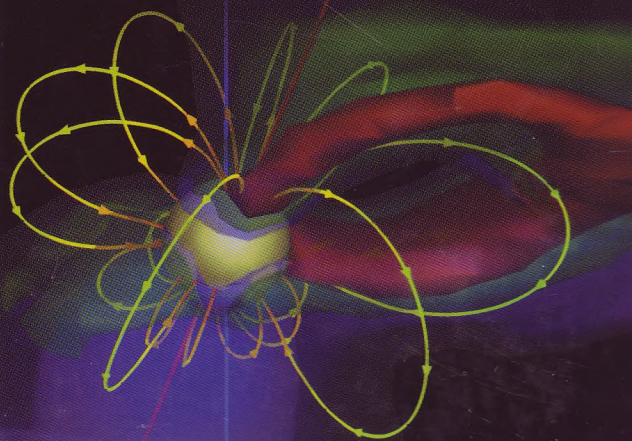
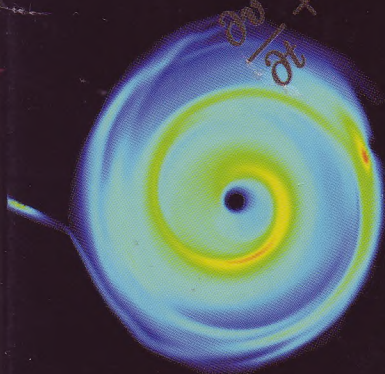


**Д.В. БИСИКАЛО,  
А.Г. ЖИЛКИН, А.А. БОЯРЧУК**

# **ГАЗОДИНАМИКА ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД**



**Д.В. БИСИКАЛО,  
А.Г. ЖИЛКИН, А.А. БОЯРЧУК**

**ГАЗОДИНАМИКА  
ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ  
ЗВЕЗД**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2013

УДК 524.38

ББК 22.66

Б 65

Бисикало Д.В., Жилкин А.Г., Боярчук А.А. **Газодинамика тесных двойных звезд.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 632 с. — ISBN 978-5-9221-1404-2.

В книге обобщаются результаты фундаментальных исследований газодинамики переноса вещества в тесных двойных звездах, находящихся на стадии обмена масс. Приводятся основные сведения о физике процессов обмена веществом в тесных двойных системах. Рассмотрены общие принципы численного моделирования и представлен обзор современных численных методов, наиболее часто применяемых для решения газодинамических астрофизических задач. Представлены результаты численного моделирования газодинамики вещества в тесных двойных системах без магнитного поля. Рассмотрены изменения в картине течения, вызванные наличием магнитных полей в тесных двойных системах.

Книга предназначена научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов, обучающимся по специальности «Астрофизика».

---

Научное издание

*БИСИКАЛО Дмитрий Валерьевич*

*ЖИЛКИН Андрей Георгиевич*

*БОЯРЧУК Александр Алексеевич*

## **ГАЗОДИНАМИКА ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД**

Редактор *О.В. Салецкая*

Редактор-организатор: *Т.Ю. Давидовская*

Оригинал-макет: *Т.Н. Савицкая*

Оформление переплета: *Н.Л. Лисицына*

Подписано в печать 22.05.2013. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 39,5. Уч.-изд. л. 43,5. Тираж 100 экз. Заказ №875.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru), [fmlsale@maik.ru](mailto:fmlsale@maik.ru);

<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства

в ООО «Чебоксарская типография № 1»

428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

Тел.: (8352) 28-77-98, 57-01-87

Сайт: [www.volga-print.ru](http://www.volga-print.ru)

ISBN 978-5-9221-1404-2



9 785922 114042

---

© ФИЗМАТЛИТ, 2013

© Д. В. Бисикало, А. Г. Жилкин,  
А. А. Боярчук, 2013

ISBN 978-5-9221-1404-2

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	9
Введение . . . . .	10

### Часть I. Тесные двойные звезды. Общие сведения

Глава 1. <b>Форма компонентов в тесных двойных системах</b> . . . . .	17
1.1. Поле сил в двойных звездах . . . . .	17
1.2. Понятие полости Роша . . . . .	20
1.3. Расчет равновесной конфигурации компонента двойной системы для случаев политропного и вырожденного газов . . . . .	23
1.4. Несинхронное вращение . . . . .	26
1.4.1. Случай соосных векторов собственного и орбитального вращения (26). 1.4.2. Особые режимы вращения (31). 1.4.3. Общий случай несоосных векторов собственного и орбитального вращения (33).	
1.5. Некруговые орбиты . . . . .	33
Глава 2. <b>Обмен веществом в тесных двойных системах</b> . . . . .	36
2.1. Параметры струи вблизи внутренней точки Лагранжа $L_1$ . . . . .	36
2.2. Траектория струи . . . . .	39
2.3. Аккреционный диск . . . . .	42
2.4. Особенности переноса вещества в системах с магнитным полем . . . . .	49
Глава 3. <b>Температура аккреционных дисков</b> . . . . .	53
3.1. Основные уравнения . . . . .	53
3.2. Оптически толстые диски . . . . .	59
3.3. Оптически тонкие диски . . . . .	65

<b>Глава 4. Математическое описание переноса вещества в тесных двойных звездах.</b> . . . . .	67
4.1. Уравнение Больцмана . . . . .	67
4.2. Уравнения для моментов . . . . .	70
4.3. Приближение газовой динамики . . . . .	74
4.4. Кинетическое описание плазмы . . . . .	78
4.4.1. Кинетические уравнения (78). 4.4.2. Квазигазодинамическое приближение (81). 4.4.3. Уравнения для массовых величин (86).	
4.5. Магнитная газодинамика . . . . .	88
4.5.1. Полностью ионизованная плазма (88). 4.5.2. Слабоионизованная плазма (91). 4.5.3. Магнитогазодинамическое приближение (92).	

## **Часть II. Численные методы в астрофизике**

<b>Глава 5. Принципы численного моделирования.</b> . . . . .	101
5.1. Дискретизация . . . . .	101
5.1.1. Описание общего подхода (101). 5.1.2. Расчетные сетки и представления величин в ячейках (104).	
5.2. Конечно-разностная аппроксимация . . . . .	108
5.2.1. Аппроксимация дифференциальных операторов (108). 5.2.2. Метод конечных объемов (112). 5.2.3. Конечно-разностные задачи (115). 5.2.4. Метод расщепления (120).	
5.3. Анализ устойчивости . . . . .	123
5.3.1. Метод дискретных возмущений (123). 5.3.2. Дифференциальные приближения (125). 5.3.3. Спектральный метод (127). 5.3.4. Энергетический метод (130).	
5.4. Адаптивные сетки . . . . .	132
5.4.1. Основные способы адаптации сеток (132). 5.4.2. Интегрированные адаптивные сетки (134). 5.4.3. Адаптивная сетка в многомерном случае (136).	
<b>Глава 6. Численное решение гиперболических уравнений</b> . . . . .	142
6.1. Разностные схемы для гиперболических систем уравнений . . . . .	142
6.1.1. Классификация методов (142). 6.1.2. Метод характеристик (143). 6.1.3. Схема Лакса-Вендроффа (147).	
6.2. Методы квазичастиц . . . . .	150
6.2.1. Основные принципы (150). 6.2.2. Метод частиц в ячейке (152). 6.2.3. Метод крупных частиц (154).	
6.3. Метод SPH . . . . .	155
6.3.1. Базовые принципы (155). 6.3.2. Аппроксимация основных уравнений (157). 6.3.3. Искусственная вязкость и самогра-	

витация (159). 6.3.4. Переменная ширина размазывания (161).  
6.3.5. Преимущества и недостатки (162).

Глава 7. <b>Годуновские методы</b> . . . . .	171
7.1. Стандартная схема Годунова . . . . .	171
7.1.1. Общие принципы (171). 7.1.2. Линейные уравнения (173). 7.1.3. Представления потока (175). 7.1.4. Учет источниковых членов (177).	
7.2. Методы, основанные на приближенном решении задачи Римана . .	181
7.2.1. Описание различных подходов (181). 7.2.2. Схема Лакса–Фридрикса (183). 7.2.3. Схема HLL (187). 7.2.4. Схема Ошера (190).	
7.3. Схема Рои . . . . .	193
7.3.1. Общее описание (193). 7.3.2. Вариант схемы для уравнений газовой динамики (195). 7.3.3. Энтропийная поправка (199). 7.3.4. Случай произвольного уравнения состояния (203).	
7.4. Схемы для уравнений магнитной газодинамики . . . . .	206
7.4.1. Краткий обзор схем (206). 7.4.2. Схема Лакса–Фридрикса (206). 7.4.3. Схема HLLD (210). 7.4.4. Схема Рои (214). 7.4.5. Методы очистки дивергенции магнитного поля (219). 7.4.6. Динамическая адаптация расчетных сеток в МГД-задачах (221).	
Глава 8. <b>Схемы повышенного порядка аппроксимации</b> . . . . .	229
8.1. Метод PPM . . . . .	229
8.1.1. Схема PPM для уравнения адвекции (230). 8.1.2. Случай системы линейных уравнений (232). 8.1.3. Вариант метода для уравнений газодинамики (234).	
8.2. TVD-схемы. . . . .	242
8.2.1. Положительность и монотонность (242). 8.2.2. Линейные схемы (245). 8.2.3. Принцип TVD (247).	
8.3. Построение повышающих поправок. . . . .	249
8.3.1. Основные концепции (249). 8.3.2. Схема высокого порядка аппроксимации для уравнения адвекции (251). 8.3.3. Случай гиперболической системы уравнений (257). 8.3.4. Примеры тестовых расчетов (262).	

## **Часть III. Структура течения вещества в тесных двойных звездах без магнитного поля**

Глава 9. <b>Морфология течения</b> . . . . .	277
9.1. Системы с горячими аккреционными дисками. . . . .	278
9.2. Системы с холодными аккреционными дисками . . . . .	280
9.3. Наблюдательные проявления элементов структуры течения. . . . .	285

9.3.1. «Горячая линия» (285). 9.3.2. Приливная спиральная волна (289). 9.3.3. Отошедшая ударная волна (292).

Глава 10. <b>Волны плотности в аккреционных дисках</b> . . . . .	300
10.1. «Прецессионная» волна в холодных дисках . . . . .	300
10.2. Спирально-вихревая структура в горячих дисках . . . . .	306
10.3. Влияние волн плотности на картину течения . . . . .	313
10.3.1. С упервспышки в системах типа SU UMa (314).	
10.3.2. Изменения яркости на внезатменных частях кривых блеска CVs (315).	
10.3.3. О возможности возникновения газодинамической турбулентности в аккреционных дисках (317).	
Глава 11. <b>Формирование общей оболочки</b> . . . . .	322
11.1. Механизм образования оболочки . . . . .	323
11.2. Структура оболочки . . . . .	332
11.2.1. Общая картина течения (332).	
11.2.2. Формирование спирального шлейфа (333).	
11.2.3. Внутренняя часть оболочки (335).	
11.2.4. Внешняя часть оболочки (338).	
11.3. Наблюдательные проявления общей оболочки. . . . .	339
11.4. Влияние потери массы и углового момента на эволюцию двойной звезды . . . . .	345
11.4.1. Основные факторы, определяющие эволюцию двойных звезд (345).	
11.4.2. Расчет скорости потери углового момента в трехмерных газодинамических моделях (350).	
Глава 12. <b>Обмен веществом в двойных системах с несинхронным вращением компонентов</b> . . . . .	353
12.1. Полуразделенные двойные системы. . . . .	354
12.2. Системы с компонентами, не заполняющими свои полости Роша . .	360
12.3. Двойные Ве-звезды . . . . .	364

## **Часть IV. Динамика вещества в магнитных тесных двойных звездах**

Глава 13. <b>Особенности численных моделей для систем с магнитным полем</b> . . . . .	381
13.1. Плазма в сильном магнитном поле . . . . .	381
13.1.1. Свойства МГД-течений в ТДС (381).	
13.1.2. Модификация уравнений МГД (382).	
13.1.3. Учет холловских токов (386).	
13.2. Численная модель, основанная на усредненных характеристиках течения . . . . .	389

13.2.1. Основные уравнения (389). 13.2.2. Магнитное поле аккректора и диска (393). 13.2.3. Диффузия магнитного поля (397).	
13.3. Численный метод . . . . .	398
13.3.1. Расщепление по физическим процессам (398). 13.3.2. Гиперболическая подсистема (401). 13.3.3. Численный метод решения уравнения диффузии (404).	
<b>Глава 14. Структура течения . . . . .</b>	<b>406</b>
14.1. Общая морфология течения в промежуточных полярах . . . . .	406
14.2. Роль диффузии магнитного поля . . . . .	412
14.3. Влияние величины магнитного поля на решение . . . . .	416
14.4. Зависимость решения от степени асинхронности вращения аккректора. . . . .	419
14.5. Картина течения вещества в полярах — системах с сильным магнитным полем . . . . .	425
14.6. Случай сложного (мультипольного) магнитного поля . . . . .	431
14.6.1. Системы со сложным магнитным полем (431). 14.6.2. Описание модели (433). 14.6.3. Особенности динамики вещества (440). 14.6.4. Наблюдательные проявления (452).	
<b>Глава 15. Магнитное поле в аккреционном диске . . . . .</b>	<b>459</b>
15.1. Механизмы усиления поля . . . . .	459
15.2. Результаты численного эксперимента . . . . .	460
15.3. Основные закономерности генерации поля в дисках. . . . .	468
15.3.1. Базовые уравнения (468). 15.3.2. Генерация поля дифференциальным вращением (469). 15.3.3. $\alpha\omega$ -динамо (472).	
15.4. Особенности дисковой аккреции в промежуточных полярах . . . . .	477
<b>Заключение. Перспективы численного моделирования газодинамики тесных двойных систем. . . . .</b>	<b>480</b>

## Приложения

<b>Приложение А. Гиперболические системы уравнений . . . . .</b>	<b>483</b>
A.1. Основы теории гиперболических систем одномерных уравнений. . .	483
A.1.1. Основные определения (483). A.1.2. Частные случаи (485). A.1.3. Нелинейные системы (487). A.1.4. Обобщенные решения (489).	
A.2. Задача Римана . . . . .	493
A.2.1. Автомодельные решения (493). A.2.2. Линейные уравнения (497). A.2.3. Нелинейные уравнения (499).	
A.3. Уравнения газовой динамики . . . . .	504
A.3.1. Характеристические свойства (504). A.3.2. Бегущие волны (507). A.3.3. Задача Римана (510).	
A.4. Уравнения магнитной газодинамики . . . . .	515



А.4.1. Характеристические свойства (515).	А.4.2. Сильные разрывы (519).	
Приложение Б. Перенос излучения . . . . .		526
Б.1. Уравнение переноса . . . . .		527
Б.1.1. Особенности учета излучения при моделировании астрофизических течений (526).	Б.1.2. Основные понятия теории излучения (528).	Б.1.3. Вывод уравнения переноса (531).
Б.1.4. Локальное термодинамическое равновесие (532).	Б.1.5. Кинетическое уравнение для фотонов (534).	Б.1.6. Моментные уравнения (536).
Б.2. Приближенные модели переноса излучения . . . . .		538
Б.2.1. Функции нагрева и охлаждения (538).	Б.2.2. Диффузионное приближение (542).	Б.2.3. Приближение Шварцшильда–Шустера (544).
Б.2.4. Приближение Эддингтона (545).	Б.2.5. Приближение диффузии с ограниченным потоком (546).	Б.2.6. Приближение Соболева (548).
Б.3. Перенос излучения в движущейся среде . . . . .		550
Б.3.1. Эффект Доплера (550).	Б.3.2. Моментные уравнения для движущейся среды (553).	Б.3.3. Медленно движущаяся среда (555).
Б.3.4. Диффузия излучения в медленно движущейся среде (557).	Б.3.5. Уравнения газодинамики и магнитной газодинамики с учетом излучения (559).	
Приложение В. Релятивистские эффекты . . . . .		562
В.1. Описание релятивистских течений в тесных двойных системах . . . . .		562
В.1.1. О возможных постановках задач моделирования структуры течения в ТДС с релятивистскими компонентами (562).	В.1.2. Описание систем отсчета в теории относительности (565).	В.1.3. Метод кинематрических инвариантов (568).
В.1.4. Тензор энергии–импульса (570).		
В.2. Релятивистская газодинамика . . . . .		572
В.2.1. Система уравнений релятивистской газодинамики (572).	В.2.2. Уравнение состояния (579).	В.2.3. Релятивистские газодинамические сильные разрывы (583).
В.3. Релятивистская магнитная газодинамика . . . . .		587
В.3.1. Система уравнений релятивистской магнитной газодинамики (587).	В.3.2. Характеристические свойства (592).	В.3.3. Релятивистские сильные МГД-разрывы (596).
Список литературы . . . . .		601

## Предисловие

В книге обобщаются результаты фундаментальных исследований газодинамики переноса вещества в тесных двойных звездах, находящихся на стадии обмена массой. Исследование структуры течения в таких объектах чрезвычайно важно, и его результаты могут использоваться как при рассмотрении эволюционного статуса звезды, так и при интерпретации наблюдательных данных. Попытки изучения массопереноса предпринимаются начиная с 40-х годов XX века, однако лишь в последнее время появились достаточно мощные вычислительные средства, позволяющие провести моделирование с хорошим пространственным разрешением и на достаточно больших временных интервалах. Монография базируется, главным образом, на оригинальных результатах, полученных авторами в последние годы в Институте астрономии РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Книга будет полезна широкому кругу астрономов и астрофизиков, занимающихся изучением самых распространенных объектов во Вселенной — двойных звезд.

Еще одним побудительным мотивом к написанию этой книги послужил стремительный рост влияния вычислительного эксперимента на исследовательскую работу в науке, и в астрофизике в особенности. В последние годы все больше людей говорят даже о возникновении нового направления в науке — вычислительной астрофизики. Одной из важнейших тем в этой новой области науки является моделирование газодинамики вещества, решению задач которой посвящено большое число оригинальных работ авторов. Это важнейшая тема, естественно, не только для астрофизики, но особое звучание она получила именно здесь, так как в астрофизических задачах приходится рассматривать течения в экстремальных, не воспроизводимых на Земле условиях. В силу новизны направления большинство молодых ученых, начинающих заниматься этой темой, не получили должного образования, поэтому в монографии мы представили не только результаты изучения переноса вещества в тесных двойных звездах, но и сделали попытку дать системное изложение основ газодинамики и вычислительного эксперимента, пригодное для введения в вычислительную астрофизику студентов старших курсов, аспирантов и начинающих исследователей.

Мы выражаем искреннюю благодарность своим коллегам по работе за дружескую поддержку при написании этой книги.

Наша книга одновременно и стара, и нова. Она одновременно и коротка, и длинна. Она стара по содержанию и Она коротка, потому что произведения многочисленных авторитетов приведены в кратких отрывках. Она длинна, потому что тема бесконечно велика...

*Якоб Шпренгер, Генрих Крамер, «Молот ведьм».*

## **Введение**

После рождения звезды и ее прихода на главную последовательность диаграммы Гершпрунга–Рессела суть дальнейшей эволюции одиночной звезды состоит в противодействии процессов ядерного горения, приводящих к выделению в центре звезды огромного количества энергии, и процессов ее гравитационного сжатия. Большую часть времени своей жизни звезда проводит на главной последовательности, когда в ее недрах горит водород и образуется гелий. Когда запасы водорода в центральных областях истощаются, ядро звезды начинает сжиматься под давлением вышележащих слоев, плотность в нем возрастает, и область с подходящими физическими условиями для горения водорода перемещается в оболочку вокруг ядра. По мере дальнейшего сжатия вещества в ядре, его температура повышается, и создаются условия для возгорания гелия, углерода и т.д. (в соответствии с последовательностью циклов ядерного горения). При продвижении слоевых источников наружу, продукты их реакции добавляются к ядру. Чтобы удержать оболочку над растущим ядром, слоевые источники должны вырабатывать все больше энергии. Внешние слои звезды откликаются на возрастание потока энергии изнутри расширением, и звезда с главной последовательности на диаграмме Гершпрунга–Рессела переходит на ветвь гигантов. Необратимость потерь энергии на излучение и ограниченность полного запаса энергии неизбежно ведут к конечному времени жизни звезды, поэтому некоторая часть когда-то существовавших звезд представлена теперь продуктами своей эволюции. Как показывают теоретические модели, в зависимости от массы звезды конечной стадией ее эволюции могут быть вырожденные карлики, нейтронные звезды или черные дыры, а конец эволюции особо массивных звезд отмечен одним из наиболее мощных событий в мире звезд — взрывом сверхновой. Теория эволюции одиночных звезд является в настоящее время одним из наиболее хорошо разработанных разделов астрофизики. Для его более глубокого изучения можно порекомендовать обзоры и монографии [1–7].

Однако подавляющее большинство звезд (некоторые исследователи считают, что вплоть до 80%) являются двойными. Наличие у звезды гравитационно связанного спутника может повлиять на протекание физических процессов в звезде и кардинальным образом изменить ее эволюцию. Дело в том, что принадлежность к двойной системе накладывает пределы на максимальные размеры звезды. Еще Эдуард Альберт Рош в 1848 г. в рамках ограниченной задачи трех тел исследовал движение пробных частиц в окрестности двойной звезды. Он нашел, что около каждого из компонентов можно выделить некоторый объем, в пределах которого гравитационное поле данного компонента оказывает преимущественное влияние на движение пробной частицы. Расширение в ходе эволюции звезды — компонента двойной системы — за пределы этого объема, называемого теперь полостью Роша <sup>1)</sup>, ведет к потере ею вещества. Следовательно, звезда больше не эволюционирует при постоянной массе, как предписывает типичный эволюционный сценарий для одиночной звезды. Поэтому при исследовании эволюции компонентов двойных систем необходимо учитывать гораздо большее число физических процессов, и, в частности, отклик внутренних слоев звезды на потерю ею вещества.

Очевидно, что не во всякой двойной системе влияние компонент друг на друга будет существенным. Если это широкие пары с орбитальным периодом, превышающим 100 лет, то, скорее всего, влиянием одного компонента на эволюцию другого можно пренебречь и рассматривать компоненты как одиночные звезды. Однако, для более тесных пар, например таких, где один или оба компонента заполняют свои полости Роша, взаимным влиянием пренебречь нельзя. Возникает вопрос: а насколько тесной должна быть система, чтобы для рассмотрения судьбы одного компонента нужно было учитывать наличие компаньона?

Попытаемся ответить на этот вопрос и воспользуемся классификацией двойных звезд, предложенной Копалом [8], который разделил все системы на три группы: 1) системы, в которых ни один компонент не заполняет свою полость Роша (разделенные системы); 2) системы, в которых только один компонент заполняет свою полость Роша (полуразделенные системы); 3) системы, в которых оба компонента заполняют свои полости Роша (контактные системы). Совершенно очевидно, что в полуразделенных и контактных системах компоненты влияют друг на друга. Однако известно, что в ряде случаев, даже когда оба компонента не заполняют свои полости Роша, возможен интенсивный обмен веществом в системе посредством звездного ветра. Одним из примеров таких систем являются симбиотические звезды, у которых, как правило, один компонент является холодным гигантом с высоким темпом потери вещества посредством звездного ветра, а другой —

---

<sup>1)</sup> Описание критической поверхности в ограниченной задаче трех тел, ограничивающей полости Роша обоих компонентов, приведено в параграфе 1.2.

горячим субкарликом. Наличие активного взаимодействия между компонентами симбиотических двойных подтверждено наблюдениями (см., например, [9]). К сожалению, более аккуратной классификации, позволяющей определить степень влияния компонентов в системе друг на друга, не существует. Именно поэтому наиболее общепринятым считается «формальное» определение тесной двойной системы (ТДС), предложенное в 1966 г. независимо Плавецом [10] и Пачинским [11]. Согласно этому определению ТДС — это двойная система, в которой один компонент влияет на эволюцию другого.

Предметом настоящей книги является исследование газодинамики переноса вещества в ТДС, находящихся на стадии обмена массой, когда система становится полуразделенной по классификации Копала. Исследование структуры течения в ТДС чрезвычайно важно, и его результаты могут использоваться как при рассмотрении эволюционного статуса звезды, так и при интерпретации наблюдательных данных. Суммируя основные аргументы в пользу актуальности исследования именно газодинамики переноса вещества в ТДС, можно выделить три важнейшие причины.

1) Эволюция ТДС, проходящих стадию обмена веществом, определяется несколькими основными процессами, а именно: истечением вещества из первичного компонента, аккрецией вещества на вторичный компонент, образованием общих оболочек, а также потерей системой вещества и углового момента. Как правило, исследования эволюции двойных систем опираются на усредненные во времени макроскопические характеристики процессов массообмена и не рассматривают детали картины течения вещества в системе. В то же время исследование именно структуры течения позволяет определить характеристики массообмена на конкретном этапе жизни звезды, и, соответственно, уточнить усредненные параметры массообмена.

2) Обширный ряд наблюдений свидетельствует о наличии сложной динамической структуры течения вещества в ТДС. Начиная с работы Струве [12], где он впервые привлек идею существования газовой струи между компонентами  $\beta$  Лиры для объяснения пекулярного поведения спектра во время затмения, в огромном количестве ТДС так или иначе наблюдаются эффекты перетекания вещества, приводящие к формированию газовых потоков, струй, дисков, межкомпонентных оболочек и других структур (см., например, [12]–[20]).

Поскольку регистрируемые наблюдательные проявления отражают текущий статус системы, то для их интерпретации необходимо рассмотрение именно структуры течения. Анализ модели, учитывающей наличие в системе особенностей, вызванных обменом веществом между компонентами, и сравнение ее с наблюдениями позволит уточнить физическую картину протекающих в двойной системе процессов.

3) Дополнительный аргумент в пользу важности исследования двойных систем можно получить из рассмотрения энергетики регистрируемых наблюдений. Уже простейший анализ, основанный на оцен-

ке общей энергетики одиночной звезды, показывает, что для объяснения наблюдательных данных в коротковолновых диапазонах необходимо включение дополнительных источников энергии. Поскольку одиночная звезда не в состоянии выработать (выделить) наблюдаемые энергии, предполагается, что большинство высокоэнергетических наблюдательных проявлений связано не с одиночными звездами, а обусловлено процессами в двойных системах (обмен веществом, процессы аккреции, аккреционные диски и т.д.). В самом деле, за последние тридцать–сорок лет концепция двойственной природы пекулярных объектов позволила понять основные особенности столь разительно различающихся по своим наблюдательным проявлениям двойных систем, как катаклизмические двойные, симбиотические звезды, новые звезды, рентгеновские барстеры, двойные радиопульсары и т.д. Поэтому исследование переноса вещества в двойных системах имеет огромное значение и для понимания природы многих (если не большинства) нестационарных звезд и пекулярных объектов.

Важность исследования процессов массопереноса в ТДС была отмечена уже в пионерских работах Струве [12], Койпера [21], Кроуфорда [22]. Однако лишь в последнее время появились достаточно мощные вычислительные средства, позволяющие провести моделирование массопереноса в ТДС с хорошим пространственным разрешением и на достаточно больших временных интервалах. Более того, буквально в последние годы из-за заметного прогресса в развитии компьютеров появилась возможность трехмерного исследования структуры течения в ТДС (см., например, [20, 23]), в том числе и с учетом магнитного поля (см., например, [24]).

Перечисленные обстоятельства отражают стремительный рост влияния вычислительного эксперимента на исследовательскую работу в целом. Поскольку эти процессы представляются нам чрезвычайно важными для дальнейшего развития науки, мы позволим себе привести здесь некое философское отступление и определим наше видение современной роли вычислительного эксперимента.

Во все времена эксперимент играл исключительную роль в исследовании окружающего мира, причем эксперимент служил одновременно и источником данных об изучаемом явлении, и инструментом его изучения. По мере развития человеческого знания область научного исследования непрерывно расширяется. Уже сейчас человек пытается анализировать явления, экспериментальное повторение которых в земных условиях невозможно. В частности, абсолютное большинство астрофизических процессов принадлежит именно к такому классу явлений. В подобной ситуации у эксперимента сохраняется лишь одна функция — сбор информации об окружающем мире, в то время как функция «инструмента познания» исчезает. Тем самым образуется разрыв между физическими теориями (которые дают основу мировоззрения, но лишь в исключительных случаях позволяют исследовать детали конкретного явления, поскольку лишь для ограниченного круга

задач возможно строгое аналитическое решение) и все возрастающим объемом экспериментальных данных об окружающем мире.

Заполнить разрыв между теоретическими знаниями и экспериментальными данными может «вычислительный эксперимент», роль которого существенно выросла в последнее время в связи с бурным развитием вычислительной техники. Вычислительный эксперимент, опираясь на теоретическое описание физического процесса, может воспроизводить (и даже предсказывать) картину явления. В дальнейшем, сравнивая численный результат с экспериментальными данными, можно получить дополнительную информацию об исследуемых физических процессах, и, следовательно, уточнить исходную теорию. Тем самым вычислительный эксперимент выполняет большинство функций настоящего (традиционного) эксперимента — инструмента познания мира.

Структура представленной вниманию читателя книги выглядит следующим образом:

- В части I приводятся основные сведения о физике процессов обмена веществом в ТДС.
- В части II книги приводится описание общих принципов численного моделирования. В этой части также представлен обзор современных численных методов, наиболее часто применяемых для решения газодинамических астрофизических задач.
- В части III книги представлены результаты численного моделирования газодинамики вещества в ТДС без магнитного поля.
- В части IV книги рассматриваются изменения в картине течения, вызванные наличием магнитных полей в ТДС.

Настоящая монография, главным образом, базируется на оригинальных результатах, полученных авторами в последние годы. При написании ряда глав, содержащих сведения общего характера, использовались материалы книги А.А. Boyarchuk, D.V. Bisikalo, O.A. Kuznetsov, V.M. Chechetkin «Mass transfer in close binary stars», опубликованной в 2002 г. [20], а также обзоров А.М. Фридмана и Д.В. Бисикало (УФН, 2008 г., [23]) и А.Г. Жилкина, Д.В. Бисикало и А.А. Боярчука (УФН, 2012 г., [24]).

**Часть I**

**ТЕСНЫЕ ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ.  
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ**



## ФОРМА КОМПОНЕНТОВ В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ

### 1.1. Поле сил в двойных звездах

Механизмы расчета формы одиночных звезд разработаны достаточно подробно (см., например, [25, 26]). Учет приливного искажения формы компонентов в двойной системе существенно усложняет задачу. Общий подход к определению формы компонентов в двойной системе заключается в анализе полного поля сил, действующих на вещество на поверхности звезды.

Рассмотрим силы, действующие на пробную частицу в двойной системе, компоненты которой имеют массы  $M_1$  и  $M_2$ . Если обе звезды сферически-симметричны, так что гравитационное притяжение к каждой из звезд зависит от расстояния как  $r^{-2}$ , то орбита каждого из компонентов является эллипсом с, вообще говоря, произвольным эксцентриситетом. Если компоненты в двойной системе расположены достаточно близко друг к другу, приливные силы могут искажать форму одного или обоих компонентов и гравитационное притяжение к каждому из компонентов уже не зависит от расстояния как  $r^{-2}$ , а будет содержать еще дополнительные члены. Эти дополнительные слагаемые приводят к апсидальному движению большой оси, и орбита, строго говоря, перестает быть замкнутым эллипсом. Однако, вековое действие приливного взаимодействия стремится сделать орбиту круговой, а также синхронизовать собственное вращение каждого из компонентов с орбитальным вращением. Это происходит потому, что звезды на эксцентричной орбите и несинхронно вращающиеся звезды на круговой орбите подвержены влиянию динамических приливных сил, что приводит к возникновению пульсаций в компонентах двойных систем. Затухание этих колебаний под действием вязких сил сопровождается процессами рассеяния энергии, и двойная система, в конце концов, переходит в состояние с минимальной энергией. При фиксированном угловом моменте это состояние соответствует случаю синхронно вращающихся звезд на круговой орбите. Известно, что характерное время синхронизации вращения и циркуляризации орбит мало по сравнению с временем жизни системы (см., например, [18, 27–30]), поэтому при анализе воспользуемся стандартными предположениями о том, что компоненты двойной системы движутся по круговым орбитам

и собственное вращение звезд синхронизировано с орбитальным вращением  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = 2\pi/P_{\text{orb}}$ , где  $P_{\text{orb}}$  — орбитальный период.

Для дальнейшего рассмотрения введем две декартовы системы координат: первую  $(X, Y, Z)$  — инерциальную (или систему координат наблюдателя) с началом координат в центре масс системы, и вторую  $(x, y, z)$  — вращающуюся со скоростью двойной системы и с началом координат в центре звезды 1. Примем также, что ось  $x$  направлена вдоль линии, соединяющей центры компонентов системы, ось  $z$  перпендикулярна орбитальной плоскости и параллельна  $\Omega$ , а ось  $y$  дополняет тройку осей до правой.

Пусть положение частицы задается во вращающейся системе координат вектором  $\mathbf{r}$ , а в инерциальной системе координат — вектором  $\mathbf{R}$ . Используя известные соотношения классической механики, выразим ускорение  $d^2\mathbf{r}/dt^2$  в системе координат  $(x, y, z)$  через ускорение  $d^2\mathbf{R}/dt^2$  в инерциальной системе координат  $(X, Y, Z)$ :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{R}_1}{dt^2} - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - 2\Omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.1)$$

Здесь второе слагаемое в правой части описывает ускорение центра системы координат  $(x, y, z)$  по отношению к инерциальной системе отсчета  $(X, Y, Z)$ , третье слагаемое описывает ускорение под действием центробежной силы, а последнее слагаемое — ускорение под действием силы Кориолиса.

В инерциальной системе отсчета на пробную частицу действуют три силы: силы гравитационного притяжения к каждой из звезд и градиент давления. Следовательно, ускорение частицы в этой системе может быть представлено в виде:

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\nabla\Phi_1 - \nabla\Phi_2 - \frac{1}{\rho}\nabla P, \quad (1.2)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  — гравитационные потенциалы, создаваемые звездой 1 и звездой 2 соответственно,  $\rho$  — плотность окружающего вещества,  $P$  — его давление. Учет этого выражения, а также тот факт, что для круговой орбиты

$$\frac{d^2\mathbf{R}_1}{dt^2} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}_1), \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{R}_1$  — радиус-вектор центра масс звезды 1 в инерциальной системе координат, позволяет преобразовать (1.1) к виду

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi_1 - \nabla\Phi_2 - \frac{1}{\rho}\nabla P - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}_1) - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - 2\Omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.4)$$

Используя соотношения векторного анализа

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (1.5)$$

преобразуем члены  $-\Omega \times (\Omega \times R_1)$  и  $-\Omega \times (\Omega \times r)$  к следующему виду:

$$\begin{aligned} -\Omega \times (\Omega \times R_1) &= -\nabla (\Omega^2 R_1 x), \\ -\Omega \times (\Omega \times r) &= -\nabla \left[ -\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тогда уравнение движения пробной частицы во вращающейся системе координат может быть записано в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - 2 \Omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \nabla \Phi, \quad (1.7)$$

где суммарный потенциал  $\Phi$  дается выражением

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Omega^2 R_1 x - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2). \quad (1.8)$$

Для рассматриваемого случая синхронного вращения звезды и двойной системы (коротация) произвольная частица звезды во вращающейся системе координат имеет нулевую скорость и ускорение ( $d\mathbf{r}/dt = 0$ ,  $d^2\mathbf{r}/dt^2 = 0$ ), и, соответственно, выражение (1.7) может быть преобразовано к виду

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \Phi. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) описывает гидростатическое равновесие вещества в звезде. Граница звезды определяется как поверхность, на которой плотность вещества равна нулю<sup>1)</sup>. Из уравнения (1.9) следует, что изоповерхности плотности, давления и потенциала совпадают. В этом можно убедиться, взяв ротор от обеих частей равенства (1.9), что приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} \nabla P \times \nabla \frac{1}{\rho} &= 0, \\ \nabla \rho \times \nabla \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Таким образом, задача определения формы звезды сводится к нахождению изоповерхности  $\Phi = \text{const}$  на которой плотность вещества звезды равна нулю.

<sup>1)</sup> В зависимости от вида уравнения состояния значение давления на поверхности нулевой плотности (границе звезды) может иметь и нулевое, и ненулевое значение. Так, для стандартного уравнения состояния идеального газа давление  $P$  обращается в нуль при  $\rho = 0$ . В то же время для случая учета равновесного излучения, когда к давлению вещества добавляется давление излучения  $P_{\text{рад}} = aT^4/3$ , давление  $P$  при  $\rho = 0$  имеет ненулевое значение.

## 1.2. Понятие полости Роша

В общем случае потенциал  $\Phi$  зависит от распределения плотности внутри каждого из компонентов системы. Тогда гравитационные потенциалы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в уравнении (1.8) могут быть найдены из уравнений Пуассона

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1, \quad (1.11)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = 4\pi G \rho_2, \quad (1.12)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  — плотность вещества в звездах 1 и 2 соответственно.

На практике, однако, в большинстве случаев для определения гравитационного потенциала используется приближение Роша. В этом приближении учитывается, что вещество звезды сильно сконцентрировано к центру, и на основании этого предполагается, что звезды можно рассматривать как точечные массы. Тогда гравитационное притяжение описывается классическим законом Ньютона и решения уравнений (1.11), (1.12) имеют вид:

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = -\frac{GM_1}{r_1}, \quad (1.13)$$

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = -\frac{GM_2}{r_2}, \quad (1.14)$$

где

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - A)^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.15)$$

Здесь  $M_1$ ,  $M_2$  — массы компонентов,  $r_1$ ,  $r_2$  — расстояния от текущей точки  $\mathbf{r}$  до центров компонентов,  $A$  — расстояние между центрами компонентов.

В рассматриваемом случае точечных масс потенциал  $\Phi$  называется потенциалом Роша. Поскольку движение компонентов подчиняется третьему закону Кеплера

$$G(M_1 + M_2) = A^3 \Omega^2, \quad (1.16)$$

а положение центра масс системы дается формулой

$$R_c = \frac{M_2}{M_1 + M_2} A, \quad (1.17)$$

выражение (1.8) можно с точностью до константы представить в виде

$$\Phi = -\frac{GM_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x - A)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{2} \Omega^2 \left[ \left( x - A \frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 + y^2 \right]. \quad (1.18)$$

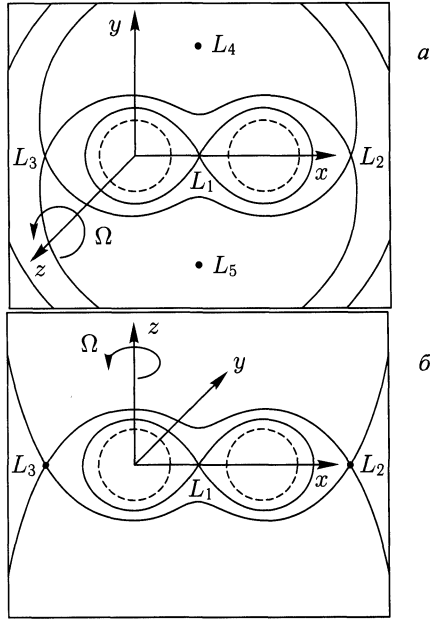


Рис. 1.1. Эквипотенциали Роша в экваториальной ( $xy$ , верхняя панель) и фронтальной ( $xz$ , нижняя панель) плоскостях для двойной системы с отношением масс  $q = M_2/M_1 = 1$ . Пунктирной линией обозначена эквипотенциаль, проходящая через точку  $(0, 3A, 0, 0)$ . Также отмечено положение точек Лагранжа  $L_1, \dots, L_5$  и изображена принятая система координат

Эквипотенциали в экваториальной плоскости системы  $xy$  ( $z = 0$ ) с отношением масс компонентов  $q = M_2/M_1 = 1$  показаны на рис. 1.1 а. На рис. 1.1 б показаны эквипотенциали во фронтальной плоскости системы  $xz$  ( $y = 0$ ). На рис. 1.1 также изображена принятая система координат  $(x, y, z)$ . Как видно из рис. 1.1, вблизи центров звезд эквипотенциали являются практически сферическими. По мере удаления от центра звезды гравитационное воздействие второго компонента возрастает и эквипотенциали становятся эллипсоидами, вытянутым вдоль оси  $x$ . Наличие вращения приводит к сжатию эквипотенциалей вдоль оси  $z$ .

Потенциал Роша имеет пять стационарных точек, называемых также точками Лагранжа. Они представлены на рис. 1.1. Положение этих точек определяется из условия

$$\nabla \Phi = 0. \quad (1.19)$$

Все пять точек Лагранжа лежат в экваториальной плоскости, причем три из них ( $L_1, L_2$  и  $L_3$ ) лежат на оси  $x$  и являются точками перегиба функции  $\Phi$ . Точки  $L_4$  и  $L_5$  являются максимумами функции  $\Phi$ .

Положение внутренней точки Лагранжа  $L_1$  определяется из уравнения (1.19), которое обычно записывается в виде:

$$r_{L_1}^{-2} - r_{L_1} = q [(1 - r_{L_1})^{-2} - (1 - r_{L_1})], \quad (1.20)$$

где обозначено  $r_{L_1} = x_{L_1}/A$  [8, 31]. Поскольку это уравнение не может быть решено аналитически, для определения  $x_{L_1}$  обычно используются аппроксимационные выражения

$$\frac{x_{L_1}}{A} = 1 - w + \frac{1}{3} w^2 + \frac{1}{9} w^3, \quad w^3 = \frac{q}{3(1+q)}, \quad q \leq 0,1,$$

$$\frac{x_{L_1}}{A} = 0,5 - 0,227 \lg q, \quad 0,1 \leq q \leq 10,$$

$$\frac{x_{L_1}}{A} = (1,0015 + q^{0,4056})^{-1}, \quad 0,04 \leq q \leq 1$$

из работ [8, 31, 32], соответственно. Погрешность последней формулы меньше 1%.

Эквипотенциаль, проходящая через внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$ , ограничивает два соприкасающихся объема, известных под названиями критической поверхности или полости Роша. Данное понятие чрезвычайно важно в астрономической практике, поскольку для звезды, поверхность которой находится внутри полости Роша, еще возможна стационарная конфигурация, при которой градиент потенциала Роша уравновешивается градиентом газового давления. При достижении же звездой критической поверхности суммарная сила (сумма гравитационных сил притяжения к каждому из компонентов и центробежной силы) равняется нулю во внутренней точке Лагранжа и градиент давления в этой точке уже не может быть уравновешен, в результате чего начинается претекание вещества.

В астрономической практике широко используется понятие эффективного (или объемного) радиуса полости Роша  $R_{L_1}$ , который определяется как радиус сферы с объемом, равным объему полости Роша. Для аппроксимации  $R_{L_1}$  наиболее часто используются следующие выражения (для звезды 2):

$$\frac{R_{L_1}(2)}{A} = 0,38 + 0,2 \lg q, \quad 0,3 \leq q \leq 20,$$

$$\frac{R_{L_1}(2)}{A} = 0,462 \left( \frac{q}{1+q} \right)^{1/3}, \quad 0 < q \leq 0,3,$$

$$\frac{R_{L_1}(2)}{A} = \frac{0,49q^{2/3}}{0,6q^{2/3} + \ln(1+q^{1/3})}, \quad 0 < q < \infty.$$

Погрешность первых двух выражений меньше 2% [33], а последнего выражения меньше 1% [34]. Для эффективного радиуса полости Роша звезды 1  $R_{L_1}(1)$  необходимо в предыдущих формулах заменить  $q$  на  $q^{-1}$  или использовать выражение из работы [18]

$$\frac{R_{L_1}(1)}{A} = 0,396q^{-1/6}, \quad 0,07 \leq q \leq 0,6.$$

Погрешность этой формулы меньше 2%.

### 1.3. Расчет равновесной конфигурации компонента двойной системы для случаев политропного и вырожденного газов

Для определения применимости модели Роша к реальным звездным системам рассмотрим двойную систему, в которой лишь один компонент является точечной массой, а второй заполняет свою полость Роша и представляет собой распределенную массу. Анализ данной модели позволит нам исследовать одно из основных предположений модели Роша — предположение точечных масс, и оценить степень его влияния на форму компонентов двойной системы. Эффект влияния объемного распределения плотности на форму эквипотенциальных поверхностей впервые был исследован в работе [35]. В настоящем параграфе приводятся результаты численных расчетов, проведенных в работах [36] и [37].

Во многих астрофизических исследованиях для описания вещества в звезде используют упрощенное политропное уравнение состояния

$$P = K\rho^{1+1/n}, \quad (1.21)$$

где  $K$  — константа политропы,  $n$  — индекс политропы. В этом случае условие равновесия (1.9) для системы, состоящей из распределенной и точечной масс, запишется в виде:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_c + H = \text{const}, \quad (1.22)$$

где энтальпия газа

$$H = (n + 1)K\rho^{1/n}. \quad (1.23)$$

В выражении (1.22) гравитационный потенциал  $\Phi_1$  удовлетворяет уравнению Пуассона (1.11),  $\Phi_2$  — потенциал точечной массы  $M_2$ , определяемый уравнением (1.14), а  $\Phi_c$  — потенциал центробежной силы:

$$\Phi_c = -\frac{1}{2}\Omega^2 \left[ \left( x - A \frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 + y^2 \right]. \quad (1.24)$$

Уравнение Пуассона (1.11) необходимо решать во всем пространстве с граничными условиями  $\Phi_1 = 0$  при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ . На практике

это уравнение решается в некоторой конечной области с граничными условиями  $\Phi_1 = \tilde{\Phi}_1$ , где  $\tilde{\Phi}_1$  — гравитационный потенциал, создаваемый точечной массой  $M_1$  (1.13).

Для определения равновесной конфигурации нужно рассчитать распределения  $\Phi_1(\mathbf{r})$  и  $\rho(\mathbf{r})$ . Предположим, что первичный компонент заполняет свою полость Роша, т.е. его граница совпадает с эквипотенциалью  $\Phi = \Phi(L_1)$ , где  $L_1$  — внутренняя точка Лагранжа, так что  $\nabla\Phi(L_1) = 0$ . Тогда масса этого компонента выражается как

$$M_1 = \int_{RL} \rho dV, \quad (1.25)$$

где интеграл берется по полости Роша  $RL$ . Кроме того, воспользуемся тем обстоятельством, что для случая распределенной массы вместо третьего закона Кеплера (1.16) необходимо использовать более общее выражение

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 + \Phi_c)|_{(A,0,0)} = 0. \quad (1.26)$$

Для определения распределений плотности и потенциала в данной модели получаем нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\Phi_1 - \frac{GM_2}{\sqrt{(x-A)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{2}\Omega^2 \left[ \left( x - \frac{M_2}{M_1 + M_2} A \right)^2 + y^2 \right] + (n+1)K\rho^{1/n} = B = \text{const}, \quad (1.27)$$

$$\nabla^2\Phi_1 = 4\pi G\rho, \quad M_1 = \int_{RL} \rho dV, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 + \Phi_c)|_{(A,0,0)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_c)|_{(x_{L_1},0,0)} = 0, \quad (1.29)$$

где  $B = \Phi_1(L_1) + \Phi_2(L_1) + \Phi_c(L_1)$  — интеграл Бернулли.

Если задаться известными параметрами двойной системы  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $\Omega$ , а также индексом политропы  $n$ , то в системе (1.27)–(1.29) неизвестными величинами будут расстояние между компонентами системы  $A$  и политропная константа  $K$ . Проведенные трехмерные расчеты распределения плотности и потенциала показали следующее.

1) С большой точностью (ошибка  $< 0,5\%$ ) выполняется третий закон Кеплера и, соответственно,  $A \approx (G(M_1 + M_2)\Omega^{-2})^{1/3}$ .

2) Так же, как и в случае одиночных политропных звезд, где масса звезды, радиус и политропная константа связаны соотношением  $K = \mathcal{N}_n GM^{1-1/n} R^{3/n-1}$  ( $\mathcal{N}_n$  — численный коэффициент, зависящий от значения индекса политропы  $n$ ), для заполняющего



полость Роша компонента двойной системы имеет место соотношение  $K = \mathcal{N}_n (M_2/M_1) G M_1^{1-1/n} A^{3/n-1}$ , причем для одноатомного газа  $\mathcal{N}_{3/2}(q) \approx 0,145q^{-0,29}$  [38].

3) Положение внутренней точки Лагранжа  $x_{L_1}$  и форма критической поверхности слабо отличаются (разница  $\sim 1\%$ ) в модели Роша (1.20) и в модели с распределенным компонентом (см. рис. 1.2, где представлена зависимость  $x_{L_1}$  для обеих моделей).

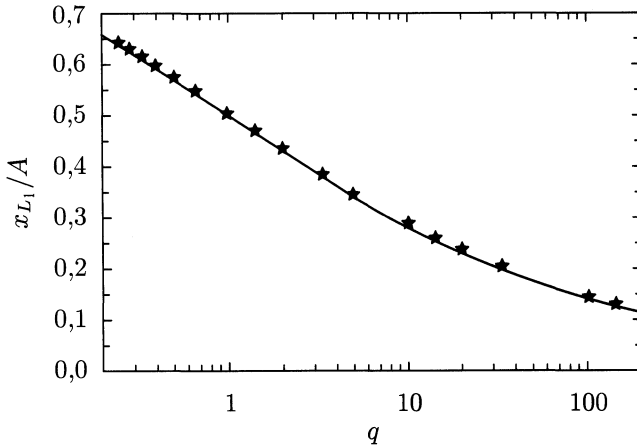


Рис. 1.2. Расстояние от центра первичного компонента до внутренней точки Лагранжа  $L_1$  для модели с распределенным компонентом (звездочки) и для модели точечных масс (сплошная линия) как функция отношения масс  $q$

Наряду с политропным уравнением состояния в астрофизике достаточно часто используют уравнение состояния холодного вырожденного газа. Таким уравнением состояния, например, описывается вещество белых карликов. Рассмотрим форму и структуру заполняющего полость Роша компонента для этого случая. Известно, что для холодного вырожденного газа [38, 39] плотность определяется ионами, а давление — вырожденными электронами:

$$\rho = \rho_0 x^3, \quad (1.30)$$

$$P = P_0 \left[ x(2x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right],$$

где  $x$  — безразмерный импульс Ферми,  $\rho_0 = \mu_e m_u / 3\lambda^3$ ,  $P_0 = m_e c^2 / 24\lambda^3$ ,  $\lambda = (8\pi)^{-1/3} h / m_e c$ ,  $\mu_e$  — число электронов на 1 нуклон;  $m_u$  — атомная единица массы,  $m_e$  — масса электрона,  $h$  — постоянная Планка. При  $\mu_e = 2$  (случай гелиевых и углеродных карликов) имеем  $\rho_0 = 1,9477 \cdot 10^6$  г/см<sup>3</sup>,  $P_0 = 0,06 \cdot 10^{24}$  г/(см·с<sup>2</sup>).

Система уравнений для расчета равновесия вырожденного первичного компонента, заполняющего свою полость Роша, записывается аналогично рассмотренному выше случаю политропного уравнения состояния (1.27)–(1.29), лишь вместо (1.23) нужно брать энтальпию в виде

$$H = \frac{8P_0}{\rho_0} \left[ \sqrt{1 + (\rho/\rho_0)^{2/3}} - 1 \right]. \quad (1.31)$$

Проведенные для этого случая трехмерные расчеты также показали хорошее совпадение формы критических поверхностей для модели Роша и модели с распределенным компонентом.

Опираясь на результаты расчетов, можно заключить, что форма эквипотенциалей для случаев точечных масс не сильно отличается от формы, определенной для объемно-распределенных масс.

## 1.4. Несинхронное вращение

Рассмотрим теперь другое упрощение модели Роша — предположение о синхронном вращении компонентов системы с орбитальным движением. Несмотря на то, что вековые процессы стремятся синхронизовать вращение, существуют обширные наблюдательные данные о том, что во многих двойных системах компоненты вращаются несинхронно (см., например, [40], [41]). Более того, во многих двойных вектор собственного углового вращения компонентов не соосен вектору орбитального вращения двойной системы (см., например, [42] и ссылки в этой работе).

**1.4.1. Случай соосных векторов собственного и орбитального вращения.** Рассмотрим сначала случай, когда истекающий компонент вращается несинхронно и вектор собственного вращения  $\Omega_*$  параллелен вектору орбитального вращения  $\Omega$  ( $\Omega_* \parallel \Omega$ ). Следуя работам [35, 43], определим положение точек Лагранжа, т. е. точек, где градиент давления не скомпенсирован другими силами. Введем еще одну декартову систему координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , вращающуюся со звездой 1. Начало этой системы координат находится в центре звезды 1 и ось  $\zeta$  сонаправлена с вектором  $\Omega_*$ . Будем задавать положение пробной частицы вектором  $\sigma$ , тогда ее уравнение движения в этой системе координат может быть записано в виде, аналогичном уравнению (1.1):

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{R}_1}{dt^2} - \Omega_* \times (\Omega_* \times \sigma) - 2\Omega_* \times \frac{d\sigma}{dt}, \quad (1.32)$$

где, как и раньше в (1.3), ускорение центра масс звезды 1 в инерциальной системе координат  $d^2\mathbf{R}_1/dt^2$  может быть записано как

$$\frac{d^2\mathbf{R}_1}{dt^2} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}_1). \quad (1.33)$$

Как и в случае синхронного вращения, в инерциальной (лабораторной) системе отсчета на пробную частицу действуют силы гравитационного притяжения к каждой из звезд и градиент давления:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -\nabla \Phi_1 - \nabla \Phi_2 - \frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (1.34)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \boldsymbol{\sigma}}{dt^2} = & -\nabla \Phi_1 - \nabla \Phi_2 - \frac{1}{\rho} \nabla P - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_1) - \\ & - \boldsymbol{\Omega}_* \times (\boldsymbol{\Omega}_* \times \boldsymbol{\sigma}) - 2 \boldsymbol{\Omega}_* \times \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Снова используем соотношение (1.5) и преобразуем четвертое и пятое слагаемые в правой части к следующему виду:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_1) &= -\nabla (\Omega^2 R_1 x), \\ -\boldsymbol{\Omega}_* \times (\boldsymbol{\Omega}_* \times \boldsymbol{\sigma}) &= -\nabla \left[ -\frac{1}{2} \Omega_*^2 (\xi^2 + \eta^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

В результате уравнение движения пробной частицы в системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , вращающейся со звездой, запишется в виде:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\sigma}}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - 2 \boldsymbol{\Omega}_* \times \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} - \nabla \Psi, \quad (1.37)$$

где потенциал  $\Psi$  дается выражением

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Omega^2 R_1 x(\xi, \eta, \zeta) - \frac{1}{2} \Omega_*^2 (\xi^2 + \eta^2). \quad (1.38)$$

Для случая соосного вращения  $\boldsymbol{\Omega}_* \parallel \boldsymbol{\Omega}$  и радиусы-векторы частицы в координатных системах  $(x, y, z)$  и  $(\xi, \eta, \zeta)$  связаны соотношением

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.39)$$

где  $\varphi = (\Omega_* - \Omega)t$ . Следовательно, в стандартном предположении точечных масс для обоих компонентов потенциал  $\Psi$  описывается выражением

$$\begin{aligned} \Psi = & -\frac{GM_1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi - A)^2 + (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi)^2 + \zeta^2}} + \\ & + \Omega^2 R_1 (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - \frac{1}{2} \Omega_*^2 (\xi^2 + \eta^2). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Если бы потенциал  $\Psi$  не зависел от времени, то стационарные конфигурации звезды 1 в системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$  определялись бы уравнением (1.37) с  $d^2\sigma/dt^2 = 0$ ,  $d\sigma/dt = 0$ , что приводит к стандартному условию гидростатического равновесия:

$$\nabla P = -\rho \nabla \Psi. \quad (1.41)$$

Как следует из выражения (1.40), зависимость потенциала  $\Psi$  от времени исчезает только для случая  $\Omega_* = \Omega$ , т. е. для синхронного вращения.

Для рассматриваемого случая  $\Omega_* \neq \Omega$ , звезда 2 меняет свое положение в системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ , вследствие чего на звезде 1 образуется приливной горб, движущийся с той же угловой скоростью, что и звезда 2, и с запаздыванием по фазе из-за наличия диссипативных процессов. Математически это явление выражается во временной зависимости потенциала  $\Psi$  (1.40). Если время установления газодинамического равновесия в звезде 1 (более точно, в наружных слоях звезды 1) меньше, чем орбитальный период, то форма этой звезды будет определяться потенциалом  $\Psi$ , зависящим от времени. В этом случае вещество звезды будет вынуждено двигаться по закону, отличному от твердотельного вращения, и следовательно, условия  $d^2\sigma/dt^2 = 0$ ,  $d\sigma/dt = 0$  (и, соответственно, уравнение гидростатического равновесия (1.41)) не могут быть выполнены. Кроме того, звезда 1 не может вращаться твердотельно из-за наличия силы Кориолиса, обусловленной радиальным движением в системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Другими словами, задача становится динамической и поверхность звезды уже не совпадает с эквипотенциалю. Если все же предположить, что поверхность звезды описывается поверхностью постоянного потенциала, то твердотельный закон вращения приводит к появлению ненулевой нормальной компоненты скорости на поверхности звезды, что противоречит закону сохранения массы.

Таким образом, можно утверждать, что любое решение (1.41) должно рассматриваться только как приближенное. Подтверждением сказанному служит рассмотрение ситуации, когда скорость собственного вращения звезды 1 слабо отличается от орбитальной скорости двойной системы. Для такого случая можно использовать линеаризованные в окрестности синхронного решения газодинамические уравнения. Такие решения без предположения о твердотельном законе вращения для звезд с радиативными оболочками были получены в работе [44], а для звезд с конвективными оболочками — в работах [45–47]. В обоих случаях (для радиативных и конвективных оболочек) оказалось, что не существует потенциала, который может описать полученное решение. Тем самым в несинхронном случае исчезает одно из важнейших свойств модели Роша — совпадение поверхностей равного потенциала, плотности и давления.

Тем не менее в астрофизической практике для проведения численного исследования достаточно часто используется предположение

о твердотельном вращении. В частности, из потенциала  $\Psi$  (1.40) можно получить информацию о положении внутренней точки Лагранжа для случая несинхронного вращения. Рассмотрим движение точки по окружности в системе координат  $(x, y, z)$ , вращающейся вместе с двойной системой. Пусть точка движется в лабораторной системе координат с угловой скоростью  $\Omega_*$ , тогда ее угловая скорость в системе координат  $(x, y, z)$  равна  $\Omega_* - \Omega$ . Скорость и ускорение этой частицы могут быть выражены как

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\Omega_* - \Omega) \times \mathbf{r},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (\Omega_* - \Omega) \times [(\Omega_* - \Omega) \times \mathbf{r}] = -\nabla \left[ -\frac{1}{2}(\Omega_* - \Omega)^2(x^2 + y^2) \right].$$

Движение частицы в системе координат  $(x, y, z)$  определяется уравнением (1.7), которое мы запишем в виде

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \mathbf{f}, \quad (1.42)$$

где

$$\mathbf{f} = -\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - 2\Omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \nabla\Phi. \quad (1.43)$$

Выражение для силы Кориолиса может быть преобразовано как

$$-2\Omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\nabla [-\Omega(\Omega_* - \Omega)(x^2 + y^2)]. \quad (1.44)$$

В результате из (1.42) получаем уравнение равновесия

$$\nabla P = -\rho \nabla \Psi_1, \quad (1.45)$$

где потенциал  $\Psi_1$  равен

$$\Psi_1 = \Phi - \frac{1}{2}(\Omega_*^2 - \Omega^2)(x^2 + y^2). \quad (1.46)$$

Отметим, что потенциал  $\Psi_1$  совпадает с потенциалом  $\Psi$  (1.40) при  $\varphi = (\Omega_* - \Omega)t = 0$ , а для случая соосного и синхронного вращения ( $\Omega_* = \Omega$ ) потенциал  $\Psi_1$  совпадает со стандартным потенциалом Роша (1.18).

Для случая несинхронного вращения роль точек Лагранжа играют стационарные точки потенциала  $\Psi_1$ . До достижения звездой внутренней точки Лагранжа (в дальнейшем будем называть ее  $L_1^{rot}$ ) сумма всех сил, включая градиент давления, может обеспечить центростремительное ускорение, соответствующее движению частицы по окружности в системе координат  $(x, y, z)$  с угловой скоростью  $\Omega_* - \Omega$ . Как и в синхронном случае, при достижении внутренней точки Лагранжа  $L_1^{rot}$  градиент давления не может быть скомпенсирован, движение частицы по окружности становится невозможным и начинается истечение

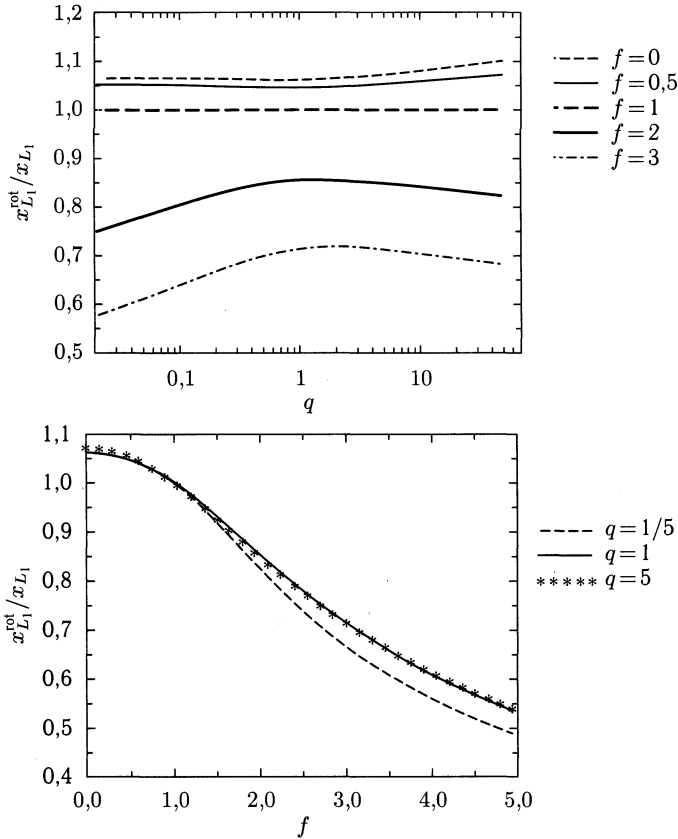


Рис. 1.3. Относительное изменение положения внутренней точки Лагранжа для систем с несинхронным вращением  $x_{L_1}^{rot}/x_{L_1}$  как функция отношения масс компонентов системы  $q$  и степени несинхронности вращения  $f = \Omega_*/\Omega$

вещества. Отметим, что в силу симметрии потенциала  $\Psi_1$  по осям  $y$  и  $z$  точки Лагранжа  $L_1^{rot}$ ,  $L_2^{rot}$ ,  $L_3^{rot}$ , как и в случае синхронного вращения, лежат на линии, соединяющей центры звезд.

Определим изменение положения внутренней точки Лагранжа  $L_1^{rot}$  для случая соосного, несинхронного вращения по сравнению с положением  $L_1$  в стандартном (синхронном) случае. Положение точки  $L_1$  для случая синхронного вращения определяется уравнением (1.20). Для определения положения точки  $L_1^{rot}$  можно записать аналогичное выражение:

$$r_{L_1^{rot}}^{-2} - f^2 r_{L_1^{rot}} = q [(1 - r_{L_1^{rot}})^{-2} - (1 - f^2 r_{L_1^{rot}})], \quad (1.47)$$

где  $r_{L_1^{rot}} = x_{L_1^{rot}}/A$ ,  $f = \Omega_*/\Omega$ . Отметим, что данное уравнение не зависит от знака  $f$ , т. е. от направления вращения звезды в лабораторной

системе координат. Поэтому, не ограничивая общности, рассмотрим только случай  $f \geq 0$ . Зависимость величины  $x_{L_1^{rot}}/x_{L_1}$  от  $q$  и  $f$  представлена на рис. 1.3. Видно, что при более медленном вращении звезды по сравнению с орбитальным ( $f < 1$ ) полость Роша, построенная с учетом несинхронного вращения, больше, чем стандартная полость Роша, причем максимальный размер достигается при  $f = 0$ . При вращении звезды быстрее орбитального «несинхронная» полость Роша меньше стандартной<sup>1)</sup>.

**1.4.2. Особые режимы вращения.** Как было отмечено в предыдущем разделе, для твердотельного закона вращения в несинхронном случае точное построение равновесных конфигураций компонентов двойных систем невозможно. Рассмотрим случай произвольного закона вращения и рассмотрим конфигурации с внутренним движением, т. е. откажемся как от предположения твердотельного вращения, так и от предположения равновесия. Будем рассматривать только конфигурации, стационарные в системе координат  $(x, y, z)$  (т. е. в системе координат, в которой компоненты двойной системы покоятся). Движение газа определяется в этом случае стационарными уравнением Эйлера (см. гл. 4 книги):

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla P = -\nabla\Phi - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}). \quad (1.48)$$

Воспользуемся соотношением из векторного анализа

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (1.49)$$

и получим в результате уравнение Эйлера в форме Громеки–Лэмба (здесь снова предполагается политропное уравнение состояния газа (1.21)):

$$\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \nabla B = -2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}), \quad (1.50)$$

где интеграл Бернулли  $B$  определяется как

$$B = \Phi + \frac{v^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) K \rho^{1/n-1}. \quad (1.51)$$

Преобразуем (1.50) к виду

$$\nabla B = (\text{rot } \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{v}. \quad (1.52)$$

Из анализа этого уравнения следует, что значение интеграла Бернулли  $B$  сохраняется вдоль линии тока:  $\mathbf{v} \cdot \nabla B = 0$ . Уравнение (1.52) имеет

<sup>1)</sup> Отметим, что формально  $x_{L_1^{rot}}/x_{L_1} \rightarrow 0$  при  $f \rightarrow \infty$ . Естественным ограничением для положения  $x_{L_1^{rot}}$  является ограничение предельной (break-up) скорости вращения звезды, когда  $x_{L_1^{rot}}/A = f^{-2/3}(q+1)^{-1/3}$ .

два простых частных случая, когда  $\nabla B \equiv 0$ : 1) ко-вращение, когда  $\mathbf{v} = 0$  (этот случай был разобран в параграфе 1.2.) и 2) обратное вращение, когда  $\text{rot } \mathbf{v} = -2\boldsymbol{\Omega}$ .

Рассмотрим последний случай более подробно. Скорость вещества в лабораторной (инерциальной) системе координат выражается как

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}', \quad (1.53)$$

где  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c$ , а  $\mathbf{r}_c$  — радиус-вектор центра масс двойной системы. Легко видеть, что  $\text{rot } \mathbf{v}' = 0$ , т. е. движение в лабораторной системе координат потенциально и, следовательно,  $\mathbf{v}' = \nabla \psi$ . Соответственно, скорость во вращающейся системе координат может быть записана как

$$\mathbf{v} = \nabla \psi - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}', \quad (1.54)$$

где  $\psi$  — потенциал скорости. Подставляя выражение для  $\mathbf{v}$  в уравнение неразрывности  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ , получим уравнение для определения  $\psi$ :

$$\rho \nabla^2 \psi + \nabla \rho \cdot \nabla \psi = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') \cdot \nabla \rho. \quad (1.55)$$

Граничные условия для уравнения (1.55) определяются на поверхности звезды, исходя из предположения, что поток вещества через поверхность отсутствует. Иными словами, предполагается, что на поверхности звезды вектор скорости не имеет составляющей, перпендикулярной к поверхности звезды:

$$(\nabla \psi - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') \cdot \nabla \rho = 0. \quad (1.56)$$

Объединение уравнения (1.55) с выражением для интеграла Бернулли и уравнением Пуассона дает систему уравнений, аналогичную системе (1.27)–(1.29), для расчета стационарной конфигурации (во вращающейся системе координат) с внутренним движением для случая обратного вращения:

$$\begin{aligned} \rho \nabla^2 \psi + \nabla \rho \cdot \nabla \psi &= (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') \cdot \nabla \rho, \\ \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_c + \frac{(\nabla \psi - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')^2}{2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) K \rho^{1/n-1} &= B = \text{const}, \\ \nabla^2 \Phi_1 &= 4\pi G \rho. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений дает равновесную конфигурацию с движением внутренних слоев звезды для частного случая обратного вращения. Расчеты таких конфигураций были выполнены в работах [48–50]. Подобные стационарные конфигурации могут быть применены, прежде всего, к проблеме эволюции двойных нейтронных звезд. Благодаря низкой вязкости нейтронного вещества вращение такой



звезды в двойной системе может не синхронизоваться очень долго, следовательно звезда будет иметь нулевую завихренность ( $\text{rot } \mathbf{v}' = 0$ ) в лабораторной системе координат.

**1.4.3. Общий случай несоосных векторов собственного и орбитального вращения.** Рассмотрим случай, когда вектор собственного вращения звезды  $\Omega_*$  не параллелен вектору орбитального движения  $\Omega$  ( $\Omega_* \nparallel \Omega$ ). Выпишем выражение для потенциала  $\Psi_1$ . Воспользуемся изложенной в п. 1.4.1 методикой построения потенциала для соосного несинхронного случая и в предположении твердотельного вращения получим:

$$\Psi_1 = \frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2} + \Omega^2 R_1 x - \frac{1}{2} \Omega_*^2 \Delta^2, \quad (1.57)$$

где  $\Delta$  — расстояние от точки  $\mathbf{r}$  до оси вращения  $\Omega_*$ . Зададим положение вектора  $\Omega_*$  в системе координат  $(x, y, z)$  двумя углами:  $\vartheta$  — угол между  $\Omega_*$  и осью  $z$ ,  $\varphi$  — угол между осью  $x$  и проекцией  $\Omega_*$  на плоскость  $xy$ . Тогда расстояние от точки  $\mathbf{r}$  до оси вращения  $\Omega_*$  может быть записано как

$$\Delta(x, y, z) = [x^2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta) + y^2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta) + z^2 \sin^2 \vartheta - 2xy \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi - xz \cos \varphi \sin 2\vartheta - yz \sin \varphi \sin 2\vartheta]^{-1/2}. \quad (1.58)$$

В рассматриваемом случае несоосного вращения потенциал  $\Psi_1$  зависит уже от четырех параметров:  $q$ ,  $f$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , причем последний меняется со временем, так как в системе координат, связанной с двойной системой (вращающейся системе координат), вектор  $\Omega_*$  вращается с угловой скоростью  $\dot{\Omega}_{\text{rot}} = -\Omega$ . Отметим также, что потенциал уже не является четной функцией  $y$  и  $z$ , поэтому внутренняя точка Лагранжа не обязательно будет лежать на прямой, соединяющей центры компонентов. Детальный анализ потенциала  $\Psi_1$  (см., например, [51]) показывает, что при определенных наборах параметров значение потенциала во внешней точке Лагранжа  $L_3$  может оказаться меньшим, чем во внутренней точке Лагранжа. В этом случае полость Роша «раскроется» со стороны  $L_3$  раньше, чем со стороны  $L_1$ .

## 1.5. Некруговые орбиты

Рассмотрим третье из упрощений модели Роша — предположение круговых орбит. Учет отклонений орбит звезд от круговых значительно усложняет задачу определения формы компонентов в двойной системе. В общем случае эллиптических орбит необходимо принимать во внимание как переменность скорости орбитального движения звезд, так и изменение расстояния между компонентами. Изменение скорости автоматически приводит к рассмотренному в параграфе 1.4 случаю

несинхронного вращения истекающей звезды, когда приближение Роша оказывается неудовлетворительным. Учет же изменения расстояния между компонентами превращает задачу в еще более сложную.

Так же, как и для процесса синхронизации, вековые процессы стремятся привести орбиту двойной системы к круговой. Однако, имеются наблюдательные данные о существовании двойных систем с эллиптическими орбитами (см., например, [52–55]). Рассмотрим влияния эллиптичности орбиты на форму компонентов двойной системы.

Задача об определении формы звезды для случая твердотельного вращения исследована в работах [52, 54]. Было показано, что при наличии эксцентриситета орбит форма звезды определяется потенциалом, аналогичным «несинхронному» потенциалу  $\Psi_1$  (1.46) для случая круговых орбит, но с переменным расстоянием между компонентами  $A$ .

$$\Psi_2 = -\frac{GM_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{GM_2}{\sqrt{(x-A)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{GM_1}{A^2} x - \frac{1}{2} \Omega_*^2 (x^2 + y^2). \quad (1.59)$$

Значение угловой скорости собственного вращения  $\Omega_*$ , как правило, не определяется из наблюдений, поэтому предполагается, что собственное вращение звезды либо синхронизовано в среднем  $\Omega_* = 2\pi/P_{\text{orb}}$ , либо синхронизовано в периастре  $\Omega_* = 2\pi[(1+e)^{1/2}/(1-e)^{3/2}]/P_{\text{orb}}$ . Значение  $A$  изменяется при движении компонентов двойной системы по эллиптической орбите согласно закону

$$A = a\sqrt{(\cos u - e)^2 + (1 - e^2)\sin^2 u} = a(1 - e \cos u), \quad (1.60)$$

где  $a$  — большая полуось орбиты,  $u$  — так называемая, эксцентрическая аномалия. Величина  $u$  определяет движение по эллиптической орбите в соответствии с уравнением

$$\frac{2\pi t}{P_{\text{orb}}} = u - e \sin u, \quad (1.61)$$

где время  $t$  отсчитывается от периастра.

Как уже отмечалось выше, случай эллиптических орбит всегда является несинхронным. Это обусловлено тем, что угловую скорость собственного вращения компонентов двойной системы можно считать постоянной, а угловая скорость орбитального движения при движении по эллиптической орбите меняется. Следовательно, так же как и в несинхронном случае с круговыми орбитами, задача о равновесной конфигурации является динамической, причем положение внутренней точки Лагранжа может меняться в зависимости от орбитальной фазы. При этом, если звезда-донор заполняет полость Роша в периастре, то в апоастре полость Роша увеличится, а размеры звезды останутся

теми же или увеличатся незначительно, следовательно массообмен в таких системах может происходить только около периаэстра.

Приведенное в этой главе рассмотрение показывает, что для случаев круговых орбит и синхронного вращения форма компонентов в двойной системы может быть определена в рамках модели Роша как поверхность постоянного потенциала  $\Phi$ . Большинство двойных систем отвечают этим условиям, поскольку наличие диссипативных процессов и приливного взаимодействия ведет как к синхронизации вращения, так и к циркуляризации орбит. Если компоненты двойных систем еще не пришли к равновесному состоянию синхронного вращения и круговых орбит, то формы звезд являются динамическими и могут быть корректно определены лишь для частного случая обратного вращения. В более общей постановке для определения формы звезд необходимо привлекать дополнительные предположения (твердотельный закон собственного вращения звезды, малые отличия от синхронизации и т. д.), которые вносят дополнительные погрешности в решения и требуют внимательного анализа в каждом конкретном случае.

## ОБМЕН ВЕЩЕСТВОМ В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ

### 2.1. Параметры струи вблизи внутренней точки Лагранжа $L_1$

Рассмотрим звезду, которая заполняет полость Роша, и определим параметры потока, формирующегося в окрестности внутренней точки Лагранжа  $L_1$ . Вещество звезды, достигшее  $L_1$ , имеет плотность  $\rho_{L_1}$  и температуру  $T_{L_1}$ .

Скорость потери вещества через окрестность внутренней точки Лагранжа может быть оценена как

$$\dot{M}_1 = S\rho_{L_1}v_{L_1}, \quad (2.1)$$

где  $S$  — эффективное сечение струи,  $\rho_{L_1}$  — плотность, усредненная по сечению струи,  $v_{L_1}$  — скорость. Течение вещества через окрестность внутренней точки Лагранжа происходит аналогично свободному расширению газа в пустоту из полости с точечным отверстием. Это означает, что скорость потока через точку  $L_1$  примерно равна скорости звука в атмосфере теряющей массу звезды 1 ( $v_{L_1} \simeq c_s$ ) и, следовательно, выражение (2.1) может быть записано как

$$\dot{M}_1 = S\rho_{L_1}c_s. \quad (2.2)$$

Чтобы определить размеры истекающей струи в окрестности  $L_1$ , рассмотрим возможное отклонение частицы со скоростью, равной локальной скорости звука  $c_s$  (т.е., с удельной кинетической энергией  $\sim c_s^2$ ) от поверхности полости Роша звезды-донора. Приравнявая разность потенциальной энергии в плоскости  $x = x_{L_1}$  удельной кинетической энергии, можно получить уравнение для формы струи в окрестности  $L_1$ , подобное уравнению из работы [56]:

$$\Delta\Phi = c_s^2. \quad (2.3)$$

Раскладывая это выражение в ряд Тейлора по переменным  $y$  и  $z$  (система координат соответствует системе, принятой в параграфе 1.1) и пользуясь тем, что  $\nabla\Phi|_{(x_{L_1}, 0, 0)} = 0$ , получим уравнение

$$\Phi''_{yy}(x_{L_1}, 0, 0) \frac{y^2}{2} + \Phi''_{zz}(x_{L_1}, 0, 0) \frac{z^2}{2} = c_s^2, \quad (2.4)$$

описывающее форму струи — эллипс. Полуоси этого эллипса определяются выражениями:

$$a = \frac{\sqrt{2} c_s}{\sqrt{\Phi''_{yy}(x_{L_1}, 0, 0)}}, \quad b = \frac{\sqrt{2} c_s}{\sqrt{\Phi''_{zz}(x_{L_1}, 0, 0)}}, \quad (2.5)$$

а площадь

$$S = \frac{2\pi c_s^2}{\sqrt{\Phi''_{yy}(x_{L_1}, 0, 0) \Phi''_{zz}(x_{L_1}, 0, 0)}}. \quad (2.6)$$

Выражения можно преобразовать к более удобной форме. В результате получаем выражения для большой и малой полуосей эллипса:

$$a = \frac{c_s}{2\Omega} g_y(q), \quad b = \frac{c_s}{2\Omega} g_z(q). \quad (2.7)$$

Это соответствует ширинам струи по оси  $y$  и  $z$ :

$$R_y = \frac{c_s}{\Omega} g_y(q), \quad R_z = \frac{c_s}{\Omega} g_z(q). \quad (2.8)$$

В этих выражениях

$$g_y(q) = \frac{2\sqrt{2(q+1)}}{\sqrt{\frac{q}{(x_{L_1}/A)^3} + \frac{1}{(1-x_{L_1}/A)^3} - (q+1)}}, \quad (2.9)$$

$$g_z(q) = \frac{2\sqrt{2(q+1)}}{\sqrt{\frac{q}{(x_{L_1}/A)^3} + \frac{1}{(1-x_{L_1}/A)^3}}}.$$

Площадь сечения струи в точке  $L_1$  в этом случае будет равна

$$S = \frac{\pi c_s^2}{4\Omega^2} g_y(q) g_z(q). \quad (2.10)$$

При фиксированных значениях полной массы системы и расстояния между ее компонентами можно определить изменение ширины струи по осям  $y$  и  $z$  ( $R_y$  и  $R_z$ ) от отношения масс. На рис. 2.1 показаны зависимости функций  $g_y$  и  $g_z$  от параметра  $q$ .

В стандартном анализе (см., например, [30, 57]) ширина струи  $R \sim c_s/\Omega$  предполагается независимой от отношения масс и равной толщине струи по оси  $z$ . В этом случае значения функций  $g_y$  и  $g_z$  становятся постоянными и равными единице (соответствующая прямая также представлена на графике пунктирной линией), и выражение для потока массы через  $L_1$  (2.2) принимает вид

$$\dot{M}_1 \approx \rho_{L_1} c_s \frac{c_s^2}{\Omega^2}. \quad (2.11)$$

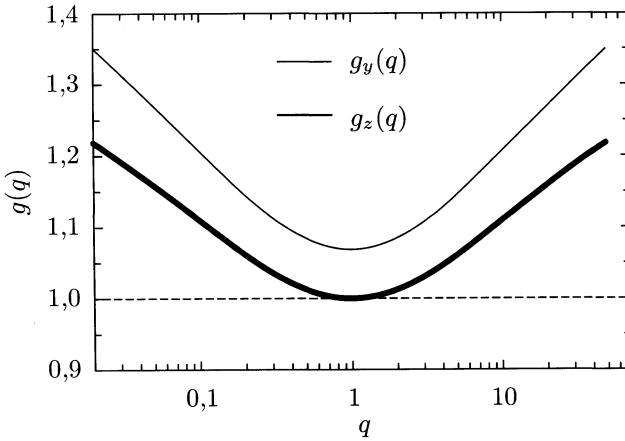


Рис. 2.1. Функции  $g_y(q)$  и  $g_z(q)$ , определяющие ширину струи по осям  $y$  и  $z$ . Штриховая линия соответствует оценке ширины струи  $R_w \sim c_s/\Omega$

Для оценки  $\rho_{L_1}$  необходимо сделать предположение о конкретном виде атмосферы. Если бы атмосфера звезды была изотермичной с постоянной шкалой высоты  $H$ , то для звезды, переполняющей полость Роша на величину  $\Delta R = R_1 - R_{L_1}$ , и плотность  $\rho_{L_1}$  и темп переноса вещества  $\dot{M}_1$  будут пропорциональны  $\exp(\Delta R/H)$  (см., например, [30, 58]). Если, как в случае конвективной звезды, атмосфера адиабатическая с уравнением состояния  $P \sim \rho^\gamma$ <sup>1)</sup>, то на глубине  $\Delta R$  под поверхностью имеем (см., например, [30]):

$$\frac{P}{\rho \Delta R} \approx \frac{c_s^2}{\Delta R} \approx \frac{GM_1}{R_1^2}. \quad (2.12)$$

Используя (2.11) и (2.12), а также соотношение  $P \sim \rho^\gamma$ , находим, что для  $\Delta R > 0$

$$\dot{M}_1 \approx \Delta R^{\frac{3\gamma-1}{2\gamma-2}}, \quad (2.13)$$

и, следовательно, для случая одноатомного газа, когда  $\gamma = 5/3$ ,

$$\dot{M}_1 \approx \Delta R^3. \quad (2.14)$$

Как видно из приведенных оценок, темп переноса вещества очень чувствителен к величине, характеризующей переполнение звездой своей полости Роша.

