0=n_2,$$

$$n_3^0=(c_0-1-m)(n_1-n_2), \quad n_4^0=(g_0-1-m)(n_1-n_2).$$

Это, впрочем, ничего не изменяет в вычислениях; только нужно, перед тем как интегрировать, заменить в правых частях $w_i$ не величинами $n_i t+\overline{\omega}_i$, а $n_i^0 t+\overline{\omega}_i$.

Итак, предположим, что образованы функции, которые мы в § 350 обозначали через $\lambda_i'$,

$$\lambda_i'=\alpha_i A+\ldots$$

Это заданные периодические функции переменных $w$; поэтому мы должны написать не

$$\frac{d\lambda_i}{dt}=\sum n_k\frac{\partial\lambda_i}{\partial w_k}=\alpha_i A+\ldots,$$

а

$$\frac{d\lambda_i}{dt}=\sum n_k^0\frac{\partial\lambda_i}{\partial w_k}=\alpha_i A+\ldots$$

Таким образом, если

$$\alpha_i A+\ldots=\sum hE^{\sqrt{-1}\cdot\Sigma k_\alpha w_\alpha}, \tag{13}$$

где $k_\alpha$ — целые коэффициенты, то из них будем иметь не

$$\lambda_i=\sum\frac{hE^{\sqrt{-1}\,\Sigma k_\alpha w_\alpha}}{\sqrt{-1}\sum k_\alpha n_\alpha},$$

а

$$\lambda_i=\sum\frac{h\cdot E^{\sqrt{-1}\Sigma k_\alpha w_\alpha}}{\sqrt{-1}\sum k_\alpha n_\alpha^0}.$$

Этот анализ предполагает, что правая часть (13) не содержит постоянного члена. Далее, в § 356 мы увидим, как можно это сделать.

**354.** Заметим, что четыре первых уравнения (11) образуют систему, которая зависит лишь от $\delta x$, $\delta y$, $\delta X$, $\delta Y$, тогда как последние два уравнения образуют систему, которая зависит только от $\delta z, \delta Z$. Поэтому эти две системы могут рассматриваться отдельно.

Заметим далее, что мы имеем случай, к которому применим метод § 351, так как наши уравнения без правых частей являются уравнениями в вариациях для канонических уравнений.

Рассмотрим четыре частных решения (7), (12), (12′) из главы XXVII; пусть

$$\delta x = \xi_1,\ \delta y = \eta_1;\ \delta x = \xi_2,\ \delta y = \eta_2$$

суть два решения (7), или эти же решения, умноженные на некоторый коэффициент, который мы можем выбрать произвольно. Пусть $\delta x = \xi_3$, $\delta y = \eta_3$; $\delta x = \xi_4$, $\delta y = \eta_4$ суть такие же решения (12) и (12′). Пусть

$$\delta X = \xi_i^*, \quad \delta Y = \eta_i^*$$

есть значения $\delta X$ и $\delta Y$, соответствующие $\delta x = \xi_i$, $\delta y = \eta_i$. Мы будем иметь билинейное соотношение

$$(\xi_i \xi_k^* - \xi_i^* \xi_k) + (\eta_i \eta_k^* - \eta_i^* \eta_k) = \text{const},$$

которое является не чем иным, как соотношением (14) из предыдущей главы.

Нам известно, что постоянная в правой части равна нулю, кроме случаев, когда $i = 1$, $k = 2$ или $i = 3$, $k = 4$. Мы можем выбрать произвольные коэффициенты, о которых говорили [и на которые умножаются решения (7), (12) и (12′)], таким образом, чтобы в этих двух случаях постоянная в правой части была бы равна единице. Это наиболее удобно для изложения, но при вычислениях можно сделать и другой выбор; например, для случая $i = 3$, $k = 4$ более целесообразно предположить, что постоянная равна $\sqrt{-1}$.

Пусть

$$L,\ L^*,\ M,\ M^*,\ N,\ N^*$$

суть правые части шести уравнений (11), такие, что

$$L = A - \sum \delta n_i \frac{\partial x_1}{\partial w_i}.$$

Применим метод § 351; получим

$$\delta x = \sum \lambda_i \xi_i, \quad \delta X = \sum \lambda_i \xi_i^*,$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dt} &= \xi_2^* L - \xi_2 L^* + \eta_2^* M - \eta_2 M^*,\\
\frac{d\lambda_2}{dt} &= -\xi_1^* L + \xi_1 L^* - \eta_1^* M + \eta_1 M^*,\\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= \xi_4^* L - \xi_4 L^* + \eta_4^* M - \eta_4 M^*,\\
\frac{d\lambda_4}{dt} &= -\xi_3^* L + \xi_3 L^* - \eta_3^* M + \eta_3 M^*.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

**355.** Этот же метод применим и ко второй системе, составленной из последних двух уравнений (11). Пусть

$$z=\zeta_5, \quad z=\zeta_6$$

— два решения (2) уравнений (1) из главы XXVI, умноженные в случае надобности на произвольно выбранный постоянный множитель. Наши уравнения без правых частей [составленные с $\delta z$ так же, как и уравнения (1) с $z$] будут допускать два решения:

$$\delta z=\zeta_5, \quad \delta Z=\zeta_5^*,$$
$$\delta z=\zeta_6, \quad \delta Z=\zeta_6^*,$$

между которыми существует билинейное соотношение

$$\zeta_5\zeta_6^*-\zeta_5^*\zeta_6=\text{const}.$$

Естественно, нельзя смешивать $\zeta_i$ с $\zeta=E^{i\tau}$.

Можно предположить, что постоянная в правой части равна 1. Тогда будем иметь

$$\delta z=\sum\lambda_i\zeta_i,$$

где

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda_5}{dt}&=\zeta_6^*N-\zeta_6N^*,\\ \frac{d\lambda_6}{dt}&=-\zeta_5^*N+\zeta_5N^*.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

**356.** Нужно, как мы видели в конце § 353, чтобы правые части уравнений (14) и (15), которые являются периодическими функциями $w$, не содержали бы постоянных членов. Рассмотрим эти уравнения последовательно и начнем с $\frac{d\lambda_2}{dt}$. Мы утверждаем, что это выражение есть нечетная функция $w$ и она не содержит постоянного члена. В самом деле, легко заметить, что

$$\xi_1^*, \ \eta_1, \ L^*, \ M$$

суть четные функции, тогда как

$$\xi_1, \ \eta_1^*, \ L, \ M^*$$

— нечетные функции, и это доказывает сделанное предположение; поэтому в $\lambda_2$ не может появиться вековой член.

Перейдем к $\lambda_1$; нам известно, что с точностью до постоянного множителя $\xi_1$ равна $\frac{\partial x_0}{\partial\tau}$, а $\xi_2$ — величине

$$-\frac{\tau}{m}\cdot\frac{\partial x_0}{\partial\tau}+\frac{\partial x_0}{\partial m},$$

поэтому мы можем выбрать постоянные множители таким образом, чтобы имели место равенства

$$\xi_2 = t\xi_1 + (\xi_2), \quad \xi_2^* = t\xi_1^* + (\xi_2^*),$$
$$\eta_2 = t\eta_1 + (\eta_2), \quad \eta_2^* = t\eta_1^* + (\eta_2^*),$$

где $\xi_1$, $\eta_1$, $\xi_1^*$, $\eta_1^*$, $(\xi_2)$, $(\eta_2)$, $(\xi_2^*)$, $(\eta_2^*)$ — периодические функции $\tau$. Положим тогда

$$\lambda_1 = -t\lambda_2 + \mu_1,$$

так что

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -t\frac{d\lambda_2}{dt} - \lambda_2 + \frac{d\mu_1}{dt},$$

откуда

$$\frac{d\mu_1}{dt} = \lambda_2 + (\xi_2^*)L - (\xi_2)L^* + (\eta_2^*)M - (\eta_2)M^*.$$

Правая часть есть периодическая функция $w$, но на этот раз четная; в эту правую часть входит $\lambda_2$, которая определена в результате интегрирования, т. е. с точностью до постоянной. Мы можем распорядиться этой постоянной таким образом, чтобы постоянный член в правой части исчез. При этом условии $\mu_1$ не будет содержать векового члена.

Впрочем, первые два члена в $\delta x$

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$$

приводятся к

$$\mu_1\xi_1 + \lambda_2(\xi_2),$$

так что имеем

$$\delta x = \mu_1\xi_1 + \lambda_2(\xi_2) + \lambda_3\xi_3 + \lambda_4\xi_4.$$

357. Рассмотрим теперь $\frac{d\lambda_3}{dt}$ и $\frac{d\lambda_4}{dt}$. Мы утверждаем, что можем выбрать $\delta c$ так, чтобы сразу исчезли постоянные члены в обоих выражениях. Мы имеем

$$L = A - \sum \delta n_i \frac{\partial x_1}{\partial w_i}.$$

Так как $\delta n_1$ и $\delta n_2$ равны нулю и $\frac{\partial x_1}{\partial w_4} = 0$ (потому что $x_1$ зависит только от $\tau = w_1 - w_2$ и $w_3$), последнее слагаемое в правой части сводится к

$$-\delta n_3 \frac{\partial x_1}{\partial w_3} = -\delta c(n_1 - n_2)\frac{\partial x_1}{\partial w_3}.$$

Имеем также

$$x_1 = E_1(\xi_3 + \xi_4).$$

Итак, мы видим, что

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \xi_4^* L - \xi_4 L^* + \eta_4^* M - \eta_4 M^*$$

можно разделить на две части и что можно написать

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \varphi_3 - \psi_3 \cdot \delta c\,(n_1 - n_2),$$

где $\varphi_3$ — значение $\frac{d\lambda_3}{dt}$, в котором

$$L,\ L^*,\quad M,\ M^*$$

заменены величинами

$$A,\ A^*,\quad B,\ B^*,$$

а $\psi_3$ — то же самое при замене $L$, $L^*$, $M$, $M^*$ величинами

$$\frac{\partial x_1}{\partial w_3},\quad \frac{\partial X_1}{\partial w_3},\quad \frac{\partial y_1}{\partial w_3},\quad \frac{\partial Y_1}{\partial w_3}.$$

Будем иметь также

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = \varphi_4 - \psi_4 \cdot \delta c \cdot (n_1 - n_2),$$

где $\varphi_4$ и $\psi_4$ суть значения $\frac{d\lambda_4}{dt}$, в котором произведены те же замены. Мы хотим распорядиться величиной $\delta c$ таким образом, чтобы обратить в нуль постоянный член в $\frac{d\lambda_3}{dt}$; утверждаем, что значение $\delta c$, которое обращает в нуль этот член, вещественно, и оно обращает в нуль одновременно и постоянный член в $\frac{d\lambda_4}{dt}$.

Мы допустили, что

$$\begin{aligned}
\xi_3 + i\eta_3 &= h \sum b_k \zeta^{c+2k+1},\\
\xi_3 - i\eta_3 &= h \sum c_k \zeta^{c+2k+1},\\
\xi_4 - i\eta_4 &= h \sum b_k \zeta^{-c-2k-1},\\
\xi_4 + i\eta_4 &= h \sum c_k \zeta^{-c-2k-1};
\end{aligned}$$

коэффициенты $b_k$ и $c_k$ вещественны, $h$ — некоторый постоянный коэффициент, которым мы можем распоряжаться так, чтобы некоторая постоянная равнялась 1.

Действительно, если заменить $w$ на $-w$, то $x$, которая является четной функцией $w$, не изменится; и наоборот, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{\partial x}{\partial w}$, $X$, $y$,... изменят знаки.

$$A,\ \frac{\partial x_1}{\partial w_3},\ B^*,\ \frac{\partial Y_1}{\partial w_3}$$

изменят знаки,

$$A^*,\ \frac{\partial X_1}{\partial w_3},\quad B,\quad \frac{\partial y_1}{\partial w_3}$$

не изменятся. $\frac{\xi_3}{h}$ и $\frac{\eta_3^*}{h}$ заменятся величинами $\frac{\xi_4}{h}$ и $\frac{\eta_4^*}{h}$, тогда как $\frac{\eta_3}{h}$ и $\frac{\xi_3^*}{h}$ заменятся величинами $-\frac{\eta_4}{h}$ и $-\frac{\xi_4^*}{h}$. Поэтому $\frac{\varphi_3}{h}$ заменится на $-\frac{\varphi_4}{h}$, $\frac{\psi_3}{h}$ — на $-\frac{\psi_4}{h}$, $\frac{\varphi_4}{h}$ — на $-\frac{\varphi_3}{h}$, $\frac{\psi_4}{h}$ — на $-\frac{\psi_3}{h}$. Следовательно, постоянный член в $\frac{\varphi_3}{h}$, например, равен постоянному члену в $-\frac{\varphi_4}{h}$.

Если теперь заменить $i$ на $-i$, то $\frac{\xi_3}{h}$, $\frac{\eta_3}{h}$, $\frac{\xi_3^*}{h}$, $\frac{\eta_3^*}{h}$ поменяются местами с $\frac{\xi_4}{h}$, $\frac{\eta_4}{h}$, $\frac{\xi_4^*}{h}$, $\frac{\eta_4^*}{h}$; величины $A$, $A^*$, $\frac{\partial x_1}{\partial w_3}$ ..., которые являются вещественными, не изменятся.

Поэтому $\frac{\varphi_3}{h}$, $\frac{\psi_3}{h}$, $\frac{\varphi_4}{h}$, $\frac{\psi_4}{h}$ заменятся на $-\frac{\varphi_4}{h}$, $-\frac{\psi_4}{h}$, $-\frac{\varphi_3}{h}$, $-\frac{\psi_3}{h}$. Отсюда следует, что постоянный член в $\frac{\varphi_3}{h}$ — мнимый и сопряжен с постоянным членом в $-\frac{\varphi_4}{h}$.

Если постоянный член в $\frac{\varphi_3}{h}$, с одной стороны, равен постоянному члену в $-\frac{\varphi_4}{h}$, а с другой стороны, является мнимым и сопряженным с постоянным членом в $-\frac{\varphi_4}{h}$, то отсюда вытекает, что эти два члена равны между собой и вещественны. То же самое имеет место и относительно величин $\psi_3$ и $\psi_4$.

Итак, пусть

$$\alpha,\ \beta,\ -\alpha,\ -\beta$$

суть постоянные члены в

$$\frac{\varphi_3}{h},\ \frac{\psi_3}{h},\ \frac{\varphi_4}{h},\ \frac{\psi_4}{h}.$$

Они вещественны, и достаточно будет взять

$$\delta c = \frac{\alpha}{\beta(n_1 - n_2)},$$

чтобы обратить в нуль сразу постоянный член в $\frac{d\lambda_3}{dt}$ и постоянный член в $\frac{d\lambda_4}{dt}$. Таким образом, вековых членов не будет ни в $\lambda_3$, ни в $\lambda_4$, что и требовалось доказать.

Покажем таким же образом, что можно выбрать $\delta g$ так, чтобы не было вековых членов ни в $\lambda_5$, ни в $\lambda_6$. В самом деле, правая часть пятого уравнения (11) имеет вид

$$N = C - \sum \delta n_i \frac{\partial z_i}{\partial w_i},$$

где

$$\sum \delta n_i \frac{\partial z_1}{\partial w_i} = \delta n_4 \frac{\partial z_1}{\partial w_4} = \delta g\,(n_1 - n_2)\frac{\partial z_1}{\partial w_4}.$$

Дальнейшие соображения проводятся так же, как и для $\lambda_3$ и $\lambda_4$, только роль $\delta c$ играет $\delta g$, роль $L$ и $L^*$ — $N$ и $N^*$, роль $\zeta_3$ и $\zeta_4$ — $\zeta_5$ и $\zeta_6$ и т. д.

358. Как мы видели в конце § 353, интегрирование вводит малый делитель

$$\sum k_\alpha \cdot n_\alpha^0,$$

где $k_\alpha$ — целые числа; так как

$$n_3^0 = c_0\,(n_1 - n_2)$$

и

$$n_4^0 = g_0\,(n_1 - n_2)$$

разложимы по степеням $m^2$, то этот малый делитель также будет разложим по степеням $m^2$.

Первые члены разложения суть

$$n_1 = n_1^0 = (1+m)(n_1 - n_2), \quad n_2 = n_2^0 = m\,(n_1 - n_2),$$

$$n_3^0 = (n_1 - n_2)\left(\frac{3}{4}m^2 + \ldots\right),$$

$$n_4^0 = (n_1 - n_2)\left(-\frac{3}{4}m^2 + \ldots\right),$$

и так как

$$c = 1 + m + \frac{3}{4}m^2 + \ldots, \quad g = 1 + m - \frac{3}{4}m^2 + \ldots,$$

то имеем

$$\frac{1}{n_1 - n_2}\sum k_\alpha n_\alpha^0 = k_1 + (k_1 + k_2)\,m + \frac{3}{4}(k_3 - k_4)\,m^2 + \ldots$$

Итак, правая часть будет делиться на $m$, если $k_1 = 0$; будет делиться на $m^2$, если $k_1 = k_2 = 0$, т. е. если соответствующий член зависит только от долготы перигея и узла; в обоих случаях будем иметь так называемый *малый аналитический делитель*. Наконец, малый делитель будет делиться на $m^3$, если $k_1 = k_2 = 0$ и $k_3 = k_4$, т. е. когда он зависит только от суммы долгот перигея и узла. Будем тогда говорить, что имеем *весьма малый аналитический делитель*.

Но здесь оказывается, что члены с $m^3$ имеют очень большие коэффициенты, так что $c_0 - 1 - m$, вместо того чтобы быть приблизительно равным $\frac{3}{4}m^2$ и, следовательно, величине $g_0 - 1 - m$, будет почти в два раза больше. Из этого следует, что весьма малые аналитические делители, хотя и делятся на $m^3$, численно будут иметь порядок $m^2$. Если, наоборот, имеем $k_1 = k_2 = 0$, $2k_3 = k_4$, то делитель, хотя он и не делится на $m^3$, численно будет порядка $m^3$. Это будет *весьма малым числовым делителем* (неравенство Лапласа, см. Tisserand, «Traité de la Mécanique céleste», т. III, стр. 158).

При численном вычислении коэффициентов существенными являются весьма малые числовые делители. И наоборот, если разложить, как это делал Делоне, эти коэффициенты по степеням $m$, то необходимо беспокоиться о весьма малых аналитических делителях.

Весьма малые аналитические делители появляются впервые в членах $E_1E_2^2E_3^4$ или в $E_1^2E_2E_3^4$, а весьма малые числовые делители появляются впервые в членах $E_2^2E_3^3\alpha$, $E_1E_2^4E_3^6$, $E_1E_2E_3^3\alpha$ или $E_1^2E_2^3E_3^6$.

**359.** Такова основа метода Брауна.

Мы не будем настаивать на детальных усовершенствованиях, которые можно внести, а лишь укажем на следующие основные идеи.

1. Вместо четырех линейных уравнений первого порядка с правыми частями Браун использует два линейных уравнения второго порядка с правыми частями (полученные в результате исключения $X$ и $Y$); из этого вытекает, что выражения в $\frac{d\lambda_i}{dt}$ несколько видоизменены и представляются в виде суммы только двух членов, а не четырех.

2. Вместо $\delta x$ и $\delta y$ он берет в качестве неизвестных мнимые величины

$$\delta u = \delta x + i\delta y, \quad \delta s = \delta x - i\delta y.$$

3. Вместо того чтобы использовать тригонометрические функции аргументов, кратных $w$, он упрощает обозначения, вводя переменную

$$\zeta = E^{i\tau}.$$

4. Для приближений высшего порядка он возвращается к приему, с помощью которого Хилл перешел от уравнений (2) к уравнениям (5) главы XXV. Тогда выкладки делаются немного проще.

Мы ограничимся тем, что скажем, что метод применим как при вычислении членов первого порядка, так и при вычислении членов высшего порядка.

Для более подробного знакомства мы отсылаем читателя к его оригинальной работе (Brown, Memoirs of the Royal Astronomical Society, т. LIII, LIV, LVII).

Можно поставить вопрос, не появятся ли в процессе вычисления члены, содержащие в качестве множителя отрицательные степени $m$ в случае малых делителей, кратных $m^2$ или $m^3$? Можно показать, что такие члены могут появиться только, когда будут вводиться весьма малые аналитические делители. Из этого следует, согласно предыдущему параграфу, что такие делители могут появиться только в членах высших степеней; этого не может быть, если предположить, что $E_2 = 0$ или $E_3 = 0$, так как в этих случаях весьма малых аналитических делителей нет, и самое большее, что может быть, это то, что малые аналитические делители будут делиться только на $m^2$. Доказательство этого утверждения имеется в «Bulletin astronomique», т. XXV, стр. 321.

# ВТОРОЙ МЕТОД

**360.** Второй метод, который мы будем излагать, представляет некоторые выгоды, особенно когда желают получить не только числовые значения коэффициентов, но и их аналитические разложения в функции от $m$, как это делал Делоне.

Выгодно использовать вместо аргументов $w_i$ следующие величины:

$$\tau = w_1 - w_2, \quad \tau_1 = w_1 + w_3, \quad \tau_2 = w_1 + w_4, \quad \tau_3 = w_2.$$

Таким образом, показатель величины $E_i$ в члене, зависящем от синуса или косинуса аргумента $p\tau + p_1\tau_1 + p_2\tau_2 + p_3\tau_3$, будет не меньше $|p_i|$.

Будем исходить из уравнения (25) из § 320:

$$\sum x\, dX - d\Omega'' = \sum A_i'\, dw_i - \frac{\Phi_1'\, dw_2}{n_2}.$$

Эта формула может допускать различные изменения: прежде всего мы можем перейти от переменных $w$ к переменным $\tau$; далее, можно заметить, что $\Phi_1'$ сводится к постоянной (интеграл Якоби), когда $E_3 = 0$. Это позволяет написать

$$\frac{\Phi_1'}{n_2} = K + E_3\Phi,$$

где $K$ — постоянная, а $E_3\Phi$ делится на $E_3$. В самом деле, имеем

$$\frac{\Phi_1'}{n_2} = \psi + E_3\theta,$$

где $\psi$ и $\theta$ — функции $x$, $y$, $z$, $X$, $Y$, $Z$, $\tau_3 = w_3$ и постоянных $E_3$, $\alpha$. Впрочем, $\psi$ не зависит от $E_3$ и $\tau_3$. Пусть, далее, $x^*$ есть значение разложения $x$ при $E_3 = 0$.

Пусть $\psi^*$ есть значение $\psi$ после замены $x, \ldots$ на $x^*, \ldots$; тогда $\psi^*$ будет постоянной, $\psi - \psi^*$ будет делиться на $E_3$ и мы можем положить

$$\psi^* = K, \quad \psi - \psi^* + E_3\theta = E_3\Phi.$$

Поэтому имеем

$$\sum A_i' \, dw_i - \frac{\Phi_1' \, dw_2}{n_2} = B \, d\tau + B_1 \, d\tau_1 + B_2 \, d\tau_2 + B_3 \, d\tau_3 - E_3 \Phi \, d\tau_3,$$

откуда

$$\sum x \, dX - d\Omega'' = \sum B \, d\tau - E_3 \Phi \, d\tau_3.$$

Величины $B$ постоянны, так же как и $A_i'$ и $K$; этим мы хотим сказать, что они зависят только от $E_1$, $E_2$, $E_3$, $\alpha$, $m$ и не зависят от $\tau$. Положим

$$S = \Omega'' - x_0 X - y_0 Y - z_1 Z,$$

где $x_0$ и $y_0$ суть члены нулевой степени, вычисленные в главе XXV; $z_1$ представляет совокупность членов, определенных в главе XXVI (так как $z$ не содержит членов нулевой степени, то $z_0 = 0$); далее, будем иметь

$$dS = \sum (x - x_0) \, dX - \sum X \, dx_0 + \\ + (z - z_1) \, dZ - Z \, dz_1 - \sum B \, d\tau + E_3 \Phi \, d\tau_3. \quad (1)$$

В формуле (1) $E_1$, $E_2$, $m$ и величины $\tau$ должны рассматриваться как переменные и, наоборот, $E_3$ и $\alpha$ суть заданные постоянные, так что будем иметь

$$dE_3 = d\alpha = 0.$$

Добавим, что в этой формуле суммы $\sum (x - x_0) \, dX$ и $\sum X \, dx_0$ равны

$$(x - x_0) \, dX + (y - y_0) \, dY, \quad X \, dx_0 + Y \, dy_0.$$

**361.** Установив это, предположим, что мы определили члены до $k$-го порядка в разложениях для $x$, $y$, $X$, $Y$, $S$ и $B$ и члены до $(k-1)$-го порядка в разложениях для $z$ и $Z$ и что имеем, следовательно,

$$x = x_k, \quad y = y_k, \quad z = z_{k-1}, \quad S = S_k, \ \ldots \quad (2)$$

Положим

$$x = x_k + \delta x, \quad y = y_k + \delta y, \ \ldots \quad (3)$$

и займемся вычислением $\delta x$, $\delta y$, $\delta S$ с точностью до членов $(k+1)$-го порядка включительно, а $\delta z$ — с точностью до членов $k$-го порядка включительно.

Заменим прежде всего в (1) все переменные их приближенными значениями (2), и тогда разность обеих частей будет $(k+1)$-го порядка: мы можем представить ее в виде

$$\sum u \, dv,$$

где $u$ и $v$ — известные функции.

Заменим теперь эти переменные их значениями (3) и, пренебрегая высшими степенями $\delta x$, ... [это возможно, так как мы пренебрегаем членами $(k+2)$-го порядка], получим

$$d\,\delta S = \sum \delta x\, dX + \sum (x - x_0)\, d\,\delta X - \sum \delta X\, dx_0 + \delta z\, dZ +$$
$$+ (z - z_1)\, d\,\delta Z - \delta Z\, dz_1 - \sum \delta B\, d\tau + E_3\, \delta\Phi\, d\tau_3 + \sum u\, dv. \qquad (4)$$

Правая часть допускает следующие упрощения: рассмотрим в ней сначала первую строку; так как $\delta x$ и $\delta X$ суть величины $(k+1)$-го порядка, мы можем заменить $x$ и $X$ значениями $x_0$ и $X_0$. Аналогично во второй строке, так как $\delta z$ и $\delta Z$ — величины $k$-го порядка, мы можем пренебречь в их коэффициентах величиной $z_2$, которая будет второго порядка, и заменить $z$ и $Z$ величинами $z_1$ и $Z_1$.