Выражение (2.13) было получено с использованием ряда упрощений, основным из которых является предположение о постоянстве

<sup>1)</sup> Как обычно,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей:  $\gamma = c_p/c_v$ . Показатель адиабаты  $\gamma$  связан с индексом политропы соотношением  $\gamma = 1 + 1/n$  (см. уравнение состояния для политропного газа (1.21)).

плотности по сечению струи. Для более полного анализа необходимо учесть то обстоятельство, что струя имеет ярко выраженное ядро, которое существенно плотнее периферийных областей струи [57]. Пример такого рассмотрения можно найти в работе [59], где в рамках приближенной газодинамической модели рассмотрена зависимость темпа потери массы системой в зависимости от параметров системы.

## 2.2. Траектория струи

Рассмотрим, что происходит с газом после того, как он миновал внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$ . По мере удаления от  $L_1$  скорость газа возрастает под действием силы притяжения звезды-компаньона (звезды 2) и вскоре течение становится существенно сверхзвуковым (см., например, [30, 57]). Кроме того, под действием силы Кориолиса струя вещества отклоняется от линии, соединяющей центры звезд. В соответствии с анализом Любова и Шу [57] выражение для угла отклонения струи  $\theta_s$  имеет вид:

$$\cos(2\theta_s) = -\frac{4}{3g_\theta} + \sqrt{1 - \frac{8}{9g_\theta}}, \quad (2.15)$$

где

$$g_\theta(q) = \left[ \frac{q}{(x_{L_1}/A)^3} + \frac{1}{(1 - x_{L_1}/A)^3} \right] \frac{1}{q+1}. \quad (2.16)$$

Угол отклонения струи  $\theta_s$  зависит только от отношения масс компонентов. Из рис. 2.2 видно, что в рассматриваемом простейшем случае (без учета взаимодействия струи с неаккрецированным газом) угол поворота струи меняется незначительно и лежит в диапазоне от  $-28,4^\circ$  до  $-19,5^\circ$ .

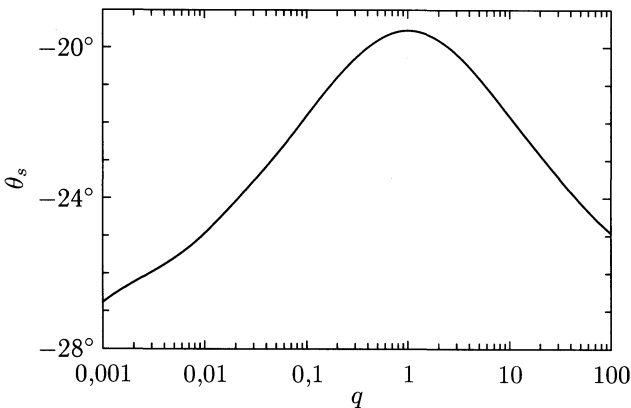


Рис. 2.2. Функция  $\theta_s(q)$ , определяющая угол отклонения струи [57]

Достаточно часто траекторию струи в системе рассматривают в баллистическом приближении. Формальным основанием для такого допущения является сверхзвуковой характер потока, позволяющий пренебречь эффектами давления. Уравнение движения, описывающее траекторию пробной частицы в отсутствии магнитного поля и эффектов давления, может быть получено из (1.4) и обычно записывается в виде:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi - 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.17)$$

Результаты расчета траекторий в орбитальной плоскости системы с равными массами компонентов ( $q = 1$ ) показаны на рис. 2.3. Как видно из рисунка, для малых начальных скоростей<sup>1)</sup> все траектории частиц более менее подобны и не зависят от угла их вброса в систему [60].

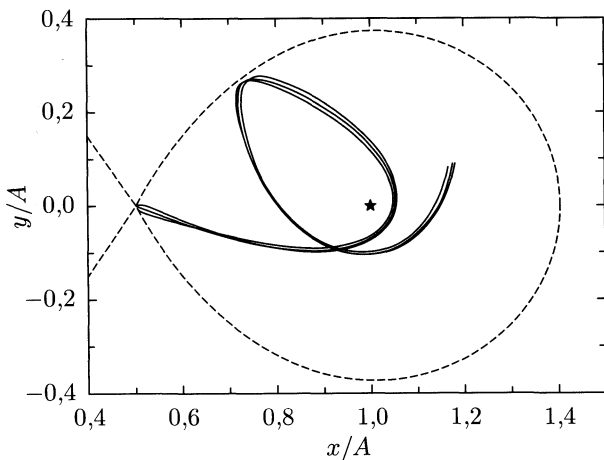


Рис. 2.3. Траектории частиц в орбитальной плоскости двойной системы с отношением масс компонентов  $q = 1$ . Как и в работах [30, 60], в расчетах было принято, что частицы вылетают из  $L_1$  с малой скоростью  $v = 0,03\sqrt{G(M_1 + M_2)}/A$  в направлениях  $0^\circ$  и  $\pm 45^\circ$  по отношению к линии, соединяющей центры компонентов

Из анализа траекторий можно заключить, что струя подходит достаточно близко к точечной массе, представляющей звезду 2 в приближении Роша. Минимальное достижимое расстояние  $R_{\min}$  между траекторией отдельной частицы и центром звезды для систем с разным соотношением масс компонент показано на рис. 2.4 [57]. В диапазоне

<sup>1)</sup> Величина скорости частицы здесь сравнивается с характерной орбитальной скоростью двойной системы  $\sqrt{G(M_1 + M_2)}/A$ .



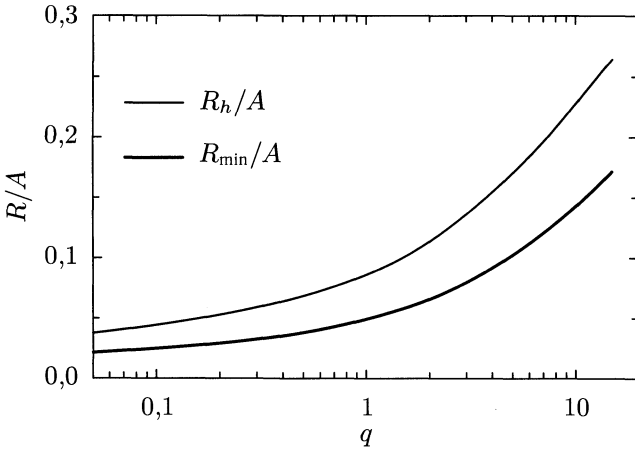


Рис. 2.4. Минимальное расстояние до звезды 2, на которое приближается выпущенная из  $L_1$  частица при первом пролете ( $R_{\min}$ ), и радиус исходного кольца  $R_h$  как функции отношения масс компонентов  $q$

$0,05 < q < 1$  величина  $R_{\min}$  с точностью до 1% может быть аппроксимирована выражением [18]:

$$R_{\min}/A = 0,0488q^{-0,464}. \quad (2.18)$$

Для двойных систем, где радиус второго компонента  $R_2 > R_{\min}$ , струя вещества попадает непосредственно на поверхность звезды. В случае же, когда  $R_2 < R_{\min}$  поток вещества огибает звезду и в конце концов пересекает сам себя в некоторой точке (см. траектории частиц на рис. 2.3). Следует отметить, что наличие пересекающихся траекторий в системе говорит о возникновении в ней сильного взаимодействия потоков газа, учет которого в рамках баллистического приближения не является корректным. Сложный характер взаимодействия струи с веществом межкомпонентной оболочки приводит к необходимости решения полной системы газодинамических уравнений для описания процесса переноса вещества в полуразделенных двойных. Примеры такого описания будут приведены в третьей и четвертой частях книги. Здесь же, следуя работам [57, 61], на качественном уровне рассмотрим картину течения, опираясь на анализ траекторий пробных частиц.

Рассмотрим угловой момент частицы после прохождения точки, где траектория пересекает саму себя. Учитывая, что место пересечения траекторий пробных частиц расположено достаточно близко к звезде 2, и, следовательно, воздействием звезды 1 на поток вблизи точки столкновения можно пренебречь, будем считать, что угловой момент элемента газа относительно звезды 2 сохраняется. Поскольку для частицы с фиксированным угловым моментом, вращающейся вокруг точечной

массы, минимальная энергия достигается на круговой орбите, следует ожидать, что газ после столкновения образует вокруг звезды 2 кольцо с радиусом  $R_h$ . Газ в кольце вращается вокруг звезды 2 с азимутальной скоростью  $v_\varphi$ , которая, в предположении отсутствия сил давления, определяется из баланса между центробежной силой  $v_\varphi^2/R$  и гравитационным притяжением звезды  $GM_2/R^2$ . Приравнявая их, мы получаем газовое кольцо с кеплеровским законом вращения  $v_K = \sqrt{GM_2/R}$ . Угловой момент в таком кольце растет наружу по закону  $\sqrt{R}$ .

Радиус исходного кольца  $R_h$  может быть оценен по методике работы [57], где он определялся как расстояние до аккретора, на котором струя вещества имеет такую же тангенциальную скорость, как и частица на замкнутой периодической орбите, проходящей через данную точку. Однако данный подход очень сложен для алгоритмизации. С хорошей степенью точности  $R_h$  можно также определить как точку, где тангенциальная скорость струи равняется тангенциальной скорости кольца. Если же учесть наличие сил Кориолиса в системе, то можно получить еще более точное выражение. Так как в этом случае распределение скорости в кольце описывается законом

$$v_\varphi = \sqrt{\Omega^2 R^2 + v_K^2} - \Omega R, \quad (2.19)$$

то из условия равенства  $v_\varphi(R_h)$  и азимутальной скорости струи на расстоянии  $R_h$  получаем зависимость  $R_h(q)$ , совпадающую с расчетами [57]. Зависимость  $R_h$  от  $q$  показана на рис. 2.4.

Полученная зависимость угловой скорости вещества  $\omega_K = v_K/R$  от радиуса означает, что газ в кольце вращается дифференциально, т. е. в газовом потоке существуют не равные нулю сдвиговые напряжения. Наличие диссипативных процессов приводит к тому, что частицы газа на внутренних орбитах будут замедлять свое вращение, а на внешних орбитах наоборот ускоряться. В результате это приведет к перераспределению углового момента в кольце и оно расплывется в аккреционный диск.

### 2.3. Аккреционный диск

Исследование физических процессов, протекающих в аккреционных дисках, представляет собой очень сложную задачу и их описанию посвящено большое число монографий и оригинальных статей (см., например, [18–20, 23, 24, 30, 61–65]). Мы не ставим перед собой цели последовательного изложения теории аккреционных дисков. Вместо этого мы лишь вкратце коснемся основных физических явлений в этих объектах. Отсылая читателя за деталями к специализированным работам по аккреционным дискам, в этом параграфе мы сообщим читателю необходимый для понимания дальнейшего материала минимум знаний.

Толщина аккреционного диска зависит от баланса скоростей нагрева и охлаждения газа. Эффективное охлаждение приводит к геометрически тонкому диску. Если диск тонкий, то для его описания можно ввести поверхностную плотность, т. е. массу вещества на единичной поверхности:

$$\Sigma = 2 \int_0^H \rho dz, \quad (2.20)$$

где  $H$  — полутолщина диска. Изменение поверхностной плотности  $\Sigma$  со временем и определит динамику аккреционного диска [18, 61, 66].

Наличие диссипативных процессов в диске приводит к возникновению радиального движения вещества по направлению к аккретору со скоростью  $v_r$ . Уравнения, описывающие динамику тонкого диска, могут быть получены из полной системы трехмерных газодинамических уравнений интегрированием по толщине диска в предположении, что диск является кеплеровским (т. е.  $v_\varphi = v_K = r\omega_K = \sqrt{GM_2/r}$ ) и  $v_r$  не зависит от  $z$ . Из закона сохранения массы на радиусе  $r$  следует, что

$$r \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (rv_r \Sigma) = 0. \quad (2.21)$$

Из закона сохранения углового момента имеем:

$$r \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma r^2 \omega) + \frac{\partial}{\partial r} (rv_r \Sigma r^2 \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}, \quad (2.22)$$

где  $g$  — момент вязкой силы на радиусе  $r$ , равный

$$g = 2\pi r \nu \Sigma r \frac{\partial \omega}{\partial r} r. \quad (2.23)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости, а  $r\partial\omega/\partial r$  — сдвиговое напряжение.

Комбинируя (2.21) и (2.22), получим уравнения, описывающие временную эволюцию поверхностной плотности  $\Sigma$  и радиальной скорости  $v_r$  для кеплеровского диска:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma \sqrt{r}) \right], \quad (2.24)$$

$$v_r = - \frac{3}{\Sigma \sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma \sqrt{r}). \quad (2.25)$$

Важным свойством уравнения (2.24) является его диффузионный тип. Это означает, что поверхностная плотность диска может изменяться на радиусе  $r$  только в вязкостной шкале времени:

$$t_\nu(r) \sim \frac{r^2}{\nu}, \quad (2.26)$$

или, что эквивалентно, радиальная скорость дрейфа вещества через диск

$$v_r \sim \frac{r}{t_\nu} \sim \frac{\nu}{r}. \quad (2.27)$$

С точки зрения физики, радиальный поток вещества в диске контролируется диффузионным уравнением, а не просто уравнением движения, потому что газ не может аккрецироваться до тех пор, пока не избавится от избытка углового момента. Диссипативные процессы (например, вязкость) перераспределяют угловой момент в диске, отводя его от внутренних частей диска к наружным, что позволяет аккрецироваться внутренним частям диска. Воспользуемся уравнением (2.24) и рассчитаем временную эволюцию поверхностной плотности для случая постоянной вязкости  $\nu$ . В начальный момент распределение поверхностной плотности описывается как возмущение ( $\delta$ -функция), расположенное на половине радиуса диска. Временная эволюция для четырех моментов времени:  $t = 1t_0, 2t_0, 4t_0$  и  $9t_0$  показана на рис. 2.5 (кривые 1–4, соответственно). Используемый масштаб времени определяется по принятому значению вязкости  $\nu$  и радиусу диска  $R_d$  как  $t_0 = R_d^2/\nu$ . На рис. 2.5 также показана  $v_r$  (в единицах  $\nu/R_d$ ) для тех же моментов времени. Как видно из представленных результатов расчетов, большая часть вещества кольца движется вовнутрь, теряя энергию и угловой момент. Небольшая часть вещества движется наружу, приобретая угловой момент. В результате первоначальное кольцо, как и следовало ожидать, расплывается в диск.

Судьба наружных слоев диска определяется тем, что диск в стационарном состоянии должен постоянно избавляться от избыточного углового момента. Если размеры диска велики, то приливные силы, действующие на диск со стороны звезды-компаньона, ограничивают его дальнейший рост и передают избыток углового момента диска в орбитальный момент двойной системы. Кроме того избыток углового момента может передаваться с наружного края диска газу межкомпонентной оболочки, который в дальнейшем покидает систему (декреция вещества, см., например, [67]). Наряду с этими механизмами существуют и другие возможные механизмы отбора углового момента у вещества диска (такие как магнитный ветер, спиральные ударные волны, и т. д.), которые также должны учитываться при анализе аккреционных дисков.

В направлении, перпендикулярном плоскости диска (вдоль оси  $z$ ) структура диска определяется балансом между вертикальной составляющей градиента давления и  $z$ -компонентой силы тяжести звезды. В предположении, что масса диска пренебрежимо мала имеем:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{GM_2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (2.28)$$

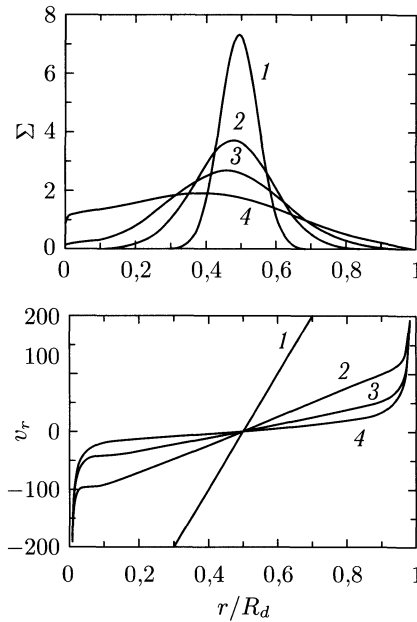


Рис. 2.5. Временная эволюция газового кольца под действием вязкости. Показано распределение поверхностной плотности  $\Sigma$  и радиальной скорости расплывания  $v_r$  от радиуса  $r$  для четырех моментов времени

Для тонкого диска  $z \ll r$  и, следовательно, (2.28) может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{GM_2 \rho z}{r^3}. \quad (2.29)$$

Для оценок удобно использовать упрощенное выражение, полученное из (2.29) в предположении, что

$$\frac{\partial P}{\partial z} \approx \frac{P_0}{H}, \quad z \approx H, \quad c_s \approx \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}, \quad (2.30)$$

где индекс 0 соответствует значениям, взятым на экваториальной плоскости. В результате получаем выражение для полутолщины диска  $H$  в виде

$$H = \frac{c_s}{\sqrt{GM_2/r^3}} = \frac{c_s}{v_K} r. \quad (2.31)$$

В реальных астрофизических дисках, помимо сил гравитации и центробежной силы, на газовую частицу действуют также добавочные силы, например градиент давления. Это означает, что закон вращения в таких дисках может отличаться от кеплеровского. В этом случае динамика газовой частицы в диске определяется уравнением сохранения импульса в радиальном направлении и уравнением гидростатическо-

го равновесия в вертикальном направлении. Предполагая аксиальную симметрию и политропное уравнение состояния газа диска, соответствующая система уравнений может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad P = K \rho^{1+1/n}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Как правило, для описания тонких дисков используется стандартная система усредненных по  $z$  «плоских» уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r}, \\ \Pi &= K_1 \Sigma^{1+1/n_1}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где  $\Sigma$ , как обычно, — поверхностная плотность,  $\Pi$  — «плоское» давление, определяемое выражением

$$\Pi = 2 \int_0^H P dz. \quad (2.34)$$

В системе (2.33)  $\Phi_0$  обозначает первый член разложения потенциала  $\Phi$  по переменной  $z$  в окрестности экваториальной плоскости (штрих обозначает дифференцирование по  $z$ ):

$$\Phi = \Phi_0(r) + \frac{1}{2} \Phi_0''(r) z^2 + \dots \quad (2.35)$$

Однако, как было показано в работах [68, 69] эти системы в общем случае не являются эквивалентными. Действительно, из второго уравнения системы (2.32) следует, что функция

$$\chi = \Phi + \int \frac{dP}{\rho} \quad (2.36)$$

зависит только от  $r$  и, следовательно, плотность  $\rho$  может быть записана как

$$\rho = \left[ \frac{\chi(r) - \Phi_0(r) - \frac{1}{2} \Phi_0''(r) z^2}{K(n+1)} \right]^n. \quad (2.37)$$

Интегрируя выражение для плотности по  $z$  от  $-H$  до  $H$  и учитывая, что полутолщина диска в данном случае определяется как

$$H = \sqrt{2(\chi - \Phi_0)/\Phi_0''}, \text{ получаем соотношение между } \chi \text{ и } \Sigma:$$

$$\chi(r) = \Phi_0(r) + C(r) \Sigma^{\frac{2}{2n+1}}, \quad (2.38)$$

где

$$C(r) \sim [\Phi_0''(r)]^{\frac{1}{2n+1}}. \quad (2.39)$$

Для того, чтобы получить «плоское» уравнение импульса в радиальном направлении с правильным усреднением, нужно продифференцировать  $\chi(r)$  по  $r$ . В результате получим

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{2n+1} C(r) \Sigma^{-\frac{2n-1}{2n+1}} + \frac{dC}{dr} \Sigma^{\frac{2}{2n+1}} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r}. \quad (2.40)$$

Это уравнение отличается от соответствующего уравнения системы (2.33), которое может быть записано в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + K_1 \frac{n_1 + 1}{n_1} \Sigma^{-\frac{n_1-1}{n_1}} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r}. \quad (2.41)$$

Видно, что уравнение (2.40) отличается от стандартного уравнения (2.41) как наличием дополнительного члена с  $dC/dr$ , так и разными показателями степени при  $\Sigma$  в члене, описывающем градиент давления, если для полной и «плоской» модели используются одинаковые индексы политропы  $n_1 = n$ . Выявленные отличия исчезают лишь для изотермического случая<sup>1)</sup>, что соответствует  $n \rightarrow \infty$ , так как при этом  $dC/dr \rightarrow 0$ . Для рассмотренного выше осесимметричного политропного случая диск может быть описан в «плоской» постановке с модифицированным уравнением импульса (2.40).

Модифицированные «плоские» уравнения для неосесимметричного политропного случая [69] чрезвычайно сложны для анализа, поэтому для описания аккреционных дисков во внешнем гравитационном поле предпочтительным является использование полных трехмерных уравнений. Что же касается более общего случая, когда вещество диска не описывается баротропным уравнением состояния, а имеет вид<sup>2)</sup>  $P = P(\rho, \varepsilon)$ , вопрос о возможности получения корректной замкнутой системы «плоских» уравнений остается открытым. Следует отметить, что важность трехмерного подхода существенно возрастает еще и потому, что для толстых дисков усредненное «плоское» рассмотрение в принципе невозможно.

Ключевую роль в физике аккреционных дисков играют диссипативные процессы. Рассмотрим равновесную газовую конфигурацию вблизи гравитирующего центра. Наличие диссипативных процессов приводит к перераспределению углового момента и, как следствие, к появлению радиальных движений вещества. В случае, если угловой момент теряется системой или отводится наружу вещество начинает двигаться

<sup>1)</sup> Следует отметить, что аналогичное рассмотрение для случая самогравитирующего диска показывает справедливость стандартных «плоских» уравнений тоже только в одном случае — при  $n = 1$  [69].

<sup>2)</sup> Например: уравнение состояния идеального газа  $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ .

к гравитирующему центру, что, рано или поздно, приводит к аккреции. Таким образом, можно утверждать, что только наличие диссипативных процессов превращает исходную равновесную газовую конфигурацию в аккреционный диск.

Источник вязкости в дифференциально вращающихся газовых дисках окончательно не установлен, поэтому широкое распространение получила феноменологическая теория  $\alpha$ -диска. Эта теория базируется на введенной в работах [62] и [63] параметризации коэффициента кинематической вязкости в виде

$$\nu = \alpha_s H, \quad (2.42)$$

где  $\alpha$  — безразмерный параметр, который принято теперь называть параметром Шакуры–Сюнјева.

Разработка корректной модели аккреционного диска требует знаний о величине вязкости  $\nu$  (или, что эквивалентно, коэффициента  $\alpha$ ). Некоторые сведения о диапазоне возможных значений  $\alpha$  в аккреционных дисках могут быть получены из наблюдений. В достаточной степени надежные экспериментальные оценки показывают (см., например, [70–73]), что  $\alpha \sim 0,01$ –1. Совершенно очевидно, что эти значения на 9–11 порядков больше величины молекулярной вязкости ( $\alpha \sim 10^{-11}$ ), и, следовательно, необходимо предположить существование физических механизмов, обеспечивающих столь высокую вязкость в аккреционных дисках.

Попытки поисков соответствующих процессов в аккреционных дисках предпринимались неоднократно. Долгое время предполагалось, что турбулентность является основным процессом, позволяющим обеспечить высокие значения  $\alpha$  в аккреционных дисках<sup>1)</sup>. Однако, в литературе в качестве механизма отвода углового момента рассматривалась не только развитая турбулентность, к которой может привести сильная неустойчивость, но и другие физические процессы. Перечислим главные из них: приливное взаимодействие [76–78], спиральные ударные волны [65, 79–82], конвекция [83–86], ветер от аккреционного диска и джеты [87–90], перенос углового момента распространяющимися волнами [91–93], а также различные неустойчивости аккреционного диска — магнитогидродинамическая [94–97], параметрическая [98, 99], бароклинная [100–102]. Анализ различных способов передачи углового момента (см., например, обзоры [103, 104]) показывает, что все рассматриваемые механизмы имеют определенные трудности при объяснении свойств аккреционных дисков.

Наиболее известным и широко используемым механизмом в настоящее время является магниторотационная неустойчивость (МРН).

<sup>1)</sup> Одно из первых известных нам упоминаний о газодинамической турбулентности как о возможном механизме переноса углового момента в дисках было в работе [74]. Хотя авторы [75] считают, что эта идея возникла еще в работах Буссинеска и Прандтля.



Однако отметим, что применение этого механизма ко всем типам аккреционных дисков встречает ряд принципиальных трудностей. Во-первых, для его реализации необходимо магнитное поле, а из наблюдений мы знаем, что существует довольно много систем, где поле настолько мало, что никак себя не проявляет. Во-вторых, еще с первых работ по МРН, известно, что эта неустойчивость гасится сильным магнитным полем, т. е., возможно, что по мере приближения к аккретору (по мере роста поля) МРН исчезает [105]. Поэтому вопрос о механизме переноса углового момента в диске все еще остается открытым.

## 2.4. Особенности переноса вещества в системах с магнитным полем

Имеется большое количество тесных двойных, в которых магнитное поле играет значительную роль в процессах массообмена и аккреции. К таким системам, в первую очередь, относятся магнитные катаклизмические звезды и рентгеновские двойные. В магнитных катаклизмических звездах аккретором является белый карлик с индукцией магнитного поля на поверхности  $\sim 10^4$ – $10^8$  Гс. В рентгеновских двойных системах аккретором является нейтронная звезда, имеющая собственное магнитное поле  $\sim 10^{12}$ – $10^{13}$  Гс. Простые оценки показывают, что магнитный момент дипольного магнитного поля белого карлика в катаклизмических системах и нейтронной звезды в рентгеновских двойных имеют примерно одинаковые значения порядка  $10^{30}$  Гс  $\cdot$  см<sup>3</sup>. Это означает, что примерно равны радиусы магнитосферы белого карлика и нейтронной звезды, значения которых определяют степень влияния магнитного поля на структуру течения в тесной двойной системе. Однако в катаклизмических переменных межкомпонентное расстояние  $A$  в десятки и сотни раз меньше межкомпонентного расстояния в рентгеновских двойных. Поэтому безразмерный радиус магнитосферы (отношение магнитосферного радиуса к межкомпонентному расстоянию) в магнитных катаклизмических переменных может существенно превышать аналогичную величину для рентгеновских двойных. Таким образом, влияние собственного магнитного поля аккретора на процессы перетекания вещества и на структуру аккреционного диска в катаклизмических системах, в целом, оказывается гораздо сильнее, чем в рентгеновских двойных. Поскольку нас прежде всего интересуют внешние части аккреционного диска, которые наблюдаются методами классической астрономии, то основное внимание в книге будет уделено именно исследованию структуры течения в магнитных катаклизмических звездах.

Магнитные катаклизмические переменные представляют собой ТДС, в которых вещество из звезды-донора (маломассивная звезда позднего спектрального класса) перетекает через внутреннюю точку

Лагранжа на белый карлик (см., например, [19]). Выделяют два основных типа магнитных катаклизмических звезд: полярные и промежуточные полярные. В полярных (системы типа AM Her) белый карлик имеет сильное собственное магнитное поле ( $\sim 10^7$ – $10^8$  Гс на поверхности). Наблюдения показывают, что полярные характеризуются относительно короткими орбитальными периодами от 1 до 5 часов. Аккреционные диски в таких системах не наблюдаются, а собственное вращение компонентов является синхронным [106]. Предельным случаем этих систем являются, так называемые, *магнеторы* [107], в которых внутренняя точка Лагранжа находится внутри магнитосферы аккретора. Считается, что в полярных перетекающее из звезды-донора вещество формирует коллимированный поток, который вдоль силовых линий магнитного поля попадает в район одного из магнитных полюсов звезды-аккретора [19, 108]. Схематическое изображение структуры течения в полярных приведено на правой панели рис. 2.6.

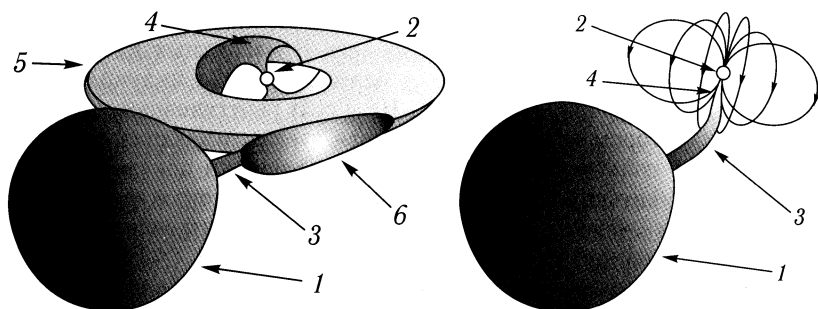


Рис. 2.6. Схематическое изображение структуры течения в промежуточном поляре (слева) и поляре (справа). Цифрами обозначены: 1 — звезда-донор, 2 — звезда-аккретор, 3 — струя, 4 — аккреционная колонка, 5 — аккреционный диск, 6 — горячая линия

Промежуточные полярные представляют собой двойные системы с относительно слабыми магнитными полями ( $\sim 10^4$ – $10^6$  Гс на поверхности аккретора). Они занимают промежуточное положение между системами типа AM Her и немагнитными катаклизмическими переменными. Промежуточные полярные характеризуются большим разбросом орбитальных периодов от нескольких часов до нескольких десятков часов. При этом периоды собственного вращения звезды-аккретора в этих системах существенно короче орбитального (в десятки, сотни и даже тысячи раз) [106]. В выделяемом иногда подклассе систем типа DQ Her эта разница в периодах вращения выражена сильнее. Оставшиеся по соотношениям между периодами вращения подразделяют системы на регулярные промежуточные полярные, системы типа EX Hya и системы с почти синхронным вращением [106]. Асинхронность

собственного вращения аккректора в промежуточных полярах объясняется взаимодействием магнитного поля белого карлика с веществом диска в области границы магнитосферы, в результате чего устанавливается режим равновесного вращения, при котором радиус коротации равен радиусу магнитосферы [19, 108]. Схематическое изображение структуры течения в промежуточных полярах с магнитным полем дипольного типа приведено на левой панели рис. 2.6.

Исследование МГД-течений в двойных системах представляет собой сложную задачу, поскольку даже в простейшей постановке структура течения может иметь существенно трехмерный характер. Однако эта задача представляет огромный интерес, поскольку все наблюдаемые явления в двойных системах так или иначе связаны с аккрецией вещества на один из компонентов. Аккреция на компактный объект с магнитным полем может приводить к ряду наблюдаемых явлений таких, как излучение из области полярных колонок, переменность, связанная с образованием горячих пятен на поверхности аккректора, высокочастотные квазипериодические осцилляции рентгеновского излучения и др.

Особенно важно корректное рассмотрение МГД-процессов в аккреционных дисках ТДС. Дело в том, что в области формирующегося аккреционного диска в полуразделенных двойных системах магнитное поле изначально не является достаточно сильным. Однако в аккреционном диске магнитное поле звезды-аккректора может усиливаться за счет дифференциального вращения, радиальных движений и динамо. К ослаблению магнитного поля приводят диффузия, турбулентная диссипация и магнитная плавучесть. В результате действия этих процессов формируется магнитное поле довольно сложной структуры, поскольку в разных регионах диска может доминировать тот или иной эффект. Следует отметить, что в отличие от одиночных объектов (звезда, аккреционный диск и т.п.) в тесных двойных системах существенную роль могут играть и свои специфические механизмы генерации магнитного поля [109]. Например, в магнитных полярах может работать динамо Герценберга [110, 111], приводящее к генерации магнитного поля в оболочке вторичного компонента. Наличие магнитного поля в диске в значительной степени определяет характеристики диска, и, следовательно, его изучение необходимо для интерпретации наблюдений. Кроме того, наличие магнитного поля в аккреционных дисках может приводить к образованию биполярных истечений [87]. Наконец, следует отметить и возможную роль магнитного поля в генерации турбулентности в диске в результате развития магниторотационной неустойчивости [94, 96].

Попытки численного исследования влияния магнитного поля на структуру течения предпринимаются начиная с 90-х годов XX века. Однако в силу сложности задачи, исследования проводились либо в рамках упрощенных моделей, либо в ограниченной области магнитосферы звезды. Даже в упрощенной постановке, моделирование

методом квазичастиц [112–117] показало, что в промежуточных полярах в зависимости от параметров системы могут формироваться структуры течения самого различного типа — от удерживаемых магнитным полем аккреционных потоков до аккреционных дисков, как в немагнитных катаклизмических переменных. Однако, неучет в этих моделях таких важных эффектов, как влияние газового и магнитного давлений, процессов нагрева-охлаждения и т.п., позволяет использовать результаты этих расчетов лишь для качественного анализа и не дает возможности проводить детальную интерпретацию наблюдательных данных. Более тщательно исследовались процессы аккреции в магнитосфере звезды. Так в работах [118–121] представлены результаты трехмерного численного моделирования аккреции плазмы на гравитирующий объект с магнитным полем дипольного типа, ось симметрии которого не совпадает с осью вращения звезды. В этих работах удалось детально исследовать трехмерную структуру течения в области магнитосферы центрального объекта, где магнитное поле является доминирующим.

Лишь в последние годы авторам удалось разработать полноценную трехмерную численную модель для расчета структуры течений в тесных двойных системах [122–125]. В нашем подходе для моделирования использована полная система уравнений магнитной гидродинамики, позволяющая описать все основные динамические эффекты, связанные с магнитным полем. В численной модели учитываются процессы радиационного нагрева и охлаждения, а также диффузия магнитного поля за счет диссипации токов в турбулентных вихрях, магнитной плавучести и волновой МГД-турбулентности. Важно отметить, что в разработанной модели формирование и последующая эволюция аккреционного диска происходят естественным образом в результате процесса массопереноса вещества через внутреннюю точку Лагранжа. Таким образом, нам впервые удалось добиться самосогласованного описания структуры МГД-течений в тесных двойных системах и получить результаты, которые могут использоваться для интерпретации наблюдений в классической астрономии. Детальному изложению этих результатов посвящена часть IV книги.

**ТЕМПЕРАТУРА АККРЕЦИОННЫХ ДИСКОВ**

Для моделирования динамики вещества в тесных двойных звездах необходимо учитывать основные процессы, влияющие на структуру течения. К таким процессам, помимо собственно газодинамических, следует отнести магнитное поле и наличие излучения. Решения для систем без учета и с учетом магнитного поля будут представлены в частях III и IV книги соответственно. Что касается переноса излучения, то с формальной точки зрения его учет не представляет серьезных трудностей, и в Приложении Б даны все необходимые уравнения. Однако реализация газодинамической модели с полноценным учетом излучения все еще невозможна на современных компьютерах в силу чрезвычайной ресурсоемкости такой задачи. Это означает, что перенос излучения в реальных численных моделях возможен только в упрощенной постановке. В частях III и IV книги будут представлены некоторые способы приближенного учета переноса излучения, однако для их корректного использования необходимо иметь представления о характерных значениях температуры вещества в ожидаемом решении. Именно поэтому в данной главе будет рассмотрен возможный диапазон температур аккреционных дисков [23, 126].

**3.1. Основные уравнения**

Как было показано в гл. 2, вертикальная структура аккреционного диска определяется равновесием между вертикальной компонентой гравитационной силы и (вертикальным) градиентом давления. Это, в свою очередь, определяется балансом процессов нагрева и охлаждения газа. Процесс нагрева связан с вязкостной диссипацией кинетической энергии, а также объемным радиационным нагревом, который, в свою очередь, обусловлен излучением центрального объекта. Процесс охлаждения обусловлен несколькими механизмами: объемным радиационным охлаждением, лучистой теплопроводностью, конвекцией. Если предположить, что адвективные члены, а также члены, связанные с адиабатическим нагревом/охлаждением, малы, то стационарное уравнение энергии

$$Q^+ - Q^- = 0 \quad (3.1)$$

может быть записано следующим образом:

1) Для оптически тонкого случая, где  $Q^+$  определяется объемным радиационным нагревом и вязкостным нагревом, а  $Q^-$  — объемным радиационным охлаждением,

$$Q^+_{\text{visc}}(\rho, T) + n^2 [\Gamma(T, T_{\text{wd}}) - \Lambda(T)] = 0. \quad (3.2)$$

Здесь  $\Gamma(T, T_{\text{wd}})$  — функция радиационного нагрева, зависящая от температуры газа  $T$  и температуры центрального объекта (белого карлика)  $T_{\text{wd}}$ ,  $\Lambda(T)$  — функция радиационного охлаждения,  $Q^+_{\text{visc}}(\rho, T)$  — вязкостный нагрев.

2) Для оптически толстого случая  $Q^+$  определяется вязкостным нагревом, а  $Q^-$  — лучистой теплопроводностью<sup>1)</sup> и конвекцией в вертикальном направлении

$$Q^+_{\text{visc}}(\rho, T) - \frac{\partial F_{\text{rad}}}{\partial z} - \frac{\partial F_{\text{conv}}}{\partial z} = 0. \quad (3.3)$$

Здесь  $F_{\text{rad}}$ ,  $F_{\text{conv}}$  — радиационный и конвективный потоки энергии.

Для определения функций, входящих в уравнения (3.2) и (3.3) нам потребуются: уравнение неразрывности

$$-\dot{M}_a = 2\pi \int r \rho v_r dz = \text{const}, \quad (3.4)$$

уравнение баланса углового момента  $\lambda \equiv r^2 \omega_K$  в радиальном направлении

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r \lambda) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \rho r^3 \frac{\partial \omega_K}{\partial r} \right), \quad (3.5)$$

из которого следует, что

$$|v_r| = -\frac{\nu}{\omega_K} \frac{\partial \omega_K}{\partial r} \simeq \frac{\nu}{r}, \quad (3.6)$$

выражение для вязкостного нагрева

$$Q^+_{\text{visc}} = \rho \nu \left( r \frac{\partial \omega_K}{\partial r} \right)^2. \quad (3.7)$$

Здесь  $\dot{M}_a$  — темп аккреции,  $\omega_K = \sqrt{GM/r^3}$  — угловая скорость вращения кеплеровского диска,  $M$  — масса центрального объекта,  $G$  — гравитационная константа,  $\rho$  — плотность вещества,  $v_r$  — радиальная скорость,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Как было отмечено выше, молекулярная вязкость не может дать необходимого значения диссипации, поэтому обычно считают, что диссипативные процессы связаны с турбулентной или магнитной вязкостью.

<sup>1)</sup> Молекулярной теплопроводностью пренебрегаем в силу ее малости по сравнению с лучистой.

Для определения вертикального градиента давления воспользуемся уравнением гидростатического равновесия в вертикальном направлении:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \simeq -\omega_K^2 z, \quad (3.8)$$

а также уравнением состояния идеального газа с излучением:

$$P = \rho R_g T + \frac{1}{3} a T^4. \quad (3.9)$$

Здесь, как обычно,  $P$  — давление,  $T$  — температура,  $R_g$  — газовая постоянная,  $a$  — радиационная константа (постоянная Стефана). Все уравнения записаны в цилиндрической системе координат  $(r, z)$ .

Для определения зависимости  $T(\dot{M}_a)$  необходимо использовать уравнения (3.4), (3.6), а также выражения для коэффициента вязкости  $\nu$ . Воспользуемся выражением для  $\nu$ , предложенным в работах [62] и [63],  $\nu = \alpha c_s H$ , где  $H$  — полутолщина диска, а  $c_s$  — скорость звука,

$$c_s \simeq \sqrt{R_g T + \frac{a T^4}{3\rho}}. \quad (3.10)$$

Если пренебречь зависимостью плотности от  $z$  и использовать среднее по высоте значение  $\bar{\rho}$  (в дальнейшем в этой главе будем обозначать эту величину просто как  $\rho$ ), то интегрирование уравнения (3.8) дает следующее выражение для полутолщины диска  $H$ :

$$H = \frac{c_s}{\omega_K}. \quad (3.11)$$

Значение  $c_s$  будем определять по температуре в экваториальной плоскости диска  $z = 0$ , что является достаточно корректным в силу неопределенности параметра  $\alpha$ . В результате получим уравнение, связывающее  $\dot{M}_a$ ,  $T|_{z=0}$  и  $\rho$  при заданных  $r$  и  $\alpha$ :

$$\dot{M}_a = \frac{2\pi\alpha\rho c_s^3}{\omega_K^2} = \frac{2\pi\alpha}{\omega_K^2} \left( R_g T \rho^{2/3} + \frac{1}{3} a T^4 \rho^{-1/3} \right)^{3/2}. \quad (3.12)$$

Это уравнение сводится к кубическому уравнению относительно переменной  $\rho^{1/3}$  и имеет две ветви решения: либо один отрицательный действительный и два комплексных корня, либо три действительных, из которых один является отрицательным. По физическому смыслу плотности значимы лишь положительные действительные корни. Для существования этих корней необходимо выполнение условия

$$\dot{M}_a > \frac{\sqrt{3}\pi\sqrt{R_g}\alpha a T^{9/2}}{\omega_K^2}, \quad (3.13)$$

которое дает минимальное значение темпа аккреции при заданных  $T$ ,  $r$ ,  $\alpha$ . При выводе этого условия использовалось уравнение состояния,

учитывающее давление излучения. Эта оценка также может быть записана в виде

$$T < 7 \cdot 10^5 \left( \frac{r}{R_{\text{wd}}} \right)^{-2/3} \left( \frac{\dot{M}_a}{10^{-9} M_{\odot}/\text{год}} \right)^{2/9} \left( \frac{\alpha}{0,1} \right)^{-2/9} \text{ К}, \quad (3.14)$$

где  $R_{\text{wd}} = 10^9$  см — радиус аккретора (белого карлика).

Рассмотрим условие (3.13) для наружных частей аккреционного диска. Примем  $r = A/5$ , где  $A$  — расстояние между компонентами двойной системы  $A = 1,42R_{\odot}$ , что соответствует достаточно типичной ТДС IP Peg. Получим

$$\dot{M}_a > 10^{-9} \left( \frac{T}{10^5 \text{ К}} \right)^{9/2} \left( \frac{\alpha}{0,1} \right) M_{\odot}/\text{год}. \quad (3.15)$$

Если условие (3.13) выполнено, то корни уравнения (3.12), связывающего  $\rho$ ,  $T$  и  $\dot{M}_a$  при заданных  $r$  и  $\alpha$ , могут быть записаны в виде:

$$\rho = (R_g T)^{-3/2} A_0 \sin^3 \left[ \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_g} a T^{9/2}}{A_0} \right) \right], \quad (3.16)$$

$$\rho = (R_g T)^{-3/2} A_0 \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{\sqrt{R_g} a T^{9/2}}{A_0} \right) + \frac{\pi}{6} \right], \quad (3.17)$$

где обозначено

$$A_0 = \frac{\dot{M}_a \omega_K^2}{2\pi\alpha} \quad (3.18)$$

и для простоты опущены числовые множители  $\sqrt{3}/2 \simeq 1$ . Первый из них соответствует так называемым дискам с преобладанием давления излучения  $\beta_{\text{rad}} > 1$ , где

$$\beta_{\text{rad}} = \frac{aT^4}{3\rho R_g T}, \quad (3.19)$$

а второй — дискам с преобладанием газового давления  $\beta_{\text{rad}} < 1$ .

Эти формулы описывают две ветви двухпараметрической зависимости  $\rho(\dot{M}_a, T)$ . Для достижения поставленной задачи, т. е. для расчета зависимости  $T(\dot{M}_a)$  необходимо использование дополнительного уравнения — уравнения теплового баланса (3.1). Как следует из параграфа 3.1, уравнение (3.1) имеет разный вид в зависимости от оптической толщины диска, следовательно, для дальнейшего анализа нам потребуется вычислить оптическую толщину.

Оптическая толщина  $\tau$  определяется произведением коэффициента поглощения  $\kappa$ , плотности и геометрической толщины слоя  $l$ ,  $\tau = \kappa \rho l$ . Для дисковой аккреции определяющим параметром является отношение геометрической толщины слоя, на котором достигается  $\tau = 1$ , к полутолщине диска:  $l^{\tau=1}/H$ . После несложных преобразований получим



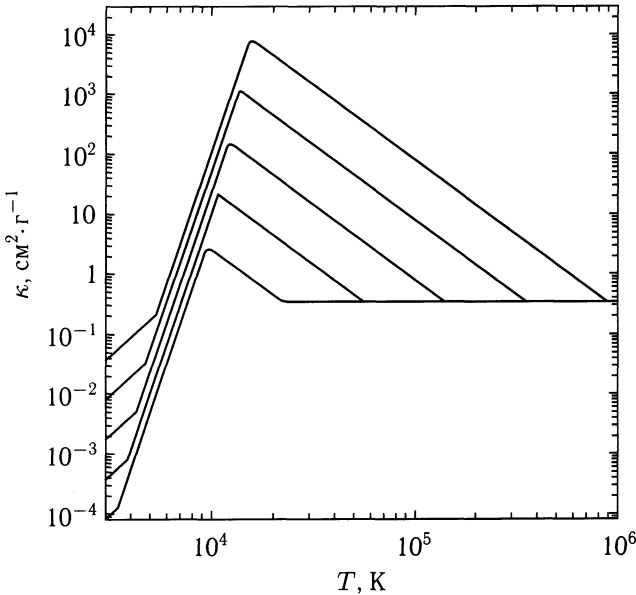


Рис. 3.1. Зависимость  $\kappa(T)$  для значений  $n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ,  $n = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  (сверху вниз) из работы [127]

$$\frac{l^{\tau=1}}{H} = \frac{2\pi\alpha}{\kappa\dot{M}_a} \frac{c_s^2}{\omega_K}. \quad (3.20)$$

Коэффициент поглощения  $\kappa$  сложным образом зависит от  $T$  и  $\rho$  (а также от степени ионизации, химического состава и т. д.). Здесь мы приняли простую аппроксимацию для  $\kappa(T, \rho)$  [86, 127, 128]:

$$\kappa(T, \rho) = \begin{cases} \kappa_1 \rho^{2/3} T^3, & \kappa_1 = 10^{-8}, & (\kappa_1) \\ \kappa_2 \rho^{1/3} T^{10}, & \kappa_2 = 10^{-36}, & (\kappa_2) \\ \kappa_3 \rho T^{-5/2}, & \kappa_3 = 1,5 \cdot 10^{20}, & (\kappa_3) \\ \kappa_4, & \kappa_4 = 0,348. & (\kappa_4) \end{cases}$$

Согласно [127], эти четыре подобласти соответствуют рассеянию на молекулярном и атомарном водороде, свободно-свободным и свободно-связанным переходам, и томсоновскому рассеянию. Границы подобластей, т. е. места переходов от одного выражения к другому, определяются условием равенства значений  $\kappa$ , вычисленных по этим выражениям. Графики зависимости  $\kappa$  от  $T$  и  $\rho$  приведены на рис. 3.1. На рис. 3.1 видны области с  $d\kappa/dT > 0$ , где может развиваться тепловая неустойчивость, когда зависимость между поверхностной плотностью и температурой диска изображается S-образной кривой на плоскости  $(\Sigma, T_{\text{eff}})$ .

Тепловая неустойчивость часто привлекается для объяснения вспышек карликовых новых (см., например, [72, 129]), однако, видно, что это может произойти лишь для достаточно холодных дисков.

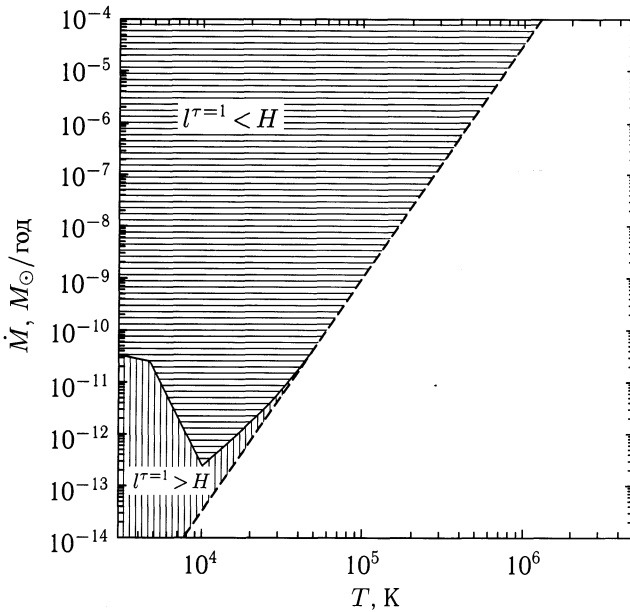


Рис. 3.2. Решения уравнения (3.12) для дисков с преобладанием газового давления на плоскости  $(T, \dot{M}_a)$  для  $\alpha = 0,1$  и  $r = A/5$ . Горизонтальной штриховкой показаны оптически толстые диски, а вертикальной — оптически тонкие. Граница между этими областями обозначена сплошной линией. Пунктирная линия является отражением условия (3.15) для существования решения уравнения (3.12). Ниже этой линии решения отсутствуют

Вернемся к уравнению (3.12). Примем  $\alpha = 0,1$ ,  $r = A/5$  и рассмотрим диски с преобладанием газового давления, где  $\beta_{\text{rad}} < 1$ . На рис. 3.2 в плоскости  $(T, \dot{M}_a)$  штриховкой показана область, соответствующая всем возможным решениям для рассматриваемых дисков. Пунктирная линия соответствует условию (3.15) существования решения уравнения (3.12). Ниже этой линии решения отсутствуют. Сплошной линией показана граница между оптически толстыми и оптически тонкими решениями: горизонтальной штриховкой показаны оптически толстые диски, а вертикальной — оптически тонкие. Аналогичное рассмотрение для дисков с преобладанием давления излучения ( $\beta_{\text{rad}} > 1$ ) представлено на рис. 3.3.

Анализ рис. 3.2 показывает, что при реалистичных значениях скорости аккреции  $10^{-12} M_{\odot}/\text{год} \leq \dot{M}_a \leq 10^{-7} M_{\odot}/\text{год}$  диски с преобладанием газового давления преимущественно являются оптически тол-

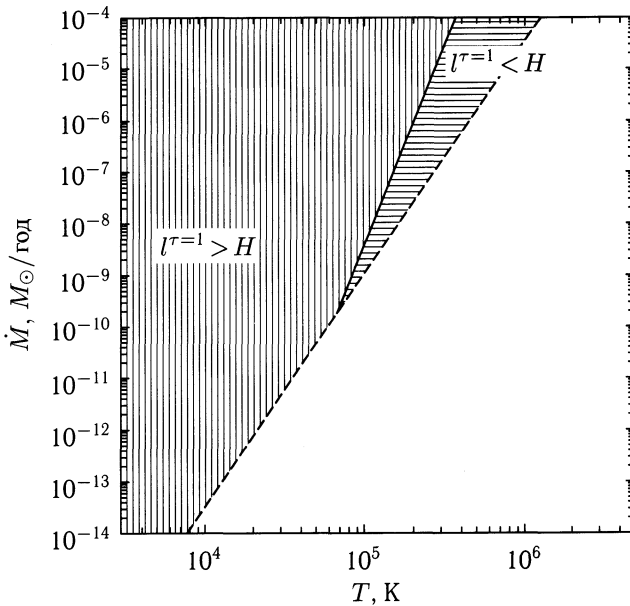


Рис. 3.3. То же, что и на рис. 3.2 для дисков с преобладанием давления излучения

стыми, хотя при малых  $\dot{M}_a$  возможны решения, отвечающие оптически тонким холодным дискам. Из рис. 3.3 следует, что диски с преобладанием давления излучения преимущественно оптически тонкие и лишь для высоких значений  $\dot{M}_a$  возможно существование оптически толстых горячих дисков.

### 3.2. Оптически толстые диски

В предыдущем параграфе было выведено уравнение (3.12), связывающее  $\dot{M}_a$ ,  $T$  и  $\rho$  при заданных  $r$  и  $\alpha$ . Использование дополнительного уравнения — уравнения теплового баланса (3.1) — позволяет сократить число неизвестных и получить искомую связь между  $\dot{M}_a$  и  $T$ .

Вертикальное распределение температуры в оптически толстых дисках описывается уравнением лучистой теплопроводности с источником, обусловленным вязкостным нагревом (3.3), которое может быть записано как

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{3} a c T^4 \right) \right] + \rho \alpha c_s^2 \omega_K, \quad (3.21)$$

где  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $c$  — скорость света. Для решения уравнения (3.21) необходимо задать граничные условия. В силу симметрии задачи производная температуры на экваториальной плоскости

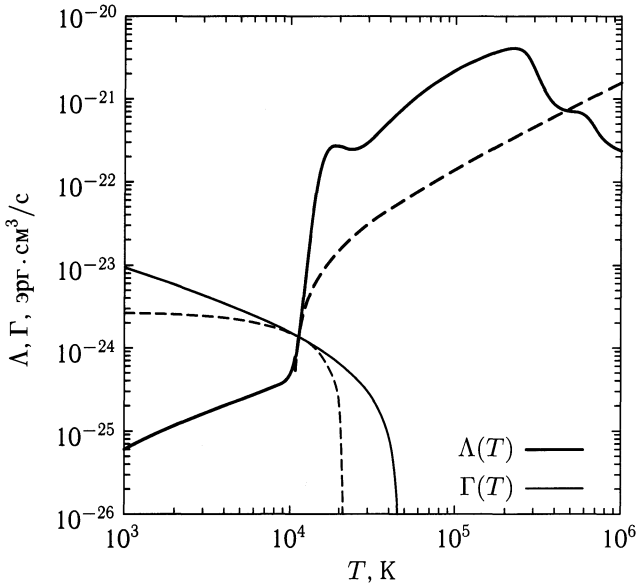


Рис. 3.4. Зависимости функций нагрева  $\Gamma$  и охлаждения  $\Lambda$  от температуры  $T$  (сплошные линии). Пунктирными линиями показаны их линейные аппроксимации в окрестности равновесной температуры  $T = 11230$  К

должна равняться нулю,  $T'|_{z=0} = 0$ . Значение температуры на верхней границе диска определяется из условия  $\Gamma(T_*, T_{\text{wd}}) = \Lambda(T_*)$ . Функции  $\Gamma(T, T_{\text{wd}})$  и  $\Lambda(T)$  имеют сложную форму (см. рис. 3.4), но хорошо известны и могут быть найдены в литературе (см., например, [130–133]). Температура, определенная из равенства этих функций для температуры центрального объекта (белого карлика), равной  $T_{\text{wd}} = 70000$  К, имеет значение  $T(H) = T_* = 13600$  К, а для  $T_{\text{wd}} = 37000$  К — значение  $T(H) = T_* = 11230$  К. Использование этих функций при расчетах достаточно ресурсоемко, поэтому в дальнейшем будем применять линейные аппроксимации этих функций (пример такой аппроксимации представлен на рис. 3.4).

Решение уравнения (3.21) выходит на стационарный режим, когда характерное время теплопроводности

$$t_{\text{diff}} \simeq \frac{R_g \kappa \rho^2 H^2}{acT^3} \quad (3.22)$$

сравнивается с временем вязкостного нагрева

$$t_{\text{heat}} \simeq \frac{R_g T}{\alpha c_s^2 \omega_K} \simeq \frac{1}{\alpha \omega_K}. \quad (3.23)$$

Отметим, что для стационарного случая уравнение (3.21) может быть проинтегрировано аналитически. Обозначим  $U = T^4$ ,  $U_* = T_*^4$ ,  $U_0 = U|_{z=0}$ , снова положим, что  $\rho$  не зависит от  $z$ , тогда

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{\kappa\rho} \frac{d}{dz} \left( \frac{ac}{3} U \right) \right] = -\rho\alpha c_s^2 \omega_K. \quad (3.24)$$

После интегрирования по  $z$  получим:

$$\frac{1}{\kappa\rho} \frac{d}{dz} \left( \frac{ac}{3} U \right) = -\rho\alpha c_s^2 \omega_K z. \quad (3.25)$$

Константа интегрирования равна нулю в силу условия  $U'|_{z=0} = 0$ . Для удобства анализа преобразуем последнее уравнение к виду

$$\frac{1}{\kappa} \frac{dU}{dz} \equiv \frac{dB}{dz} = -\frac{3}{ac} \rho^2 \alpha c_s^2 \omega_K z, \quad (3.26)$$

где функция  $B(U)$  находится из дифференциального уравнения

$$\frac{dB}{dU} = \frac{1}{\kappa(U, \rho)} \quad (3.27)$$

и для фиксированного  $\rho$  может быть выписана в аналитическом виде. Интегрируя последнее уравнение по  $z$ , получим

$$B(U) = B(U_*) + \frac{3}{2ac} \rho^2 \alpha c_s^2 \omega_K (H^2 - z^2), \quad (3.28)$$

или, для  $z = 0$

$$B(U_0) = B(U_*) + \frac{3}{2ac} \rho^2 \alpha c_s^2 \Omega_K H^2. \quad (3.29)$$

С учетом выражений

$$c_s^2 = \left( R_g U_0^{1/4} + \frac{aU_0}{3\rho} \right), \quad (3.30)$$

$$H^2 = \left( R_g U_0^{1/4} + \frac{aU_0}{3\rho} \right) \omega_K^{-2} \quad (3.31)$$

получаем алгебраическое уравнение для  $U_0$ :

$$B(U_0) = B(U_*) + \frac{3}{2ac} \rho^2 \alpha \omega_K^{-1} \left( R_g U_0^{1/4} + \frac{aU_0}{3\rho} \right)^2. \quad (3.32)$$

Это уравнение определяет в неявной форме зависимость  $U_0(\rho)$ , т. е.  $T(\rho)$ . Выражая  $M_a$  через  $\rho$  и  $T$ , получаем зависимость  $M_a(\rho) = M_a(T(\rho), \rho)$ , что и дает зависимость  $T(M_a)$  в параметрическом виде. Формально полученное решение может существовать и в оптически тонких областях, однако в силу сделанных предположений эти точки отбрасывались.

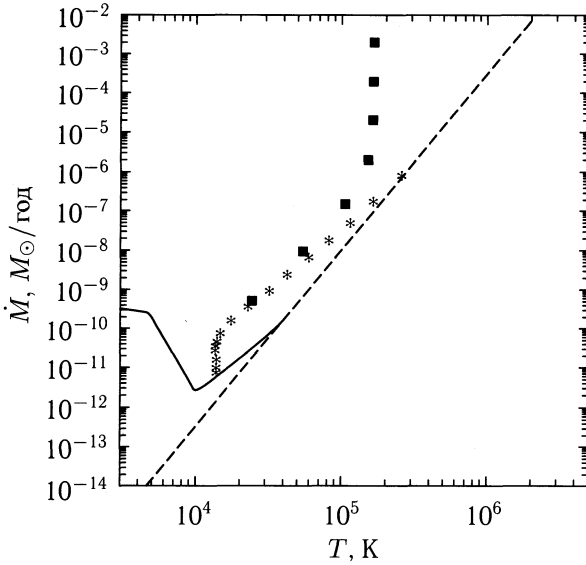


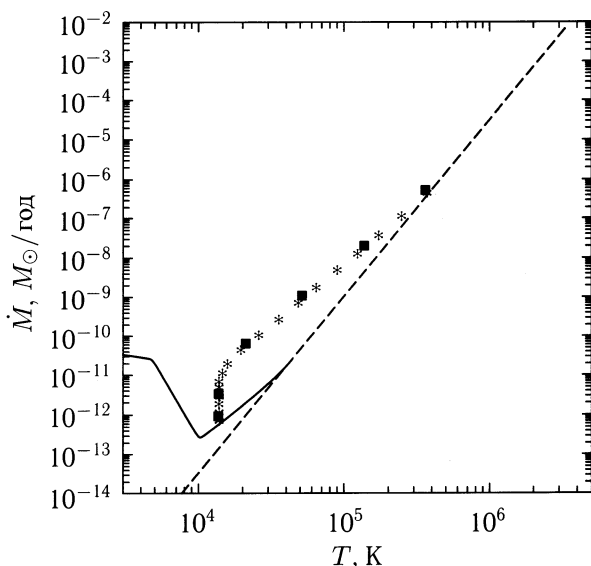
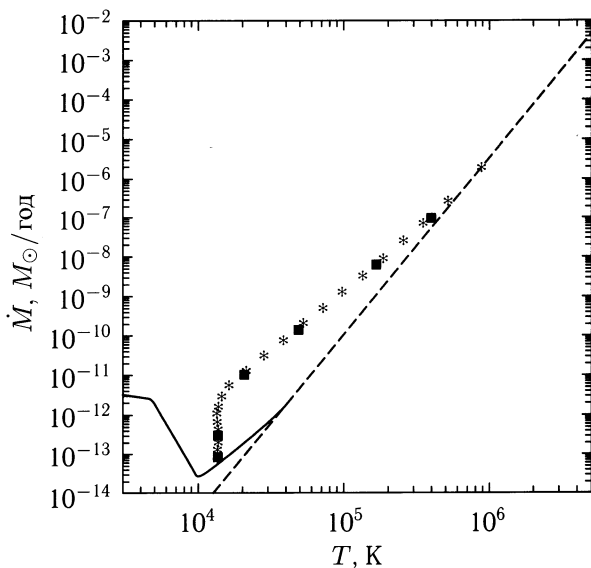
Рис. 3.5. Звездочками обозначены решения уравнения (3.21) для оптически толстого диска для  $\alpha = 1$  и  $r = A/5$ . Квадратиками — решения уравнения (3.35) с учетом конвекции. Пунктирная линия ограничивает снизу область существования решения уравнения (3.12), а сплошная линия разделяет области оптически тонких и оптически толстых дисков

Рассмотрим графическое представление результатов решения этого уравнения. На рис. 3.5 звездочками показана зависимость  $T(M_{\text{acc}})$  для  $\alpha = 1$  и  $r = A/5$ . Как и на рис. 3.2 и 3.3, пунктирная линия ограничивает снизу область существования решения уравнения (3.12), а сплошная линия разделяет области оптически тонких и оптически толстых дисков. На рис. 3.6 и 3.7 показаны решения для  $\alpha = 0,1$  и  $\alpha = 0,01$  соответственно. На рис. 3.8 показана зависимость темпа аккреции от толщины диска. Видно, что все полученные диски являются геометрически тонкими, т. е.  $H \ll r$ .

Лучистая теплопроводность не является единственным механизмом передачи выделенного тепла в оптически тонкие области. При определенных условиях существенную роль может играть конвекция. Без учета давления излучения конвективный поток может быть записан в виде [26, 134]:

$$F_{\text{conv}} = c_P \rho \sqrt{\frac{|g|}{T}} \frac{l^2}{4} (\Delta \nabla T)^{3/2}, \quad (3.33)$$

$$\Delta \nabla T = - \frac{T}{c_P} \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (3.34)$$

Рис. 3.6. То же, что и на рис. 3.5 для  $\alpha = 0,1$ Рис. 3.7. То же, что и на рис. 3.5 для  $\alpha = 0,01$ 

Здесь  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении,  $s = R_g \ln(T^{3/2}/\rho)$  — удельная энтропия,  $g = -\omega_K^2 z$  — гравитационное ускорение,  $l$  — длина перемешивания, которая принимается равной

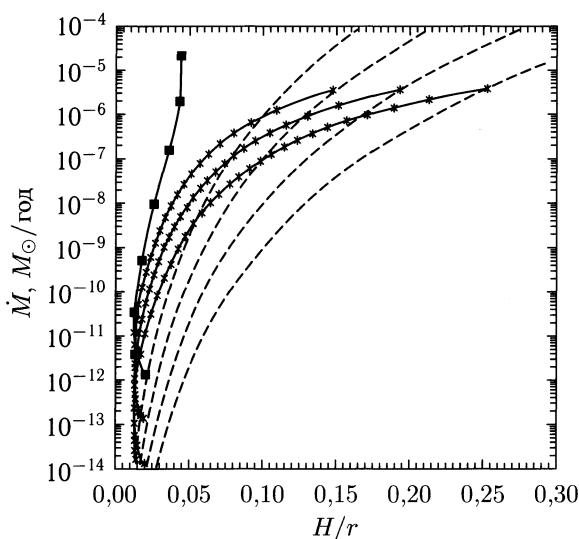


Рис. 3.8. Диск с преобладанием газового давления. Сплошными линиями показаны возможные состояния диска на плоскости  $H/r - \dot{M}_a$  для  $r = A/5$ . Линиями со звездочками обозначены решения уравнения (3.21), учитывающего лучистую теплопроводность и вязкостный нагрев для  $\alpha = 0,1$ ,  $\alpha = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^{-3}$  (сверху вниз). Линией с квадратами обозначены решения уравнения (3.35), учитывающего лучистую теплопроводность, конвекцию и вязкостный нагрев для  $\alpha = 1$ . Пунктирные линии ограничивают снизу области существования решения уравнения (3.12) для  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\alpha = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^{-3}$  (сверху вниз)

$l = \alpha H$ . Для определения вертикального распределения температуры с учетом конвекции мы должны теперь решать уравнение

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{3} a c T^4 \right) \right] - \frac{\partial F_{\text{conv}}}{\partial z} + \rho \alpha c_s^2 \omega_K \quad (3.35)$$

с теми же граничными условиями, что и для уравнения (3.21). Уравнение (3.35) уже не допускает простого аналитического решения и решалось численно методом установления. Решение этого уравнения обозначено на рис. 3.5–3.8 квадратами. Видно что учет конвекции играет роль только для случая  $\alpha \simeq 1$ .

Суммируя результаты приведенного анализа, можно утверждать, что в оптически толстом случае при малых  $\dot{M}_a$  диск имеет постоянную температуру  $T = T_* = 13600$  К (при температуре аккректора  $T_{\text{wd}} = 70000$  К), а при больших  $\dot{M}_a$  температура диска растет как  $T \propto \dot{M}_a^{1/3}$ . Таким образом, для реалистичных параметров аккреционных дисков в тесных двойных  $\dot{M}_a \simeq 10^{-12} - 10^{-7} M_\odot/\text{год}$ ,  $\alpha \simeq 10^{-1} - 10^{-2}$ , температура газа диска во внешних частях ( $r \simeq A/5 - A/10$ ) лежит в диапазоне от  $\sim 10^4$  до  $\sim 10^6$  К.



Решая уравнение (3.21) для различных  $r$ , мы можем также вычислить зависимости  $T(r)$  и  $\rho(r)$ . Анализ полученных результатов показывает, что  $T \propto r^{-0,8}$ ,  $\rho \propto r^{-1,8}$ , что находится в хорошем соответствии с работой [63], где было получено  $T \propto r^{-3/4}$ .

### 3.3. Оптически тонкие диски

Температура диска определяется в этом случае балансом между радиационным нагревом  $\Gamma(T, T_{\text{wd}})$  и вязкостным нагревом (3.7), с одной стороны, и радиационным охлаждением  $\Lambda(T)$ , с другой. Уравнение теплового баланса (3.2) может быть записано в виде:

$$\rho \alpha c_s^2 \omega_K + \rho^2 m_p^{-2} [\Gamma(T, T_{\text{wd}}) - \Lambda(T)] = 0, \quad (3.36)$$

которое сводится к квадратному уравнению относительно  $\rho$

$$\alpha \left( \rho R_g T + \frac{1}{3} a T^4 \right) \omega_K + \rho^2 m_p^{-2} [\Gamma(T, T_{\text{wd}}) - \Lambda(T)] = 0. \quad (3.37)$$

Решая это уравнение при фиксированных  $r$  и  $\alpha$ , получаем зависимость  $\rho(T)$ , а затем зависимость  $T(\dot{M}_a)$ . Формально полученное решение может существовать и в оптически толстых областях, однако в силу сделанных предположений эти точки отбрасывались.

Анализ, приведенный в параграфе 3.3, показывает, что диски с преобладанием газового давления преимущественно являются оптически толстыми, и лишь при малых  $\dot{M}_a$  возможны решения, отвечающие оптически тонким дискам. Диски же с преобладанием давления излучения преимущественно оптически тонкие. Преобладание давления излучения возможно лишь во внутренних частях диска, поэтому дальнейший анализ будет произведен для  $r = A/20$ , что для типичной карликовой новой IP Peg соответствует 5 радиусам аккректора (белого карлика).

Результаты расчетов приведены на рис. 3.9, где звездочками обозначены зависимости  $T(\dot{M}_a)$  для  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $10^{-2}$  и  $10^{-3}$  (сверху вниз) и  $r = A/20$ . Полученные диски в этих решениях являются геометрически толстыми, т. е.  $H \simeq r$ . Отметим, что исходные предположения модели ограничивают ее применимость лишь для геометрически тонких дисков, поэтому решения для геометрически толстых дисков являются формальными.

Резюмируя приведенный анализ основных процессов нагрева и охлаждения вещества в аккреционных дисках двойных систем можно утверждать, что для реалистичных параметров аккреционных дисков в тесных двойных ( $\dot{M}_a \simeq 10^{-12} - 10^{-7} M_\odot/\text{год}$  и  $\alpha \simeq 10^{-1} - 10^{-2}$ ) температура газа во внешних частях диска лежит в диапазоне от  $10^4$  К до  $\sim 10^6$  К. Это означает, что в рассматриваемых системах могут формироваться как горячие, так и холодные аккреционные диски. Из наблюдений известно, что равновесная температура

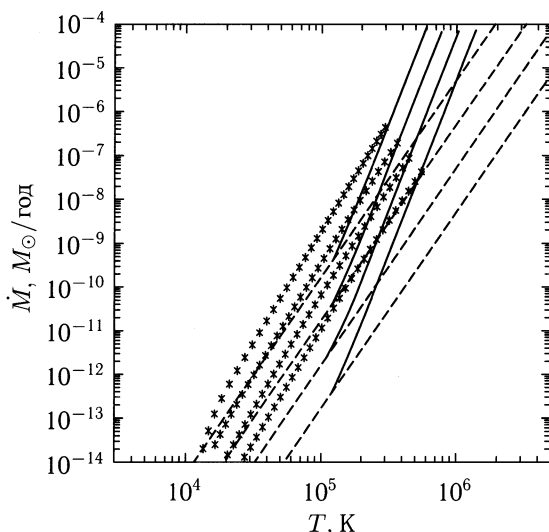


Рис. 3.9. Звездочками обозначены решения для оптически тонкого диска для  $\alpha = 1, 0,1, 10^{-2}, 10^{-3}$  (сверху вниз) и  $r = A/20$ . Пунктирные линии ограничивают снизу область существования решения уравнения (3.12), а сплошные линии разделяют области оптически тонких и оптически толстых дисков

стационарных аккреционных дисков в ТДС, как правило, составляет  $\sim 10^4$  К. Однако нетрудно представить и ситуацию, когда температура диска будет существенно выше. Так, после вспышки, в момент формирования диска, плотность вещества в нем мала и, следовательно, процесс радиативного выхолаживания неэффективен. В то же время, звезда-аккректор, как правило, имеет высокую температуру и, следовательно, равновесная температура вещества диска в это время будет также высокой. Учитывая эти обстоятельства, в части III книги мы рассмотрим особенности морфологии течения для систем как с холодными, так и с горячими аккреционными дисками.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДАХ

При рассмотрении астрофизических приложений мы вступаем в область, где наши интуитивные представления уже не работают, поскольку исследуемые объекты демонстрируют экстремальные свойства и характеризуются термодинамическими величинами, на много порядков превосходящими известные из человеческого опыта значения. Для достижения уверенности в том, что мы используем уравнения, адекватно описывающие процессы в рассматриваемых объектах, мы должны оценить их применимость в каждом конкретном случае. К счастью, определение области применимости газодинамических уравнений возможно и для экстремальных задач, не имеющих экспериментальных аналогов в земных условиях. Для этого нужно воспользоваться тем обстоятельством, что газодинамические уравнения могут быть получены и в микроскопическом подходе. С помощью кинетической теории, из анализа уравнений Больцмана, можно обоснованно вывести газодинамические уравнения Эйлера и Навье–Стокса и их аналоги для релаксирующих сред, установить область их применимости и снабдить их правильными начальными и граничными условиями и коэффициентами переноса.

### 4.1. Уравнение Больцмана

Для полного описания газового потока в классической механике необходимо задать положение, скорость и внутреннее состояние каждой частицы газа в данный момент времени. Однако из-за большого числа частиц в реальном газе такой подход к его описанию представляется невозможным, что заставляет обратиться к статистическому описанию при помощи распределения вероятностей.

Рассмотрим идеальный газ, состоящий из  $N$  идентичных одноатомных молекул. Будем считать, что состояние молекулы полностью определяется ее вектором  $\mathbf{r}$  с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  в физическом пространстве и вектором скорости ее поступательного движения  $\mathbf{u}$  с компонентами  $(u_x, u_y, u_z)$  в пространстве скоростей. Назовем фазовым  $\gamma$ -пространством  $6$ -мерное пространство, в котором состояние молекулы определяется тремя ее пространственными координатами и тремя компонентами ее скорости. В  $\gamma$ -пространстве система  $N$  молекул изображается  $N$  точками с координатами  $(\mathbf{r}_a, \mathbf{u}_a)$ , где индекс  $a = 1, \dots, N$  нумерует молекулы газа. Введем также  $6N$ -мерное фазовое пространство или  $\Gamma$ -пространство,

координатами которого также являются декартовы координаты и составляющие скоростей всех  $N$  молекул. В  $\Gamma$ -пространстве вся система из  $N$  молекул изображается одной точкой. Для описания точек в  $\Gamma$ -пространстве удобно ввести многокомпонентные ( $3N$ -мерные) векторы

$$\mathbf{R}_N = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad \mathbf{U}_N = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N). \quad (4.1)$$

Вместо того, чтобы говорить об истинном состоянии системы многих частиц, будем говорить о вероятности нахождения системы в том или ином состоянии. Пусть

$$\begin{aligned} F^{(N)}(\mathbf{R}_N, \mathbf{U}_N, t) d\mathbf{R}_N d\mathbf{U}_N = \\ = F^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, t) dr_1 \dots dr_N du_1 \dots du_N \end{aligned} \quad (4.2)$$

есть вероятность нахождения системы в состоянии со значениями  $\mathbf{R}_N, \mathbf{U}_N$  в интервале  $(d\mathbf{R}_N, d\mathbf{U}_N)$  около точки  $(\mathbf{R}_N, \mathbf{U}_N)$  в  $\Gamma$ -пространстве,  $F^{(N)}$  — функция плотности вероятности. Если все молекулы одинаковы, то от перестановки молекул в  $\gamma$ -пространстве состояние системы не меняется. Однако каждой перестановке в  $\gamma$ -пространстве в  $\Gamma$ -пространстве соответствует новая точка. Поэтому если

$$f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, t) dr_1 \dots dr_N du_1 \dots du_N \quad (4.3)$$

есть вероятность нахождения системы в точках  $(\mathbf{r}_a, \mathbf{u}_a)$   $\gamma$ -пространства в интервалах  $(d\mathbf{r}_a, d\mathbf{u}_a)$ , то, очевидно, с учетом перестановок

$$\begin{aligned} f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N, t) dr_1 \dots dr_N du_1 \dots du_N = \\ = N! F^{(N)} d\mathbf{R}_N d\mathbf{U}_N. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для менее детального описания системы введем  $S$ -частичные функции распределения, определяющие вероятность одновременного обнаружения  $S$  молекул в состоянии  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_S, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_S)$  независимо от состояния остальных  $N - S$  молекул:

$$F^{(S)} = \int F^{(N)} dr_{S+1} \dots dr_N du_{S+1} \dots du_N. \quad (4.5)$$

Все функции  $F^{(S)} \geq 0$  и нормированы таким образом, что

$$\int F^{(S)} dr_1 \dots dr_S du_1 \dots du_S = 1. \quad (4.6)$$

Кроме того

$$f_S(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_S, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_S, t) = \frac{N!}{(N-S)!} F^{(S)}. \quad (4.7)$$

В общем случае состояние газа определяется многочастичными функциями распределения, зависящими от взаимного расположения нескольких молекул. Однако многочастичные эффекты проявляются

в полной мере только в достаточно плотных газах. Поскольку в рассматриваемых в книге астрофизических приложениях плотность газа везде является умеренной, то в дальнейшем нас будет главным образом интересовать одночастичная функция распределения  $F^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ . Для идентичных молекул

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{u} = NF^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{u} \quad (4.8)$$

есть ожидаемое число молекул в элементе объема физического пространства  $d\mathbf{r}$  около точки  $\mathbf{r}$ , обладающих скоростями в элементе пространства скоростей  $d\mathbf{u}$  около точки  $\mathbf{u}$ . Функция  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = NF^{(1)}$  является основной величиной в кинетической теории газов.

В  $\Gamma$ -пространстве движение системы во времени изображается некоторой линией — фазовой траекторией. Следуя основной идее статистической механики, принадлежащей Гиббсу, будем рассматривать не одну систему, а целый ансамбль тождественных систем, распределенных по фазовому пространству в соответствии с  $N$ -частичной функцией распределения  $F^{(N)}$ . Если представить ансамбль в виде достаточно большого числа систем  $\mathcal{N}$ , то плотность вероятности  $F^{(N)}$  равна отношению числа фазовых точек ансамбля в единице фазового объема к  $\mathcal{N}$ . Пусть в некоторый момент времени  $t_0$  фазовые точки ансамбля распределены в соответствии с заданной плотностью вероятности. Каждая фазовая точка ансамбля изображает систему из  $N$  частиц, движущихся в соответствии с законами механики, т. е. ее движение описывается  $N$  уравнениями Ньютона

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \mathbf{F}_a, \quad (a = 1, \dots, N), \quad (4.9)$$

где  $m$  — масса молекул, а  $\mathbf{F}_a$  — сила, действующая на молекулу с номером  $a$ .

Движение ансамбля подобно движению газа с плотностью  $F^{(N)}$ . Поскольку общее число систем не изменяется для ансамбля, должно выполняться уравнение неразрывности, которое может быть записано в виде

$$\frac{\partial F^{(N)}}{\partial t} + \sum_{a=1}^N \mathbf{u}_a \cdot \frac{\partial F^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_a} + \frac{1}{m} \sum_{a=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_a} \cdot (\mathbf{F}_a F^{(N)}) = 0. \quad (4.10)$$

Это хорошо известное уравнение Лиувилля, которое выражает закон сохранения  $N$  частичной функции распределения в  $6N$ -мерном фазовом пространстве.

Уравнение Лиувилля не используется для непосредственного отыскания решения, так как практически описание реального газового потока с помощью функций  $F^{(N)}$  совершенно исключено. Однако последовательное интегрирование уравнения Лиувилля дает иерархию уравнений, называемых БГКИ-уравнениями [135–139]. Последним

уравнением иерархии ББГКИ является уравнение, учитывающее лишь парные столкновения, для одночастичной функции распределения  $F^{(1)}$ . Формально оно содержит и двухчастичную функцию  $F^{(2)}$ , но становится замкнутым уравнением для  $F^{(1)}$  после введения предположения о *молекулярном хаосе*<sup>1)</sup>, которое является оправданным для газов с умеренной плотностью. Это уравнение для одночастичной функции распределения в фазовом пространстве эквивалентно уравнению Больцмана, впервые сформулированному в 1872 г. [140]:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \\ &= \int (f' f'_1 - f f_1) W(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}', \mathbf{u}'_1) d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}' d\mathbf{u}'_1. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (4.11) называется *интегралом столкновений* в форме Больцмана. Здесь  $f'$  обозначает функцию распределения после столкновения, а  $W(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}', \mathbf{u}'_1)$  обозначает вероятность того, что в результате столкновения пары молекул со скоростями  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}_1$  их скорости станут равными  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{u}'_1$ , соответственно. Конкретный вид функции  $W$  определяется только свойствами взаимодействия молекул.

В газовой смеси, состоящей из нескольких химических сортов, можно для каждого из этих сортов определить отдельную функцию распределения. Уравнение Больцмана тогда заменяется системой совместных кинетических уравнений. Для газа, имеющего внутренние степени свободы, можно ввести обобщенную функцию распределения и получить соответствующее уравнение — так называемое, обобщенное уравнение Больцмана [141].

Математические границы справедливости уравнения Больцмана наиболее точно устанавливаются при упомянутом выше выводе из уравнения Лиувилля. Ограничения применимости уравнения Больцмана заключаются в 1) рассмотрении только парных столкновений, 2) в рассмотрении столкновений как мгновенных событий и 3) в предположении о молекулярном хаосе.

## 4.2. Уравнения для моментов

Кинетическое уравнение для функции распределения описывает состояние газа на микроскопическом уровне. Однако на практике мы, как правило, имеем дело лишь с осредненными величинами, которые дают гораздо менее детальную информацию о состоянии газа. Примерами

<sup>1)</sup> Принцип молекулярного хаоса заключается в том, что вероятность обнаружения пары молекул с данной двухчастичной конфигурацией равна просто произведению вероятностей обнаружения отдельных молекул с соответствующими значениями их фазовых координат, т.е.  $F^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, t) = F^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{u}_1, t) F^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}_2, t)$ .

таких осредненных величин являются плотность газа, его скорость, тензор напряжений, температура и т.п. Функция распределения позволяет определить среднее значение  $Q$  (макроскопический параметр) любого молекулярного признака  $q$  (микроскопический параметр). Действительно, средняя величина определяется выражением

$$Q = \langle q \rangle = \frac{1}{N} \int q dN. \quad (4.12)$$

Учитывая, что  $dN = NF^{(1)} du$ , находим

$$Q = \frac{1}{N} \int qNF^{(1)} du. \quad (4.13)$$

Сокращая константу  $N$ , получим общий результат:

$$Q = \int qF^{(1)} du. \quad (4.14)$$

Такую операцию обычно называют взятием момента от функции распределения  $F^{(1)}$ , а полученные макроскопические величины — моментами функции распределения.

Рассмотрим некоторые моменты функции распределения  $f$ . Из определения  $f$  легко видеть, что число молекул в единице объема (концентрация газа)  $n$  равняется

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) du, \quad (4.15)$$

где интегрирование ведется по всем возможным скоростям молекул. Если  $m$  — масса одной частицы, то плотность газа  $\rho = mn$ . Аналогично средняя скорость молекул  $\mathbf{v}$ , тензор напряжений  $\hat{P}$  и вектор потока энергии  $\mathbf{q}$  определяются следующими соотношениями<sup>1)</sup> (см., например, [142]):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{n} \int \mathbf{u} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) du, \quad (4.16)$$

$$\hat{P} = -mn \langle \mathbf{w} \mathbf{w} \rangle = -m \int \mathbf{w} \mathbf{w} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) du, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{q} = \frac{mn}{2} \langle \mathbf{w} \mathbf{w}^2 \rangle = \frac{m}{2} \int \mathbf{w}^2 \mathbf{w} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) du. \quad (4.18)$$

Здесь вектор  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  описывает тепловую (хаотическую) скорость молекул.