Наконец, $\delta\Phi$ есть величина $(k+1)$-го порядка, так как

$$\delta\Phi = \sum \frac{\partial\Phi}{\partial x}\,\delta x + \sum \frac{\partial\Phi}{\partial X}\,\delta X + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\,\delta Z.$$

Но $\delta x$ и $\delta X$ суть величины $(k+1)$-го порядка, $\delta z$ и $\delta Z$ — величины $k$-го порядка, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial Z}$ делятся на $E_2$ и, следовательно, являются величинами первого порядка. Так как, впрочем, $E_3$ — величина первого порядка, то мы можем пренебречь $E_3\delta\Phi$ и останется равенство

$$d\,\delta S = \sum \delta x\, dX_0 - \sum \delta X\, dx_0 + \delta z\, dZ_1 -$$
$$- \delta Z\, dz_1 - \sum \delta B\, d\tau + \sum u\, dv. \qquad (5)$$

**362.** Возьмем теперь формулу (26) из § 320

$$\frac{d\Omega''}{dt} = \Phi_1' + \sum x \frac{dX}{dt} - H,$$

где $\Phi_1' = F' - n_2 v'$, а $H$ — постоянная, выбранная таким образом, чтобы $\Omega''$ была периодической. Выводим

$$\frac{dS}{dt} = \Phi_1' + \sum (x - x_0)\frac{dX}{dt} + (z - z_1)\frac{dZ}{dt} - \sum X \frac{dx_0}{dt} - Z\frac{dz_1}{dt} - H. \qquad (6)$$

Подставим в (6) вместо переменных приближенные значения (2), и пусть $G$ — разность обеих частей равенства. $G$ будет известной функцией $(k+1)$-го порядка. Подставим теперь вместо переменных значения (3) и пренебрежем всеми членами не ниже $(k+2)$-го порядка. Получим

$$\delta\left(\frac{dS}{dt}\right) = \delta\Phi_1' + \sum \delta x \frac{dX}{dt} + \sum (x - x_0)\,\delta\left(\frac{dX}{dt}\right) -$$
$$- \sum \delta X \frac{dx_0}{dt} + G + \delta z \frac{dZ}{dt} + (z - z_1)\,\delta\left(\frac{dZ}{dt}\right) - \delta Z \frac{dz_1}{dt} - \delta H.$$

С другой стороны,

$$\delta\Phi_1' = \sum \frac{\partial\Phi_1'}{\partial x}\,\delta x + \sum \frac{\partial\Phi_1'}{\partial X}\,\delta X + \frac{\partial\Phi_1'}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial\Phi_1'}{\partial Z}\,\delta Z.$$

Но в силу уравнений движения имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F'}{\partial X} = \frac{\partial\Phi_1'}{\partial X}, \ldots,$$

откуда

$$\delta\Phi_1' = -\sum \frac{dX}{dt}\,\delta x + \sum \frac{dx}{dt}\,\delta X - \frac{dZ}{dt}\,\delta z + \frac{dz}{dt}\,\delta Z$$

и, следовательно,

$$\delta\left(\frac{dS}{dt}\right) = G - \delta H + \sum (x - x_0)\,\delta\left(\frac{dX}{dt}\right) +$$
$$+ \sum \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right)\delta X + (z - z_1)\,\delta\left(\frac{dZ}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)\delta Z.$$

В первой строке можно заменить $x$ величиной $x_0$, а во второй строке $z$ — величиной $z_1$, по тем же соображениям, что и в предыдущем параграфе, и это позволяет нам написать

$$\delta\left(\frac{dS}{dt}\right) = G - \delta H. \tag{7}$$

Что означает теперь $\delta\left(\frac{dS}{dt}\right)$? Имеем

$$\frac{dS}{dt} = \sum n_i \frac{\partial S}{\partial w_i},$$

откуда

$$\delta\left(\frac{dS}{dt}\right) = \sum n_i \frac{\partial(\delta S)}{\partial w_i} + \sum \delta n_i \frac{\partial S}{\partial w_i}.$$

В первом слагаемом правой части можно заменить $n_i$ через $n_i^0$, так что он приведется (возвращаясь к обозначениям предыдущей главы) к

$$\sum n_i^0 \frac{\partial(\delta S)}{\partial w_i} = \frac{d(\delta S)}{dt}.$$

Во второе слагаемое входят две неопределенные постоянные

$$\delta n_3 = \delta c\,(n_1 - n_2), \quad \delta n_4 = \delta g\,(n_1 - n_2);$$

первая — $k$-го порядка, так как мы будем предполагать, что $c$ определена с точностью до членов $(k-1)$-го порядка включительно; вторая будет $(k-1)$-го порядка, так как будем предполагать, что $g$ определена с точностью до членов $(k-2)$-го порядка. Положим

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots,$$

где $S_0$, $S_1$, $S_2$, ... представляют соответственно члены 0, 1, 2, ... порядка. В таком случае можно в коэффициенте при $\delta n_3$ заменить $S$ через $S_0 + S_1$ или через $S_1$, так как $S_0$ не зависит от $w_3$, и в коэффициенте при $\delta n_4$ заменить $S$ через $S_0 + S_1 + S_2$ или через $S_2$, так как $S_0$ и $S_1$ не зависят от $w_4$. Следовательно, получим

$$\frac{d(\delta S)}{dt} = G - \delta H - \delta n_3 \frac{\partial S_1}{\partial w_3} - \delta n_4 \frac{\partial S_2}{\partial w_4}. \tag{8}$$

**363.** Вернемся к обозначениям § 318, где мы нашли следующие формулы:

$$\Phi_1 = H - \sum Wn, \quad W_i = A_i = A'_i \qquad (i = 1,\ 3,\ 4),$$
$$n_2 W_2 + \Phi_1 = n_2 A_2 + K = n_2 A'_2,$$
$$dH = \sum W\,dn, \quad d\Phi_1 = -\sum n\,dW;$$

буква $K$ имеет тот же смысл, что и в § 318, и мы получим (вспоминая, что $dn_2 = 0$)

$$H = \sum n_i A'_i, \quad dH = \sum A'_i\,dn_i, \quad \sum n_i\,dA'_i = 0.$$

Но лучше будет вернуться к аргументам $\tau$, которые мы ввели в начале этой главы; пусть, следовательно,

$$d\tau = \nu\,dt, \quad d\tau_i = \nu_i\,d\tau,$$

так что

$$\nu = n_1 - n_2, \quad \nu_1 = n_1 + n_3 = \nu c, \quad \nu_2 = n_1 + n_4 = \nu g, \quad \nu_3 = n_2.$$

Мы будем иметь

$$K\nu_3 + \sum B\nu = \sum A'n, \quad K\,d\nu_3 + \sum B\,d\nu = \sum A'\,dn,$$

где $K$ имеет тот же смысл, что и в предыдущем параграфе, и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} H &= \sum B\nu + K\nu_3, \\ dH &= \sum B\,d\nu, \\ \sum \nu\,dB &+ \nu_3\,dK = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Все эти величины $H$, $B$, $\nu$, ... зависят от постоянных $m$, $E$ и $\alpha$ и не зависят от аргументов $\tau$. Допустим, что в уравнениях (9) сначала вместо неизвестных подставим их приближенные значения (2), и пусть

$$P, \ \sum Q\,dq, \quad dP - \sum Q\,dq \tag{10}$$

суть разности обеих частей уравнений (9); $P$, $Q$, $q$ будут известными функциями и выражения (10) будут величинами $(k+1)$-го порядка.

Установив это, заменим в уравнениях (9) переменные значениями (3) и пренебрежем членами $(k+2)$-го порядка. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \delta H &= \sum B\,\delta\nu + \sum \nu\,\delta B + P + \nu_3\,\delta K, \\ d(\delta H) &= \sum B\,d(\delta\nu) + \sum \delta B\,d\nu + \sum Q\,dq. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Заметим, что $\delta H$, $d(\delta H)$ и $\delta B$ суть величины $(k+1)$-го порядка; $\delta\nu = \delta\nu_3 = 0$; далее, заметим, что $\delta\nu_1$ — величина $k$-го порядка, $\delta\nu_2$ — величина $(k-1)$-го порядка, величина $d(\delta\nu_i)$ имеет такой же порядок малости, что и $\delta\nu_i$; кроме того, $B_1$ делится на $E_1^2$ и $B_2$ делится на $E_2^2$, поэтому они — величины второго порядка, а это позволяет нам пренебрегать, например, произведением $B_1\delta\nu_1$; в таком случае будем писать

$$\left.\begin{aligned} \delta H &= B_2\,\delta\nu_2 + \sum \nu\,\delta B + P + \nu_3\,\delta K, \\ d(\delta H) &= B_2\,d(\delta\nu_2) + \sum \delta B\,d\nu + \sum Q\,dq. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

**364.** Все члены наших разложений содержат в качестве множителя некоторый одночлен вида

$$\mu = \alpha^{q_0} E_1^{q_1} E_2^{q_2} E_3^{q_3},$$

который Браун называет *характеристикой* разложений; сумма показателей $q_0 + q_1 + q_2 + q_3$ есть *степень* члена разложения. В предыдущих вычислениях мы могли предположить, что, например, $\delta S$ или $\delta x$ представляют только совокупность членов, имеющих данную характеристику $\mu$, вместо того чтобы считать, что они представляют все члены $(k+1)$-й степени. Но так как степень приближения не одна и та же, например для $\delta z$ и $\delta x$, то необходимо сделать некоторые уточнения. Следовательно, целесообразно считать, что

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta X,\quad \delta Y,\quad \delta S,\quad \delta B,\quad \delta K,\quad \delta H$$

представляют совокупность членов характеристики $\mu$; $\delta z$ и $\delta Z$ — совокупность членов характеристики $\frac{\mu}{E_2}$; $\delta c$ — совокупность членов характеристики $\frac{\mu}{E_1}$ и $\delta g$ — совокупность членов характеристики $\frac{\mu}{E_2^2}$. Что касается приближенных значений (2), то мы будем предполагать, что

$$x_k,\quad y_k,\quad S_k,\ \ldots$$

представляют все члены, характеристика которых есть делитель для $\mu$ (само $\mu$ исключается), и

$$z_{k-1},\quad c_{k-1},\quad g_{k-2}$$

представляют все члены, имеющие соответственно для характеристики делитель величин

$$\frac{\mu}{E_2}, \ \frac{\mu}{E_1}, \ \frac{\mu}{E_2^2}.$$

**365.** Допуская это, мы должны различать три случая.

Первый случай. $\mu$ не делится ни на $E_1$, ни на $E_2$. В этом случае ни $\tau_1$, ни $\tau_2$ (или, возвращаясь к прежним переменным, ни $w_3$, ни $w_4$) не входят в разложения. Формула (8) сводится к равенству

$$\frac{d(\delta S)}{dt} = G - \delta H;$$

$G$ — известна; будем распоряжаться $\delta H$ таким образом, чтобы постоянный член в правой части обращался в нуль, и тогда $\delta S$ получим простой квадратурой. Функция $\delta S$ определяется с точностью до постоянной, но эта постоянная должна равняться нулю, так как $\delta S$ должна быть нечетной функцией.

Перейдем теперь к формуле (5) и заметим, что $z$, $Z_1$, . . . равны нулю и, более того, мы имеем только три переменные, по которым нужно дифференцировать, и такими переменными являются $m$, $\tau$ и $\tau_3$; поэтому имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\delta S)}{\partial m} &= \sum \delta x \frac{\partial X_0}{\partial m} - \sum \delta X \frac{\partial x_0}{\partial m} + \sum u \frac{\partial v}{\partial m}, \\ \frac{\partial(\delta S)}{\partial \tau} &= \sum \delta x \frac{\partial X_0}{\partial \tau} - \sum \delta X \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - \delta B + \sum u \frac{\partial v}{\partial \tau}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и так как $x_0$ и $X_0$ не зависят от $\tau$, то

$$\frac{\partial(\delta S)}{\partial \tau_3} = -\delta B_3 + \sum u \frac{\partial v}{\partial \tau_3}. \tag{14}$$

Из уравнения (14) выводится равенство

$$\delta B_3 = \sum \left[ u \frac{\partial v}{\partial \tau_3} \right],$$

где через $\left[ u \frac{\partial v}{\partial \tau_3} \right]$ обозначен постоянный член в $u \frac{\partial v}{\partial \tau_3}$; это определяет $\delta B_3$.

С другой стороны, заметим, что в правой части (12) имеем $B_2 = 0$, так как $B_2$ должно делиться на $E_2^2$, и так как $\mu$ не делится на $E_2$, мы пренебрегаем $E_2$; поэтому остается

$$d(\delta H) = \sum \delta B \, d\nu + \sum Q \, dq,$$

или, так как $d\nu_3 = 0$, а $d\nu_1$ и $d\nu_2$ не входят в это равенство, то

$$\frac{\partial(\delta H)}{\partial m} = \delta B \frac{\partial \nu}{\partial m} + \sum Q \frac{\partial q}{\partial m}.$$

Это равенство определяет $\delta B$, так как $\delta H$, $Q$ и $q$ известны, а

$$\nu = \frac{n_2}{m}.$$

Наконец, имеем

$$\delta X = \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) - n_2\,\delta y, \quad \delta Y = \delta\left(\frac{dy}{dt}\right) + n_2\,\delta x.$$

Так как здесь наши разложения не содержат ни $w_3$, ни $w_4$ и так как имеем

$$n_1 = n_1^0, \quad n_2 = n_2^0, \quad \delta n_1 = \delta n_2 = 0,$$

то можно написать

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d(\delta x)}{dt}, \quad \delta\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d(\delta y)}{dt},$$

но так как мы снова придем к этим уравнениям немного дальше, то мы желаем сейчас рассмотреть этот вопрос в несколько более общем плане. Итак, возьмем уравнение

$$\frac{dx}{dt} - X - n_2 y = 0.$$

Пусть $A$ есть значение левой части, если заменить переменные их приближенными значениями (2). Если взять более точные значения (3), то будем иметь

$$\delta\left(\frac{dx}{dt}\right) - \delta X - n_2\,\delta y = A,$$

причем

$$\frac{dx}{dt} = \sum n_i \frac{\partial x}{\partial w_i}, \quad \delta\left(\frac{dx}{dt}\right) = \sum n_i \frac{\partial(\delta x)}{\partial w_i} + \sum \delta n_i \frac{\partial x}{\partial w_i}.$$

Мы можем заменить в первом слагаемом $n_i$ на $n_i^0$, так как $\delta x$ есть величина $(k+1)$-го порядка, так что этот член сведется к $\frac{d(\delta x)}{dt}$; для второго слагаемого имеем

$$\sum \delta n_i \frac{\partial x}{\partial w_i} = \nu\,\delta c\,\frac{\partial x}{\partial \tau_1} + \nu\,\delta g\,\frac{\partial x}{\partial \tau_2}.$$

Но $\delta c$ и $\delta g$ суть величины $k$-го и $(k-1)$-го порядков соответственно, поэтому мы можем заменить в коэффициенте при $\delta c$ переменную $x$ через $x_1$, а в коэффициенте при $\delta g$ — через $x_2$ (где $x_0$, $x_1$, $x_2$ суть первые три приближения переменной $x$ соответственно).

Итак, можно написать следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d(\delta x)}{dt}-\delta X-n_2\,\delta y=A-\nu\,\delta c\,\frac{\partial x_1}{\partial\tau_1}-\nu\,\delta g\,\frac{\partial x_2}{\partial\tau_2}\,,\\
&\frac{d(\delta y)}{dt}-\delta Y+n_2\,\delta x=A'-\nu\,\delta c\,\frac{\partial y_1}{\partial\tau_1}-\nu\,\delta g\,\frac{\partial y_2}{\partial\tau_2}\,,\\
&\sum\delta x\,\frac{\partial X_0}{\partial m}-\sum\delta X\,\frac{\partial x_0}{\partial m}=\frac{\partial(\delta S)}{\partial m}-\delta z\frac{\partial Z_1}{\partial m}+\delta Z\,\frac{\partial z_1}{\partial m}-\sum u\,\frac{\partial v}{\partial m}\,,\\
&\sum\delta x\,\frac{\partial X_0}{\partial\tau}-\sum\delta X\,\frac{\partial x_0}{\partial\tau}=\frac{\partial(\delta S)}{\partial\tau}-\delta z\,\frac{\partial Z_1}{\partial\tau}+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\delta Z\,\frac{\partial z_1}{\partial\tau}-\sum u\,\frac{\partial v}{\partial\tau}+\delta B.
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

В интересующем нас случае члены с $\delta z$ и $\delta Z$ равны нулю, и то же самое относится к $A$, $A'$ и к членам с $\delta c$, $\delta g$; но мы предпочитаем не упрощать уравнения (15), чтобы можно было ими воспользоваться в следующих параграфах.

$\delta S$ и $\delta B$ известны; аргументы $\tau_1$ и $\tau_2$ не входят в уравнения, $\delta c$ и $\delta g$ должны рассматриваться как нули; правые части, следовательно, известны; поэтому мы должны проинтегрировать систему линейных уравнений с правыми частями. Линейные уравнения без правых частей есть не что иное, как уравнения, которые мы проинтегрировали в § 347; только наша система дифференциальных уравнений имеет второй порядок вместо четвертого.

Поэтому будем применять результаты § 349 и следующих параграфов; единственная трудность возникает, когда определитель

$$\frac{\partial x_0}{\partial m}\cdot\frac{\partial y_0}{\partial\tau}-\frac{\partial x_0}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial y_0}{\partial m}$$

обращается в нуль, но здесь это не имеет места.

Вековые члены не будут появляться. Этого может и не быть, если аргумент одного из членов в правой части будет такой же, что и у одного из членов, которые мы в предыдущей главе обозначили через $\xi_3$ или $\xi_4$, т. е.

$$\tau_1+(2k+1)\tau.$$

Но это невозможно, так как наши правые части не зависят от $\tau_1$ и $\tau_2$.

**366.** Перейдем теперь ко в т о р о м у с л у ч а ю.

$\mu$ делится на $E_2$, но не делится на $E_1$. Тогда наши функции будут зависеть от $w_4$ (т. е. от $\tau_2$), но не будут зависеть от $w_3$ (т. е. от $\tau_1$), и уравнение (8) запишется в виде

$$\frac{d(\delta S)}{dt}=G-\delta H-\delta n_4\,\frac{\partial S_2}{\partial w_4}\,.\qquad(8')$$

Так как правая часть не должна содержать постоянного члена и в $\frac{\partial S_2}{\partial w_4}$ такого члена нет, то $\delta H$ будет не что иное, как постоянный член в $G$. Таким образом, $\delta H$ известна, и уравнения (12) дают

$$\frac{\partial(\delta H)}{\partial E_2}=B_2\frac{\partial(\delta\nu_2)}{\partial E_2}+\sum\delta B\frac{\partial\nu}{\partial E_2}+\sum Q\frac{\partial q}{\partial E_2}.$$

Но $\nu$ зависит только от $m$, $\nu_1$ не входит в это равенство, а $\nu_3$ постоянна; поэтому имеем

$$\delta B_1=0,\qquad \frac{\partial\nu}{\partial E_2}=\frac{\partial\nu_3}{\partial E_2}=0,$$

$$\sum\delta B\frac{\partial\nu}{\partial E_2}=\delta B_2\frac{\partial\nu_2}{\partial E_2},$$

откуда

$$\frac{\partial(\delta H)}{\partial E_2}=B_2\frac{\partial(\delta\nu_2)}{\partial E_2}+\delta B_2\frac{\partial\nu_2}{\partial E_2}+\sum Q\frac{\partial q}{\partial E_2}.$$

Будем брать $\delta B_2$ произвольно (придавая ему значение нуль всякий раз, когда все показатели $q$ характеристики являются четными). Все известно, кроме $\frac{\partial\delta\nu_2}{\partial E_2}$; мы определили, следовательно, эту величину, а значит, и

$$\delta\nu_2=\frac{E_2}{q_2-2}\cdot\frac{\partial(\delta\nu_2)}{\partial E_2},$$

так как $\delta\nu_2$ есть однородная функция $E_2$ $(q_2-2)$-го порядка.

Зная $\delta\nu_2=\delta n_4$, мы будем знать правую часть уравнения (8) и, следовательно, $\delta S$ с точностью до некоторой постоянной, которая равна нулю, так как $\delta S$—нечетная функция.

Установив это, вернемся к уравнениям (5); они нам дают

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\delta S)}{\partial E_2}&=\delta z\frac{\partial Z_1}{\partial E_2}-\delta Z\frac{\partial z_1}{\partial E_2}+\sum u\frac{\partial v}{\partial E_2},\\ \frac{\partial(\delta S)}{\partial\tau_2}&=\delta z\frac{\partial Z_1}{\partial\tau_2}-\delta Z\frac{\partial z_2}{\partial\tau_2}-\delta B_2+\sum u\frac{\partial v}{\partial\tau_2}.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Здесь $u$, $v$, $z_1$, $Z_1$ — известные функции, $\delta B_2$ выбрана произвольно при определенном $\delta S$; мы можем определить без интегрирования две оставшиеся неизвестные $\delta z$ и $\delta Z$ с помощью уравнений первой степени (16). Определитель этих уравнений

$$\frac{\partial Z_1}{\partial E_2}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial\tau_2}-\frac{\partial z_1}{\partial E_2}\cdot\frac{\partial Z_1}{\partial\tau_2}$$

не может обращаться в нуль, так как он приводится к постоянной.

Из уравнения (5) получаем равенство

$$\frac{\partial(\delta S)}{\partial\tau_3} = -\delta B_3 + \sum u\,\frac{\partial v}{\partial\tau_3}\,,$$

которое показывает, что $\delta B_3$ равен постоянному члену из выражения $\sum u\,\frac{\partial v}{\partial\tau_3}$. Уравнения (12) дают

$$\frac{\partial(\delta H)}{\partial m} = B_2\frac{\partial(\delta\nu_2)}{\partial m} + \delta B\,\frac{\partial\nu}{\partial m} + \delta B_2\,\frac{\partial\nu_2}{\partial m} + \sum Q\,\frac{\partial q}{\partial m}\,.$$

Все члены, кроме $\delta B$, известны. Отсюда определяем $\delta B$.

Вернемся, наконец, к уравнениям (15). В эти уравнения $\tau_1$ не входит; те же рассуждения имели бы место, если бы $\delta c$ равнялась нулю, а $\delta g = \frac{\delta\nu_3}{\nu}$ была известна; следовательно, находим $\delta S$ и $\delta B$; итак, все известно, кроме

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta X,\quad \delta Y.$$

Эти величины легко определятся интегрированием уравнений (15); как и в предыдущем параграфе, можно показать, что вековые члены не могут появиться.

**367.** Перейдем к *третьему случаю*.

$\mu$ делится и на $E_1$, и на $E_2$. В таком случае можно избежать одного интегрирования.

Уравнения (5) дают нам

$$\frac{\partial(\delta S)}{\partial E_1} = \sum u\,\frac{\partial v}{\partial E_1}\,,$$

так как $x_0$, $X_0$, $z_1$, $Z_1$ не зависят от $E_1$; если $\delta S$ и $v$ суть однородные функции переменной $E_1$ $q_1$-го и $k$-го порядков соответственно, то из этого выводим равенство

$$q_1\,\delta S = \sum kuv,$$

которое определяет $\delta S$.

Далее имеем уравнения

$$\frac{\partial(\delta S)}{\partial E_2} = \delta z\,\frac{\partial Z_1}{\partial E_2} - \delta Z\,\frac{\partial z_1}{\partial E_2} + \sum u\,\frac{\partial v}{\partial E_2}\,,$$

$$\frac{\partial(\delta S)}{\partial\tau_2} = \delta z\,\frac{\partial Z_1}{\partial\tau_2} - \delta Z\,\frac{\partial z_1}{\partial\tau_2} - \delta B_2 + \sum u\,\frac{\partial v}{\partial\tau_2}\,.$$

Они определяют $\delta z$ и $\delta Z$, а постоянная $\delta B_2$ может быть выбрана произвольно. Затем получаем равенства

$$\frac{\partial(\delta S)}{\partial\tau_3} = -\delta B_3 + \sum u\,\frac{\partial v}{\partial\tau_3}\,,\quad \frac{\partial(\delta S)}{\partial\tau_1} = -\delta B_1 + \sum u\,\frac{\partial v}{\partial\tau_1}\,,$$

которые показывают, что $\delta B_3$ и $\delta B_1$ равны постоянным членам из выражений

$$\sum u \frac{\partial v}{\partial \tau_3}, \quad \sum u \frac{\partial v}{\partial \tau_1}.$$

Остается определить $\delta B$ и $\delta g$, от которых зависит $\delta \nu_2$; для этого будем пользоваться уравнениями (12), которые дают

$$\frac{\partial (\delta H)}{\partial E_1} = B_2 \frac{\partial (\delta \nu_2)}{\partial E_1} + \sum \delta B \frac{\partial \nu}{\partial E_1} + \sum Q \frac{\partial q}{\partial E_1}.$$

В коэффициенте при $\delta B$ мы можем заменить $\nu$ их приближенными значениями $\nu = n_1 - n_2$, $\nu_1 = c_0 \nu, \ldots$; при этих условиях величины $\nu$ не зависят от $E_1$ и остается

$$\frac{\partial (\delta H)}{\partial E_1} = B_2 \frac{\partial (\delta \nu_2)}{\partial E_1} + \sum Q \frac{\partial q}{\partial E_1}.$$

Таким же образом получим

$$\frac{\partial (\delta H)}{\partial E_2} = B_2 \frac{\partial (\delta \nu_2)}{\partial E_2} + \sum Q \frac{\partial q}{\partial E_2}.$$

Из этих уравнений выводим

$$q_1 \delta H = B_2 q_1 \delta \nu_2 + \sum kQq,$$

$$q_2 \delta H = B_2 (q_2 - 2) \delta \nu_2 + \sum k'Qq,$$

где $q$, по предположению, однородная функция переменных $E_1$ и $E_2$ $k$-го и $k'$-го порядков соответственно. Из этих двух уравнений получаем $\delta H$ и $\delta \nu_2$ (а затем и $\delta g$).

Прием становится неприменимым при $q_2 = 0$, но в этом случае $\tau_2$, а следовательно, и $\delta \nu_2$ не входят в уравнения.

Далее находим

$$\frac{\partial (\delta H)}{\partial m} = B_2 \frac{\partial (\delta \nu_2)}{\partial m} + \delta B \frac{\partial \nu}{\partial m} + \sum \delta B_i \frac{\partial \nu_i}{\partial m} + \sum Q \frac{\partial q}{\partial m},$$

откуда получаем $\delta B$.

Наконец, определим $\delta x$, $\delta y$, $\delta X$, $\delta Y$ при помощи уравнений (15); в правых частях все известно, за исключением постоянной $\delta c$. Распорядимся этой постоянной таким образом, чтобы исчезли вековые члены, которые на этот раз сами по себе не равны нулю. Таким образом, определение наших неизвестных завершено.

368. Этот метод изложен, но в другой форме и с другими обозначениями, в томе XVII «Bulletin astronomique» на стр. 87 и 167. Когда мы хотим иметь аналитические выражения для коэффициентов, то он имеет некоторое преимущество при выполнении подстановок (так как делаем подстановки только в $\Phi_1'$, вместо того

чтобы делать подстановки в трех частных производных этой функции) и приходится интегрировать систему второго порядка вместо системы четвертого порядка. Этот метод поддается многим изменениям.

1. Мы можем применить прием, аналогичный тем, которые применялись в § 327 и 347 при рассмотрении более общей задачи. Мы имеем формулу

$$\Phi_1' = \frac{\Sigma X^2}{2} - \frac{m_1+m_7}{r} + n_2(Xy - Yx) - \frac{n_2^2}{2}(2x^2 - y^2 - z^2) - n_2^2\Theta,$$

в которой член $-n_2^2\Theta$ представляет совокупность членов, содержащих в качестве множителя $\alpha$ или $E_3$. Возьмем более общую формулу

$$\Phi_1' = \frac{\Sigma X^2}{2} - \frac{m_1+m_7}{r} + n_2(Xy - Yx) - n_2^2\frac{x^2+y^2+z^2}{4} - 3h^2\frac{x^2-y^2-z^2}{4} - h^2\Theta,$$

которая приводится к первой при $h = n_2$. В § 347 мы положили, что

$$n_2 = p\nu, \quad h = m\nu.$$

На этот раз будем полагать

$$n_2 = m\nu, \quad h = \beta m\nu,$$

которые приводятся к тем же величинам.

Далее будем применять метод, в котором разложения строятся не только по степеням $\alpha$ и $E$, но также и по степеням $m$, $\alpha$ и $E$, так что $x_0$, например, представляет совокупность членов, не зависящих от $\alpha$, $E$ и $\beta$. Число членов, которые надо вычислить, немного увеличивается, и наоборот, каждая из величин $x_0$, $y_0$, $X_0$, $Y_0$, $z_1$, $Z_1$ сводится к одному члену с $\cos\tau$, $\sin\tau$, $\cos\tau_2$ или $\sin\tau_2$.

2. Можно, наоборот, сначала закончить разложение по $\alpha$, рассматривая $E$ как нули, а потом разложить по степеням $E$, рассматривая $x_0$, например, как совокупность членов нулевой степени относительно $E$, но произвольной степени относительно $\alpha$. Можно также разложить сначала по степеням $E_1$ и $E_2$, а потом по степеням $\alpha$ и $E_3$. Это вводит в метод некоторые небольшие изменения, на которых мы не будем подробно останавливаться.

3. Вместо того чтобы рассматривать прямоугольные координаты $x$, $y$, $z$ и их сопряженные переменные $X$, $Y$, $Z$, можно взять полярные координаты и их сопряженные переменные. Метод, основанный на свойствах канонических уравнений, остается применимым, каковы бы ни были некоторые изменения в деталях.