<sup>1)</sup> Под выражениями вида  $\mathbf{ab}$  мы всюду в книге будем подразумевать тензор второго ранга с компонентами  $a_i b_k$ .

Среднюю энергию теплового движения молекул обычно характеризуют кинетической температурой  $T$ , определяемой как меру среднего хаотического движения:

$$\frac{3}{2} kT = \frac{m}{2} \langle w^2 \rangle = \frac{1}{n} \int \frac{mw^2}{2} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\mathbf{u}, \quad (4.19)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана, а коэффициент при  $T$  выбран так, чтобы в равновесном состоянии доля энергии, приходящаяся на каждую из поступательных степеней свободы, равнялась бы  $kT/2$ .

Тензор напряжений  $\hat{P}$  является симметричным и поэтому в общем случае имеет шесть независимых компонент. Для дальнейшего рассмотрения полезно ввести величину

$$P = -\frac{1}{3} \text{Tr} \hat{P}, \quad (4.20)$$

совпадающую с обычным давлением при газодинамическом описании газа. Заметим, что введенные температура  $T$  и давление  $P$  не являются независимыми параметрами, так как они представляются через компоненты тензора напряжений  $\hat{P}$ . Поэтому при газодинамическом описании газа участвуют всего тринадцать независимых величин.

Приведенное в предыдущем параграфе уравнение Больцмана (4.11) определяет поведение функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ , являющейся функцией семи независимых переменных. Микроскопическое описание с помощью функции распределения в большинстве задач представляется излишне детальным, поэтому естественно попытаться перейти к менее детальному описанию с помощью макроскопических газодинамических величин (4.15)–(4.20).

Аналогично моменту функции распределения введем момент уравнения Больцмана. Так как моменты функции распределения включают все макроскопические величины для больцмановского газа, то можно ожидать, что уравнения для моментов будут включать систему макроскопических уравнений сохранения. Для взятия момента умножим исходное уравнение Больцмана (4.11) на молекулярный признак  $q(\mathbf{u})$  и затем проинтегрируем полученное уравнение по всем возможным скоростям молекул. В результате, после несложных преобразований получим общее уравнение переноса в виде [142]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int qf d\mathbf{u} + \nabla \cdot \int \mathbf{u}qf d\mathbf{u} - \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \int \frac{\partial q}{\partial \mathbf{u}} f d\mathbf{u} = I_q, \quad (4.21)$$

где  $I_q$  — проинтегрированный с весовой функцией  $q(\mathbf{u})$  интеграл столкновений уравнения (4.11).

Если  $q$  является либо массой  $m$ , либо импульсом  $m\mathbf{u}$ , либо энергией частицы  $m\mathbf{u}^2/2$ , то сохранение этих величин при столкновении означает, что  $q + q_1 - q' - q'_1 = 0$ . В свою очередь это означает, что интеграл  $I_q$  равен нулю, как и следовало ожидать из его физического



смысла (см., например, [142]). Величины  $m$ ,  $m\mathbf{u}$  и  $m\mathbf{u}^2/2$  называют инвариантами столкновений, тогда как любая величина, удовлетворяющая условию  $q + q_1 - q' - q'_1 = 0$ , называется *сумматорным инвариантом*. Можно показать, что инварианты столкновений или их линейные комбинации являются единственно возможными сумматорными инвариантами (см., например, [143]).

В случае  $q = m$  получаем уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.22)$$

В случае  $q = m\mathbf{u}$  получаем уравнение сохранения импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \hat{P}) = \rho \mathbf{f}, \quad (4.23)$$

где  $\mathbf{f} = \mathbf{F}/m$  — сила, приходящаяся на единицу массы. Используя (4.22), это уравнение можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \hat{P} + \mathbf{f}. \quad (4.24)$$

Наконец, в случае  $q = m\mathbf{u}^2/2$  получаем уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}e - \mathbf{v} \cdot \hat{P} + \mathbf{q}) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}, \quad (4.25)$$

где плотность полной энергии газа

$$e = \rho \varepsilon + \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} \quad (4.26)$$

включает в себя внутреннюю энергию

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T \quad (4.27)$$

и кинетическую энергию. Используя (4.22) и (4.23), это уравнение можно переписать в виде:

$$\rho \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varepsilon \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q} + P_{ik} \nabla_k v_i. \quad (4.28)$$

Таким образом, для определения тринадцати<sup>1)</sup> газодинамических величин  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\hat{P}$  и  $\mathbf{q}$  мы имеем только пять уравнений. Поэтому система уравнений (4.22), (4.23) и (4.25) не является замкнутой. Чтобы замкнуть систему, необходимо найти дополнительные связи между входящими в эти уравнения величинами.

<sup>1)</sup> С учетом того, что тензор  $\hat{P}$  является симметричным.

### 4.3. Приближение газовой динамики

В рамках механики сплошной среды уравнения газовой динамики могут быть получены с помощью феноменологических соображений из законов сохранения массы, импульса и энергии (см., например, [144], [145]). Однако при таком подходе коэффициенты переноса (коэффициенты вязкости, теплопроводности, диффузии и т. п.) в макроскопических уравнениях остаются неопределенными. Их значения необходимо находить из каких-либо дополнительных теоретических соображений или непосредственно из эксперимента. Кинетическая теория, основанная на уравнении Больцмана для функции распределения, предоставляет возможность другого способа вывода уравнений газодинамики. При этом можно получить и явные выражения для коэффициентов переноса, которые определяются функцией распределения и свойствами частиц газа.

Для вывода уравнений газодинамики рассмотрим пространственно однородный простой идеальный одноатомный газ, на который не действуют никакие внешние силы ( $\mathbf{F} = 0$ ). Для анализа исходного уравнения Больцмана (4.11) воспользуемся так называемой  $H$ -теоремой Больцмана. Введем величину

$$H_D(t) = \int f \ln f \, dr du, \quad (4.29)$$

где интегрирование проводится по всем скоростям и по некоторой области пространства  $D$ . Величина  $H_D(t)$  представляет собой  $H$ -функцию для выделенной области пространства  $D$ . Аналогично функция

$$H(\mathbf{r}, t) = \int f \ln f \, du \quad (4.30)$$

является  $H$ -функцией для единицы объема или просто  $H$ -функцией Больцмана. Из приведенного в предыдущем разделе определения среднего и из выражений (4.29) и (4.30) следует, что  $H$ -функция с точностью до несущественной постоянной равна логарифму вероятности данного распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ .

Суть  $H$ -теоремы Больцмана заключается в том, что вероятность состояния возрастает:

$$\frac{dH_D}{dt} \leq 0. \quad (4.31)$$

Из анализа интеграла столкновений уравнения Больцмана (4.11) следует, что система находится в равновесии тогда, когда  $f f_1 = f' f'_1$  или

$$\ln f + \ln f_1 = \ln f' + \ln f'_1. \quad (4.32)$$

Таким образом, для того чтобы удовлетворить этому условию необходимо, чтобы  $\ln f$  был сумматорным инвариантом. Воспользуемся

описанным в предыдущем разделе свойством сумматорного инварианта и представим  $\ln f$  в виде линейной комбинации инвариантов столкновений:

$$\ln f = m (a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} + c\mathbf{u}^2/2), \quad (4.33)$$

где  $a$ ,  $\mathbf{b}$  и  $c$  — функции от  $t$  и  $\mathbf{r}$ . Подставляя представленную таким образом функцию  $f$  в выражения (4.15), (4.16) и (4.19), мы можем выразить пять коэффициентов  $a$ ,  $\mathbf{b}$  и  $c$  через пять физических величин  $n$ ,  $\mathbf{v}$  и  $T$ . После несложных преобразований получим:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\mathbf{u}^2}{2kT}}, \quad (4.34)$$

где, как и прежде,  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$  — тепловая (хаотическая) скорость молекул. Выражение (4.34) описывает локальное *распределение Максвелла* [146], поскольку входящие в него макроскопические величины зависят в общем случае от  $t$  и  $\mathbf{r}$ . Таким образом, для того, чтобы газ в пространственной области  $D$  находился в равновесии, необходимо, чтобы функция распределения была локально максвелловской.

Можно показать [147], что в случае равновесия газовой смеси равновесная функция распределения для частиц каждого сорта имеет вид (4.34). Максвелловское распределение применимо также к поступательным скоростям двухатомных и многоатомных молекул. Этот результат был доказан для особого случая молекул — шероховатых сфер [147] с использованием метода, который применялся здесь для одноатомных молекул. Механика столкновений более реальных молекул слишком сложна, чтобы применить такой подход. Однако, если предположить, что каждое прямое столкновение равновероятно обратному столкновению, то обобщенное уравнение Больцмана дает подход, применимый ко всем молекулярным моделям [141]. Более того, для равновесия применимы методы статистической механики, которые в этом случае дают более общие доказательства, чем методы кинетической теории.

В астрофизических приложениях мы, в основном, будем иметь дело с газовыми течениями, не являющимися пространственно однородными и макроскопически стационарными. Следовательно, необходимо определить условия, при которых к таким течениям может применяться максвелловское распределение. Строго говоря, функция распределения является локально максвелловской лишь при полном равновесии и в ряде вырожденных движений (см., например, [142]). Однако для широкого класса течений распределение скоростей в каждой точке может быть приближенно заменено максвелловской функцией, зависящей от локальной температуры и плотности. О таких течениях говорят, что в потоке имеет место локальное термодинамическое равновесие <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Понятие локального термодинамического равновесия фактически тождественно более известному понятию термодинамической необратимости.

Если привести уравнение Больцмана (4.11) к безразмерному виду, то в нем можно выделить несколько параметров подобия (см., например, [142]). Одним из этих параметров является *число Кнудсена*, которое характеризует степень разреженности газа и которое можно представить в виде:

$$\text{Кп} = \frac{l}{L}, \quad (4.35)$$

где  $l$  — средняя длина свободного пробега, а  $L$  — характерный масштаб течения. В предельном случае, когда газ можно рассматривать как сплошную среду, т. е. когда  $l \ll L$ , число Кнудсена  $\text{Кп} \ll 1$  и в задаче возникает малый параметр  $\delta = \text{Кп}$ . Естественно при наличии малого параметра искать решение уравнения Больцмана в виде разложения по этому параметру.

Метод Чепмена–Энскога базируется на разложении функции распределения  $f$  в ряд и дает решения для класса задач, в которых функция распределения незначительно отклоняется от максвелловской. Условно ряд для  $f$  можно записать как

$$f = f_0(1 + a_1\delta + a_2\delta^2 + \dots). \quad (4.36)$$

Здесь коэффициенты  $a_n$  зависят только от  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  и  $T$ , а  $f_0$  — локально максвелловская функция распределения. Решения уравнения Больцмана (4.11) в виде  $f = f_0(1 + a_1\delta)$  были получены независимо Чепменом и Энскогом. Этот метод характеризуется существенной математической сложностью и для его детального изучения вниманию читателей предлагаются следующие работы: [147], [148], [142]. Здесь же мы лишь суммируем основные детали решения Чепмена–Энскога.

Решение нулевого порядка по числу Кп — это локально максвелловская функция распределения  $f_0$  (4.34). Состояние газа в этом случае полностью определено параметрами  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  и  $T$ . В газе, находящемся в локальном равновесии (см., например, [142]),

$$\hat{P} = -P\hat{I}, \quad \mathbf{q} = 0, \quad (4.37)$$

где  $\hat{I}$  — единичный тензор. Подставляя эти значения в макроскопические уравнения сохранения (4.22), (4.23) и (4.25), получим газодинамические уравнения Эйлера, описывающие течение невязкого газа в отсутствии внешних сил:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla P}{\rho}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varepsilon &= -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Поскольку число неизвестных в (4.38) больше числа уравнений, то для замыкания системы нужно добавить уравнение состояния  $P = P(\rho, \varepsilon)$ .

Приближение первого порядка, т. е. когда в рассмотрение принимаются два первых члена ряда (4.36), приводит к решению (см., например, [142]):

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \left[ 1 - \frac{1}{2P} \left( \frac{m}{kT} \right) \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{w} - \frac{1}{P} \left( \frac{m}{kT} \right) \left( 1 - \frac{m\mathbf{w}^2}{5kT} \right) \mathbf{w} \cdot \mathbf{q} \right], \quad (4.39)$$

где тензор вязких напряжений  $\hat{\mathbf{p}}$  и вектор теплового потока  $\mathbf{q}$  являются линейными функциями от градиентов скорости и температуры, соответственно:

$$p_{ik} = P_{ik} + \delta_{ik}P = \mu \left( \nabla_i v_k + \nabla_k v_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \right), \quad \mathbf{q} = -\lambda \nabla T. \quad (4.40)$$

Учет внутренних степеней свободы приводит к появлению в тензоре деформаций наряду со сдвиговой вязкостью не равного нулю члена, характеризующего объемную вязкость:

$$p_{ik} = \mu \left( \nabla_i v_k + \nabla_k v_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.41)$$

Коэффициенты при градиентах  $\mu$ ,  $\zeta$  и  $\lambda$  можно отождествить с первым и вторым коэффициентами вязкости и коэффициентом теплопроводности. Выражения (4.40) и (4.41), подставленные в уравнения сохранения (4.22), (4.23) и (4.25), приводят к системе газодинамических уравнений Навье–Стокса, описывающих течение вязкого газа.

Приведенное рассмотрение показывает, что с кинетической точки зрения и уравнения Эйлера, и уравнения Навье–Стокса можно рассматривать как «пятимоментные» решения уравнения Больцмана. При этом первая система уравнений справедлива при  $\text{Kn} \rightarrow 0$ , вторая — при  $\text{Kn} \ll 1$ .

Для описания течения сплошной среды, как правило, используются именно уравнения Эйлера и Навье–Стокса. Экспериментально доказано [149], что рассмотрение членов более высокого порядка в разложении (4.36) не приводит к существенному улучшению решений при числах Кнудсена, близких к верхнему пределу применимости уравнений Навье–Стокса. Попытки использования других разложений  $f$  (например, метод Грэда [150], где  $f$  раскладывается по тензорным полиномам Эрмита) также не привели к существенному улучшению имеющихся решений [149].

В заключении этого параграфа отметим, что в газовой динамике наряду с уравнением энергии  $\varepsilon$  (третье уравнение в системе уравнений Эйлера (4.38)) часто используется уравнение для энтропии  $s$ . В приближении идеальной жидкости, когда диссипативные процессы

не учитываются, это уравнение называется уравнением адиабатичности. Для его вывода можно воспользоваться вторым началом термодинамики. Обозначим через  $V = 1/\rho$  удельный объем. Тогда

$$d\varepsilon = Tds - PdV. \quad (4.42)$$

Поскольку  $dV = -d\rho/\rho^2$ , то должно быть

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (4.43)$$

Здесь полные производные описывают изменение во времени величин, относящихся к жидким частицам. Это соответствует описанию картины течения с точки зрения Лагранжа. Учитывая уравнение непрерывности и уравнение энергии, можно убедиться, что правая часть этого соотношения равна нулю. Поэтому в приближении идеальной жидкости энтропия жидкой частицы должна сохраняться с течением времени:  $ds/dt = 0$ . Раскрывая полную производную, приходим к уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s = 0. \quad (4.44)$$

При учете диссипативных процессов энтропия жидкой частицы уже не будет сохраняться. В этом случае в правую часть уравнения (4.44) необходимо добавить соответствующие члены.

## 4.4. Кинетическое описание плазмы

**4.4.1. Кинетические уравнения.** Плазмой называется квазинейтральная система, состоящая из большого числа положительно и отрицательно заряженных свободных частиц. При этом в плазме могут присутствовать и нейтральные частицы. Квазинейтральность означает отсутствие заряда в некотором среднем достаточно большом объеме плазмы. Это условие определяет характерные пространственный и временной масштабы разделения зарядов в плазме. Плазму можно характеризовать некоторым набором параметров [151–154]. Перечислим наиболее важные из них.

*Степень ионизации* определяет относительное содержание заряженных частиц в плазме:  $x = n_e/n$ , где  $n_e$  — концентрация электронов,  $n$  — полная концентрация частиц в плазме. В предельном случае полностью ионизованной плазмы степень ионизации  $x = 1$ , а в случае слабоионизованной плазмы  $x \ll 1$ .

*Плазменная, или ленгмюровская, частота*

$$\omega_e = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}, \quad (4.45)$$

где  $e$  — элементарный заряд,  $m_e$  — масса электрона. Величина  $\omega_e^{-1}$  определяет характерное время разделения зарядов в плазме. На вре-

менных интервалах, намного превышающих  $\omega_e^{-1}$ , плазму можно считать квазинейтральной.

*Дебаевский радиус*

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n_e e^2}} \quad (4.46)$$

определяет характерный пространственный масштаб разделения зарядов в плазме. На пространственных масштабах много больших  $r_D$  плазму можно считать квазинейтральной.

*Ларморовская, или циклотронная, частота*

$$\omega_B = \frac{eB}{m_e c}, \quad (4.47)$$

где  $c$  — скорость света, характеризует движение заряженных частиц в магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Траектория движения частиц представляет собой винтовую линию с характерным радиусом  $r_B \approx v_{\perp}/\omega_B$ . Если  $\omega_B \tau \gg 1$ , где  $\tau^{-1}$  — характерная частота столкновений, то плазма называется *замагниченной*. В этом случае при движении по ларморовской орбите частица в среднем за один оборот не успевает столкнуться с другими частицами. В противном случае, не завершив полный оборот, частицы, получив новый импульс в результате столкновения, переходят на другую орбиту. В замгниченной плазме проявляется существенная анизотропия, связанная с наличием сильного магнитного поля.

Для описания плазмы также можно использовать кинетический подход. В этом случае поведение частиц сорта  $\alpha$  описывается соответствующей функцией распределения  $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{\alpha}, t)$ . Величина  $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{\alpha}, t) dr du_{\alpha}$  представляет собой число частиц сорта  $\alpha$  в момент времени  $t$  в элементе фазового пространства  $dr du_{\alpha}$ , построенном около точки  $(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{\alpha})$ . Имея в распоряжении функцию распределения  $f_{\alpha}$ , можно находить различные макроскопические параметры плазмы, как это делалось выше для газа. Например, концентрация частиц сорта  $\alpha$  определяется выражением

$$n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \int f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{\alpha}, t) du_{\alpha}. \quad (4.48)$$

Средняя скорость частиц сорта  $\alpha$

$$\mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{u}_{\alpha} \rangle_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}} \int \mathbf{u}_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{\alpha}, t) du_{\alpha}. \quad (4.49)$$

Выражения для других величин, характеризующих макроскопическое состояние плазмы, будут введены ниже.

При учете только парных столкновений кинетическое уравнение для функции распределения  $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{\alpha}, t)$  может быть записано в виде (см., например, [155])

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{u}_{\alpha} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_{\alpha}}{m_{\alpha}} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{u}_{\alpha}} = - \sum_{\beta} [S_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}], \quad (4.50)$$

где полная сила, действующая на частицы,

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{G}_\alpha + e_\alpha \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) \right] \quad (4.51)$$

является суммой силы неэлектромагнитного происхождения  $\mathbf{G}_\alpha$  и электромагнитной силы, действующей со стороны электромагнитного поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Здесь  $m_\alpha$ ,  $e_\alpha$  — масса и заряд частиц сорта  $\alpha$ . Правая часть кинетического уравнения (4.50) определяется интегралами столкновений частиц сорта  $\alpha$  с частицами сорта  $\beta$ . Члены  $S_{\alpha\beta}$  описывают упругие столкновения, а  $\Gamma_{\alpha\beta}$  — неупругие столкновения в химических реакциях, а также в реакциях рекомбинаций, ионизаций, диссоциаций, изменяющих число частиц. При этом суммирование проводится по всем сортам частиц.

В отсутствие правой части и при  $\mathbf{G}_\alpha = 0$  кинетическое уравнение (4.50) сводится к уравнению Власова. Его решение возможно при одновременном решении уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), \quad (4.52)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_0), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.53)$$

где  $\rho_0$  и  $\mathbf{j}_0$  описывают внешние заряды и токи. Величины  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  определяются зарядами и токами, индуцированными в самой плазме. Средние плотности зарядов и токов в плазме определяются соотношениями

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha du = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{u}_\alpha f_\alpha du_\alpha = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha. \quad (4.55)$$

Система уравнений Власова с уравнениями Максвелла (4.52), (4.53) и соотношениями (4.54), (4.55) является самосогласованной, поскольку ее решением являются функции распределения  $f_\alpha$ , обуславливающие именно то поле, которое поддерживает требуемое распределение зарядов и токов. Поэтому эту систему называют уравнением Власова или кинетическим уравнением с самосогласованным полем [156]. Неточность, допускаемая методом самосогласованного поля, заключается в замене средних значений функций функциями от средних значений. Это связано с пренебрежением флуктуациями электродинамических величин — напряженностей электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{B}$  поля и плотности зарядов  $\rho$  и токов  $\mathbf{j}$ , которые должны играть существенную роль на малых расстояниях порядка дебаевской длины. Такая замена оправдана в линейном по полю приближении. Поэтому метод самосогласованного поля широко используется для исследования линейных колебаний и волн в плазме [157].



Более корректное описание динамики плазмы можно получить при учете столкновений частиц. Решение кинетических уравнений (4.50) в существенной степени зависит от вида интеграла столкновений. Столкновения между нейтральными частицами описывает интеграл упругих столкновений Больцмана. Столкновения между заряженными частицами имеют дальнедействующий характер и описываются интегралом столкновений в форме Ландау [159]. Взаимодействие плазменной и нейтральной компонент можно описывать модельными интегралами типа интеграла Батнагара–Гросса–Крука [157], который, фактически, соответствует использованию приближения времени релаксации при рассмотрении столкновений [158]. Непосредственное применение кинетического подхода для анализа динамических процессов в плазме оказывается довольно сложным. Однако только с его помощью можно получить уравнения квазигазодинамического приближения, которые широко распространены в астрофизических исследованиях. Основы этого перехода описаны Брагинским [160], также он детально рассматривается, например, в книгах Баранова и Краснобаева [161] и Гершмана и др. [155].

**4.4.2. Квазигазодинамическое приближение.** Как уже указывалось выше, интегралы упругих столкновений должны удовлетворять некоторым соотношениям, не зависящим от конкретного вида взаимодействия частиц и от конкретного вида интеграла столкновений. Это связано с тем, что при упругих столкновениях должно сохраняться число частиц, а также их импульс и энергия. Учитывая эти законы сохранения, можно написать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \int S_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha = 0, \\ & \int m_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_{\alpha\alpha} d\mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \int \frac{m_\alpha \mathbf{u}_\alpha^2}{2} S_{\alpha\alpha} d\mathbf{u}_\alpha = 0, \\ & \int m_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha + \int m_\beta \mathbf{u}_\beta S_{\beta\alpha} d\mathbf{u}_\beta = 0, \\ & \int \frac{m_\alpha \mathbf{u}_\alpha^2}{2} S_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha + \int \frac{m_\beta \mathbf{u}_\beta^2}{2} S_{\beta\alpha} d\mathbf{u}_\beta = 0. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Здесь левая часть первого соотношения равна изменению полного числа частиц сорта  $\alpha$  в элементе объема  $d\mathbf{r}$  в результате столкновений с частицами сорта  $\beta$ . Поэтому первое соотношение является следствием того, что при упругих столкновениях это изменение равно нулю. Второе и третье равенства отражают тот факт, что при упругих столкновениях частиц сорта  $\alpha$  между собой не изменяются их полные импульс и энергия в объеме  $d\mathbf{r}$ . Наконец, последние два соотношения описывают законы сохранения полных импульса и энергии в объеме  $d\mathbf{r}$  при упругих столкновениях частиц разного сорта.

В случае многокомпонентной плазмы уравнения для моментов функции распределения можно получать таким же способом, как это делалось для случая однокомпонентного газа. Если величина  $q$  описывает некоторый микроскопический параметр частиц, то ее усредненное по скоростям частиц сорта  $\alpha$  значение

$$Q_\alpha = \langle q \rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int q f_\alpha d\mathbf{u}_\alpha, \quad (4.57)$$

где концентрация  $n_\alpha$  частиц сорта  $\alpha$  определяется выражением (4.48). Умножим кинетическое уравнение (4.50) на произвольную функцию  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}_\alpha, t)$  и проинтегрируем по скоростям  $\mathbf{u}_\alpha$ . Считая при этом, что в пределе бесконечно больших скоростей  $\Phi f_\alpha \rightarrow 0$ , приходим к обобщенному моментному уравнению Энскога:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle \Phi \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \Phi \mathbf{u}_\alpha \rangle_\alpha) - n_\alpha \left( \frac{\partial \langle \Phi \rangle_\alpha}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \Phi \rangle_\alpha \right) + \\ + \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \left[ (\mathbf{G}_\alpha + e_\alpha \mathbf{E}) \cdot \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}_\alpha} \right\rangle_\alpha + \frac{e_\alpha}{c} \langle (\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}_\alpha} \rangle_\alpha \right] + \\ + \sum_\beta \int S_{\alpha\beta} \Phi d\mathbf{u}_\alpha + \sum_\beta \int \Gamma_{\alpha\beta} \Phi d\mathbf{u}_\alpha = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Возьмем  $\Phi = m_\alpha$  и подставим в (4.58). Получим уравнение непрерывности для частиц сорта  $\alpha$ :

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = S_\alpha, \quad (4.59)$$

где  $\mathbf{v}_\alpha$  — усредненная скорость (4.49), а функция источника

$$S_\alpha = - \sum_\beta \int m_\alpha \Gamma_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha \quad (4.60)$$

описывает изменение числа частиц сорта  $\alpha$  в результате неупругих столкновений.

Возьмем теперь  $\Phi = m_\alpha \mathbf{u}_\alpha$  и подставим в (4.58). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \langle \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rangle_\alpha) = \\ = n_\alpha \mathbf{G}_\alpha + e_\alpha n_\alpha \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \right] - \\ - \sum_\beta \int m_\alpha \mathbf{u}_\alpha S_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha - \sum_\beta \int m_\alpha \mathbf{u}_\alpha \Gamma_{\alpha\beta} \Phi d\mathbf{u}_\alpha, \end{aligned} \quad (4.61)$$

где  $\rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha$  — плотность частиц сорта  $\alpha$ . Введем хаотические скорости  $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha$ . Тогда

$$\langle \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha \rangle_\alpha = \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle_\alpha \quad (4.62)$$

и уравнение (4.61) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \nabla \cdot \hat{P}_\alpha + n_\alpha \mathbf{G}_\alpha + \\ + e_\alpha n_\alpha \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \right] + \mathbf{R}_\alpha + \mathbf{Z}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha S_\alpha. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Здесь введен тензор напряжений

$$\hat{P}_\alpha = -\rho_\alpha \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle_\alpha = -P_\alpha \hat{I} + \hat{p}_\alpha, \quad (4.64)$$

где парциальное давление

$$P_\alpha = \frac{1}{3} \rho_\alpha \langle \mathbf{w}_\alpha^2 \rangle, \quad (4.65)$$

а  $\hat{p}_\alpha$  — тензор вязких напряжений. Последние два слагаемых в (4.63) определяют приток импульса, связанный с неупругими столкновениями частиц сорта  $\alpha$  с частицами всех сортов. Величина

$$\mathbf{Z}_\alpha = - \sum_\beta \int m_\alpha \mathbf{w}_\alpha \Gamma_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha. \quad (4.66)$$

Вектор

$$\mathbf{R}_\alpha = - \sum_\beta \int m_\alpha \mathbf{w}_\alpha S_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha \quad (4.67)$$

описывает силу трения частиц сорта  $\alpha$  о частицы других сортов. Независимо от типа упруго сталкивающихся частиц его можно представить в следующей форме (см., например, [155]):

$$\mathbf{R}_\alpha = - \sum_\beta R_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta), \quad (4.68)$$

где коэффициент столкновений

$$R_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, \quad (4.69)$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\langle \sigma v \rangle_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta}, \quad (4.70)$$

$\langle \sigma v \rangle_{\alpha\beta}$  — средний темп столкновений.

Наконец, возьмем  $\Phi = m_\alpha \mathbf{u}_\alpha^2 / 2$  и подставим в (4.58). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \langle \mathbf{u}_\alpha^2 / 2 \rangle) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \langle \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha^2 / 2 \rangle_\alpha) = \\ = n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\alpha + e_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{E} - \\ - \sum_\beta \int \frac{m_\alpha \mathbf{u}_\alpha^2}{2} S_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha - \sum_\beta \int \frac{m_\alpha \mathbf{u}_\alpha^2}{2} \Gamma_{\alpha\beta} \Phi d\mathbf{u}_\alpha. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Используя очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_\alpha^2 \rangle_\alpha &= \mathbf{v}_\alpha^2 + \langle \mathbf{w}_\alpha^2 \rangle_\alpha, \\ \langle \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha^2 \rangle_\alpha &= \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 + \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha^2 \rangle_\alpha + 2 \mathbf{v}_\alpha \cdot \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle_\alpha, \end{aligned} \quad (4.72)$$

приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_\alpha \left( \varepsilon_\alpha + \frac{\mathbf{v}_\alpha^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha \left( h_\alpha + \frac{\mathbf{v}_\alpha^2}{2} \right) + \mathbf{q}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}}_\alpha \right] = \\ = n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\alpha + e_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{E} + \\ + \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{Z}_\alpha + \frac{\mathbf{v}_\alpha^2}{2} S_\alpha + Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Здесь введены обозначения для парциальной внутренней энергии, приходящейся на единицу массы,  $\varepsilon_\alpha = \langle \mathbf{w}_\alpha^2 \rangle / 2$ , парциальной энтальпии (тепловой функции)

$$h_\alpha = \varepsilon_\alpha + \frac{P_\alpha}{\rho_\alpha} \quad (4.74)$$

и вектора потока тепла

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{1}{2} \rho_\alpha \langle \mathbf{w}_\alpha \mathbf{w}_\alpha^2 \rangle_\alpha. \quad (4.75)$$

Последние два слагаемых в уравнении (4.73) описывают выделения теплоты, связанные с трением и неупругими соударениями частиц:

$$Q_\alpha^{(1)} = - \sum_\beta \int \frac{m_\alpha \mathbf{w}_\alpha^2}{2} S_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha, \quad (4.76)$$

$$Q_\alpha^{(2)} = - \sum_\beta \int \frac{m_\alpha \mathbf{w}_\alpha^2}{2} \Gamma_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_\alpha. \quad (4.77)$$

Следует заметить, что для идеального газа в случае максвелловского распределения по скоростям парциальное давление, концентрация и температура связаны между собой уравнением состояния

$$P_\alpha = n_\alpha k T_\alpha. \quad (4.78)$$

При этом внутреннюю энергию можно выразить через температуру с помощью соотношения

$$\varepsilon_\alpha = \frac{k T_\alpha}{(\gamma_\alpha - 1) m_\alpha}, \quad (4.79)$$

где  $\gamma_\alpha$  показатель адиабаты.

Для вычисления тензора вязких напряжений  $\hat{p}_\alpha$  и вектора потока тепла  $\mathbf{q}_\alpha$  необходимо знать функцию распределения  $f_\alpha$ <sup>1)</sup>. Приближенное выражение для этой функции, как и в случае однокомпонентного газа, может быть получено с помощью метода Чепмена–Энскога. С особенностями применения этого метода к случаю многокомпонентной плазмы можно ознакомиться, например, в книге Баранова и Краснобаева [161]. При этом в нулевом приближении, когда  $f_\alpha$  описывает локальное распределение Максвелла, снова получаем  $\hat{p}_\alpha = 0$ ,  $\mathbf{q}_\alpha = 0$ . В первом приближении коэффициенты переноса в общем случае оказываются анизотропными. Это связано с тем, что в плазме присутствует выделенное направление, обусловленное магнитным полем. Явные выражения для коэффициентов переноса могут быть довольно громоздкими. Для полностью ионизованной плазмы такие вычисления были проделаны Брагинским [160]. В направлении вдоль поля коэффициенты переноса совпадают со своими газодинамическими аналогами. В поперечном направлении возникает существенная анизотропия коэффициентов переноса. При этом степень анизотропии коэффициентов переноса для компоненты с номером  $\alpha$  определяется параметром замагниченности  $\omega_\alpha \tau_\alpha$ , где  $\omega_\alpha = e_\alpha B / (m_\alpha c)$  — циклотронная частота компоненты  $\alpha$ , а  $\tau_\alpha$  — время свободного пробега частиц сорта  $\alpha$ . В незамагниченной плазме, когда  $\omega_\alpha \tau_\alpha \ll 1$ , коэффициенты переноса становятся изотропными и переходят в газодинамические аналоги. В случае, когда столкновения частиц являются несущественными, можно использовать приближение бесстолкновительной плазмы. При этом удается получить замкнутую систему уравнений для макроскопических величин [161]. В такой плазме величины  $\hat{p}_\alpha$ ,  $\mathbf{q}_\alpha$ ,  $\mathbf{R}_\alpha$ ,  $\mathbf{Z}_\alpha$ ,  $Q_\alpha^{(1)}$ ,  $Q_\alpha^{(2)}$  оказываются равными нулю. Однако из-за наличия магнитного поля давление  $P_\alpha$  оказывается анизотропным и определяется продольным  $P_{\parallel,\alpha}$  и поперечным давлением  $P_{\perp,\alpha}$ .

Полученные уравнения (4.59), (4.63) и (4.73) для компонент плазмы должны быть дополнены уравнениями Максвелла для электромагнитного поля, записанными в квазистационарном приближении (см., например, [162]):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= 4\pi \mathbf{j}. \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Свойство соленоидальности<sup>2)</sup> электрического поля обусловлено условием квазинейтральности плазмы. Вектор плотности тока определяется выражением:

<sup>1)</sup> Строго говоря, функция распределения позволяет получить и выражения для векторов  $\mathbf{R}_\alpha$  и  $\mathbf{Z}_\alpha$ , а также величин  $Q_\alpha^{(1)}$  и  $Q_\alpha^{(2)}$ .

<sup>2)</sup> Напомним, что векторное поле  $\mathbf{a}$  называется соленоидальным, если его поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю. Это равносильно тому, что равна нулю дивергенция этого векторного поля:  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ .

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}. \quad (4.81)$$

**4.4.3. Уравнения для массовых величин.** Часто при моделировании астрофизических течений оказывается удобным использовать уравнения не для отдельных компонент плазмы, а для массовых величин, характеризующих всю среду в целом. К этим величинам относятся плотность среды, ее скорость, давление и т.п. Уравнения для массовых величин можно вывести в качестве следствий уравнений, полученных в предыдущем разделе.

Просуммируем (4.59) по всем сортам частиц  $\alpha$ . Учитывая закон сохранения массы для компонент плазмы,

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 0, \quad (4.82)$$

получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.83)$$

где введены полная плотность и массовая скорость,

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}. \quad (4.84)$$

Суммируя уравнения (4.63) по всем  $\alpha$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \hat{P} + \hat{D}) = \rho \mathbf{f} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \mathbf{Z}. \quad (4.85)$$

Здесь обозначено

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{G}_{\alpha} \quad (4.86)$$

и введены полный тензор напряжений

$$\hat{P} = \sum_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} \quad (4.87)$$

и вектор

$$\mathbf{Z} = - \sum_{\alpha, \beta} \int m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_{\alpha}. \quad (4.88)$$

Тензор плотности диффузионных потоков

$$\hat{D} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{W}_{\alpha} \mathbf{W}_{\alpha} \quad (4.89)$$

определяется диффузионными скоростями компонентов  $\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha$ , которые удовлетворяют условию отсутствия полного диффузионного потока массы,

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{W}_{\alpha} = 0. \quad (4.90)$$

При получении выражения для электромагнитной силы учтено условие квазинейтральности плазмы:

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} = 0. \quad (4.91)$$

При этом вектор плотности тока определяется выражением

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}. \quad (4.92)$$

Запишем уравнения энергии для плазменных компонент (4.73) в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}) + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_{\alpha} + P_{\alpha}^{ik} \nabla_i v_{\alpha,k} + Q_{\alpha}^{(1)} + Q_{\alpha}^{(2)}. \quad (4.93)$$

Складывая эти уравнения для всех  $\alpha$ , получим:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varepsilon \right] = & -\nabla \cdot \mathbf{q} + P^{ik} \nabla_k v_i + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{D} - \sum_{\alpha} P_{\alpha}^{ik} \nabla_i W_{\alpha,k} + Q^{(1)} + Q^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}, \quad \mathbf{q} = \sum_{\alpha} \mathbf{q}_{\alpha}, \quad (4.95)$$

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \mathbf{W}_{\alpha}, \quad Q^{(1)} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^{(1)}, \quad Q^{(2)} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^{(2)}. \quad (4.96)$$

Заметим, что поскольку

$$Q_{\alpha}^{(1)} = -\mathbf{R}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} - \sum_{\beta} \int \frac{m_{\alpha} u_{\alpha}^2}{2} S_{\alpha\beta} d\mathbf{u}_{\alpha}, \quad (4.97)$$

то, суммируя все эти соотношения и используя условия (4.56), находим:

$$Q^{(1)} = -\sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{R}_{\alpha} = \sum_{\alpha < \beta} R_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta})^2. \quad (4.98)$$

При вычислении этой суммы были использованы свойства симметрии коэффициентов трения  $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$  в (4.68). Отметим, что получен-

ная система уравнений (4.83), (4.85) и (4.94) не является замкнутой, поскольку в ней не определены выражения для диффузионных скоростей  $W_\alpha$ .

## 4.5. Магнитная газодинамика

**4.5.1. Полностью ионизованная плазма.** Полученная в предыдущем параграфе система моментных уравнений для плазменных компонент (4.59), (4.63) и (4.73) является достаточно общей, но и вместе с тем слишком сложной для численного моделирования. Кроме того, ее необходимо решать совместно с уравнениями Максвелла (4.80) для электромагнитного поля. Однако в некоторых случаях с учетом дополнительных предположений эту систему удается заменить более простой системой уравнений для массовых величин. При этом оказывается удобным исключить электромагнитные поля из уравнений Максвелла и закона Ома для плазмы таким образом, чтобы свести их к одному уравнению (уравнение индукции), связывающему между собой массовую скорость  $\mathbf{v}$  и вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . Не претендуя на полноту изложения, покажем как это можно сделать в двух предельных случаях — полностью ионизованной и слабоионизованной плазмы. При более общем подходе для описания плазмы можно использовать приближение трехкомпонентной смеси (см., например, [155]), в котором предполагается, что плазма состоит из электронов, ионов и нейтралов.

Поведение полностью ионизованной плазмы, состоящей из положительно заряженных ионов и отрицательно заряженных электронов, можно описать с помощью модели двух газов — электронного и ионного, движущихся один сквозь другой [151]. При этом необходимо рассматривать уравнения движения электронов и ионов, а передачу импульса между ними учитывать посредством силы трения. Уравнения движения электронного и ионного газов могут быть записаны в следующем виде:

$$\rho_e \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -en_e \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \right] - \nabla P_e + \mathbf{R}_e, \quad (4.99)$$

$$\rho_i \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = Zen_i \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \right] - \nabla P_i + \mathbf{R}_i, \quad (4.100)$$

где индексы  $e, i$  определяют величины, относящиеся к электронам и ионам, соответственно,  $Z$  — зарядовое число ионов,  $P_e$  и  $P_i$  — парциальные давления электронного и ионного газов. Силы трения определяются выражениями

$$\mathbf{R}_e = -\eta_{ei} \rho_e \rho_i (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \quad \mathbf{R}_i = -\eta_{ei} \rho_e \rho_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \quad (4.101)$$

где  $\eta_{ei}$  — коэффициент взаимного трения.



В силу условия квазинейтральности плазмы  $Zn_i = n_e = n$ , поэтому плотность тока

$$\mathbf{j} = e(Zn_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) = ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e). \quad (4.102)$$

Если сложить уравнения (4.99) и (4.100), то полная сила электрического поля и полная сила трения окажутся равными нулю. Первое происходит благодаря квазинейтральности, второе — вследствие третьего закона Ньютона для сил трения,  $\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i$ . В результате получим уравнение для массовой скорости:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \tilde{\rho}(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \nabla P, \quad (4.103)$$

где введены полная плотность  $\rho = \rho_e + \rho_i$ , полное давление в плазме  $P = P_e + P_i$ , средняя массовая скорость плазмы  $\mathbf{v} = (\rho_e \mathbf{v}_e + \rho_i \mathbf{v}_i)/\rho$ , токовая скорость  $\mathbf{V} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$  и приведенная плотность электронной и ионной жидкостей  $\tilde{\rho} = \rho_i \rho_e / \rho$ . Как правило, в этом уравнении нелинейным членом  $\tilde{\rho}(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$  можно пренебречь и перейти к магнитогазодинамическому уравнению движения.

Для получения второго уравнения разделим (4.99) на  $\rho_e$ , а (4.100) на  $\rho_i$  и затем из полученного второго уравнения вычтем полученное первое. В результате несложных выкладок можно прийти к следующему уравнению:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}^* - \frac{1}{cm_e n} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \frac{\nabla P_e}{m_e n} - \frac{\tau^{-1}}{ne} \mathbf{j}, \quad (4.104)$$

где

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.105)$$

а  $\tau^{-1} = \rho \eta_{ei}$  — характерная частота столкновений электронов с ионами. При получении уравнения (4.104) были отброшены малые нелинейные члены в левой части и использовано приближение  $m_e \ll m_i$ .

Рассмотрим уравнение (4.104) в случае, когда  $d\mathbf{V}/dt = 0$ . Будем считать также, что  $\nabla P_e = 0$ . Получим

$$\mathbf{j} + \frac{\omega_{BT}}{B}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \sigma \mathbf{E}^*, \quad (4.106)$$

где  $\sigma = ne^2 \tau / m_e$ ,  $\omega_B = eB / (m_e c)$  — циклотронная частота. Это уравнение представляет собой обобщенный закон Ома для электронно-ионной плазмы.

В частных случаях, когда  $\mathbf{B} = 0$  или  $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$ , получаем  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^*$ . Этот случай соответствует нормальной (продольной) проводимости плазмы. В общем случае, выбирая ось  $z$  в направлении магнитного поля, получаем:

$$\begin{aligned}
 j_x + \omega_B \tau j_y &= \sigma E_x^*, \\
 j_y + \omega_B \tau j_x &= \sigma E_y^*, \\
 j_z &= \sigma E_z^*.
 \end{aligned}
 \tag{4.107}$$

Эти уравнения можно переписать в виде тензорного закона Ома:  $\mathbf{j} = \hat{\sigma} \cdot \mathbf{E}^*$ , где тензор проводимости

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{1 + \omega_B^2 \tau^2} & -\frac{\omega_B \tau \sigma}{1 + \omega_B^2 \tau^2} & 0 \\ \frac{\omega_B \tau \sigma}{1 + \omega_B^2 \tau^2} & \frac{\sigma}{1 + \omega_B^2 \tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.
 \tag{4.108}$$

Диагональные компоненты  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  тензора  $\sigma_{ik}$  описывают поперечную проводимость, когда ток протекает поперек магнитного поля. В замагниченной плазме ( $\omega_B \tau \gg 1$ ) поперечная проводимость становится несущественной. Недиagonальные компоненты  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{yx}$  описывают эффект Холла, когда ток в плазме может протекать поперек электрического поля. Данное явление связано с наличием магнитного поля в плазме. Причем этот эффект сильнее выражен именно в замагниченной плазме. Если магнитное поле является достаточно слабым ( $\omega_B \tau \ll 1$ ), мы приходим к случаю нормальной проводимости плазмы, когда плотность тока  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^*$ . Именно это выражение для плотности тока используется в приближении магнитной газодинамики.

Обобщенный закон Ома (4.106) совместно с уравнениями Максвелла позволяет получить уравнение индукции. Действительно, взяв ротор от обеих частей соотношения (4.105) и используя уравнения Максвелла (4.80), находим:

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}^* = -\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right].
 \tag{4.109}$$

Далее, вычисляя  $\mathbf{rot} \mathbf{E}^*$  из обобщенного закона Ома (4.106) и подставляя в (4.109), приходим к уравнению:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \mathbf{rot}(\eta \mathbf{rot} \mathbf{B}) + \mathbf{rot} \left[ \frac{\omega_B \tau \eta}{B} (\mathbf{B} \times \mathbf{rot} \mathbf{B}) \right],
 \tag{4.110}$$

где  $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$  — коэффициент магнитной вязкости. Здесь первое слагаемое в правой части описывает перенос магнитного поля движущимся газом, второе слагаемое обусловлено эффектами диффузии магнитного поля, а последнее слагаемое связано с эффектом Холла, который становится существенным в сильных магнитных полях. Заметим, что действие эффекта Холла также можно трактовать как некоторую диффузию магнитного поля, имеющую анизотропный

характер. При этом тензор суммарной магнитной вязкости определяется выражением

$$\eta_{ik} = \eta \left( \delta_{ik} + \frac{\omega_{BT}}{B} e_{ikl} B^l \right), \quad (4.111)$$

где  $e_{ikl}$  — единичный абсолютно антисимметричный тензор.

**4.5.2. Слабоионизованная плазма.** Рассмотрим противоположный предельный случай слабоионизованной плазмы, состоящей из нейтральных частиц и заряженных частиц различных сортов [158]. Поскольку число нейтральных частиц намного больше числа заряженных частиц, можно пренебречь столкновениями между заряженными частицами и учитывать только их столкновения с нейтрами. Это предположение позволяет простым способом вывести уравнение индукции для достаточно широкого диапазона условий, поскольку заранее не выделяется компонента, в которую вморожено поле [163].

Будем помечать относящиеся к нейтрам величины индексом  $n$ , а для заряженных компонент использовать индекс  $\alpha$ . В пределе слабоионизованной плазмы можно считать, что движение каждой заряженной компоненты с номером  $\alpha$  определяется из условия равновесия между электромагнитной силой и силой трения с нейтрами:

$$e_\alpha n_\alpha \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \right] = R_{\alpha n} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_n). \quad (4.112)$$

Просуммируем эти уравнения по всем  $\alpha$ . Учитывая условие квазинейтральности плазмы (4.91) и выражение для плотности тока (4.92), находим:

$$\frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \sum_\alpha R_{\alpha n} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_n). \quad (4.113)$$

Умножим теперь каждое уравнение (4.112) на  $e_\alpha n_\alpha / R_{\alpha n}$  и просуммируем полученные уравнения. Получим:

$$\sum_\alpha \sigma_\alpha \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \right] = \mathbf{j}, \quad (4.114)$$

где коэффициенты проводимости для каждого сорта заряженных частиц

$$\sigma_\alpha = \frac{e_\alpha^2 n_\alpha^2}{R_{\alpha n}}. \quad (4.115)$$

Введем полный коэффициент проводимости  $\sigma$  плазмы и среднюю плазменную скорость  $\mathbf{v}_p$ :

$$\sigma = \sum_\alpha \sigma_\alpha, \quad \mathbf{v}_p = \frac{1}{\sigma} \sum_\alpha \sigma_\alpha \mathbf{v}_\alpha. \quad (4.116)$$

В результате приходим к обобщенному закону Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_p \times \mathbf{B}) \right]. \quad (4.117)$$

Обозначим скорость амбиполярной диффузии  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_n$ , а диффузионные скорости заряженных компонент  $\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_\alpha$ . Скорость  $\mathbf{v}_A$  описывает усредненную диффузию заряженных компонент среди нейтралов. Скорости  $\mathbf{V}_\alpha$  описывают диффузию заряженных компонент в плазме. Если скорости всех заряженных компонент плазмы близки друг другу, то  $\mathbf{v}_\alpha \approx \mathbf{v}_p$ . Кроме того, поскольку основная масса сосредоточена в нейтралах, то можно считать, что  $\mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}$ . Используя введенные обозначения, из (4.113) находим:

$$\mathbf{v}_A = \frac{\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{4\pi R_{pn}} + \frac{1}{R_{pn}} \sum_{\alpha} R_{\alpha n} \mathbf{V}_\alpha, \quad (4.118)$$

где полный коэффициент столкновений

$$R_{pn} = \sum_{\alpha} R_{\alpha n}. \quad (4.119)$$

Подставляя  $\mathbf{v}_p = \mathbf{v} + \mathbf{v}_A$  в обобщенный закон Ома (4.117), приходим к соотношению

$$\mathbf{j} = \sigma \left[ \mathbf{E}^* + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_A \times \mathbf{B}) \right], \quad (4.120)$$

где  $\mathbf{E}^*$  определяется выражением (4.105). Разделив (4.120) на  $\sigma$  и вычисляя затем ротор от обеих частей, с использованием (4.109) получаем уравнение индукции:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \text{rot}(\mathbf{v}_A \times \mathbf{B}) - \text{rot}(\eta \text{rot } \mathbf{B}), \quad (4.121)$$

где  $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$  — коэффициент магнитной вязкости. Здесь второе слагаемое в правой части описывает *амбиполярную диффузию* магнитного поля. В общем случае скорость амбиполярной диффузии  $\mathbf{v}_A$  выражается в том числе и через диффузионные скорости  $\mathbf{V}_\alpha$  заряженных компонент плазмы. Это, в частности, означает, что второе слагаемое в правой части уравнения индукции (4.121) содержит и эффект Холла. Однако в приближении стационарной амбиполярной диффузии, когда  $\mathbf{V}_\alpha = 0$ , скорость

$$\mathbf{v}_A = \frac{\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{4\pi R_{pn}} \quad (4.122)$$

выражается только через магнитное поле  $\mathbf{B}$  и коэффициент столкновения  $R_{pn}$ .

**4.5.3. Магнитогазодинамическое приближение.** Движения проводящей среды при наличии электромагнитного поля приводят к тому, что в среде возникают электрические токи. Взаимодействие этих токов с магнитным полем вызывает появление сил, влияющих на движения среды. С другой стороны, эти токи могут повлиять и на само магнитное поле. В результате возникает сложная картина течения,

которая может быть описана только на основе самосогласованной системы уравнений, определяющей изменения электромагнитного поля и движения среды. В простейшем приближении для описания этих процессов можно прийти к уравнениям магнитной газодинамики. Эти уравнения, так же как и в газодинамическом случае, можно получить на основе феноменологического подхода с помощью законов сохранения массы, импульса и энергии. При этом из уравнений Максвелла для электромагнитного поля и закона Ома для проводящей среды можно исключить электрические поля таким образом, чтобы получить одно уравнение, связывающее между собой скорость  $\mathbf{v}$  проводящей среды и вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . Это уравнение называется уравнением индукции и описывает изменение магнитного поля в результате движения проводящей среды.

Основополагающее предположение магнитной газодинамики состоит в том, что изменения электромагнитного поля являются нерелятивистскими и квазистационарными:  $v_0 \ll c$ , где  $v_0 = r_0/t_0$  — характерная скорость газа,  $r_0$  и  $t_0$  — характерные масштабы длины и времени. Это, в свою очередь, позволяет пренебречь током смещения в уравнениях Максвелла. Кроме того, магнитное поле не должно быть слишком сильным:  $B^2 \ll \rho c^2$ , а электрическое поле  $E \sim v_0 B/c \ll B$ .

В магнитогазодинамическом приближении предполагается, что закон Ома соответствует изотропной проводимости среды:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^* = \sigma \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (4.123)$$

Как следует из предыдущего анализа это соотношение выполняется далеко не всегда. В частности, оно перестает быть верным в сильном магнитном поле, когда плазма является замагниченной. Более подробно с условиями применимости закона Ома в форме (4.123) можно ознакомиться, например, в книгах [159, 164–167]. Из закона Ома (4.123) и из уравнений Максвелла можно получить уравнение индукции в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \mathbf{rot}(\eta \mathbf{rot} \mathbf{B}), \quad (4.124)$$

где  $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$  — коэффициент магнитной вязкости.

Для анализа относительного вклада членов в уравнении индукции выделим характерные размерные масштабы. Для простоты будем считать, что коэффициент магнитной вязкости  $\eta$  является постоянным. При этом безразмерные величины будем обозначать теми же символами:

$$\mathbf{B} \rightarrow B_0 \mathbf{B}, \quad t \rightarrow t_0 t, \quad \mathbf{v} \rightarrow v_0 \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \rightarrow r_0 \mathbf{r}. \quad (4.125)$$

Тогда в безразмерных переменных уравнение индукции можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (4.126)$$

где  $R_m = v_0 r_0 / \eta$  — магнитное число Рейнольдса.

При  $R_m \ll 1$  первым слагаемым в правой части уравнения индукции можно пренебречь. В результате мы переходим к диффузионному пределу, в котором уравнение индукции принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{rot}(\eta \mathbf{rot} \mathbf{B}). \quad (4.127)$$

В диффузионном пределе магнитное поле в данной точке затухает за характерное время  $t_d = r_0^2 / \eta$ .

В противоположном пределе, при  $R_m \gg 1$ , диффузионным членом можно пренебречь и мы оказываемся в рамках приближения идеальной магнитной газодинамики. В этом случае уравнение индукции принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.128)$$

Из закона Ома (4.123) следует, что в пределе  $R_m \gg 1$  должно выполняться равенство  $\mathbf{E}^* = 0$  или

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.129)$$

Это означает, что электрическое поле является релятивистским следствием магнитного поля. Приближение идеальной магнитной газодинамики может реализоваться в двух случаях: 1) идеальная проводимость:  $\sigma \rightarrow \infty$ ; 2) большие пространственные масштабы течения:  $r_0 \rightarrow \infty$ . Первое условие часто реализуется в лабораторных условиях, второе условие может выполняться в случае астрофизических течений.

Можно показать [162], что поток магнитного поля  $\Phi$ , пронизывающий произвольную жидкую поверхность  $S$ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.130)$$

Поэтому в приближении идеальной магнитной газодинамики должно быть  $d\Phi/dt = 0$ , т. е. магнитный поток, пронизывающий произвольную поверхность, перемещающуюся вместе с газом, сохраняется.

Рассмотрим магнитную силовую трубку и произвольный односвязный контур  $L$  на ее поверхности. Обозначим через  $S$  часть поверхности магнитной силовой трубки, ограниченную контуром  $L$ . Поскольку в начальный момент времени на поверхности  $S$  скалярное произведение  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности  $S$ , то магнитный поток

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (4.131)$$

Из условия сохранения магнитного потока  $d\Phi/dt = 0$  следует, что и в дальнейшем на данной жидкой поверхности будет выполняться

соотношение  $\Phi = 0$ , а значит,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ . Отсюда следует, что выбранная часть поверхности  $S$  магнитной силовой трубки всегда будет оставаться частью магнитной силовой трубки. Но контур  $L$  был выбран произвольным образом. Значит, жидкие частицы, первоначально находившиеся на поверхности силовой трубки, всегда будут составлять силовую трубку, т. е. трубка всегда будет состоять из одних и тех же жидких частиц. Сделав ее бесконечно тонкой, мы получим магнитную силовую линию. Таким образом, мы приходим к *теореме Альфвена*: в идеальной проводящей плазме магнитные силовые линии перемещаются вместе с плазмой — заморожены в нее.

В заключении этого раздела выпишем основные уравнения магнитной газодинамики. В приближении идеальной магнитной газодинамики к ним относятся уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.132)$$

уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}) + \mathbf{f}, \quad (4.133)$$

уравнение индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.134)$$

и уравнение адиабатичности

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0. \quad (4.135)$$

Для замыкания этой системы уравнений необходимо добавить уравнение состояния  $P = P(\rho, s)$ . Магнитное поле должно удовлетворять условию соленоидальности  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Если в начальный момент времени это условие выполнено, то из уравнения индукции (4.134) следует, что оно будет выполняться и в дальнейшем. Вместо уравнения адиабатичности можно использовать уравнение энергии

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varepsilon = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.136)$$

Уравнения адиабатичности и энергии в идеальной магнитной газодинамике имеют такой же вид, как и соответствующие уравнения в газовой динамике.

При учете диффузии магнитного поля в уравнении индукции нужно учесть магнитную вязкость:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \text{rot}(\eta \text{rot } \mathbf{B}). \quad (4.137)$$

В уравнении для энтропии при этом необходимо добавить источник нагрева, обусловленный диссипацией токов (эффект Джоуля–Ленца). В результате получаем следующее уравнение:

$$\rho T \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s \right] = \frac{\eta}{4\pi} (\mathbf{rot} \mathbf{B})^2. \quad (4.138)$$

Уравнение энергии, в этом случае, будет содержать такой же источник нагрева:

$$\rho \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varepsilon \right] + P \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\eta}{4\pi} (\mathbf{rot} \mathbf{B})^2. \quad (4.139)$$

Не составляет труда учесть в этих уравнениях эффекты, связанные с вязкостью и теплопроводностью [162]. Отметим также, что при учете амбиполярной диффузии и эффекта Холла в уравнениях для энтропии и энергии появляются дополнительные источники нагрева, связанные с соответствующими процессами диссипации.



## **Часть II**

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В АСТРОФИЗИКЕ**

За последние полвека было разработано большое количество численных методов для решения задач газовой динамики. Одной из наиболее интересных и важных задач по моделированию течений сжимаемого газа является исследование течений с ударными волнами и контактными разрывами, причем в большинстве исследований общая точность численного моделирования определяется тем, насколько хорошо представлены газодинамические разрывы. В прикладных задачах астрофизики в общей структуре течения, как правило, присутствуют и сильные ударные волны, и контактные разрывы, что, соответственно, требует использования специально разработанных разностных схем.

Впервые конечно-разностная схема для расчета течений с разрывами была предложена фон Нейманом и Рихтмайером [168]. Исторически первые схемы для решения уравнений газовой динамики либо давали очень «размазанные» разрывы, как, например, схема Лакса–Фридрихса [169, 170], либо приводили к возникновению сильных осцилляций за фронтом ударной волны, как, например, схема Лакса–Вендроффа [171]. Это послужило причиной развития численных методов для решения уравнений газовой динамики, в которых малая численная вязкость совмещалась с монотонностью схемы. Для достижения этой цели использовались специальные свойства газодинамических уравнений. Эти уравнения представляют собой систему нелинейных гиперболических уравнений, свойства которых подробно изложены в Приложении А. С математической точки зрения наиболее интересной особенностью гиперболических систем является возможность появления разрывных решений даже при гладких начальных данных. Эти разрывы являются математической идеализацией резких градиентов, возникающих в гладких решениях уравнений Навье–Стокса в областях быстрого изменения параметров на расстояниях, много меньших, чем характерные размеры задачи. Именно использование математических особенностей гиперболических уравнений позволяет строить эффективные численные методы, несмотря на то, что получающиеся численные решения должны быть почти разрывными. Кроме того, для решения гиперболических систем можно, как правило, использовать явные методы, что дает существенный выигрыш во времени расчета.

Впервые характеристические свойства гиперболической системы использовались в схеме Куранта–Изаксона–Риса [172], обладающей минимальной вязкостью из всех линейных монотонных схем первого порядка аппроксимации для линейной системы гиперболических уравнений. Построение монотонных схем более высокого порядка аппроксимации входит в противоречие с теоремой Годунова [173], утверждающей, что из трех свойств разностной схемы для линейной системы гиперболического типа — линейности, монотонности, аппроксимации с порядком выше первого — одновременно могут иметь место только два. Для преодоления этого запрета были предложены схемы линейной гибридизации, представляющие собой суперпозицию схемы повышенного порядка аппроксимации, которая дает высокую точность

в областях гладкости, и схемы первого порядка с достаточной вязкостью, обеспечивающей монотонность около скачков [174–178]. Дальнейшее развитие этого подхода привело к схемам с ограничителями антидиффузионных потоков, являющимися нелинейными функциями анализаторов гладкости [179–186]. Для случая линейных уравнений было доказано, что эти схемы обладают свойством монотонности, т. е. принадлежат к классу схем, не увеличивающих полную вариацию решения (TVD, Total Variation Diminishing).

Еще одним важным свойством разностной схемы является требование консервативности, т. е. выполнение законов сохранения в разностном виде. Известно (см., например, [187–190]), что схемы, не обладающие этим свойством, могут давать решения, весьма далекие от истинного, в частности, ударные волны, движущиеся с неправильными скоростями. Для обеспечения консервативности схемы естественно использовать запись схемы в потоковом виде, т. е. когда искомые решения — функции, получающиеся в результате разностного дифференцирования функции соответствующего потока. Для вычисления потоков на границах разностных ячеек в 1959 г. С.К. Годуновым [173, 191] был предложен метод, основанный на решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Таким образом, был сделан важнейший шаг от схем, базирующихся на разложении в ряд Тейлора и предполагающих, что решение гладкое, к схемам, основанным на взаимодействии газодинамических разрывов. Дальнейшее развитие этого подхода привело к схемам годуновского типа с приближенным решением задачи о распаде разрыва [192–194]. Годуновский подход используется в современных TVD-схемах повышенного порядка аппроксимации. Помимо TVD-методов годуновский подход используется также в популярном кусочно-параболическом методе [195] (PPM, Piecewise Parabolic Method).

Наряду с конечно-разностными схемами для решения задач газовой динамики широкое развитие получили конечно-элементные методы. В этих методах искомое решение ищется в виде разложения по набору базисных функций. В вычислительной астрофизике конечно-элементные методы в чистом виде применяются достаточно редко, однако, широко используется метод гидродинамики сглаженных частиц [196, 197] (SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics), который включает в себя отдельные детали конечно-элементного подхода.

Среди численных подходов, используемых в астрофизике, абсолютное большинство составляют различные модификации TVD-метода, PPM- и SPH-методы. В этой Части книги мы подробно рассмотрим типичные свойства TVD-схем (на примере схем Роу и Роу–Ошера), а также опишем методы PPM и SPH. Их сравнительный анализ проводится как аналитически, так и численно на примере одно- и двумерных тестов, что позволяет оценить достоинства и недостатки каждого из этих подходов.

## ПРИНЦИПЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 5.1. Дискретизация

**5.1.1. Описание общего подхода.** Для численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных необходимо так или иначе перейти от дифференциальных операторов к конечным разностям. Иными словами необходимо обеспечить переход от бесконечномерного пространства непрерывных функций-решений к некоторому конечномерному аппроксимирующему пространству сеточных функций (или попросту таблиц). В результате этого перехода исходные уравнения для непрерывных функций сведутся к некоторым алгебраическим соотношениям для сеточных функций. Точность аппроксимации в общем случае будет тем выше, чем больше количество этих алгебраических уравнений.

Такой переход можно осуществить несколькими способами. Способы аппроксимации могут отличаться в зависимости от вида и смысла дифференциального оператора. В методе *конечных разностей* производные функций в дифференциальных операторах приближенно представляются в виде конечных разностей. Метод *конечных объемов* основан на использовании интегральных законов сохранения. В методе *конечных элементов* задача формулируется с помощью функций, каждая из которых задана в своей подобласти. В *спектральном* методе решение представляется в виде конечной суммы по базисным функциям. Способ осуществления дискретизации может зависеть от того, рассматриваются ли производные по времени или же уравнения содержат только пространственные производные. При дискретизации производных по времени в основном используется метод конечных разностей. При дискретизации пространственных производных используются методы конечных разностей, конечных элементов, конечных объемов или спектральный метод.

Общий подход к дискретизации заключается в замене непрерывных переменных их дискретными аналогами. Расчетную область разбивают на *ячейки* — некоторые объемы пространства, ограниченные замкнутыми поверхностями. Набор ячеек, их геометрическая форма и границы определяют структуру расчетной *сетки*. Расчетные величины в этих ячейках вычисляются в определенные дискретные моменты времени — *временные слои*, которые вместе с временными шагами определяют дискретизацию временной координаты.

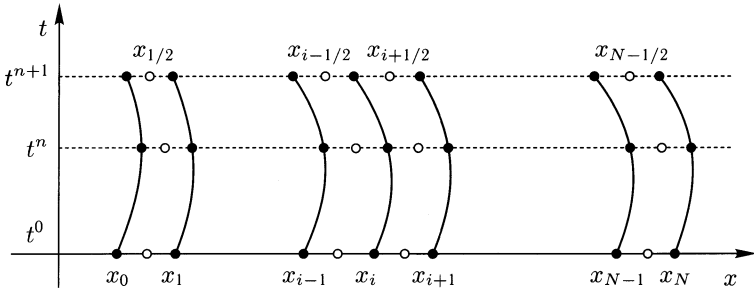


Рис. 5.1. Пример одномерной расчетной сетки.

В качестве примера рассмотрим дискретизацию расчетной области в одномерных задачах (см. рис. 5.1). Допустим, что в начальный момент времени  $t = t^0$  непрерывная переменная  $x$  изменяется в пределах  $a \leq x \leq b$ . Определим набор *узлов*  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , при этом  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ . Всего получаем  $N + 1$  узлов. На рис. 5.1 узлы показаны черными кружочками. Будем считать, что соседние узлы  $x_i$  и  $x_{i+1}$  являются левой и правой границами ячейки с номером  $i + 1/2$ . Координаты центров ячеек обозначим  $x_{i+1/2}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ . Всего получаем  $N$  ячеек. На рис. 5.1 центры ячеек показаны белыми кружочками. Размеры ячеек  $\Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$  равны расстояниям между узлами, ограничивающими данную ячейку. В общем случае координаты узлов  $x_i$  и центров ячеек могут изменяться со временем. Аналогичным образом поступаем и с временной переменной  $t$ , разбивая ее на дискретный набор слоев  $t^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Временные индексы, отвечающие различным временным слоям, принято писать сверху, а пространственные индексы, соответствующие номерам узлов или ячеек — снизу. Например, центр ячейки с номером  $i + 1/2$  в момент времени  $t^n$  обозначается как  $x_{i+1/2}^n$ . Сетка, в которой положение узлов меняется со временем, называется *подвижной*. В противном случае получаем *стационарную* сетку.

Координаты центров ячеек  $x_{i+1/2}$  можно определять различными способами в зависимости от конкретной задачи. В частности, это обусловлено типом геометрии расчетной области. Например, в качестве координат  $x_{i+1/2}$  можно использовать геометрические центры ячеек

$$x_{i+1/2} = \frac{1}{V} \int_V x dV, \quad (5.1)$$

где  $V$  — объем данной ячейки. В простейшем случае в декартовой системе координат получаем:

$$x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}. \quad (5.2)$$

При дискретизации расчетной области величины  $u(x, t)$  переходят к относящимся к ячейкам значениям сеточной функции  $u_{i+1/2}^n$ . Для определения сеточной функции  $u_{i+1/2}^n$  можно использовать различные способы. Часто в качестве  $u_{i+1/2}^n$  используются средние значения функции  $u(x, t)$ : 1) по объему ячейки в момент  $t^n$ , 2) по времени между промежуточными слоями  $t^{n-1/2}$  и  $t^{n+1/2}$  в  $x_{i+1/2}$  и 3) одновременно и по пространству и времени. Другим способом определения величин  $u_{i+1/2}^n$  являются значения соответствующих коэффициентов при базисных функциях в разложении по ним исходной функции  $u(x, t)$ . Наконец, в качестве  $u_{i+1/2}^n$  можно использовать значение  $u(x, t)$  в некоторой частной точке внутри ячейки в момент  $t^n$ . Заметим, что в качестве таких частных точек вполне могут подойти и координаты самих узлов  $x_i$  и  $x_{i+1}$ . Все эти представления в различных алгоритмах могут проявлять себя по-разному.

Во всех случаях решение представляется в виде конечного набора значений, каждое из которых определено тоже лишь с конечной точностью. Это означает, что в численных методах часть информации о решении неизбежно теряется. В результате в расчете возникает некоторая фундаментальная неопределенность, проистекающая из самой сути дискретизации. Источником этой неопределенности является потеря информации о детальной структуре решения в пределах дискретных пространственных ячеек и временных шагов. Эта проблема имеет место во всех случаях, когда для представления непрерывных распределений используется конечное число значений.

Рассмотрим непрерывную переменную  $x$ , определенную в ограниченной области  $a \leq x \leq b$ . Эта переменная  $x$  может представлять собой или пространственную координату, или временную. Так как функция  $u(x)$  определена всюду в рассматриваемой области, то набор ее дискретных значений  $u_i$  дает неполное описание  $u(x)$ . Из общих соображений ясно, что включение большего числа значений в набор  $u_i$  должно приводить к лучшему дискретному представлению исходной непрерывной функции. Когда используется меньшее число точек, теряется больше информации о функции  $u(x)$ .

Эти соображения можно выразить в количественной форме, если воспользоваться техникой разложения Фурье. Непрерывную функцию на отрезке можно представить в виде бесконечного ряда Фурье:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k) e^{2\pi i k \frac{x}{b-a}}, \quad (5.3)$$

где

$$u(k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) e^{-2\pi i k \frac{x}{b-a}} dx. \quad (5.4)$$

В этом разложении присутствуют все возможные гармоники с  $-\infty < k < +\infty$ . Поэтому это разложение содержит всю информацию об исходной функции  $u(x)$ . Сеточные функции  $u_i$  разлагаются в конечные суммы Фурье:

$$u_j = \sum_{k=0}^{N-1} u(k) e^{2\pi i k \frac{j}{N}}, \quad (5.5)$$

где

$$u(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi i k \frac{j}{N}}. \quad (5.6)$$

Это означает, что вся коротковолновая информация о решении (большие  $k$ ) теряется. Конечный дискретный набор значений  $u_j$  описывает только длинноволновые свойства функции  $u(x)$  с длиной волны  $\lambda > 2\pi/N$ . Чем больше  $N$ , тем более короткие длины волн можно учесть. В пределе при  $N \rightarrow \infty$ , дискретное фурье-разложение (5.5) переходит в фурье-представление для непрерывных функций (5.3).

Если  $x$  представляет собой время, то выбор определенного временного шага соответствует выбору некоторого фильтра, который устраняет высокочастотный шум. Если  $x$  является пространственной координатой, то за счет выбора определенной пространственной сетки будут эффективно отфильтровываться коротковолновые компоненты решения. В конкретных разностных схемах искажение информации может происходить различным образом для различных гармоник Фурье. Поэтому формализм дискретного преобразования Фурье можно использовать для более тонкого анализа разностных схем.

### 5.1.2. Расчетные сетки и представления величин в ячейках.

Все расчетные сетки по типу логических связей между узлами можно разделить на два типа: *структурированные* (регулярные) и *неструктурированные* (нерегулярные). Структурированные сетки определяются упорядоченной структурой узлов с явно выраженными сеточными направлениями. В общем случае эти направления можно трактовать как оси некоторой криволинейной системы координат. Ячейки структурированной сетки являются топологическими прямоугольниками в двумерном случае или параллелепипедами в трехмерном случае. При этом узлы сетки упорядочены по индексам:

$$r_{ijk}, \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y, \quad k = 0, 1, \dots, N_z, \quad (5.7)$$

где  $N_x$ ,  $N_y$  и  $N_z$  определяют число узлов в соответствующих пространственных направлениях.

На рис. 5.2 приведен пример двумерной структурированной сетки, которая определяется набором узлов  $x_{ij}$  и  $y_{ij}$ . Если зафиксировать индекс  $j$ , то при изменении индекса  $i$  узлы будут лежать на некоторой кривой, соответствующей координатной линии  $Y = \text{const}$  некоторой

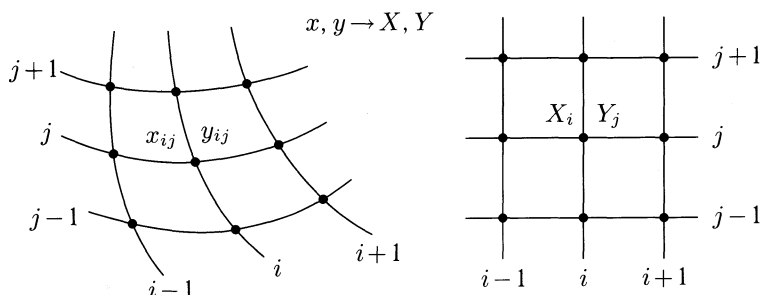


Рис. 5.2. Двумерная структурированная сетка

криволинейной системы координат  $(X, Y)$ . Наоборот, если зафиксировать индекс  $i$ , то при изменении индекса  $j$  узлы будут лежать на координатной линии  $X = \text{const}$ . Таким образом, структурированная сетка связана с отображением исходной системы координат  $(x, y)$  на некоторую криволинейную систему координат  $(X, Y)$ . Каждый узел исходной сетки  $(x_{ij}, y_{ij})$  отображается в соответствующий узел  $(X_i, Y_j)$  сетки в криволинейных координатах. При этом в криволинейной системе координат  $(X, Y)$ , определяющейся сеточными направлениями, сетка является равномерной по всем координатам. Трехмерная структурированная сетка может быть построена аналогичным образом. Она определяется набором узлов  $x_{ijk}, y_{ijk}$  и  $z_{ijk}$  и связана с отображением исходной системы координат  $(x, y, z)$  на некоторую криволинейную систему координат  $(X, Y, Z)$ . При этом каждый узел исходной сетки  $(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$  в координатах  $(x, y, z)$  отображается в узел  $(X_i, Y_j, Z_k)$  равномерной сетки в криволинейной системе координат  $(X, Y, Z)$ .

Более простым частным случаем структурированной сетки является сетка, в которой распределение узлов определяется одномерными массивами  $x_i, y_j$  и  $z_k$ . При этом разбиение по каждому направлению может быть неравномерным. Если шаги сетки в каждом пространственном направлении являются постоянными, получаем равномерную сетку. Ячейками такой сетки являются одинаковые прямоугольники (в двумерном случае) или параллелепипеды (в трехмерном случае). Наконец, простейшим вариантом структурированной сетки является равномерная по всем индексам сетка, ячейками которой являются квадраты (в двумерном случае) или кубы (в трехмерном случае).

Из нескольких структурированных сеток можно формировать более сложные *блочнo-структурированные* сетки. В этом случае расчетная область разбивается на конечное число подобластей, в каждой из которых задается своя структурированная сетка. Примерами таких блочно-структурированных сеток могут служить вложенные сетки, когда для увеличения пространственного разрешения в нужных местах расчетной области встраиваются более мелкие сетки. Другой интересный пример блочно-структурированной сетки представляет собой сетка на поверхности сферы, которая получается в результате



кубической проекции. В этом случае сфера отображается на 6 граней куба, в который она вписана. Если, например, каждая грань куба покрыта равномерной сеткой, то и поверхность сферы окажется разбита на шесть областей, соответствующих шести граням куба. При этом каждая такая область оказывается покрытой структурированной сеткой.

Расчетная сетка, не являющаяся структурированной, называется *неструктурированной* сеткой. Неструктурированные сетки определяются простым набором узлов  $\mathbf{r}_I$ , где индекс  $I = 1, \dots, N$ . Логическая связь между узлами сетки задается произвольным образом. Как правило для этого используются треугольные (или тетраэдрические) ячейки. Для построения треугольных ячеек из заданного набора узлов можно использовать алгоритм триангуляции Делоне. Наряду с триангуляцией для задания топологических связей между узлами сетки в данном подходе используются понятия ячеек Дирихле и диаграммы Вороного (см., например, [198]). Диаграмма Вороного для конечного множества точек узлов в расчетной области представляет собой такое разбиение этой области, при котором каждая ячейка (ячейка Дирихле) этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из узлов сетки, чем к любому другому узлу. Если диаграмма Вороного построена, то триангуляция Делоне сводится к соединению узлов, находящихся в соседних ячейках Дирихле.

Использование неструктурированных сеток дает очень гибкий подход для дискретизации расчетной области. Особенно эта гибкость проявляется в случае сложных границ. К недостаткам этого метода можно отнести относительно медленную скорость обработки узлов и большие требования к памяти для хранения необходимых структурных элементов сетки. Традиционно неструктурированные сетки использовались при моделировании сложных инженерных конструкций методом конечных элементов. Однако в последнее время такие сетки стали широко применяться и в других областях вычислительной физики. Читателям, заинтересовавшимся методиками генерации неструктурированных сеток и их применением в современных расчетах можно порекомендовать книгу [199] и обзор [200].

Иногда в расчетах используют и гибридные сетки. В этом случае часть расчетной области покрывается структурированными сетками, а остальная часть — неструктурированными сетками.

Рассмотрим вопрос о представлении непрерывной переменной в ячейках сетки. Общий вид сеточного представления непрерывной величины можно записать в виде

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}), \quad (5.8)$$

где коэффициенты  $u_k$  являются лишь функциями времени, а базисные функции  $\varphi_k$  зависят только от пространственной переменной  $\mathbf{r}$ .

Идеальным вариантом было бы взять бесконечно большое количество базисных функций. Но на практике всегда приходится ограничиваться конечным набором коэффициентов  $u_k$ , а это означает, что каждая базисная функция  $\varphi_k$  локализована около конкретного коэффициента  $u_k$ , т. е. привязана к конкретной ячейке. Поэтому на результат расчета, вообще говоря, будут влиять такие нефизические параметры, как форма и размер ячеек. Это влияние разумным выбором базисных функций можно уменьшить, но не исключить полностью. Существуют целые классы делокализованных разложений, использующих информацию из более удаленных ячеек. Полностью делокализованные или глобальные разложения используются в спектральных методах. В этом случае для получения значения величины в данной ячейке используют информацию об этой величине во всех ячейках сетки.

В эйлеровом подходе используются линейные разложения во всей расчетной области. Эти разложения привязываются к фиксированной эйлеровой сетке, а на газодинамические величины смотрят, как на передвигающиеся от ячейки к ячейке параметры, посредством соответствующих потоков. В лагранжевом подходе отслеживается движение узлов, которые перемещаются вместе с потоком газа. В результате, задача разделяется на геометрическую и физическую части. В геометрической части вычисляются положения узлов, а в физической части — изменение физических величин в этих узлах. Связывая каким-либо образом при помощи ребер эти узлы между собой, можно получить лагранжеву сетку. Структура такой сетки определяется самим течением. Как правило, такой подход также можно осуществить на основе локальных представлений.

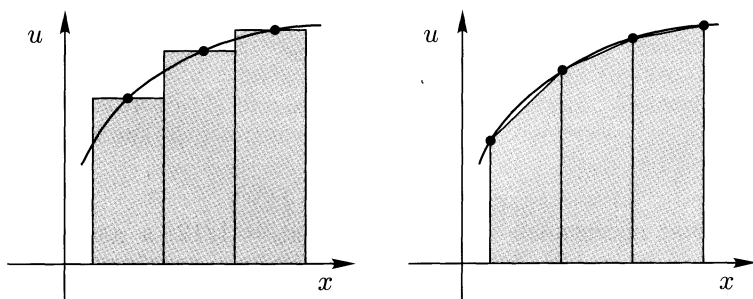


Рис. 5.3. Кусочно-постоянное (слева) и кусочно-линейное (справа) представления непрерывной функции

Рассмотрим способы дискретного представления на одномерной сетке. Простейшим способом является кусочно-постоянное представление. В этом подходе сначала в каждой ячейке некоторым способом вычисляется значение  $u_i$ , а затем это значение распространяется на всю область ячейки. В этом представлении  $u_i^n$  можно рассматривать как

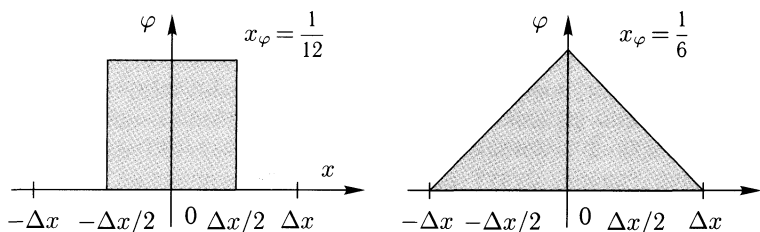


Рис. 5.4. Базисные функции для кусочно-постоянного (слева) и кусочно-линейного (справа) представлений

некие средние значения  $u(x, t)$  в ячейках. Очевидно, что при этом все величины, вообще говоря, терпят разрывы на границах ячеек (см. левую диаграмму рис. 5.3). Базисная функция для этого случая изображена на левой диаграмме рис. 5.4. Она имеет форму прямоугольника с единичной высотой и шириной в одну ячейку.

Другим способом является кусочно-линейное представление. В этом случае величина  $u(x)$  представляется набором ее значений на границах ячеек. Значения внутри ячейки находятся при помощи линейной интерполяции (см. правую диаграмму рис. 5.3). Эта аппроксимация является более точной по сравнению со случаем кусочно-постоянного представления, поскольку базисная функция более широкая (см. правую диаграмму рис. 5.4). Поэтому дискретное представление в этом подходе является более гладким.

Степень локализации базисных функций можно количественно описать с помощью параметра локализации  $x_\varphi$ , который определяется выражением

$$x_\varphi^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx} \quad (5.9)$$

Для кусочно-постоянной аппроксимации  $x_\varphi = 1/12$ , а для кусочно-линейной —  $x_\varphi = 1/6$ . Заметим, что для кусочно-параболической аппроксимации  $x_\varphi = 1/8$ , так что она оказывается более локализованной, чем кусочно-линейная.

## 5.2. Конечно-разностная аппроксимация

**5.2.1. Аппроксимация дифференциальных операторов** Для вычисления производных функций используют эквивалентные им конечно-разностные выражения. Общий вид аппроксимации производной  $m$ -го порядка можно представить следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)_i = \sum_{k=-k_1}^{k_2} \alpha_k u_{i+k} + R, \quad (5.10)$$

где индексы  $k_1, k_2$  определяют границы шаблона,  $\alpha_k$  — весовые коэффициенты,  $R$  — остаточный член, описывающий ошибку аппроксимации. Обозначим через  $h = \max\{\Delta x_{i+1/2}\}$  максимальный шаг сетки. Будем говорить, что выражение (5.10) имеет порядок аппроксимации  $p$ , если  $\|R\| = \mathcal{O}(h^p)$ . Отметим, что величина порядка аппроксимации, вообще говоря, зависит от выбора нормы сеточной функции, поскольку для различных норм  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  величины  $\|R\|_1$  и  $\|R\|_2$  в общем случае будут иметь различные порядки по  $h$ . Построить аппроксимационные выражения для производных можно различными способами.