## Теоремы Адамса

**369.** Вернемся к уравнению из § 362

$$\frac{d\Omega''}{dt}=\Phi_1'+\sum x\frac{dX}{dt}-H,$$

в котором теперь $\sum xX$ означает $xX+yY+zZ$. Положим

$$V=\Omega''-\sum\frac{xX}{2}.$$

Будем иметь

$$\frac{dV}{dt}=\Phi_1'+\frac{1}{2}\sum x\frac{dX}{dt}-\frac{1}{2}\sum X\frac{dx}{dt}-H.$$

Но

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial F'}{\partial X}=\frac{\partial\Phi_1'}{\partial X},\quad \frac{dX}{dt}=-\frac{\partial F'}{\partial x}=-\frac{\partial\Phi_1'}{\partial x}.$$

Поэтому

$$\frac{dV}{dt}=\Phi_1'-\frac{1}{2}\sum x\frac{\partial\Phi_1'}{\partial x}-\frac{1}{2}\sum X\frac{\partial\Phi_1'}{\partial X}-H.$$

Пусть

$$\Phi_1'=\sum\varphi_k,$$

где $\varphi_k$ представляют совокупность однородных членов $k$-й степени в $x$, $y$, $z$, $X$, $Y$, $Z$; в силу теоремы об однородных функциях будем иметь

$$\sum x\frac{\partial\Phi_1'}{\partial x}+\sum X\frac{\partial\Phi_1'}{\partial X}=\sum k\varphi_k,$$

откуда

$$\frac{dV}{dt}=\sum\left(1-\frac{k}{2}\right)\varphi_k-H,$$

где $V$ — периодическая функция, а $H$ есть не что иное, как постоянный член в $\left(1-\frac{k}{2}\right)\varphi_k$.

Но если пренебречь параллаксом, имеем

$$\Phi_1'=\frac{\Sigma X^2}{2}-\frac{m_1+m_7}{r}+n_2(Xy-Yx)-n_2^2P_2AC^2\left(\frac{a'}{BD}\right)^3$$

(см. § 315).

Все члены в этом выражении являются однородными 2-й степени, кроме члена с $\frac{1}{r}$, степень однородности которого равна $-1$. Следовательно,

$$\sum\left(1-\frac{k}{2}\right)\varphi_k=\frac{3}{2}\cdot\frac{m_1+m_7}{r}.$$

*Итак, если параллакс равен нулю, то $H$ есть не что иное, как постоянный член в $\frac{1}{r}$, умноженный на постоянный множитель*

$$\frac{3}{2}(m_1+m_7).$$

**370.** Установив это, возьмем уравнение (9) из § 363

$$dH=\sum B\,d\nu.$$

Так как $\nu$ и $\nu_3$ не зависят ни от $E_1$, ни от $E_2$, то оно нам дает

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial E_1}&=B_1\frac{\partial \nu_1}{\partial E_1}+B_2\frac{\partial \nu_2}{\partial E_1}=\sum B\frac{\partial \nu}{\partial E_1},\\ \frac{\partial H}{\partial E_2}&=B_1\frac{\partial \nu_1}{\partial E_2}+B_2\frac{\partial \nu_2}{\partial E_2}=\sum B\frac{\partial \nu}{\partial E_2},\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

откуда

$$E_1\frac{\partial H}{\partial E_1}+E_2\frac{\partial H}{\partial E_2}=\sum B\left(E_1\frac{\partial \nu}{\partial E_1}+E_2\frac{\partial \nu}{\partial E_2}\right). \tag{18}$$

Пусть

$$H=H_0+H_2+H_4+\ldots,$$

где $H_k$ представляет совокупность членов $k$-й степени относительно $E_1$ и $E_2$ и произвольной степени относительно $\alpha$ и $E_3$. Теорема об однородных функциях дает

$$E_1\frac{\partial H}{\partial E_1}+E_2\frac{\partial H}{\partial E_2}=2H_2+4H_4+\ldots$$

Таким образом, $2H_2$ представляет совокупность членов второй степени в правой части (18). Но $B_1$ и $B_2$ делятся на $E_1^2$ и $E_2^2$ соответственно; с другой стороны, $E_1\frac{\partial \nu}{\partial E_1}+E_2\frac{\partial \nu}{\partial E_2}$ обращается в нуль вместе с $E_1$ и $E_2$. Поэтому члены второй степени равны нулю, т. е.

$$H_2=0.$$

Итак, коэффициенты при $E_1^2$ и $E_2^2$ равны нулю, каковы бы ни были $\alpha$ и $E_3$ в разложении функции $H$; отсюда вытекает, что они равны нулю, если $\alpha=0$ и для любого $E_3$ в разложении постоянного члена из $\frac{1}{r}$.

**371.** Пусть теперь

$$H_4=aE_1^4+2bE_1^2E_2^2+cE_2^4.$$

Пусть

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \lambda_1 + \mu_1 E_1^2 + \mu_1' E_2^2 + \ldots,\\ \nu_2 &= \lambda_2 + \mu_2 E_1^2 + \mu_2' E_2^2 + \ldots,\\ B_1 &= \beta E_1^2 + \ldots,\\ B_2 &= \gamma E_2^2 + \ldots\end{aligned}$$

суть первые члены разложений $\nu_1$, $\nu_2$, $B_1$, $B_2$ по степеням $E_1$ и $E_2$; коэффициенты $a$, $b$, $c$, $\lambda$, $\mu$, $\beta$, $\gamma$ являются функциями $E_3$ или $\alpha$, или только $E_3$, если мы предполагаем, что $\alpha = 0$.

Уравнения (17) в таком случае нам дают

$$\begin{gathered}4aE_1^3 + 4bE_1E_2^2 + \ldots = 2\beta\mu_1E_1^3 + 2\gamma\mu_2E_1E_2^2 + \ldots,\\ 4bE_1^2E_2 + 4cE_2^3 + \ldots = 2\beta\mu_2'E_1^2E_2 + 2\gamma\mu_2'E_2^3 + \ldots,\end{gathered}$$

откуда

$$2a = \beta\mu_1, \quad 2b = \beta\mu_1' = \gamma\mu_2, \quad 2c = \gamma\mu_2'$$

или

$$\frac{a}{\mu_1} = \frac{b}{\mu_1'}\,, \quad \frac{b}{\mu_2} = \frac{c}{\mu_2'}\,.$$

Это есть соотношение между коэффициентами разложений $\nu_1$ и $\nu_2$ и, следовательно, $c$ и $g$, с одной стороны, и коэффициентами разложения $H$ и, следовательно (в предположении, что $\alpha = 0$), разложения постоянного члена из $\frac{1}{r}$, с другой стороны.

# ДЕЙСТВИЕ ПЛАНЕТ

**372.** Чтобы изучить действие возмущающей планеты на систему, состоящую из Солнца и возмущаемой планеты, начинаем с составления уравнений движения системы при условии, что возмущающая планета не существует. В этом случае движение будет кеплеровским, и во втором приближении изучаются возмущения кеплеровского движения, вызванные возмущающей планетой. Для этого применяется метод вариации произвольных постоянных.

Будем поступать абсолютно так же и при изучении движения четырехкратной системы, состоящей из Солнца, Земли, Луны и еще одной планеты. В первом приближении мы будем интегрировать уравнения движения трехкратной системы, состоящей из Солнца, Земли и Луны. Эту задачу мы решили в предыдущих главах. Таким образом, мы получили координаты трех тел этой системы в виде функций времени и определенного числа постоянных интегрирования $C$. Далее, мы должны изучить возмущения этого движения, вызванные притяжением планеты, т. е. определить малые вариации постоянных $C$, порождаемых притяжением этой планеты. Подобный подход к применению метода вариации произвольных постоянных был предложен Ньюкомбом и изложен в его работах.

Вернемся к обозначениям § 42 и 312. Пусть $A$ — это Луна, $B$ — Солнце, $C$ — Земля, $P$ — планета, $D$ — центр масс системы Земля — Луна , $G$ — центр масс Земля — Луна — Солнце.

Пусть

$x_1, x_2, x_3,$ $\quad m_1 = m_2 = m_3$ — координаты и масса точки $A$;

$x_4, x_5, x_6,$ $\quad m_4 = m_5 = m_6$ — координаты и масса точки $B$,

$x_7, x_8, x_9,$ $\quad m_7 = m_8 = m_9$ — координаты и масса точки $C$;

$x_{10}, x_{11}, x_{12},$ $\quad m_{10} = m_{11} = m_{12}$ — координаты и масса точки $P$;

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Пусть

$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3 \text{ суть проекции } AC;$$
$$x'_4,\ x'_5,\ x'_6 \quad » \quad » \quad BD;$$
$$x'_7,\ x'_8,\ x'_9 \quad » \quad » \quad PG;$$
$$m'_1 = m'_2 = m'_3 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7};$$
$$m'_4 = m'_5 = m'_6 = \frac{m_4 (m_1 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7};$$
$$m'_{10} = m'_{11} = m'_{12} = \frac{m_{10} (m_1 + m_4 + m_7)}{m_1 + m_4 + m_7 + m_{10}};$$
$$y'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}.$$

Пусть

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{y^2}{m} = \frac{1}{2} \sum \frac{y'^2}{m'}$$

есть кинетическая энергия и

$$U = -\left(\frac{m_1 m_4}{AB} + \frac{m_1 m_7}{AC} + \frac{m_4 m_7}{BC}\right) - \left(\frac{m_{10} m_1}{PA} + \frac{m_{10} m_4}{PB} + \frac{m_{10} m_7}{PC}\right)$$

— потенциальная энергия; $F = T + U$ есть полная энергия. Будем иметь канонические уравнения

$$\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y'_i}, \qquad \frac{dy'_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x'_i}.$$

Разобьем $T$ и $U$ на несколько частей; будем полагать, что

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$
$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6,$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum \frac{y'^2_i}{m'_i}\ (i = 1,\ 2,\ 3), \quad T_2 = \frac{1}{2} \sum \frac{y'^2_i}{m'_i}\ (i = 4,\ 5,\ 6),$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \sum \frac{y'^2_i}{m'_i}\ (i = 10,\ 11,\ 12), \quad U_1 = -\frac{m_1 m_7}{AC},$$

$$U_2 = -\frac{m_4 (m_1 + m_7)}{BD}, \quad U_3 = m_1 m_4 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{AB}\right) + m_4 m_7 \left(\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC}\right),$$

$$U_4 = -\frac{m_{10} (m_1 + m_4 + m_7)}{PG},$$

$$U_5 = m_4 m_{10} \left(\frac{1}{PG} - \frac{1}{PB}\right) + m_{10} (m_1 + m_7) \left(\frac{1}{PG} - \frac{1}{PD}\right),$$

$$U_6 = m_1 m_{10} \left(\frac{1}{PD} - \frac{1}{PA}\right) + m_7 m_{10} \left(\frac{1}{PD} - \frac{1}{PC}\right).$$

Мы видим, что $T_1$ и $U_1$ зависят только от координат Луны (и соответствующих импульсов $y_i'$); $T_2$ и $U_2$ зависят только от координат Солнца; $T_3$ и $U_4$ зависят только от координат планеты; $U_3$ — от координат Луны и Солнца; $U_5$ — от координат возмущающей планеты и Солнца и, наконец, $U_6$ зависит от координат Луны, Солнца и планеты.

**373.** Теперь посмотрим, каков порядок малости этих различных величин. Будем предполагать, что в качестве единицы длины взята величина порядка $BD$, так что $AC$ будет порядка параллакса $\alpha$, что мы запишем следующим образом:

$$BD \sim 1, \quad AC \sim \alpha.$$

За единицу массы будем брать величину порядка массы Солнца $m_4$, так что

$$m_4 \sim 1.$$

Для внутренних планет будем иметь

$$m_{10} \sim m_7, \quad PD \sim 1.$$

Для больших планет $m_{10}$ всегда гораздо больше $m_7$, но зато $PA$, $PB$, $PC$ всегда будут больше 1, и это некоторым образом компенсирует одно другое; поэтому во всех случаях будем допускать, что

$$m_{10} \sim m_7, \quad PD \sim 1.$$

Таким образом, находим, что

$$T_1 \sim U_1 \sim \frac{m_1 m_7}{\alpha}, \quad T_2 \sim U_2 \sim m_7,$$
$$U_3 \sim \alpha^2 m_1, \quad T_3 \sim U_4 \sim m_7,$$
$$U_5 \sim m_7^2, \quad U_6 \sim \alpha^2 m_1 m_7.$$

Теперь будем полагать, что

$$F = F' + F'',$$
$$F_0' = T_2 + T_3 + U_2 + U_4, \quad F' = F_0' + U_5,$$
$$F' = T_2 + T_3 + U_2 + U_4 + U_5,$$
$$F_0'' = T_1 + U_1 + U_3, \quad F'' = F_0'' + U_6.$$

Заметим, что

1) $F'$ не зависит от координат Луны;
2) $U_3$ и $U_6$ пренебрежимо малы по сравнению с $F'$;
3) $T_1$ и $U_1$ зависят только от координат Луны.

Поэтому, что касается координат Солнца и планеты, мы можем удовлетвориться уравнениями

$$\frac{dx'_i}{dt}=\frac{\partial F'}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt}=-\frac{\partial F'}{\partial x'_i} \tag{1}$$

($i=4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11,\ 12$).

Для определения координат Луны будем иметь уравнения

$$\frac{dx'_i}{dt}=\frac{\partial F''}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt}=-\frac{\partial F''}{\partial x'_i} \tag{2}$$

($i=1,\ 2,\ 3$).

**374.** В первом приближении мы пренебрегаем величиной $U_5$ по сравнению с $F'_0$ и величиной $U_6$ по сравнению с $F''_0$. При этих условиях наши уравнения приводятся к виду

$$\frac{dx'_i}{dt}=\frac{\partial F'_0}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt}=-\frac{\partial F'_0}{\partial x'_i} \tag{1'}$$

($i = 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11,\ 12$),

$$\frac{dx'_i}{dt}=\frac{\partial F''_0}{\partial y'_i}, \quad \frac{dy'_i}{dt}=-\frac{\partial F''_0}{\partial x'_i} \tag{2'}$$

($i = 1,\ 2,\ 3$).

Мы видим, что $F'_0$ состоит из двух частей, одна из которых зависит только от координат Солнца, а другая только от координат планеты, и что $F''_0$ есть не что иное, как функция $m'_1\Phi_1$ из § 312 главы XXIV. Отсюда следует, что если ограничиться уравнениями (1′) и (2′), то движение Солнца $B$ относительно точки $D$ и движение планеты $P$ относительно центра масс $G$ будут кеплеровскими движениями.

С другой стороны, движение Луны относительно Земли было изучено в главах XXV и XXIX. Поэтому будем предполагать, что это движение полностью определено методами, изложенными в этих главах.

Таким образом, величины

$$x'_i,\ y'_i \qquad (i=4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11,\ 12)$$

будут функциями времени и двенадцати элементов (канонических или эллиптических; см. § 58) орбиты точки $B$ относительно точки $D$ и орбиты планеты $P$ относительно точки $G$, или, если угодно, функциями средних долгот точки $B$ в ее кеплеровском движении относительно $D$ и точки $P$ в ее кеплеровском движении относительно $G$, и еще десяти других элементов (канонических или эллиптических) этих двух орбит.

Величины

$$x'_i,\ y'_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

могут быть выражены в функции времени, шести элементов эллиптической орбиты Солнца $B$ относительно $D$ и шести других постоянных интегрирования или также в виде функций: а) средней долготы Солнца, т. е. аргумента $\tau_3$; б) пяти других элементов эллиптической орбиты Солнца; в) трех аргументов $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$; г) трех постоянных $E_1$, $E_2$, $m$ (или трех произвольных функций, зависящих от этих трех постоянных и пяти элементов орбиты Солнца).

375. Таким образом, наши 18 временных $x_i'$, $y_i'$ выражаются в функции пяти аргументов, изменяющихся пропорционально времени. Этими восемнадцатью переменными являются средние долготы Солнца $B$ и планеты $P$, три аргумента $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$ и тринадцать постоянных интегрирования.

Если уравнения (1′) и (2′) проинтегрированы, то нам становятся известными соотношения, которые связывают 18 переменных — пять аргументов и 13 постоянных.

Допустим теперь, что мы применяли бы дальше приближения и для этого возвратились к уравнениям (1) и (2). Тогда мы могли бы определить 18 новых переменных, которые связаны с прежними 18 переменными теми же соотношениями, которые связывают пять аргументов и 13 постоянных при решении уравнений (1′) и (2′). Эти 18 переменных могут рассматриваться как *оскулирующие элементы* трех орбит: орбиты Солнца относительно $D$, орбиты возмущающей планеты $P$ относительно $G$ и орбиты Луны $A$ относительно $C$. Только эти оскулирующие элементы более не будут линейными функциями или постоянными; все, что мы можем сказать в этом случае, это то, что в силу малости дополнительных членов $U_5$ и $U_6$ одни из них изменяются *почти* пропорционально времени, а другие изменяются *очень медленно*.

Действуя так же, как и в § 79, мы должны сделать замену переменных, беря в качестве новых переменных эти 18 оскулирующих элементов; но для применения метода Лагранжа выгодно выбрать эти переменные (которые полностью мы еще не определили) таким образом, чтобы каноническая форма уравнений не нарушилась.

1. В качестве шести элементов Солнца мы выберем канонические элементы

$$L, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \lambda, \quad \eta_1, \quad \eta_2,$$

определенные в § 58. Средняя долгота $\lambda$ есть не что иное, как аргумент $\tau_3$, причем $\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}$ будет порядка $E_3$ и может играть ту же роль, что и $E_3$ в предыдущих главах. При этих условиях

$$x_4'\,dy_4'+x_5'\,dx_5'+x_6'\,dy_6'-\lambda\,dL-\sum\eta\,d\xi \tag{3}$$

есть точный дифференциал, и это есть условие, что уравнения сохраняют каноническую форму.

2. В качестве шести элементов возмущающей планеты будем брать также канонические элементы

$$L, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \lambda, \quad \eta_1, \quad \eta_2$$

из § 58. Но, впрочем, эти элементы не будут играть никакой роли в последующем анализе, а что касается уравнений (1), то они будут нам давать просто возмущения в движении планеты, вызванные системой Земля — Луна, в предположении, что она является материальной точкой; эти возмущения определены раньше.

3. В качестве шести элементов Луны будем брать три аргумента, $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$ и три постоянные $B$, $B_1$, $B_2$ из предыдущей главы. Если сопоставим формулы

$$\sum x'\,dy'' = \sum x\,dX + (Xy - Yx)\,du,$$

$$\sum x\,dX - d\Omega'' = \sum A'\,dw - \frac{\Phi_1'\,dw_2}{n_2},$$

$$\Phi_1' = \Phi_1 + n_2(Xy - Yx),$$

$$u = w_2 = \tau_3, \quad y_i' = m_1' y_i'',$$

$$\sum x\,dX - d\Omega'' = \sum B\,d\tau - E_3\Phi\,d\tau_3,$$

$$\sum x'\,dy'' - d\Omega'' = \sum A'\,dw - \frac{\Phi_1\,dw_2}{n_2}$$

из § 318, 320 и 360, то можно написать, что

$$m_1'\,d\Omega'' = \sum x_i'\,dy_i' - \sum m_1' B_i\,d\tau_i + m_1' E_3\Phi\,d\tau_3 - m_1'(Xy - Yx)\,d\tau_3.$$

Все эти формулы предполагают, что элементы Солнца, и в частности $E_3$, рассматриваются как постоянные. Если, кроме того, предположим, что $d\tau_3 = 0$, то убеждаемся в том, что выражение

$$x_1'\,dy_1' + x_2'\,dy_2' + x_3'\,dy_3' - m_1'(B\,d\tau + B_1\,d\tau_1 + B_2\,d\tau_2) \tag{4}$$

есть точный дифференциал, если предполагать, что шесть элементов орбиты Солнца (включая $E_3$ и $\tau_3$) рассматриваются как постоянные.

Впрочем, можно написать это соотношение и в следующем виде (деля на $m_1'$):

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau + E_3\Phi\,d\tau_3 - (Xy - Yx)\,d\tau_3.$$

Замечая, что $\tau_3$ не играет такой же роли, что и другие аргументы $\tau$, и выделяя член с $d\tau_3$, положим

$$\sum B\,d\tau = B\,d\tau + B_1\,d\tau_1 + B_2\,d\tau_2.$$

Будем писать в предыдущих формулах

$$\sum B\,d\tau + B_3\,d\tau_3$$

вместо $\sum B\,d\tau$, так что будем иметь

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau - d\tau_3\,(B_3 - E_3\Phi - Xy + Yx).$$

Вспомним затем формулу

$$\frac{\Phi_1'}{n_2} = K + E_3\Phi$$

из § 360 и положим

$$B_3 = \frac{G}{n_2} - K.$$

Тогда будем иметь

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau - (G - \Phi_1)\,\frac{d\tau_3}{n_2}\,; \qquad (5)$$

эта формула предполагает, что все элементы орбиты Солнца, кроме $\tau_3$, постоянны. Если, кроме того, рассматриваем и $\tau_3$ как постоянную, то будем иметь выражение

$$\sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau, \qquad (4')$$

которое будет точным дифференциалом.

**376.** Вернемся к уравнениям (1). Прежде всего проинтегрируем приближенные уравнения (1′), которые определяют кеплеровское движение планеты относительно точки $G$ и Солнца относительно точки $D$; затем получим интегралы точных уравнений (1) методом вариации произвольных постоянных. Это есть не что иное, как изучение взаимных возмущений планеты и системы Земля — Луна (в предположении, что обе массы сосредоточены в центре масс $D$); это исследование было выполнено раньше.

Итак, перейдем к уравнениям (2), которые мы напишем в виде

$$\frac{dx_1'}{dt} = \frac{\partial\left(\frac{F''}{m_1'}\right)}{\partial y_1''}, \qquad \frac{dy_1''}{dt} = -\frac{\partial\left(\frac{F''}{m_1'}\right)}{\partial x_1'}. \qquad (6)$$

Будем брать в качестве новых переменных канонические элементы Солнца и шесть переменных $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$, $B$, $B_1$, $B_2$. Координаты $x'$, $y''$ и функция $\Omega''$ должны быть выражены в виде функций этих шести переменных $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$, $B$, $B_1$, $B_2$, переменной $\tau_3$ и других пяти элементов солнечной орбиты, которые обозначим через $\gamma_i$.

Формула (5) предполагает, что величины $\gamma_i$ постоянны; если их рассматривать как переменные величины, то эта формула должна быть дополнена и мы должны написать

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau - (G - \Phi_1)\,\frac{d\tau_3}{n_2} + \sum \Gamma_i\,d\gamma_i, \qquad (5')$$

где положено

$$\Gamma_i = \frac{\partial \Omega''}{\partial \gamma_i} - \sum x' \frac{\partial y''}{\partial \gamma_i}.$$

Чтобы знать, как изменятся уравнения (6) в результате замены переменных, необходимо сослаться на теорему § 12. В § 12 рассматривается система канонических уравнений, в которых $F$ зависит явно от времени; делается замена переменных, в которой новые переменные $x'$ и $y'$ суть функции прежних переменных $x$ и $y$ и времени $t$. Предполагается, что

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy$$

есть точный дифференциал при условии, что $dt = 0$ и что

$$\sum x'\,dy' - \sum x\,dy - W\,dt$$

есть точный дифференциал при $dt \gtrless 0$; в этом случае уравнения сохраняют каноническую форму, но функция $F$ должна быть заменена на $F - W$.

Мы можем применить здесь эту теорему, так как при интегрировании уравнений (1) элементы $\gamma_i$ и $\tau_3$ могут рассматриваться как известные функции времени. Следовательно, можно написать

$$d\Omega'' = \sum x'\,dy'' - \sum B\,d\tau + W\,dt, \tag{5''}$$

где

$$W = (\Phi_1 - G)\frac{1}{n_2}\cdot\frac{d\tau_3}{dt} + \sum \Gamma_i \frac{d\gamma_i}{dt},$$

и уравнения (6) примут вид

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial B}, \tag{7}$$

где

$$\Phi_2 = \frac{F''}{m_1'} - W.$$

Полезно заметить, что этот анализ вовсе не предполагает, что в качестве $\gamma_i$ выбраны канонические элементы Солнца, а поэтому можно выбрать произвольные функции этих шести канонических элементов, и в частности, эллиптических элементов.

**377.** Между элементами орбиты Солнца мы должны делать некоторое различие; координаты $x$, $y$, $z$, которые были вычислены в предыдущих главах, зависят от средней аномалии Солнца $\tau_3$, от эксцентриситета орбиты Солнца $E_3$ и от большой полуоси солнечной орбиты, обратно пропорциональной параллаксу $\alpha$.

Они не зависят от трех других элементов: долготы земного перигелия и углов, которые определяют ориентацию подвижного эллипса относительно неподвижных осей. То же самое справедливо и относительно $X$, $Y$, $Z$ и $\Omega''$; эти функции также не зависят от последних трех элементов, которые мы будем называть *элементами ориентации*.

Выше мы писали

$$\sum x'\,dy'' = \sum x\,dX + (Xy - Yx)\,d\tau_3,$$

предполагая, что $d\gamma_i = 0$. Рассматривая $\gamma_i$ как переменные величины, нужно писать

$$\sum x'\,dy'' = \sum x\,dX + (Xy - Yx)\,d\tau_3 + \sum A_i\,d\gamma_i,$$

где

$$\sum x' \frac{\partial y''}{\partial \gamma_i} = \sum x \frac{\partial X}{\partial \gamma_i} + A_i.$$

Если $\gamma_i$ есть один из элементов ориентации, то будем иметь

$$\frac{\partial \Omega''}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial X}{\partial \gamma_i} = 0$$

и, следовательно,

$$\Gamma_i = \frac{\partial \Omega''}{\partial \gamma_i} - \sum x \frac{\partial X}{\partial \gamma_i} - A_i = -A_i.$$

Что представляют собой теперь величины $A_i$? Если элементы ориентации $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ получают приращения $d\gamma_1$, $d\gamma_2$, $d\gamma_3$, то все будет происходить так, как будто подвижные оси $x$, $y$, $z$ получили бесконечно малые вращения относительно неподвижных осей $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$. Если считать, что подвижные оси в начальный момент совпадают с неподвижными, то эти три вращения происходят вокруг трех осей и мы будем иметь

$$A_1 = \sum x' \frac{\partial y''}{\partial \gamma_1} - \sum x \frac{\partial X}{\partial \gamma_1} = Yz - Zy,$$

$$A_2 = \sum x' \frac{\partial y''}{\partial \gamma_2} - \sum x \frac{\partial X}{\partial \gamma_2} = Zx - Xz,$$

$$A_3 = \sum x' \frac{\partial y''}{\partial \gamma_3} - \sum x \frac{\partial X}{\partial \gamma_3} = Xy - Yx.$$

**378.** Если предположим, что масса $m_{10}$ равна нулю, то величины $\gamma_i$ будут постоянными, так же как и $\frac{d\tau_3}{dt}$, и поэтому имеем

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\tau_3}{dt} = n_2, \quad W = \Phi_1 - G.$$

С другой стороны,

$$F'' = F_0'' = T_1 + U_1 + U_3 = m_1'\Phi_1,$$

откуда окончательно имеем

$$\Phi_2 = G.$$

$G$ есть функция $B$ и $\gamma_i$; канонические уравнения приведутся к виду

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dG}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\tau_i}{dt} = \nu_i = -\frac{\partial G}{\partial B_i}.$$

Итак, можно написать соотношения

$$-dG = \nu\, dB + \nu_1 dB_1 + \nu_2 dB_2,$$

в котором $\gamma$ рассматриваются как постоянные. Если мы сопоставим это с формулой $dH = B\,d\nu + B_1 d\nu_1 + B_2 d\nu_2$ из § 363, то получим

$$H - G = B\nu + B_1\nu_1 + B_2\nu_2$$

плюс произвольная функция величин $\gamma_i$, которую мы можем считать равной нулю. Мы могли бы вывести эту формулу из формулы (9) § 363, которую можно написать в виде

$$H = B\nu + B_1\nu_1 + B_2\nu_2 + B_3\nu_3 + K\nu_3,$$

и из равенства § 375, определяющего $G$, которое можно написать так:

$$G = B_3\nu_3 + K\nu_3.$$

**379.** Предположим теперь, что $m_{10}$ не равна нулю; тогда $\frac{d\gamma_i}{dt}$ не равны более нулю, но весьма малы; $\frac{d\tau_3}{dt}$ не равна более постоянной, но мы можем положить $\frac{1}{n_2}\frac{d\tau_3}{dt} = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon$ — весьма малая величина. С другой стороны, будем иметь $F'' = m_1'\Phi_1 + U_6$, откуда, наконец,

$$\Phi_2 = G + \frac{U_6}{m_1'} + (G - \Phi_1)\,\varepsilon - \sum \Gamma_i \frac{d\gamma_i}{dt}.$$

Можно также положить, что $G = G_0 + \delta G$, где $G_0$ есть значение $G$ при замене $\gamma_i$ их начальными значениями, и поэтому будет функцией только $B$, $B_1$, $B_2$, а $\delta G$ — весьма малая величина. Далее можно написать, что

$$R = \frac{U_6}{m_1'} + (G - \Phi_1)\,\varepsilon - \sum \Gamma_i \frac{d\gamma_i}{dt},$$

откуда $\Phi_2 = G + R$, и это окончательно дает нам уравнения

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial B} - \frac{\partial R}{\partial B}, \tag{8}$$

где $R$ — малая величина. Мы можем в частных производных функции $R$ заменить переменные их приближенными значениями; в этом случае $R$ и ее частные производные могут рассматриваться как известные функции времени. Они будут периодическими функциями относительно пяти аргументов $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, $\tau_4$, где $\tau_4$ — средняя аномалия планеты. Приближенные значения этих аргументов суть линейные функции времени. Поэтому производные функции $R$ будут представляться в виде

$$\sum A\cos(\alpha t+\beta),$$

где $A$, $\alpha$ и $\beta$ суть постоянные величины.