Рассмотрим сначала, для простоты, равномерную сетку. Тогда для аппроксимации производных можно воспользоваться разложениями в ряд Тейлора:

$$u_{i+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right)_i. \quad (5.11)$$

Имеем, например:

$$u_{i+1} = u_i + h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.12)$$

Разрешая это уравнение относительно  $(\partial u / \partial x)_i$ , получим:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (5.13)$$

Таким образом, мы получили аппроксимационное выражение для первой производной с ошибкой 1-го порядка по  $h$ . Первое слагаемое в правой части (5.13) называется *правой разностью*. Аналогично, раскладывая в ряд  $u_{i-1}$  в окрестности точки  $x_i$ , получим:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (5.14)$$

Первое слагаемое в правой части этого соотношения называется *левой разностью*.

Можно получить аппроксимацию более высокого порядка. Для этого удобно воспользоваться следующей методикой. Положим:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = au_{i-1} + bu_i + cu_{i+1} + \mathcal{O}(h^p) \quad (5.15)$$

и будем искать такие коэффициенты  $a, b, c$ , чтобы значение  $p$  было максимальным. Раскладывая в ряд  $u_{i-1}$  и  $u_{i+1}$ , получим:

$$\begin{aligned}
 au_{i-1} + bu_i + cu_{i+1} &= (a + b + c)u_i + (c - a)h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \\
 &+ (a + c) \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + (c - a) \frac{h^3}{6} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \dots \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Положим  $a + b + c = 0$ ,  $(c - a)h = 1$ , находим:  $a = c - 1/h$ ,  $b = -2c + 1/h$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
 au_{i-1} + bu_i + cu_{i+1} &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \\
 &+ \left( 2c - \frac{1}{h} \right) \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{h^2}{6} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \dots \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при выборе  $2c = 1/h$  второй член в правой части (5.17) исчезает и мы получаем единственное аппроксимационное выражение для  $(\partial u / \partial x)_i$  второго порядка по  $h$ :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.18)$$

Первое слагаемое в правой части (5.18) называется *центральной* разностью. Для второй производной использование того же приема приводит к выражению

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.19)$$

С помощью описанной методики неопределенных коэффициентов можно строить аппроксимационные формулы на большем количестве узлов как на равномерных, так и на неравномерных сетках. Рассмотрим, например, аппроксимационное выражение для производной первого порядка на неравномерной сетке. Раскладывая в ряд Тейлора, получим:

$$\begin{aligned}
 au_{i-1} + bu_i + cu_{i+1} &= (a + b + c)u_i + \\
 &+ (c\Delta x_{i+1/2} - a\Delta x_{i-1/2}) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \\
 &+ \frac{1}{2} (a\Delta x_{i-1/2}^2 + c\Delta x_{i+1/2}^2) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \\
 &+ \frac{1}{6} (c\Delta x_{i+1/2}^3 - a\Delta x_{i-1/2}^3) \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \\
 &+ \mathcal{O}(\Delta x_{i-1/2}^4 + \Delta x_{i+1/2}^4). \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Полагая здесь

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ c\Delta x_{i+1/2} - a\Delta x_{i-1/2} &= 1, \\ a\Delta x_{i-1/2}^2 + c\Delta x_{i+1/2}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_{i-1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} \frac{1}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}} u_{i+1} + \frac{\Delta x_{i+1/2} - \Delta x_{i-1/2}}{\Delta x_{i+1/2} \Delta x_{i-1/2}} u_i - \\ - \frac{\Delta x_{i+1/2}}{\Delta x_{i-1/2}} \frac{1}{\Delta x_{i+1/2} + \Delta x_{i-1/2}} u_{i-1} = \\ = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \mathcal{O}(\Delta x_{i-1/2} \Delta x_{i+1/2}). \end{aligned} \quad (5.22)$$

В частном случае равномерной сетки, когда  $\Delta x_{i-1/2} = \Delta x_{i+1/2} = h$ , приходим к уже известному нам выражению с центральной разностью (5.18).

Покажем, что порядки аппроксимации для производных, вообще говоря, зависят от выбора нормы сеточной функции. Для этого рассмотрим аппроксимацию первой производной  $(\partial u / \partial x)_i$  на неравномерной сетке. Выберем аппроксимационное выражение в следующем виде:

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + R_i. \quad (5.23)$$

Остаточный член  $R$  можно оценить с помощью разложения (5.23) в ряд Тейлора:

$$R_i = \frac{1}{2}(\Delta x_{i+1/2} - \Delta x_{i-1/2}) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \mathcal{O}(h^2), \quad (5.24)$$

где  $h = \max\{\Delta x_{i+1/2}\}$ . Рассмотрим первую норму

$$\|R\| = \max_i |R_i|. \quad (5.25)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|R\| &\leq \frac{M}{2} \max_i |\Delta x_{i+1/2} - \Delta x_{i-1/2}| + \mathcal{O}(h^2) \leq \\ &\leq \frac{M}{2} \max_i (|\Delta x_{i+1/2}| + |\Delta x_{i-1/2}|) + \mathcal{O}(h^2) \leq \\ &\leq \frac{M}{2} 2h + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h), \end{aligned} \quad (5.26)$$

где обозначено

$$M = \max_i \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i. \quad (5.27)$$

Таким образом, в этой норме ошибка имеет 1-й порядок по  $h$ .

Рассмотрим другую норму:

$$\|R\| = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_{i+1/2} \left| \sum_{k=1}^i \Delta x_k R_k \right|, \quad (5.28)$$

где  $\Delta x_i = (\Delta x_{i-1/2} + \Delta x_{i+1/2})/2$ . Нетрудно проверить, что это выражение действительно удовлетворяет всем аксиомам нормы. Имеем:

$$\begin{aligned} \|R\| &\leq \frac{M}{4} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_{i+1/2} \left| \sum_{k=1}^i (\Delta x_{k+1/2}^2 - \Delta x_{k-1/2}^2) \right| + \mathcal{O}(h^2) = \\ &= \frac{M}{4} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_{i+1/2} |\Delta x_{i+1/2}^2 - \Delta x_{1/2}^2| + \mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (5.29)$$

В этой норме ошибка оказывается второго порядка. Отметим, что в случае равномерной сетки и в первой и во второй нормах ошибка аппроксимации имеет второй порядок.

**5.2.2. Метод конечных объемов.** Рассмотрим гиперболическую систему консервативных уравнений с учетом источниковых членов:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{R}. \quad (5.30)$$

Проинтегрируем это уравнение по времени на отрезке  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$  и по пространственной переменной на отрезке  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  (см. рис. 5.5). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \mathbf{R} \right) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\mathbf{u}(x, t^{n+1}) - \mathbf{u}(x, t^n)] dx + \\ &+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} [\mathbf{F}(x_{i+1}, t) - \mathbf{F}(x_i, t)] dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \mathbf{R}(x, t). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Обозначим

$$\Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta t^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n \quad (5.32)$$

и определим средние значения величин

$$\mathbf{u}_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta x_{i+1/2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{u}(x, t^n) dx, \quad (5.33)$$

$$\mathbf{F}_i^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t^{n+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(x_i, t) dt, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{R}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta x_{i+1/2} \Delta t^{n+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \mathbf{R}(x, t). \quad (5.35)$$

Величина  $\mathbf{u}_{i+1/2}^n$  представляет собой среднее значение  $\mathbf{u}(x, t)$  по объему ячейки, вычисленное в момент времени  $t^n$ . Поток  $\mathbf{F}_i^{n+1/2}$  определяется как среднее значение  $\mathbf{F}(x, t)$  по времени, вычисленное в точке  $x_i$ . Наконец,  $\mathbf{R}_{i+1/2}^{n+1/2}$  равно среднему значению  $\mathbf{R}(x, t)$  по объему ячейки и по времени.

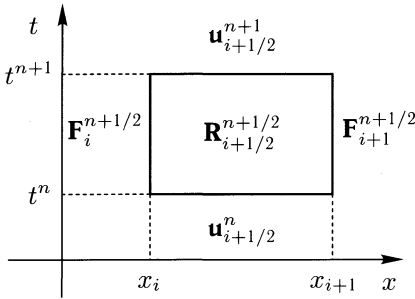


Рис. 5.5. Построение схемы с помощью интегро-интерполяционного метода

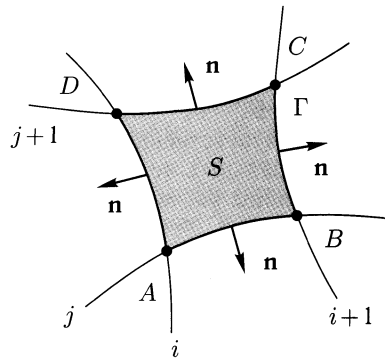


Рис. 5.6. Участок расчетной сетки в методе конечных объемов

Используя определения сеточных величин  $\mathbf{u}_{i+1/2}^n$ ,  $\mathbf{F}_i^{n+1/2}$  и  $\mathbf{R}_{i+1/2}^{n+1/2}$  в соотношении (5.31) и учитывая, что его левая часть обращается в нуль в силу исходного уравнения (5.30), получаем:

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1} - \mathbf{u}_{i+1/2}^n \right) \Delta x_{i+1/2} + \left( \mathbf{F}_{i+1}^{n+1/2} - \mathbf{F}_i^{n+1/2} \right) \Delta t^{n+1/2} = \\ & = \mathbf{R}_{i+1/2}^{n+1/2} \Delta x_{i+1/2} \Delta t^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Поделив обе части в (5.36) на  $\Delta x_{i+1/2} \Delta t^{n+1/2}$ , приходим к следующей конечно-разностной схеме:

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1} - \mathbf{u}_{i+1/2}^n}{\Delta t^{n+1/2}} + \frac{\mathbf{F}_{i+1}^{n+1/2} - \mathbf{F}_i^{n+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}} = \mathbf{R}_{i+1/2}^{n+1/2}. \quad (5.37)$$



Полученная схема (5.37) является базовой для большинства методов численного решения гиперболических систем уравнений. Различные методы отличаются друг от друга лишь правилами вычисления потоков  $\mathbf{F}_i^{n+1/2}$  через границы ячеек.

Для построения (5.37) мы использовали интегро-интерполяционный метод. Этот метод позволяет получать разностные схемы, которые обладают свойством *консервативности*. Это означает, что в этой схеме точно удовлетворяется некоторый закон сохранения. Нетрудно убедиться, что схема (5.37) является консервативной. Действительно, просуммируем соотношение (5.36) по всем ячейкам сетки. Получим:

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t^{n+1/2}} + \mathbf{F}_R^{n+1/2} - \mathbf{F}_L^{n+1/2} = \sum_i \mathbf{R}_{i+1/2}^{n+1/2} \Delta x_{i+1/2}, \quad (5.38)$$

где обозначено

$$\mathbf{U}^n = \sum_i \mathbf{u}_{i+1/2}^n \Delta x_{i+1/2}, \quad (5.39)$$

а  $\mathbf{F}_R^{n+1/2}$  и  $\mathbf{F}_L^{n+1/2}$  — потоки через правую и левую границы расчетной области соответственно. Если источники отсутствуют ( $\mathbf{R} = 0$ ), изменение интегральных величин  $\mathbf{U}$  определяется только разностью потоков через границы расчетной области:

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t^{n+1/2}} = -(\mathbf{F}_R^{n+1/2} - \mathbf{F}_L^{n+1/2}). \quad (5.40)$$

В частном случае, когда  $\mathbf{F}_R = 0$ ,  $\mathbf{F}_L = 0$ , интегральные величины  $\mathbf{U}$  сохраняют постоянное значение.

Разновидностью интегро-интерполяционного метода является метод конечных (контрольных) объемов. Однако в отличие от описанного выше метода он более физичен по существу. Рассмотрим применение этого метода на примере системы двумерных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{R}. \quad (5.41)$$

Выберем в расчетной области некоторую конечную подобласть (контрольный объем)  $S$ , ограниченную контуром  $\Gamma$  (см. рис. 5.6). Проинтегрируем уравнение (5.41) по области  $S$ , находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{u} dS + \oint_{\Gamma} \mathbf{F} dy - \mathbf{G} dx = \int_S \mathbf{R} dS. \quad (5.42)$$

В случае криволинейной сетки в качестве области  $S$  можно взять ячейку, ограниченную координатными линиями, которые соответствуют индексам  $i$ ,  $i + 1$  и  $j$ ,  $j + 1$ . Такая ячейка представляет собой

четырёхугольник  $ABCD$ . Для аппроксимации уравнения (5.42) в области  $S$  используем усредненные значения функции  $\mathbf{u}$  по объему области  $S$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(S\mathbf{u}) + (\mathbf{H}_{AB} + \mathbf{H}_{BC} + \mathbf{H}_{CD} + \mathbf{H}_{DA}) = S\mathbf{R}, \quad (5.43)$$

где  $S$  — площадь выделенной ячейки,  $\mathbf{H}_{AB}$ ,  $\mathbf{H}_{BC}$ ,  $\mathbf{H}_{CD}$ ,  $\mathbf{H}_{DA}$  — потоки через соответствующие стороны четырёхугольника  $ABCD$ . Мы получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений (5.43), описывающую эволюцию во времени величин  $S\mathbf{u}$ . Поэтому остается определить дискретизацию временной координаты и потоки  $\mathbf{H}$ .

Потоки можно определить с помощью следующих выражений:

$$\mathbf{H}_{AB} = \mathbf{F}_{AB}\Delta y_{AB} - \mathbf{G}_{AB}\Delta x_{AB}, \quad (5.44)$$

где  $\mathbf{F}_{AB}$ ,  $\mathbf{G}_{AB}$  — средние значения  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  по стороне  $AB$ ,

$$\Delta x_{AB} = x_A - x_B, \quad \Delta y_{AB} = y_A - y_B. \quad (5.45)$$

Аналогично определяются потоки через остальные границы. В случае однородной сетки в декартовой системе координат эти выражения переходят в обычные конечные разности.

Метод конечных объемов позволяет легко учитывать сложную геометрию расчетной области, не вводя при этом явно криволинейные координаты. Кроме того метод консервативен по построению и основан на законах сохранения макроскопических величин. Это бывает важно, когда рассматриваемое явление не описывается полностью дифференциальными уравнениями. Такие ситуации, например, могут возникать в случаях, когда имеют дело с сильно разреженными газами или с ударными волнами. Очевидно, что рассмотренный метод вывода схемы для двумерного случая легко обобщается и на трехмерный случай.

**5.2.3. Конечно-разностные задачи.** Запишем исходную задачу в виде

$$\widehat{L}u = f, \quad (5.46)$$

где  $\widehat{L}$  — некоторый заданный (вообще говоря, нелинейный) дифференциальный оператор,  $u$  — неизвестная функция, описывающая искомого решение,  $f$  — функция, описывающая входные данные задачи (начальные и граничные условия). В общем случае величины  $u$  и  $f$  являются многокомпонентными функциями, заданными в некоторой расчетной области. Задача (5.46) должна быть корректно поставленной. Это означает, что решение  $u$  должно непрерывным образом зависеть от начальных данных.

Введем в расчетной области сетку, характеризующуюся параметром дискретизации  $h$ . В случае многомерного оператора  $\widehat{L}$  этих параметров может быть несколько. Например, в случае нестационарных одномерных задач сетка будет характеризоваться временным шагом  $\Delta t$

и пространственным шагом  $\Delta x$ <sup>1)</sup>. Обозначим через  $u_h$  набор значений искомого решения  $u$  в узлах сетки. Аналогичную величину  $f_h$  введем для функции правой части  $f$ .

Рассмотрим разностную задачу

$$\widehat{L}_h v_h = f_h. \quad (5.47)$$

Здесь  $\widehat{L}_h$  — некоторый разностный оператор, а  $v_h$  — неизвестная сеточная функция. Возникает вопрос: как соотносятся между собой исходная задача (5.46) и разностная задача (5.47). Для ответа на него подставим значение сеточной функции  $u_h$  в разностную задачу (5.47). Ясно, что в результате действия оператора  $\widehat{L}_h$  на  $u_h$  получится, вообще говоря, не  $f_h$ , а что-то другое. Имеем

$$\widehat{L}_h u_h = f_h + \delta f_h, \quad (5.48)$$

где

$$\delta f_h = \widehat{L}_h u_h - \widehat{L}_h v_h, \quad (5.49)$$

Величина  $\delta f_h$  представляет собой *невязку* или погрешность аппроксимации разностной задачи. Она определяет степень соответствия разностной задачи (5.47) и исходной задачи (5.46). Попробуем выразить это в более точных терминах.

Введем следующие определения. Схема (5.47) называется *согласованной* с исходной задачей (5.46), если при  $h \rightarrow 0$  норма невязки

$$\|\delta f_h\| = \left\| \widehat{L}_h u_h - \widehat{L}_h v_h \right\| \rightarrow 0. \quad (5.50)$$

Будем говорить, что схема (5.47) *аппроксимирует* исходную задачу (5.46) с *порядком аппроксимации*  $p$ , если при  $h \rightarrow 0$

$$\|\delta f_h\| \leq c_1 h^p, \quad (5.51)$$

где  $c_1$  — некоторая положительная константа, не зависящая от  $h$ . Если свойство согласованности выполнено, то это говорит о том, что разностная схема (5.47) имеет определенное отношение к исходной задаче (5.46). Именно, при неограниченном измельчении сетки, соответствующем пределу при  $h \rightarrow 0$ , разностная задача переходит в исходную задачу.

Решение разностной задачи (5.47) *сходится* к решению исходной задачи (5.46), если при  $h \rightarrow 0$

$$\|u_h - v_h\| \rightarrow 0. \quad (5.52)$$

<sup>1)</sup> В случае переменных временного и пространственного шагов в качестве параметров сетки можно рассматривать их максимальные значения.

Схема (5.47) имеет *порядок точности*  $p$ , если при  $h \rightarrow 0$

$$\|u_h - v_h\| \leq c_2 h^p, \quad (5.53)$$

где константа  $c_2 > 0$  не зависит от  $h$ . Аппроксимация еще не означает сходимости, однако она необходима для нее.

Схема (5.47) называется *устойчивой*, если можно найти такие числа  $h_0 > 0$  и  $\delta > 0$ , что для любого  $h < h_0$  и произвольной сеточной функции  $\varepsilon_h$ , норма которой  $\|\varepsilon_h\| < \delta$ , возмущенная разностная задача

$$\widehat{L}_h z_h = f_h + \varepsilon_h \quad (5.54)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\|z_h - v_h\| \leq c_3 \|\varepsilon_h\|, \quad (5.55)$$

где  $c_3 > 0$  — не зависящая от  $h$  константа. Это определение имеет простой смысл: решение разностной задачи не должно сильно изменяться при небольшом изменении входных данных. Понятие устойчивости разностной задачи является аналогом понятия корректности исходной задачи.

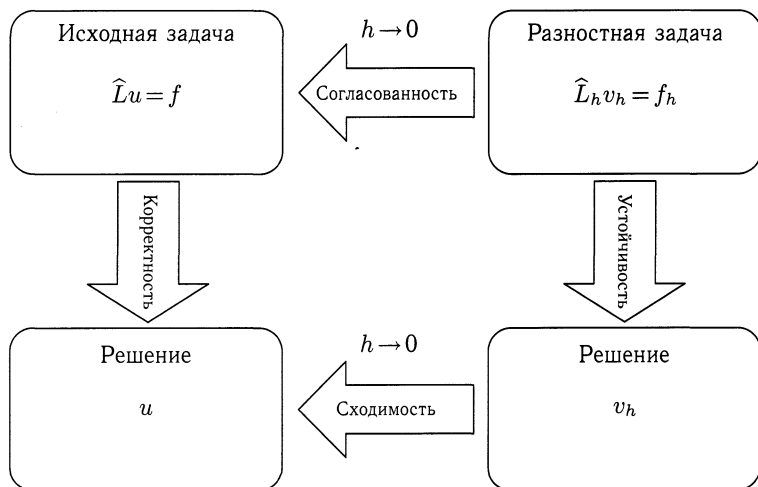


Рис. 5.7. Взаимные отношения между понятиями согласованности, устойчивости и сходимости разностных задач.

Наглядная схема взаимных отношений между введенными понятиями согласованности, сходимости и устойчивости разностных задач показана на рис. 5.7.

Для линейных схем можно дать эквивалентную формулировку определения устойчивости, которая выражается в виде следующего

критерия. Разностная схема (5.47) с линейным оператором  $\widehat{L}_h$  устойчива тогда и только тогда, когда при любом  $f_h$  она имеет единственное решение  $v_h$ , удовлетворяющее неравенству

$$\|v_h\| \leq c_4 \|f_h\|, \quad c_4 > 0. \quad (5.56)$$

Докажем сначала необходимость этого критерия. Пусть при некоторых  $h_0 > 0$ ,  $\delta > 0$  и для произвольных  $h < h_0$ ,  $\varepsilon_h$ ,  $\|\varepsilon_h\| < \delta$  существуют единственные решения разностных задач

$$\widehat{L}_h z_h = f_h + \varepsilon_h, \quad \widehat{L}_h v_h = f_h. \quad (5.57)$$

Обозначим  $w_h = z_h - v_h$ . Вычитая второе уравнение в (5.57) из первого и пользуясь свойством линейности оператора  $\widehat{L}_h$ , находим:

$$\widehat{L}_h w_h = \varepsilon_h, \quad (5.58)$$

причем в силу определения устойчивости с учетом неравенства (5.57) должно быть

$$\|w_h\| < c_3 \|\varepsilon_h\|. \quad (5.59)$$

Изменим немного обозначения. Мы получили, что для любых  $h < h_0$  и  $f_h$ ,  $\|f_h\| < \delta$  разностная задача

$$\widehat{L}_h v_h = f_h \quad (5.60)$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\|v_h\| < c_3 \|f_h\|. \quad (5.61)$$

Однако это утверждение останется справедливым в случае  $\|f_h\| \geq \delta$ .

В самом деле, умножим (5.60) на  $\delta/(2\|f_h\|)$  и обозначим

$$\tilde{v}_h = \frac{\delta}{2\|f_h\|} v_h, \quad \tilde{f}_h = \frac{\delta}{2\|f_h\|} f_h. \quad (5.62)$$

Получим уравнение

$$\widehat{L}_h \tilde{v}_h = \tilde{f}_h, \quad (5.63)$$

где

$$\|\tilde{f}_h\| = \frac{\delta}{2\|f_h\|} \|f_h\| = \frac{\delta}{2} < \delta. \quad (5.64)$$

Поэтому разностная задача (5.63) имеет единственное решение, норма которого удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{v}_h\| \leq c_3 \|\tilde{f}_h\|. \quad (5.65)$$

Отсюда следует необходимость критерия.

Докажем теперь достаточность сформулированного критерия. Пусть при всех  $h < h_0$ ,  $f_h$  задача (5.47) имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству (5.56). Тогда остается доказать, что для решения возмущенной задачи справедливо

$$\|z_h - v_h\| \leq c_3 \|\varepsilon_h\|. \quad (5.66)$$

Таким образом, мы имеем две разностные задачи:

$$\widehat{L}_h z_h = f_h + \varepsilon_h, \quad \widehat{L}_h v_h = f_h. \quad (5.67)$$

Отсюда находим

$$\widehat{L}_h(z_h - v_h) = \varepsilon_h. \quad (5.68)$$

Эта разностная задача также имеет единственное решение, которое по условию должно удовлетворять оценке

$$\|z_h - v_h\| \leq c_4 \|\varepsilon_h\|. \quad (5.69)$$

Это доказывает достаточность критерия. Использование на практике доказанного критерия для анализа устойчивости линейных схем оказывается более удобным, чем непосредственное использование определения устойчивости.

Теперь можно сформулировать основной результат этого раздела в виде следующей теоремы о сходимости. Пусть разностная схема (5.47) аппроксимирует задачу (5.46) с порядком  $p$  и является устойчивой. Тогда решение  $v_h$  сходится к решению исходной задачи  $u$ , причем

$$\|u_h - v_h\| \leq c_1 c_3 h^p. \quad (5.70)$$

Для доказательства будем рассматривать  $u_h$  как возмущенное решение  $v_h$ . Тогда  $\varepsilon_h = \delta f_h$  и

$$\|u_h - v_h\| \leq c_3 \|\delta f_h\| \leq c_1 c_3 h^p, \quad (5.71)$$

что и требовалось доказать. Таким образом, доказанная теорема утверждает, что из согласованности и устойчивости следует сходимость. Теорема справедлива как для линейных, так и для нелинейных задач.

Определение устойчивости, которое было дано выше, сформулировано таким образом, чтобы при наличии согласованности получить необходимое и достаточное условие для сходимости. Однако в отличие от согласованности и сходимости, понятие устойчивости не использует информацию об исходной задаче, а является чисто внутренним свойством разностной схемы. Поэтому ей уделяется большое внимание при анализе разностных задач. В следующем параграфе мы рассмотрим различные методы анализа устойчивости.

**5.2.4. Метод расщепления.** При помощи простого приема расщепления оператора [201] можно сложную задачу разбить на более простые. В результате все индивидуальные процессы можно рассчитывать независимо друг от друга, а изменения, получаемые в результате расчета отдельных частных процессов, суммировать. Отдельные процессы можно моделировать своими (наилучшими) независимыми методами.

Общий качественный критерий справедливости такого подхода заключается в том, что величины физических переменных для любого отдельного процесса не должны изменяться слишком сильно за шаг по времени. Идея схем расщепления основана на следующем. Рассмотрим задачу вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \widehat{L}u, \quad (5.72)$$

где  $\widehat{L}$  — некоторый не зависящий явным образом от времени дифференциальный оператор. Будем считать, что значение  $u(t^n)$  уже известно и необходимо найти значение  $u(t^{n+1})$  на следующем временном слое  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . Из исходного уравнения (5.72) можно получить следующие выражения для производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \widehat{L} \frac{\partial u}{\partial t} = \widehat{L}^2 u, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \widehat{L} \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}} = \widehat{L}^k u. \quad (5.73)$$

Поэтому решение задачи (5.72) в момент времени  $t^{n+1}$  можно представить в виде

$$u(t^{n+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \left. \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{t^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \widehat{L}^k u(t^n). \quad (5.74)$$

Можно формально ввести оператор

$$e^{\Delta t \widehat{L}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \widehat{L}^k. \quad (5.75)$$

Тогда полученное решение (5.74) переписывается в более компактном виде:

$$u(t^{n+1}) = e^{\Delta t \widehat{L}} u(t^n). \quad (5.76)$$

Предположим, что оператор  $\widehat{L}$  можно представить в виде суммы двух операторов:  $\widehat{L} = \widehat{A} + \widehat{B}$ . В этом случае выражение (5.76) принимает вид

$$u(t^{n+1}) = e^{\Delta t (\widehat{A} + \widehat{B})} u(t^n). \quad (5.77)$$

Оператор  $e^{\Delta t (\widehat{A} + \widehat{B})}$  переводит решение нерасщепленной задачи (5.72) с одного временного слоя  $t^n$  на следующий слой  $t^{n+1}$ . При этом операторы  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$  действуют на начальное значение  $u(t^n)$  совместно.

Их действие никак не разделено. Возникает вопрос: можно ли разделить их действие так, чтобы они действовали независимо друг от друга?

Наряду с исходной задачей (5.72) рассмотрим расщепленную задачу на том же отрезке времени  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \hat{A}v, & v(t^n) &= u(t^n), \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \hat{B}w, & w(t^n) &= v(t^{n+1}).\end{aligned}\tag{5.78}$$

Решение этой задачи можно записать в виде:

$$\begin{aligned}v(t^{n+1}) &= e^{\Delta t \hat{A}} u(t^n), \\ w(t^{n+1}) &= e^{\Delta t \hat{B}} v(t^{n+1}) = e^{\Delta t \hat{B}} e^{\Delta t \hat{A}} u(t^n).\end{aligned}\tag{5.79}$$

Для того, чтобы понять как соотносятся между собой решения расщепленной (5.78) и нерасщепленной (5.77) задач, найдем их разность. Имеем:

$$\begin{aligned}u(t^{n+1}) - w(t^{n+1}) &= \left( e^{\Delta t (\hat{A} + \hat{B})} - e^{\Delta t \hat{B}} e^{\Delta t \hat{A}} \right) u(t^n) = \\ &= \frac{\Delta t^2}{2} \left( \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \right) u(t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^3).\end{aligned}\tag{5.80}$$

Следует заметить, что в случае, когда операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  являются перестановочными, все слагаемые (а не только первое) в правой части (5.80) обращаются в нуль. Следовательно, в случае коммутирующих операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  решения расщепленной и нерасщепленной задач совпадают. В противном случае некоммутирующих операторов решения этих задач отличаются на величину порядка  $\Delta t^2$ . Если разностные схемы для численного решения этих задач имеют порядок аппроксимации не выше этого, то с точностью до порядка аппроксимации они будут равносильны. Данный подход очевидным образом обобщается на случай расщепления на произвольное число операторов.

Таким образом, в общем случае при переходе от начального временного слоя  $t^0 = 0$  к следующему слою  $t^1 = \Delta t$  решение расщепленной задачи будет отличаться от решения нерасщепленной задачи на величину порядка  $\Delta t^2$ . Когда мы дойдем до слоя  $t^n = n\Delta t$ , то решения будут отличаться уже на величину порядка  $n\Delta t^2 = \mathcal{O}(\Delta t)$ . Поэтому даже если мы аппроксимируем расщепленную задачу (5.78) разностной схемой, например, второго порядка аппроксимации по  $\Delta t$ , то она будет все равно иметь первый порядок точности по отношению к исходной задаче (5.72). Это означает, что при решении задачи (5.72) с помощью описанного метода расщепления нет смысла использовать схемы высокого порядка аппроксимации по  $\Delta t$  при построении разностных схем для расщепленной задачи (5.78).



Стрэнг показал [202], что с помощью несложного переопределения расщепленной задачи можно получить схему второго порядка точности по  $\Delta t$ . Идея этого подхода заключается в следующем. Сначала на полуинтервале  $t^n \leq t \leq t^n + \Delta t/2$  решается задача с оператором  $\hat{A}$ , затем на полном интервале  $t^n \leq t \leq t^n + \Delta t$  решается задача с оператором  $\hat{B}$ , наконец, на полуинтервале  $t^n + \Delta t/2 \leq t \leq t^n + \Delta t$  снова решается задача с оператором  $\hat{A}$ . Разность решений нерасщепленной и расщепленной задач в этом случае будет определяться выражением:

$$\left( e^{\Delta t(\hat{A}+\hat{B})} - e^{\frac{1}{2}\Delta t\hat{A}} e^{\Delta t\hat{B}} e^{\frac{1}{2}\Delta t\hat{A}} \right) u(t^n) = \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (5.81)$$

Если метод расщепления немного модифицировать, то можно построить экономичные неявные схемы [203, 204]. Рассмотрим схему следующего вида:

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \hat{A} [\sigma \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \sigma) \mathbf{u}^n] = \mathbf{R}^n. \quad (5.82)$$

Ее можно переписать в каноническом виде:

$$\hat{B} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \hat{A} \mathbf{u}^n = \mathbf{R}^n, \quad (5.83)$$

где

$$\hat{B} = 1 + \Delta t \sigma \hat{A}. \quad (5.84)$$

Допустим, что

$$\hat{A} = \sum_{\alpha=1}^P \hat{A}_\alpha. \quad (5.85)$$

Наряду с оператором  $\hat{B}$  рассмотрим факторизованный оператор  $\hat{F}$ ,

$$\hat{F} = \prod_{\alpha=1}^P \hat{B}_\alpha = \prod_{\alpha=1}^P (1 + \Delta t \sigma \hat{A}_\alpha). \quad (5.86)$$

Очевидно, что при этом

$$\hat{F} = \hat{B} + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (5.87)$$

В результате такого способа расщепления приходим к следующей последовательности задач:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^n &= -\hat{A} \mathbf{u}^n + \mathbf{R}^n, \\ \hat{B}_\alpha \mathbf{w}^{n+\frac{\alpha}{P}} &= \mathbf{w}^{n+\frac{\alpha-1}{P}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, P, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{w}^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Операторы  $\widehat{A}_\alpha$  можно выбрать таким образом, чтобы отдельные схемы в (5.88) были экономичными. В результате, в целом, получается экономичная неявная схема. Если оператор  $\widehat{A}$  является положительным и самосопряженным, то исходная нерасщепленная схема (5.82) будет устойчивой при условии [203]

$$\sigma > \frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta t \|\widehat{A}\|}. \quad (5.89)$$

Расщепленная схема (5.88) устойчива, если устойчива нерасщепленная схема (5.82) и все операторы  $\widehat{A}_\alpha$  являются самосопряженными, положительными и взаимно перестановочными:  $\widehat{A}_\alpha \widehat{A}_\beta = \widehat{A}_\beta \widehat{A}_\alpha$ .

В комплексных многомерных задачах расщепление можно проводить как по пространственным направлениям, так и по физическим процессам. При расщеплении по пространственным направлениям получаем последовательность одномерных задач вдоль каждого координатного направления. При расщеплении по физическим процессам можно отдельно выделить гиперболическую подсистему и другие (негиперболические) типы процессов (диффузию, самогравитацию и т. п.).

### 5.3. Анализ устойчивости

**5.3.1. Метод дискретных возмущений.** Идея этого метода для анализа устойчивости состоит в том, что в начальный момент в численное решение вводится дискретное возмущение и прослеживается дальнейшее развитие этого возмущения [205]. Разностная схема будет устойчивой, если возмущения затухают. Это простой и прямой метод исследования устойчивости. Он соответствует методу малых возмущений, широко используемому для анализа устойчивости в механике сплошных сред. Однако полное применение этого метода возможно только для достаточно простых схем. Для более сложных схем такой анализ провести до конца не удается. С помощью этого метода можно исследовать влияние граничных условий в разностной задаче, что затруднительно или вообще невозможно сделать с помощью других методов. Впервые метод дискретных возмущений использован в работе Тома и Апельта [206] и в дальнейшем развивался Томаном и Шевчиком [207].

В качестве примера рассмотрим уравнение адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.90)$$

и конечно-разностную схему для него

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (5.91)$$

на однородной сетке с шагом  $\Delta x$  и с фиксированным временным шагом  $\Delta t$ . Подчеркнем, что в этой схеме для аппроксимации пространственной производной используется левая разность.

Возмутим решение разностной задачи (5.91) на малую величину:  $u_i^n \rightarrow u_i^n + \varepsilon_i^n$ . Как исходное так и возмущенное решения удовлетворяют схеме (5.91). Поэтому для возмущения получаем следующую разностную схему:

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} + a \frac{\varepsilon_i^n - \varepsilon_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (5.92)$$

Схема для возмущения  $\varepsilon_i^n$  получилась такой же, как и для самого решения. Это связано с тем, что схема (5.91) является линейной. Для нелинейной задачи схема для возмущения уже не будет совпадать с исходной схемой. Кроме того, мы не учитывали граничные условия, которые в общем случае также будут различаться для исходной величины и для возмущения.

Перепишем схему (5.92) в виде

$$\varepsilon_i^{n+1} = (1 - C)\varepsilon_i^n + C\varepsilon_{i-1}^n, \quad (5.93)$$

где введено число Куранта

$$C = \frac{a\Delta t}{\Delta x}. \quad (5.94)$$

Возьмем такое начальное возмущение, чтобы

$$\|\varepsilon_i^0\| = \max_i |\varepsilon_i^0| = \varepsilon^0. \quad (5.95)$$

Тогда для устойчивости нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$\|\varepsilon_i^n\| \leq \|\varepsilon_i^0\| = \varepsilon^0 \quad (5.96)$$

для любого  $n$ . Простой анализ схемы (5.93) показывает, что для получения максимальной величины модуля  $\varepsilon_i^1$  при условии, что  $\varepsilon_i^0 = \varepsilon^0$ , нужно выбрать  $\varepsilon_{i\pm 1}^0 = -\varepsilon^0$ . Это означает, что начальное возмущение является сеточной функцией  $\varepsilon_i^0 = (-1)^i \varepsilon^0$ , осциллирующей с амплитудой  $\varepsilon^0$ . Покажем, что на следующем временном слое такой вид зависимости не изменится. Действительно,

$$\varepsilon_i^1 = (-1)^i (1 - 2C)\varepsilon^0 = (-1)^i \varepsilon^1, \quad (5.97)$$

где амплитуда возмущения на слое  $n = 1$  равна

$$\varepsilon^1 = (1 - 2C)\varepsilon^0. \quad (5.98)$$

Продолжая эти рассуждения, приходим к следующим выводам. На слое  $n$  возмущения имеют осциллирующий характер:

$$\varepsilon_i^n = (-1)^n \varepsilon^n, \quad (5.99)$$

при этом амплитуда

$$\varepsilon^n = (1 - 2C)\varepsilon^{n-1} = \dots = (1 - 2C)^n \varepsilon^0. \quad (5.100)$$

Норма возмущения на  $n$ -м временном слое

$$\|\varepsilon_i^n\| = |1 - 2C|^n \varepsilon^0. \quad (5.101)$$

Таким образом, возмущение затухает экспоненциально при выполнении условия

$$-1 \leq 1 - 2C \leq 1. \quad (5.102)$$

В случае  $C \geq 0$  правое неравенство удовлетворяется автоматически и является результатом требования *статической* устойчивости. При невыполнении этого условия схема будет неустойчивой вне зависимости от выбора шага  $\Delta t$ . Поскольку временной шаг  $\Delta t$  и пространственный шаг  $\Delta x$  являются положительными величинами, то условие статической устойчивости выполняется в случае  $a \geq 0$ .

Левое неравенство дает условие  $C \leq 1$ , которое эквивалентно следующему условию для временного шага:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}. \quad (5.103)$$

Это условие *динамической* устойчивости налагает ограничение на величину максимального шага по времени  $\Delta t$ . В литературе оно получило название условия Куранта–Фридрихса–Леви (КФЛ) [208]. При невыполнении условия (5.103) ошибки, возникшие на каком-либо этапе расчета, будут экспоненциально расти со временем и постепенно «забьют» решение. Однако такая неустойчивость может быть устранена за счет уменьшения шага  $\Delta t$ .

**5.3.2. Дифференциальные приближения.** Функции, описывающие решения исходной дифференциальной и разностной задач, принадлежат разным пространствам. Это порождает определенные трудности при анализе свойств разностных схем. Однако можно рассматривать разностные операторы в одном и том же пространстве. Будем считать, что разностные схемы удовлетворяются функциями непрерывного аргумента в каждой точке расчетной области. Обычно ограничиваются рассмотрением уравнений, в которых в разложении в ряд Тейлора в проекции точного решения на сетку оставлены члены, порядок которых совпадает с порядком аппроксимации схемы. Получающиеся при этом уравнения называют первым дифференциальным приближением. Анализ устойчивости схемы затем проводится на основе анализа устойчивости получающегося дифференциального уравнения. Этот метод был предложен А.И. Жуковым в 1950-х годах, а затем был развит

Хертом [209], а также Яненко и Шокиным [210]. Хороший обзор этого метода можно найти в книге Давыдова и Скотникова [211].

Рассмотрим применение метода дифференциальных приближений для анализа устойчивости схемы (5.91), аппроксимирующей уравнение адвекции (5.90). С помощью разложения в ряды Тейлора находим:

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \\ \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2).\end{aligned}\tag{5.104}$$

Подставляя эти разложения в схему (5.91), получаем следующее уравнение гиперболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2).\tag{5.105}$$

Из полученного уравнения последовательно находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -a \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} &= -a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x).\end{aligned}\tag{5.106}$$

Используя найденные соотношения, можно полученное дифференциальное приближение гиперболического типа (5.105) привести к параболическому типу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2),\tag{5.107}$$

где

$$D = \frac{a\Delta x}{2} \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right).\tag{5.108}$$

Это уравнение имеет устойчивые решения в случае, когда коэффициент диффузии  $D \geq 0$ . Это дает два условия устойчивости разностной схемы (5.91):  $a \geq 0$  и условие КФЛ (5.103). Таким образом, применительно к схеме (5.91) метод дифференциального приближения приводит к таким же условиям устойчивости, что и метод дискретных возмущений.

**5.3.3. Спектральный метод.** Идея спектрального метода состоит в том, что решение разностной схемы представляется в виде разложения в конечную сумму Фурье (5.5). Схема будет устойчивой, если каждая отдельная гармоника затухает. Если какие-либо гармоники будут нарастать, то схема в целом оказывается неустойчивой. Данный метод был впервые предложен Нейманом в 1944 г. По своей сути он соответствует методу нормальных мод для исследования устойчивости в механике сплошной среды.

Поясним этот метод снова на примере схемы (5.91) для уравнения адвекции (5.90). Для этого рассмотрим частное решение этой схемы в виде отдельной гармоники Фурье:

$$u_j^n = u^n e^{ikj\Delta x} = u^n e^{ij\theta}, \quad (5.109)$$

где  $\theta = k\Delta x$  — фазовый угол. Подставляя это частное решение в схему (5.91), находим:

$$u^{n+1} = [1 - C(1 - e^{-i\theta})] u^n = G(\theta)u^n. \quad (5.110)$$

Величина  $G(\theta)$  называется множителем перехода. Используя формулу  $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ , множитель перехода можно переписать в виде

$$G(\theta) = 1 - C(1 - \cos \theta) - iC \sin \theta. \quad (5.111)$$

Схема будет устойчивой, если модуль множителя перехода не будет превосходить единицу,  $|G| \leq 1$ . Действительно, в этом случае согласно (5.110) амплитуды гармоник Фурье не будут возрастать по абсолютной величине. Квадрат модуля множителя перехода

$$|G(\theta)|^2 = 1 - 4C(1 - C) \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (5.112)$$

Поэтому схема будет устойчивой, если неравенство

$$C(1 - C) \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq 0 \quad (5.113)$$

удовлетворяется при всех фазовых углах  $\theta$ . Очевидно, это выполняется в случае  $0 \leq C \leq 1$ . Здесь левое неравенство описывает условие статической устойчивости схемы, которое может удовлетворяться только при  $a \geq 0$ . Правое неравенство совпадает с условием КФЛ (5.103).

При численном решении какой-либо задачи мы, как правило, получаем приближенное решение. Компьютерные вычисления неизбежно сопровождаются появлением ошибок, связанных с погрешностью округлений (см., например, [212]). Спектральный метод позволяет провести простую классификацию ошибок, возникающих вследствие аппроксимации дифференциальных операторов конечными разностями.

Множитель перехода является комплексным числом:  $G = Ae^{i\varphi}$ , где  $A = |G|$  — амплитуда, а  $\varphi$  — фаза. Обозначим точные значения амплитуды и фазы через  $A_0$  и  $\varphi_0$ , соответственно. Тогда относи-

тельными амплитудной и фазовой ошибками разностной схемы называются значения

$$\Delta A = \frac{A - A_0}{A_0}, \quad \Delta \varphi = \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_0}. \quad (5.114)$$

Эти величины характеризуют диффузионные и дисперсионные свойства разностной схемы.

Амплитудные ошибки возникают в тех случаях, когда  $A \neq A_0$ . Если  $A < A_0$ , то возникает сглаживание решения или явление *численной диффузии*. В этом случае амплитуды коротких волн затухают быстрее, чем амплитуды длинных волн. С течением времени коротковолновая часть решения затухает и остается только длинноволновая. В случае, когда  $A > A_0$ , картина выглядит прямо противоположным образом. Коротковолновые моды начинают расти быстрее длинноволновых мод и возникает численная неустойчивость.

Фазовые ошибки возникают в случаях, когда  $\varphi \neq \varphi_0$ . Они могут проявляться в явлении *численной дисперсии*, при котором волны различной длины распространяются по сетке с различными скоростями. Эти ошибки приводят к появлению ложной ряби (нефизических осцилляций) в численном решении. При распространении локализованной массы газа все моды должны быть связаны между собой таким образом, чтобы она распространялась как единое целое. Особенно сильно фазовые ошибки проявляют себя в зоне больших градиентов, так как они в наибольшей степени влияют на коротковолновые моды. Волны минимальной длины (около 2-х ячеек) не могут даже распространяться и ведут себя подобно амплитудным ошибкам. Фазовые ошибки не всегда проявляют себя в виде численной дисперсии. Например, если все моды имеют одну и ту же фазовую ошибку, волна или локализованный профиль будут просто двигаться с первоначальной скоростью. В отличие от диффузии численная дисперсия не является самоограничивающейся и приводит к неограниченному росту фазовых ошибок. Поэтому ошибки дисперсии являются наиболее коварными. В численном решении работают оба этих эффекта. Они могут друг друга подавлять, а могут, наоборот, усиливать.

Нетрудно убедиться, что для уравнения адвекции множитель перехода равен

$$G_0 = e^{-iak\Delta t} = e^{-iC\theta}, \quad (5.115)$$

следовательно,  $A_0 = 1$ ,  $\varphi_0 = -C\theta$ . Множитель перехода  $G$  для схемы (5.91) определяется выражением (5.111). Поэтому соответствующие амплитуда и фаза

$$A = \sqrt{(1 - 2C \sin^2 \theta/2)^2 + C^2 \sin^2 \theta} \approx 1 - \frac{1}{2}C\theta^2, \quad (5.116)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{C \sin \theta}{1 - 2C \sin^2 \theta/2} \approx -C\theta - \frac{1}{6}(1 - C)(1 - 2C)\theta^2.$$

Относительные амплитудная и фазовая ошибки

$$\begin{aligned}\Delta A &= -\frac{1}{2} C \theta^2 + \mathcal{O}(\theta^3), \\ \Delta \varphi &= -\frac{1}{6}(1 - C)(1 - 2C)\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^3).\end{aligned}\tag{5.117}$$

Таким образом, в разностной схеме (5.91) во втором порядке малости по фазовому углу  $\theta$  возникают явления численной диффузии и численной дисперсии. Для анализа этих явлений рассмотрим распространение в расчетной области плоской монохроматической волны  $u(x, t) \propto e^{i(kx - \omega t)}$ , где  $k$  — волновое число,  $\omega$  — частота колебаний в волне (см., например, [213]). Подставляя это выражение в уравнение адвекции (5.90), находим точную связь между волновым числом и частотой (дисперсионное уравнение):

$$\omega = ak.\tag{5.118}$$

Это дисперсионное уравнение показывает, что в точном решении все волны, независимо от их длины, распространяются с одинаковой скоростью, равной  $a$ .

Рассмотрим теперь распространение монохроматической плоской волны на разностной сетке. Подставляя выражение  $u_j^n \propto e^{i(kx_j - \omega t^n)}$  в схему (5.91), приходим к следующему дисперсионному соотношению:

$$\frac{e^{-i\omega\Delta t} - 1}{\Delta t} + a \frac{1 - e^{-ik\Delta x}}{\Delta x} = 0.\tag{5.119}$$

Здесь частота  $\omega$  является комплексной величиной,  $\omega = \Omega + i\gamma$ . Приравнявая вещественную и мнимую части полученного соотношения и выражая затем отсюда  $\gamma$  и  $\Omega$ , находим:

$$\begin{aligned}\gamma\Delta t &= \ln \sqrt{1 - 4C(1 - C) \sin^2(k\Delta x/2)}, \\ \Omega\Delta t &= \arctg \frac{C \sin(k\Delta x)}{1 - 2C \sin^2(k\Delta x/2)}.\end{aligned}\tag{5.120}$$

Инкремент затухания  $\gamma$  описывает явление численной диффузии. В длинноволновом пределе при  $k \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ )  $\gamma \rightarrow 0$  и диффузия проявляется слабо. Максимальные ошибки, обусловленные численной диффузией, возникают в случае коротких волн, когда  $k \rightarrow \pi/\Delta x$  ( $\lambda \rightarrow 2\Delta x$ ). Поскольку частота колебаний  $\Omega \neq ak$ , то в численном решении возникает явление дисперсии. В пределе длинных волн при  $k \rightarrow 0$  частота  $\Omega \rightarrow ak$ , как в точном решении, и дисперсия исчезает. Сильнее всего она будет проявляться в случае коротких волн, когда  $k \rightarrow \pi/\Delta x$ . При этом  $\Omega \rightarrow 0$  и колебания перестают распространяться.



**5.3.4. Энергетический метод.** Мощным методом исследования устойчивости разностных схем является метод, основанный на использовании энергетических неравенств [203]. Для двухслойной схемы

$$\widehat{B} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \widehat{A}u^n = f \quad (5.121)$$

с положительными самосопряженными разностными операторами  $\widehat{A}$  и  $\widehat{B}$  с помощью этого метода удается доказать следующий критерий устойчивости. Схема (5.121) является устойчивой по начальным данным  $u^0$  и по правой части  $f$  тогда и только тогда, когда

$$\widehat{B} \geq \frac{\Delta t}{2} \widehat{A}. \quad (5.122)$$

В качестве примера рассмотрим схему Кранка–Николсона с положительным самосопряженным<sup>1)</sup> оператором  $\widehat{A}$ ,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \widehat{A}u^n + \frac{1}{2} \widehat{A}u^{n+1} = f. \quad (5.123)$$

Эту схему можно переписать в канонической форме (5.121):

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2} \widehat{A}\right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \widehat{A}u^n = f. \quad (5.124)$$

Таким образом, согласно приведенному критерию, рассматриваемая схема является безусловно устойчивой, поскольку оператор

$$\widehat{B} = 1 + \frac{\Delta t}{2} \widehat{A} \geq \frac{\Delta t}{2} \widehat{A}. \quad (5.125)$$

Применительно к разностной схеме (5.91) для уравнения адвекции (5.90) оператор  $\widehat{B} = 1$ , а оператор  $\widehat{A}$  определяется соотношением

$$(\widehat{A}u^n)_i = a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}. \quad (5.126)$$

Оператор  $\widehat{A}$  не является ни положительным, ни самосопряженным. Поэтому с помощью метода энергетических неравенств для схемы (5.91) следует получить свое условие устойчивости [188].

Для двух сеточных функций  $u_i$  и  $v_i$  определим скалярное произведение

$$(u, v) = \sum_i u_i v_i \Delta x, \quad (5.127)$$

<sup>1)</sup> Оператор  $\widehat{A}$  называется положительным, если для любого  $u$  скалярное произведение  $(\widehat{A}u, u) > (u, u)$ . Оператор  $\widehat{A}$  называется самосопряженным, если для любых  $u$  и  $v$  выполняется равенство  $(\widehat{A}u, v) = (u, \widehat{A}v)$ .

где суммирование проводится по всем узлам сетки. Соответствующая норма определяется как  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ . Имеем,

$$\begin{aligned} (\widehat{A}u, v) &= \sum_i \frac{a}{\Delta x} (u_i v_i - u_{i-1} v_i) \Delta x = \\ &= - \sum_i \frac{a}{\Delta x} (u_i v_{i+1} - u_i v_i) \Delta x = (u, \widehat{A}^* v). \end{aligned} \quad (5.128)$$

Здесь предполагалось, что на границах расчетной области сеточные функции  $u_i, v_i$  обращаются в нуль<sup>1)</sup>. Сопряженный оператор  $\widehat{A}^*$  определяется соотношением

$$(\widehat{A}^* u^n)_i = -a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}. \quad (5.129)$$

Далее, учитывая очевидное тождество

$$u_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = \frac{u_i^2 - u_{i-1}^2}{2\Delta x} + \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{2\Delta x}, \quad (5.130)$$

находим:

$$\begin{aligned} (\widehat{A}u, u) &= \frac{a}{2\Delta x} \left[ \sum_i (u_i^2 - u_{i-1}^2) \Delta x + \sum_i (u_i - u_{i-1})^2 \Delta x \right] = \\ &= \frac{a}{2} \sum_i (u_i - u_{i-1})^2 = \frac{\Delta x}{2a} \|\widehat{A}u\|^2. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Определим значение сеточных функций на промежуточном временном слое:

$$u^{n+1/2} = \frac{u^n + u^{n+1}}{2}. \quad (5.132)$$

Умножим скалярно разностную схему (5.91) на  $u^{n+1/2}$ . Имеем, с одной стороны

$$\left( \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, u^{n+1/2} \right) = \frac{\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2}{2\Delta t}, \quad (5.133)$$

с другой стороны

$$\left( \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, u^{n+1/2} \right) = - \left( \widehat{A}u^n, u^{n+1/2} \right). \quad (5.134)$$

<sup>1)</sup> Это означает, что при выводе условия устойчивости не учитывается влияние граничных условий. Следует заметить, что при использовании предыдущих методов исследования устойчивости влияние граничных условий также не рассматривалось.

Заметим, что

$$u^{n+1/2} = u^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = u^n - \frac{\Delta t}{2} \widehat{A}u^n. \quad (5.135)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\widehat{A}u^n, u^{n+1/2}) &= (\widehat{A}u^n, u^n) - \frac{\Delta t}{2} (\widehat{A}u^n, \widehat{A}u^n) = \\ &= \frac{\Delta x}{2a} \|\widehat{A}u^n\|^2 - \frac{\Delta t}{2} \|\widehat{A}u^n\|^2. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Здесь при выводе использовалось соотношение (5.131).

Отсюда и из (5.133), (5.134) находим:

$$\frac{\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2}{2\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \Delta t - \frac{\Delta x}{a} \right) \|\widehat{A}u^n\|^2. \quad (5.137)$$

Полученное соотношение показывает, что норма разностного решения  $\|u^n\|$  не будет увеличиваться с ростом  $n$  при условии неположительности правой части (5.137). Следовательно, схема (5.91) будет устойчивой при одновременном выполнении неравенств  $a \geq 0$ ,  $C \leq 1$ . Таким образом, все методы анализа устойчивости, рассмотренные в этом параграфе, применительно к разностной схеме (5.91) для уравнения адвекции дают один и тот же результат.

## 5.4. Адаптивные сетки

**5.4.1. Основные способы адаптации сеток.** Проблеме построения расчетных сеток для численного решения задач математической физики всегда уделялось большое внимание (см., например, [200, 214–218]). Использование адаптивных сеток (т.е. сеток, каким-либо образом приспособивающихся к особенностям течения) позволяет без дополнительных вычислительных затрат получать численное решение задачи при наличии больших градиентов с более высокой точностью. В основу всех методов построения адаптивных сеток положен принцип оптимального перераспределения узлов сетки в расчетной области. Распределение узлов сетки в данный момент времени должно учитывать взаимное расположение и скорости отдельных подобластей с какими-либо особенностями решения (большие градиенты, сильные разрывы, межфазные границы и т.п.). При решении конкретной задачи мы зачастую располагаем априорной информацией о свойствах изучаемого течения. Игнорировать такую информацию неразумно, ее можно (и нужно) использовать для повышения качества численного расчета. При построении динамически адаптивных структурированных (или блочно-структурированных) сеток в настоящее время можно считать наиболее разработанными два подхода.

*Адаптивно-встраивающиеся* иерархические сетки (AMR, Adaptive Mesh Refinement) [219, 220] используют набор (коллекцию) ячеек, выстроенных в древообразную иерархическую структуру. Каждый уровень иерархии такой структуры дает соответствующее пространственное и временное разрешение. Алгоритм позволяет динамическим образом встраивать новые ячейки или удалять старые в случае изменения степени сложности течения в данном месте расчетной области. Удобство этого метода заключается в том, что он может быть использован независимо от базовой схемы расчета исходных уравнений. Недостатком такого подхода является относительная сложность его реализации. Особенно это проявляется при адаптации численных AMR кодов на компьютеры с параллельной архитектурой.

Другим достаточно разработанным подходом является использование в численных расчетах *адаптивно-подвижных* сеток. В этом случае сетка состоит из фиксированного числа узлов, которые в процессе счета некоторым образом перераспределяются в расчетной области. Адаптивно-подвижные сетки различаются по способу их построения [217, 221]. Часто используются вариационный метод [222–224], метод равномерного распределения [225] и др. В работе [226] (см. также [227–232]) описан способ динамической адаптации подвижных сеток, в котором физические величины, скорость сетки и компоненты метрического тензора, определяющие мгновенную геометрию сетки, удовлетворяют единой самосогласованной системе уравнений. Фактически, это означает, что численное моделирование проводится в подвижной криволинейной системе координат, структура которой определяется динамикой самого течения. Такую сетку можно назвать *интегрированной* динамически адаптивной сеткой. В задачах газодинамики и магнитной газодинамики уравнение, описывающее обратное преобразование координат, должно быть гиперболического типа. Это позволяет в случае необходимости получать численное решение с сильными разрывами без дополнительной процедуры сглаживания. Переход к произвольным нестационарным системам координат в уравнениях газодинамики и магнитной газодинамики осуществляется с помощью техники канонических преобразований систем уравнений гиперболического типа в консервативной форме [233].

В работах [234, 235] (см. также [236]) предложен способ введения нестационарной криволинейной системы координат для уравнений газодинамики (которую авторы этих работ называли «унифицированной системой координат»), позволяющий строить многомерные (двумерные и трехмерные) интегрированные динамически адаптивные сетки. В рамках этого подхода газодинамические (плотность, скорость, давление) и геометрические (компоненты матрицы преобразования координат) величины удовлетворяют самосогласованной системе уравнений. Лагранжевы координаты являются частным случаем такой системы координат. Однако в этом случае [234–237] многомерная (двух- или трехмерная) система уравнений становится слабо гиперболической.

**5.4.2. Интегрированные адаптивные сетки.** Опишем более подробно способ построения интегрированной адаптивной сетки, поскольку этот подход активно применялся нами в расчетах структуры течения в тесных двойных системах. Рассмотрим сначала более простой случай гиперболической системы одномерных уравнений без учета источниковых членов:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0. \quad (5.138)$$

Перейдем в этих уравнениях к новым независимым переменным

$$t' = t'(t, x, \mathbf{u}), \quad x' = x'(t, x, \mathbf{u}). \quad (5.139)$$

В общем случае эти преобразования изменяют вид уравнений (5.138) и, может быть, даже нарушат их свойство гиперболичности. Поэтому ограничимся только такими преобразованиями, которые сохраняют форму уравнений (5.138) и свойство их гиперболичности. Назовем такие преобразования *каноническими*. Иными словами, в результате канонического преобразования консервативная гиперболическая система (5.138) перейдет в другую консервативную гиперболическую систему

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial x'} = 0. \quad (5.140)$$

Рассмотрим пример простого канонического преобразования:

$$t = \tau, \quad x = x(\tau, \xi). \quad (5.141)$$

Отметим, что это преобразование не содержит консервативных переменных  $\mathbf{u}$ . Перепишем это преобразование переменных в дифференциальной форме:

$$dt = d\tau, \quad dx = \omega d\tau + Q d\xi, \quad (5.142)$$

где

$$\omega = \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_{\xi}, \quad Q = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_{\tau}. \quad (5.143)$$

Величина  $\omega$  представляет собой скорость движения старой системы координат относительно новой, а  $Q$  — метрический коэффициент. Они связаны соотношением Эйлера:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0. \quad (5.144)$$

Это уравнение можно рассматривать в качестве закона сохранения для геометрической величины  $Q$ . При этом скорость  $\omega$  играет роль потока (с обратным знаком) метрического коэффициента  $Q$  в пространстве новых координат  $\xi$ .

Обратные преобразования определяются соотношениями

$$d\tau = dt, \quad d\xi = -\frac{\omega}{Q} dt + \frac{1}{Q} dx. \quad (5.145)$$

С помощью этих преобразований можно получить следующие выражения для производных какой-либо функции  $f(x, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{\omega}{Q} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial f}{\partial \xi}. \quad (5.146)$$

Поэтому в новых переменных исходное уравнение для физических величин (5.138) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \frac{1}{Q} (\mathcal{A} - \omega \mathcal{I}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = 0, \quad (5.147)$$

где  $\mathcal{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$  — матрица гиперболичности исходной системы уравнений,  $\mathcal{I}$  — единичная матрица.

Используя соотношение Эйлера (5.144), уравнение (5.147) можно переписать в консервативной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (Q\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{F} - \omega \mathbf{u}) = 0, \quad (5.148)$$

Таким образом, вместо одного исходного уравнения (5.138) мы получили два уравнения (5.144) и (5.148), выражающих законы сохранения для геометрических и физических величин.

Однако полученная система уравнений остается незамкнутой. Для замыкания системы уравнений (5.144) и (5.148) необходимо добавить выражение для скорости системы координат:

$$\omega = \omega(\tau, \xi, Q, \mathbf{u}). \quad (5.149)$$

Это соотношение нужно выбирать таким образом, чтобы полная самосогласованная система уравнений (5.144), (5.148), (5.149) была гиперболической.

В случае уравнений газодинамики можно, например, использовать следующее выражение:

$$\omega = \omega_0(\xi, \tau) + h(\xi, \tau)v, \quad (5.150)$$

где  $v$  — скорость газа вдоль координатной оси  $x$ . В этом выражении  $\omega_0$  определяет некоторый закон движения системы координат, задаваемый внешним образом из каких-либо априорных соображений,  $h$  — некоторая функция координат и времени. Например, в частном случае  $\omega_0 = 0$ ,  $h = 1$  получаем картину течения в переменных Лагранжа. Остальные случаи соответствуют смешанным эйлерово-лагранжевым переменным.

Адаптивная сетка строится следующим образом. Если в новых переменных  $(\tau, \xi)$  построить равномерную неподвижную сетку,

то в исходных переменных  $(t, x)$  сетка будет неоднородной и движущейся. Решение самосогласованной системы уравнений (5.144), (5.148), (5.149) на равномерной неподвижной сетке в новых переменных  $(\tau, \xi)$  соответствует решению исходной системы уравнений (5.138) в криволинейной нестационарной системе координат. Таким образом в исходных переменных  $(t, x)$  мы получим решение на адаптивной сетке.

Отметим, что для численного решения расширенной системы (5.144), (5.148), (5.149) можно использовать методы, аналогичные методам решения исходной системы уравнений (5.138). Это обусловлено тем, что расширенная система уравнений, как и исходная система, представляет собой гиперболическую систему консервативных уравнений.

**5.4.3. Адаптивная сетка в многомерном случае.** Описанный в предыдущем разделе подход для построения интегрированной адаптивной сетки несложно обобщить на многомерный случай. Рассмотрим гиперболическую систему консервативных уравнений, записанных в декартовых координатах  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ <sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} = 0, \quad (5.151)$$

Перейдем в этих уравнениях от переменных  $(t, x, y, z)$  к новым переменным  $(\tau, \xi, \eta, \zeta)$ . Допустим, что при этих преобразованиях консервативные переменные и потоки перейдут в новые:  $\mathbf{u}(x, y, z, t) \rightarrow \mathbf{u}'(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ ,  $\mathbf{F}_k(x, y, z, t) \rightarrow \mathbf{F}'_k(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ , таким образом, что исходные уравнения (5.151) не изменят своей формы:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{F}'_k}{\partial \xi_k} = 0, \quad (5.152)$$

где обозначено  $\xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta, \xi_3 = \zeta$ . Будем, как и в одномерном случае, называть такие преобразования каноническими.

Рассмотрим следующий пример канонического преобразования:

$$t = \tau, \quad x_i = x_i(\tau, \xi, \eta, \zeta). \quad (5.153)$$

В дифференциальной форме это преобразование можно переписать в виде

$$dt = d\tau, \quad dx_i = \omega_i d\tau + Q_{ik} d\xi_k, \quad (5.154)$$

<sup>1)</sup> Здесь и далее в разделе для сокращения записи выражений по повторяющимся индексам будем подразумевать суммирование от 1 до 3. При этом мы не будем делать различия между ковариантными и контравариантными индексами. Это связано с тем, что везде индексами  $i, k$  и т. п. будут обозначаться компоненты векторов в декартовых координатах. Например, компоненты  $a_i$  для вектора  $\mathbf{a}$  есть  $a_1 = a_x, a_2 = a_y, a_3 = a_z$ .

где

$$\omega_i = \frac{\partial x_i}{\partial \tau}, \quad Q_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}. \quad (5.155)$$

Величины  $\omega_i$  представляют собой компоненты вектора скорости  $\omega$  движения новой системы координат относительно исходной, а  $Q_{ik}$  представляют собой компоненты матрицы мгновенного (для данного значения  $\tau$ ) преобразования координат. Таким образом, преобразование (5.154) характеризуют 12 функций координат и времени. Однако, поскольку в выражениях (5.154) слева стоят полные дифференциалы, эти функции удовлетворяют соотношениям Эйлера:

$$\frac{\partial Q_{ik}}{\partial \tau} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_k}, \quad (5.156)$$

$$\frac{\partial Q_{ik}}{\partial \xi_l} = \frac{\partial Q_{il}}{\partial \xi_k}. \quad (5.157)$$

Уравнение (5.156) определяет геометрические законы сохранения, а уравнение (5.157) — дифференциальные соотношения взаимности для компонент матрицы  $Q_{ik}$ .

Обратные преобразования описываются соотношениями:

$$d\tau = dt, \quad d\xi_i = -P_{ik}\omega_k d\tau + P_{ik}dx_k, \quad (5.158)$$

где  $P_{ik}$  — матрица, обратная к матрице  $Q_{ik}$ . Из (5.158) следует, что

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \tau} = -P_{ik}\omega_k, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = P_{ik}. \quad (5.159)$$

Метрический тензор криволинейной системы координат  $(\xi, \eta, \zeta)$  определяется матрицей  $Q_{ik}$ ,  $g_{ik} = Q_{li}Q_{lk}$  (обратите внимание на порядок индексов). В частности,  $\sqrt{g} = Q$ , где  $g = \det(g_{ik})$ ,  $Q = \det(Q_{ik})$  — якобиан преобразования координат.

Выведем некоторые полезные соотношения, которым удовлетворяют матрицы преобразований координат  $Q_{ik}$  и  $P_{ik}$ . Дифференцируя равенство  $P_{il}Q_{lk} = \delta_{ik}$ , получим:

$$Q_{il} \frac{\partial P_{lk}}{\partial \xi_m} = -P_{lk} \frac{\partial Q_{il}}{\partial \xi_m}. \quad (5.160)$$

Умножая левую часть на  $P_{ni}$ , находим:

$$\frac{\partial P_{kl}}{\partial \xi_i} = -P_{kn}P_{ml} \frac{\partial Q_{nm}}{\partial \xi_i}. \quad (5.161)$$

Свертка этого соотношения по индексам  $i$  и  $k$  дает:

$$\frac{\partial P_{kl}}{\partial \xi_k} = -P_{kn}P_{ml} \frac{\partial Q_{nm}}{\partial \xi_k}. \quad (5.162)$$



Дифференциал якобиана  $dQ$  можно получить, вычисляя дифференциал от каждой компоненты матрицы  $Q_{ik}$  и умножая его на соответствующий минор  $QP_{ik}$ . В результате приходим к соотношению  $dQ = QP_{ik}dQ_{kl}$ . Отсюда, например, следуют равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = QP_{ik} \frac{\partial Q_{kl}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi_i} = QP_{lk} \frac{\partial Q_{kl}}{\partial \xi_i}. \quad (5.163)$$

Докажем важное свойство матрицы преобразования координат:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} (QP_{lk}) = 0. \quad (5.164)$$

Вычисляя производную произведения, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (QP_{lk}) &= Q \left( \frac{\partial P_{lk}}{\partial \xi_i} + P_{lk} P_{mn} \frac{\partial Q_{nl}}{\partial \xi_m} \right) = \\ &= Q \frac{\partial Q_{mn}}{\partial \xi_i} (P_{lk} P_{nm} - P_{ln} P_{mk}). \end{aligned} \quad (5.165)$$

Последнее выражение равно нулю в силу соотношений взаимности (5.157) для компонент матрицы  $Q_{ik}$ . Из (5.163) и (5.164) получаем:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (QP_{lk}\omega_k). \quad (5.166)$$

Стоит отметить еще один интересный факт. Полная производная по времени  $t$  криволинейных координат  $\xi_i$  с учетом скорости  $\omega$  оказывается равной нулю. Действительно,

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = -P_{ik}\omega_k + \omega_k P_{ik} = 0. \quad (5.167)$$

Введем для удобства дальнейших выкладок векторы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$ , компоненты которых в декартовых координатах равны  $K_i = Q_{i1}$ ,  $L_i = Q_{i2}$  и  $M_i = Q_{i3}$  соответственно. Иными словами

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}, \quad \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta}. \quad (5.168)$$

Они определяют локальный базис в криволинейной системе координат. В общем случае этот базис является неортогональным, ненормированным и изменяется со временем. Векторы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$  направлены по касательным к соответствующим координатным линиям. Кроме этих векторов можно рассматривать и векторы взаимного (дуального) базиса  $\mathbf{L} \times \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M} \times \mathbf{K}$  и  $\mathbf{K} \times \mathbf{L}$ , ортогональные соответствующим координатным линиям. Векторы взаимного базиса определяются

компонентами обратной матрицы:  $(\mathbf{L} \times \mathbf{M})_i = QP_{1i}$ ,  $(\mathbf{M} \times \mathbf{K})_i = QP_{2i}$  и  $(\mathbf{K} \times \mathbf{L})_i = QP_{3i}$ . Взаимный базис также, вообще говоря, является неортогональным, ненормированным и нестационарным. Удобно определить соответствующие нормированные векторы:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{M}}{|\mathbf{L} \times \mathbf{M}|}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{K}}{|\mathbf{M} \times \mathbf{K}|}, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{L}}{|\mathbf{K} \times \mathbf{L}|}. \quad (5.169)$$

С помощью этих векторов для некоторого трехмерного вектора  $\mathbf{a}$  полезно ввести проекции  $a_\xi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}$ ,  $a_\eta = \mathbf{l} \cdot \mathbf{a}$  и  $a_\zeta = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$ . Якобиан преобразования координат  $Q$  через введенные векторы можно выразить различными способами:

$$Q = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{M}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{K}) = \mathbf{M} \cdot (\mathbf{K} \times \mathbf{L}). \quad (5.170)$$

В рамках преобразований (5.154) перейдем в системе уравнений (5.151) к новым переменным. Имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - P_{lk} \omega_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_l}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} = P_{lk} \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \xi_l}. \quad (5.171)$$

Следовательно, уравнение (5.151) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + P_{lk} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \xi_l} - \omega_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_l} \right) = 0. \quad (5.172)$$

Обозначим через  $\mathcal{A}_k = \partial \mathbf{F}_k / \partial \mathbf{u}$  матрицы гиперболичности исходной системы уравнений (5.151) вдоль соответствующих координатных направлений. Тогда (5.172) можно переписать в квазилинейной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + P_{lk} (\mathcal{A}_k - \omega_k \mathcal{I}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_l} = 0. \quad (5.173)$$

Рассмотрим, например, частный случай, когда величины  $\omega_k$  и  $Q_{ik}$  являются заданными независимыми функциями  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  (т.е. в закон преобразования координат (5.154) не входят компоненты вектора консервативных переменных  $\mathbf{u}$ ). В этом случае матрицы  $P_{lk} (\mathcal{A}_k - \omega_k \mathcal{I})$  представляют собой матрицы гиперболичности преобразованной системы. Собственные значения этих матриц выражаются через собственные значения исходных матриц  $\mathcal{A}_k$ . В более общем случае, когда величины  $\omega_k$  и  $Q_{ik}$  определяются не только переменными  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ , но и компонентами вектора  $\mathbf{u}$ , матрицы  $P_{lk} (\mathcal{A}_k - \omega_k \mathcal{I})$  не являются матрицами гиперболичности соответствующей системы уравнений, поскольку в этом случае необходимо рассматривать полную систему уравнений, включающую в себя не только физические, но и геометрические законы сохранения.

Используя соотношения (5.164) и (5.166), преобразуем полученную систему квазилинейных уравнений (5.173) в консервативную форму.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (Q \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \frac{\partial Q}{\partial \tau} + Q \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} = \\ &= \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \xi_l} (QP_{lk} \omega_k) - QP_{lk} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \xi_l} - \omega_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_l} \right) = \\ &= - \frac{\partial}{\partial \xi_l} [QP_{lk} (\mathbf{F}_k - \omega_k \mathbf{u})] = 0. \end{aligned} \quad (5.174)$$

Таким образом, мы приходим к следующей системе консервативных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (Q \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial \xi_l} [QP_{lk} (\mathbf{F}_k - \omega_k \mathbf{u})] = 0. \quad (5.175)$$

Это, в частности, означает, что рассмотренное преобразование координат (5.154) действительно является каноническим в сформулированном выше смысле.

В развернутой записи уравнения (5.175) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (Q \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial \xi} [|\mathbf{L} \times \mathbf{M}| (\mathbf{F}_\xi - \omega_\xi \mathbf{u})] + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} [|\mathbf{M} \times \mathbf{K}| (\mathbf{F}_\eta - \omega_\eta \mathbf{u})] + \\ + \frac{\partial}{\partial \zeta} [|\mathbf{K} \times \mathbf{L}| (\mathbf{F}_\zeta - \omega_\zeta \mathbf{u})] = 0, \end{aligned} \quad (5.176)$$

где обозначено  $\mathbf{F}_\xi = k_i \mathbf{F}_i$ ,  $\mathbf{F}_\eta = l_i \mathbf{F}_i$ ,  $\mathbf{F}_\zeta = m_i \mathbf{F}_i$ . Эти уравнения описывают законы сохранения для физических величин. Их необходимо решать совместно с уравнениями

$$\frac{\partial Q_{ik}}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_k} = 0, \quad (5.177)$$

которые выражают собой законы сохранения для геометрических величин. Перепишем уравнения (5.177) в более удобном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tau} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \tau} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tau} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \zeta} = 0. \quad (5.178)$$

Итак, в общем случае мы получили самосогласованную систему уравнений для физических (5.176) и геометрических (5.178) величин.

Система уравнений (5.176), (5.178) не является замкнутой, поскольку неизвестных величин больше, чем уравнений. Для ее замыкания достаточно задать выражение для скорости системы координат:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\tau, \xi, \eta, \zeta, Q_{ik}, \mathbf{u}). \quad (5.179)$$

Это соотношение, как и в одномерном случае, нужно выбирать таким образом, чтобы полная система уравнений (5.176), (5.178), (5.179) была

гиперболической. Эта система уравнений является самосогласованной в том смысле, что изменения физических величин определяются текущим состоянием криволинейной нестационарной системы координат. С другой стороны, это состояние, в свою очередь, определяется эволюцией физических величин и их распределением в пространстве. Следует подчеркнуть, что производные величин  $Q_{ik}$  и  $\mathbf{u}$  по координатам  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  (см. [228–231]) в выражение (5.179) не входят, поскольку в этом случае самосогласованная система уравнений (5.176), (5.178), (5.179) для геометрических и физических величин уже не была бы гиперболической. При решении уравнений газодинамики можно, например, использовать следующее выражение (см. одномерный аналог (5.150)):

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0(\xi, \eta, \zeta, \tau) + h(\xi, \eta, \zeta, \tau)\mathbf{v}, \quad (5.180)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость газа. При этом в дальнейшем полезно различать три частных случая.

1) Скорость  $\boldsymbol{\omega} = 0$  и, следовательно, матрица  $Q_{ik}$  не зависит от времени  $\tau$  и является известной функцией координат  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ . Уравнения (5.176) при этом упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial \xi} (|\mathbf{L} \times \mathbf{M}| \mathbf{F}_\xi) + \\ + \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial \eta} (|\mathbf{M} \times \mathbf{K}| \mathbf{F}_\eta) + \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial \zeta} (|\mathbf{K} \times \mathbf{L}| \mathbf{F}_\zeta) = 0. \end{aligned} \quad (5.181)$$

Этот случай соответствует использованию геометрически-адаптивной сетки.

2)  $|\boldsymbol{\omega}_0| \neq 0$ , а коэффициент  $h = 0$ . В этом случае скорость  $\boldsymbol{\omega}$  является заданной функцией времени  $\tau$  и координат  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ . Поэтому уравнения (5.178) для геометрических величин имеют известные правые части и их можно решать отдельно от уравнений (5.176) для физических величин.

3) Коэффициент  $h \neq 0$ . Этот случай соответствует унифицированным переменным [234, 235]. При этом самосогласованная система уравнений (5.176), (5.178), (5.180) должна решаться совместно. Конкретные разностные схемы для численного решения этой системы уравнений для газодинамики и магнитной газодинамики будут описаны ниже.

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## 6.1. Разностные схемы для гиперболических систем уравнений

**6.1.1. Классификация методов.** В задачах, описываемых гиперболическими системами уравнений, могут присутствовать слабые и сильные разрывы. В нелинейных задачах даже в изначально гладком решении в определенный момент времени могут возникать сильные разрывы. Поэтому при построении методов для численного решения нелинейных гиперболических систем уравнений необходимо с самого начала учитывать возможное наличие разрывов в расчетной области. Следует заметить, что понятия согласованности, сходимости и устойчивости, сформулированные в предыдущей главе, имеют строгий смысл только для гладких решений. На разрывах производные становятся неограниченными и поэтому нельзя говорить об их аппроксимации. Тем не менее, методы теории разностных задач, развитые для дифференциальных уравнений в частных производных, можно применять, например, в областях гладкости решения.

Классификацию разностных схем для гиперболических систем нелинейных уравнений можно составить по способу построения обобщенного решения. Это обусловлено тем, что обобщенное решение системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

можно строить тремя различными способами. В зависимости от этого все схемы можно разбить на три типа [233]<sup>1)</sup>.

В первом способе обобщенное решение строится путем сшивки гладких решений на линиях разрывов с помощью условий Гююнио:

$$D[\mathbf{u}] = [\mathbf{F}]. \quad (6.2)$$

---

<sup>1)</sup> Следует отметить, что такой подход применим и для линейных уравнений. Однако для них обобщенное решение можно получить и непосредственно. Поэтому в этом случае удобнее пользоваться другими принципами для классификации и построения разностных схем (см., например, [218]).

Здесь для построения численного решения необходимо каким-либо образом аппроксимировать исходное дифференциальное уравнение (6.1) в частных производных в областях гладкости и с достаточной точностью аппроксимировать условия Гюгиони (6.2) на разрывах. Численные решения, полученные для каждой области гладкости, сшиваются затем на поверхностях разрывов, с использованием соотношений Гюгиони по аналогии с граничными условиями. Наиболее известным таким подходом является метод характеристик (см., например, [238]). Основная идея этого метода заключается в использовании характеристических сеток. Это оказывается удобным, поскольку слабые и контактные разрывы в решении распространяются вдоль соответствующих характеристик.

Во втором способе обобщенное решение системы уравнений (6.1) определяется как предел классических (гладких) решений некоторой системы уравнений параболического типа:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \mathcal{B}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right]. \quad (6.3)$$

Здесь  $\mathcal{B}$  — положительно определенная матрица коэффициентов вязкости,  $\mu$  — малый параметр. В пределе при  $\mu \rightarrow 0$  классические решения параболической системы (6.3) перейдут в обобщенные решения исходной гиперболической системы (6.1). Матрицу  $\mathcal{B}$  нужно выбирать определенным образом, для того чтобы обеспечить этот предельный переход. К методам, основанным на этом подходе, можно отнести, например, схемы с искусственной вязкостью [168] и схему Лакса–Вендроффа [171].

В третьем способе обобщенное решение системы (6.1) определяется как решение системы интегральных законов сохранения:

$$\oint_L \mathbf{u} dx - \mathbf{F} dt = 0, \quad (6.4)$$

где  $L$  — замкнутый контур, ограничивающий некоторую область в плоскости переменных  $x$  и  $t$ . Отметим, что в этом случае условия Гюгиони (6.2) на разрывах будут удовлетворяться автоматически. При таком способе построения решения разностные схемы получают единообразный характер и имеют вид разностных законов сохранения. К этому классу методов относятся, в частности, все методуновские методы.

**6.1.2. Метод характеристик.** Идею и основные особенности метода характеристик удобнее всего рассмотреть на примере уравнения адвекции. Напомним, что решение этого уравнения обладает замечательным свойством: оно сохраняет постоянное значение на характеристике. Это свойство можно использовать для построения численного метода решения уравнения адвекции.

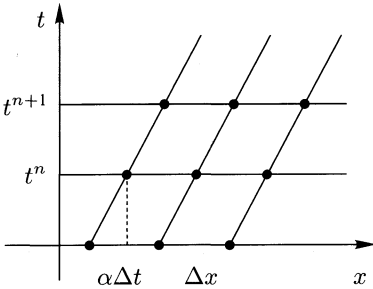


Рис. 6.1. Метод характеристик для уравнения адвекции

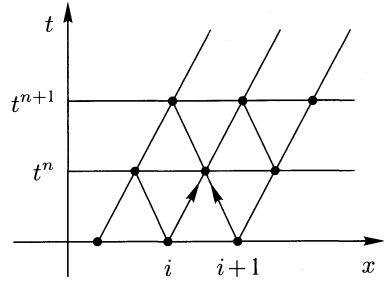


Рис. 6.2. Метод характеристик для системы двух линейных уравнений

Будем каждый раз при переходе на следующий временной слой сдвигать узлы сетки с учетом уравнения характеристик (рис. 6.1):

$$x_i^{n+1} = x_i^n + a\Delta t. \quad (6.5)$$

Тогда решение  $u$  в точке  $x_i$  теперь не будет зависеть от номера временного слоя:

$$u(x_i^{n+1}, t^{n+1}) = u(x_i^n, t^n) = u(x_i^0, 0). \quad (6.6)$$

Такой подход, очевидно, дает точное решение уравнения адвекции независимо от величины числа Куранта  $a\Delta t/\Delta x$ .

Рассмотрим теперь случай линейной системы двух уравнений гиперболического типа. Ее можно переписать в терминах инвариантов Римана:

$$\frac{\partial S^1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial S^1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S^2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial S^1}{\partial x} = 0. \quad (6.7)$$

Здесь через каждую точку плоскости переменных  $x$  и  $t$  проходят две характеристики, представляющие собой прямые линии. Будем строить узлы сетки на пересечении этих характеристик (рис. 6.2):

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \lambda_2 \Delta t, \quad x_{i+1}^{n+1} = x_{i+1}^n + \lambda_1 \Delta t. \quad (6.8)$$

Отсюда находим величину временного шага

$$\Delta t = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta x}. \quad (6.9)$$

Значения инвариантов Римана на временном слое  $n + 1$  выражаются следующим образом:

$$S^{1,2}(x_i^{n+1}, t^{n+1}) = S^{1,2}(x_i^n, t^n). \quad (6.10)$$

Перейдем, наконец, к случаю системы произвольного числа линейных уравнений. Ее можно переписать для инвариантов Римана:

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \lambda_\alpha \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} = 0. \quad (6.11)$$

В качестве узлов сетки выберем точки пересечения самой быстрой и самой медленной характеристик (рис. 6.3):

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \lambda_{\max} \Delta t, \quad x_i^{n+1} = x_{i+1}^n + \lambda_{\min} \Delta t. \quad (6.12)$$

Временной шаг определяется соотношением:

$$\Delta t = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\Delta x}. \quad (6.13)$$

Для инвариантов Римана, соответствующих минимальным и максимальным значениям  $\alpha = 1$  и  $\alpha = N$ , находим:

$$S^{1,N}(x_i^{n+1}, t^{n+1}) = S^{1,N}(x_i^n, t^n). \quad (6.14)$$

Остальные инварианты переносятся из промежуточных точек, обозначенных на рис. 6.3 белыми кружками. Для получения их значений в этих точках нужно использовать интерполяцию по значениям в соседних узлах. В результате процедуры интерполяции в методе возникает некоторое сглаживание решения, аналогичное явлению диффузии в разностных схемах.

Эта методика обобщается на случай нелинейных уравнений [239, 240]. В этом случае характеристическая сетка будет состоять уже не из прямых, а из кривых линий. Метод характеристик может учитывать наличие в расчетной области сильных и слабых разрывов. При этом положение точек разрыва можно рассчитать точно. Однако сильные разрывы срезают характеристическую сетку и формулы расчета существенно усложняются. Поэтому для сложных течений с большим количеством взаимодействующих сильных и слабых разрывов метод характеристик становится очень громоздким. Кроме того, его очень трудно обобщить на многомерный случай. Тем не менее, еще в СССР были созданы программные пакеты, реализующие метод характеристик и позволяющие с большой точностью рассчитывать такие течения.

Близкими по идеологии построения к методу характеристик являются явные методы бегущего счета [233, 241]. В основе этих методов

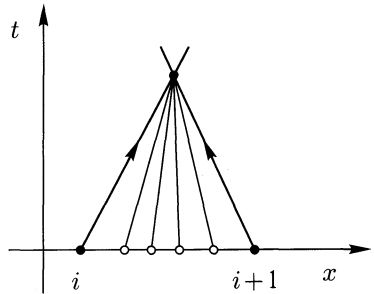


Рис. 6.3. Метод характеристик для системы линейных уравнений



также лежит аппроксимация уравнений в инвариантах или характеристической форме. Однако в отличие от метода характеристик в этих методах не используется характеристическая сетка. Для нелинейной системы квазилинейных уравнений такая схема была предложена Курантом, Изаконом и Рисом [172].

Рассмотрим гиперболическую систему нелинейных уравнений, записанную в характеристической форме:

$$\mathbf{I}^\alpha(\mathbf{u}) \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_\alpha(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right] = 0. \quad (6.15)$$

Для ее численного решения используем следующую разностную схему:

$$\mathbf{I}^\alpha(\mathbf{u}_i^n) \cdot \left[ \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \lambda_\alpha(\mathbf{u}_i^n) \frac{\Delta_\alpha \mathbf{u}_i^n}{\Delta x} \right] = 0, \quad (6.16)$$

где

$$\Delta_\alpha \mathbf{u}_i^n = \begin{cases} \mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}^n, & \lambda_\alpha(\mathbf{u}_i^n) \geq 0, \\ \mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n, & \lambda_\alpha(\mathbf{u}_i^n) < 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Эту схему можно переписать в более удобном для расчетов виде:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_\alpha r_\alpha \lambda_\alpha(\mathbf{I}^\alpha \cdot \Delta_\alpha \mathbf{u}_i^n). \quad (6.18)$$

В работе [172] показано, что схема (6.16) является устойчивой при условии

$$\max_{\alpha, i} \left\{ \frac{|\lambda_\alpha(\mathbf{u}_i^n)| \Delta t}{\Delta x} \right\} \leq 1. \quad (6.19)$$

Различные модификации этой схемы и их возможные интерпретации можно найти в книге [218]. Одним из несомненных преимуществ схемы Куранта–Изакона–Риса является то, что она позволяет численно решать системы уравнений, записанные в квазилинейной форме.

Применительно к уравнению адвекции схема Куранта–Изакона–Риса переходит в схему донорской ячейки:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{a}{\Delta x} \begin{cases} u_i^n - u_{i-1}^n, & a \geq 0, \\ u_{i+1}^n - u_i^n, & a < 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Пусть, к примеру,  $a > 0$ , тогда получаем схему, которая рассматривалась при анализе устойчивости (см. параграф 5.3):

$$u_i^{n+1} = (1 - C) u_i^n + C u_{i-1}^n. \quad (6.21)$$

Эта схема имеет первый порядок аппроксимации по  $\Delta x$  и по  $\Delta t$ . В случае  $C = 1$  получаем точное решение  $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$ . Однако при  $C < 1$  схема имеет существенную численную диффузию. Действительно, первое дифференциальное приближение схемы (6.21) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2), \quad (6.22)$$

где коэффициент эффективной вязкости

$$D = \frac{1}{2} a \Delta x (1 - C). \quad (6.23)$$

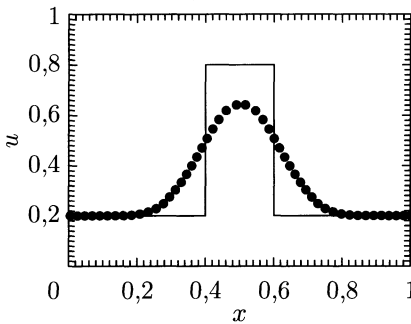


Рис. 6.4. Решение уравнения адвекции методом донорской ячейки

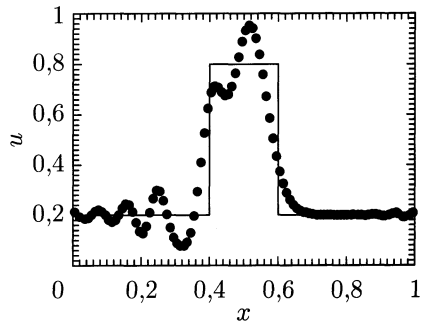


Рис. 6.5. Решение уравнения адвекции методом Лакса-Вендроффа

На рис. 6.4 показан пример расчета тестовой задачи о переносе квадратичного профиля. Задача решалась на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  с периодическими граничными условиями. В начальный момент времени был задан профиль  $u_0(x) = 0,8$  при  $0,4 \leq x \leq 0,6$  и  $u_0(x) = 0,4$  в противном случае. Были использованы следующие параметры: число узлов сетки  $N = 100$ , скорость  $a = 1$ , число Куранта  $C = 0,2$ . На рисунке показано численное решение на момент времени  $t = 1$ . Точное решение показано на рисунке сплошной линией. Из-за численной диффузии первоначальный квадратичный профиль быстро размывается по всей сетке. При этом фазовые ошибки незаметны, поскольку забиваются диффузией, но они все-равно присутствуют.

**6.1.3. Схема Лакса-Вендроффа.** Рассмотрим гиперболическую систему уравнений, записанную в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0. \quad (6.24)$$

Допустим, что нам известно решение этих уравнений в момент времени  $t$ ,  $\mathbf{u}(x, t)$ . Для того, чтобы определить решение в момент времени

$t + \Delta t$ , разложим величину  $\mathbf{u}(x, t + \Delta t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t$  до членов второго порядка. Имеем:

$$\mathbf{u}(x, t + \Delta t) = \mathbf{u}(x, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (6.25)$$

С помощью исходного уравнения (6.24) выразим вторую производную:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right). \quad (6.26)$$

Используя эти соотношения, находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_{i-1}^n) + \\ + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} [\mathcal{A}_{i+1/2}^n (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) - \mathcal{A}_{i-1/2}^n (\mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_{i-1}^n)]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Полученная схема называется одношаговой схемой Лакса–Вендроффа [171]. Она имеет второй порядок аппроксимации по  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Матрицы  $\mathcal{A}_{i\pm 1/2}^n$  в промежуточных точках сетки можно определить как по правилу средней точки, так и по правилу трапеций. Следует отметить, что схема Лакса–Вендроффа содержит дополнительное слагаемое, описывающее искусственную вязкость. Но коэффициент вязкости определяется свойствами сетки и не может быть задан независимым образом. Действительно, (6.27) можно рассматривать как аппроксимацию уравнения (6.3), в которой пространственные производные аппроксимируются центральными разностями, а матрица

$$\mu B = \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A}^2. \quad (6.28)$$

Применительно к уравнению адвекции эта схема дает [242]:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{C^2}{2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad (6.29)$$

где число Куранта  $C = a\Delta t/\Delta x$ . С помощью спектрального метода можно показать, что множитель перехода для этой схемы

$$G = 1 - C^2(1 - \cos \theta) - iC \sin \theta, \quad (6.30)$$

причем

$$|G|^2 = \left[ 1 - C^2(1 - \cos \theta) \right]^2 + C^2 \sin^2 \theta. \quad (6.31)$$

Отсюда следует, что схема (6.29) является устойчивой при условии  $|C| \leq 1$ . В схеме (6.29) отсутствует диффузия 2-го порядка, она появ-

ляется только в члене  $\sim \partial^4 u / \partial x^4$ . Однако, дисперсия появляется уже в члене 3-го порядка  $\sim \partial^3 u / \partial t^3$ , поэтому в схеме Лакса–Вендроффа дисперсионные ошибки преобладают над диффузионными.

На рис. 6.5 показан результат расчета задачи о переносе квадратичного профиля с помощью схемы Лакса–Вендроффа (6.28). В отличие от схемы донорской ячейки в данном случае диффузия практически никак не проявляется. Однако на передний план выходят дисперсионные ошибки. Они проявляются в виде нефизических осцилляций, возникающих в области сильных градиентов решения.

В 1962 г. Рихтмайер [243] предложил двухшаговый вариант схемы Лакса–Вендроффа. Этот метод состоит из этапа предиктора

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{i+1/2}^n}{\Delta t/2} + \frac{\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (6.32)$$

и этапа корректора

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (6.33)$$

где

$$\mathbf{u}_{i+1/2}^n = \frac{\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_{i+1}^n}{2}, \quad \mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1/2}). \quad (6.34)$$

В линейном случае, когда  $\mathcal{A} = \text{const}$ , оба варианта схемы (одношаговый и двухшаговый) являются эквивалентными.

Схему Лакса–Вендроффа (6.32)–(6.34) можно формально интерпретировать как базовую схему (5.37) для консервативных уравнений гиперболического типа (6.24), в которой численные потоки вычисляются по правилу

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F} \left[ \frac{\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_{i+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \right]. \quad (6.35)$$

Однако следует помнить, что эта схема получена не с помощью метода конечного объема, в котором производится интегрирование по объему ячеек. Выражения (6.32) и (6.33) получены с помощью непосредственной аппроксимации исходных дифференциальных уравнений (6.24), а не соответствующих интегральных уравнений. Тем не менее, схема Лакса–Вендроффа является консервативной.

В 1973 г. Лера и Пейре [244] обобщили схему Лакса–Вендроффа. В этом подходе используются два параметра  $\alpha$  и  $\beta$ , которые характеризуют точки, в которых определяется предиктор  $\mathbf{u}_{i+\beta}^{n+\alpha}$  (рис. 6.6). Эти схемы можно представить следующим образом. Этап предиктора:

$$\frac{\mathbf{u}_{i+\beta}^{n+\alpha} - \mathbf{u}_{i+\beta}^n}{\alpha \Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n}{\Delta x} = 0, \quad (6.36)$$

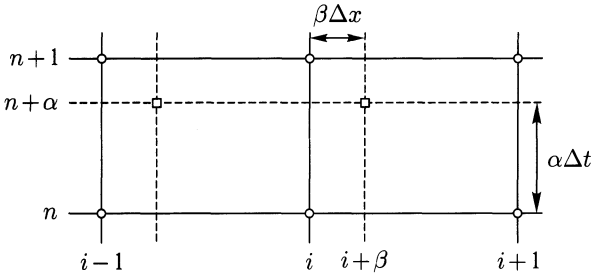


Рис. 6.6. К обобщению метода Лакса-Вендроффа.

где

$$\mathbf{u}_{i+\beta}^n = (1 - \beta)\mathbf{u}_i^n + \beta\mathbf{u}_{i+1}^n. \quad (6.37)$$

Корректор формально не изменяется, но для вычисления  $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$  по известным величинам  $\mathbf{F}_i^n$  и  $\mathbf{F}_{i+\beta}^{n+\alpha}$  необходимо использовать интерполяцию. В результате получается следующее выражение:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\alpha - \beta}{2\alpha} \mathbf{F}_{i+1}^n + \frac{2\beta - 1}{2\alpha} \mathbf{F}_i^n + \right. \\ \left. + \frac{1 - \alpha - \beta}{2\alpha} \mathbf{F}_{i-1}^n + \mathbf{F}_{i+\beta}^{n+\alpha} - \mathbf{F}_{i+\beta-1}^{n+\alpha} \right) = 0. \quad (6.38)$$

Эти схемы составляют двухпараметрическое семейство. Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ , в принципе, могут принимать любые значения. Схема Лакса-Вендроффа является частным случаем при  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1/2$ . Все схемы имеют второй порядок аппроксимации по  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Следует отметить, что все эти схемы используют разнесенные сетки. Исключения составляют две специальные схемы Мак-Кормака [245], соответствующие параметрам  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$  и  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ .

В линейном случае ( $\mathcal{A} = \text{const}$ ) все эти схемы совпадают между собой. Различия в них проявляются только в случае нелинейных уравнений. В отличие от одношаговой схемы Лакса-Вендроффа эти схемы легко обобщаются на многомерный случай. Хороший обзор по методу Лакса-Вендроффа, а также по его различным модификациям и обобщениям можно найти в книгах [205, 241, 246].

## 6.2. Методы квазичастиц

**6.2.1. Основные принципы.** Поведение среды можно моделировать непосредственно с помощью составляющих ее микрочастиц. При этом локальные свойства среды необходимо трактовать как некоторые средние значения свойств частиц. Однако реальные системы состоят из огромного количества частиц. Например, типичная галактика состоит из  $10^{11}$  звезд. А в типичном объеме газа около

$10^{23}$  молекул или атомов. Поэтому при таком моделировании приходится частицы заменять их некоторыми аналогами — *квазичастицами*. Квазичастицы можно представлять себе как некоторые кластеры — достаточно большие совокупности микрочастиц, которые ведут себя подобно самим микрочастицам. Этот подход позволяет моделировать реальные системы приближенно с помощью гораздо меньшего количества квазичастиц:  $N = 10^5 - 10^6$ .

В этом подходе в начальный момент времени необходимо задать положения и скорости всех частиц:  $\mathbf{r}_a(0)$ ,  $\mathbf{v}_a(0)$ , где индекс  $a = 1, \dots, N$  нумерует частицы. Новые положения и скорости определяются уравнениями

$$\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = \mathbf{v}_a(t), \quad \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{f}_a(\{\mathbf{r}_b\}, \{\mathbf{v}_b\}, t), \quad (6.39)$$

где  $\mathbf{f}_a$  — сила, действующая на  $a$ -ю частицу со стороны всех других частиц. Сила  $\mathbf{f}_a$  может включать: 1) консервативные силы (упругого) взаимодействия между частицами; 2) неконсервативные силы (неупругого) взаимодействия между частицами; 3) консервативные внешние силы (гравитация, центробежная сила, электрическое поле); 4) неконсервативные внешние силы (магнитное поле, сила Кориолиса, газовое давление, давление излучения и др.).

Зная распределение частиц, можно находить макроскопические параметры среды. Например, плотность в точке  $\mathbf{r}$ :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \langle \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \rangle, \quad (6.40)$$

где угловые скобки означают некоторую процедуру усреднения по всем частицам. Плотность импульса

$$\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \langle \sum_a m_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \rangle. \quad (6.41)$$

Аналогичным образом можно определить и другие нужные макроскопические величины. Общим недостатком такой методики является наличие флуктуаций в решении. Это связано с тем, что моделируемое число частиц  $N$  много меньше реального их числа. Увеличивая число квазичастиц, этот эффект можно ослабить. Кроме того, многое зависит от принятой процедуры усреднения.

Если считать, что квазичастицам соответствуют реальные частицы, то используемое в расчете число частиц определяет масштаб исследуемого течения. Например, при использовании  $N = 1000^3$  частиц можно описать движения в объеме около кубического микрометра. В этом случае силы взаимодействия между частицами будут описываться потенциалами межмолекулярных или межатомных взаимодействий. Этот метод называется методом *молекулярной динамики* [247] (см. также [248, 249]). Для описания больших объемов материала (или даже течения в целом) от этой концепции необходимо отказаться и рассмат-

ривать в качестве моделируемых частиц структурные элементы более высокого уровня — *мезочастицы*: зерна материала, кластеры и т. п. В настоящее время эти методы начали активно применяться в связи с развитием технологии параллельных вычислений.

Важной проблемой в методе частиц является генерация начальных условий. При этом необходимо задавать как внешнюю форму объекта, так и распределение положений и скоростей частиц в нем.

**6.2.2. Метод частиц в ячейке.** Метод частиц в ячейке (PIC, particles in cell) был предложен Эвансом и Харлоу в 1957 г. [250]. Запишем уравнения газодинамики в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v v) = -\nabla P, \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s v) = 0. \quad (6.44)$$

Здесь  $\rho = nm$  — плотность газа,  $m$  — средняя масса частиц,  $n$  — концентрация,  $s$  — удельная энтропия,  $P = P(\rho, s)$  — давление.

В методе используется эйлерова сетка, в каждую ячейку которой набрасывается достаточно большое число частиц, чтобы уменьшить флуктуации. Обозначим координаты  $a$ -й частицы в момент времени  $t^n$  через  $\mathbf{r}_a^n$ . Считаем, что на каждом шаге интегрирования за время  $\Delta t$  внутри ячеек частицы испытывают очень большое число соударений, так что значения их импульсов и энергий выравниваются. Поэтому будем считать, что каждой частице можно приписать определенное значение импульса и энтропии. Таким образом, на  $n$ -м шаге интегрирования каждая частица характеризуется следующим набором величин:

$$\mathbf{u}_a = (m_a, \mathbf{r}_a^n, m_a \mathbf{v}_a^n, s_a^n)^T. \quad (6.45)$$

Значения макроскопических величин в ячейке находятся с помощью процедуры усреднения по всем частицам в ячейке:

$$\begin{aligned} n_c^n &= \frac{1}{V_c} \sum_{a \in c} 1, & \rho_c^n &= \frac{1}{V_c} \sum_{a \in c} m_a, \\ \rho_c^n \mathbf{v}_c^n &= \frac{1}{V_c} \sum_{a \in c} m_a \mathbf{v}_a^n, & \rho_c^n s_c^n &= \frac{1}{V_c} \sum_{a \in c} m_a s_a^n, \end{aligned} \quad (6.46)$$

где  $V_c$  — объем ячейки с номером  $c$ . Алгоритм расчета в описываемом методе делится на два этапа — эйлеров и лагранжев. На эйлеровом этапе вычисляются изменения скорости газа за счет градиента давления. На лагранжевом этапе вычисляются новые положения частиц.

Эйлерова часть выполняется на сетке без учета движения частиц:

$$\mathbf{w}_c = \mathbf{v}_c^n - \frac{\Delta t}{\rho_c^n} (\nabla P)_c^n. \quad (6.47)$$

Здесь через  $\mathbf{w}_c$  обозначено некоторое промежуточное значение скорости газа в ячейке  $c$ , получаемое на эйлеровом этапе расчета. Градиент давления в ячейке можно аппроксимировать центральными разностями. Но при этом необходимо следить за устойчивостью, выбирая соответствующий шаг по времени. Если шаг  $\Delta t$  и вновь получаемое значение скорости не удовлетворяют условию КФЛ, то берется уменьшенный шаг и значение скорости пересчитывается.

На лагранжевом этапе необходимо вычислить новые координаты частиц из уравнения:

$$\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = \mathbf{v}_a. \quad (6.48)$$

В этом уравнении в качестве скорости частицы  $\mathbf{v}_a$  необходимо использовать усредненные значения по времени и по пространству. Усреднение по времени производится по формуле

$$\bar{\mathbf{v}}_a = \frac{\mathbf{w}_c + \mathbf{v}_c^n}{2}. \quad (6.49)$$

Усреднение по пространству производится с помощью интерполирования соответствующих величин по близлежащим ячейкам. Например, в случае двумерной сетки можно использовать следующие выражения:

$$\mathbf{v}_a = \frac{1}{\Delta x^2} (S_{i+1,j} \bar{\mathbf{v}}_{a,i+1,j} + S_{i+1,j+1} \bar{\mathbf{v}}_{a,i+1,j+1} + S_{i,j+1} \bar{\mathbf{v}}_{a,i,j+1} + S_{i,j} \bar{\mathbf{v}}_{a,i,j}), \quad (6.50)$$

где коэффициенты  $S_{ij}$  равны площадям пересечения ячейки с центром в точке, где находится  $a$ -я частица, с четырьмя соседними ячейками.

В результате имеем

$$\mathbf{r}_a^{n+1} = \mathbf{r}_a^n + \Delta t \mathbf{v}_a. \quad (6.51)$$

После того, как найдены новые положения частиц, можно пересчитать все их характеристики  $\mathbf{u}_a^{n+1}$  на новом временном слое.

Метод частиц в ячейке является консервативным. В нем тождественно сохраняется масса, импульс и энергия на всей сетке. Его легко приспособить к случаю нескольких сред с внутренними границами при помощи частиц различных сортов. Недостатком метода является слишком завышенное требование к памяти. Разностная схема неустойчива. Метод работает только за счет эффективной вязкости  $\mu \approx \rho v \Delta x$ , связанной с частицами, пересекающими границы ячеек. Быстрые течения моделируются относительно неплохо, однако в областях, где  $v \approx 0$ , метод дает очень неточные результаты.

Имеется много других вариантов и модификаций метода частиц в ячейке. Вот некоторые из них: FLIC — метод жидкости в ячейках [251], MAC — метод маркеров в ячейке [252], [253] и др. Обзор и различные приложения этих методов в современных расчетах можно найти, например, в книгах [205, 213, 254].



**6.2.3. Метод крупных частиц.** О.М. Белоцерковский и Ю.М. Давыдов [255, 256] предложили метод крупных частиц. В этом методе остаются сильные стороны метода частиц в ячейке (эйлерово-лагранжев подход, организация вычислений), но совокупность многих частиц заменяется одной *крупной частицей* с массой, равной массе всей ячейки. При этом можно избежать флуктуаций и неустойчивостей.

На первом (эйлеровом) этапе жидкость предполагается моментально замороженной. Изменяются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом. Конвективные члены типа  $\nabla \cdot (\varphi \rho \mathbf{v})$ , соответствующие эффектам перемещения какой-либо величины  $\varphi$ , опускаются. Уравнения газовой динамики на этом этапе можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla P &= 0, \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (P \mathbf{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (6.52)$$

где  $e = \rho(\varepsilon + \mathbf{v}^2/2)$  — плотность полной энергии газа. Таким образом, поле плотности  $\rho$  на этом этапе заморожено. Для остальных величин получаем следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_c &= \mathbf{v}_c^n - \frac{\Delta t}{\rho_c^n} (\nabla P)_c^n, \\ \tilde{e}_c &= e_c^n - \frac{\Delta t}{\rho_c^n} [\nabla \cdot (P \mathbf{v})]_c^n. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Пространственные производные можно аппроксимировать центральными разностями. Возникающая при этом некоторая неустойчивость компенсируется на следующем шаге.

На втором, лагранжевом этапе вычисляются эффекты переноса. Моделируется движение потока массы (частиц)  $\Delta M$  через границы эйлеровых ячеек и происходит перераспределение частиц по пространству. Масса переносится только за счет нормальной к границе составляющей скорости  $v_\alpha$ :

$$\Delta M_\alpha^n = \rho_\alpha v_\alpha \Delta x \Delta t, \quad (6.54)$$

где индекс  $\alpha$  нумерует границы данной ячейки  $s$ . Плотность и нормальную компоненту скорости для данной границы необходимо выбирать с учетом требований точности и устойчивости алгоритма. В оригинальном методе крупных частиц были предложены формулы для алгоритмов 1-го и 2-го порядка точности [257]. Например, формулы для метода 1-го порядка точности получаются, если

$$\Delta M_{\alpha}^n = \begin{cases} \rho_L^n \frac{\tilde{v}_{\alpha,L} + \tilde{v}_{\alpha,R}}{2} \Delta x \Delta t, & \tilde{v}_{\alpha,L} + \tilde{v}_{\alpha,R} > 0, \\ \rho_R^n \frac{\tilde{v}_{\alpha,L} + \tilde{v}_{\alpha,R}}{2} \Delta x \Delta t, & \tilde{v}_{\alpha,L} + \tilde{v}_{\alpha,R} < 0, \end{cases} \quad (6.55)$$

где индексами  $L$  и  $R$  помечены значения величин слева и справа от границы  $\alpha$ .

На третьем, заключительном этапе производится регуляризация сетки, т. е. ее пересчет в прежнее состояние, перераспределение массы, импульса и энергии по пространству и определение окончательного поля эйлеровых параметров потока в момент времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . Уравнения этого этапа представляют собой законы сохранения массы, импульса и энергии, записанные в разностной форме. При этом предполагается, что потоки массы, вычисленные на втором этапе несут с собой промежуточные значения скорости и удельной энергии, вычисленные на первом этапе. Окончательные формулы для вычисления величин на третьем этапе можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_c^{n+1} &= \rho_c^n + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \sum_{\alpha} \Delta M_{c,\alpha}^n, \\ \rho_c^{n+1} \mathbf{v}_c^{n+1} &= \rho_c^n \tilde{\mathbf{v}}_c + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \sum_{\alpha} \tilde{\mathbf{v}}_{c,\alpha} \Delta M_{c,\alpha}^n, \\ \rho_c^{n+1} e_c^{n+1} &= \rho_c^n \tilde{e}_c + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \sum_{\alpha} \tilde{e}_{c,\alpha} \Delta M_{c,\alpha}^n, \end{aligned} \quad (6.56)$$

где суммирование производится по всем границам ячейки.

### 6.3. Метод SPH

**6.3.1. Базовые принципы.** Метод гидродинамики сглаженных (или размазанных) частиц (SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics) был предложен в работе [196] и в дальнейшем развит в работах [197, 258–260]. Главная идея метода состоит в замене непрерывной среды набором перекрывающихся друг друга частиц. Метод использует газодинамические уравнения в лагранжевых переменных и не требует введения разностной сетки.

По распространенности метод SPH является явным лидером в вычислительной астрофизике и применяется практически во всех ее разделах. Поэтому мы рассмотрим его более подробно. После разработки основ метода в конце 1970-х гг., метод продолжал интенсивно развиваться. Его модификации можно найти в работах [261–278].

Рассмотрим некоторую произвольную физическую величину  $f(\mathbf{r})$  и усредним ее следующим образом:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int f(\boldsymbol{\xi}) W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}, h) d\boldsymbol{\xi}, \quad (6.57)$$

где  $h$  — длина сглаживания,  $W$  — ядро сглаживания. В пределе при  $h \rightarrow 0$  среднее значение функции  $\langle f \rangle$  должно переходить в ее точное значение  $f$ :  $\langle f \rangle \rightarrow f$ . Поэтому функция  $W$  должна удовлетворять соотношениям

$$\int W(\mathbf{r}, h) d\mathbf{r} = 1, \quad (6.58)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r}, h) = \delta(\mathbf{r}).$$

Для перехода от непрерывного представления к дискретному представим, что расчетная область заполнена частицами с координатами  $\mathbf{r}_a$ . Тогда при усреднении величины  $f$  интеграл можно заменить суммой

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_a m_a \frac{f_a}{\rho_a} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, h), \quad (6.59)$$

где индекс  $a$  определяет номер «частицы». Для плотности получаем более простое выражение

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \sum_a m_a W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, h). \quad (6.60)$$

Таким образом, плотность определяется массами частиц, «размазанными» по пространству. Характер размазывания определяется ядром  $W$ . Характерная шкала размазывания равна  $h$ .

Если функция  $W$  задана, то пространственные производные можно вычислять сразу и поэтому сетка не требуется. Роль узлов сетки играют координаты частиц  $\mathbf{r}_a$ . Для примера, вычислим градиент функции  $f(\mathbf{r})$ . Имеем

$$\begin{aligned} \langle \nabla f \rangle &= \int_V \nabla f(\boldsymbol{\xi}) W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}, h) d\boldsymbol{\xi} = \\ &= \oint_S f(\boldsymbol{\xi}) W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}, h) dS + \int_V f(\boldsymbol{\xi}) \nabla W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}, h) d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Поверхностный интеграл по поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ , можно отбросить, поскольку на больших расстояниях ядро  $W$  должно стремиться к нулю. Поэтому выражение для градиента функции может быть преобразовано к виду

$$\langle \nabla f \rangle = \int_V f(\boldsymbol{\xi}) \nabla W(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}, h) d\boldsymbol{\xi}. \quad (6.62)$$

Переходя к дискретному представлению, находим:

$$\langle \nabla f \rangle = \sum_a m_a \frac{f_a}{\rho_a} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a, h). \quad (6.63)$$

Отметим, что замена дифференциальной производной на конечно-разностную не производится, так как в методе SPH все величины представлены в виде непрерывных (и даже гладких) распределений, а не в виде набора дискретных значений, как в других разностных схемах.

Точность метода определяется величиной  $h$  и зависит от структуры ядра  $W$ , для которого можно использовать различные представления. В оригинальной формулировке метода SPH использовалось гауссово ядро

$$W(\mathbf{r}, h) = \frac{1}{\pi^{3/2} h^3} e^{-y^2}, \quad (6.64)$$

где  $y = r/h$ . Метод с гауссовым ядром приводит к точности  $\sim h^2$ . Однако эта функция очень быстро спадает и поэтому при суммировании по частицам основной вклад будет давать только ближайшая частица. Это приводит к сильным флуктуациям в решении. Поэтому в настоящее время часто используют сплайновый вариант ядра, предложенный в работе [279]:

$$W(\mathbf{r}, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - 3y^2/2 + 3y^3/4, & 0 \leq y \leq 1, \\ (2 - y)^3/4, & 1 \leq y \leq 2, \\ 0, & y < 0, \quad y > 2. \end{cases} \quad (6.65)$$

Использование в методе сплайнового ядра приводит к точности порядка  $h^3$ .

**6.3.2. Аппроксимация основных уравнений.** Уравнение непрерывности в формализме SPH выполняется автоматически. Действительно, из уравнения (6.60) имеем (угловые скобки, обозначающие усреднение, здесь и далее для простоты будем опускать):

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \left( \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_b}{dt} \right) \cdot \nabla_a W_{ab} = \sum_b m_b (\mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a) W_{ab}, \quad (6.66)$$

где введены обозначения  $\mathbf{v}_{ab} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$ ,

$$\nabla_a W_{ab} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h). \quad (6.67)$$

С другой стороны, из (6.63) находим:

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})]_a &= \sum_b m_b (\mathbf{v}_b \cdot \nabla_a) W_{ab}, \\ \mathbf{v}_a \cdot (\nabla \rho)_a &= \sum_b m_b (\mathbf{v}_a \cdot \nabla_a) W_{ab}, \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\rho_a (\nabla \cdot \mathbf{v})_a = [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})]_a - \mathbf{v}_a \cdot (\nabla \rho)_a = - \sum_b m_b (\mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a) W_{ab}.$$

Отсюда и из (6.66) следует соотношение

$$\frac{d\rho_a}{dt} + \rho_a(\nabla \cdot \mathbf{v})_a = 0, \quad (6.69)$$

которое соответствует уравнению непрерывности в лагранжевой форме.

Используя основные положения метода SPH, легко сконструировать выражение для градиента давления  $\nabla P$ . Рассмотрим, например, форму:

$$\rho_a(\nabla P)_a = [\nabla(\rho P)]_a - P_a(\nabla \rho)_a = \sum_b m_b(P_b - P_a)\nabla_a W_{ab}. \quad (6.70)$$

Эта форма представления имеет то преимущество, что градиент давления исчезает тогда и только тогда, когда давление постоянно. Однако, это выражение имеет существенный недостаток: сила давления со стороны частицы  $a$  на частицу  $b$  не равна силе давления со стороны частицы  $b$  на частицу  $a$  (это связано с антисимметричностью выражения  $P_b - P_a$ ), что ведет к нарушению законов сохранения импульса и углового момента. Поэтому для оценки градиента давления необходимо использовать специальный подход, а именно:

$$\frac{(\nabla P)_a}{\rho_a} = \left[ \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) \right]_a + \frac{P_a}{\rho_a^2}(\nabla \rho)_a = \sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W_{ab}. \quad (6.71)$$

Уравнение импульса в этом случае запишется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W_{ab}. \quad (6.72)$$

Сила давления, действующая со стороны одной частицы на другую, в этом случае выражается как

$$\mathbf{F}_{ab} = m_a m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) W'(r, h)/r. \quad (6.73)$$

Это выражение показывает, что в этом случае градиент давления дает центрально-симметричную силу между парой частиц, и следовательно, при этом будут сохраняться импульс и угловой момент. В работах [281] и [280] приведены и другие симметричные выражения для градиента давления.

Для ядра в форме (6.65) выражение для  $W'(r, h)/r$  записывается в виде

$$W'(r, h)/r = \frac{3}{4\pi h^4} \begin{cases} (3y - 4)/h, & 0 \leq y \leq 1, \\ (2 - y)^2/r, & 1 \leq y \leq 2, \\ 0, & y < 0, \quad y > 2. \end{cases} \quad (6.74)$$

Модификацию выражения для градиента ядра можно найти в [282–285].

В формализме SPH уравнение энергии

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{P}{\rho}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{P}{\rho}[\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] + \frac{P}{\rho}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho \quad (6.75)$$

принимает вид

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\sum_b m_b \frac{P_a}{\rho_a^2} (\mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a) W_{ab}. \quad (6.76)$$

Если же уравнение энергии переписать в несколько ином виде:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\nabla \cdot \left( \frac{P \mathbf{v}}{\rho} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right), \quad (6.77)$$

то можно получить:

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\sum_b m_b \frac{P_b}{\rho_b^2} (\mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a) W_{ab}. \quad (6.78)$$

При реализации метода SPH, как правило, используют полусумму выражений (6.76) и (6.78), что дает уравнение энергии в виде

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) (\mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a) W_{ab}. \quad (6.79)$$

Отметим, что это уравнение имеет тот же симметрический множитель, что и уравнение импульса (6.72).

В стандартном варианте метода SPH движение частиц описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = \mathbf{v}_a. \quad (6.80)$$

Недостаток этого подхода заключается в том, что он допускает взаимопроникновение частиц двух встречных потоков, что противоречит уравнениям газовой динамики. В работах [280, 286] рассматривается модификация метода, названная XSPH (eXtended SPH), с более сложным уравнением движения частиц, при котором частица движется с усредненной по некоторой окрестности скоростью частиц-соседей. В этом случае эффект взаимопроникновения становится меньше.

Уравнение состояния в виде  $P = P(\rho, \varepsilon)$  можно брать настолько сложным, насколько этого требует физическая модель.

**6.3.3. Искусственная вязкость и самогравитация.** Выписанные выше уравнения были выведены для гладких течений невязкого газа, т.е. для случая, когда переход кинетической энергии в тепловую является обратимым. Как уже отмечалось выше, в прикладных задачах астрофизики основной проблемой численного моделирования является корректное описание ударных волн и контактных разрывов.

В методе SPH в ряде случаев (например, при больших числах Маха) теплового давления  $\sim \rho c_s^2$  может оказаться недостаточно для того, чтобы предотвратить взаимное проникновение частиц, и тогда разрывы в течениях воспроизводиться не будут. Для преодоления этой проблемы нужно предотвратить проникновение частиц на разрывах, не меняя решение в областях гладкого течения. Добиться этого можно с помощью искусственного увеличения давления только в окрестности разрыва. Одним из наиболее действенных способов увеличения давления является введение искусственной вязкости [168, 287] (см. также [241]).

В реальных газах молекулярная вязкость эффективна в остановке проникновения частиц на масштабах, сравнимых с длиной свободного пробега атомов или молекул. Чтобы достичь того же эффекта в газодинамическом моделировании (т. е. на масштабах порядка длины свободного пробега SPH-частиц), вводится искусственная вязкость, что позволяет эффективно увеличивать давление до  $\sim \rho(\Delta v)^2$  (здесь  $\Delta v$  — характерный масштаб изменения скорости). При этом искусственная вязкость работает только в областях, где скорость меняется значительно (например, на ударных волнах).

В методе SPH было предложено несколько различных форм для искусственной вязкости [259, 261, 281, 284, 288, 289]. Наиболее употребительная из них приведена в [280] и имеет вид:

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha_{\text{SPH}} c_s \mu_{ab} + \beta_{\text{SPH}} \mu_{ab}^2}{\rho_{ab}}, & \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} \leq 0, \\ 0, & \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} > 0, \end{cases} \quad (6.81)$$

где

$$\mu_{ab} = \frac{h \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^2 + \eta_{\text{SPH}}^2 h^2}, \quad \rho_{ab} = \frac{\rho_a + \rho_b}{2}, \quad \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b. \quad (6.82)$$

Здесь  $\alpha_{\text{SPH}}$ ,  $\beta_{\text{SPH}}$  и  $\eta_{\text{SPH}}$  — безразмерные константы, которые, как правило, принимаются равными следующим значениям:  $\alpha_{\text{SPH}} = 1$ ,  $\beta_{\text{SPH}} = 2$ ,  $\eta_{\text{SPH}} = 0,01$ . Как можно видеть, искусственная вязкость для метода SPH содержит как линейный по скорости член, описывающий сдвиговую и объемную вязкость, так и квадратичную вязкость, аналогичную вязкости фон Неймана–Рихтмайера [168]. Необходимо также отметить, что данная искусственная вязкость инвариантна по отношению к преобразованию Галилея, обращается в нуль для твердотельного вращения и сохраняет импульс и угловой момент.

С учетом искусственной вязкости уравнения импульса (6.72) и энергии (6.79) запишутся следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b} + \frac{P_a}{\rho_a} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab}. \quad (6.83)$$

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) (\mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a) W_{ab}. \quad (6.84)$$

В методе SPH самогравитация, т. е. взаимное притяжение частиц, может быть учтена достаточно просто. Для этого в уравнение импульса вводится дополнительный член  $\mathbf{f}^{\text{grav}}$ , описывающий гравитационное притяжение каждой частицы ко всем остальным:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{f}^{\text{hydro}} + \mathbf{f}^{\text{grav}}, \quad (6.85)$$

где  $\mathbf{f}^{\text{hydro}}$  определяется правой частью уравнения (6.72) (или (6.83) при учете искусственной вязкости), при этом удельная сила притяжения частицы  $a$  к частице  $b$  выражается как

$$\mathbf{f}_{ab}^{\text{grav}} = -\frac{Gm_b}{r_{ab}^2} \frac{\mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}}, \quad (6.86)$$

где  $G$ , как обычно, — гравитационная постоянная.

Отметим, что выражение для удельной силы имеет особенность при совпадающих (или очень близких) положениях частиц  $a$  и  $b$ . В работе [281] было показано, что эта особенность может быть обойдена с помощью использования «смягченного» гравитационного притяжения, когда в знаменателе правой части (6.86) вместо  $r_{ab}^2$  используется  $r_{ab}^2 + \delta^2$ , где  $\delta$  — малая величина. Другой подход предложен в работе [290], в которой удельная сила гравитационного притяжения определяется как

$$\mathbf{f}_{ab}^{\text{grav}} = -\frac{Gm_{ab}}{r_{ab}^2} \frac{\mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}}, \quad (6.87)$$

где  $m_{ab} = M_b(r_{ab})$  имеет вид

$$M_b(r_{ab}) = 4\pi \int_0^{r_{ab}} r^2 \rho(r) dr = 4\pi m_b \int_0^{r_{ab}} r^2 W(r, h) dr. \quad (6.88)$$

Для конкретного вида ядра, имеющего форму (6.65), величина  $M_b(r_{ab})$  определяется выражением

$$M_b(r_{ab}) = m_b \begin{cases} (4/3 - 6y^2/5 + y^3/2) y^3, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1/15 - 8y^3/3 + 3y^4 - 6y^5/5 + y^6/6, & 1 \leq y \leq 2, \\ 1, & y < 0, \quad y > 2. \end{cases}$$

**6.3.4. Переменная ширина размазывания.** Термин ширина размазывания использовался выше как обозначение для размера носителя ядра, т. е. области, где функция  $W$  отлична от нуля. Физическим значением этой величины является размер частицы в методе SPH.



Первоначально метод SPH использовал постоянную по частицам ширину размазывания  $h$ :

$$h^3 = \zeta \langle m/\rho \rangle, \quad (6.89)$$

где  $\zeta$  — численный параметр, близкий к единице. Ширина  $h$  определяется через число частиц-соседей пространственное разрешение схемы, поэтому для задач, где необходимо высокое (и/или переменное) разрешение, были предложены варианты метода SPH, в которых ширина размазывания  $h$  менялась по пространству и/или по времени.

Выпишем уравнения импульса и энергии для метода SPH для случая, когда ширина размазывания меняется от частицы к частице:

$$\frac{dv_a}{dt} = - \sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W(\mathbf{r}_{ab}, h_{ab}) - \sum_b \frac{Gm_{ab}}{r_{ab}^3} \mathbf{r}_{ab}. \quad (6.90)$$

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = - \frac{1}{2} \sum_b m_b \left( \frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) (\mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a) W(\mathbf{r}_{ab}, h_{ab}), \quad (6.91)$$

где  $h_{ab} = (h_a + h_b)/2$ . Отметим, что эти уравнения могут быть записаны и в других видах. Например, можно симметризовать ядро  $W$  следующим образом (см., например, [281, 291]):

$$W(\mathbf{r}_{ab}, h_{ab}) = \frac{W(\mathbf{r}_{ab}, h_a) + W(\mathbf{r}_{ab}, h_b)}{2}. \quad (6.92)$$

Ширину размазывания  $h_a$  можно определять через начальное распределение плотности  $\rho(0)$  как

$$h_a^3 = \zeta \frac{m_a}{\rho_a(0)}. \quad (6.93)$$

Для более точного воспроизведения решения ширина размазывания должна также меняться и со временем, чтобы число частиц-соседей для каждой частицы сохранялось примерно одним и тем же. В этом случае

$$h_a^3 = \zeta \frac{m_a}{\rho_a}. \quad (6.94)$$

В работах [265, 281, 285, 292–296] рассматривались и другие варианты динамического изменения ширины размазывания. Строгий вывод уравнений SPH для случая переменной ширины размазывания приведен в [293] и [280].

**6.3.5. Преимущества и недостатки.** Рассмотрим преимущества и недостатки метода SPH, основываясь на анализе результатов расчетов тестовой задачи.

Расчеты стандартной задачи о распаде разрыва проводились во многих работах (см., например, [259, 281, 284, 285, 297]). Полученные решения показывают, что метод SPH дает сильно размазанные ударные волны и контактные разрывы. Кроме того, в ряде случаев возникают нефизические осцилляции за ударной волной. Причина возникновения этих артефактов связана с использованием в методе SPH искусственной вязкости.

Свойства метода SPH часто исследуются также на примере задачи о сферическом коллапсе (см., например, [281, 285, 290, 293, 295]). Рассмотрим изотермическое сферическое облако газа массы  $M_*$  и радиуса  $R_*$  с радиальным профилем плотности:

$$\rho(R) = \frac{M_*}{2\pi R_*^2 R}. \quad (6.95)$$

Внутренняя энергия вещества принимается постоянной и равной  $\varepsilon = 0,05 GM_*/R_*$ , газ считается идеальным с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Для обезразмеривания уравнений используются следующие характерные значения: плотности  $\rho_*$ , скорости  $u_*$ , внутренней энергии  $\varepsilon_*$ , давления  $P_*$  и времени свободного падения  $t_*$ :

$$\rho_* = \frac{3M_*}{4\pi R_*^3}, \quad u_* = \sqrt{\frac{GM_*}{R_*}}, \quad \varepsilon_* = \frac{GM_*}{R_*}, \quad (6.96)$$

$$P_* = \rho_* \varepsilon_*, \quad t_* = \sqrt{\frac{\pi^2 R_*^3}{8GM_*}}.$$

Для целей сравнения получим решение задачи тремя методами: 1) с использованием одномерной лагранжевой полностью консервативной схемы Самарского–Попова (см. [188, 298]) на сетке с очень большим числом ячеек, это решение считалось «точным»; 2) методом SPH (в трехмерной постановке) с шириной размазывания постоянной по времени, но переменной по пространству; 3) методом SPH с переменной шириной размазывания. Расчеты по методу SPH проводились с  $N = 5000$  частиц равной массы  $m_a = M_*/N$ . Поскольку масса, заключенная внутри шара радиуса  $R$ , равняется  $M(R) = M_* R^2/R_*^2$ , положение каждой частицы в начальный момент определялось случайным образом, но так, чтобы выполнялось условие

$$R_* \sqrt{\frac{M(R_{a-1})}{M_*}} \leq R_a \leq R_* \sqrt{\frac{M(R_{a-1}) + m_a}{M_*}}, \quad (6.97)$$

что обеспечивает начальное распределение частиц в соответствии с профилем плотности. Распределения плотности и давления в начальный момент времени приведены на рис. 6.7. В принятой постановке внутренняя энергия газа мала и облако начинает коллапсировать под действием силы гравитации. При этом плотность и давление растут, но отношение внутренней и гравитационной энергий

уменьшается<sup>1)</sup>, поскольку показатель адиабаты больше  $4/3$ . Через некоторое время происходит отскок коллапсирующего вещества от центра и формируется ударная волна, распространяющаяся наружу. Затем снова начинается сжатие, после чего система приходит к вириальному равновесию, когда отношение полной внутренней энергии к модулю полной гравитационной энергии облака стремится к  $1/2$ .

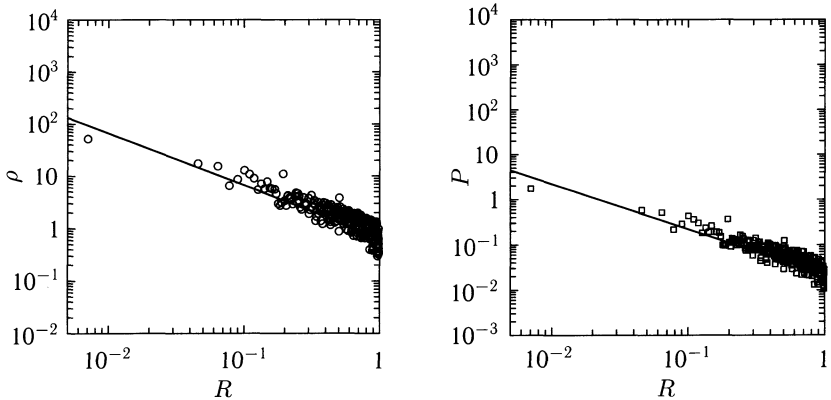


Рис. 6.7. Начальные распределения плотности и давления в задаче о сферическом коллапсе. Сплошные линии соответствуют точным начальным данным

Рассмотрим результаты расчета с постоянной по времени шириной размазывания. В начальный момент времени значения  $h_a$  определялись согласно (6.93) с  $\zeta = 1$  и в ходе расчета не менялись. Структура полученного решения приведена на рис. 6.8, 6.9 для моментов времени  $t = 0,7$  (непосредственно перед отскоком),  $t = 1,15$  (сразу после отскока) и  $t = 2,33$  (почти равновесие). SPH-частицы отмечены точками с соответствующим значением плотности  $\rho$ , давления  $P$ , внутренней энергии  $\varepsilon$  и радиальной скорости  $u$ . Жирной линией показано «точное решение», полученное по одномерной лагранжевой разностной схеме. Эти рисунки показывают, что вариант метода SPH с постоянной по времени шириной размазывания дает решение, которое очень плохо совпадает с «точным решением». Это обусловлено неоптимальным числом частиц-соседей (т.е. таких частиц, для которых  $r_{ab} \leq 2h_{ab}$ , при этом сама частица учитывается тоже), которое к тому же сильно меняется как по пространству, так и по времени. Распределение числа частиц-соседей  $N_{neib}$  приведено на рис. 6.10.

Рассмотрим результаты расчета с переменной по времени шириной размазывания, определяемой на каждом шаге согласно (6.94) (значение плотности бралось с предыдущего шага) с  $\zeta = 1$ .

<sup>1)</sup> Абсолютная величина этого отношения возрастает, так как гравитационная энергия отрицательна

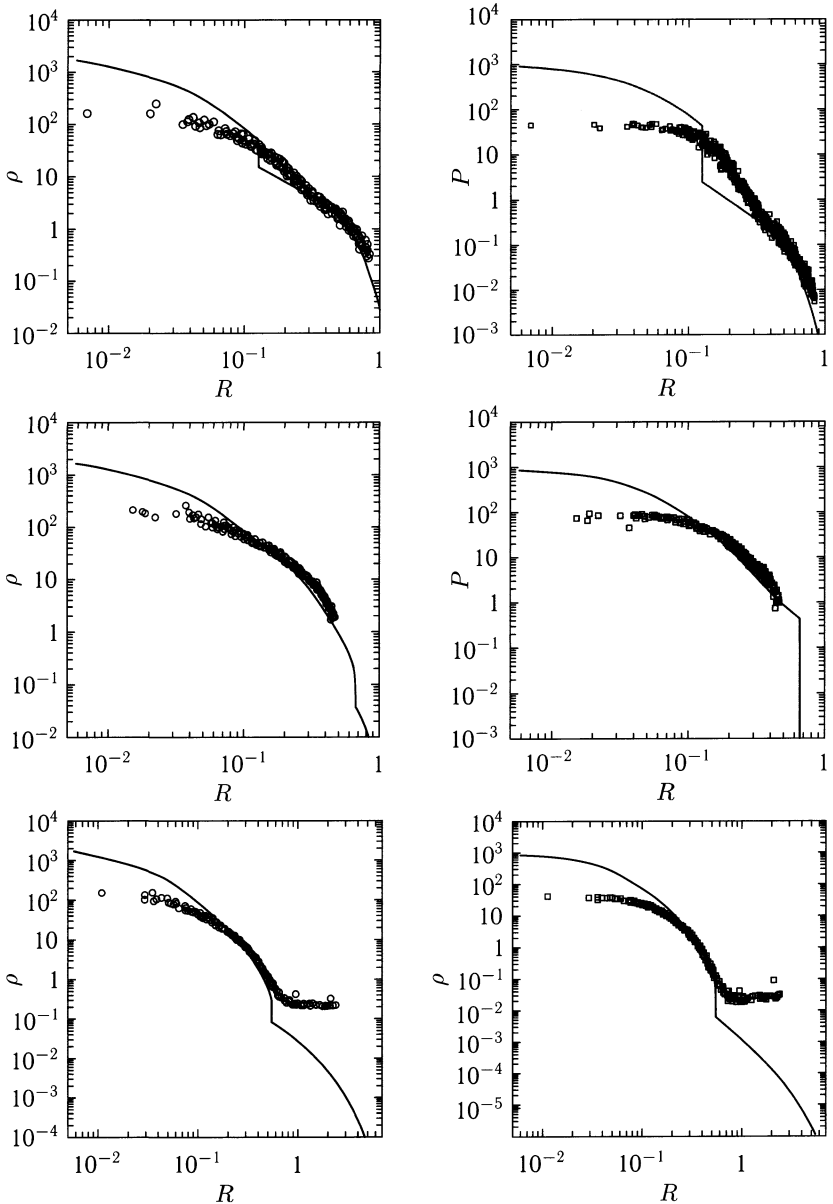


Рис. 6.8. Распределения плотности и давления в задаче о сферическом коллапсе для случая постоянной по времени ширины размазывания. Распределения соответствуют моментам времени  $t = 0,7$  (верхняя панель),  $t = 1,15$  (средняя панель) и  $t = 2,33$  (нижняя панель). На рисунке приведена каждая десятая частица. Сплошные линии соответствуют «точному решению»

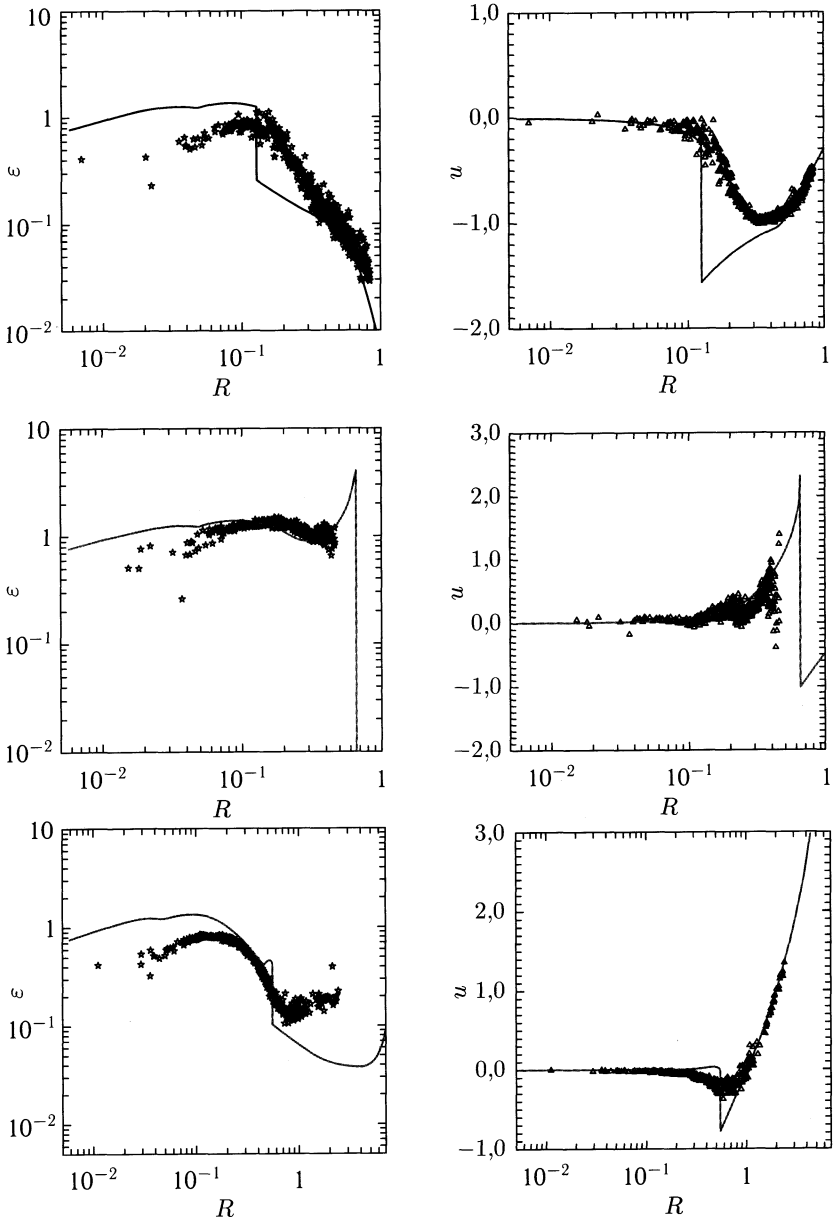


Рис. 6.9. Распределения внутренней энергии и скорости в задаче о сферическом коллапсе для случая постоянной по времени ширины размазывания. Показаны те же моменты времени, что и на рис. 6.8. На рисунке приведена каждая десятая частица. Сплошные линии соответствуют «точному решению»

Результаты расчета с переменной по времени шириной размазывания приведены на рис. 6.11, 6.12 для тех же моментов времени, что и на рис. 6.8, 6.9. Распределение числа частиц-соседей  $N_{neib}$  приведено на рис. 6.13.

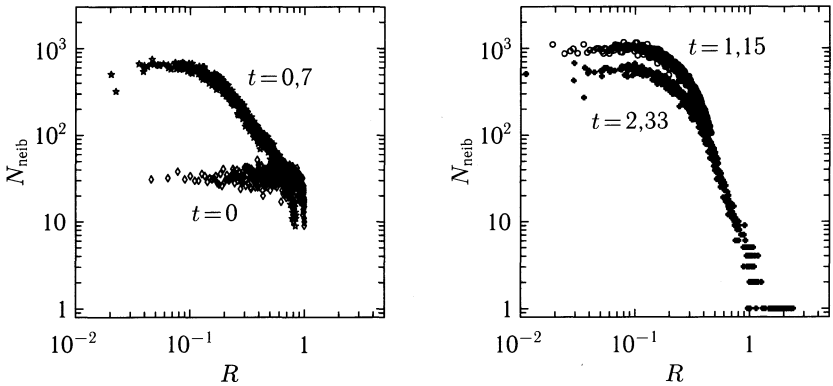


Рис. 6.10. Число частиц-соседей для случая постоянной по времени ширины размазывания для четырех моментов времени:  $t = 0; 0,7; 1,15$  и  $2,33$

Видно, что число частиц-соседей в этом варианте поддерживается на постоянном уровне, что определяет более хорошее (по сравнению с рис. 6.8, 6.9) совпадение с «точным решением». Однако, даже это решение имеет определенные недостатки, а именно:

- Ударные волны очень размазаны. Это связано с искусственной вязкостью.
- Для момента времени  $t = 1,15$  видно значительное отклонение положения ударной волны (рис. 6.12). Это связано с неконсервативностью метода SPH.
- Плохо передаются значения плотности в центре облака (большая плотность) и на краю облака (маленькая плотность), где SPH-частицы отсутствуют вообще.

Последнее обстоятельство показывает довольно существенный недостаток метода SPH — плохую передачу сильного контраста плотности. Действительно (см. также [295]), для случая постоянной по пространству ширины размазывания минимальная отличная от нуля плотность соответствует ситуации, когда все частицы изолированы, и равняется

$$\langle \rho_a \rangle_{\min} = m_a W(0, h). \quad (6.98)$$

Максимальная плотность соответствует случаю, когда центры всех частиц совпадают, и равняется

$$\langle \rho_a \rangle_{\max} = \sum_b m_b W(0, h). \quad (6.99)$$

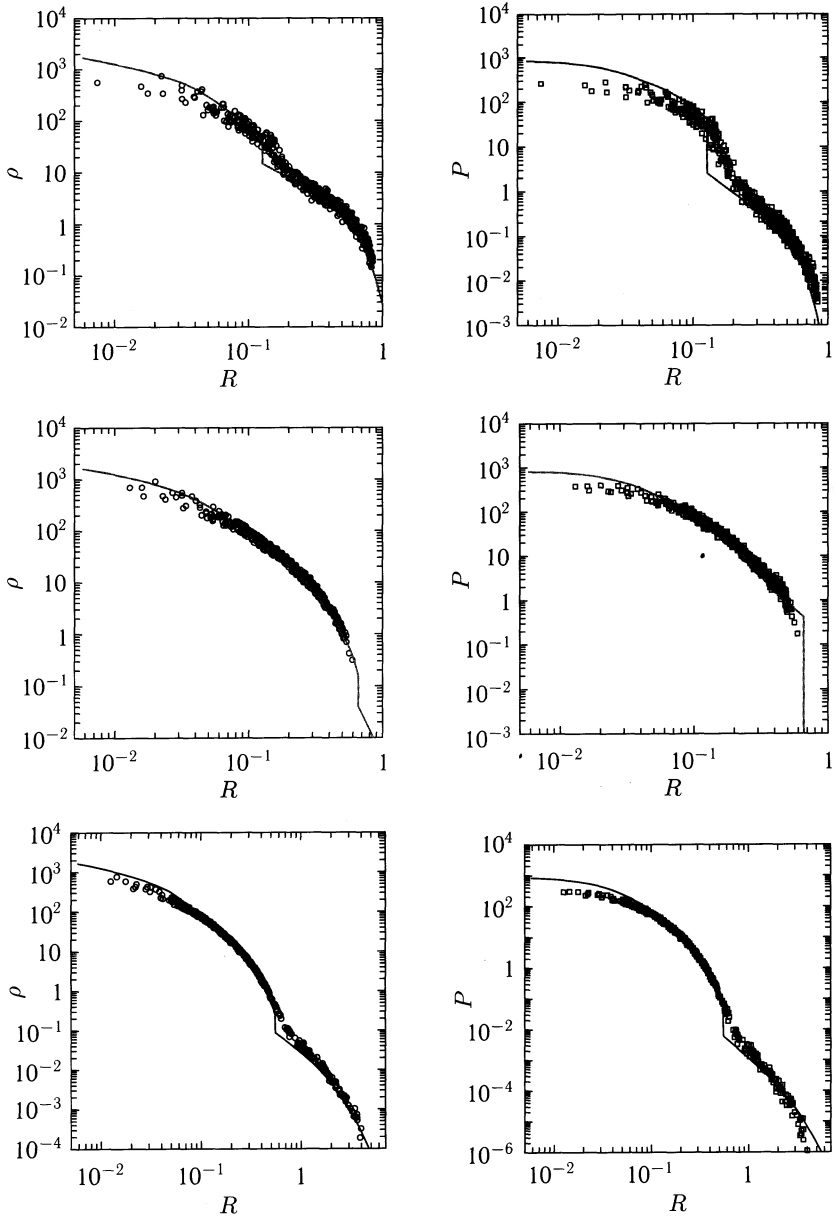


Рис. 6.11. Распределения плотности и давления в задаче о сферическом коллапсе для случая переменной по времени ширины размазывания. Показаны те же моменты времени, что и на рис. 6.8. На рисунке приведена каждая десятая частица. Сплошные линии соответствуют «точному решению»

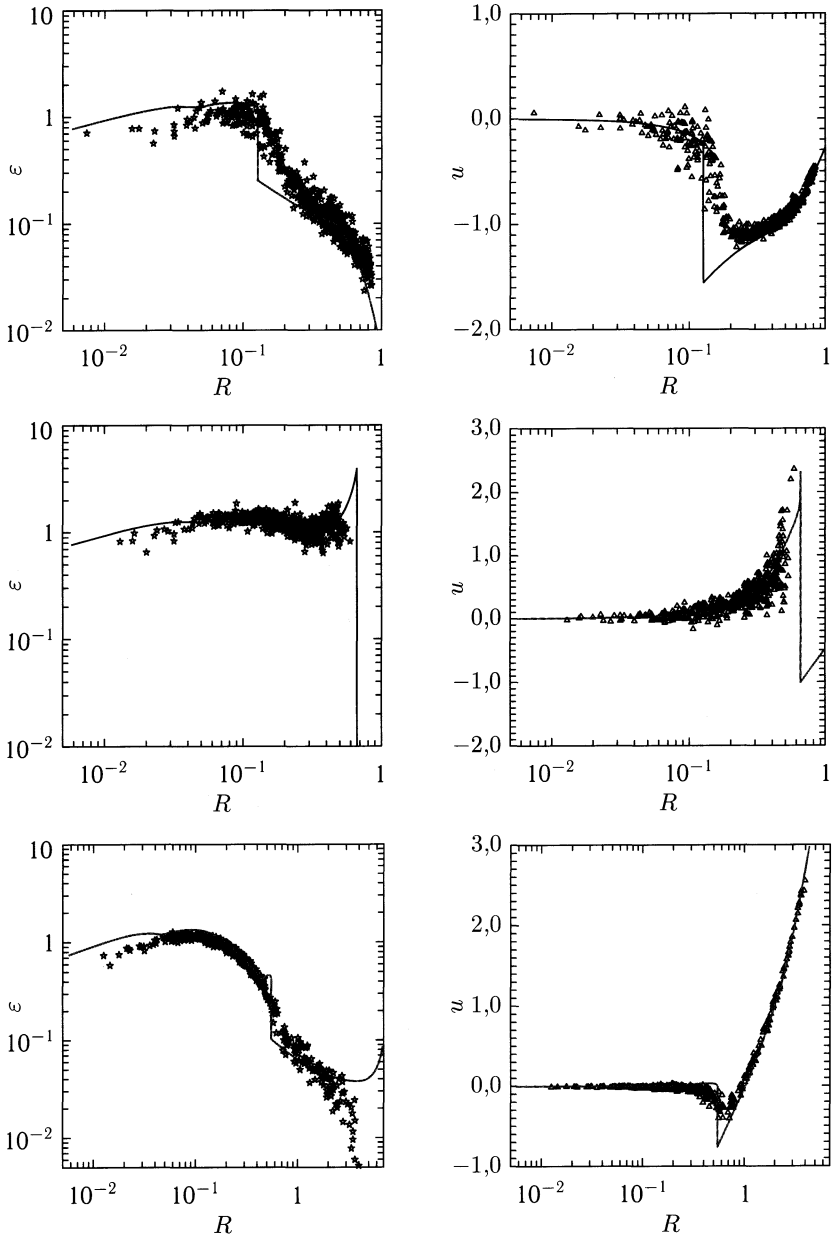


Рис. 6.12. Распределения внутренней энергии и скорости в задаче о сферическом коллапсе для случая переменной по времени ширины размазывания. Показаны те же моменты времени, что и на рис. 6.8. На рисунке приведена каждая десятая частица. Сплошные линии соответствуют «точному решению»



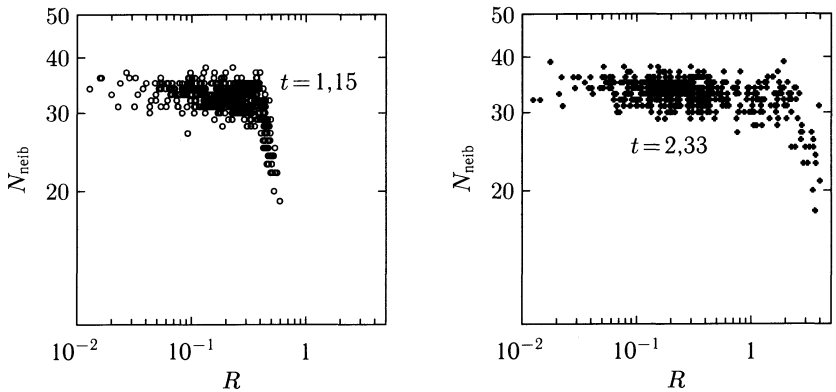


Рис. 6.13. Число частиц-соседей для случая переменной по времени ширины размазывания для моментов времени  $t = 1,15$  и  $t = 2,33$ .

Таким образом, отношение максимальной плотности к минимальной равняется  $N$ , т.е. в наших расчетах всего 5000. Однако, эта оценка чересчур оптимистична, в реальности метод SPH может покрывать диапазон плотностей с отношением  $\langle \rho_a \rangle_{\text{max}} / \langle \rho_a \rangle_{\text{min}}$ , равным  $N/50 - N/100$  [284]. Для варианта метода с переменной шириной размазывания этот диапазон оказывается бóльшим, но, как показывают тестовые расчеты, все равно недостаточным.

Резюмируя результаты тестовых расчетов, отметим, что метод SPH обладает довольно серьезными недостатками и воспроизводит решение весьма приближенно. Особенно это проявляется на ударных волнах и в задачах с сильным контрастом плотности. Описанные выше преимущества метода (простота учета самогравитации, удобство программирования и сохранение углового момента в осесимметричных задачах, обусловленное использованием лагранжевых переменных) не перекрывают его слабых сторон.

## ГОДУНОВСКИЕ МЕТОДЫ

## 7.1. Стандартная схема Годунова

**7.1.1. Общие принципы.** В настоящее время для численного решения гиперболических систем уравнений широкое распространение получил метод, предложенный С.К. Годуновым в 1959 г. [173]. В основе этого метода лежит процедура решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. В таком подходе при построении схемы не предполагается гладкость решения и считается, что сильные разрывы могут присутствовать в каждой ячейке. Поэтому схемы подобного типа являются универсальным средством решения задач с ударными волнами и контактными разрывами. Основную идею метода Годунова можно пояснить следующим образом. Рассмотрим для гиперболической системы консервативных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (7.1)$$

базовую схему (5.37), полученную в гл. 5 (см. раздел 5.2.2) с помощью метода конечных объемов:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0. \quad (7.2)$$

Здесь для удобства дальнейшего изложения мы поменяли стиль нумерации ячеек и узлов сетки. Ячейки теперь нумеруются целыми индексами, а узлы, наоборот, полуцелыми. Поскольку мы все равно не знаем истинного распределения функции  $\mathbf{u}(x, t)$  внутри ячеек, будем считать эту функцию кусочно-постоянной. Тогда ее значение в ячейке совпадает со средним значением:

$$\mathbf{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t^n) dx. \quad (7.3)$$

Итак, на границах ячеек в момент времени  $t^n$  имеют место произвольные разрывы, поскольку величины в соседних ячейках никак между собой не связаны (рис. 7.1). Поэтому в следующий момент времени должен произойти их распад. В результате распада разрыва на границе  $x_{i+1/2}$  ячеек с номерами  $i$  и  $i+1$  функция  $\mathbf{u}(x, t)$  принимает

некоторое значение  $\mathbf{u}_*(x_{i+1/2}, t)$ . Однако в силу автомодельности задачи Римана: все бегущие волны являются центрированными. Поэтому величина  $\mathbf{u}_*(x_{i+1/2}, t)$  не зависит от времени:

$$\mathbf{u}_*(x_{i+1/2}, t) = \mathbf{u}_*(x_{i+1/2}, t^n). \quad (7.4)$$

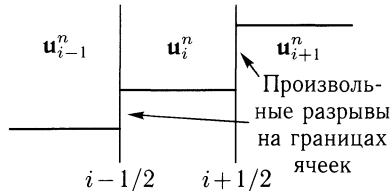


Рис. 7.1. Пояснение к методу Годунова

Согласно методу конечных объемов, численные потоки через границы ячеек определяются как средние значения по времени от физических потоков через эти границы:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(x_{i+1/2}, t) dt. \quad (7.5)$$

В методе Годунова физические потоки определяются из решения задачи о распаде разрыва:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}[\mathbf{u}_*(x_{i+1/2}, t)] dt. \quad (7.6)$$

Однако поскольку величина  $\mathbf{u}_*$  не зависит от времени, то этот интеграл можно вычислить явным образом:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}[\mathbf{u}_*(x_{i+1/2}, t^n)]. \quad (7.7)$$

Эти выражения остаются справедливыми до тех пор, пока бегущие волны от соседних границ не достигнут данной границы и не повлияют на значение величины  $\mathbf{u}_*$ . После этого условие автомодельности нарушается, бегущие волны перестают быть центрированными и, следовательно, величина  $\mathbf{u}_*$  будет уже зависеть от времени. Это условие накладывает определенное ограничение на временной шаг  $\Delta t$ , эквивалентное условию устойчивости КФЛ (5.103). Анализ показывает (см., например, [214]), что оно совпадает с условием устойчивости метода Годунова.

Описанная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству. Следует подчеркнуть, что схема Годунова выводится на основе интегральных соотношений и свойств разрывов. Этот подход принципиально отличается от способов получения схем, основанных на разложении в ряды Тейлора (например, таким способом выводится

схема Лакса–Вендроффа), при которых предполагается гладкость решения. Схема Годунова дает на сильных разрывах четкие монотонные профили без нефизических осцилляций. Поэтому ее (или родственные ей схемы) активно применяют при моделировании астрофизических течений, которые практически всегда сопровождаются формированием интенсивных ударных волн, контактных разрывов и волн разрежения.

Основной проблемой метода Годунова является то, что для определения величин  $u_*$  в общем случае приходится решать систему нелинейных алгебраических уравнений. Как правило, для этого в численном коде необходимо организовывать итерационный процесс, что приводит к дополнительным вычислительным затратам. Кроме того, точное решение задачи Римана о распаде разрыва может быть получено только для систем относительно простого вида. Решение задачи Римана о распаде произвольного газодинамического разрыва описано в Приложении А (см. раздел А.3.3). Более детально это решение с учетом его реализации в численном коде описано в книгах [214, 218, 299]. Весь алгоритм решения этой задачи можно представить в программе в виде компактной процедуры, занимающей около 200 строк кода. Листинг такой процедуры можно найти, например, в книге Торо [299].

**7.1.2. Линейные уравнения.** Как показано в Приложении А (см. раздел А.2.2), решение задачи Римана для уравнения адвекции имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < at, \\ u_R, & x > at. \end{cases} \quad (7.8)$$

Поэтому в точке первоначального разрыва  $x = 0$

$$u(0, t) = u_* = \begin{cases} u_L, & a > 0, \\ u_R, & a < 0, \end{cases} = h(a)u_L + h(-a)u_R, \quad (7.9)$$

где  $h(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда, равная 1 при  $x > 0$  и 0 в противном случае. Поток в методе Годунова

$$F_* = au_* = ah(a)u_L + ah(-a)u_R = a^+u_L + a^-u_R. \quad (7.10)$$

Коэффициенты  $a^\pm = ah(\pm a)$  могут быть представлены как

$$a^+ = \max(a, 0) = \frac{a + |a|}{2}, \quad a^- = \min(a, 0) = \frac{a - |a|}{2}. \quad (7.11)$$

Поэтому выражение для годуновского потока можно переписать в виде

$$F_* = \frac{F_L + F_R}{2} - \frac{|a|}{2} (u_R - u_L). \quad (7.12)$$

В результате приходим к следующей разностной схеме для уравнения адвекции:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (7.13)$$

где численные потоки определяются выражением

$$F_{i+1/2} = \frac{F_i^n + F_{i+1}^n}{2} - \frac{|a|}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n). \quad (7.14)$$

В случае  $a > 0$  эта схема переходит в схему с левой разностью:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (7.15)$$

В противоположном случае  $a < 0$  схема (7.13) переходит в схему с правой разностью:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0. \quad (7.16)$$

Таким образом, схема (7.13) совпадает со схемой донорской ячейки (6.20), рассматривавшейся в гл. 6 (см. раздел 6.1.2).

Гиперболическую систему линейных уравнений можно переписать в виде эквивалентной системы для инвариантов Римана:

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \lambda_\alpha \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} = 0. \quad (7.17)$$

Поэтому значения инвариантов Римана  $S^\alpha(0, t) = S_*^\alpha$  в точке  $x = 0$  в решении задачи о распаде разрыва по аналогии с (7.9) запишем в виде

$$S_*^\alpha = h(\lambda_\alpha) S_L^\alpha + h(-\lambda_\alpha) S_R^\alpha. \quad (7.18)$$

Для исходных величин получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_* &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha S_*^\alpha = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha [h(\lambda_\alpha) S_L^\alpha + h(-\lambda_\alpha) S_R^\alpha] = \\ &= \sum_{\alpha} h(\lambda_\alpha) \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_L) + \sum_{\alpha} h(-\lambda_\alpha) \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_R). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Отсюда находим годуновский поток:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_* &= \mathcal{A} \cdot \mathbf{u}_* = \\ &= \sum_{\alpha} h(\lambda_\alpha) \mathcal{A} \cdot \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_L) + \sum_{\alpha} h(-\lambda_\alpha) \mathcal{A} \cdot \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_R) = \\ &= \sum_{\alpha} h(\lambda_\alpha) \lambda_\alpha \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_L) + \sum_{\alpha} h(-\lambda_\alpha) \lambda_\alpha \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_R) = \\ &= \sum_{\alpha} \lambda_\alpha^+ \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_L) + \sum_{\alpha} \lambda_\alpha^- \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_R) = \\ &= \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{u}_L + \mathcal{A}^- \cdot \mathbf{u}_R, \end{aligned} \quad (7.20)$$

где обозначено

$$\lambda_{\alpha}^{\pm} = \frac{\lambda_{\alpha} + |\lambda_{\alpha}|}{2}, \quad \mathcal{A}^{\pm} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{\pm} \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{l}^{\alpha}. \quad (7.21)$$

Матрицы  $\mathcal{A}^{\pm}$  обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{+} + \mathcal{A}^{-} &= \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{l}^{\alpha} = \mathcal{A}, \\ \mathcal{A}^{+} - \mathcal{A}^{-} &= \sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}| \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{l}^{\alpha} = |\mathcal{A}|. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Поэтому

$$\mathcal{A}^{\pm} = \frac{\mathcal{A} \pm |\mathcal{A}|}{2}. \quad (7.23)$$

Используя эти соотношения, поток  $\mathbf{F}_{*}$  в (7.20) можно переписать как

$$\mathbf{F}_{*} = \frac{\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R}{2} - \frac{1}{2} |\mathcal{A}| \cdot (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L). \quad (7.24)$$

Представленное в такой форме выражение для годуновского потока вполне аналогично выражению (7.12) в случае уравнения адвекции.

Таким образом, схема Годунова для гиперболической системы линейных уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (7.25)$$

где численные потоки

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i+1}^n}{2} - \frac{1}{2} |\mathcal{A}| \cdot (\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n). \quad (7.26)$$

Схему (7.25) с потоками (7.26) (т.е. схему Годунова для линейной системы) часто называют схемой Куранта–Изаксона–Риса (см., например, [218]). Это обусловлено тем, что она может быть также получена из рассмотрения соотношений на характеристиках [172, 238]. Эта схема замечательна тем, что обладает минимальной численной вязкостью из всех линейных монотонных схем первого порядка.

**7.1.3. Представления потока.** Опишем различные формы представления годуновского потока. Рассмотрим для этого произвольную конфигурацию в задаче Римана (рис. 7.2). На каждой волне с номером  $\beta$  физический поток  $\mathbf{F}$  испытывает скачок, величина которого определяется соответствующими предельными значениями потоков для данной волны  $\Delta_{\beta} \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\beta}^{+} - \mathbf{F}_{\beta}^{-}$ . Очевидно, что полная вариация потока в конфигурации равна сумме вариаций на каждой волне:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = \sum_{\beta} \Delta_{\beta} \mathbf{F}. \quad (7.27)$$

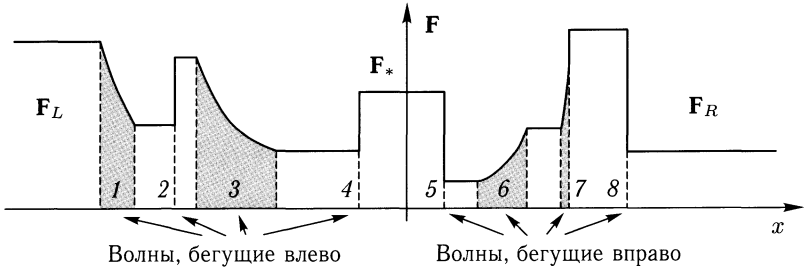


Рис. 7.2. Пояснение к различным способам нахождения численного потока в методе Годунова.

Это соотношение остается справедливым и для частичных вариаций потока, взятых по нескольким идущим подряд друг за другом волнам. Применим это соображение для вычисления потока в точке первоначального разрыва. Запишем очевидные соотношения:

$$\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_* = \sum_{\beta+} \Delta_{\beta} \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}_* - \mathbf{F}_L = \sum_{\beta-} \Delta_{\beta} \mathbf{F}. \quad (7.28)$$

Здесь в первом выражении суммирование проводится по всем волнам, распространяющимся вправо (положительные значения скорости волны). Во втором выражении суммирование проводится по всем волнам, распространяющимся влево (отрицательные значения скорости волны). Обозначим суммы

$$\mathbf{F}^{\pm} = \sum_{\beta \pm} \Delta_{\beta} \mathbf{F}. \quad (7.29)$$

Тогда можно написать

$$\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}^-. \quad (7.30)$$

Кроме того, взяв полусумму этих выражений, находим:

$$\mathbf{F}_* = \frac{\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{2} - \frac{\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-}{2}. \quad (7.31)$$

Пусть, например, все волны представляют собой сильные разрывы. Тогда вариации потоков можно определить с помощью условий Югионо:

$$\Delta_{\beta} \mathbf{F} = [\mathbf{F}]_{\beta} = D_{\beta} [\mathbf{u}]_{\beta}, \quad (7.32)$$

где  $D_{\beta}$  — скорость соответствующего разрыва, а квадратные скобки означают скачки величин при переходе через разрыв. Выражение для годуновского потока может быть записано в виде

$$\mathbf{F}_* = \frac{\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\beta} |D_{\beta}| [\mathbf{u}]_{\beta}. \quad (7.33)$$

Мы получили различные выражения для годуновского потока. Однако они не учитывают возможное появление в решении задачи Римана *трансзвуковых* бегущих волн. Пример трансзвуковой волны показан на рис. 7.3. Такие волны нельзя отнести ни к волнам, бегущим влево, ни к волнам, бегущим вправо. Они относятся одновременно и к тем и к другим.

Почему такие волны называются трансзвуковыми? Вспомним, что в газовой динамике звуковым характеристикам соответствуют собственные значения  $\lambda_{\pm} = v \pm c_s$  (см. Приложение А, раздел А.3.1). В автомодельных волнах разрежения собственное значение совпадает с автомодельной переменной ( $\lambda_{\pm} = \xi = x/t$ ). Поэтому, если в области волны автомодельная переменная меняет знак, то где-то внутри волны должна быть единственная точка, в которой  $\xi = \lambda_{\pm} = 0$ . В этой точке будет выполняться соотношение  $v = \mp c_s$ . Иными словами, в этой точке скорость газа (по модулю) оказывается равной местной скорости звука. Поэтому эту точку называют *звуковой точкой*. Таким образом, в трансзвуковой бегущей волне скорость газа меняется от дозвуковой до сверхзвуковой.

Если трансзвуковая волна является сильным разрывом, то она не вносит никакого вклада в годуновский поток, поскольку ее скорость  $D$  равна нулю (стационарный сильный разрыв). Если же такая волна является, например, волной разрежения, то она вносит определенный вклад  $\Delta_s \mathbf{F}$  в годуновский поток. Этот вклад звуковой точкой (поскольку она только одна) можно разделить на левую  $\Delta_s^- \mathbf{F}$  и правую  $\Delta_s^+ \mathbf{F}$  части:

$$\Delta_s \mathbf{F} = \Delta_s^+ \mathbf{F} + \Delta_s^- \mathbf{F}. \quad (7.34)$$

Эти выделенные части потока можно приписать к вкладам от левых и правых бегущих волн (7.29):

$$\mathbf{F}^{\pm} = \sum_{\beta \pm} \Delta_{\beta} \mathbf{F} + \Delta_s^{\pm} \mathbf{F}, \quad (7.35)$$

и учесть их таким образом в общем выражении для годуновского потока (7.31).