В таком случае получим величины $B$ простыми квадратурами, так как $B$ определены, а величины $\gamma$ получены перед этим с помощью уравнений (1); то же самое можно сказать и о частных производных $\frac{\partial G}{\partial B}$, которые зависят только от $B$ и $\gamma$; можно также получить квадратурой и величины $\tau$. Это абсолютно то же самое, что мы делали в главах IV и V.

380. Имеется и другой подход к пониманию применения метода вариации произвольных постоянных. Если $m_{10}$ равна нулю, то имеют место определенные соотношения между $x_i'$, $y_i''$ ($i=1, 2, 3$), элементами лунной орбиты $B$ и $\tau$ и элементами орбиты Солнца $\tau_3$ и $\gamma_i$; пусть

$$\begin{matrix} x_i' \\ y_i'' \end{matrix} = f(B,\ \tau,\ \gamma_i,\ \tau_3) \tag{9}$$

— эти соотношения. Если $m_{10}$ не равна нулю, так что элементы орбиты Солнца являются переменными величинами, то мы можем сохранить соотношения (9) для определения оскулирующих элементов $B$ и $\tau$. Так мы делали до сих пор, но можно поступать и иначе.

Пусть $\gamma_i^0$ суть начальные значения $\gamma_i$; пусть $\tau_3^0=n_2^0t+\varepsilon_0$, где $n_2^0$ и $\varepsilon_0$ — начальные значения величин $n_2$ и $\tau_3$; заменим тогда уравнения (9) следующими уравнениями:

$$\begin{matrix} x_i' \\ y_i'' \end{matrix} = f(B,\ \tau,\ \gamma_i^0,\ \tau_3^0). \tag{9'}$$

Эти шесть уравнений (9′) будут определять шесть оскулирующих элементов $B$, $B_1$, $B_2$, $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$. Величины $B$ и $\tau$, определенные уравнениями (9′), не совпадают с величинами $B$ и $\tau$, определенными уравнениями (9), но отличаются от них очень мало.

Заметим, что $\gamma_i^0$, $n_2^0$, $\varepsilon_0$ постоянны и переменные элементы орбиты Солнца не участвуют в новом определении.

Как изменится при этом уравнение (5′)

$$d\Omega''=\sum x'\,dy''-\sum B\,d\tau-(G-\Phi_1)\,\frac{d\tau_3}{n_2}+\sum\Gamma_i\,d\gamma_i?$$

В нем нужно заменить $\gamma_i$, $n_2$ и $\tau_3$ приближенными значениями $\gamma_i^0$, $n_2^0$ и $\tau_3^0$; поэтому имеем $d\gamma_i^0=0$, $\frac{d\tau_3^0}{n_2^0}=dt$, так как $\gamma_i^0$ и $\varepsilon_0$ являются постоянными, и в конечном счете получаем

$$d\Omega''=\sum x'\,dy''-\sum B\,d\tau-(G_0-\Phi_1^0)\,dt.$$

Более того, так как $\Phi_1$ зависит от солнечных постоянных, то необходимо заменить $\Phi_1$ (которая является функцией $x'$, $y''$, $\tau_3$, $\gamma_i$) тем ее значением, которое получается при замене $\gamma_i$ и $\tau_3$ на $\gamma_i^0$ и $\tau_3^0$; обозначим результат такой замены через $\Phi_1^0$, откуда

$$W=\Phi_1^0-G_0.$$

Поэтому будем иметь уравнения

$$\frac{dB}{dt}=\frac{\partial\Phi_2}{\partial\tau},\qquad \frac{d\tau}{dt}=-\frac{\partial\Phi_2}{\partial B}, \tag{7'}$$

в которых положено $\Phi_2=\frac{F''}{m_1'}-W=\Phi_1+\frac{U_6}{m_1'}-(\Phi_1^0-G_0)$, откуда

$$\Phi_2=G_0+R,\quad R=\frac{U_6}{m_1'}+(\Phi_1-\Phi_1^0).$$

Заметим, что $G_0$ не зависит от $B$. Итак, мы возвращаемся к уравнениям вида (8), которые рассматриваются таким же образом.

Ньюкомб (см. «Investigation of inequalities in the motion of the Moon produced by the action of the planets», Washington, Carnegie Institution, juin 1907) применяет смешанный метод; действительно, он применяет для определения элементов ориентации метод § 379, а для других элементов метод, изложенный в § 380.

**381.** Вообще члены, порождаемые действием планет, весьма малы и становятся заметными только благодаря наличию малых делителей, если промежуток времени достаточно большой. Чаще всего они становятся заметными в случае двойного интегрирования, которое вводит в знаменателе квадраты малых делителей. Мы получим наиболее существенную часть некоторого долгопериодического члена, ограничиваясь интегрированием следующих уравнений:

$$\frac{dB}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\tau},\qquad \frac{d\tau}{dt}=-\frac{\partial G}{\partial B}.$$

Мы пренебрегаем, таким образом, в правой части второго уравнения членом $-\frac{\partial R}{\partial B}$, который подвергается простому интегрированию. Если обозначим через $\delta B$, $\delta\gamma$, $\delta\tau$ неравенства, порождаемые заданным членом $\delta R$ возмущающей функции, и если $g$ — это значение $G$, которое получается при замене $B$ и $\gamma$ их начальными значениями, то можно написать, что

$$\frac{d(\delta B)}{dt}=\frac{\partial(\delta R)}{\partial\tau}; \quad \frac{d(\delta\tau_i)}{dt}=-\sum\frac{\partial^2 G}{\partial B_i\,\partial B_k}\delta B_k-\sum\frac{\partial^2 G}{\partial B_i\,\partial\gamma_k}\delta\gamma_k. \qquad (10)$$

382. Мы должны различать прямое и косвенное действия планеты. Если бы существовало только прямое действие, то все происходило бы так, как если бы Солнце $B$ и планета $P$ описывали кеплеровские орбиты — первое относительно $D$, вторая относительно $G$, а Земля и Луна подвергались бы притяжению этих двух подвижных тел. Если бы существовало только косвенное действие, то все происходило бы так, как если бы планеты не было, а Солнце описывало бы вокруг точки $D$ орбиту, возмущенную притяжением планеты.

В случае уравнений § 380 прямое действие порождается членом с $\frac{U_6}{m_1'}$, а косвенное действие членом $\Phi_1-\Phi_1^0$ $\Big[$в этом случае в уравнениях (10) нужно заменить $G$ через $G_0$, и поэтому производные $\frac{\partial^2 G}{\partial B_i\,\partial\gamma_k}$ равны нулю, так как $G_0$ зависит только от $B\Big]$.

В случае § 379 прямое действие планеты получим с помощью уравнений (8), рассматривая в них $\gamma_i$ и $\frac{d\tau_3}{dt}$ как постоянные и заменяя $R$ на $\frac{U_6}{m_1'}$. Косвенное действие получим, определяя вариации $\gamma_i$ и $\frac{d\tau_3}{dt}$ с помощью уравнений (1) и заменяя $R$ членами

$$(G-\Phi_1)\,\varepsilon-\sum\Gamma_i\frac{d\gamma_i}{dt}.$$

Поскольку возмущающая планета близка к Солнцу, то прямое и косвенное действия почти равны и противоположны по знаку.

В самом деле, пусть $G_1$ есть центр масс $P$ и $B$. В случае, который нас интересует, точка $G_1$ будет описывать кеплеровскую орбиту вокруг точки $D$, аналогичную орбите, которую описывало бы Солнце $B$, если бы планеты не существовало, но большая полуось для одного и того же среднего движения будет умножаться на

$$\sqrt[3]{1+\frac{m_{10}}{m_4}}.$$

Если в пределе мы пренебрегаем расстоянием $PB$, то все происходит для прямого действия так, как будто расстояние умножилось на

$$\sqrt[3]{1+\frac{m_{10}}{m_4}};$$

таким образом, что касается соответствующих неравенств (т. е.

неравенств, которые не зависят от угла $PG_1D$), то имеет место компенсация.

Имеется также компенсация для неравенств, пропорциональных расстоянию $PB$ (и которые содержат угол $PG_1D$ в качестве аргумента), так как отклонение $BG_1$, умноженное на $m_4$, равно отклонению $PG_1$, умноженному на $m_{10}$. Компенсации нет для неравенств, пропорциональных высшим степеням $PB$, но эти неравенства всегда очень незначительны.

383. Мы должны различать два сорта периодических планетных неравенств. Неравенства первого сорта это те, аргументы которых зависят только от $\tau_3$ и $\tau_4$. В таком случае имеем, обращаясь к уравнениям (10), что

$$\frac{d(\delta R)}{d\tau}=0,$$

откуда

$$\delta B=0, \qquad \frac{d(\delta\tau_i)}{dt}=-\sum\frac{\partial^2 G}{\partial B_i\,\partial\gamma_k}\delta\gamma_k.$$

Следовательно, эти неравенства порождены почти исключительно косвенным действием (мы хотим сказать, что члены, которые происходят от косвенного действия, сами подвергаются двойному интегрированию) и прямое действие главным образом пренебрежимо мало, когда промежуток времени большой.

Величины $\gamma_k$, от которых зависит $G$, суть $E_3$ и большая полуось орбиты Солнца $a'$. Член с $E_3$ всегда весьма мал. Поэтому можно написать, что

$$\frac{d(\delta\tau_i)}{dt}=-\frac{\partial^2 G}{\partial B_i\,\partial a'}\delta a',$$

и так как, с другой стороны, $\lambda$—это долгота Солнца, то

$$\frac{d(\delta\lambda)}{dt}=-\frac{3n_2}{2a'}\delta a'.$$

Отсюда видно, что неравенства $\delta\tau$, $\delta\tau_1$, $\delta\tau_2$ почти пропорциональны между собой и пропорциональны солнечному неравенству $\delta\lambda$. Неравенство $\delta\tau$ порождает одно долгопериодическое неравенство в истинной долготе Луны; неравенства $\delta\tau_1$ и $\delta\tau_2$ порождают совпадающие короткопериодические неравенства в истинной долготе. Основное из этих неравенств первого сорта порождается притяжением Венеры и имеет период $8\tau_4-13\tau_3$.

384. Неравенства второго сорта это те, аргументы которых зависят от $\tau$, $\tau_1$ или $\tau_2$. Для них $\delta B_k$ не равны более нулю. И наоборот, так как $\delta\gamma_k$ содержат только члены, не зависящие от $\tau$, $\tau_1$ или $\tau_2$, мы должны положить $\delta\gamma_k=0$, откуда

$$\frac{d(\delta\tau_i)}{dt}=-\sum\frac{\partial^2 G}{\partial B_i\,\partial B_k}\delta B_k.$$

Эти неравенства порождаются главным образом прямым действием. Для их определения напишем $U_6$, пренебрегая параллаксом, в виде

$$\frac{U_6}{m_1' m_{10}} = \frac{1-3\cos^2 PDA}{2PD^3} AC^2$$

или

$$\frac{U_6}{m_1'} = -\frac{m_{10}}{4PD^5}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}' + 3\mathfrak{B}\mathfrak{B}' + 12\mathfrak{C}\mathfrak{C}' + 12\mathfrak{D}\mathfrak{D}' + 12\mathfrak{E}\mathfrak{E}'),$$

где $\mathfrak{A} = x_1'^2 + x_2'^2 - 2x_3'^2$, $\mathfrak{B} = x_1'^2 - x_2'^2$, $\mathfrak{C} = x_2'x_3'$, $\mathfrak{D} = x_1'x_3'$, $\mathfrak{E} = x_1'x_2'$ и где $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{E}'$ образованы с помощью проекций вектора $PD$, т. е. с помощью величин

$$x_{10}' + \lambda x_4', \qquad x_{11}' + \lambda x_5', \qquad x_{12}' + \lambda x_6',$$

где

$$\lambda = \frac{m_4}{m_1 + m_4 + m_7},$$

как и $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, образованы с помощью $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$.

Видно, что $\frac{\mathfrak{A}'}{PD^5}$, $\frac{\mathfrak{B}'}{PD^5}$, ... зависят только от $\tau_3$ и $\tau_4$, тогда как $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... содержат только аргументы, зависящие от лунных координат, а именно (если ограничиться эллиптическими членами) аргументы вида

$$2j\tau_2 + k\tau_1 \quad \text{для} \quad \mathfrak{A},$$

$$2\tau + 2\tau_3 + 2j\tau_2 + k\tau_1 \quad \text{для} \quad \mathfrak{B} \ \text{и} \ \mathfrak{E},$$

$$\tau + \tau_3 + (2j-1)\tau_2 + k\tau_1 \quad \text{для} \quad \mathfrak{C} \ \text{и} \ \mathfrak{D}.$$

Главные неравенства этого сорта, которые определил Ганзен и которые вызваны прямым действием Венеры, суть те, которые имеют аргумент $\tau_1 + 16\tau_3 - 18\tau_4$ (период равен 239 годам), обусловленный членом с $\tau_1$ в $\mathfrak{A}$ и членом с $16\tau_3 - 18\tau_4$ в $\frac{\mathfrak{A}}{PD^5}$. Это также те неравенства, которые определил Нейсон, и которые вызваны прямым действием Юпитера и имеют аргумент $2\tau + 2\tau_3 - \tau_1 - 3\tau_4$ (период равен 37 годам), обусловленный членом с $2\tau + 2\tau_3 - \tau_1$ в $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{E}$ и членом с $3\tau_4$ в $\frac{\mathfrak{B}'}{PD^5}$ и $\frac{\mathfrak{E}'}{PD^5}$.