**7.1.4. Учет источниковых членов.** Рассмотрим гиперболическую систему консервативных уравнений (7.1) с ненулевой правой частью  $\mathbf{S}$ , описывающей заданное распределение источников:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}. \quad (7.36)$$

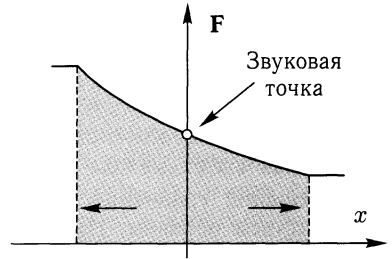


Рис. 7.3. Трансзвуковая бегущая волна



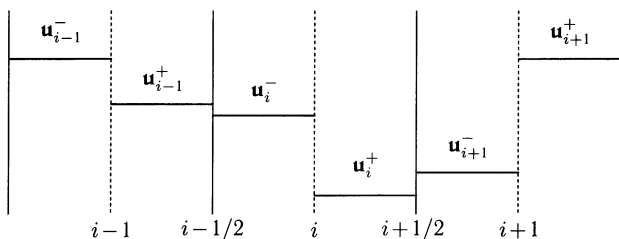


Рис. 7.4. Представление консервативных переменных в расчетных ячейках в методе Годунова с учетом сильных источников членов.

Простейший способ численного решения этого уравнения основан на использовании метода расщепления (см. раздел 5.2.4). В этом подходе решение уравнения (7.36) на интервале  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$  строится двухэтапным образом. На первом этапе с помощью метода Годунова решается однородное уравнение (7.1). На втором этапе в каждой ячейке решается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{S} \quad (7.37)$$

с начальными условиями, полученными на предыдущем этапе. Для большинства прикладных задач этот метод работает хорошо и поэтому он широко применяется в вычислительной астрофизике.

Вместе с тем часто возникают задачи, в которых величина временной производной в уравнении (7.36) мала по сравнению с остальными членами:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{S}|. \quad (7.38)$$

В этом случае решение уравнения (7.36) описывает состояние, близкое к стационарному, при котором выполняется приближенное равенство

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \approx \mathbf{S}. \quad (7.39)$$

При таких условиях численное решение уравнения (7.36) методом расщепления может существенно отличаться от точного, поскольку на каждом отдельном этапе величина временной производной  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  оказывается не малой по сравнению с другими членами  $\partial \mathbf{F} / \partial x$  и  $\mathbf{S}$ , что противоречит условиям (7.38). В принципе, при определенном подходе эти условия могли бы снова восстанавливаться после решения уравнения (7.37). Однако для этого необходимо, чтобы методы численного решения однородного уравнения (7.1) и уравнения (7.37) некоторым образом учитывали бы друг друга.

Один из таких подходов предложен в работе [300]. Идея этого метода заключается в следующем. В каждой ячейке консервативные переменные представляем в виде

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{u}_i^+ + \mathbf{u}_i^-}{2}, \quad (7.40)$$

где величины  $\mathbf{u}_i^+$  и  $\mathbf{u}_i^-$  относятся к правой и левой половинам ячейки с номером  $i$  соответственно (см. рис. 7.4). Соотношение (7.40) гарантирует выполнение законов сохранения. Величины  $\mathbf{u}_i^+$  и  $\mathbf{u}_i^-$  описывают градиент консервативных переменных  $\mathbf{u}$  внутри каждой ячейки. Они должны определяться из условий баланса (7.39), записанных в разностной форме:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_i^+) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^-) = \Delta x \mathbf{S}_i. \quad (7.41)$$

Численные потоки через границы ячеек теперь надо строить на основе решения задачи Римана с начальными состояниями, которые определяются величинами  $\mathbf{u}_i^+$  и  $\mathbf{u}_i^-$ . Например, численный поток  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  через границу с номером  $i + 1/2$  необходимо строить на основе решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва с начальными левым и правым состояниями, равными  $\mathbf{u}_i^-$  и  $\mathbf{u}_{i+1}^+$  соответственно. Заметим, что при этом величины  $\mathbf{u}_i^-$  и  $\mathbf{u}_{i+1}^+$  не будут существенно отличаться, поскольку возможный сильный градиент консервативных переменных, вызванный наличием внешних источников  $\mathbf{S}$ , фактически уже учтен внутри соответствующих ячеек. Поэтому в решениях задач Римана на границах ячеек расчетной сетки не будет возникать бегущих волн сильной интенсивности.

Прежде чем записать схему Годунова, учитывающую наличие источниковых членов, заметим, что стандартную схему Годунова (7.2) можно представить в альтернативном виде. Воспользуемся для этого формами (7.30) представления численных потоков. Выбрав потоки в виде

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1/2}^-, \quad \mathbf{F}_{i-1/2} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1/2}^+ \quad (7.42)$$

и подставив их в (7.2), приходим к следующей схеме:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2}^- + \mathbf{F}_{i-1/2}^+}{\Delta x} = 0. \quad (7.43)$$

Напомним, что здесь через  $\mathbf{F}^-$  и  $\mathbf{F}^+$  обозначены части численных потоков (7.29), обусловленные бегущими волнами, распространяющимися только влево или только вправо от границы ячейки соответственно. В данном случае поток  $\mathbf{F}_{i+1/2}^-$  строится по решению задачи Римана на правой границе  $i + 1/2$  по начальным левому и правому состояниям  $\mathbf{u}_i^n$  и  $\mathbf{u}_{i+1}^n$ , соответственно. Аналогично, поток  $\mathbf{F}_{i-1/2}^+$  строится по решению задачи Римана на левой границе  $i - 1/2$  по начальным левому и правому состояниям  $\mathbf{u}_{i-1}^n$  и  $\mathbf{u}_i^n$  соответственно.

Таким же образом может быть записана и схема Годунова с учетом внешних источников. Для этого запишем численные потоки через левую и правую границы ячейки с номером  $i$ :

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^+) + \mathbf{F}_{i+1/2}^-, \quad \mathbf{F}_{i-1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^-) - \mathbf{F}_{i-1/2}^+, \quad (7.44)$$

где теперь величина  $\mathbf{F}_{i+1/2}^-$  строится по решению задачи Римана с начальными состояниями слева и справа от разрыва, равными  $\mathbf{u}_i^+$  и  $\mathbf{u}_{i+1}^-$ , а величина  $\mathbf{F}_{i-1/2}^+$  строится по решению задачи Римана с начальными состояниями слева и справа от разрыва, равными  $\mathbf{u}_{i-1}^+$  и  $\mathbf{u}_i^-$ . Подставляя в (7.2) выражения (7.44), находим:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2}^- + \mathbf{F}_{i-1/2}^+}{\Delta x} + \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u}_i^+) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^-)}{\Delta x} = \mathbf{S}_i. \quad (7.45)$$

Отсюда видно, что если величины  $\mathbf{u}^\pm$  определять из условия баланса (7.41), то схема (7.45), формально, снова принимает прежний вид (7.43), но уже с несколько иными правилами вычисления численных потоков  $\mathbf{F}^\pm$ , учитывающими представления консервативных переменных (7.40) внутри расчетных ячеек.

Следует заметить, что распады произвольных разрывов внутри ячеек между величинами  $\mathbf{u}^-$  и  $\mathbf{u}^+$  также должны приводить к формированию бегущих волн, распространяющихся к левой и правой границам ячеек. Это должно накладывать в два раза более жесткое ограничение на шаг по времени  $\Delta t$  по сравнению со стандартной схемой Годунова. Однако модифицированная схема построена таким образом, что эти бегущие волны взаимно компенсируют воздействия друг друга. Поэтому в окончательной записи схемы они не участвуют и, следовательно, не оказывают влияния на величину шага по времени. Численные тесты (см. [300]) подтверждают этот вывод.

В качестве примера рассмотрим реализацию этого подхода для случая уравнений одномерной изотермической газодинамики с учетом внешней гравитационной силы  $g$ . В этом случае векторы консервативных переменных  $\mathbf{u}$ , потоков  $\mathbf{F}$  и источников  $\mathbf{S}$  в уравнении (7.36) имеют вид

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \end{pmatrix}, \quad (7.46)$$

где давление определяется уравнением состояния идеального изотермического газа,  $P = c_T^2 \rho$ ,  $c_T$  — изотермическая скорость звука. Величины  $\mathbf{u}^\pm$  удобно представить в виде  $\mathbf{u}^\pm = \mathbf{u} \pm \delta \mathbf{u}$ . Для определения величины возмущений  $\delta \mathbf{u}$  необходимо использовать уравнение (7.41). Из первой компоненты находим:  $\delta(\rho v) = 0$ . Вторая компонента дает:

$$\frac{(\rho v)^2}{\rho + \delta \rho} - \frac{(\rho v)^2}{\rho - \delta \rho} + c_T^2 \delta \rho = \Delta x \rho g. \quad (7.47)$$

Отсюда для возмущения плотности  $\delta \rho$  приходим к уравнению третьего порядка:

$$c_T^2 \delta \rho^3 - \Delta x \rho g \delta \rho^2 + [2(\rho v)^2 - c_T^2 \rho^2] \delta \rho + \Delta x \rho^3 g = 0. \quad (7.48)$$

Для случая адиабатической газовой динамики задача сводится к уравнению пятого порядка.

Следует однако заметить, что на практике, как правило, возмущения  $\delta \mathbf{u}$  оказываются малыми величинами по сравнению со средними значениями  $\mathbf{u}$ . Поэтому при решении уравнения баланса (7.41) достаточно ограничиться линейным по возмущениям приближением. В этом случае уравнение (7.41) упрощается и принимает вид

$$A(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} = \frac{\Delta x}{2} \mathbf{S}. \quad (7.49)$$

Например, в случае одномерной изотермической газодинамики линеаризованное уравнение (7.47) приводит к следующему решению:

$$\delta \rho = \frac{\Delta x \rho g}{c_T^2 - v^2}. \quad (7.50)$$

В частном случае, когда скорость газа  $v = 0$ , получаем решение, близкое к гидростатическому.

## 7.2. Методы, основанные на приближенном решении задачи Римана

**7.2.1. Описание различных подходов.** В схеме Годунова (7.2) для определения потоков  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  через границы  $x_{i+1/2}$  ячеек  $i$  и  $i+1$  достаточно найти лишь величины

$$\mathbf{u}_*(x_{i+1/2}, t) = \mathbf{u}_*(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}). \quad (7.51)$$

В принципе, вся остальная информация о решении для вычисления потоков не используется. Но она необходима для вычисления самих величин  $\mathbf{u}_*$ . Однако, как уже отмечалось выше, точное решение задачи Римана не всегда возможно использовать. Для сложных систем уравнений точное решение задачи о распаде разрыва либо еще не получено, либо является очень громоздким.

С другой стороны, сами входные данные  $\mathbf{u}_i^n$  и  $\mathbf{u}_{i+1}^n$  для процедуры решения задачи Римана в методе Годунова известны приближенно, поскольку находятся из разностной схемы, а не из решения строгой задачи. Поэтому в ряде методов для построения годуновских потоков используется не точное, а приближенное решение задачи Римана [299]. Такие приближенные Риман-солверы могут учитывать, например, только определенное число и только определенные типы бегущих волн, возникающих в результате распада разрыва. Наиболее известными схемами подобного типа являются схемы Лакса-Фридрихса [169, 170], HLL [193] (см. рис. 7.8), WAF [301], Роу [302], Ошера [192] и др. Эти методы успешно применялись в различных областях вычислительной физики и астрофизики (газодинамика с более сложным уравнением состояния [303], магнитная газодинамика [304, 305], релятивистская газодинамика [306], релятивистская магнитная газодинамика [307, 308]).

Можно выделить два основных приближения, используемых при разработке таких методов.

1) Приближение ударных волн. В этом подходе для всех нелинейных характеристик для построения решения задачи Римана в качестве бегущих волн используются ударные волны. Линейно-вырожденные характеристики также приводят к появлению сильных разрывов в решении. Таким образом, в этом приближенном решении все бегущие волны представляют собой сильные разрывы, на которых выполняются условия Гюгонио

$$D_\alpha[\mathbf{u}]_\alpha = [\mathbf{F}]_\alpha. \quad (7.52)$$

Решая систему условий Гюгонио для всех используемых для построения решения бегущих волн с учетом известных левого  $\mathbf{u}_L$  и правого  $\mathbf{u}_R$  состояний, находим скорости  $D_\alpha$  и все промежуточные значения величин  $\mathbf{u}$  между разрывами. Среди них будет и нужная величина  $\mathbf{u}_*$ .

Основной проблемой данного метода является то, что среди ударных волн могут быть ударные волны разрежения, которые не удовлетворяют условию эволюционности (нарушают закон возрастания энтропии) (рис. 7.5). Однако, как правило, алгоритм нормально работает за счет численной диссипации в схеме. Исключение составляют так называемые трансзвуковые волны разрежения. Для них нужно использовать специальные эволюционные поправки, которые будут рассмотрены ниже.

2) Приближение волн разрежения. В этом подходе для всех нелинейных характеристик для построения решения задачи Римана в качестве бегущих волн используются волны разрежения. При этом некоторые из них могут оказаться неэволюционными волнами сжатия (рис. 7.6). Волны сжатия с течением времени имеют тенденцию опрокидываться и переходить в ударные волны. Однако метод за счет численной диффузии работает корректно.

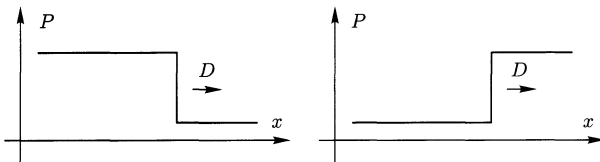


Рис. 7.5. Ударные волны сжатия (слева) и разрежения (справа)

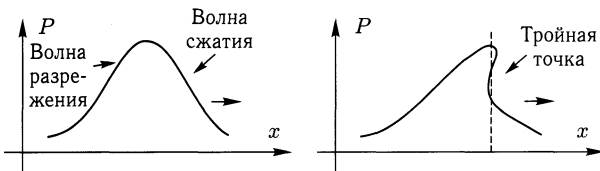


Рис. 7.6. Опрокидывание волны сжатия и формирование тройной точки

В рамках данного подхода можно выделить и отдельно рассмотреть трансзвуковые волны разрежения. Поэтому он хорошо себя зарекомендовал в задачах моделирования дозвуковых и трансзвуковых течений. Однако этот метод гораздо хуже работает для сверхзвуковых течений, в которых могут появляться очень сильные ударные волны. Другой трудностью этого подхода является то, что явные решения в виде волн разрежения можно построить только для систем уравнений не очень сложного вида. Наиболее известным примером подобной схемы является схема Ошера [192].

**7.2.2. Схема Лакса–Фридрихса.** По видимому, самым простым способом приближенного решения задачи Римана для нелинейных уравнений является метод Лакса–Фридрихса [169, 170]. В этом подходе считается, что в результате распада первоначального произвольного разрыва формируются только две ударные волны, распространяющиеся влево и вправо с одинаковыми по модулю скоростями (рис. 7.7). В качестве скоростей ударных волн выбираются максимальные по модулю собственные значения (спектральные радиусы) матрицы гиперболичности  $\mathcal{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$ , вычисленные для левого и правого состояний в задаче Римана:

$$D = \max_{\alpha} \{ |\lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_L)|, |\lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_R)| \}. \quad (7.53)$$

Запишем соотношения Гюгонио на левой и правой волнах:

$$\begin{aligned} -D(\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_L) &= \mathbf{F}_* - \mathbf{F}_L, \\ +D(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_*) &= \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_*. \end{aligned} \quad (7.54)$$

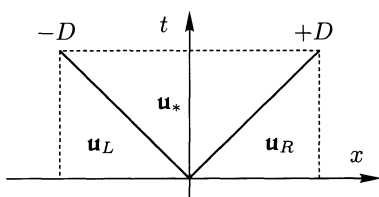


Рис. 7.7. Распад разрыва в приближении Лакса–Фридрихса.

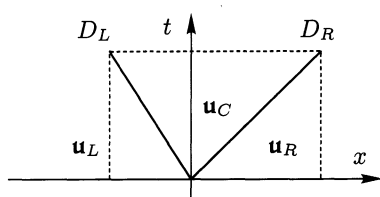


Рис. 7.8. Распад разрыва в приближении HLL

Эту систему уравнений можно рассматривать как два уравнения для двух неизвестных величин  $\mathbf{u}_*$  и  $\mathbf{F}_*$ . Решая их, находим:

$$\mathbf{u}_* = \frac{\mathbf{u}_R + \mathbf{u}_L}{2} - \frac{1}{2D} (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L), \quad (7.55)$$

$$\mathbf{F}_* = \frac{\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{2} - \frac{D}{2} (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L). \quad (7.56)$$

Здесь мы обозначили через  $\mathbf{u}_*$  и  $\mathbf{F}_*$  величины, относящиеся к промежуточной области между ударными волнами. Но поскольку скорость левой ударной волны в методе Лакса–Фридрихса всегда отрицательна, а скорость правой ударной волны всегда положительна, то точка  $x = 0$  положения первоначального разрыва как раз и оказывается в промежуточной области. Таким образом, найденная величина  $\mathbf{F}_*$ , определяемая выражением (7.56), представляет собой годуновский поток. Отметим, что с помощью выражения (7.55) поток (7.56) может быть представлен в общем виде (7.33), поскольку

$$\sum_{\beta} |D_{\beta}| [\mathbf{u}]_{\beta} = D(\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_L) + D(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_*) = D(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L). \quad (7.57)$$

В случае уравнений одномерной газовой динамики мы имеем три собственных значения матрицы гиперболичности:

$$\lambda_{\mp} = v \mp c_s, \quad \lambda_E = v. \quad (7.58)$$

Напомним, что собственные значения  $\lambda_{\mp}$  соответствуют звуковым характеристикам, а  $\lambda_E$  — энтропийной характеристике. Поэтому спектральный радиус матрицы гиперболичности можно записать в виде

$$\lambda = \max_{\alpha} \{|\lambda_{\alpha}|\} = |v| + c_s. \quad (7.59)$$

Таким образом, метод Лакса–Фридрихса для уравнений газовой динамики можно вывести из общего случая (7.56), если в качестве скоростей ударных волн использовать значения

$$D = \max\{|v_L| + c_{s,L}, |v_R| + c_{s,R}\}. \quad (7.60)$$

Схема Лакса–Фридрихса для системы уравнений газовой динамики имеет следующий вид:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (7.61)$$

где численные потоки определяются выражениями

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i+1}^n}{2} - \frac{\lambda_{i+1/2}}{2} (\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n), \quad (7.62)$$

$$\lambda_{i+1/2} = \max\{|v_i| + c_{s,i}, |v_{i+1}| + c_{s,i+1}\}. \quad (7.63)$$

Отметим, что в оригинальной схеме [169] в качестве коэффициента  $\lambda_{i+1/2}$  в (7.62) использовался глобальный максимум величин (7.63) по всей сетке. Схема в форме (7.62), использующая локальные максимумы (7.63), была предложена Русановым [309]. Несмотря на свою простоту и присущую ей существенную численную диффузию, схема Лакса–Фридрихса часто используется в вычислительной физике и астрофизике.

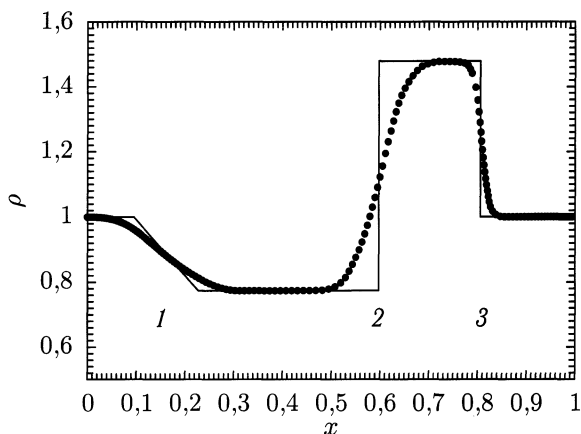


Рис. 7.9. Результат расчета задачи о распаде разрыва с начальными значениями  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 3\}$  при  $x < 0,5$ ,  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 1\}$  при  $x > 0,5$  (Тест 1) на момент времени  $t = 0,18$  по схеме Лакса–Фридрихса. Численное решение отмечено кружочками, а точное решение — сплошной линией. Цифрами обозначены: 1 — волна разрежения, 2 — контактный разрыв, 3 — ударная волна.

Схема Лакса–Фридрихса дает монотонные (без нефизических осцилляций), но сильно размазанные профили. Исследуем численно свойства этой схемы на задаче о распаде произвольного газодинамического разрыва со следующими начальными условиями:  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 3\}$  при  $x < 0,5$  и  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 1\}$  при  $x > 0,5$  (в дальнейшем этот расчет будем называть Тест 1). Газ принимался идеальным с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Решение этой задачи состоит из волны разрежения (отмечена цифрой 1) и константных решений, разделенных контактным разрывом (2) и ударной волной (3). Результаты расчета по схеме Лакса–Фридрихса на сетке с 200 ячеек на момент времени  $t = 0,18$  представлены на рис. 7.9. Видно, что получающееся решение является монотонным, но очень сильно размазано.

Диссипативные свойства схемы Лакса–Фридрихса хорошо видны на другом тесте — взаимодействии двух взрывных ударных волн, предложенном в работе [195]. В начальный момент времени принималась следующая конфигурация:  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 1000\}$  при  $x < 0,1$ ,  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 0,01\}$  при  $0,1 < x < 0,9$ ,  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 100\}$  при  $x > 0,9$  (в дальнейшем — Тест 2). Газ принимался идеальным с показателем адиабаты  $\gamma = 7/5$ . Как результат распада этого разрыва, возникают две ударные волны  $S1$  и  $S2$  и два контактных разрыва  $C1$  и  $C2$ , которые взаимодействуют между собой и порождают новые ударные волны  $S3$  и  $S4$  и контактные разрывы  $C3$  и  $C4$ . На рис. 7.10 представлены изолинии плотности на плоскости  $(x, t)$  (на нижней панели показано увеличенное изображение для прямоугольника, изображенного на верхней панели). Взаимодействие  $C2$  с  $S4$  изменяет скорость



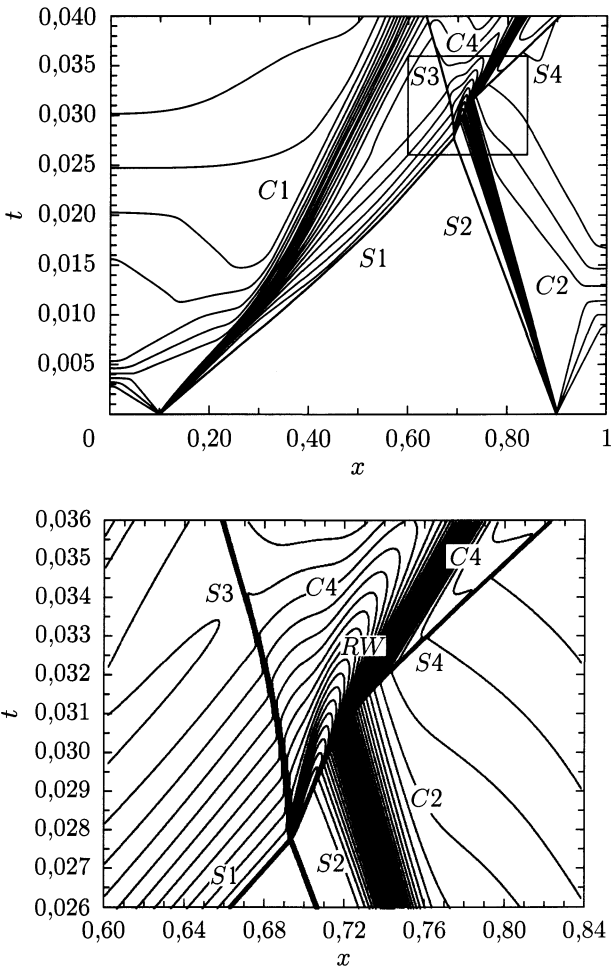


Рис. 7.10. Изолинии плотности на плоскости переменных  $(x, t)$  для расчета задачи о взаимодействии двух взрывных ударных волн (Тест 2) по схеме Лакса-Фридрихса. Обозначения:  $S1-S4$  — ударные волны,  $C1-C4$  — контактные разрывы,  $RW$  — волна разрежения. Снизу показано увеличенное изображение прямоугольной области, отмеченной на верхней панели

распространения  $S4$  и, кроме того, порождает контактный разрыв  $C4$  и волну разрежения  $RW$ , которая изменяет скорость распространения контактного разрыва  $C3$ , возникшего в результате взаимодействия  $S1$  и  $S2$ . Анализ результатов, представленных на рис. 7.10, показывает, что контактные разрывы передаются схемой Лакса-Фридрихса очень плохо, в частности,  $C3$  практически не виден, так же как и  $RW$ . Забегая вперед, скажем, что  $RW$  смогла передать только схема Рунге-Ошера.

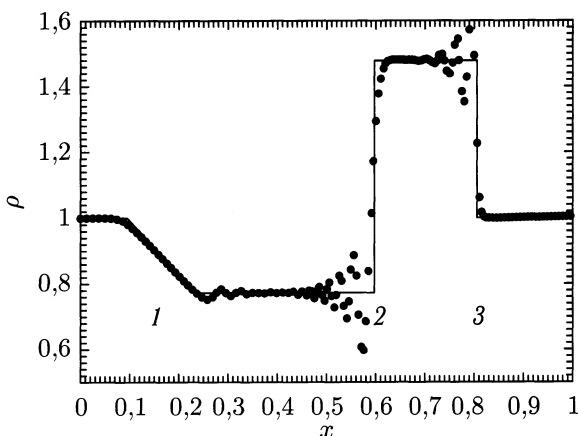


Рис. 7.11. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 1) на момент времени  $t = 0,18$  по схеме Лакса–Вендроффа. Обозначения те же, что и на рис. 7.9.

Из представленных расчетов видно, что рассматриваемая схема Лакса–Фридрихса плохо передает детали течения в силу большой численной вязкости. Следовательно для численного моделирования прикладных задач требуется разработка специальных алгоритмов, уменьшающих численную вязкость схемы. Подробное описание таких схем будет приведено в следующей главе. Здесь же лишь заметим, что уменьшение численной вязкости схемы должно проводиться так, чтобы сохранялось свойство монотонности. В случае, если данное условие не выполняется, приближенное решение может сильно отличаться от точного. Так, расчеты Теста 1 по схеме Лакса–Вендроффа, обладающей низкой численной вязкостью, но не являющейся монотонной, показывают (рис. 7.11) наличие нефизических осцилляций за фронтами ударной волны и контактного разрыва.

**7.2.3. Схема HLL.** Другим простым способом приближенного решения задачи Римана для нелинейных уравнений является метод HLL [193]. В этом подходе, так же как и в приближении Лакса–Фридрихса, считается, что при распаде разрыва формируются только две ударные волны, но распространяющиеся влево и вправо с разными скоростями  $D_L$  и  $D_R$  (см. рис. 7.8). Идеальным вариантом было бы взять в качестве скоростей  $D_L$  и  $D_R$  скорости самой левой и самой правой волны, которые формируются при распаде данного разрыва. Однако эти значения заранее нам неизвестны и сами должны быть определены из решения задачи Римана. Поэтому в качестве скоростей  $D_L$  и  $D_R$  можно использовать какие-либо их приближенные значения. Например, можно выбрать следующие выражения:

$$D_L = \min_{\alpha} \{\lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_L), \lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_R)\}, \quad D_R = \max_{\alpha} \{\lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_L), \lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_R)\}. \quad (7.64)$$

Для определения промежуточных величин запишем соотношения Гюгионо на левой и правой волнах:

$$\begin{aligned} D_L(\mathbf{u}_C - \mathbf{u}_L) &= \mathbf{F}_C - \mathbf{F}_L, \\ D_R(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_C) &= \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_C. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Мы снова получили два уравнения для двух неизвестных  $\mathbf{u}_C$  и  $\mathbf{F}_C$ . Промежуточные значения величин здесь отмечены индексом  $C$ , а не звездочкой, как в случае схемы Лакса–Фридрихса. Это обусловлено тем, что в методе HLL волны имеют независимые скорости и поэтому они не обязательно будут распространяться в разные стороны от первоначального разрыва. Например, может оказаться  $D_L < 0$ ,  $D_R < 0$  и, следовательно, обе волны будут распространяться влево. В этом случае значение  $\mathbf{u}_*$  в точке расположения первоначального разрыва будет равно  $\mathbf{u}_R$ , а не  $\mathbf{u}_C$ . Решая уравнения (7.65), находим:

$$\mathbf{u}_C = \frac{D_R \mathbf{u}_R - D_L \mathbf{u}_L - \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{D_R - D_L}, \quad (7.66)$$

$$\mathbf{F}_C = \frac{D_R \mathbf{F}_L - D_L \mathbf{F}_R + D_L D_R (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)}{D_R - D_L}. \quad (7.67)$$

Выражение для годуновского потока можно находить по общей формуле (7.33) или вычислять непосредственно через  $\mathbf{F}_L$ ,  $\mathbf{F}_R$  и  $\mathbf{F}_C$ :

$$\mathbf{F}_* = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & D_L \geq 0, \\ \mathbf{F}_C, & D_L \leq 0 \leq D_R, \\ \mathbf{F}_R, & D_R \leq 0. \end{cases} \quad (7.68)$$

В случае уравнений газовой динамики для скоростей левой и правой волны лучше использовать такие выражения:

$$\begin{aligned} D_L &= \min\{v_L, v_R\} - \max\{c_{s,L}, c_{s,R}\}, \\ D_R &= \max\{v_L, v_R\} + \max\{c_{s,L}, c_{s,R}\}. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Схема HLL, так же как и схема Лакса–Фридрихса, дает монотонные, но сильно размазанные профили. Результаты расчета Теста 1 по схеме HLL представлены на рис. 7.12. В отличие от схемы Лакса–Фридрихса (см. рис. 7.9) в данном случае получается более четкий профиль контактного разрыва (обозначен на рисунке цифрой 2). В целом, численные решения, полученные этими двумя схемами, очень похожи.

Существует множество модификаций метода HLL (см., например, [299]). В методе HLLC [310], [311] учитывается не одно, а два промежуточных состояния, разделенных контактным разрывом

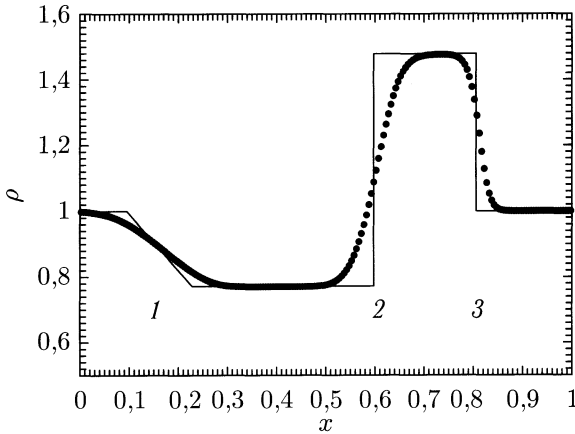


Рис. 7.12. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 1) на момент времени  $t = 0,18$  по схеме HLL. Обозначения те же, что и на рис. 7.9

(см. рис. 7.13). Однако в этом подходе явные выражения для потоков общего вида получить не удастся. Они теперь должны учитывать конкретную структуру уравнений, которая определяет соотношения Гюгонио на контактном разрыве. Продemonстрируем этот подход на примере уравнений газовой динамики.

В качестве скоростей левой и правой волн можно использовать выражения (7.69) из метода HLL. Скорость контактного разрыва  $D_C$  определяется скоростью газа:

$$D_C = v_L^* = v_R^* = v^*. \quad (7.70)$$

Кроме того, на контактном разрыве должно быть

$$P_L^* = P_R^* = P^*. \quad (7.71)$$

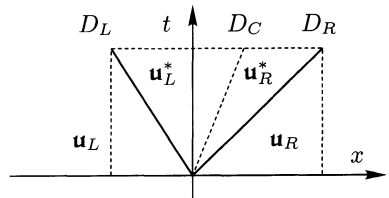


Рис. 7.13. Распад разрыва в приближении HLLC

Используя условия Гюгонио на двух ударных волнах, находим:

$$j_\alpha = \rho_\alpha (v_\alpha - D_\alpha), \quad (7.72)$$

$$D_C = \frac{j_R v_R - j_L v_L + P_R - P_L}{j_R - j_L}, \quad (7.73)$$

$$P^* = \frac{j_R P_L - j_L P_R - j_L j_R (v_R - v_L)}{j_R - j_L}, \quad (7.74)$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{D_\alpha - v_\alpha}{D_\alpha - D_C}, \quad (7.75)$$

$$\varepsilon_{\alpha}^* = \varepsilon_{\alpha} - \frac{P^* + P_{\alpha}}{2} \left( \frac{1}{\rho_{\alpha}^*} - \frac{1}{\rho_{\alpha}} \right). \quad (7.76)$$

В этих выражениях индекс  $\alpha$  пробегает значения  $L$  и  $R$ .

Результаты расчета Теста 1 по схеме HLLC представлены на рис. 7.14. Анализ рисунка показывает, что схема HLLC дает существенно более четкий профиль контактного разрыва (обозначен на рисунке цифрой 2) по сравнению со схемами Лакса–Фридрихса и HLL. На волне разрежения 1 и ударной волне 3 численные решения, полученные с помощью этих схем, различаются слабо.

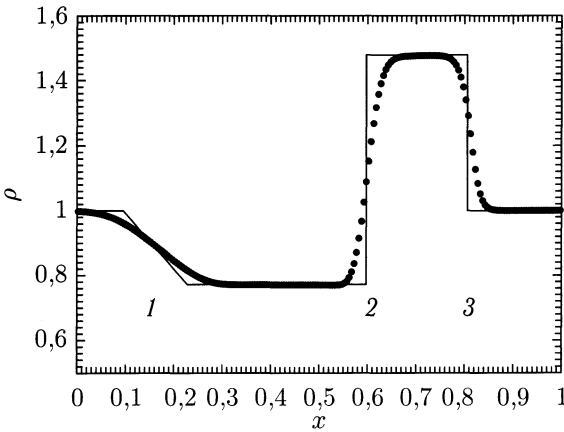


Рис. 7.14. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 1) на момент времени  $t = 0,18$  по схеме HLLC. Обозначения те же, что и на рис. 7.9.

**7.2.4. Схема Ошера.** В схеме Ошера [312] приближенное решение задачи Римана строится в виде автомодельных волн разрежения для истинно нелинейных характеристик и контактных разрывов для линейно вырожденных характеристик. Рассмотрим основную идею этого метода для случая строго гиперболической выпуклой системы.

Наряду с матрицей гиперболичности

$$A(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{l}^{\alpha} \quad (7.77)$$

введем вспомогательные матрицы  $A^{+}$  и  $A^{-}$ , определяемые выражениями

$$A^{\pm} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{\pm} \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{l}^{\alpha}, \quad (7.78)$$

где

$$\lambda_{\alpha}^{\pm} = \frac{\lambda_{\alpha} \pm |\lambda_{\alpha}|}{2}. \quad (7.79)$$

Эти матрицы удовлетворяют очевидным соотношениям

$$\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^- = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^- = |\mathcal{A}|, \quad (7.80)$$

где матрица

$$|\mathcal{A}| = \sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}| \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{I}^{\alpha}. \quad (7.81)$$

Матрицы аналогичного вида уже нами рассматривались выше (см. (7.21)). Однако теперь все сделано для случая системы нелинейных уравнений.

В данном подходе вектор потока можно представить следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-, \quad (7.82)$$

где  $\mathbf{F}^+$  и  $\mathbf{F}^-$  удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{\pm}}{\partial \mathbf{u}} = \mathcal{A}^{\pm} \quad (7.83)$$

и определяют вклады в общий поток от бегущих волн, распространяющихся от первоначального разрыва вправо и влево, соответственно. Годуновский поток  $\mathbf{F}_*$  можно записать тремя эквивалентными способами:

$$\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}_R - \int_{\Gamma} \mathcal{A}^+ \cdot d\mathbf{u}, \quad (7.84)$$

$$\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}^- = \mathbf{F}_L + \int_{\Gamma} \mathcal{A}^- \cdot d\mathbf{u}, \quad (7.85)$$

$$\mathbf{F}_* = \frac{\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R}{2} - \frac{\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-}{2} = \frac{\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R}{2} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\mathcal{A}| \cdot d\mathbf{u}. \quad (7.86)$$

Здесь  $\Gamma$  — линия в пространстве векторов  $\mathbf{u}$ , соединяющая точки  $\mathbf{u}_L$  и  $\mathbf{u}_R$ . Кривую  $\Gamma$ , вдоль которой производится интегрирование, удобно разбить на участки  $\Gamma_{\beta}$ , соответствующие отдельным бегущим волнам. Поскольку бегущие волны являются волнами разрежения или контактными разрывами, то вдоль участка с номером  $\beta$  правый собственный вектор  $\mathbf{r}_{\beta}$  является касательным вектором. Таким образом, например, интеграл

$$\int_{\Gamma} |\mathcal{A}| \cdot d\mathbf{u} = \sum_{\beta} \mathbf{I}_{\beta} = \sum_{\beta} \int_{\Gamma_{\beta}} |\mathcal{A}| \cdot d\mathbf{u}. \quad (7.87)$$

Для произвольной бегущей волны с номером  $\beta$ , как указывалось в гл. 5, можно ввести параметр  $\eta$ , монотонно изменяющийся вдоль соответствующего участка  $\Gamma_{\beta}$  кривой  $\Gamma$ . Тогда для этого участка элемент интегрирования  $d\mathbf{u} = \mathbf{r}_{\beta} d\eta$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\beta &= \int_{\Gamma_\beta} |\mathcal{A}| \cdot \mathbf{r}_\beta d\eta = \int_{\Gamma_\beta} |\lambda_\beta| \mathbf{r}_\beta d\eta = \\ &= \int_{\Gamma_\beta} \text{sign}(\lambda_\beta) \mathcal{A} \cdot \mathbf{r}_\beta d\eta = \int_{\Gamma_\beta} \text{sign}(\lambda_\beta) d\mathbf{F}. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Допустим, что индекс  $\beta$  соответствует линейно вырожденной характеристике. Такой характеристике в решении задачи Римана, в частности, может соответствовать контактный разрыв. Вдоль такой характеристики собственное значение  $\lambda_\beta$  остается постоянным. Поэтому

$$\mathbf{I}_\beta = \text{sign}(\lambda_\beta) \int_{\Gamma_\beta} d\mathbf{F} = \text{sign}(\lambda_\beta) \Delta_\beta \mathbf{F}. \quad (7.89)$$

Для истинно нелинейных характеристик при вычислении интеграла  $\mathbf{I}_\beta$  необходимо учесть возможность наличия звуковых точек  $\eta_s$ , в которых собственное значение  $\lambda_\beta$  изменяет знак. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\beta &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \text{sign}(\lambda_\beta) \lambda_\beta \mathbf{r}_\beta d\eta = \\ &= \text{sign}(\lambda_\beta) \int_{\eta_1}^{\eta_s} \lambda_\beta \mathbf{r}_\beta d\eta + \text{sign}(\lambda_\beta) \int_{\eta_s}^{\eta_2} \lambda_\beta \mathbf{r}_\beta d\eta. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Здесь пределы интегрирования  $\eta_1$  и  $\eta_2$  определяются левым и правым состояниями бегущей волны. Знаки  $\text{sign}(\lambda_\beta)$  перед интегралами в первом слагаемом нужно брать для области  $\eta < \eta_s$ , а во втором слагаемом — для области  $\eta > \eta_s$ . Анализируя различные возможные случаи, находим:

$$\mathbf{I}_\beta = \begin{cases} 2\mathbf{F}_s - \mathbf{F}_\beta^+ - \mathbf{F}_\beta^-, & \lambda_\beta(\eta_1) > 0, \lambda_\beta(\eta_2) < 0, \\ \mathbf{F}_\beta^+ + \mathbf{F}_\beta^- - 2\mathbf{F}_s, & \lambda_\beta(\eta_1) < 0, \lambda_\beta(\eta_2) > 0, \\ -\Delta_\beta \mathbf{F}, & \lambda_\beta(\eta_1) < 0, \lambda_\beta(\eta_2) < 0, \\ +\Delta_\beta \mathbf{F}, & \lambda_\beta(\eta_1) > 0, \lambda_\beta(\eta_2) > 0. \end{cases} \quad (7.91)$$

Здесь через  $\mathbf{F}_\beta^-$  и  $\mathbf{F}_\beta^+$  обозначены предельные левые и правые значения потока  $\mathbf{F}$  для бегущей волны с номером  $\beta$ .

В схеме Ошера ударные волны заменяются волнами сжатия. Но поскольку звуковые точки выделяются явным образом, то энтропийная коррекция не нужна. Недостатком этой схемы является некоторая громоздкость выражений для потока, связанная с необходимостью учета звуковой точки. Кроме того, для построения потока требуются явные выражения для величин в бегущих волнах. Это удается сделать только для систем уравнений относительно простого вида.

### 7.3. Схема Рунге

**7.3.1. Общее описание.** Одним из наиболее часто используемых приближенных методов решения задачи Римана является метод Рунге [194, 302, 313]. В этом методе вместо исходной задачи Римана

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0 \end{cases} \quad (7.92)$$

решается линеаризованная задача

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}_*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (7.93)$$

с теми же начальными условиями. Для того, чтобы решения исходной (7.92) и линеаризованной (7.93) задач были согласованными, матрица  $\mathcal{A}_*$  должна удовлетворять определенным условиям.

1) Матрица  $\mathcal{A}_*$  должна быть гиперболической. В противном случае задача Римана для системы линеаризованных уравнений (7.93) теряет смысл.

2) Матрица  $\mathcal{A}_*$  должна быть согласованной с матрицей гиперболическости  $\mathcal{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$  исходной системы уравнений (7.92). Это означает, что в пределе при  $\mathbf{u}_L \rightarrow \mathbf{u}_R = \mathbf{u}$  матрица  $\mathcal{A}_*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  должна плавно переходить в  $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ .

3) Матрица  $\mathcal{A}_*$  должна удовлетворять условию консервативности по отношению к разрывам:

$$\mathcal{A}_*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \cdot \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F}, \quad (7.94)$$

где обозначено  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L$ ,  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L$ . Это соотношение в методе Рунге является ключевым. При таком выборе матрицы  $\mathcal{A}_*$  решение приближенной задачи о распаде разрыва удовлетворяет тем же интегральным законам сохранения, что и решение исходной нелинейной системы.

Кроме того, если матрица  $\mathcal{A}_*$  удовлетворяет соотношению (7.94), то в специальном случае, когда  $\mathbf{u}_L$  и  $\mathbf{u}_R$  описывают состояния по разные стороны ударной волны или контактного разрыва, приближенное решение задачи о распаде разрыва совпадает с точным решением нелинейной задачи. Это вытекает из условий Гюниона

$$\Delta \mathbf{F} = D \Delta \mathbf{u}, \quad (7.95)$$

где  $D$  — скорость распространения ударной волны или контактного разрыва. Действительно, в этом случае из (7.94) следует, что  $\Delta \mathbf{u}$  является собственным вектором матрицы  $\mathcal{A}_*$ , соответствующим собственному числу  $D$ , и приближенное решение также будет состоять из скачка  $\Delta \mathbf{u}$ , движущегося со скоростью  $D$ .



Сформулированные условия определяют матрицу  $\text{Роу } \mathcal{A}_*$  не единственным образом. Часто оказывается удобным искать эту матрицу в виде  $\mathcal{A}_*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \mathcal{A}(\mathbf{u}_*)$ , где вектор  $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  описывает некоторые промежуточные значения консервативных переменных, вычисленные по левому и правому состояниям в задаче Римана. В этом случае первые два условия для матрицы  $\mathcal{A}_*$  удовлетворяются автоматически и остается удовлетворить только третьему. Однако даже при таком подходе построение матрицы  $\text{Роу } \mathcal{A}_*$  непосредственно из третьего условия (7.94) для систем уравнений достаточно сложного вида может представлять собой непростую и неоднозначную задачу.

В случае, когда прямым способом построить матрицу  $\text{Роу}$  не удается, можно использовать следующий подход. Будем искать матрицу  $\text{Роу}$  в виде

$$\mathcal{A}_* = \sum_{\beta} \mathbf{R}_{\beta} \Lambda_{\beta} \mathbf{L}^{\beta}, \quad (7.96)$$

где  $\Lambda_{\beta}$  — некоторые параметры, подлежащие определению, а  $\mathbf{R}_{\beta}$  и  $\mathbf{L}^{\beta}$  — правые и левые собственные векторы матрицы  $\mathcal{A}(\langle \mathbf{u} \rangle)$ . Здесь вектор  $\langle \mathbf{u} \rangle$  представляет собой вектор некоторых средних значений от величин  $\mathbf{u}_L$  и  $\mathbf{u}_R$ . При этом конкретный вид средних значений для данного подхода не важен. Для этого можно использовать, например, арифметические средние. Нетрудно убедиться, что величины  $\Lambda_{\beta}$  являются собственными значениями матрицы  $\text{Роу } \mathcal{A}_*$ , а  $\mathbf{R}_{\beta}$  и  $\mathbf{L}^{\beta}$  представляют собой правые и левые собственные векторы, соответственно.

Найдем выражения для собственных значений  $\Lambda_{\beta}$ . Для этого умножим левую и правую части соотношения (7.94) на левый собственный вектор  $\mathbf{L}^{\alpha}$ . Получим,

$$\mathbf{L}^{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{F} = \Lambda_{\alpha} \mathbf{L}^{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{u}. \quad (7.97)$$

Если скалярное произведение  $\mathbf{L}^{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{u} \neq 0$ , находим:

$$\Lambda_{\alpha} = \frac{\mathbf{L}^{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{F}}{\mathbf{L}^{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{u}}. \quad (7.98)$$

В противном случае, когда скалярное произведение  $\mathbf{L}^{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{u} = 0$ , из (7.97) следует, что  $\mathbf{L}^{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{F} = 0$  и нужно раскрывать неопределенность в (7.98). Однако, на самом деле, для метода это не представляет проблемы, поскольку такие бегущие волны не дают вклада в годуновский поток в схеме  $\text{Роу}$ .

Задача Римана для линейной гиперболической системы уравнений рассмотрена в Приложении А (раздел А.2.2). Используя эту информацию, легко выписать решение и для метода  $\text{Роу}$ . Это решение представляет собой совокупность сильных разрывов, скорости которых равны собственным значениям  $\lambda_{\alpha}$  матрицы  $\text{Роу } \mathcal{A}_*$ . Соответствующие скачки величин на разрывах

$$[\mathbf{u}]_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha}(\mathbf{l}^{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{u}). \quad (7.99)$$

Годуновский поток определяется выражением

$$\mathbf{F}_* = \frac{\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}| \mathbf{r}_{\alpha} \Delta S^{\alpha}, \quad (7.100)$$

где  $\Delta S^{\alpha} = \mathbf{l}^{\alpha} \cdot \Delta \mathbf{u}$ .

Основным недостатком метода Роу следует, по-видимому, считать то, что решение линейной системы (7.93), качественно повторяя решение исходной задачи (7.92), не содержит центрированных волн разрежения. Вместо этого решение состоит из системы скачков, распространяющихся со скоростями, соответствующими собственным числам матрицы  $\mathcal{A}_*$ , причем некоторые из этих скачков могут не удовлетворять условию эволюционности. Впрочем, отметим, что для большинства случаев метод Роу работает, даже если точное решение исходной задачи включает волны разрежения. Исключением являются решения с трансзвуковыми волнами разрежения, которые будут рассмотрены ниже.

**7.3.2. Вариант схемы для уравнений газовой динамики.** Рассмотрим проблему выбора матрицы  $\mathcal{A}_*$  для уравнений газовой динамики. Роу показал [302], что для этого случая с уравнением состояния идеального газа существует промежуточное значение  $\mathbf{u}_*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  такое, что матрица  $\mathcal{A}_*$  может быть представлена в виде  $\mathcal{A}_*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \mathcal{A}_*(\mathbf{u}_*)$  и при этом удовлетворяет (7.94).

Уравнения газовой динамики в одномерном случае можно записать в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (7.101)$$

где векторы консервативных переменных и потоков определяются выражениями

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho v, e)^T, \quad \mathbf{F} = (\rho v, \rho v^2 + P, \rho v h)^T. \quad (7.102)$$

Для идеального газа давление  $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ . Величина  $e = \rho\varepsilon + \rho v^2/2$  описывает плотность полной энергии газа, а  $h = \varepsilon + P/\rho + v^2/2$  представляет собой полную удельную энтальпию газа. Матрица гиперболичности системы (7.101), (7.102) имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q - v^2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ (q - h)v & h - (\gamma - 1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix}, \quad (7.103)$$

где обозначено  $q = (\gamma - 1)v^2/2$ . Собственные значения  $\lambda_{\alpha}$  и правые собственные векторы  $\mathbf{r}_{\alpha}$  этой матрицы имеют вид:

$$\lambda_1 = v - c_s, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = v + c_s, \quad (7.104)$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c_s \\ h - vc_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2v \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c_s \\ h + vc_s \end{pmatrix}. \quad (7.105)$$

Характеристические амплитуды  $\Delta S^\alpha = \mathbf{I}^\alpha \cdot \Delta \mathbf{u}$  определяются выражениями

$$\Delta S^1 = \frac{1}{2c_s^2} (\Delta P - \rho c_s \Delta v), \quad (7.106)$$

$$\Delta S^2 = \frac{1}{2c_s^2} (c_s^2 \Delta \rho - \Delta P), \quad (7.107)$$

$$\Delta S^3 = \frac{1}{2c_s^2} (\Delta P + \rho c_s \Delta v). \quad (7.108)$$

Для определения промежуточного значения  $\mathbf{u}_*$  нужно записать условие (7.94) для матрицы (7.103) и решить соответствующие уравнения. Первое уравнение сводится к тождеству  $\Delta(\rho v) = \Delta(\rho v)$ . Оставшиеся уравнения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} v_*^2 \Delta \rho - 2v_* \Delta(\rho v) + \Delta(\rho v^2) &= 0, \\ v_* h_* \Delta \rho + \Delta(\rho v h) - h_* \Delta(\rho v) - v_* \Delta(\rho h) &= 0. \end{aligned} \quad (7.109)$$

В результате получаем соотношения, позволяющие вычислить компоненты искомого вектора  $\mathbf{u}_*$ :

$$\rho_* = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad v_* = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad h_* = \frac{\sqrt{\rho_L} h_L + \sqrt{\rho_R} h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}. \quad (7.110)$$

Значение скорости звука, соответствующее вектору  $\mathbf{u}_*$ , может быть вычислено с помощью формулы

$$c_*^2 = (\gamma - 1) \left( h_* - \frac{v_*^2}{2} \right). \quad (7.111)$$

Однако использование данной формулы может приводить к потере точности, если кинетическая энергия газа много больше тепловой, поэтому в работе [314] для  $c_*$  предложена эквивалентная формула, не содержащая разности больших величин:

$$c_*^2 = \frac{\sqrt{\rho_L} c_L^2 + \sqrt{\rho_R} c_R^2}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\sqrt{\rho_L \rho_R}}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2} (\Delta v)^2. \quad (7.112)$$

Рассмотрим пример решения задачи о распаде разрыва (Тест 1 из раздела 7.2.2) по схеме Рунге. Результаты расчета задачи с начальными условиями  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 3\}$  при  $x < 0,5$  и  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 1\}$  при  $x > 0,5$  на сетке с 200 ячейками представлены на рис. 7.15.

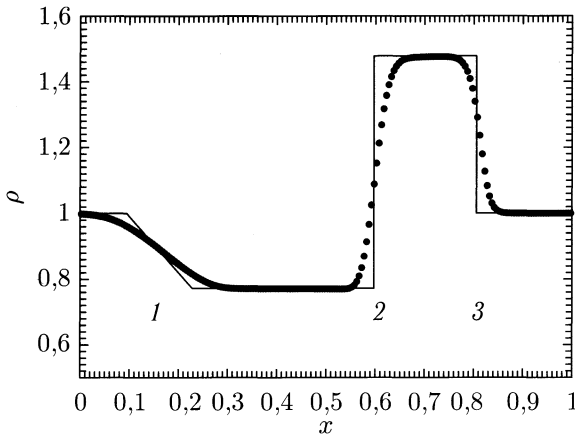


Рис. 7.15. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 1) на момент времени  $t = 0,18$  по схеме Роу. Обозначения те же, что и на рис. 7.9

Видно, что полученное решение монотонно и что контактный разрыв передается лучше, чем в схеме Лакса–Фридрихса (см. рис. 7.9).

Результаты расчета задачи о взаимодействии двух взрывных ударных волн (Тест 2 из раздела 7.2.2) представлены на рис. 7.16. Сравнение результатов данного расчета с решением, полученным по схеме Лакса–Фридрихса (см. рис. 7.10), показывает, что численная диссипация схемы Роу меньше, однако по-прежнему контактный разрыв  $C3$  и волна разрежения  $RW$  воспроизводятся плохо.

Для случая плоского течения, когда вектор скорости  $\mathbf{v}$  имеет все три компоненты  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$ , схема Роу может быть построена аналогичным способом. Векторы консервативных переменных и потоков

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, e)^T, \quad (7.113)$$

$$\mathbf{F} = (\rho v_x, \rho v_x^2 + P, \rho v_x v_y, \rho v_x v_z, \rho v_x h)^T. \quad (7.114)$$

Газ снова считаем идеальным. Плотность полной энергии газа  $e = \rho \varepsilon + \rho \mathbf{v}^2/2$ , а полная удельная энтальпия  $h = \varepsilon + P/\rho + \mathbf{v}^2/2$ . Матрица гиперболичности системы (7.101), (7.113), (7.114) имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q - v_x^2 & (3 - \gamma)v_x & (1 - \gamma)v_y & (1 - \gamma)v_z & \gamma - 1 \\ -v_x v_y & v_y & v_x & 0 & 0 \\ -v_x v_z & v_z & 0 & v_x & 0 \\ (q - h)v_x & h - (\gamma - 1)v_x^2 & (1 - \gamma)v_x v_y & (1 - \gamma)v_x v_z & \gamma v_x \end{pmatrix}, \quad (7.115)$$

где обозначено  $q = (\gamma - 1)\mathbf{v}^2/2$ .

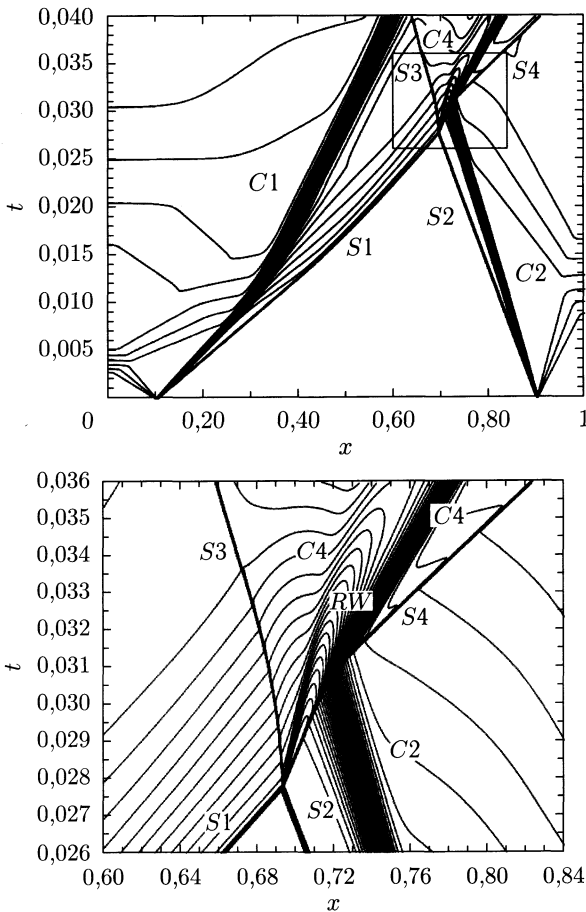


Рис. 7.16. Изолинии плотности на плоскости переменных  $(x, t)$  для расчета задачи о взаимодействии двух взрывных ударных волн (Тест 2) по схеме Роу. Обозначения те же, что и на рис. 7.10. Снизу показано увеличенное изображение прямоугольной области, отмеченной на верхней панели

Собственные значения  $\lambda_\alpha$  и правые собственные векторы  $\mathbf{r}_\alpha$  этой матрицы имеют вид:

$$\lambda_1 = v_x - c_s, \quad \lambda_{2,3,4} = v_x, \quad \lambda_5 = v_x + c_s, \quad (7.116)$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x - c_s \\ v_y \\ v_z \\ h - v_x c_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2c_s \\ 0 \\ 2c_s v_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2v_x \\ 2v_y \\ 2v_z \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad (7.117)$$

$$\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2c_s \\ 2c_s v_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x + c_s \\ v_y \\ v_z \\ h + v_x c_s \end{pmatrix}. \quad (7.118)$$

Характеристические амплитуды  $\Delta S^\alpha = \mathbf{l}^\alpha \cdot \Delta \mathbf{u}$  определяются выражениями

$$\Delta S^1 = \frac{1}{2c_s^2} (\Delta P - \rho c_s \Delta v_x), \quad (7.119)$$

$$\Delta S^2 = \frac{1}{2c_s^2} \rho c_s \Delta v_y, \quad \Delta S^3 = \frac{1}{2c_s^2} (c_s^2 \Delta \rho - \Delta P), \quad (7.120)$$

$$\Delta S^4 = \frac{1}{2c_s^2} \rho c_s \Delta v_z, \quad (7.121)$$

$$\Delta S^5 = \frac{1}{2c_s^2} (\Delta P + \rho c_s \Delta v_x). \quad (7.122)$$

Компоненты вектора вектора  $\mathbf{u}_*$  определяются следующими промежуточными значениями:

$$\rho_* = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad \mathbf{v}_* = \frac{\sqrt{\rho_L} \mathbf{v}_L + \sqrt{\rho_R} \mathbf{v}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}},$$

$$h_* = \frac{\sqrt{\rho_L} h_L + \sqrt{\rho_R} h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (7.123)$$

$$c_*^2 = \frac{\sqrt{\rho_L} c_L^2 + \sqrt{\rho_R} c_R^2}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\sqrt{\rho_L \rho_R}}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2} (\Delta \mathbf{v})^2.$$

**7.3.3. Энтروпийная поправка.** Энтропийное условие означает, что при прохождении вещества через ударную волну энтропия должна возрастать [145]. Ударные волны, удовлетворяющие энтропийному условию, называются эволюционными. Для случая идеального газа только ударные волны сжатия являются эволюционными, а ударные волны разрежения — неэволюционными. Этот вывод справедлив и в общем случае при некоторых ограничениях на вид уравнения состояния (нормальные газы).

Как уже отмечалось выше, в ряде случаев схема Рои может давать нефизические решения. Это проявляется в возникновении ударных волн разрежения. Рассмотрим пример такого решения для нелинейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad F = \frac{u^2}{2}. \quad (7.124)$$

В этом случае  $\partial F/\partial u = u$  и, следовательно, промежуточное значение  $u_*$  должно определяться из соотношения  $F_R - F_L = u_*(u_R - u_L)$ . Отсюда находим:  $u_* = (u_L + u_R)/2$ . В результате получаем схему Роу для уравнения (7.124) в виде:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (7.125)$$

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{4} [(u_i^n)^2 + (u_{i+1}^n)^2] - \frac{1}{4} |u_i^n + u_{i+1}^n| (u_{i+1}^n - u_i^n). \quad (7.126)$$

Рассмотрим задачу Римана для уравнения (7.124) со следующими начальными условиями:

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (7.127)$$

Точное решение этой задачи Римана описывает трансзвуковую волну разрежения,

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & x < -t, \\ x/t, & -t < x < t, \\ 1, & x > t. \end{cases} \quad (7.128)$$

Однако, схема Роу не дает этого решения, так как поток всегда  $F_{i+1/2} = 1/2$ , и, следовательно, в решении все время будет воспроизводиться начальный профиль. Фактически, в данном случае схема Роу дает в качестве решения неэволюционную ударную волну. Заметим, что данная проблема возникает всегда, когда решением задачи является трансзвуковая волна разрежения, содержащая звуковую точку, в которой  $\partial F/\partial u = 0$ .

Похожий результат можно получить и для уравнений газовой динамики. Рассмотрим задачу о распаде разрыва с такими параметрами:  $\{\rho, v, P\} = \{8, 0, 480\}$  при  $x < 0,5$  и  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 1\}$  при  $x > 0,5$  (в дальнейшем Тест 3). Газ принимался идеальным с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Так же как и для Теста 1, решение этой задачи состоит из простой волны разрежения и константных решений, разделенных контактным разрывом и ударной волной, однако здесь волна разрежения содержит звуковую точку (похожие результаты можно получить и для Теста 1 с помощью перехода в движущуюся систему координат). Результаты расчета по схеме Роу на сетке с 200 ячейками представлены на рис. 7.17. Видно, что в звуковой точке образуется ударная волна разрежения.

Причина возникновения неэволюционных разрывов в методе Роу достаточна очевидна. Она связана с тем, что матрица вязкости  $|\mathcal{A}|$  имеет нулевое собственное число на стационарных ударных волнах (безотносительно к тому, эволюционные они или нет). Это, безусловно, хорошо для эволюционных ударных волн, так как уменьшает

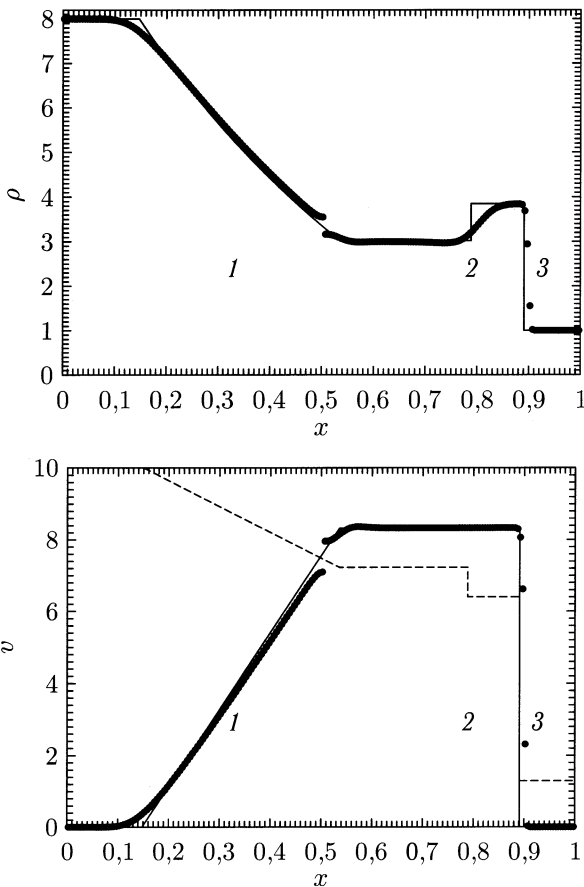


Рис. 7.17. Результат расчета задачи о распаде разрыва  $\{\rho, v, P\} = \{8, 0, 480\}$  при  $x < 0,5$ ,  $\{\rho, v, P\} = \{1, 0, 1\}$  при  $x > 0,5$  (Тест 3) на момент времени  $t = 0,035$  по схеме Рун. Численное решение отмечено кружочками, а точное решение — сплошной линией. Цифрами обозначены: 1 — волна разрежения, 2 — контактный разрыв, 3 — ударная волна. Пунктирной линией показана скорость звука

численную вязкость, однако, для предотвращения возникновения неэволюционных стационарных ударных волн было бы хорошо увеличить численную вязкость схемы. Такие подходы были предложены в работах [189, 315–317]. Однако, наиболее простой и эффективный метод предложен Эйфельдтом [314]. Из диаграммы, представленной на рис. 7.18, следует, что для  $v > 0$  замена в схеме Рун  $\lambda_1(\mathbf{u}_*)$  на  $\min\{\lambda_1(\mathbf{u}_*), \lambda_{1,i}\}$  увеличивает  $|\lambda_1|$  (и, следовательно, увеличивает численную вязкость) только для неэволюционных волн, в то время как на эволюционные волны эта операция не оказывает влияния.



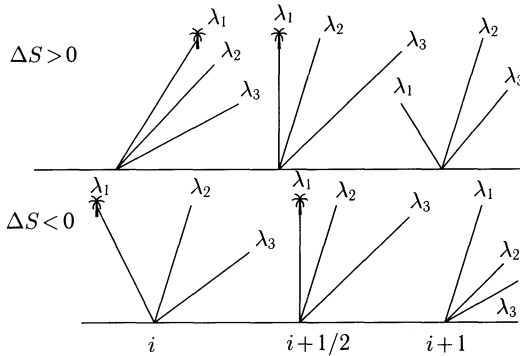


Рис. 7.18. Диаграмма эволюционных ( $\Delta S > 0$ ) и неэволюционных ( $\Delta S < 0$ ) ударных волн для  $v > 0$ . Для исключения нефизических скачков необходимо взять  $\min$  от  $\lambda_i^1$  и  $\lambda_{i+1/2}^1$

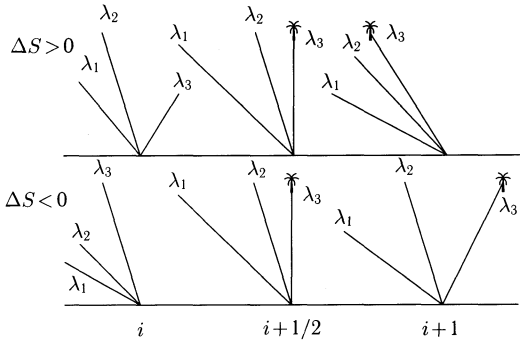


Рис. 7.19. Диаграмма эволюционных ( $\Delta S > 0$ ) и неэволюционных ( $\Delta S < 0$ ) ударных волн для  $v < 0$ . Для исключения нефизических скачков необходимо взять  $\max$  от  $\lambda_{i+1}^3$  и  $\lambda_{i+1/2}^3$

Аналогичное действие оказывает замена  $\lambda_3(\mathbf{u}_*)$  на  $\max\{\lambda_3(\mathbf{u}_*), \lambda_{3,i+1}\}$  для  $v < 0$  (рис. 7.19). В результате получаем схему Рунге-Эйфельдта:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \tag{7.129}$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i+1}^n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\tilde{\lambda}_{\alpha}| \mathbf{r}_{\alpha} \Delta S_{i+1/2}^{\alpha}, \tag{7.130}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \min\{\lambda_1(\mathbf{u}_*), \lambda_{1,i}\}, \\ \tilde{\lambda}_2 &= \lambda_2(\mathbf{u}_*), \end{aligned} \tag{7.131}$$

$$\tilde{\lambda}_3 = \max\{\lambda_3(\mathbf{u}_*), \lambda_{3,i+1}\}.$$

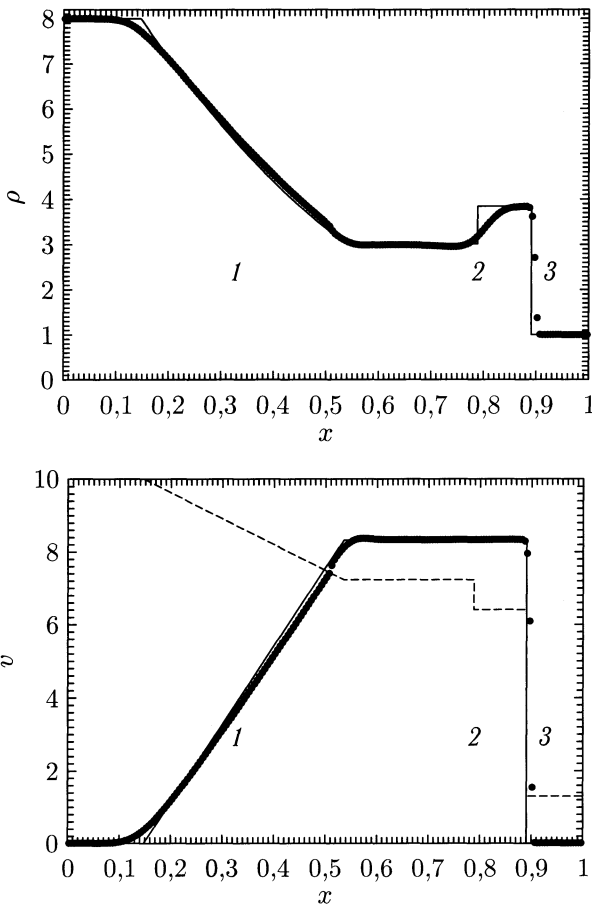


Рис. 7.20. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 3) на момент времени  $t = 0,035$  по схеме Рун–Эйфельдта. Обозначения те же, что и на рис. 7.17

Результаты расчета Теста 3 по схеме Рун–Эйфельдта (7.129)–(7.131) представлены на рис. 7.20. Видно, что в полученном решении ударная волна разрежения исчезает.

**7.3.4. Случай произвольного уравнения состояния.** Первоначально схема Рун была предложена для газодинамических уравнений с уравнением состояния идеального газа  $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ . Приближение идеального газа достаточно для большинства астрофизических задач, однако в ряде случаев требуется привлечение более сложного уравнения состояния. Например, при исследовании внутреннего строения белых карликов необходимо рассматривать не только идеальный газ ядер, но также вырожденный электронный газ и равновесное

излучение, что приводит к уравнению состояния [26, 318]:

$$P = R_g \rho T + P_e(\rho, T) + \frac{1}{3} a T^4, \quad (7.132)$$

$$\varepsilon = \frac{R_g T}{\gamma - 1} + \varepsilon_e(\rho, T) + \frac{a T^4}{\rho},$$

где  $a$  — постоянная Стефана.

Рассмотрим обобщение схемы Роу на случай произвольного уравнения состояния. Введем обозначение  $E = \rho \varepsilon$  для плотности внутренней энергии и будем считать, что уравнение состояния задано в виде  $P = P(\rho, E)$ <sup>1)</sup>. Тогда матрица гиперболичности  $\mathcal{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$  будет отличаться от рассмотренного выше выражения (7.103) и может быть записана как

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\Gamma - 3) \frac{v^2}{2} + \delta & (3 - \Gamma)v & \Gamma - 1 \\ \left[ (\Gamma - 1) \frac{v^2}{2} - h + \delta \right] v & h - (\Gamma - 1)v^2 & \Gamma v \end{pmatrix}. \quad (7.133)$$

Здесь  $\Gamma - 1 = (\partial P / \partial E)_\rho$ ,  $\delta = (\partial P / \partial \rho)_E$ <sup>2)</sup>. Как и раньше, собственные числа матрицы  $\mathcal{A}$  даются соотношениями:

$$\lambda_1 = v - c_s, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = v + c_s, \quad (7.134)$$

где скорость звука определяется как  $c_s = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_s}$  (производная берется при постоянном значении энтропии  $s$ ). Скорость звука может быть выражена через уравнения состояния следующим образом:

$$c_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_E - \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial E} \right)_\rho \left( \frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_E}{\left( \frac{\partial s}{\partial E} \right)_\rho} = (\Gamma - 1) \frac{E + P}{\rho} + \delta. \quad (7.135)$$

Правые и левые векторы матрицы (7.133) можно записать в виде:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c_s \\ h - v c_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2v \\ v^2 - \frac{2\delta}{\Gamma - 1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c_s \\ h + v c_s \end{pmatrix}, \quad (7.136)$$

<sup>1)</sup> В переменных  $\rho, E$  уравнение состояния идеального газа имеет вид  $P = (\gamma - 1)E$ .

<sup>2)</sup> Для случая идеального газа  $\Gamma = \gamma$ ,  $\delta = 0$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}^1 &= \frac{\Gamma-1}{2c_s^2} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\delta + vc_s}{\Gamma-1}, -v - \frac{c_s}{\Gamma-1}, 1 \right), \\
\mathbf{l}^2 &= \frac{\Gamma-1}{2c_s^2} \left( \frac{c_s^2 - \delta}{\Gamma-1} - \frac{v^2}{2}, v, -1 \right), \\
\mathbf{l}^3 &= \frac{\Gamma-1}{2c_s^2} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\delta - vc_s}{\Gamma-1}, -v + \frac{c_s}{\Gamma-1}, 1 \right).
\end{aligned} \tag{7.137}$$

Перейдем теперь к вычислению средних значений в схеме Роу. Условие (7.94) для матрицы (7.133) приводит к стандартным уравнениям (7.110) и новому уравнению

$$\delta(\rho_{**}, E_{**})\Delta\rho + [\Gamma(\rho_{**}, E_{**}) - 1]\Delta E = \Delta P. \tag{7.138}$$

Из стандартных уравнений (7.110) получаем соотношения, подобные случаю идеального газа:

$$\begin{aligned}
\rho_* &= \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad v_* = \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \\
h_* &= \frac{\sqrt{\rho_L} h_L + \sqrt{\rho_R} h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}.
\end{aligned} \tag{7.139}$$

Для определения  $c_* = c_s(\rho_{**}, E_{**})$  необходимо решить систему алгебраических уравнений, состоящую из (7.138) и

$$\frac{E_{**} + P(\rho_{**}, E_{**})}{\rho_{**}} = h_* - \frac{v_*^2}{2}. \tag{7.140}$$

Окончательная схема Роу для случая произвольного уравнения состояния имеет форму, аналогичную случаю уравнения состояния идеального газа:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = \mathbf{0}, \tag{7.141}$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i+1}^n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_*)| \mathbf{r}_{\alpha}(\mathbf{u}_*) \Delta S_{i+1/2}^{\alpha}, \tag{7.142}$$

где характеристические амплитуды

$$\Delta S_{i+1/2}^{\alpha} = \mathbf{l}^{\alpha}(\mathbf{u}_*) \cdot (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) \tag{7.143}$$

определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\Delta S_{i+1/2}^{1,3} &= \frac{1}{2c_*^2} [(P_{i+1} - P_i) \mp \rho_* c_* (v_{i+1} - v_i)], \\
\Delta S_{i+1/2}^2 &= \frac{1}{2c_*^2} [c_*^2 (\rho_{i+1} - \rho_i) - (P_{i+1} - P_i)].
\end{aligned} \tag{7.144}$$

Отличия данного варианта схемы Роу от схемы для случая уравнения состояния идеального газа заключаются лишь в алгоритме вычисления величины скорости звука  $c_*$ .

## 7.4. Схемы для уравнений магнитной газодинамики

**7.4.1. Краткий обзор схем.** Численные методы для моделирования МГД-течений по сравнению с обычной газодинамикой имеют свои особенности, обусловленные необходимостью учета анизотропии, связанной с магнитным полем. Дополнительной трудностью в идеальной магнитной газодинамике является необходимость обеспечения постоянства полного магнитного потока и соленидальности (бездивергентности) магнитного поля. Поэтому классические схемы, хорошо работающие для газодинамических течений, не всегда удается корректно обобщить на случай магнитной газодинамики. Для преодоления этих затруднений часто используют разного рода дополнительные ухищрения (см., например, [305, 319]).

Среди немонотонных методов для численного моделирования МГД-течений часто используется метод Лакса–Вендроффа [213] и его модификации. Этот метод допускает появление нефизических осцилляций на сильных разрывах, для борьбы с которыми приходится вводить искусственную вязкость [241]. Другим распространенным подходом для моделирования многомерных (само)гравитирующих МГД-течений является метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH) [197].

В настоящее время весьма развито достаточно большое количество методов численного решения уравнений магнитной газодинамики. Наиболее простой подход основан на операторном расщеплении уравнений. При этом для адвективных членов используются повышающие монотонные поправки, оставшиеся члены аппроксимируются центральными разностями, а для сглаживания осцилляций на сильных разрывах добавляется искусственная вязкость. Этот подход реализован в известном коде ZEUS [320, 321], который успешно применялся для моделирования многих астрофизических течений. Кроме того методика операторного расщепления позволила достаточно простым способом наращивать численный код для учета дополнительных физических эффектов [319, 322–326].

В последнее время в численных кодах стала интенсивно использоваться технология адаптивных локально встраиваемых сеток (AMR, Adaptive Mesh Refinement) [220]. Среди наиболее известных AMR-кодов можно отметить коды RIEMANN [327], BATS-R-US [328], AMRVAC [329], [330], Nirvana [331], RAMSES [332], PLUTO [333], AstroBEAR [334], FLASH [335], Athena [336].

**7.4.2. Схема Лакса–Фридрихса.** По видимому, самым простым способом приближенного решения задачи Римана для уравнений магнитной газодинамики является метод Лакса–Фридрихса [169]. Напом-

ним, что в этом подходе считается, что в результате распада первоначального произвольного разрыва формируются только две ударные волны, распространяющиеся влево и вправо с одинаковыми по модулю скоростями (см. рис. 7.7). В качестве скоростей ударных волн выбираются максимальные по модулю собственные значения (спектральные радиусы) матрицы гиперболичности  $A = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$ , вычисленные для левого и правого состояний в задаче Римана:

$$D = \max_{\alpha} \{ |\lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_L)|, |\lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_R)| \}. \quad (7.145)$$

Построим схему Лакса–Фридрихса для одномерных уравнений магнитной газодинамики в декартовых координатах [337]. Будем рассматривать два важных для астрофизических приложений частных случая уравнений идеальной магнитной газодинамики — изотермический и адиабатический с показателем адиабаты  $\gamma$ . Предположим, что магнитное поле и скорость газа имеют все три компоненты  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . Уравнения одномерной МГД в консервативной форме имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (7.146)$$

а векторы консервативных переменных и потоков определяются выражениями

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, B_x, B_y, B_z, e_T)^T, \quad (7.147)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & (\rho v_x, \rho v_x^2 + P_T - B_x^2, \rho v_x v_y - B_x B_y, \\ & \rho v_x v_z - B_x B_z, 0, v_x B_y - v_y B_x, v_x B_z - v_z B_x, \\ & v_x (e_T + P_T) - B_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}))^T, \end{aligned} \quad (7.148)$$

где плотность полной энергии

$$e_T = \rho \varepsilon + \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B^2}{2}, \quad (7.149)$$

а полное давление

$$P_T = P + \frac{B^2}{2} \quad (7.150)$$

представляет собой сумму газового и магнитного давлений. При записи этих выражений использована удобная для численного моделирования система единиц, в которой множитель  $4\pi$  в уравнениях МГД не возникает. В адиабатическом случае давление  $P$ , внутренняя энергия  $\varepsilon$  и плотность  $\rho$  связаны соотношением  $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ . В случае изотермической плазмы уравнение энергии необходимо исключить, а давление определить соотношением:  $P = c_T^2 \rho$ , где  $c_T$  — изотермическая скорость звука.

Для адиабатического случая матрица гиперболичности  $\mathcal{A}$  системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & -\gamma B_x & A_{26} & A_{27} & \gamma - 1 \\ -v_x v_y & v_y & v_x & 0 & -B_y & -B_x & 0 & 0 \\ -v_x v_z & v_z & 0 & v_x & -B_z & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & B_y/\rho & -B_x/\rho & 0 & -v_y & v_x & 0 & 0 \\ A_{71} & B_z/\rho & 0 & -B_x/\rho & -v_z & 0 & v_x & 0 \\ A_{81} & A_{82} & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & A_{87} & \gamma v_x \end{pmatrix}, \quad (7.151)$$

где

$$A_{21} = \frac{\gamma - 1}{2} \mathbf{v}^2 - v_x^2, \quad A_{22} = (3 - \gamma)v_x, \quad (7.152)$$

$$A_{23} = (1 - \gamma)v_y, \quad A_{24} = (1 - \gamma)v_z, \quad (7.153)$$

$$A_{26} = (2 - \gamma)B_y, \quad A_{27} = (2 - \gamma)B_z, \quad (7.154)$$

$$A_{61} = \frac{v_y B_x - v_x B_y}{\rho}, \quad A_{71} = \frac{v_z B_x - v_x B_z}{\rho}, \quad (7.155)$$

$$A_{81} = -v_x \left[ \frac{c_s^2}{\gamma - 1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \mathbf{v}^2 + \mathbf{a}^2 \right] + a_x (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}), \quad (7.156)$$

$$A_{82} = \frac{c_s^2}{\gamma - 1} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \mathbf{a}^2 - a_x^2 - (\gamma - 1)v_x^2, \quad (7.157)$$

$$A_{83} = (1 - \gamma)v_x v_y - a_x a_y, \quad A_{84} = (1 - \gamma)v_x v_z - a_x a_z, \quad (7.158)$$

$$A_{85} = -\gamma v_x B_x - v_y B_y - v_z B_z, \quad (7.159)$$

$$A_{86} = (2 - \gamma)v_x B_y - 2v_y B_x, \quad A_{87} = (2 - \gamma)v_x B_z - 2v_z B_x. \quad (7.160)$$

Здесь использованы адиабатическая скорость звука  $c_s = \sqrt{\gamma P/\rho}$  и вектор альфвеновской скорости  $\mathbf{a} = \mathbf{B}/\sqrt{\rho}$ .

Вычисления приводят к следующему набору собственных значений матрицы гиперболичности (7.151):

$$\lambda_B = 0, \quad \lambda_E = v_x, \quad \lambda_{\pm A} = v_x \pm a_x, \quad (7.161)$$

$$\lambda_{\pm S} = v_x \pm u_S, \quad \lambda_{\pm F} = v_x \pm u_F,$$

где

$$u_{F,S} = \sqrt{\frac{c_s^2 + \mathbf{a}^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c_s^2 + \mathbf{a}^2)^2 - 4a_x^2 c_s^2}}. \quad (7.162)$$

Нулевое значение  $\lambda_B$  определяется тем, что пятая компонента потока  $\mathbf{F}$ , соответствующая  $B_x$ , равна нулю. Значение  $\lambda_E$  соответствует энтропийной волне,  $\lambda_{\pm A}$  соответствуют альфвеновским волнам, а  $\lambda_{\pm F}$  и  $\lambda_{\pm S}$  соответствуют быстрым и медленным магнитозвуковым волнам. Величины  $u_{F,S}$  в (7.162) представляют собой скорости быстрых и медленных магнитозвуковых волн. В изотермическом случае энтропийная волна исчезает, а в выражении (7.162) вместо адиабатической скорости звука  $c_s$  следует использовать изотермическую скорость звука  $c_T$ .

Вернемся к вопросу построения разностной схемы. Общий вид схемы Лакса–Фридрихса можно представить следующим образом:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (7.163)$$

где численные потоки определяются выражениями

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{F}_i^n + \mathbf{F}_{i+1}^n}{2} - \frac{\lambda_{i+1/2}}{2} (\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n). \quad (7.164)$$

Нам необходимо выбрать скорости волн в (7.145) равными максимальному модулю локального собственного значения матрицы гиперболичности. Очевидно, что этому условию удовлетворяет выбор скоростей в виде

$$\lambda_{i+1/2} = \max \{ |v_{x,i}| + u_{F,i}, |v_{x,i+1}| + u_{F,i+1} \}. \quad (7.165)$$

Иными словами в соотношении (7.145) достаточно оставить собственные значения, соответствующие быстрым магнитозвуковым волнам.

В качестве тестового расчета рассмотрим результаты численного решения задачи Римана о распаде произвольного МГД-разрыва (Тест 4) [338]. Первоначальному разрыву соответствовала плоскость  $x = 0,5$ . В области слева от разрыва  $x < 0,5$  были заданы следующие значения параметров:  $\rho = 1$ ,  $P = 1$ ,  $B_y = 1$ . В области справа от разрыва  $x > 0,5$ :  $\rho = 0,125$ ,  $P = 0,1$ ,  $B_y = -1$ . Начальная скорость газа  $\mathbf{v}$  была равна нулю. Продольная компонента магнитного поля  $B_x = 0,75$ . Показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Расчеты проводились на сетке с числом ячеек  $N = 200$ .

Результаты расчета на момент времени  $t = 0,1$  приведены на рис. 7.21. Сплошной линией показано численное решение, полученное с помощью МГД-варианта схемы Роу–Эйнфельдта–Ошера (подробное описание этой схемы дано в следующей главе) на сетке с очень большим числом ячеек. Это решение можно рассматривать в качестве «точного». В результате распада разрыва образуются две быстрые МГД-волны разрежения (1 и 5), распространяющиеся в противоположные стороны. Между ними образуются медленная комбинированная МГД-волна (компаунд, 2), контактный разрыв 3 и медленная ударная МГД-волна 4. Анализ рисунка показывает, что схема Лакса–Фридрихса относительно неплохо аппроксимирует



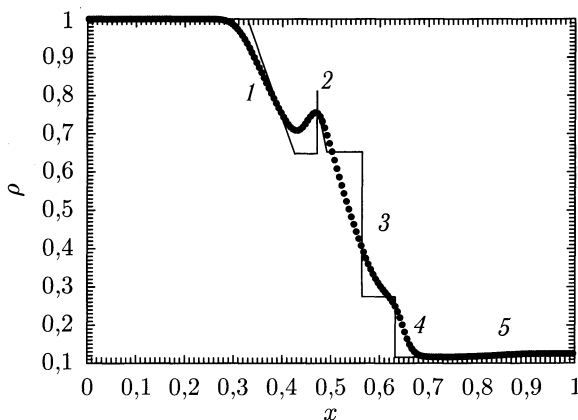


Рис. 7.21. Результат расчета задачи о распаде МГД-разрыва  $\{\rho, P, B_y\} = \{1, 1, 1\}$  при  $x < 0,5$ ,  $\{\rho, P, B_y\} = \{0,125, 0,1, -1\}$  при  $x > 0,5$  (Тест 4) на момент времени  $t = 0,1$  по схеме Лакса-Фридрихса. Начальная скорость газа  $v = 0$ , а компонента магнитного поля  $B_x = 0,75$ . Численное решение отмечено кружочками, а «точное» решение — сплошной линией. Цифры соответствуют: 1, 5 — быстрые волны разрежения, 2 — медленная комбинированная МГД-волна, 3 — контактный разрыв, 4 — медленная ударная волна.

МГД-волны разрежения и ударные волны, но дает сильно размазанные профили на тангенциальном МГД-разрыве и комбинированной волне. Кроме того, в численном решении практически отсутствует область между комбинированной волной и контактным разрывом.

**7.4.3. Схема HLLD.** Опишем более строгую схему годуновского типа для уравнений магнитной газодинамики, которая получила название HLLD [339]. Она является промежуточной между схемами типа HLL [193] и HLLC [310, 340, 341] и более сложными схемами типа Роу [338, 342–344]. Схема HLLD учитывает не одно (как в схеме HLL) и не два (как в схеме HLLC), а четыре промежуточных состояния (рис. 7.22). Они разделены двумя быстрыми ударными волнами, двумя альфвеновскими разрывами и одним контактным разрывом.

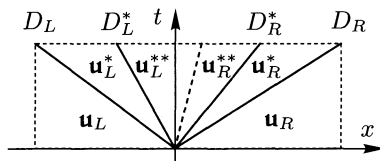


Рис. 7.22. Распад разрыва в приближении HLLD

В отличие от схем типа Роу, схема HLLD не учитывает медленные ударные волны. Однако, как показывают тестовые расчеты (см. [339]), это практически не сказывается на точности получаемых результатов.

Зададим максимальные и минимальные скорости волн (быстрые ударные МГД-волны) в виде

$$\begin{aligned} D_L &= \min(v_{x,L}, v_{x,R}) - \max(u_{F,L}, u_{F,R}), \\ D_R &= \max(v_{x,L}, v_{x,R}) + \max(u_{F,L}, u_{F,R}). \end{aligned} \quad (7.166)$$

Такие выражения для скоростей гарантируют положительность схемы (см. подробности в [339]). Остальные скорости  $D_L^*$ ,  $D_R^*$ ,  $D_C$  и промежуточные состояния  $\mathbf{u}_L^*$ ,  $\mathbf{u}_L^{**}$ ,  $\mathbf{u}_R^{**}$  и  $\mathbf{u}_R^*$  необходимо найти из условий Гюгонио на разрывах:

$$D_\beta[\mathbf{u}]_\beta = [\mathbf{F}]_\beta. \quad (7.167)$$

Условие Гюгонио, соответствующее уравнению непрерывности, имеет вид:

$$D_\beta[\rho]_\beta = [\rho v_x]_\beta. \quad (7.168)$$

Отсюда приходим к закону сохранения потока массы  $j_\beta = \rho_\beta(u_\beta - D_\beta)$  при переходе через разрыв, где обозначено  $u_\beta = v_{x,\beta}$ . Для контактных (тангенциальных) разрывов  $j_\beta = 0$  и, следовательно,  $u_\beta = D_\beta$ . Это означает, что величина  $u_\beta$  не изменяется при переходе через разрыв и равна скорости этого разрыва. Для альфвеновских (вращательных) разрывов  $j_\beta \neq 0$ , но плотность  $\rho_\beta$  не изменяется при переходе через разрыв. В этом случае получаем  $[u_\beta]_\beta = 0$ , т. е. величина  $u_\beta$  непрерывна на разрыве. Для ударных волн получаем наиболее общий случай, когда  $j_\beta \neq 0$  и  $[\rho]_\beta \neq 0$ .

В схеме HLLD скорости  $D_L$  и  $D_R$  заданы соотношением (7.166), волны, соответствующие скоростям  $D_L^*$  и  $D_R^*$ , являются альфвеновскими, а волна, соответствующая скорости  $D_C$ , представляет собой контактный разрыв. В результате имеем соотношения

$$u_L^* = u_L^{**} = u_R^{**} = u_R^* = D_C, \quad (7.169)$$

$$\rho_L^* = \rho_L^{**}, \quad \rho_R^* = \rho_R^{**}, \quad (7.170)$$

$$P_{T,L}^* = P_{T,L}^{**} = P_{T,R}^{**} = P_{T,R}^* = P_T^*. \quad (7.171)$$

Из закона сохранения массы следует

$$j_\alpha = \rho_\alpha(u_\alpha - D_\alpha) = \rho_\alpha^*(u_\alpha^* - D_\alpha), \quad (7.172)$$

где индекс  $\alpha$  означает  $L$  или  $R$ . Поскольку  $u_\alpha^* = D_C$ , то

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{u_\alpha - D_\alpha}{D_C - D_\alpha}. \quad (7.173)$$

Соотношения Гюгионо, выражающие закон сохранения импульса на ударных волнах, можно переписать в виде

$$j_L(D_C - u_L) + (P_T^* - P_{T,L}) = 0, \quad (7.174)$$

$$j_R(u_R - D_C) + (P_{T,R} - P_T^*) = 0. \quad (7.175)$$

Складывая эти выражения, находим:

$$D_C = \frac{j_R u_R - j_L u_L + P_{T,R} - P_{T,L}}{j_R - j_L}. \quad (7.176)$$

Далее, умножая (7.174) на  $j_R$ , а (7.175) на  $j_L$  и, складывая полученные выражения, находим:

$$P_T^* = \frac{j_R P_{T,L} - j_L P_{T,R} - j_L j_R (u_R - u_L)}{j_R - j_L}. \quad (7.177)$$

Следующие два соотношения Гюгионо получаются из уравнений для тангенциальных компонент скорости  $\mathbf{v}_\tau = (0, v_y, v_z)$  и магнитного поля  $\mathbf{B}_\tau = (0, B_y, B_z)$ :

$$j_\alpha [\mathbf{v}_\tau]_\alpha = B_x [\mathbf{B}_\tau]_\alpha, \quad (7.178)$$

$$j_\alpha [\mathbf{B}_\tau / \rho]_\alpha = B_x [\mathbf{v}_\tau]_\alpha. \quad (7.179)$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\mathbf{v}_{\tau,\alpha}^* = \mathbf{v}_{\tau,\alpha} + \mathbf{B}_{\tau,\alpha} \frac{B_x (u_\alpha - D_C)}{j_\alpha (D_C - D_\alpha) - B_x^2}, \quad (7.180)$$

$$\mathbf{B}_{\tau,\alpha}^* = \mathbf{B}_{\tau,\alpha} \frac{j_\alpha (u_\alpha - D_\alpha) - B_x^2}{j_\alpha (D_C - D_\alpha) - B_x^2}. \quad (7.181)$$

Следует отметить, что в этих формулах возникают неопределенности, если  $u_\alpha = D_C$  и  $j_\alpha (D_C - D_\alpha) = B_x^2$ . В этом случае вместо выражений (7.180) и (7.181) следует использовать  $\mathbf{v}_{\tau,\alpha}^* = \mathbf{v}_{\tau,\alpha}$ ,  $\mathbf{B}_{\tau,\alpha}^* = \mathbf{B}_{\tau,\alpha}$ .

Наконец, из ударной адиабаты можно получить выражение для плотности внутренней энергии:

$$\varepsilon_\alpha^* = \varepsilon_\alpha - \left( \langle P_T \rangle_\alpha - \frac{B_x^2 + B_{\tau,\alpha} B_{\tau,\alpha}^*}{2} \right) [1/\rho]_\alpha, \quad (7.182)$$

где угловые скобки означают среднее значение величины на разрыве.

На альфвеновских разрывах  $\rho_\alpha^{**} = \rho_\alpha^*$  и  $P_{T,\alpha}^{**} = P_{T,\alpha}^* = P_T^*$ . Соотношения для тангенциальной скорости и магнитного поля можно записать в виде:

$$j_\alpha^* [\mathbf{v}_\tau]_\alpha = B_x [\mathbf{B}_\tau]_\alpha, \quad (7.183)$$

$$j_\alpha^* [\mathbf{B}_\tau]_\alpha = \rho_\alpha^* B_x [\mathbf{v}_\tau]_\alpha. \quad (7.184)$$

Отсюда находим  $j_\alpha^* = \pm |B_x| \sqrt{\rho_\alpha^*}$  или

$$D_\alpha^* = D_C \mp \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_\alpha^*}}, \quad (7.185)$$

где верхний знак соответствует  $\alpha = L$ , а нижний  $\alpha = R$ .

На контактном (тангенциальном) разрыве в случае  $B_x \neq 0$  должно быть  $v_{\tau,L}^{**} = v_{\tau,R}^{**} = v_\tau^{**}$ ,  $B_{\tau,L}^{**} = B_{\tau,R}^{**} = B_\tau^{**}$ . Значения  $v_\tau^{**}$  и  $B_\tau^{**}$  можно определить с помощью интегральных законов сохранения:

$$v_\tau^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{\tau,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{\tau,R}^* + (B_{\tau,R}^* - B_{\tau,L}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (7.186)$$

$$B_\tau^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{\tau,R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{\tau,L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_{\tau,R}^* - v_{\tau,L}^*) \text{sign}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}. \quad (7.187)$$

Наконец, условие Гюгонио для энергии на альфвеновских разрывах дает:  $\varepsilon_\alpha^* = \varepsilon_\alpha^{**}$ . В случае  $B_x = 0$  альфвеновские разрывы вырождаются и мы приходим к МГД-варианту схемы HLLC. Таким образом, значения всех промежуточных величин найдены и для вычисления гудуновского потока мы можем использовать выражение (7.177).

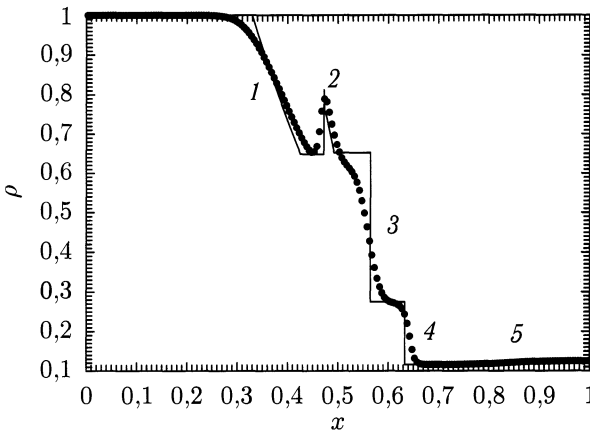


Рис. 7.23. Результат расчета задачи о распаде МГД-разрыва (Тест 4) на момент времени  $t = 0,1$  по схеме HLLD. Обозначения те же, что и на рис. 7.21.

Результаты тестового расчета задачи о распаде разрыва (Тест 4) на момент времени  $t = 0,1$  приведены на рис. 7.23. Видно, что численное решение, полученное с помощью схемы HLLD, является существенно более качественным по сравнению с аналогичным решением, полученным по схеме Лакса–Фридрихса (см. рис. 7.21). Профили реше-

ния на тангенциальном МГД-разрыве и комбинированной волне стали более четкими.

**7.4.4. Схема Роу.** Рассмотрим случай плоского МГД-течения. Будем считать, что магнитное поле и скорость газа имеют все три компоненты  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ ,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . Поскольку в плоском течении компонента магнитного поля  $B_x = \text{const}$  (см. Приложение А, раздел А.4), уравнения одномерной МГД в консервативной форме можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (7.188)$$

где векторы консервативных переменных и потоков определяются выражениями

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, B_y, B_z, e_T)^T, \quad (7.189)$$

$$\mathbf{F} = (\rho v_x, \rho v_x^2 + P_T, \rho v_x v_y - B_x B_y, \rho v_x v_z - B_x B_z, v_x B_y - v_y B_x, v_x B_z - v_z B_x, \rho h v_x - B_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}))^T. \quad (7.190)$$

Здесь использованы обозначения для плотности полной энергии:

$$e_T = \rho \varepsilon + \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B^2}{2}, \quad (7.191)$$

полного давления:

$$P_T = P + \frac{B^2}{2} \quad (7.192)$$

и полной энтальпии  $h$ , определяемой соотношением

$$\rho h = e_T + P_T. \quad (7.193)$$

Отметим, что из этой системы уравнений исключено уравнение для компоненты  $B_x$ . Фактически, эта величина является параметром течения. При записи всех этих выражений снова использована удобная для численного моделирования система единиц, в которой множитель  $4\pi$  в уравнениях МГД не возникает. Давление  $P$ , внутренняя энергия  $\varepsilon$  и плотность  $\rho$  связаны уравнением состояния идеального газа:  $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ .

Следуя работе [342], по аналогии с газодинамическим случаем (см. (7.110)) введем промежуточные значения для плотности  $\rho_*$ , скорости  $\mathbf{v}_*$ , индукции магнитного поля  $\mathbf{B}_*$  и полной энтальпии  $h_*$ :

$$\rho_* = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad \mathbf{v}_* = \frac{\sqrt{\rho_L} \mathbf{v}_L + \sqrt{\rho_R} \mathbf{v}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (7.194)$$

$$\mathbf{B}_* = \frac{\sqrt{\rho_R} \mathbf{B}_L + \sqrt{\rho_L} \mathbf{B}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad h_* = \frac{\sqrt{\rho_L} h_L + \sqrt{\rho_R} h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}.$$

Если теперь в качестве матрицы Роу  $\mathcal{A}_*$  мы возьмем матрицу гиперболичности  $\mathcal{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$  системы уравнений МГД (7.188)–(7.190)

и подставим в нее вместо исходных величин  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $h$  соответствующие их средние значения (7.194), то такая матрица не будет удовлетворять условию Роу:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_*) \cdot \Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{F} = \delta \mathcal{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \cdot \Delta \mathbf{u}. \quad (7.195)$$

Правая часть этого соотношения определяет некоторое несоответствие, которое должно каким-либо образом компенсироваться в матрице Роу  $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}(\mathbf{u}_*) + \delta \mathcal{A}$ . Легко видеть, что корректирующая матрица  $\delta \mathcal{A}$  определена неоднозначным образом, поскольку система уравнений (7.195) для компонент этой матрицы является переопределенной. Таким образом, имеется некоторая свобода в выборе матрицы  $\delta \mathcal{A}$  и, следовательно, матрицы Роу  $\mathcal{A}_*$ . Однако нельзя при этом забывать, что окончательная матрица Роу  $\mathcal{A}_*$  должна удовлетворять всем трем условиям (см. раздел 7.3).

Матрица  $\delta \mathcal{A}$  оказывается нулевой только в частном случае  $\gamma = 2$  [338]. В работе [342] (см. также [218]) корректирующая матрица  $\delta \mathcal{A}$  построена для случая уравнений МГД с произвольным значением показателя адиабаты  $\gamma$ <sup>1)</sup>. Эта матрица имеет только одну независимую компоненту и корректирует первый столбец матрицы  $\mathcal{A}(\mathbf{u}_*)$ .

Представим матрицу Роу в следующей форме:

$$\mathcal{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & \gamma - 1 \\ -v_y v_x & v_y & v_x & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ -v_x v_z & v_z & 0 & v_x & 0 & -B_x & 0 \\ A_{51} & B_y/\rho & -B_x/\rho & 0 & v_x & 0 & 0 \\ A_{61} & B_z/\rho & 0 & -B_x/\rho & 0 & v_x & 0 \\ A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & \gamma v_x \end{pmatrix}, \quad (7.196)$$

где

$$A_{21} = (2 - \gamma)X + \frac{\gamma - 1}{2} \mathbf{v}^2 - v_x^2, \quad (7.197)$$

$$A_{22} = (3 - \gamma)v_x, \quad A_{23} = (1 - \gamma)v_y, \quad A_{34} = (1 - \gamma)v_z, \quad (7.198)$$

$$A_{25} = (2 - \gamma)B_y, \quad A_{26} = (2 - \gamma)B_z, \quad (7.199)$$

$$A_{51} = \frac{v_y B_x - v_x B_y}{\rho}, \quad A_{61} = \frac{v_z B_x - v_x B_z}{\rho}, \quad (7.200)$$

$$A_{71} = v_x (A_{21} + v_x^2 - h) + \frac{B_x}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}), \quad (7.201)$$

<sup>1)</sup> Строго говоря, матрица Роу, построенная в работе [342], является гиперболической в случае  $1 < \gamma \leq 2$ .

$$A_{72} = h + (1 - \gamma)v_x^2 - \frac{B_x^2}{\rho}, \quad (7.202)$$

$$A_{73} = (1 - \gamma)v_x v_y - \frac{B_x B_y}{\rho}, \quad (7.203)$$

$$A_{74} = (1 - \gamma)v_x v_z - \frac{B_x B_z}{\rho}, \quad (7.204)$$

$$A_{75} = (2 - \gamma)v_x B_y - v_y B_x, \quad A_{76} = (2 - \gamma)v_x B_z - v_z B_x. \quad (7.205)$$

Здесь для упрощения записи опущены звездочки для обозначения промежуточных величин (7.194). По сравнению с матрицей  $\mathcal{A}(\mathbf{u}_*)$  матрица  $\mathcal{A}_*$  содержит дополнительные члены, связанные с корректирующей матрицей  $\delta\mathcal{A}$ . Эти изменения касаются только первого столбца, в котором коррекция определяется единственным положительным параметром

$$X = \frac{1}{2} \frac{\Delta B_y^2 + \Delta B_z^2}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2}. \quad (7.206)$$

Для записи собственных значений и собственных векторов матрицы (7.196) удобно использовать выражение для промежуточного значения скорости звука  $c_*$ , которое определяется следующей формулой:

$$c_*^2 = (\gamma - 1) \left( h - \frac{v^2}{2} - \frac{B^2}{\rho} \right) + (2 - \gamma)X. \quad (7.207)$$

Это выражение использовано в работе [342]. Второе слагаемое в правой части появляется из-за описанной выше модификации первого столбца матрицы  $\text{Роу}$ . Первое слагаемое, как и в газодинамическом случае [314], можно переписать в более удобном для численного моделирования виде, поскольку оно может приводить к ошибкам, когда сумма кинетической и магнитной энергии существенно превышает внутреннюю энергию газа. Для случая уравнений МГД получаем следующее выражение:

$$c_*^2 = \frac{\sqrt{\rho_L} c_L^2 + \sqrt{\rho_R} c_R^2}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\rho(\Delta\mathbf{v})^2}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2} + \frac{(\gamma - 1)(\Delta\mathbf{B})^2}{(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2} + (2 - \gamma)X. \quad (7.208)$$

По сравнению с формулой Эйнфельдта (7.112) [314], в выражении (7.208) появилось дополнительное слагаемое, обусловленное наличием магнитного поля.

Матрица Роу (7.196) имеет следующий набор собственных значений:

$$\lambda_{\pm F} = v_x \pm u_F, \quad \lambda_{\pm S} = v_x \pm u_S, \quad \lambda_{\pm A} = v_x \pm u_A, \quad \lambda_E = v_x, \quad (7.209)$$

где индексы  $F$ ,  $S$ ,  $A$  и  $E$  соответствуют быстрой, медленной, альфвеновской и энтропийной характеристикам. Величины

$$u_{F,S} = \sqrt{\frac{c_*^2 + a^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c_*^2 + a^2)^2 - 4c_*^2 u_A^2}} \quad (7.210)$$

описывают быструю и медленную магнитозвуковые скорости, а

$$u_A = \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho}}, \quad a = \frac{B}{\sqrt{\rho}}. \quad (7.211)$$

Для определения потоков в схеме Роу необходимы еще выражения для правых собственных векторов  $\mathbf{r}_\alpha$  и характеристических амплитуд  $\Delta S^\alpha$ . Правые собственные векторы матрицы Роу (7.196) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{r}_{\pm F} = \begin{pmatrix} \alpha_F \\ \alpha_F(v_x \pm u_F) \\ \alpha_F v_y \mp \alpha_S \beta_y S u_S \\ \alpha_F v_z \mp \alpha_S \beta_z S u_S \\ \alpha_S \beta_y c_* / \sqrt{\rho} \\ \alpha_S \beta_z c_* / \sqrt{\rho} \\ r_{\pm F}^7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{\pm S} = \begin{pmatrix} \alpha_S \\ \alpha_S(v_x \pm u_S) \\ \alpha_S v_y \pm \alpha_F \beta_y S u_F \\ \alpha_S v_z \pm \alpha_F \beta_z S u_F \\ -\alpha_F \beta_y c_* / \sqrt{\rho} \\ -\alpha_F \beta_z c_* / \sqrt{\rho} \\ r_{\pm S}^7 \end{pmatrix}, \quad (7.212)$$

$$\mathbf{r}_{\pm A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm \sqrt{\rho} \beta_z \\ \mp \sqrt{\rho} \beta_y \\ -S \beta_z \\ S \beta_y \\ \pm \sqrt{\rho} (\beta_z v_y - \beta_y v_z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \\ 0 \\ \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} X \end{pmatrix}, \quad (7.213)$$

где

$$r_{\pm F}^7 = \alpha_F (h - u_A^2 \pm u_F v_x) \mp \alpha_S u_S (\beta_y v_y + \beta_z v_z) S + \alpha_S u_S^2 a_\perp / c_*,$$

$$r_{\pm S}^7 = \alpha_S (h - u_A^2 \pm u_S v_x) \pm \alpha_F u_F (\beta_y v_y + \beta_z v_z) S - \alpha_F u_F^2 a_\perp / c_*,$$



$$\alpha_F = \sqrt{\frac{c_*^2 - u_S^2}{u_F^2 - u_S^2}}, \quad \alpha_S = \sqrt{\frac{u_F^2 - c_*^2}{u_F^2 - u_S^2}}, \quad (7.214)$$

$$S = \text{sign}(B_x), \quad \beta_{y,z} = \frac{B_{y,z}}{B_\perp}, \quad a_\perp = \frac{B_\perp}{\sqrt{\rho}}, \quad B_\perp = \sqrt{B_y^2 + B_z^2}. \quad (7.215)$$

Соответствующие выражения для характеристических амплитуд можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta S^{\pm F} = \frac{1}{2c_*^2} [\alpha_F(X\Delta\rho + \Delta P) \mp \rho\alpha_S u_S S(\beta_y\Delta v_y + \beta_z\Delta v_z) \pm \\ \pm \rho\alpha_F u_F \Delta v_x + \sqrt{\rho}\alpha_S c_*(\beta_y\Delta B_y + \beta_z\Delta B_z)], \end{aligned} \quad (7.216)$$

$$\begin{aligned} \Delta S^{\pm S} = \frac{1}{2c_*^2} [\alpha_S(X\Delta\rho + \Delta P) \pm \rho\alpha_F u_F S(\beta_y\Delta v_y + \beta_z\Delta v_z) \pm \\ \pm \rho\alpha_S u_S \Delta v_x - \sqrt{\rho}\alpha_F c_*(\beta_y\Delta B_y + \beta_z\Delta B_z)], \end{aligned} \quad (7.217)$$

$$\Delta S^{\pm A} = \frac{1}{2} \left[ \mp \beta_y \Delta v_z \pm \beta_z \Delta v_y + \frac{S}{\sqrt{\rho}} (\beta_y \Delta B_z - \beta_z \Delta B_y) \right], \quad (7.218)$$

$$\Delta S^E = \frac{1}{c_*} [(c_*^2 - X)\Delta\rho - \Delta P]. \quad (7.219)$$

Все выражения для правых собственных векторов и характеристических амплитуд нормированы способом, использованным в работе [342].

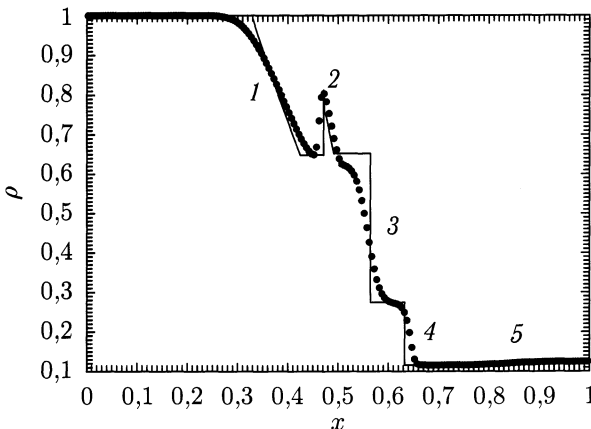


Рис. 7.24. Результат расчета задачи о распаде МГД-разрыва (Тест 4) на момент времени  $t = 0,1$  по схеме Рунге. Обозначения те же, что и на рис. 7.21

Результаты тестового расчета задачи о распаде разрыва (Тест 4) на момент времени  $t = 0,1$  приведены на рис. 7.24. Анализ рисунка показывает, что в численном решении, полученном с помощью схемы Роу, профили тангенциального МГД-разрыва 3 и комбинированной МГД-волны 2 являются гораздо более четкими по сравнению с аналогичным решением, полученным по схеме Лакса-Фридрихса (см. рис. 7.21). Вместе с тем, необходимо отметить, что данное численное решение слабо отличается от решения, полученного с помощью схемы HLLD (см. рис. 7.23).

**7.4.5. Методы очистки дивергенции магнитного поля.** Дополнительной трудностью при численном моделировании многомерных МГД-течений является необходимость численной реализации условия соленоидальности магнитного поля  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , так как решение конечно-разностного аналога уравнения индукции, вообще говоря, может ему не удовлетворять. Эта проблема может быть решена несколькими способами. Хороший обзор методов очистки дивергенции  $\mathbf{B}$  представлен в работе [345] (см. также раздел 5.7 в монографии [218]).

Самым простым способом является использование в уравнениях МГД векторного потенциала  $\mathbf{A}$  вместо индукции магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Однако при этом в уравнениях МГД возникают члены, содержащие вторые производные векторного потенциала. Поэтому применение годуновских схем для их численного решения становится невозможным.

В настоящее время распространенным методом является метод использования разнесенных сеток (СТ, Constrained Transport), впервые предложенный в работе [346]. В этом методе на промежуточном шаге интегрирования используются значения индукции магнитного поля на границах ячеек. Можно отметить множество работ, в которых авторы использовали этот подход (см., например, [332–334, 336, 347–355]).

В другом методе для очистки дивергенции магнитного поля используется искусственный скалярный потенциал [356]. Этот метод успешно использовался для моделирования астрофизических МГД-течений различными авторами [357–361].

Суть метода, вкратце, состоит в следующем. Обозначим магнитное поле, полученное из численного решения уравнения индукции, через  $\mathbf{B}^*$ . Ошибка решения  $\mathbf{b}$  (разность точного решения уравнения индукции и численно найденного значения  $\mathbf{B}^*$ ) может содержать как вихревую так и потенциальную части:  $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} + \nabla \varphi$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\varphi$  — некоторые векторное и скалярное поля, определяющие распределение ошибки  $\mathbf{b}$  в расчетной области. Из-за того, что градиент  $\nabla \varphi$ , вообще говоря, не равен нулю, поле  $\mathbf{B}^*$  не будет удовлетворять условию соленоидальности. Если убрать из полученного решения эту потенциальную часть ошибки, то новое значение

магнитного поля  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* - \nabla\varphi$  будет уже бездивергентным. Отсюда, для определения потенциала  $\varphi$ , получаем уравнение Пуассона:  $\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \mathbf{B}^*$ . Таким образом, по известному значению магнитного поля  $\mathbf{B}^*$  с помощью этого уравнения можно найти потенциал  $\varphi$  и затем построить магнитное поле, удовлетворяющее условию соленоидальности.

Еще один метод основан на использовании уравнений МГД без предположения о бездивергентности магнитного поля. Можно показать, что при этом система консервативных уравнений МГД оказывается неоднородной и будет содержать дополнительные слагаемые, пропорциональные  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  и нарушающие консервативность. Именно, в уравнении сохранения импульса появится дополнительный член  $\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B})$ , в уравнении энергии возникнет член  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})(\nabla \cdot \mathbf{B})$ , а в уравнении индукции —  $\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B})$ . При аппроксимации уравнений эти дополнительные слагаемые можно учитывать как источниковые члены. Кроме того, в случае  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  они исчезают и консервативность уравнений восстанавливается. Следует отметить, что добавление этих слагаемых можно понимать как процедуру симметризации уравнений магнитной газодинамики [362]. Анализ получающихся уравнений показывает, что нулевое собственное значение  $\lambda_B$  (см. (7.161)), соответствующее нормальной компоненте магнитного поля, уже становится равным  $v_x$ . Так что эта характеристика становится невырожденной и описывает дополнительную восьмую МГД-волну, переносящую нормальную компоненту поля. Поэтому этот подход получил название восьми-волнового метода [328]. В работе [363] показано, что если уравнения МГД выводить из релятивистских уравнений с учетом ненулевого магнитного заряда, то дополнительное слагаемое остается только в уравнении индукции. Такой вариант уравнений МГД уже не является симметризованным, но в них восстанавливаются законы сохранения импульса и энергии.

Уравнение индукции в восьми-волновом подходе имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}). \quad (7.220)$$

Взяв дивергенцию от этого уравнения, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B})] = 0. \quad (7.221)$$

Таким образом, в восьми-волновом методе  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  удовлетворяет уравнению непрерывности. Поэтому возникающая из-за численных ошибок ненулевая дивергенция будет выноситься течением за пределы расчетной области. Этот метод хорошо работает в задачах МГД-аккреции [118], особенно если с течением времени решение выходит на стационарный режим.

Наконец, следует упомянуть метод очистки дивергенции магнитного поля, основанный на обобщенном множителе Лагранжа [364]. В этом методе вместо уравнения индукции используются два уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nabla \psi = 0, \quad (7.222)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi, \quad (7.223)$$

где  $\psi$  — скалярная функция (обобщенный множитель Лагранжа),  $c_h$  и  $c_p$  — некоторые константы, которые являются параметрами метода. Если  $\psi = 0$ , то магнитное поле будет удовлетворять условию соленидальности. Как и в предыдущем методе, в данном подходе возникают дополнительные характеристики, соответствующие собственным значениям  $\lambda_{\pm\psi} = \pm c_h$ .

С помощью несложных преобразований из уравнений (7.222), (7.223) можно получить уравнение, содержащее только величину  $\psi$ :

$$\frac{1}{c_h^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = -\frac{1}{c_p^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (7.224)$$

При  $c_h \rightarrow \infty$  это уравнение переходит в уравнение параболического типа, которое описывает затухание  $\psi$  со временем с коэффициентом диффузии  $c_p^2$ . В пределе при  $c_p \rightarrow \infty$  это уравнение перейдет в уравнение гиперболического типа, которое описывает волновое распространение  $\psi$  со скоростью  $c_h$ . Если величины  $c_h$  и  $c_p$  имеют конечные значения, то уравнение (7.224) описывает одновременно как волновое распространение, так и затухание  $\psi$  с характерным временем  $c_p^2/c_h^2$ .

Сами уравнения (7.222), (7.223) содержат удобные для годуновских методов гиперболические части. Кроме того, поправки касаются только нормальной компоненты поля. Поэтому на решение задачи Римана для основной части уравнений МГД этот метод влияния не оказывает. В качестве скорости  $c_h$  можно выбирать максимальную по сетке скорость распространения бегущих волн в задачах Римана. Такой выбор  $c_h$  не затронет вычисление временного шага из условия Куранта–Фридрихса–Леви. Таким образом, этот метод объединяет лучшие стороны предыдущих методов. Особенно он становится удобным в нестационарных МГД-задачах.

**7.4.6. Динамическая адаптация расчетных сеток в МГД-задачах.** Применим описанный в разделе 5.4.3 метод динамической адаптации расчетных сеток для случая уравнений магнитной газодинамики. Система уравнений МГД для идеального газа может быть запи-

сана в декартовых координатах  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  в консервативной форме <sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} = 0, \quad (7.225)$$

где векторы консервативных переменных и потоков в  $x$ -направлении определяются выражениями

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ \epsilon_T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P_T - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \\ v_x (\epsilon_T + P_T) - B_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}. \quad (7.226)$$

Потоки  $\mathbf{F}_2$  и  $\mathbf{F}_3$  в  $y$ - и  $z$ -направлениях могут быть получены с помощью соответствующих перестановок индексов. Здесь  $\epsilon_T = \rho \epsilon + \rho v^2/2 + \mathbf{B}^2/2$  — плотность полной энергии,  $P_T = P + \mathbf{B}^2/2$  — полное давление. При записи этих уравнений использована система единиц, в которой множитель  $1/(4\pi)$  в выражении для электромагнитной силы не возникает.

Используя преобразование (5.154) к новым переменным  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , приходим к системе уравнений (5.176), (5.178). Для замыкания этой системы уравнений будем задавать скорость движения исходной системы координат относительно новой в виде  $\boldsymbol{\omega} = h\mathbf{v}$  [234, 235]. Величина  $h$  представляет собой некоторую скалярную функцию переменных  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ . Такой способ задания скорости предполагает, что исходная система координат относительно новой в любой точке движется в направлении скорости жидкости, но по абсолютной величине эти скорости, вообще говоря, различны. В случае  $h = 0$  переменные  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  будут соответствовать переменным Эйлера, но в некоторых криволинейных координатах. В случае  $h = 1$  приходим к описанию течения жидкости в переменных Лагранжа. В общем случае значения функции  $h$  можно выбирать из допустимого диапазона значений  $0 \leq h < 1$ . В случае  $h = 1$  соответствующая многомерная система уравнений становится слабо гиперболической, поскольку ее матрицы гиперболичности при этом условии не имеют полного набора собственных векторов [234, 235, 237].

<sup>1)</sup> Как и в разделе 5.4.3, для сокращения записи выражений по повторяющимся индексам будем подразумевать суммирование от 1 до 3.

Функция  $h(\tau, \xi, \eta, \zeta)$  в данном подходе, фактически, играет роль параметра, управляющего перемещением узлов расчетной сетки. Для определения значений этой функции в расчетной области можно использовать дополнительные соображения. Например, авторы работ [234, 235] предлагают выбирать функцию  $h$  из условия сохранения значений углов между координатными линиями подвижной криволинейной системы координат. По-видимому, для определения этой функции можно использовать также и вариационные методы. Отметим, что все полученные ниже соотношения легко обобщаются на более общий закон движения сетки (5.180).

Для исследования характеристической структуры полученной самосогласованной системы уравнений расширим исходный вектор консервативных переменных  $\mathbf{u}$  на вектор  $\mathbf{U}$  большей размерности, включив в него геометрические величины:

$$\mathbf{U} = (Q\rho, Q\rho v, QB, Qe_T, \mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M})^T. \quad (7.227)$$

Тогда система уравнений (5.176), (5.178) для случая МГД может быть записана в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial \xi_k} = 0, \quad (7.228)$$

где векторы потоков определяются следующими выражениями:

$$\mathbf{H}_1 = |\mathbf{L} \times \mathbf{M}| \begin{pmatrix} (1-h)\rho v_\xi \\ (1-h)\rho v_\xi \mathbf{v} + \mathbf{k}P_T - B_\xi \mathbf{B} \\ (1-h)v_\xi \mathbf{B} - B_\xi \mathbf{v} \\ [(1-h)e_T + P_T]v_\xi - B_\xi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ -h\mathbf{v}/|\mathbf{L} \times \mathbf{M}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.229)$$

$$\mathbf{H}_2 = |\mathbf{M} \times \mathbf{K}| \begin{pmatrix} (1-h)\rho v_\eta \\ (1-h)\rho v_\eta \mathbf{v} + \mathbf{l}P_T - B_\eta \mathbf{B} \\ (1-h)v_\eta \mathbf{B} - B_\eta \mathbf{v} \\ [(1-h)e_T + P_T]v_\eta - B_\eta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ 0 \\ -h\mathbf{v}/|\mathbf{M} \times \mathbf{K}| \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.230)$$

$$\mathbf{H}_3 = |\mathbf{K} \times \mathbf{L}| \begin{pmatrix} (1-h)\rho v_\zeta \\ (1-h)\rho v_\zeta \mathbf{v} + m P_\Gamma - B_\zeta \mathbf{B} \\ (1-h)v_\zeta \mathbf{B} - B_\zeta \mathbf{v} \\ [(1-h)e_\Gamma + P_\Gamma] v_\zeta - B_\zeta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \\ 0 \\ 0 \\ -h\mathbf{v}/|\mathbf{K} \times \mathbf{L}| \end{pmatrix}. \quad (7.231)$$

При построении разностной схемы для численного решения этой системы уравнений, необходимо знать собственные значения матриц гиперболичности  $\tilde{\mathcal{A}}_i = \partial \mathbf{H}_i / \partial \mathbf{U}$ . Для исследования структуры этих матриц введем вспомогательный вектор переменных

$$\mathbf{W} = (\rho, \rho \mathbf{v}, \mathbf{B}, e_\Gamma, \mathbf{K}, \mathbf{L}, M)^T. \quad (7.232)$$

Систему уравнений (7.228) можно представить в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \tau} + \left( T^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{A}}_k \cdot T \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \xi_k} = 0, \quad (7.233)$$

где  $T = \partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{W}$ .

Исследуем в качестве примера структуру матрицы  $\tilde{\mathcal{A}}_1 = \partial \mathbf{H}_1 / \partial \mathbf{U}$  (оставшиеся две матрицы можно рассмотреть аналогично). Используя (5.156), (5.173), структуру матрицы  $T^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{A}}_1 \cdot T$  схематически можно представить следующим образом:

$$T^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{A}}_1 \cdot T = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ P_{1k} (\mathcal{A}_k - \omega_k \mathcal{I}) & & & 0 & 0 & 0 \\ h\mathbf{v}/\rho & -h/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.234)$$

Первые четыре столбца этой матрицы соответствуют компонентам  $\rho$ ,  $\rho \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $e_\Gamma$  вектора переменных  $\mathbf{W}$ . Оставшиеся три столбца соответствуют компонентам  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $M$  этого вектора.

Аналогично, структуру матрицы  $T$  можно схематически представить в виде:

$$T = \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & (\mathbf{L} \times \mathbf{M}) \rho & (\mathbf{M} \times \mathbf{K}) \rho & (\mathbf{K} \times \mathbf{L}) \rho \\ 0 & Q & 0 & 0 & (\mathbf{L} \times \mathbf{M}) \rho \mathbf{v} & (\mathbf{M} \times \mathbf{K}) \rho \mathbf{v} & (\mathbf{K} \times \mathbf{L}) \rho \mathbf{v} \\ 0 & 0 & Q & 0 & (\mathbf{L} \times \mathbf{M}) \mathbf{B} & (\mathbf{M} \times \mathbf{K}) \mathbf{B} & (\mathbf{K} \times \mathbf{L}) \mathbf{B} \\ 0 & 0 & 0 & Q & (\mathbf{L} \times \mathbf{M}) e_T & (\mathbf{M} \times \mathbf{K}) e_T & (\mathbf{K} \times \mathbf{L}) e_T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.235)$$

Поскольку все элементы этой матрицы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, ее определитель равен произведению диагональных элементов:  $\det T = Q^8$ . Для невырожденных координат должно быть  $Q \neq 0$ , поэтому в этом случае  $\det T \neq 0$ . Это означает, что выражение  $T^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{A}}_1 \cdot T$  можно рассматривать как преобразование подобия матрицы  $\tilde{\mathcal{A}}_1$ . Собственные значения матриц  $T^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{A}}_1 \cdot T$  и  $\tilde{\mathcal{A}}_1$  совпадают. Правыми собственными векторами матрицы  $\tilde{\mathcal{A}}_1$  являются векторы  $T \cdot \mathbf{R}$ , где  $\mathbf{R}$  — правые собственные векторы матрицы  $T^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{A}}_1 \cdot T$ .

Найдем собственные значения  $\tilde{\lambda}$  матрицы  $\tilde{\mathcal{A}}_1$ . Используя (7.234), находим:

$$\det \left\{ T^{-1} \cdot \tilde{\mathcal{A}}_1 \cdot T - \tilde{\lambda} \mathcal{I} \right\} = \tilde{\lambda}^9 \det \left\{ P_{1k} (\mathcal{A}_k - \omega_k \mathcal{I}) - \tilde{\lambda} \mathcal{I} \right\} = 0. \quad (7.236)$$

Следовательно,  $\tilde{\lambda} = 0$  (с кратностью 9) является собственным значением матрицы  $\tilde{\mathcal{A}}_1$ . Для определения остальных собственных значений получаем уравнение:

$$\det \left\{ \mathcal{A}_\xi - \left( \omega_\xi + \frac{Q \tilde{\lambda}}{|\mathbf{L} \times \mathbf{M}|} \right) \mathcal{I} \right\} = 0, \quad (7.237)$$

где  $\mathcal{A}_\xi = k_k \mathcal{A}_k$ ,  $\omega_\xi = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Отсюда находим:

$$\tilde{\lambda} = \frac{|\mathbf{L} \times \mathbf{M}|}{Q} (\lambda_\xi - \omega_\xi), \quad (7.238)$$

где  $\lambda_\xi$  — собственные значения матрицы  $\mathcal{A}_\xi$ .

Простые вычисления приводят к следующему набору ненулевых собственных значений матрицы  $\tilde{\mathcal{A}}_1$ :



$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_B &= \frac{|\mathbf{L} \times \mathbf{M}|}{Q} h v_\xi, \\
\tilde{\lambda}_E &= \frac{|\mathbf{L} \times \mathbf{M}|}{Q} (1-h) v_\xi, \\
\tilde{\lambda}_{\mp A} &= \frac{|\mathbf{L} \times \mathbf{M}|}{Q} [(1-h) v_\xi \mp u_A], \\
\tilde{\lambda}_{\mp S} &= \frac{|\mathbf{L} \times \mathbf{M}|}{Q} [(1-h) v_\xi \mp u_S], \\
\tilde{\lambda}_{\mp F} &= \frac{|\mathbf{L} \times \mathbf{M}|}{Q} [(1-h) v_\xi \mp u_F],
\end{aligned} \tag{7.239}$$

где индексы  $E$ ,  $A$ ,  $S$  и  $F$  соответствуют энтропийной, альфвеновской, медленной и быстрой характеристикам,  $u_A = |B_\xi|/\sqrt{\rho}$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{B}/\sqrt{\rho}$ ,

$$u_{F,S} = \left\{ \frac{1}{2} \left[ c_s^2 + \mathbf{a}^2 \pm \sqrt{(c_s^2 + \mathbf{a}^2)^2 - 4c_s^2 u_A^2} \right] \right\}^{1/2}, \tag{7.240}$$

$c_s = \sqrt{\gamma P/\rho}$  — скорость звука. Собственное значение  $\tilde{\lambda}_B$  соответствует  $x$ -компоненте уравнения индукции и становится ненулевым только в случае подвижной системы координат. Правые собственные векторы матрицы  $\tilde{A}_1$  также нетрудно вычислить. Однако они нигде в книге не используются, поэтому выражения для этих векторов здесь не приводятся.

Разностную схему построим следующим образом. Введем в расчетной области переменных  $(\xi, \eta, \zeta)$  равномерную разностную сетку, структура которой определяется трехмерным массивом узлов  $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$ , где индексы пробегает значения  $i = 0, 1, \dots, N_x$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_y$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_z$ . Расчетные сеточные величины  $\mathbf{U}_c^n$  в момент времени  $\tau^n$  относятся к ячейкам  $c = (i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ , которые нумеруются полуцелыми индексами. Значения этих величин вычисляются с помощью усреднения по объему  $c$ -й ячейки:

$$\mathbf{U}_c^n = \frac{1}{\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} d\xi \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} d\eta \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} d\zeta \mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta, \tau^n), \tag{7.241}$$

где  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$  и  $\Delta\zeta$  — шаги сетки в соответствующих пространственных направлениях.

Физические ячейки в области изменения исходных переменных  $(x, y, z)$  будут соответствовать кубическим ячейкам в области переменных  $(\xi, \eta, \zeta)$ . При этом форма и положение физических ячеек будет меняться с течением времени. Отметим, что в начальный момент времени

величины  $(\xi, \eta, \zeta)$  могут представлять собой некоторую криволинейную систему координат в расчетной области, если выбрать соответствующие начальные условия для векторов  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{M}$ .

Интегрируя уравнение (7.228) по объему  $c$ -й ячейки и по временно-му интервалу  $\tau^n \leq \tau \leq \tau^{n+1}$ , можно получить следующую разностную схему:

$$\frac{\mathbf{U}_c^{n+1} - \mathbf{U}_c^n}{\Delta\tau} + \frac{\Delta_\xi \mathbf{H}_1}{\Delta\xi} + \frac{\Delta_\eta \mathbf{H}_2}{\Delta\eta} + \frac{\Delta_\zeta \mathbf{H}_3}{\Delta\zeta} = 0, \quad (7.242)$$

где  $\Delta\tau$  — временной шаг, а операторы  $\Delta_\xi$ ,  $\Delta_\eta$  и  $\Delta_\zeta$  определяют разности величин на границах ячеек в соответствующих направлениях.

Для вычисления векторов численных потоков  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  и  $\mathbf{H}_3$  через границы ячеек используем технику расщепления по пространственным направлениям. В этом случае численные потоки в каждом пространственном направлении вычисляются на основе решения соответствующей одномерной задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Расщепленная одномерная задача Римана может быть записана в следующей форме (для примера рассмотрим только  $\xi$ -направление):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial \xi} = 0, \quad (7.243)$$

$$\mathbf{U}(\xi, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & \xi < 0, \\ \mathbf{U}_R, & \xi > 0. \end{cases} \quad (7.244)$$

Рассмотрим решение этой задачи в приближении, когда все бегущие волны, возникающие после распада первоначального произвольного разрыва, представляют собой сильные разрывы. На каждом таком разрыве должны удовлетворяться соответствующие условия Гюгонио:

$$D_\alpha [\mathbf{U}]_\alpha = [\mathbf{H}_1]_\alpha, \quad (7.245)$$

где  $\alpha$  — индекс разрыва,  $D_\alpha$  — его скорость, а квадратные скобки означают разность правых и левых величин для данного разрыва. Отметим, что в таком приближенном решении задачи Римана некоторые бегущие волны могут представлять собой неэволюционные ударные волны разрежения.

Численные потоки  $\mathbf{H}_1$  через границы ячеек в схеме (7.242) определяются следующим образом:

$$\mathbf{H}_{1,i} = \frac{\mathbf{H}_{1,L} + \mathbf{H}_{1,R}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |D_\alpha| [\mathbf{U}]_\alpha. \quad (7.246)$$

Проще всего развить этот подход на основе решения задачи Римана в приближении Лакса–Фридрихса. Напомним, что в этом случае счита-

ется, что при распаде первоначального разрыва образуются только две ударные волны, распространяющиеся влево и вправо с одинаковыми по модулю скоростями  $D_{1,2} = \mp \max\{\Lambda_L, \Lambda_R\}$ , где  $\Lambda_{L,R}$  — спектральные радиусы матрицы гиперболичности  $\tilde{\mathcal{A}}_1$ , вычисленные для левого и правого состояний в задаче Римана.

С учетом полученных выражений (7.239) для ненулевых собственных значений матрицы  $\tilde{\mathcal{A}}_1$  нетрудно определить ее спектральный радиус  $\Lambda$ . Простые соображения показывают, что спектральный радиус  $\Lambda$  определяется собственными значениями, соответствующими быстрым магнитозвуковым волнам:

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{L} \times \mathbf{M}|}{Q} [(1-h)|v_\xi| + u_F]. \quad (7.247)$$

Спектральные радиусы матриц  $\tilde{\mathcal{A}}_2$  и  $\tilde{\mathcal{A}}_3$  можно получить аналогично.

Координаты  $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$  центра  $c$ -й ячейки в пространстве исходных переменных на новом временном слое  $\tau^{n+1}$  можно вычислять на основе уравнения  $\partial \mathbf{r} / \partial \tau = \boldsymbol{\omega}$  с помощью следующей схемы второго порядка аппроксимации по  $\tau$ :

$$\mathbf{r}_c^{n+1} = \mathbf{r}_c^n + \frac{\Delta \tau}{2} (\boldsymbol{\omega}_c^{n+1} + \boldsymbol{\omega}_c^n). \quad (7.248)$$

Следует отметить, что при соответствующих граничных условиях описанная разностная схема (7.242) обеспечивает точное выполнение законов сохранения для физических величин в пространстве исходных переменных  $(x, y, z)$ , поскольку в этом случае в подынтегральные выражения (7.241) для соответствующих компонент вектора  $\mathbf{U}$  входит якобиан преобразования координат  $Q$ .

## СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

### 8.1. Метод PPM

Кусочно-параболический метод (PPM, Piecewise Parabolic Method) является, пожалуй, наиболее популярным в вычислительной астрофизике, если рассматривать только конечно-разностные методы решения уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных. Метод был предложен в 1984 г. в работе [195]. На основе метода PPM разработан известный код PROMETEUS, использовавшийся для решения многих задач астрофизики [382]. Метод PPM обобщен также на случай релятивистской гидродинамики [383, 384] и магнитной гидродинамики [304]. Недавно был предложен метод кусочно-параболической интерполяции на локальном шаблоне (PPML) [385–389], который обладает рядом преимуществ по сравнению со стандартным методом PPM. Как показали тестовые расчеты, метод PPML имеет хорошие диссипативные свойства и позволяет с высокой точностью моделировать астрофизические задачи [390]. Перечислим некоторые задачи астрофизики, для исследования которых применялся метод PPM:

- исследование процессов массопереноса в двойных системах;
- исследование процессов аккреции и моделирование аккреционных дисков;
- моделирование взрывов сверхновых;
- космологические расчеты;
- исследование взаимодействующих звездных ветров;
- моделирование слияния звезд и галактик;
- многие другие задачи, включая исследование джетов, протозвездных и протогалактических облаков, молекулярных облаков, планетарных туманностей и т. д.

Метод PPM является обобщением метода Годунова [173] с более высоким (третьим) порядком аппроксимации по пространству. В оригинальной работе [195] он был предложен в двух вариантах: двухшаговый вариант с так называемым лагранжевым шагом и переинтерполяцией и одношаговый эйлеров вариант. Для целей сравнения схем между собой проведем анализ схемы PPM аналогично рассмотрению схем Роу и Роу–Ошера, представленного выше в предыдущей и этой главах. Рассмотрим одношаговый вариант метода PPM для урав-

нения адвекции, для линейной системы гиперболических уравнений и для системы уравнений газовой динамики в одномерном и двумерном случаях.

**8.1.1. Схема PPM для уравнения адвекции.** Приведем основные элементы метода PPM. Будем считать, что в каждой ячейке равномерной разностной сетки с шагом  $\Delta x$  известно значение искомой функции  $u_i$ , представляющее собой некоторое усреднение точного решения  $u(x)$  по ячейке  $i$ . Восстановим функцию  $u(x)$  внутри ячейки с помощью параболы:

$$u(x) = u_i^L + \xi \left[ \Delta u_i + u_i^{(6)} (1 - \xi) \right], \quad \xi = \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad (8.1)$$

где

$$\Delta u_i = u_i^R - u_i^L, \quad u_i^{(6)} = 6 \left( u_i - \frac{u_i^L + u_i^R}{2} \right). \quad (8.2)$$

Легко проверить, что при этом выполняется соотношение

$$u_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx. \quad (8.3)$$

Чтобы определить  $u_i^R$  (или  $u_i^L$ ), сначала с помощью метода интерполяции вычислим значения  $u_{i+1/2}$  и  $u_{i-1/2}$ , с тем, однако, ограничением, чтобы эти значения не выходили за пределы интервалов  $[u_i \dots u_{i+1}]$  и  $[u_{i-1} \dots u_i]$ . Тогда на гладких участках решения, не содержащих экстремумов, можно определить искомые значения:  $u_i^R = u_{i+1}^L = u_{i+1/2}$  и  $u_i^L = u_{i-1}^R = u_{i-1/2}$ . Далее, модифицируем значения  $u_i^L$  и  $u_i^R$  таким образом, чтобы функция  $u(x)$  была монотонной на каждом интервале  $[x_{i-1/2} \dots x_{i+1/2}]$ .

Для вычисления  $u_{i+1/2}$  необходимо использовать интерполяцию с помощью полинома 4-й степени:

$$u_{i+1/2} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2} - \frac{\delta u_{i+1} - \delta u_i}{6}, \quad (8.4)$$

где

$$\delta u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2}. \quad (8.5)$$

Чтобы обеспечить  $u_{i+1/2} \in [u_i \dots u_{i+1}]$  значение  $\delta u_i$  в (8.4) необходимо заменить на

$$\delta_m u_i = \begin{cases} \text{sign}(\delta u_i) \min(|\delta u_i|, 2|u_{i+1} - u_i|, 2|u_i - u_{i-1}|), & (u_{i+1} - u_i)(u_i - u_{i-1}) > 0, \\ 0, & (u_{i+1} - u_i)(u_i - u_{i-1}) \leq 0. \end{cases} \quad (8.6)$$

Таким образом, на участках решения без экстремумов  $u_i^R$  и  $u_{i+1}^L$  равняются  $u_{i+1/2}$ . Однако в некоторых случаях эта процедура может

привести к немонотонности интерполяционной формулы (8.1) внутри ячейки, тогда необходимо переопределить либо  $u_i^R$ , либо  $u_i^L$ , либо и то и другое. Здесь возможны два случая. Первый случай реализуется, когда  $u_i$  является локальным максимумом или минимумом, и тогда интерполяционная функция (8.1) должна быть константой  $u_i^L = u_i^R = u_i$ . Второй случай реализуется, когда  $u_i$  лежит между  $u_i^L$  и  $u_i^R$ , но достаточно близко к одному из этих значений, так что интерполяционная парабола (8.1) имеет экстремум внутри ячейки  $i$ , что может быть записано как  $|\Delta u_i| < |u_i^{(6)}|$ . В этом случае необходимо переопределить  $u_i^L$  или  $u_i^R$  так, чтобы экстремум сместился на границу ячейки.

Окончательные выражения для  $q_i^L$  и  $q_i^R$  для всех видов решения (как с экстремумами, так и без) выглядят следующим образом:

$$u_i^L = u_i, \quad u_i^R = u_i, \quad \text{если } (u_i^R - u_i)(u_i - u_i^L) \leq 0 \quad (8.7)$$

и

$$u_i^L = 3u_i - 2u_i^R, \quad \text{если } u_i^{(6)} \Delta u_i > (\Delta u_i)^2, \quad (8.8)$$

$$u_i^R = 3u_i - 2u_i^L, \quad \text{если } u_i^{(6)} \Delta u_i < -(\Delta u_i)^2. \quad (8.9)$$

После того, как интерполяция  $u(x)$  определена, можно вычислить среднее значение этой функции по части ячейки с номером  $i$   $[x_{i+1/2} - y \dots x_{i+1/2}]$  ( $y > 0$ ) как

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+1/2}^L(y) &= \frac{1}{y} \int_{x_{i+1/2}-y}^{x_{i+1/2}} u(x) dx = \\ &= u_i^R - \frac{y}{2\Delta x} \left[ \Delta u_i - \left(1 - \frac{2y}{3\Delta x}\right) u_i^{(6)} \right]. \quad (8.10) \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение адвекции. Характеристическая линия этого уравнения определяется условием  $dx/dt = a$ . Следовательно, при  $a > 0$  областью зависимости<sup>1)</sup> временного отрезка  $[t_0 \dots t_0 + \Delta t]$  является пространственный отрезок  $[x_{i+1/2} - a\Delta t \dots x_{i+1/2}]$ . Соответственно, среднее значение  $u_{i+1/2}^*$  по временному отрезку  $[t_0 \dots t_0 + \Delta t]$  будет равняться  $\bar{u}_{i+1/2}^L(a\Delta t)$ . Для случая  $a < 0$  среднее значение по  $[x_{i+1/2} \dots x_{i+1/2} + y]$  (где  $y > 0$ ) определяется как

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+1/2}^R(y) &= \frac{1}{y} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2}+y} u(x) dx = \\ &= u_{i+1}^L + \frac{y}{2\Delta x} \left[ \Delta u_{i+1} + \left(1 - \frac{2y}{3\Delta x}\right) u_{i+1}^{(6)} \right], \quad (8.11) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Областью зависимости данной точки  $P$  называется такая область на плоскости переменных  $(x, t)$ , что значение искомой функции в точке  $P$  зависит только от значений функции в этой области.

и, соответственно,  $u_{i+1/2}^* = \bar{u}_{i+1/2}^R(-a\Delta t)$ .

Полученные формулы могут быть интерпретированы и в терминах задачи о распаде разрыва: мы вычислили на границе ячейки левое значение, равное

$$u_{i+1/2}^L = \begin{cases} \bar{u}_{i+1/2}^L(a\Delta t), & a > 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases} \quad (8.12)$$

и правое значение, равное

$$u_{i+1/2}^R = \begin{cases} \bar{u}_{i+1/2}^R(-a\Delta t), & a < 0, \\ 0, & a > 0, \end{cases} \quad (8.13)$$

после чего, решая задачу о распаде разрыва, получаем поток на границе  $i + 1/2$ :

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(u^*(x_{i+1/2}, t)) dt = a^+ u_{i+1/2}^L + a^- u_{i+1/2}^R. \quad (8.14)$$

Отметим также, что в (8.12) и (8.13) во второй строке вместо 0 можно, вообще говоря, брать произвольную величину.

**8.1.2. Случай системы линейных уравнений.** Для применения метода РРМ к системе линейных гиперболических уравнений сведем ее к набору линейных уравнений переноса с помощью перехода к инвариантам Римана  $S^\alpha = \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}$ :

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \lambda_\alpha \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} = 0 \quad (8.15)$$

и, так же как и для линейного уравнения переноса, построим для каждого инварианта Римана  $S^\alpha$  левое и правое состояние на границе ячейки:

$$S_{i+1/2}^{\alpha,L} = \begin{cases} \bar{S}_{i+1/2}^{\alpha,L}(\lambda_\alpha \Delta t), & \lambda_\alpha > 0, \\ 0, & \lambda_\alpha < 0, \end{cases} \quad (8.16)$$

$$S_{i+1/2}^{\alpha,R} = \begin{cases} \bar{S}_{i+1/2}^{\alpha,R}(-\lambda_\alpha \Delta t), & \lambda_\alpha < 0, \\ 0, & \lambda_\alpha > 0, \end{cases} \quad (8.17)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{S}_{i+1/2}^{\alpha,L}(y) &= \frac{1}{y} \int_{x_{i+1/2}-y}^{x_{i+1/2}} \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}(x) dx = \\ &= \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_i^R - \frac{y}{2\Delta x} \left[ \mathbf{l}^\alpha \cdot \Delta \mathbf{u}_i - \left(1 - \frac{2y}{3\Delta x}\right) \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_i^{(6)} \right], \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_{i+1/2}^{\alpha,R}(y) &= \frac{1}{y} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2}+y} \mathbf{I}^\alpha \cdot \mathbf{u}(x) dx = \\ &= \mathbf{I}^\alpha \cdot \mathbf{u}_{i+1}^L + \frac{y}{2\Delta x} \left[ \mathbf{I}^\alpha \cdot \Delta \mathbf{u}_{i+1} + \left(1 - \frac{2y}{3\Delta x}\right) \mathbf{I}^\alpha \cdot \mathbf{u}_{i+1}^{(6)} \right]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Поток на границе  $i + 1/2$  может быть получен из решения задачи Римана о распаде разрыва:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2} &= \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{u}_{i+1/2}^L + \mathcal{A}^- \cdot \mathbf{u}_{i+1/2}^R, \\ \mathbf{u}_{i+1/2}^L &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} S_{i+1/2}^{\alpha,L}, \quad \mathbf{u}_{i+1/2}^R = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} S_{i+1/2}^{\alpha,R}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Так же как и для случая линейного уравнения переноса, в (8.16) и (8.17) во второй строке вместо 0 можно брать произвольную величину  $X^\alpha$ . Это не столь очевидно, как в случае уравнения адвекции. Однако если представить величины  $S_{i+1/2}^{\alpha,L}$  и  $S_{i+1/2}^{\alpha,R}$  в виде сумм

$$\begin{aligned} S_{i+1/2}^{\alpha,L} &= S_{i+1/2}^{\alpha,L+} + X^{\alpha,L}, \\ S_{i+1/2}^{\alpha,L+} &= \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{\lambda_{\alpha} \leq 0} \underbrace{\{S_{i+1/2}^{\alpha,L+1,L}, S_{i+1/2}^{\alpha,L+2,L}, \dots, S_{i+1/2}^{N,L}\}}_{\lambda_{\alpha} > 0}, \\ X^{\alpha,L} &= \underbrace{\{X^L, X^L, \dots, X^L\}}_{\lambda_{\alpha} \leq 0} \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{\lambda_{\alpha} > 0}, \\ S_{i+1/2}^{\alpha,R} &= S_{i+1/2}^{\alpha,R-} + X^{\alpha,R}, \\ S_{i+1/2}^{\alpha,R-} &= \underbrace{\{S_{i+1/2}^{1,R}, S_{i+1/2}^{2,R}, \dots, S_{i+1/2}^{\alpha,R}\}}_{\lambda_{\alpha} < 0} \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{\lambda_{\alpha} \geq 0}, \\ X^{\alpha,R} &= \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{\lambda_{\alpha} < 0} \underbrace{\{X^R, X^R, \dots, X^R\}}_{\lambda_{\alpha} \geq 0}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

а также разделить правые собственные векторы, соответствующие положительным и отрицательным собственным значениям,  $\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha}^+ + \mathbf{r}_{\alpha}^-$ , и учесть, что  $\mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{r}_{\alpha}^- = \mathcal{A}^- \cdot \mathbf{r}_{\alpha}^+ = 0$ , то в результате получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1/2}^L &= \sum_{\alpha} \left( \mathbf{r}_{\alpha}^+ S_{i+1/2}^{\alpha,L+} + \mathbf{r}_{\alpha}^- X^{\alpha,L} \right), \\ \mathbf{u}_{i+1/2}^R &= \sum_{\alpha} \left( \mathbf{r}_{\alpha}^- S_{i+1/2}^{\alpha,R-} + \mathbf{r}_{\alpha}^+ X^{\alpha,R} \right), \\ \mathbf{F}_{i+1/2} &= \sum_{\alpha} \left( \mathcal{A}^+ \cdot \mathbf{r}_{\alpha}^+ S_{i+1/2}^{\alpha,L+} + \mathcal{A}^- \cdot \mathbf{r}_{\alpha}^- S_{i+1/2}^{\alpha,R-} \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$



Из этих соотношений следует, что решение не зависит от  $X$ . Этот важный вывод будет использован в следующем параграфе при анализе нелинейной гиперболической системы уравнений газовой динамики.

**8.1.3. Вариант метода для уравнений газодинамики.** Рассмотрим систему уравнений Эйлера для одномерной газовой динамики. В силу нелинейности данной системы уравнений определить инварианты Римана для нее, вообще говоря, нельзя, так как собственные векторы  $\mathbf{l}^\alpha$  и  $\mathbf{r}_\alpha$  зависят от решения. Однако, если линеаризовать исходную систему в окрестности некоторой точки, то можно ввести линеаризованные инварианты Римана.

Воспользуемся записью системы уравнений газовой динамики в недивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathcal{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0, \quad (8.23)$$

где

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1/\rho \\ v \\ P \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} v & -1/\rho & 0 \\ 0 & v & 1/\rho \\ 0 & c_s^2 \rho & v \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

Матрица  $\mathcal{A}$  имеет следующий набор собственных значений и собственных векторов:

$$\lambda_1 = v - c_s, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = v + c_s, \quad (8.25)$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho c_s \\ -(\rho c_s)^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho c_s \\ -(\rho c_s)^2 \end{pmatrix}, \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^1 &= \frac{1}{2\rho c_s} \left( 0, 1, \frac{1}{\rho c_s} \right), \\ \mathbf{l}^2 &= \frac{1}{2\rho c_s} \left( 2\rho c_s, 0, \frac{2}{\rho c_s} \right), \\ \mathbf{l}^3 &= \frac{1}{2\rho c_s} \left( 0, -1, \frac{1}{\rho c_s} \right). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Подчеркнем, что  $\lambda^1$  является минимальным, а  $\lambda^3$  — максимальным собственными значениями данной системы. Как и прежде, нашей целью является вычисление значений  $\mathbf{q}_{i+1/2}^L$  и  $\mathbf{q}_{i+1/2}^R$  для последующего решения задачи о распаде разрыва (задачи Римана). Рассмотрим сначала алгоритм вычисления  $\mathbf{q}_{i+1/2}^L$ . Отметим сразу, что если  $\lambda_{3,i} \leq 0$ , то в качестве  $\mathbf{q}_{i+1/2}^L$  можно взять  $\mathbf{q}_i^R$ , так как при этом  $\mathbf{q}_{i+1/2}^L$  не влияет на результат решения, поэтому рассмотрим случай  $\lambda_{3,i} > 0$ . Для этого случая на границу  $x = x_{i+1/2}$  между ячейками  $i$  и  $i+1$  слева приходит хоть одна характеристика. Определим  $\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L = \mathbf{q}_{i+1/2}^{L(3)}$

как величину, принесенную на границу слева из максимальной зоны влияния  $[x_{i+1/2} - \lambda_{3,i}\Delta t \dots x_{i+1/2}]$ :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L = \bar{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L(\lambda_{3,i}\Delta t), \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L(y) &= \frac{1}{y} \int_{x_{i+1/2}-y}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}(x) dx = \\ &= \mathbf{q}_i^R - \frac{y}{2\Delta x} \left[ \Delta \mathbf{q}_i - \left(1 - \frac{2y}{3\Delta x}\right) \mathbf{q}_i^{(6)} \right]. \end{aligned} \quad (8.29)$$

В методе PPM величина  $\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L$  называется первым приближением к  $\mathbf{q}_{i+1/2}^L$ , так как именно в окрестности точки  $\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L$  будут браться векторы  $\mathbf{l}^\alpha$  и  $\mathbf{r}_\alpha$  для построения линеаризованных инвариантов Римана, задаваемых соотношением

$$S_{i+1/2}^{\alpha,L} = \begin{cases} \mathbf{l}^\alpha(\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L) \cdot \mathbf{q}_{i+1/2}^{L,(\alpha)}, & \lambda_{\alpha,i} > 0, \\ \mathbf{l}^\alpha(\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L, & \lambda_{\alpha,i} \leq 0, \end{cases} \quad (8.30)$$

где

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^{L,(\alpha)} = \bar{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L(\lambda_{\alpha,i}\Delta t). \quad (8.31)$$

Возвращаясь к исходным переменным, можно получить искомое соотношение

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^L = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha(\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L) S_{i+1/2}^{\alpha,L}. \quad (8.32)$$

Если записать выражение (8.30) в компактном виде:

$$S_{i+1/2}^{\alpha,L} = \theta(\lambda_\alpha) \left( \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{q}_{i+1/2}^{L,(\alpha)} \right) + [1 - \theta(\lambda_\alpha k)] \left( \mathbf{l}^\alpha \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L \right), \quad (8.33)$$

то значение  $\mathbf{q}_{i+1/2}^L$  может быть записано как

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{i+1/2}^L &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \theta(\lambda_\alpha) \left( \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{q}_{i+1/2}^{L,(\alpha)} \right) + \\ &+ \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha [1 - \theta(\lambda_\alpha)] \left( \mathbf{l}^\alpha \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L \right) = \\ &= \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L - \sum_{\alpha} \theta(\lambda_\alpha) \mathbf{r}_\alpha \left[ \mathbf{l}^\alpha \cdot \left( \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L - \mathbf{q}_{i+1/2}^{L,(\alpha)} \right) \right] = \\ &= \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L - \sum_{\lambda_\alpha > 0} \mathbf{r}_\alpha \left[ \mathbf{l}^\alpha \cdot \left( \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L - \mathbf{q}_{i+1/2}^{L,(\alpha)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Для случая, когда слева на границу приходят все три характеристики (т. е.  $0 < \lambda_{1,i} < \lambda_{2,i} < \lambda_{3,i}$ ), описанная процедура дает следующие значения  $\mathbf{q}_{i+1/2}^L$  (для простоты индексы  $i + 1/2$  и  $L$  опущены, т. е., например,  $v^{(3)} \equiv v_{i+1/2}^{L,(3)}$ ):

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^{(2)}} - \frac{v^{(3)} - v^{(1)}}{2\tilde{\rho}\tilde{c}_s} - \frac{P^{(3)} - 2P^{(2)} + P^{(1)}}{2\tilde{\rho}^2\tilde{c}_s^2} \\ \frac{v^{(3)} + v^{(1)}}{2} + \frac{P^{(3)} - P^{(1)}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_s} \\ \frac{P^{(3)} + P^{(1)}}{2} + \frac{\tilde{\rho}\tilde{c}_s}{2}(v^{(3)} - v^{(1)}) \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

Если же слева на границу приходят две характеристики (т. е.  $\lambda_{1,i} < < 0 < \lambda_{2,i} < \lambda_{3,i}$ ), тогда

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^{(2)}} - \frac{P^{(3)} - P^{(2)}}{\tilde{\rho}^2\tilde{c}_s^2} \\ v^{(3)} \\ P^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

И, наконец, если слева на границу приходит только одна характеристика (т. е.  $\lambda_{1,i} < \lambda_{2,i} < 0 < \lambda_{3,i}$ ), то

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^L = \mathbf{q}_{i+1/2}^{L,(3)} = \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^{(3)}} \\ v^{(3)} \\ P^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (8.37)$$

Алгоритм вычисления  $\mathbf{q}_{i+1/2}^R$  строится аналогично описанному выше (для простоты индексы  $i + 1/2$  и  $R$  опущены): если  $\lambda_{1,i+1} \geq 0$ , то  $\mathbf{q}_{i+1/2}^R = \mathbf{q}_{i+1}^L$ , в противном случае

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R = \mathbf{q}_{i+1/2}^{R,(1)} = \bar{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R(-\lambda_{1,i+1}\Delta t), \quad (8.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R(y) &= \frac{1}{y} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2}+y} \mathbf{q}(x) dx = \\ &= \mathbf{q}_{i+1}^L + \frac{y}{2\Delta x} \left[ \Delta \mathbf{q}_{i+1} + \left(1 - \frac{2y}{3\Delta x}\right) \mathbf{q}_{i+1}^{(6)} \right], \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$S_{i+1/2}^{\alpha,R} = \begin{cases} \mathbf{1}^\alpha(\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R) \cdot \mathbf{q}_{i+1/2}^{R,(k)}, & \lambda_{\alpha,i+1} < 0, \\ \mathbf{1}^\alpha(\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R, & \lambda_{\alpha,i+1} \geq 0, \end{cases} \quad (8.40)$$

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^{R,(\alpha)} = \bar{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R(-\lambda_{\alpha,i+1}\Delta t), \quad (8.41)$$

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^R = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}(\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R) S_{i+1/2}^{\alpha,R}. \quad (8.42)$$

Если справа на границу приходят все три характеристики (т. е.  $\lambda_{1,i+1} < \lambda_{2,i+1} < \lambda_{3,i+1} < 0$ ), то

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^{(2)}} - \frac{v^{(3)} - v^{(1)}}{2\tilde{\rho}\tilde{c}_s} - \frac{P^{(3)} - 2P^{(2)} + P^{(1)}}{2\tilde{\rho}^2\tilde{c}_s^2} \\ \frac{v^{(3)} + v^{(1)}}{2} + \frac{P^{(3)} - P^{(1)}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_s} \\ \frac{P^{(3)} + P^{(1)}}{2} + \frac{\tilde{\rho}\tilde{c}_s}{2}(v^{(3)} - v^{(1)}) \end{pmatrix}. \quad (8.43)$$

Если справа на границу приходят две характеристики (т. е.  $\lambda_{1,i+1} < \lambda_{2,i+1} < 0 < \lambda_{3,i+1}$ ), то

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^{(2)}} - \frac{P^{(1)} - P^{(2)}}{\tilde{\rho}^2\tilde{c}_s^2} \\ v^{(1)} \\ P^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (8.44)$$

Если справа на границу приходит только одна характеристика (т. е.  $\lambda_{1,i+1} < 0 < \lambda_{2,i+1} < \lambda_{3,i+1}$ ), то

$$\mathbf{q}_{i+1/2}^R = \mathbf{q}_{i+1/2}^{R,(1)} = \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^{(1)}} \\ v^{(1)} \\ P^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (8.45)$$

В результате описанной процедуры мы можем построить два значения искомой функции на границе между ячейками:  $\mathbf{q}_{i+1/2}^L$  и  $\mathbf{q}_{i+1/2}^R$ . Решая задачу о распаде разрыва (точно или приближенно) между этими состояниями, получим значение потока  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  на границе между ячейками  $i$  и  $i+1$ . Это, в свою очередь, позволяет построить разностную схему. Описанный алгоритм можно обобщить на случай

уравнений двумерной и трехмерной газодинамики, а также уравнений газодинамики, содержащих внешние источники. С подробностями этих алгоритмов можно ознакомиться, например, в монографии [20].

Для исследования свойств метода PPM проведем те же тестовые расчеты, что и для предыдущих схем. Результаты расчетов представлены на рис. 8.1–8.4. Анализ полученных результатов показывает, что метод PPM достаточно хорошо воспроизводит решение. Следует,

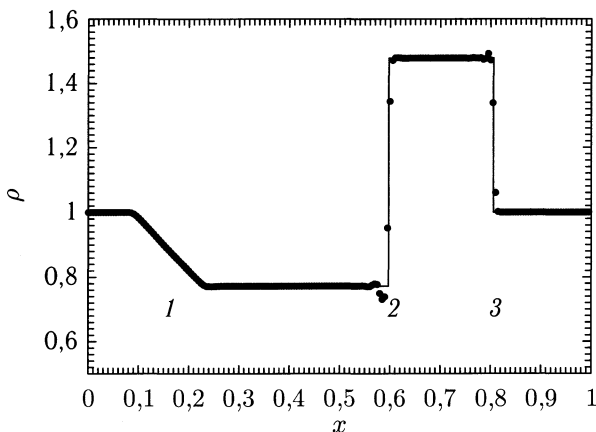


Рис. 8.1. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 1) на момент времени  $t = 0,18$  методом PPM с числом Куранта 0,5. Обозначения те же, что и на рис. 7.9

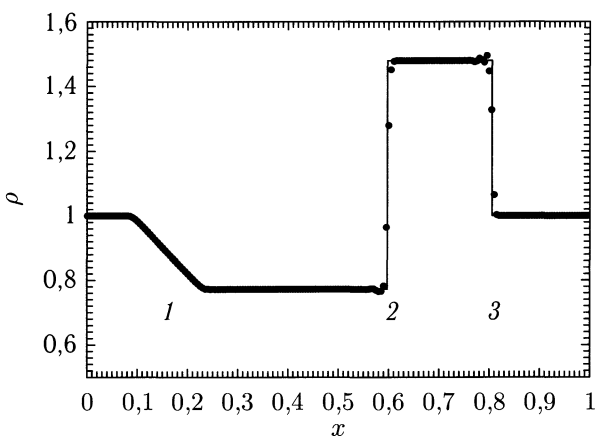


Рис. 8.2. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 1) на момент времени  $t = 0,18$  методом PPM с числом Куранта 0,2. Обозначения те же, что и на рис. 7.9

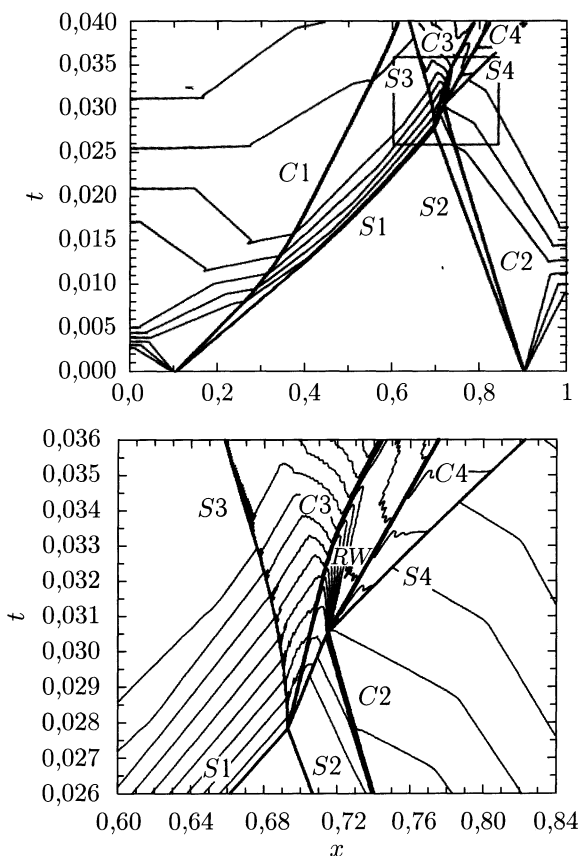


Рис. 8.3. Изолинии плотности на плоскости переменных  $(x, t)$  для расчета задачи о взаимодействии двух взрывных ударных волн (Тест 2) методом PPM. Обозначения те же, что и на рис. 7.10. Снизу показано увеличенное изображение прямоугольной области, отмеченной на верхней панели

однако, отметить наличие немонотонности в расчетах, проводившихся с числом Куранта  $\sim 0,5$ . Немонотонность уменьшается при переходе к меньшим значениям числа Куранта. Тем не менее, для повышения монотонности схемы в работе [195] был предложен специальный алгоритм монотонизации, фактически, вводящий в метод искусственную вязкость.