Для более детального знакомства мы ограничимся здесь ссылкой на упомянутый выше мемуар Ньюкомба, а также на мемуар Редо, опубликованный в томе XXI «Memoires de l'observatoire» и изложенный в томе III «Traité de la Mécanique céleste» Тиссерана.

# ГЛАВА XXXI

# ВЕКОВЫЕ УСКОРЕНИЯ

385. Чтобы изучить вековые ускорения, мы должны сначала обратиться к тому, что было сказано в § 105 главы X о неизменности больших полуосей орбит.

Пусть, вообще, дана система канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad F=F_0+\mu R, \tag{1}$$

где $\mu$ — малый параметр. Мы будем различать два сорта переменных $x_i$, которые будем обозначать через $x'_i$ и через $x''_i$; обозначим через $y'_i$ и $y''_i$ сопряженные переменные, соответствующие $x'_i$ и $x''_i$.

Будем предполагать, что $F_0$ зависит только от $x'$ и не зависит от $x''$, $y'$ и $y''$; что касается $R$, то она зависит от переменных всех сортов, но является периодической по $y'$ и $y''$. Кроме того, будем предполагать, что $R$ зависит явно от времени; более точно, будем предполагать, что $R$ есть периодическая функция относительно $y'$, $y''$ и относительно некоторого числа аргументов $w$, которые являются и з в е с т н ы м и л и н е й н ы м и функциями времени.

В первом приближении имеем

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{\partial F_0}{\partial y'}=0, \qquad \frac{dx''}{dt}=\frac{\partial F_0}{\partial y''}=0, \qquad \frac{dy''}{dt}=-\frac{\partial F_0}{\partial x''}=0,$$

$$x'=\text{const}, \qquad x''=\text{const}, \qquad y''=\text{const}, \qquad \frac{dy'}{dt}=-\frac{\partial F_0}{\partial x'}=\text{const}.$$

Чтобы получить второе приближение, заменим в частных производных функции $R$ переменные их приближенными значениями, которые мы нашли; поэтому будем иметь

$$\frac{dx'}{dt}=\mu\frac{\partial R}{\partial y'}$$

и правая часть представится в виде тригонометрического ряда.

В самом деле, $R$ есть периодическая функция $y'$, $y''$ и $w$; переменные $w$ суть известные линейные функции времени, и то же самое можно сказать относительно приближенных значений $y'$ в первом приближении; что касается $y''$, то они постоянны.

Если допустить, что между $\frac{\partial F_0}{\partial x'_i}$ и $\frac{dw}{dt}$ (т. е. между средними движениями) нет никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами, то вековые изменения могут происходить только из членов тригонометрического ряда, которые одновременно не зависят ни от $y'$, ни от $w$. Но все эти члены исчезают, когда мы дифференцируем $R$ по $y'_i$. Следовательно, в $x'_i$ вековых членов нет.

Это представляет собой обобщение теоремы о неизменности больших полуосей.

Применим это к уравнениям (8) из предыдущей главы. $G$ будет играть роль $F_0$, $R$ — роль $\mu R$, $B$ — роль $x'$, $\tau$ — роль $y'$ и, наконец, $\tau_3$ и $\tau_4$ — роль $w$; мы не будем иметь переменных, аналогичных $x''$ и $y''$, тогда как в уравнениях (5′) из § 93 главы VI переменные $L$, $\lambda$, $\varrho$ и $\omega$ играют роль $x'$, $y'$, $x''$ и $y''$ соответственно; в первом приближении имеем

$$B = \text{const}, \qquad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial G}{\partial B} = \text{const}.$$

Во втором приближении имеем

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \tau}.$$

В правой части $B$ и $\gamma$ заменены их приближенными значениями, которые являются постоянными, $\tau$, $\tau_3$ и $\tau_4$ заменены приближенными значениями, которые являются линейными функциями времени.

Таким образом, получается тригонометрический ряд. Члены этого ряда, которые одновременно не зависят ни от $\tau$, ни от $\tau_3$, ни от $\tau_4$ и которые могли бы порождать вековые изменения, исчезнут при дифференцировании по $\tau$, $\tau_1$ или $\tau_2$; таким образом, величины $B$, $B_1$, $B_2$ не испытывают никакого векового изменения.

**386.** Предыдущий параграф дает нам, что вековые изменения в $B$, т. е.

$$\delta B, \qquad \delta B_1, \qquad \delta B_2,$$

равны нулю. На это обстоятельство опирается Браун при определении вековых ускорений $\delta\nu$, $\delta\nu_1$, $\delta\nu_2$ различных средних движений. Для этого вернемся к формуле из § 363

$$dH = B\,d\nu + B_1\,d\nu_1 + B_2\,d\nu_2.$$

Если рассматривать $B$, $H$, $\nu_1$ и $\nu_2$ как функции $\nu=\frac{n_2}{m}$, $E_1$ и $E_2$, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \nu}&=B+B_1\frac{\partial \nu_1}{\partial \nu}+B_2\frac{\partial \nu_2}{\partial \nu},\\ \frac{\partial H}{\partial E_1}&=\qquad B_1\frac{\partial \nu_1}{\partial E_1}+B_2\frac{\partial \nu_2}{\partial E_1},\\ \frac{\partial H}{\partial E_2}&=\qquad B_1\frac{\partial \nu_1}{\partial E_2}+B_2\frac{\partial \nu_2}{\partial E_2}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Если пренебречь величинами $E_1^2$, $E_2^2$ и, следовательно, $B_1$ и $B_2$, которые делятся соответственно на $E_1^2$ и $E_2^2$, то останется

$$\frac{\partial H}{\partial \nu}=B$$

и, следовательно,

$$\delta\left(\frac{\partial H}{\partial \nu}\right)=0.$$

Величины $B$, $H$ и $\nu$ суть функции не только трех лунных постоянных $\nu$, $E_1$ и $E_2$, но еще и двух солнечных постоянных, а именно большой полуоси $a'$ и эксцентриситета $E_3$. В силу теоремы Адамса $H$ не содержит членов с $E_1^2$ и $E_2^2$, так что, пренебрегая высшими степенями этих величин, получим

$$\frac{\partial H}{\partial E_1}=\frac{\partial H}{\partial E_2}=\frac{\partial^2 H}{\partial \nu\,\partial E_1}=\frac{\partial^2 H}{\partial \nu\,\partial E_2}=0,$$

откуда

$$\delta\left(\frac{\partial H}{\partial \nu}\right)=\frac{\partial^2 H}{\partial \nu^2}\,\delta\nu+\frac{\partial^2 H}{\partial \nu\,\partial E}\,\delta E_3=0.\tag{3}$$

Так как $\delta E_3$ известна из теории движения планет, то это уравнение будет давать $\delta\nu$. Далее найдем

$$\delta\nu_i=\frac{\partial \nu_i}{\partial \nu}\,\delta\nu+\frac{\partial \nu_i}{\partial E_3}\,\delta E_3.\tag{4}$$

В самом деле, мы должны заметить, что согласно с порядком приближения имеем

$$E_1\,\delta E_1=E_2\,\delta E_2=0,$$

и так как $B_1$ делится на $E_1^2$, можно написать $B_1=C_1E_1^2$. Поэтому

$$\delta B_1=E_1^2\delta C_1+C_1\delta\left(E_1^2\right)=0,\tag{5}$$

откуда (так как пренебрегаем $E_1^2$)

$$\delta\left(E_1^2\right)=0.$$

Также имеем $\delta\left(E_2^2\right)=0$.

Уравнения (3) и (4) определяют вековые ускорения $\delta\nu$, $\delta\nu_1$, $\delta\nu_2$. Но для этого необходимо воспользоваться выражениями $\nu_1$ и $\nu_2$ как функциями $\nu$ и $E_3^2$, или, что то же самое, выражениями $c$ и $g$ как функциями $m$ и $E_3^2$. С другой стороны, необходимо знать выражение $H$ как функции $\nu$ и $E_3$.

Нам достаточно вспомнить, что в силу теоремы Адамса, когда мы пренебрегаем параллаксом $H$ с точностью до постоянного множителя есть не что иное, как постоянный член в разложении $\frac{1}{r}$ в тригонометрический ряд.

**387.** Прежде чем перейти к следующему приближению относительно $E_1^2$ и $E_2^2$, заметим, что

$$\delta\left(\frac{\partial\nu_i}{\partial\nu}\right)=\frac{\partial^2\nu_i}{\partial\nu^2}\delta\nu+\frac{\partial^2\nu_i}{\partial\nu\,\partial E_3}\delta E_3, \tag{6}$$

откуда следует, что уравнения (3), (4) и (6) дают в первом приближении

$$\delta\nu,\quad \delta\nu_i,\quad \delta\left(\frac{\partial\nu_i}{\partial\nu}\right).$$

Это дает возможность перейти ко второму приближению. Воспользуемся обозначениями § 371 и напишем

$$H=H_0+aE_1^4+2bE_1^2E_2^2+cE_2^4=H_0+H_4,$$
$$\nu_1=\lambda_1+\mu_1E_1^2+\mu_1'E_2^2,$$
$$\nu_2=\lambda_2+\mu_2E_1^2+\mu_2'E_2^2,$$
$$B_1=\beta E_1^2,\quad B_2=\gamma E_2^2.$$

В первом приближении величины $H$, $\nu_1$ и $\nu_2$ сводятся к первым членам $H_0$, $\lambda_1$ и $\lambda_2$.

Переходим ко второму приближению. Так как $\delta\,(E_1^2)$ и $\delta\,(E_2^2)$— величины порядка $E_1^2$ и $E_2^2$, то

$$\delta H_4,\quad \delta\left(\frac{\partial H_4}{\partial\nu}\right),$$

которые являются многочленами второй степени относительно $E_1^2$, $E_2^2$, $\delta\,(E_1^2)$, $\delta\,(E_2^2)$, будут величинами порядка $E_1^4$ или $E_2^4$, и, следовательно, ими можно пренебречь, поэтому имеем

$$\delta\left(\frac{\partial H}{\partial\nu}\right)=\delta\left(\frac{\partial H_0}{\partial\nu}\right)=\frac{\partial^2H_0}{\partial\nu^2}\delta\nu+\frac{\partial^2H_0}{\partial\nu\,\partial E_3}\delta E_3.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial H}{\partial\nu}=B+B_1\frac{\partial\nu_1}{\partial\nu}+B_2\frac{\partial\nu_2}{\partial\nu},$$

откуда, учитывая, что $\delta B$ равны нулю, имеем

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial \nu^2}\delta\nu+\frac{\partial^2 H_0}{\partial \nu\,\partial E_3}\delta E_3=\beta E_1^2\delta\left(\frac{\partial \nu_1}{\partial \nu}\right)+\gamma E_2^2\delta\left(\frac{\partial \nu_2}{\partial \nu}\right). \qquad (7)$$

Так как во все члены правой части входит множитель $E_1^2$ или $E_2^2$, мы можем заменить в правой части $\delta\left(\frac{\partial \nu_1}{\partial \nu}\right)$ и $\delta\left(\frac{\partial \nu_2}{\partial \nu}\right)$ их приближенными значениями из первого приближения, так что уравнение (7) будет нам давать новое значение $\delta\nu$.

388. Далее, для $\delta\nu_i$ имеем

$$\delta\nu_i=\frac{\partial \nu_i}{\partial \nu}\delta\nu+\frac{\partial \nu_i}{\partial E_3}\delta E_3+\mu_i\delta(E_1^2)+\mu_i'\delta(E_2^2). \qquad (8)$$

На этот раз при вычислении $\frac{\partial \nu_i}{\partial \nu}$, $\frac{\partial \nu_i}{\partial E_3}$ надо будет учитывать члены $\mu_i E_1^2+\mu_i' E_2^2$.

Чтобы вычислить $\delta(E_1^2)$, воспользуемся равенством (5), в котором положим

$$C_1=\beta, \quad \delta C_1=\delta B=\frac{\partial\beta}{\partial\nu}\delta\nu+\frac{\partial\beta}{\partial E_3}\delta E_3.$$

Впрочем, мы можем в этой формуле заменить $\delta\nu$ приближенными значениями из первого приближения. Аналогично вычисляется и $\delta(E_2^2)$.

Можно рассматривать разложения $\nu_i$ как известные, следовательно, известными можно считать и $\lambda_i$, $\mu_i$, $\mu_i'$. Известно также разложение $\frac{1}{r}$ и, следовательно, разложения $H$, $H_0$, $a$, $b$, $c$.

Что касается $\beta$ и $\gamma$, то они даются теоремой Адамса из § 371, откуда

$$\beta=\frac{2a}{\mu_1}=\frac{2b}{\mu_1'}, \quad \gamma=\frac{2b}{\mu_2}=\frac{2c}{\mu_2'}.$$

Заметим, что во всем этом анализе элементы ориентации не играют никакой роли, откуда сразу же следует, что вековые движения эклиптики не могут вызвать никакого векового ускорения в движении Луны, что соответствует результатам Пюизе, полученным другим способом.

Осталось сказать о неравенствах, вызванных сплюснутостью Земли; ввиду отсутствия новых работ по этому вопросу мы ограничимся ссылкой на том III «Traité de la Mécanique céleste» Тиссерана.

*А. Пуанкаре*

**ЛЕКЦИИ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ**

**М., 1965 г., 572 стр. с илл.**

**Редактор *Г. С. Куликов.***

**Техн. редактор *С. Я. Шкляр.***

**Корректор *Е. А. Белицкая.***

---

**Сдано в набор 13/VIII 1964 г.**
**Подписано к печати 19/XII 1964 г.**
**Бумага $60\times90/_{16}$.**
**Физ. печ. л. 35,75. Усл. печ. л. 35,75.**
**Уч.-изд. л. 28.**
**Тираж 3200 экз.**
**Цена книги 1 р. 60 к. Заказ № 342.**

---

**Издательство «Наука».**

**Главная редакция**
**физико-математической литературы.**

**Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.**

---

**Московская типография № 16**
**Главполиграфпрома**
**Государственного комитета**
**Совета Министров СССР по печати.**
**Москва, Трехпрудный пер., 9.**