Для исследования свойств метода PPM для уравнений двумерной газовой динамики была рассмотрена задача о течении сверхзвукового потока с числом Маха  $M = 3$  в канале со ступенькой. Впервые такая задача рассматривалась в работе [378] и затем она неоднократно использовалась как тест для двумерных задач (см., например, [379–381]). Ширина канала принимается равной 1, длина — 3, высота

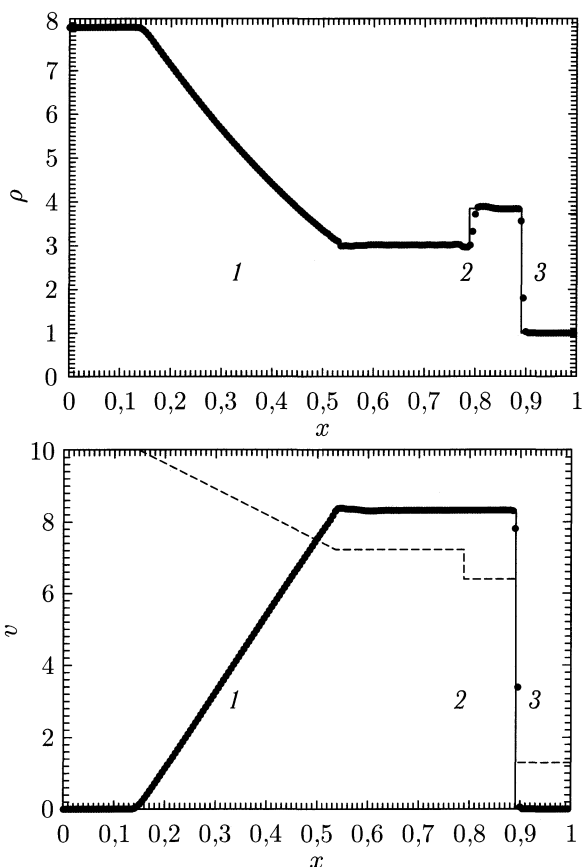


Рис. 8.4. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 3) на момент времени  $t = 0,035$  методом РРМ. Обозначения те же, что и на рис. 7.17

ступеньки — 0,2, ее левый край расположен на расстоянии 0,6 от левой границы канала. Газ считается идеальным с показателем адиабаты  $\gamma = 7/5$ . На левой границе задаются граничные значения  $\rho = 1$ ,  $v_x = 3$ ,  $v_y = 0$  и  $P = 1/\gamma$ , на правой границе течение сверхзвуковое, так что граничных условий задавать не надо. На твердых стенках ставилось условие непротекания. Многочисленные работы по численному моделированию этой задачи показали, что после касания отошедшей ударной волны с верхней стенкой образуется «ножка Маха» и тангенциальный разрыв, в котором развивается неустойчивость Кельвина–Гельмгольца.

На рис. 8.5 и 8.6 представлены результаты расчета этой задачи (в дальнейшем Тест 5). При увеличении пространственного разрешения сетки детали решения становятся все более отчетливыми. Наиболее полная картина получается в случае сетки  $320 \times 960$ . На нижней диаграмме рис. 8.5, которая соответствует этому случаю, отчетливо

виден тангенциальный разрыв за «ножкой Маха» и развивающаяся в нем неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Данная деталь наиболее трудно воспроизводится в численном расчете. Эта неустойчивость особенно хорошо видна на рис. 8.6, где показаны изолинии энтропии  $P/\rho^\gamma$  в области тангенциального разрыва для расчета на сетке  $320 \times 960$ . Следует отметить, что как и в одномерных тестах, в двумерном случае имеют место нефизические осцилляции решения, связанные с некоторой немонотонностью метода PPM.

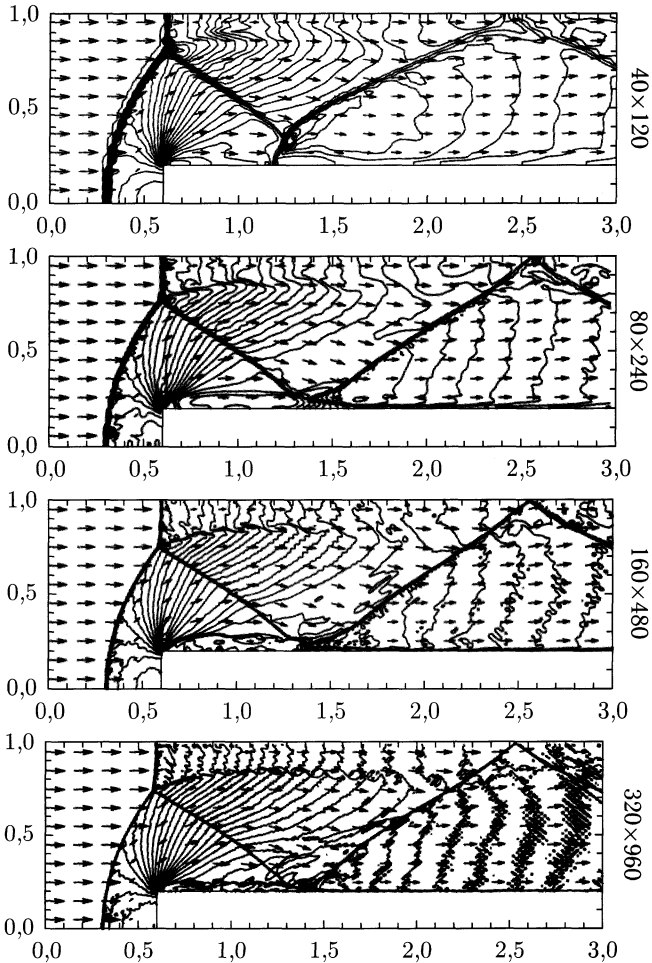


Рис. 8.5. Изолинии плотности и векторы скорости для расчета методом PPM задачи о течении сверхзвукового потока с числом Маха  $M = 3$  в канале со ступенькой (Тест 5) на момент времени  $t = 4$ . Числа справа для каждой панели обозначают размерность разностной сетки



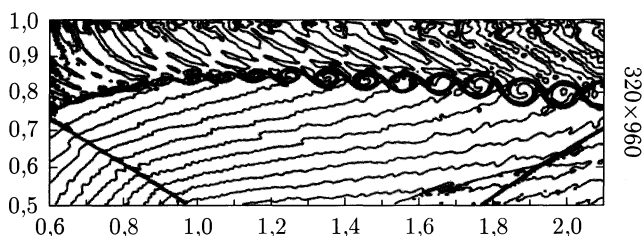


Рис. 8.6. Изолинии энтропии для расчета задачи о течении сверхзвукового потока с числом Маха  $M = 3$  в канале со ступенькой (Тест 5) на момент времени  $t = 4$  методом PPM в области тангенциального разрыва

## 8.2. TVD-схемы

**8.2.1. Положительность и монотонность.** Тестовые расчеты, приведенные в предыдущей главе, показывают, что годуновские схемы первого порядка аппроксимации имеют большую численную вязкость. Это приводит к размазыванию решений около сильных и слабых разрывов. С другой стороны при расчете течений с ударными волнами, контактными разрывами и волнами разрежения зачастую бывает необходимо разделять физические и численные осцилляции. Поэтому для решения подобных задач предпочтительней использовать нелинейные монотонные методы повышенного порядка точности. Исторически первыми монотонными методами были схемы скорректированных потоков (FCT, Flux Corrected Transport) [365] (более полный обзор этих схем можно найти в [216]). Первоначально они были развиты для уравнения переноса и для уравнений газодинамики. В настоящее время FCT-схемы используются и для моделирования МГД-течений [366].

Порядок аппроксимации базовых схем годуновского типа, описанных в предыдущей Главе, можно повысить различными способами. В 1984 г. Колелла и Вудворд [195] разработали метод кусочно-параболической интерполяции (PPM), в котором использовалось кусочно-параболическое представление расчетных величин в ячейке, в результате чего получается схема повышенного порядка аппроксимации (метод PPM подробно описан в параграфе 8.1). Метод PPM позволяет очень точно моделировать газодинамические течения, содержащие разрывы. На случай уравнений МГД этот метод обобщен в работах [304, 367].

Другим направлением построения методов для численного решения систем уравнений гиперболического типа является развитие так называемых TVD-схем (TVD, Total Variation Diminishing). Теория этих методов основана на понятии полной вариации численного решения. Класс TVD-схем был введен Хартемом [368] для систем уравнений с матрицей гиперболичности, состоящей из постоянных коэффициен-

тов. К TVD-схемам относятся схемы, в которых полная вариация сеточных инвариантов Римана не увеличивается со временем. Свойство TVD является обобщением понятия свойства монотонности для уравнения линейного переноса. Введение класса TVD-схем является попыткой поставить на формальную математическую основу теорию монотонных методов.

Идеология построения подобных разностных схем для систем одномерных гиперболических уравнений в общем виде состоит в следующем [186]: 1) выбирается монотонная базовая схема первого порядка аппроксимации; 2) путем добавки антидиффузионных членов базовая схема преобразуется в схему с повышенным порядком аппроксимации; 3) строится определенное правило ограничения коэффициентов антидиффузии для обеспечения монотонности. Дальнейшее развитие этой идеи привело к созданию схем более сложного типа, таких как UNO [369], ENO [370], WENO [371] и др.

В вопросах построения разностных схем для численного решения гиперболических систем уравнений свойства *положительности* и *монотонности* играют важную роль. Поэтому рассмотрим эти свойства более подробно. В качестве примера будем использовать нелинейное скалярное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0. \quad (8.46)$$

Решения этого уравнения удовлетворяют свойству положительности: если начальный профиль  $u_0(x)$  был положительным, то в произвольный момент  $t > 0$  профиль  $u(x, t)$  также останется положительным. В более общем смысле это свойство можно переформулировать для каких-либо двух решений  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  следующим образом: если начальные профили  $v_0(x) \geq u_0(x)$ , то при  $t > 0$  должно быть также  $v(x, t) \geq u(x, t)$ . Положительные схемы должны имитировать это свойство решений уравнения (8.46).

Рассмотрим некоторую схему общего вида для уравнения (8.46):

$$u_i^{n+1} = f(u_{i+k_1}^n, \dots, u_{i+k_2}^n), \quad (8.47)$$

где параметры  $k_1$  и  $k_2$  определяют шаблон схемы. Для согласованности схемы (8.47) необходимо, чтобы функция  $f$  удовлетворяла свойству

$$\lim_{u_1, \dots, u_r \rightarrow u} f(u_1, \dots, u_r) = u. \quad (8.48)$$

Нетрудно видеть, что схема (8.47) обладает свойством положительности, если функция  $f$  является монотонно возрастающей по всем своим аргументам. Иными словами, разностная схема (8.47) является положительной, если для любого  $s$  производные  $\partial f(u_1, \dots, u_r) / \partial u_s \geq 0$ .

Рассмотрим какие-либо две сеточные функции  $u_i^n$  и  $v_i^n$ , которые удовлетворяют схеме (8.47). Из сказанного выше следует, что если для любого  $i$  выполнено условие  $v_i^n \geq u_i^n$ , то на следующем временном

слое также будет  $v_i^{n+1} \geq u_i^{n+1}$ . Это свойство положительной схемы имитирует указанное выше свойство решения исходного уравнения (8.46).

Предположим, что профиль  $u_i$  переводится с временного слоя  $n$  на следующий слой  $n + 1$  с помощью положительной схемы (8.47). Тогда имеют место неравенства:

$$\max_i \{u_i^{n+1}\} \leq \max_i \{u_i^n\}, \quad \min_i \{u_i^{n+1}\} \geq \min_i \{u_i^n\}. \quad (8.49)$$

Действительно, определим новую сеточную функцию  $v_i^n$  с помощью соотношения  $v_i^n = \max\{u_j^n\}$ . Из этого определения следует, что эта сеточная функция не зависит от номера узла  $i$ . Согласно (8.48), на следующем временном слое имеем:

$$v_i^{n+1} = f(v_{i+k_1}^n, \dots, v_{i+k_2}^n) = v_i^n. \quad (8.50)$$

Далее поскольку  $v_i^n \geq u_i^n$ , то должно быть  $v_i^{n+1} = v_i^n \geq u_i^{n+1}$ . Отсюда следует первое неравенство в (8.49). Второе неравенство проверяется аналогично.

Заметим, что доказанные неравенства (8.49) для экстремумов решения можно продолжать вплоть до начального профиля:

$$\begin{aligned} \max_i \{u_i^{n+1}\} &\leq \max_i \{u_i^n\} \leq \dots \leq \max_i \{u_i^0\}, \\ \min_i \{u_i^{n+1}\} &\geq \min_i \{u_i^n\} \geq \dots \geq \min_i \{u_i^0\}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Это важное свойство положительных схем можно сформулировать и несколько другим способом. Поскольку

$$\min_i \{u_i^{n+1}\} \leq u_i^{n+1} \leq \max_i \{u_i^{n+1}\}, \quad (8.52)$$

то из доказанных неравенств следует, что

$$\min_i \{u_i^n\} \leq u_i^{n+1} \leq \max_i \{u_i^n\}. \quad (8.53)$$

Продолжая эти неравенства далее вплоть до начального временного слоя, приходим к неравенствам:

$$\min_i \{u_i^0\} \leq u_i^n \leq \max_i \{u_i^0\}. \quad (8.54)$$

Мы получили *принцип максимума*: решение в произвольный момент времени ограничено максимальным и минимальным значениями в начальных данных.

Разностная схема называется монотонной, если она не изменяет монотонный характер профиля при переходе от одного временного слоя к другому. В общем случае класс монотонных схем шире класса положительных схем. При этом любая положительная схема (8.47) является монотонной. Действительно, начальный монотонный профиль не имеет экстремумов во внутренних точках. Экстремумы достигаются

на границах. Положительная схема не может привести к появлению вторичных экстремумов на следующих слоях. Следовательно, она является монотонной.

**8.2.2. Линейные схемы.** Рассмотрим линейные схемы для уравнения (8.46):

$$u_i^{n+1} = \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k u_{i+k}^n, \quad (8.55)$$

где коэффициенты  $a_k$  не зависят от расчетных величин. В данном случае функция

$$f(u_{i+k_1}^n, \dots, u_{i+k_2}^n) = \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k u_{i+k}^n \quad (8.56)$$

является линейной. Поэтому условием положительности схемы (8.55) будет условие положительности коэффициентов:  $a_k \geq 0$ . Линейные схемы (8.55) обладают важным свойством: для них свойства положительности и монотонности равносильны. В этом нетрудно убедиться с помощью следующих простых рассуждений.

Допустим, что схема (8.55) является положительной. Это означает, что в ней все коэффициенты  $a_k \geq 0$ . Проверим ее монотонность. Пусть, например, для всех  $i$  выполняется неравенство  $u_{i+1}^n \geq u_i^n$ . Тогда

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k (u_{i+k+1}^n - u_{i+k}^n) \geq 0. \quad (8.57)$$

Таким образом, схема (8.55) действительно является монотонной.

Допустим теперь, что схема (8.55) является монотонной и для всех  $i$  выполняется неравенство  $u_{i+1}^n \geq u_i^n$  для любого временного слоя. Проверим свойство положительности. Предположим, что для некоторого  $k = K$  коэффициент  $a_K < 0$ . Рассмотрим следующий монотонный профиль частного вида:

$$u_i^n = \begin{cases} 0, & i \leq m, \\ 1, & i > m. \end{cases} \quad (8.58)$$

Тогда для такого профиля

$$u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k (u_{i+k+1}^n - u_{i+k}^n) = a_{m-i} \quad (8.59)$$

и монотонность нарушается в точке  $i = m - K$ . Мы пришли к противоречию. Следовательно, в монотонной схеме (8.55) все коэффициенты  $a_k$  должны быть положительными.

Рассмотрим в качестве примера схему донорской ячейки для уравнения адвекции:

$$u_i^{n+1} = C u_{i-1}^n + (1 - C) u_i^n. \quad (8.60)$$

Условие положительности этой схемы  $0 \leq C \leq 1$  совпадает с условием устойчивости. Поэтому схема донорской ячейки (8.60) явля-

ется монотонной. В качестве другого примера рассмотрим схему Лакса–Вендроффа для уравнения адвекции:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} C(1+C)u_{i-1}^n + (1-C^2)u_i^n - \frac{1}{2} C(1-C)u_{i+1}^n. \quad (8.61)$$

В общем случае для произвольных чисел Куранта  $C$ , удовлетворяющих условию устойчивости  $|C| \leq 1$ , эта схема не является положительной. Поэтому эта схема не является монотонной.

В рассмотренных примерах получилась следующая противоречивая ситуация. Схема донорской ячейки является монотонной, но имеет низкий порядок точности (первый порядок аппроксимации по времени и пространству). Схема Лакса–Вендроффа имеет высокий порядок точности (второй порядок аппроксимации по времени и пространству), но не является монотонной. Возникает вопрос: существуют ли монотонные схемы высокого порядка точности.

С.К. Годунов [173] показал, что не существует линейных схем второго и более высоких порядков, которые гарантировали бы монотонность. Для доказательства этого утверждения предположим, что существует линейная схема (8.55) с положительными коэффициентами  $a_k \geq 0$ , имеющая второй или более высокий порядок аппроксимации. Для простоты будем использовать равномерную сетку  $x_i = i\Delta x$ . В качестве начальных условий возьмем квадратичную функцию следующего вида:

$$u(x, 0) = \left(\frac{x}{\Delta x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{x}{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right). \quad (8.62)$$

Несмотря на то, что эта функция отрицательна на интервале  $0 < x/\Delta x < 1$ , соответствующая сеточная функция является положительной:

$$u_i^0 = \left(i - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = i(i-1) \geq 0. \quad (8.63)$$

Точное решение уравнения адвекции  $u(x, t) = u(x - at, 0)$  в произвольный момент времени также будет представлять собой квадратичную функцию по пространственной координате  $x$  и времени  $t$ . С другой стороны невязка схем второго (или более высокого) порядка выражается через третьи (или вышние) частные производные по пространству и времени от текущего профиля. Для квадратичного профиля все они будут равны нулю. Поэтому для нашей задачи невязка также будет равна нулю.

Таким образом, на первом шаге интегрирования будет

$$u(x, \Delta t) = \left(\frac{x - a\Delta t}{\Delta x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad (8.64)$$

или

$$u_i^1 = \left(i - \frac{a\Delta t}{\Delta x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}. \quad (8.65)$$

Это означает, что должно выполняться соотношение

$$\left(i - C - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k \left[\left(i + k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]. \quad (8.66)$$

Правая часть является неотрицательной в силу  $a_k \geq 0$  и неотрицательности начального профиля. Однако левая часть не может быть неотрицательной для произвольных значений числа Куранта  $C = a\Delta t/\Delta x$ . Мы пришли к противоречию. Следовательно, исходное предположение о существовании положительной схемы (8.55) высокого порядка точности является неверным.

Доказанная теорема Годунова приводит к следующей дилемме. Среди схем первого порядка есть монотонные схемы, но они имеют низкую точность. Схемы высокого порядка имеют хорошую точность, но среди них нет монотонных схем. В качестве решения этой проблемы было предложено развивать нелинейные монотонные схемы высокого порядка точности. Общая идея построения этих схем заключается в следующем. В тех местах, где нет опасности нарушения монотонности, используется схема высокого порядка. В тех местах, где монотонность может нарушиться, используется схема первого порядка. В результате коэффициенты  $a_k$  в схеме (8.55) будут зависеть от текущего решения  $u_i$  и, следовательно, такая схема будет нелинейной.

**8.2.3. Принцип TVD.** В теории монотонных разностных схем полезным оказывается понятие полной вариации. Напомним (см., например, [372]), что для произвольной ограниченной функции  $u(x)$ , заданной на отрезке  $a \leq x \leq b$ , полная вариация определяется выражением

$$\text{TV}[u] = \sup \sum_{k=1}^n |u(x_k) - u(x_{k-1})|, \quad (8.67)$$

где правая часть вычисляется по всем возможным разбиениям отрезка  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Можно использовать и альтернативное определение:

$$\text{TV}[u] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \frac{1}{\delta} \int_a^b |u(x + \delta) - u(x)| dx. \quad (8.68)$$

Например, для непрерывной функции из этого определения находим:

$$\text{TV}[u] = \int_a^b |u'(x)| dx. \quad (8.69)$$

Кусочно-постоянная функция с конечным числом разрывов принадлежит классу функций с ограниченной вариацией. В частности, решение задачи Римана для системы линейных уравнений гиперболического

типа описывается функциями, принадлежащими этому классу. Полная вариация каждой величины в решении задачи Римана будет определяться суммой вариаций этой величины на бегущих волнах. Обобщенные решения системы уравнений гиперболического типа также описываются функциями с ограниченной полной вариацией.

Если функция зависит от координаты  $x$  и времени  $t$ , то определение полной вариации нужно было бы уточнить. Однако для дальнейших приложений этого понятия к проблеме построения разностных схем удобнее полную вариацию функции  $u(x, t)$  рассматривать как полную вариацию по координате  $x$  в момент времени  $t$ . В этом случае полная вариация функции  $u(x, t)$  становится функцией времени:  $TV[u(x, t)] = \varphi(t)$ .

Рассмотрим уравнение адвекции. Можно показать, что его решения обладают следующим свойством. Если в начальный момент  $t = 0$  для функции  $u(x, t)$  существует полная вариация  $TV[u(0)]$ , то в произвольный момент времени  $t > 0$  решение  $u(x, t)$  также имеет ограниченную полную вариацию  $TV[u(t)]$ , равную начальной (если не учитывать граничные условия). Для нелинейного скалярного уравнения (8.46) можно показать (если снова не учитывать граничные условия), что полная вариация решения не убывает со временем:

$$TV[u(t_2)] \leq TV[u(t_1)], \quad t_2 \geq t_1. \quad (8.70)$$

Для сеточной функции выражение для полной вариации можно записать в более простом виде:

$$TV[u^n] = \sum_i |u_i^n - u_{i-1}^n|. \quad (8.71)$$

Будем называть схему (8.47) *TVD-схемой* [182], [368] (TVD, Total Variation Diminishing; схема, не увеличивающая полную вариацию), если любое ее решение удовлетворяет неравенству

$$TV[u^{n+1}] \leq TV[u^n]. \quad (8.72)$$

TVD-схемы представляют собой промежуточный класс схем между монотонными и положительными схемами. Любая TVD-схема является монотонной. Любая положительная схема является TVD-схемой. Для линейных схем (8.55) эти три класса схем совпадают.

Для TVD-схем полная вариация решения на каждом временном слое ограничена сверху значением начальной полной вариации. Действительно,

$$TV[u^n] \leq TV[u^{n-1}] \leq \dots \leq TV[u^0]. \quad (8.73)$$

При моделировании некоторых задач может возникнуть необходимость использования схем с более слабым ограничением полной вариации.

В качестве примера можно привести принцип ограниченной полной вариации (TVB, Total Variation Bounded) [373]:

$$TV[u^n] \leq B, \quad (8.74)$$

где  $B$  — некоторая положительная константа. Из (8.73) следует, что всякая TVD-схема является TVB-схемой. Но обратное, вообще говоря, неверно. Класс TVB-схем более широкий.

### 8.3. Построение повышающих поправок

**8.3.1. Основные концепции.** Рассмотрим на примере уравнения адвекции основные приемы преобразования схем первого порядка аппроксимации в схемы повышенного порядка аппроксимации, при котором сохраняется свойство монотонности. Рассмотрим сначала случай  $a > 0$ . Общий случай будет рассмотрен в этом параграфе далее. Вместо кусочно-постоянной аппроксимации величин в ячейках введем кусочно-линейную аппроксимацию  $u(x) = u_i + \sigma_i(x - x_i)$  с некоторым подходящим значением наклона  $\sigma_i$ , которое будет определено ниже. Тогда численный поток через границу ячейки в методе Годунова будет теперь иметь такой вид:

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} au_*(x_{i+1/2}, t) dt = au_i + \frac{a}{2}(\Delta x - a\Delta t)\sigma_i. \quad (8.75)$$

Наклон  $\sigma_i$  можно выбирать многими способами, каждый из которых даст свою схему. Если  $\sigma_i$  аппроксимирует  $\partial u / \partial x$ , схема будет иметь второй порядок аппроксимации. Наиболее употребительными являются схемы Лакса–Вендроффа с  $\sigma_i = (u_{i+1} - u_i) / \Delta x$ , Бима–Ворминга [374], [375] с  $\sigma_i = (u_i - u_{i-1}) / \Delta x$  и Фромма [376] с  $\sigma_i = (u_{i+1} - u_{i-1}) / (2\Delta x)$ . Потоки для этих схем задаются следующими выражениями. Для схемы Лакса–Вендроффа

$$F_{i+1/2} = au_i + \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{\Delta ta}{\Delta x} \right) (u_{i+1} - u_i), \quad (8.76)$$

для схемы Бима–Ворминга

$$F_{i+1/2} = au_i + \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{\Delta ta}{\Delta x} \right) (u_i - u_{i-1}), \quad (8.77)$$

для схемы Фромма

$$F_{i+1/2} = au_i + \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{\Delta ta}{\Delta x} \right) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2}. \quad (8.78)$$

Для удобства анализа запишем эти три схемы, а также монотонную схему первого порядка аппроксимации в следующем виде

$$F_{i+1/2} = au_i + \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{\Delta ta}{\Delta x} \right) \alpha(R)(u_{i+1} - u_i), \quad R = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}. \quad (8.79)$$



Величина  $R$  называется анализатором гладкости, а функция  $\alpha(R)$  — ограничителем потока. При этом  $\alpha(R) = 0$  для монотонной схемы первого порядка,  $\alpha(R) = 1$  для схемы Лакса–Вендроффа,  $\alpha(R) = R$  для схемы Бима–Ворминга и  $\alpha(R) = (1 + R)/2$  для схемы Фромма. Для аппроксимации с порядком выше первого необходимо, чтобы  $\alpha(1) = 1$ . Отметим, что во всех указанных схемах  $\alpha(R)$  является линейной функцией анализатора гладкости  $R$ .

Нетрудно проверить непосредственно, и это следует из теоремы Годунова, что рассматриваемые схемы второго порядка аппроксимации (Лакса–Вендроффа, Бима–Ворминга и Фромма) являются немонотонными. Чтобы преодолеть запрет, накладываемый теоремой Годунова, и получить монотонные схемы повышенного порядка аппроксимации, было предложено использовать нелинейные ограничители потока. В работах [182, 183] было показано, что для монотонности схемы необходимо, чтобы ограничитель потока удовлетворял условию  $0 \leq \alpha(R) \leq \min\text{mod}(2, 2R)$ , где

$$\min\text{mod}(x, y) = \frac{\text{sign}(x) + \text{sign}(y)}{2} \min(|x|, |y|). \quad (8.80)$$

На рис. 8.7 эта область показана на плоскости переменных  $(R, \alpha)$  вертикальной штриховкой. Из этого рисунка видно, почему схемы Лакса–Вендроффа, Бима–Ворминга и Фромма немонотонны. Это связано с тем, что их ограничители потока выходят за пределы области монотонности. Кроме того, Свеби [183] предложил дополнительное условие на  $\alpha(R)$ , заключающееся в том, что эта функция должна быть выпуклой комбинацией ограничителей потока схем Лакса–Вендроффа ( $\alpha(R) = 1$ ) и Бима–Ворминга ( $\alpha(R) = R$ ). Пересечение области значений  $\alpha(R)$ , удовлетворяющих этому условию, с областью монотонности показана на рис. 8.7 горизонтальной штриховкой. Также на рис. 8.7 показаны ограничители потока  $\alpha(R)$ , предложенные в различных работах: «minmod» [183]

$$\alpha(R) = \min\text{mod}(1, R), \quad (8.81)$$

«superbee» [377]

$$\alpha(R) = \max(0, \min(1, 2R), \min(2, R)), \quad (8.82)$$

поток, предложенный ван Лиром [180],

$$\alpha(R) = \frac{R + |R|}{1 + R}, \quad (8.83)$$

и MUSCL [181]

$$\alpha(R) = \max\left(0, \min\left(\frac{1 + R}{2}, 2, 2R\right)\right). \quad (8.84)$$

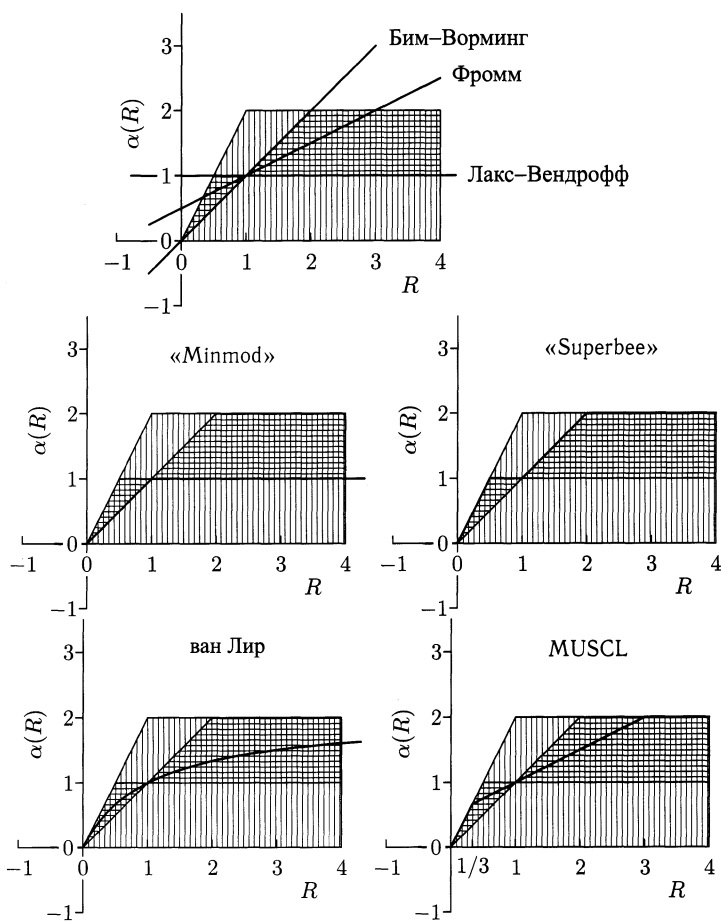


Рис. 8.7. Зависимость ограничителя антидиффузионного потока от анализатора гладкости  $\alpha(R)$  для различных схем. Вертикальной штриховкой показана область монотонности. Горизонтальной штриховкой показано пересечение области монотонности с областью выпуклой комбинации ограничителя потока схем Лакса-Вендроффа ( $\alpha(R) = 1$ ) и Бима-Ворминга ( $\alpha(R) = R$ )

**8.3.2. Схема высокого порядка аппроксимации для уравнения адвекции.** В этом разделе будет рассмотрен еще один способ введения ограничителей потока. Этот подход был предложен в работах [184–186]. Если предыдущие схемы базировались на схеме Лакса-Вендроффа (схема при  $\alpha(R) = 1$ ), то эти схемы при  $\alpha(R) = 1$  переходят в схему донорской ячейки. Рассмотрим подробно этот способ построения схем на примере уравнения адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (8.85)$$

При этом будем считать, что значение коэффициента  $a$  может быть как положительным, так и отрицательным.

Будем использовать равномерную расчетную сетку  $x_i = i\Delta x$  с постоянным шагом  $\Delta x$ . Рассмотрим следующую базовую схему для уравнения адвекции (8.85):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{w}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = 0. \quad (8.86)$$

Здесь  $w$  является свободным параметром схемы. Последнее слагаемое в левой части описывает диффузию и добавлено для обеспечения устойчивости. Эту схему можно переписать в консервативной форме:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (8.87)$$

где потоки

$$F_{i+1/2} = \frac{au_{i+1}^n + au_i^n}{2} - \frac{w}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n). \quad (8.88)$$

В частном случае при  $w = |a|$  эта схема переходит в схему Годунова (схема донорской ячейки) для уравнения адвекции. Проверим монотонность базовой схемы. Для этого перепишем ее в виде:

$$u_i^{n+1} = Au_{i+1}^n + Bu_i^n + Cu_{i-1}^n, \quad (8.89)$$

где коэффициенты

$$A = \frac{(w-a)\Delta t}{2\Delta x}, \quad C = \frac{(w+a)\Delta t}{2\Delta x}, \quad B = 1 - A - C = 1 - \frac{w\Delta t}{\Delta x}. \quad (8.90)$$

Отсюда видно, что схема (8.86) является монотонной в случае выполнения неравенств  $A \geq 0$ ,  $C \geq 0$ ,  $B \geq 0$ . Неравенства  $A \geq 0$ ,  $C \geq 0$  дают условие  $w \geq |a|$ . Отметим, что схема Годунова удовлетворяет этому условию монотонности. Оставшееся неравенство  $B \geq 0$  совпадает с условием устойчивости  $w\Delta t/\Delta x \leq 1$ .

Построим теперь схему высокого порядка аппроксимации. Для этого к базовой схеме (8.86) добавим антидиффузионные поправки:

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{w}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - \\ & - \frac{a-w}{4} \left( \alpha_{i+1/2}^- \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} - \alpha_{i-1/2}^- \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right) + \\ & + \frac{a+w}{4} \left( \alpha_{i+1/2}^+ \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} - \alpha_{i-1/2}^+ \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right) = 0. \quad (8.91) \end{aligned}$$

Антидиффузионные коэффициенты  $\alpha$  должны быть неотрицательными. В противном случае добавленные члены будут описывать не антидиффузию, а диффузию, которая уже учтена в базовой схеме. Перепишем схему (8.91) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{w}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - \\ - \frac{a-w}{4\Delta x} \left( \alpha_{i+1/2}^- - \frac{\alpha_{i-1/2}^-}{R_{i-1/2}^-} \right) (u_{i+1}^n - u_i^n) + \\ + \frac{a+w}{4\Delta x} \left( \frac{\alpha_{i+1/2}^+}{R_{i+1/2}^+} - \alpha_{i-1/2}^+ \right) (u_i^n - u_{i-1}^n) = 0, \quad (8.92) \end{aligned}$$

где анализаторы гладкости

$$R_{i+1/2}^+ = \frac{\Delta_{i-1/2} u^n}{\Delta_{i+1/2} u^n}, \quad R_{i-1/2}^- = \frac{\Delta_{i+1/2} u^n}{\Delta_{i-1/2} u^n}, \quad (8.93)$$

$$\Delta_{i+1/2} u^n = u_{i+1}^n - u_i^n, \quad \Delta_{i-1/2} u^n = u_i^n - u_{i-1}^n. \quad (8.94)$$

Для анализа монотонности схемы (8.92) перепишем ее снова в виде

$$u_i^{n+1} = A_{i+1/2} u_{i+1}^n + B_i u_i^n + C_{i-1/2} u_{i-1}^n, \quad (8.95)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} A_{i+1/2} &= \frac{(w-a)\Delta t}{4\Delta x} \left( 2 - \alpha_{i+1/2}^- + \frac{\alpha_{i-1/2}^-}{R_{i-1/2}^-} \right), \\ C_{i-1/2} &= \frac{(w+a)\Delta t}{4\Delta x} \left( 2 - \alpha_{i-1/2}^+ + \frac{\alpha_{i+1/2}^+}{R_{i+1/2}^+} \right), \end{aligned} \quad (8.96)$$

$$B_i = 1 - A_{i+1/2} - C_{i-1/2}.$$

Заметим, что с учетом этих соотношений схему (8.95) можно переписать по другому:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + A_{i+1/2} \Delta_{i+1/2} u^n - C_{i-1/2} \Delta_{i-1/2} u^n. \quad (8.97)$$

Схема (8.92) будет положительной при условии положительности коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Кроме того, условие положительности коэффициента  $B$  совпадает с условием устойчивости схемы (8.92).

Будем считать, что антидиффузионные коэффициенты  $\alpha$  являются функциями анализатора гладкости:  $\alpha = \alpha(R)$ . В этом случае схема (8.92) становится нелинейной и на нее теорема Годунова уже не распространяется. Необходимые свойства функции  $\alpha(R)$  следуют из условий положительности коэффициентов (8.96): 1)  $\alpha = 0$  при  $R \leq 0$ ; 2)  $0 < \alpha \leq 2$  при  $R > 0$ . Действительно, в этом случае для коэффициентов  $A$  и  $C$  имеем:

$$2 - \alpha(R_1) + \frac{\alpha(R_2)}{R_2} \geq 2 - \max_R \{\alpha\} + \min_R \left\{ \frac{\alpha}{R} \right\} \geq 0. \quad (8.98)$$

Условие устойчивости схемы (8.92) определяется неравенством  $B \geq 0$ . Его можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{w\Delta t}{\Delta x} + \frac{(w-a)\Delta t}{4\Delta x} \max_R \left\{ \frac{\alpha}{R} \right\} - \frac{(w-a)\Delta t}{4\Delta x} \min \{ \alpha \} + \\ + \frac{(w+a)\Delta t}{4\Delta x} \max_R \left\{ \frac{\alpha}{R} \right\} - \frac{(w+a)\Delta t}{4\Delta x} \min \{ \alpha \} \leq 1. \end{aligned} \quad (8.99)$$

Производя сокращения, находим условие

$$\frac{w\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \max_R \left\{ \frac{\alpha}{R} \right\}}. \quad (8.100)$$

Убедимся, что при этих условиях схема (8.92) принадлежит к классу TVD-схем. Удобнее для этого использовать форму (8.97) для записи этой схемы. Проведя несложные вычисления, найдем:

$$\begin{aligned} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| &= |\Delta_{i+1/2} u^{n+1}| = \\ &= |\Delta_{i+1/2} u^n + A_{i+3/2} \Delta_{i+3/2} u^n - C_{i+1/2} \Delta_{i+1/2} u^n - \\ &\quad - A_{i+1/2} \Delta_{i+1/2} u^n + C_{i-1/2} \Delta_{i-1/2} u^n| \leq \\ &\leq (1 - A_{i+1/2} - C_{i+1/2}) |\Delta_{i+1/2} u^n| + \\ &\quad + A_{i+3/2} |\Delta_{i+3/2} u^n| + C_{i-1/2} |\Delta_{i-1/2} u^n|. \end{aligned} \quad (8.101)$$

С помощью полученного неравенства можно оценить полную вариацию сеточной функции на слое  $n+1$ ,

$$\begin{aligned} \text{TV}[u^{n+1}] &= \sum_k |\Delta_{k+1/2} u^{n+1}| \leq \\ &\leq \sum_k (1 - A_{k+1/2} - C_{k+1/2}) |\Delta_{k+1/2} u^n| + \\ &\quad + \sum_k A_{k+3/2} |\Delta_{k+3/2} u^n| + \sum_k C_{k-1/2} |\Delta_{k-1/2} u^n|. \end{aligned} \quad (8.102)$$

Переобозначая индекс суммирования в последних двух членах, можно убедиться, что правая часть (8.102) равна  $\text{TV}[u^n]$ . Поэтому

$$\text{TV}[u^{n+1}] \leq \text{TV}[u^n]. \quad (8.103)$$

Проверим порядок аппроксимации схемы (8.92). Разложение в ряд Тейлора левой части схемы (8.92) приводит к следующему дифференциальному приближению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w\Delta x}{2} [\alpha(1) - 1] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\ - \frac{a\Delta x^2}{2} \left[ \alpha'(1) - \frac{1}{3} \right] \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^3). \end{aligned} \quad (8.104)$$

Таким образом, при условии  $\alpha(1) = 1$  схема будет иметь не менее чем второй порядок аппроксимации по пространственной переменной. Если же одновременно выполняются два условия

$$\alpha(1) = 1, \quad \alpha'(1) = \frac{1}{3}, \quad (8.105)$$

то схема будет иметь третий порядок аппроксимации по пространству. Следуя работе [184], выберем функцию  $\alpha(R)$  в виде

$$\alpha(R) = \frac{1+\varphi}{2} \min\text{mod}(1, \beta R) + \frac{1-\varphi}{2} \min\text{mod}(\beta, R). \quad (8.106)$$

Функция  $\alpha(R)$  в точке  $R = 1$  принимает значение 1, причем через эту точку кривая проходит линейным образом. Следовательно, схема (8.92) с функцией анализатора гладкости (8.106) в области гладкости решения  $1/\beta \leq R \leq \beta$  имеет порядок аппроксимации не ниже второго. Границы области гладкости определяют параметры

$$\alpha_{\min} = \frac{(1+\varphi)\beta + (1-\varphi)}{2\beta}, \quad \alpha_{\max} = \frac{(1+\varphi) + (1-\varphi)\beta}{2}. \quad (8.107)$$

Заметим, что ширина области гладкости определяется только параметром  $\beta$ . Наибольшая возможная ширина области гладкости достигается в случае, когда величина  $\alpha_{\max}$  достигает своего наибольшего возможного значения, равного 2. При еще больших значениях монотонность схемы (8.92) нарушается. Значению  $\alpha_{\max} = 2$  соответствует оптимальное значение

$$\beta_{\max} = \frac{3-\varphi}{1-\varphi}. \quad (8.108)$$

В этом случае нижнее значение  $\alpha_{\min} = 2/(3-\varphi)$ .

Первое дифференциальное приближение схемы (8.92) с поправками вида (8.106) в области гладкости имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{4} \left( \frac{1}{3} - \varphi \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta t + \Delta x^3). \quad (8.109)$$

Отсюда видно, что при  $\varphi = 1/3$  схема имеет третий порядок аппроксимации по пространству в областях гладкости. В остальных случаях она имеет второй порядок аппроксимации. Случаю  $\varphi = 1/3$  соответствует оптимальное значение  $\beta = 4$  (см. выражение (8.108)).

Условие устойчивости (8.100) в случае поправки (8.106) принимает вид:

$$\frac{w\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{4}{5-\varphi+\beta(1+\varphi)}. \quad (8.110)$$

Подставляя сюда оптимальные значения параметров  $\varphi = 1/3$  и  $\beta = 4$ , находим:  $w\Delta t/\Delta x \leq 0,4$ .

Разностная схема (8.92) с анализатором гладкости в форме Ошера (8.106) может быть записана в более компактном консервативном виде:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} = 0. \quad (8.111)$$

Численные потоки в этой схеме вычисляются по следующему правилу:

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^0 + \delta F_{i+1/2}, \quad (8.112)$$

где базовые потоки

$$F_{i+1/2}^0 = \frac{F_{i+1} + F_i}{2} - \frac{w}{2}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (8.113)$$

соответствуют схеме первого порядка точности (8.87), (8.88), а повышающие поправки к базовым потокам

$$\begin{aligned} \delta F_{i+1/2} = & -\frac{1-\varphi}{4} \min\text{mod}(\Delta^- F_{i+3/2}, \beta \Delta^- F_{i+1/2}) - \\ & -\frac{1+\varphi}{4} \min\text{mod}(\Delta^- F_{i+1/2}, \beta \Delta^- F_{i+3/2}) + \\ & +\frac{1+\varphi}{4} \min\text{mod}(\Delta^+ F_{i+1/2}, \beta \Delta^+ F_{i-1/2}) + \\ & +\frac{1-\varphi}{4} \min\text{mod}(\Delta^+ F_{i-1/2}, \beta \Delta^+ F_{i+1/2}), \end{aligned} \quad (8.114)$$

$$\Delta^- F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^0 - F_i, \quad \Delta^+ F_{i+1/2} = F_{i+1} - F_{i+1/2}^0. \quad (8.115)$$

Результат тестового расчета задачи о переносе квадратного профиля показан на рис. 8.8 (см. также рис. 6.4, 6.5). Задача решалась на единичном отрезке  $0 \leq x \leq 1$  с периодическими граничными условиями. В начальный момент времени был задан профиль  $u_0(x) = 0,8$  при  $0,4 \leq x \leq 0,6$  и  $u_0(x) = 0,4$  в противном случае. Для расчета использовались следующие параметры: число узлов сетки  $N = 500$ , скорость  $a = 1$ , число Куранта  $C = 0,2$ . На рисунке показано решение на момент времени  $t = 1$ . Аналитическое решение показано сплошной линией. Для сравнения приведены также численные решения этой задачи, полученные с помощью схемы донорской ячейки (обозначено цифрой 1) и схемы Лакса–Вендроффа (обозначено цифрой 2). В случае схемы донорской ячейки из-за численной диффузии первоначальный квадратичный профиль быстро размывается по всей сетке. В случае схемы Лакса–Вендроффа на численном профиле возникают существенные осцилляции, обусловленные дисперсионными ошибками. В схеме третьего порядка (8.112)–(8.115) (обозначено цифрой 3) профиль размывается всего на 3–4 ячейки и остается таким в течение длительного времени счета. Это указывает на то, что амплитудные и фазовые ошибки в схеме третьего порядка согласованы между собой.

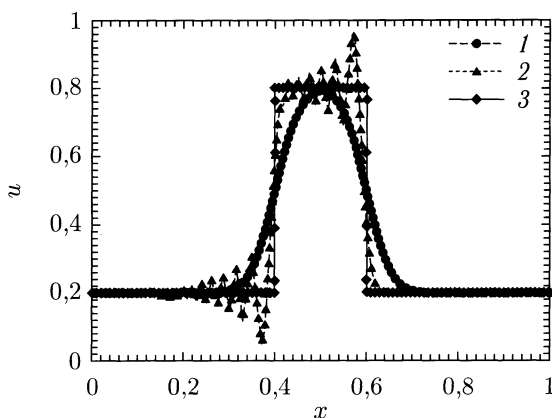


Рис. 8.8. Линейный перенос квадратного профиля. Показаны распределения через 100 шагов по времени, рассчитанные по схеме донорской ячейки (1), по схеме Лакса–Вендроффа (2) и по схеме третьего порядка с поправкой Ошера (3). Сплошная линия соответствует аналитическому решению

Повышающие поправки (8.114) можно переписать в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} \delta F_{i+1/2} = & \frac{1}{2} \text{limiter}(\Delta^+ F_{i-1/2}, \Delta^+ F_{i+1/2}) - \\ & - \frac{1}{2} \text{limiter}(\Delta^- F_{i+1/2}, \Delta^- F_{i+3/2}), \end{aligned} \quad (8.116)$$

$$\Delta^\pm F_{i+1/2} = \frac{a \pm w}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n). \quad (8.117)$$

Этот вид выражений для потоков подразумевает использование произвольной функции-ограничителя  $\text{limiter}(x, y)$ . Для повышающей поправки в форме Ошера

$$\text{limiter}(x, y) = \frac{1+\varphi}{2} \text{minmod}(y, \beta x) + \frac{1-\varphi}{2} \text{minmod}(\beta y, x). \quad (8.118)$$

Сравнивая это определение с выражением (8.106), получаем, что функция-ограничитель и функция анализатора гладкости связаны простым соотношением:  $\alpha(R) = \text{limiter}(R, 1)$ . Антидиффузионные потоки в форме (8.114) явным образом учитывают вид выбранной функции анализатора гладкости. Потоки в форме (8.116) записаны для произвольной функции-ограничителя.

**8.3.3. Случай гиперболической системы уравнений.** Рассмотрим гиперболическую систему линейных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (8.119)$$



где  $\mathcal{A}$  — матрица, состоящая из постоянных коэффициентов. Ее можно переписать (см. Приложение А, раздел А.1.2) в виде системы скалярных уравнений для инвариантов Римана:

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \lambda_\alpha \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} = 0. \quad (8.120)$$

Если в начальный момент времени все инварианты Римана  $S^\alpha$  обладали ограниченной полной вариацией, то в силу линейности уравнений должно быть (8.120)

$$\text{TV}[S^\alpha(t_2)] = \text{TV}[S^\alpha(t_1)], \quad t_2 > t_1. \quad (8.121)$$

Строго говоря, это равенство может нарушаться за счет граничных условий. Однако при разработке монотонных разностных схем влияние граничных условий на изменение полной вариации решения учитывать не нужно. Оценим полную вариацию отдельной компоненты с номером  $p$  вектора  $\mathbf{u}$ :

$$\text{TV}[u^p(t_2)] \leq \sum_\alpha |r_\alpha^p| \text{TV}[S^\alpha(t_2)] \leq \sum_\alpha |r_\alpha^p| \text{TV}[S^\alpha(t_1)]. \quad (8.122)$$

Выразим инварианты Римана обратно через компоненты вектора  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} \text{TV}[u^p(t_2)] &\leq \sum_\alpha |r_\alpha^p| \sum_q |l_q^\alpha| \text{TV}[u^q(t_1)] \leq \\ &\leq \sum_q \sum_\alpha |r_\alpha^p l_q^\alpha| \text{TV}[u^q(t_1)] = \sum_q B_q^p \text{TV}[u^q(t_1)], \end{aligned} \quad (8.123)$$

где матрица  $\mathcal{B}$  определена выражением

$$B_q^p = \sum_\alpha |r_\alpha^p l_q^\alpha| \geq 0. \quad (8.124)$$

Мы получили следующую оценку:

$$\text{TV}[\mathbf{u}(t_2)] \leq \mathcal{B} \cdot \text{TV}[\mathbf{u}(t_1)] \quad (8.125)$$

с положительно определенной постоянной матрицей  $\mathcal{B}$ .

Таким образом, для отдельных компонент вектора  $\mathbf{u}$  полная вариация может возрасти с течением времени, оставаясь ограниченной сверху величиной. Поэтому в терминах компонент исходного вектора  $\mathbf{u}$  получаем принцип TVB с ограничивающей константой, которая определяется начальными условиями. Для инвариантов Римана соблюдается оригинальный принцип TVD. Поэтому будем использовать его для обобщения принципа TVD на случай системы линейных уравнений. Будем считать [186], что разностная схема для уравнения (8.119) является TVD-схемой, если на любом временном слое для сеточных инвариантов Римана выполняются неравенства

$$\text{TV}[S^{\alpha, n+1}] \leq \text{TV}[S^{\alpha, n}]. \quad (8.126)$$

TVD-схемы для инвариантов Римана можно построить на основе TVD-схемы повышенного порядка для уравнения адвекции, описанной в предыдущем разделе. Например, используя поправку Ошера, получаем:

$$\frac{S_i^{\alpha,n+1} - S_i^{\alpha,n}}{\Delta t} + \frac{H_{i+1/2}^\alpha - H_{i-1/2}^\alpha}{\Delta t} = 0. \quad (8.127)$$

Численные потоки в этой схеме определяются выражениями

$$\begin{aligned} H_{i+1/2}^\alpha &= H_{i+1/2}^{\alpha,0} + \delta H_{i+1/2}^\alpha, \\ H_{i+1/2}^{\alpha,0} &= \frac{H_{i+1}^\alpha + H_i^\alpha}{2} - \frac{w_\alpha}{2} (S_{i+1}^{\alpha,n} - S_i^{\alpha,n}), \\ H_{i+1}^\alpha &= \lambda_\alpha S_i^{\alpha,n}, \quad w_\alpha \geq |\lambda_\alpha|. \end{aligned} \quad (8.128)$$

Антидиффузионные поправки к численным потокам:

$$\begin{aligned} \delta H_{i+1/2}^\alpha &= -\frac{1-\varphi_\alpha}{4} \min\text{mod}(\Delta^- H_{i+3/2}^\alpha, \beta_\alpha \Delta^- H_{i+1/2}^\alpha) - \\ &- \frac{1+\varphi_\alpha}{4} \min\text{mod}(\Delta^- H_{i+1/2}^\alpha, \beta_\alpha \Delta^- H_{i+3/2}^\alpha) + \\ &+ \frac{1+\varphi_\alpha}{4} \min\text{mod}(\Delta^+ H_{i+1/2}^\alpha, \beta_\alpha \Delta^+ H_{i-1/2}^\alpha) + \\ &+ \frac{1-\varphi_\alpha}{4} \min\text{mod}(\Delta^+ H_{i-1/2}^\alpha, \beta_\alpha \Delta^+ H_{i+1/2}^\alpha), \end{aligned} \quad (8.129)$$

$$\Delta^- H_{i+1/2}^\alpha = H_{i+1/2}^{\alpha,0} - H_i^\alpha, \quad \Delta^+ H_{i+1/2}^\alpha = H_{i+1}^\alpha - H_{i+1/2}^{\alpha,0}. \quad (8.130)$$

Отметим, что базовая схема характеризуется не одним свободным параметром (как было у схемы для уравнения адвекции), а набором свободных параметров  $w_\alpha$ . Они должны удовлетворять условиям  $w_\alpha \geq |\lambda_\alpha|$ , которые определяют условия монотонности базовой схемы. При этом схеме Годунова, обладающей среди всех этих схем минимальной численной вязкостью, соответствует выбор параметров в виде  $w_\alpha = |\lambda_\alpha|$ . В антидиффузионных поправках параметры  $\varphi_\alpha, \beta_\alpha$  также можно задавать независимо для каждого инварианта Римана. Хотя в поправке Ошера оптимальные значения этих параметров не зависят от  $\alpha$ . Полученные схемы для инвариантов Римана являются независимыми. Каждый инвариант Римана удовлетворяет своей схеме. Все эти схемы являются TVD-схемами!

От схем (8.127)–(8.130) для инвариантов Римана перейдем к разностной схеме для исходных переменных  $\mathbf{u}$ . Для этого умножим каждую схему (8.127) на соответствующий правый собственный вектор  $\mathbf{r}_\alpha$  и просуммируем полученные схемы. Используем следующие вспомогательные соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} S_i^{\alpha, n} &= \mathbf{u}_i^n, \\ \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} H_i^{\alpha, n} &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \lambda_{\alpha} (\mathbf{l}^{\alpha} \cdot \mathbf{u}_i^n) = \mathcal{A} \cdot \mathbf{u}_i^n = \mathbf{F}_i^n, \\ \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} w_{\alpha} S_i^{\alpha, n} &= \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} w_{\alpha} (\mathbf{l}^{\alpha} \cdot \mathbf{u}_i^n). \end{aligned} \quad (8.131)$$

Таким образом, базовый поток имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^0 = \frac{\mathbf{F}_{i+1}^n + \mathbf{F}_i^n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} w_{\alpha} \mathbf{l}^{\alpha} \cdot (\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n). \quad (8.132)$$

Для преобразования повышающих поправок заметим, что

$$\Delta^{\pm} H_{i+1/2}^{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha} \pm w_{\alpha}}{2} (S_{i+1}^{\alpha, n} - S_i^{\alpha, n}), \quad (8.133)$$

поэтому

$$\mathbf{r}_{\alpha} \Delta^{\pm} H_{i+1/2}^{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha} \pm w_{\alpha}}{2} \mathbf{r}_{\alpha} [\mathbf{l}^{\alpha} \cdot (\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n)] = \Delta_{\alpha}^{\pm} \mathbf{F}_{i+1/2}. \quad (8.134)$$

Окончательно, схему можно записать в виде:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = \mathbf{0}, \quad (8.135)$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathbf{F}_{i+1/2}^0 + \delta \mathbf{F}_{i+1/2}, \quad (8.136)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}_{i+1/2} &= - \sum_{\alpha} \frac{1 - \varphi_{\alpha}}{4} \min\text{mod}(\Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_{i+3/2}, \beta_{\alpha} \Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_{i+1/2}) - \\ &- \sum_{\alpha} \frac{1 + \varphi_{\alpha}}{4} \min\text{mod}(\Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_{i+1/2}, \beta_{\alpha} \Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_{i+3/2}) + \\ &+ \sum_{\alpha} \frac{1 + \varphi_{\alpha}}{4} \min\text{mod}(\Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_{i+1/2}, \beta_{\alpha} \Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_{i-1/2}) + \\ &+ \sum_{\alpha} \frac{1 - \varphi_{\alpha}}{4} \min\text{mod}(\Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_{i-1/2}, \beta_{\alpha} \Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_{i+1/2}). \end{aligned} \quad (8.137)$$

Антидиффузионные поправки (8.137) можно записать более компактным способом:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}_{i+1/2} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \text{limiter}_{\alpha}(\Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_{i-1/2}, \Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_{i+1/2}) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \text{limiter}_{\alpha}(\Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_{i+1/2}, \Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_{i+3/2}), \end{aligned} \quad (8.138)$$

где функции-ограничители

$$\begin{aligned} \text{limiter}_{\alpha}(x, y) &= \frac{1 + \varphi_{\alpha}}{2} \min\text{mod}(y, \beta_{\alpha} x) + \\ &+ \frac{1 - \varphi_{\alpha}}{2} \min\text{mod}(\beta_{\alpha} y, x). \end{aligned} \quad (8.139)$$

В отличие от (8.137) в выражении (8.138) можно использовать не только поправку Ошера (8.139), но и другие повышающие поправки.

Для перехода к случаю нелинейной системы уравнений разберемся, что представляют собой антидиффузионные потоки (8.134) в линейном случае. Нетрудно видеть, что в схеме Годунова

$$\Delta_{\alpha}^{\pm} \mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{\lambda_{\alpha} \pm |\lambda_{\alpha}|}{2} \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{l}^{\alpha} \cdot (\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n) = \lambda_{\alpha}^{\pm} [\mathbf{u}]_{\alpha}, \quad (8.140)$$

где  $[\mathbf{u}]_{\alpha}$  описывает скачок на разрыве с номером  $\alpha$ , возникшем в результате распада первоначального разрыва на границе  $i + 1/2$  ячеек  $i$  и  $i + 1$ . Для волн, бегущих вправо,  $\lambda^+ > 0$ ,  $\lambda^- = 0$ . Поэтому для них  $\Delta^- \mathbf{F} = 0$ , а  $\Delta^+ \mathbf{F}$  равен вариации потока при переходе через соответствующий скачок. Аналогичный вывод можно сделать и для волн, бегущих влево. Таким образом,  $\Delta^+ \mathbf{F}$  и  $\Delta^- \mathbf{F}$  определяют вариации потока при переходе через данную бегущую волну в задаче Римана.

В выражении (8.138) для антидиффузионной поправки в первом слагаемом нужно проводить суммирование по всем волнам, распространяющимся вправо (положительные скорости), а во втором слагаемом — по всем волнам, распространяющимся влево (отрицательные скорости). Поэтому это выражение можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}_{i+1/2} = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha+} \text{limiter}_{\alpha} (\Delta_{\alpha}^+ \mathbf{F}_{i-1/2}, \Delta_{\alpha}^+ \mathbf{F}_{i+1/2}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\alpha-} \text{limiter}_{\alpha} (\Delta_{\alpha}^- \mathbf{F}_{i+1/2}, \Delta_{\alpha}^- \mathbf{F}_{i+3/2}), \end{aligned} \quad (8.141)$$

где вариации потоков

$$\Delta_{\alpha}^{\pm} \mathbf{F}_{i+1/2} = D_{\alpha}^{\pm} [\mathbf{u}]_{\alpha}. \quad (8.142)$$

В случае нелинейной системы уравнений при распаде разрыва могут формироваться не только ударные волны, но и волны других видов, например, такие как волны разрежения и комбинированные волны. Выражения (8.142) для вариаций потоков будут справедливыми только на ударных волнах и контактных разрывах. На бегущих волнах других типов вариации потоков нужно вычислять, исходя из конкретного решения задачи Римана.

Если вариации потоков на всех бегущих волнах из решения задачи Римана найдены, то антидиффузионная поправка определяется прежним выражением (8.141). Проблема может возникнуть только в случае формирования при распаде разрыва трансзвуковой бегущей волны, поскольку для таких волн не определено направление распространения. Вариация потока на трансзвуковой волне вносит вклад в выражение (8.141) как в первое слагаемое, так и во второе. Расщепляя вариацию потока на трансзвуковой волне на левую и правую части,

$$\Delta_s \mathbf{F}_{i+1/2} = \Delta_s^+ \mathbf{F}_{i+1/2} + \Delta_s^- \mathbf{F}_{i+1/2}, \quad (8.143)$$

получаем антидиффузионную поправку в виде

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}_{i+1/2} = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha+, s+} \text{limiter}_{\alpha} (\Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_{i-1/2}, \Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_{i+1/2}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\alpha-, s-} \text{limiter}_{\alpha} (\Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_{i+1/2}, \Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_{i+3/2}). \end{aligned} \quad (8.144)$$

Таким образом, мы построили обобщение TVD-схемы для нелинейной гиперболической системы на основе схемы Годунова. Однако легко видеть, что в ней можно использовать и любое приближенное решение задачи Римана из тех, что были рассмотрены в предыдущей главе.

**8.3.4. Примеры тестовых расчетов.** Повторим расчеты основных одномерных тестовых задач с помощью описанных в этом разделе схем повышенного порядка точности. В качестве повышающей поправки будем везде использовать поправку Ошера с оптимальными значениями параметров  $\varphi = 1/3$  и  $\beta = 4$ .

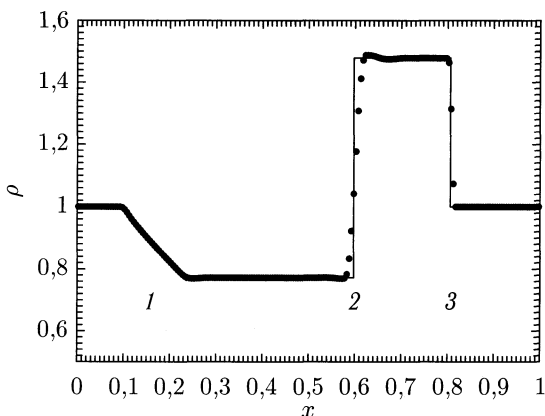


Рис. 8.9. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 1) на момент времени  $t = 0,18$  по схеме Лакса–Фридрихса–Ошера. Обозначения те же, что и на рис. 7.9

Расчеты Теста 1 из предыдущей главы по схеме Лакса–Фридрихса–Ошера и Роу–Эйнфельдта–Ошера представлены на рис. 8.9 и 8.10, соответственно. Видно, что эти схемы достаточно корректно (особенно схема Роу–Эйнфельдта–Ошера) воспроизводят точное решение. Расчеты Теста 2 из гл. 7 по схеме Роу–Эйнфельдта–Ошера представлены на рис. 8.11. Видно, что все контактные разрывы, включая  $C3$ , передаются очень хорошо, равно как и волна разрежения  $RW$ .

Для сравнения разностных схем Лакса–Фридрихса, Роу, Роу–Эйнфельдта и Роу–Эйнфельдта–Ошера повышенного порядка аппроксимации для уравнений двумерной газовой динамики была рассмотрена задача о течении сверхзвукового потока с числом Маха  $M = 3$  в канале

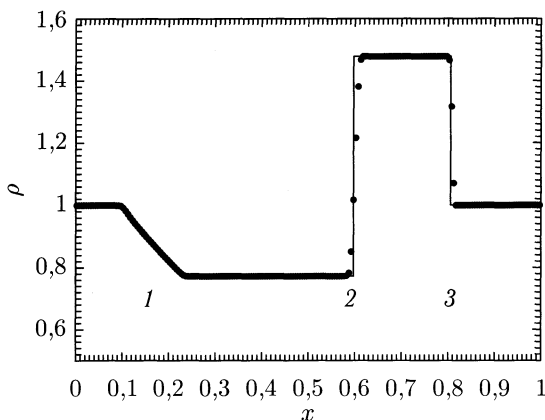


Рис. 8.10. Результат расчета задачи о распаде разрыва (Тест 1) на момент времени  $t = 0,18$  по схеме Роу–Эйнфельда–Ошера. Обозначения те же, что и на рис. 7.9

со ступенькой (Тест 5). На рис. 8.12–8.15 представлены результаты расчета этой задачи, полученные с помощью различных схем и на сетках с различным пространственным разрешением.

На рис. 8.12 представлены результаты расчета Теста 5 на момент времени  $t = 4$  по схеме Лакса–Фридрихса. Видно, что ударные волны сильно размазаны. «Ножка Маха» образуется только в расчете на самой подробной сетке ( $320 \times 960$ ), но тангенциальный разрыв за ней не разрешается даже здесь.

На рис. 8.13 представлены результаты расчета Теста 5 на момент времени  $t = 4$  по схеме Роу. Ударные волны передаются лучше, однако на углу ступеньки образуется ударная волна разрежения, что является нефизическим решением.

На рис. 8.14 представлены результаты расчета Теста 5 на момент времени  $t = 4$  по схеме Роу–Эйнфельда. Здесь течение на углу ступеньки передается корректно — образуется простая волна разрежения. Данное решение является физически корректным и недостатком решения является лишь размытость деталей вследствие численной вязкости схемы.

На рис. 8.15 представлены результаты расчета Теста 5 на момент времени  $t = 4$  по схеме Роу–Эйнфельда–Ошера повышенного порядка аппроксимации. Полученное решение лишено всех недостатков предыдущих расчетов. Отчетливо виден тангенциальный разрыв за «ножкой Маха» и развивающаяся в нем неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Детали этой неустойчивости особенно хорошо видны на рис. 8.16, где показаны изолинии энтропии  $P/\rho^\gamma$  в области тангенциального разрыва для расчета на сетке  $320 \times 960$ .

Помимо качества приближенного решения, даваемого той или иной схемой, важной характеристикой являются вычислительные затраты.

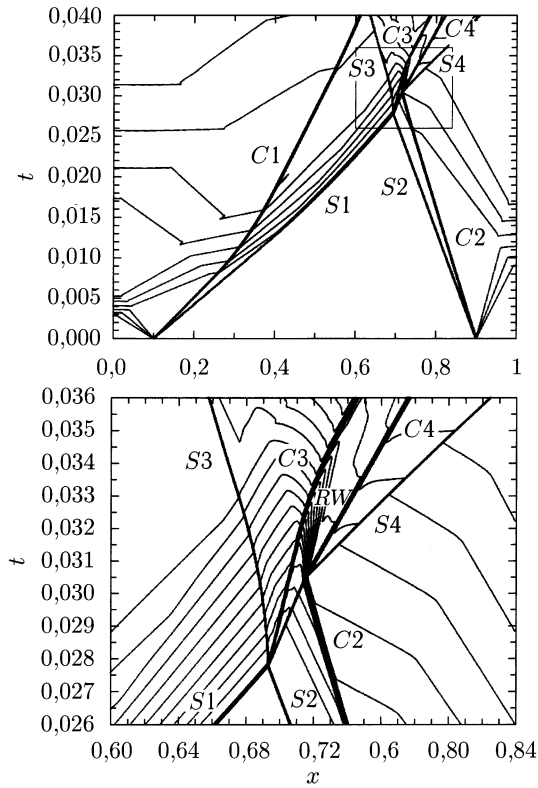


Рис. 8.11. Изолинии плотности на плоскости переменных  $(x, t)$  для расчета задачи о взаимодействии двух взрывных ударных волн (Тест 2) по схеме Роу-Эйнфельдта-Ошера. Обозначения те же, что и на рис. 7.10. Снизу показано увеличенное изображение прямоугольной области, отмеченной на верхней панели

Таблица 8.1. Сравнение вычислительных затрат на расчеты Теста 5 для различных сеток и разностных схем

Схема/сетка	$40 \times 120$	$80 \times 240$	$160 \times 480$	$320 \times 960$
Лакс-Фридрихс	30	240	1900	15000
Роу	50	455	3600	29000
Роу-Эйнфельдт	60	460	3700	29500
Роу-Эйнфельдт-Ошер	1100	9000	72000	575000

В Таблице 8.1 представлено отношение расчетного времени в секундах (на компьютере Pentium/200) к модельному для различных схем и сеток. Расчеты проводились с числом Куранта 0,6 для первых

трех схем и 0,1 для схемы Роу–Эйнфельдта–Ошера. Отметим резкое возрастание (в 18 раз) вычислительной трудоемкости схемы Роу–Эйнфельдта–Ошера по сравнению с другими схемами, в основном связанное с ограничением на число Куранта (в 6 раз) и в меньшей степени (в 3 раза) с усложнением алгоритма.

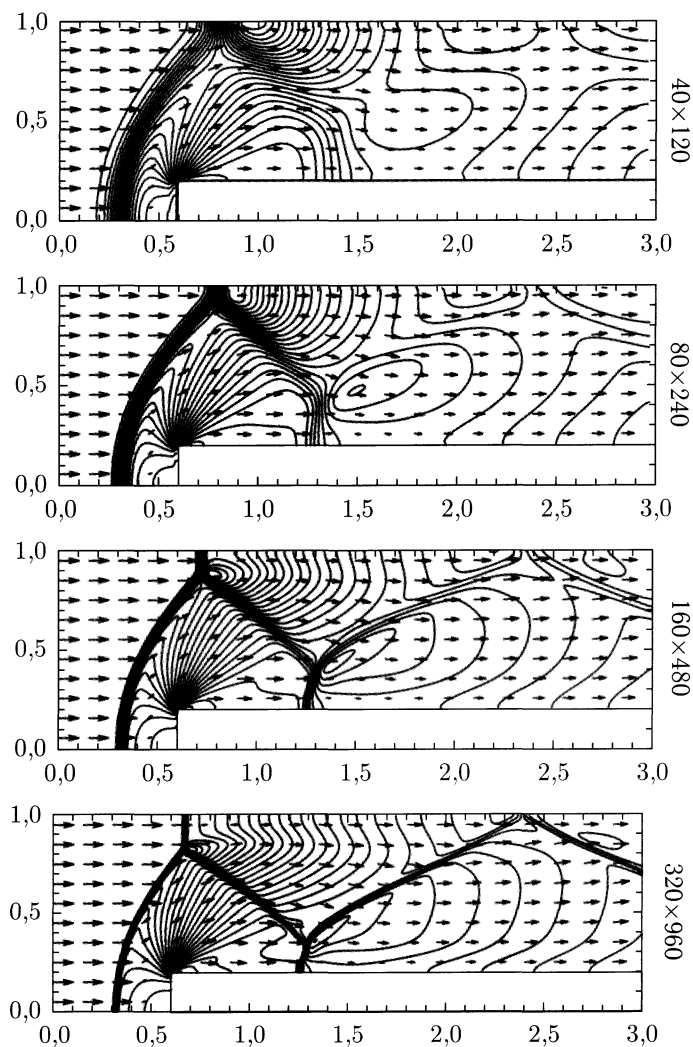


Рис. 8.12. Изолинии плотности и векторы скорости для расчета задачи о течении сверхзвукового потока с числом Маха  $M = 3$  в канале со ступенькой (Тест 5) на момент времени  $t = 4$  по схеме Лакса–Фридрихса. Числа справа для каждой панели обозначают размерность разностной сетки



Перейдем теперь к анализу тестовых расчетов для МГД-задач, проведенных с помощью соответствующих схем повышенного порядка аппроксимации. Расчеты Теста 4 из предыдущей главы по схеме Лакса-Фридрихса-Ошера, HLLD-Ошера и Роу-Эйнфельдта-Ошера представлены на рис. 8.17, 8.18 и 8.19 соответственно. Рисунки показывают, что как и в газодинамическом случае эти схемы существенно лучше воспроизводят точное решение. Особенно это касается схем HLLD-Ошера и Роу-Эйнфельдта-Ошера.

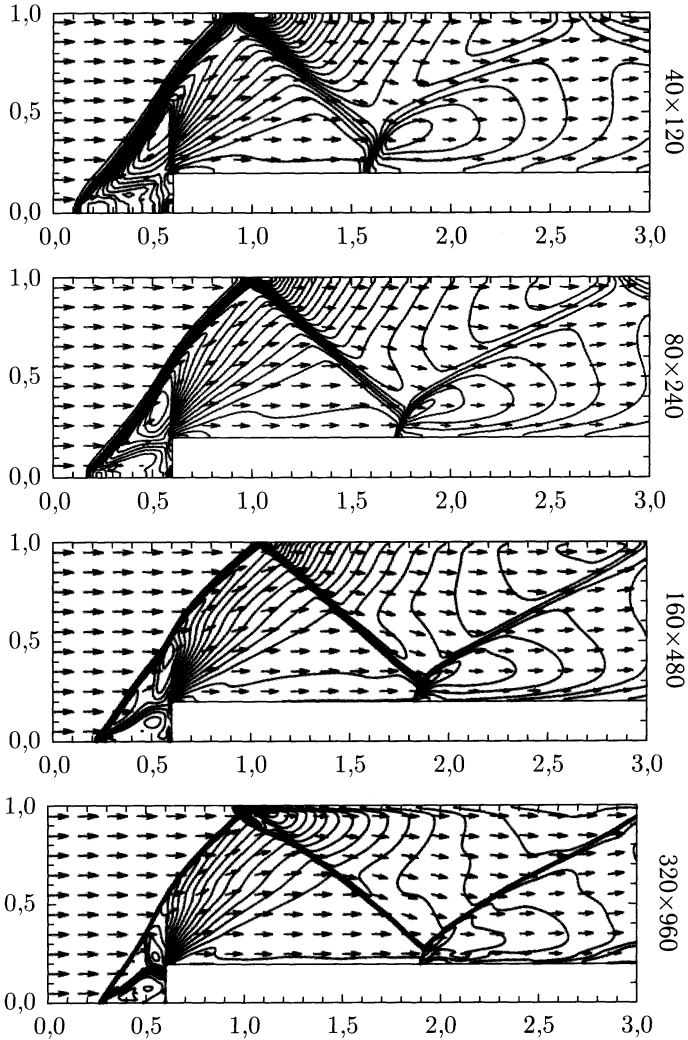


Рис. 8.13. То же, что и на рис. 8.12 для расчета по схеме Роу

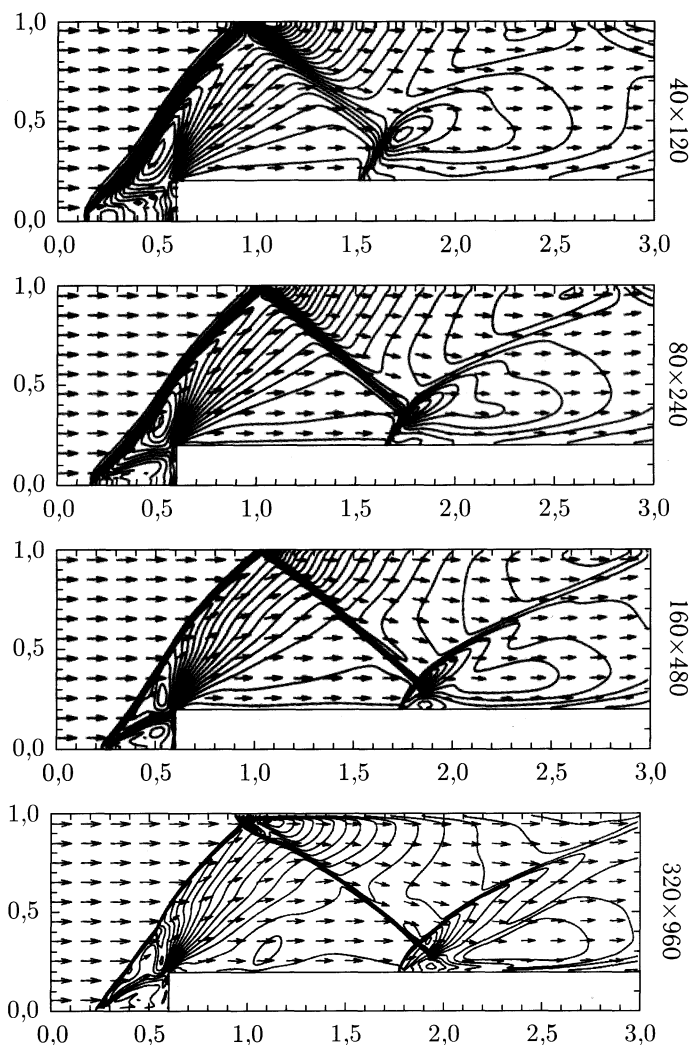


Рис. 8.14. То же, что и на рис. 8.12 для расчета по схеме Роу–Эйнфельдта

Для демонстрации возможности описанного в предыдущей главе метода динамической адаптации расчетных сеток в МГД-задачах приведем примеры демонстрационных численных расчетов МГД-течений. В первом примере рассмотрим результаты численного решения задачи Римана о распаде произвольного МГД-разрыва, соответствующего Тесту 4. Первоначальный разрыв находился в плоскости  $x = 0$ . В области слева от разрыва  $x < 0$  были заданы следующие значения параметров:  $\rho = 1$ ,  $P = 1$ ,  $B_y = 1$ . В области справа от разрыва  $x > 0$ :  $\rho = 0,125$ ,

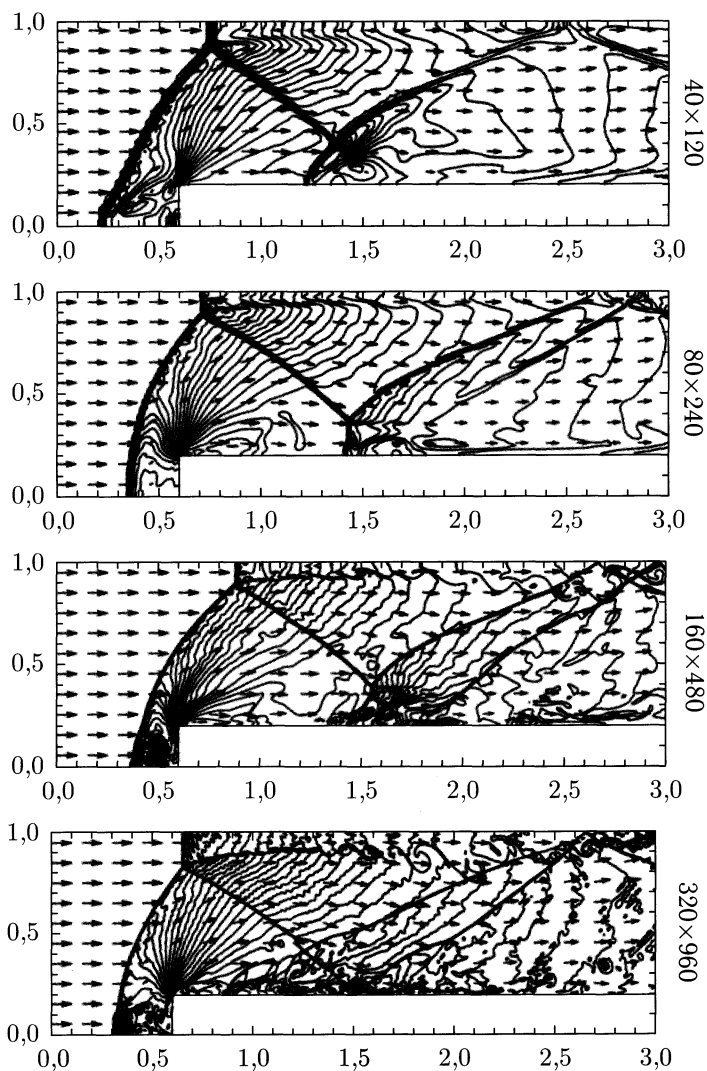


Рис. 8.15. То же, что и на рис. 8.12 для расчета по схеме Роу-Эйнфельда-Ошера

$P = 0,1$ ,  $B_y = -1$ . Начальная скорость газа была равна нулю. Компонента магнитного поля  $B_x = 0,75$ . Показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ . В начальный момент времени система координат  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  совпадала с декартовой системой координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Поэтому начальная матрица преобразований координат  $Q_{ik}$  была равна единичной матрице. Очевидно, что в силу симметрии задачи после распада первоначального

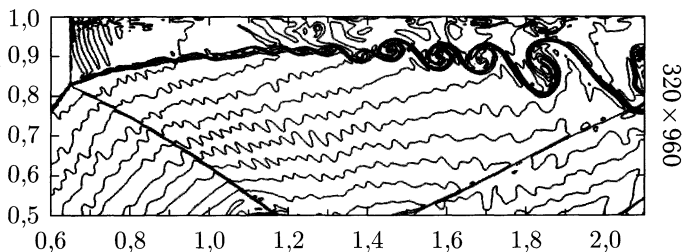


Рис. 8.16. Изолинии энтропии для расчета задачи о течении сверхзвукового потока с числом Маха  $M = 3$  в канале со ступенькой (Тест 5) на момент времени  $t = 4$  по схеме Роу–Эйнфельда–Ошера повышенного порядка аппроксимации в области тангенциального разрыва

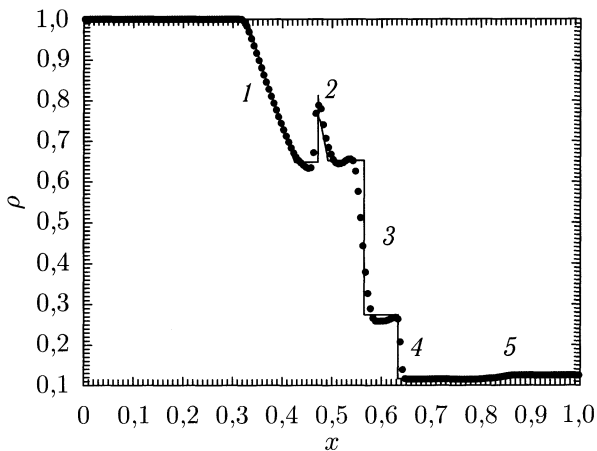


Рис. 8.17. Результат расчета задачи о распаде МГД-разрыва (Тест 4) на момент времени  $t = 0,1$  по схеме Лакса–Фридрихса–Ошера. Обозначения те же, что и на рис. 7.21

разрыва изменяться может только компонента  $Q_{11} = K_x$ . Расчеты проводились на сетке с числом ячеек  $N_x = 500$ ,  $N_y = 10$  и  $N_z = 10$ .

Результаты расчета на момент времени  $\tau = t = 0,1$  приведены на рисунках 8.20–8.22. В результате распада разрыва образуются две быстрые МГД-волны разрежения (1 и 5), распространяющиеся в противоположные стороны. Между ними образуются медленная комбинированная МГД-волна (компаунд, 2), контактный разрыв 3 и медленная ударная МГД-волна 4. На рис. 8.20 показаны распределения плотности (вверху) и компоненты матрицы преобразования координат  $K_x$  (внизу) для случая  $h = 0$  (неадаптивная сетка). На рис. 8.21 показаны распределения тех же величин, что и на рис. 8.20, но для случая

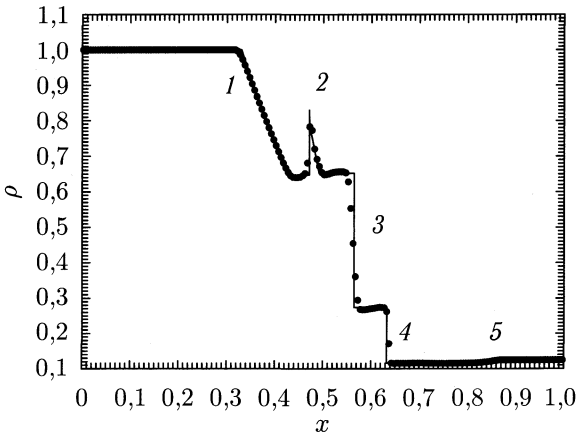


Рис. 8.18. Результат расчета задачи о распаде МГД-разрыва (Тест 4) на момент времени  $t = 0,1$  по схеме HLLD-Ошера. Обозначения те же, что и на рис. 7.21

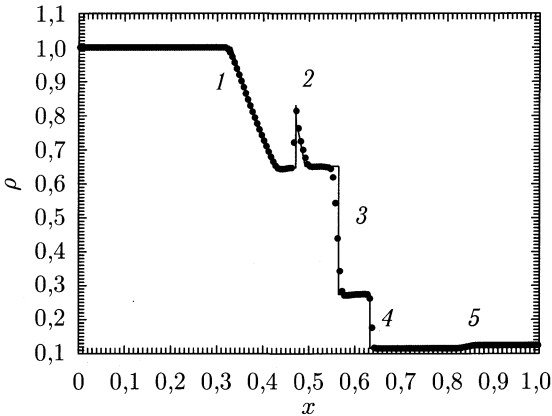


Рис. 8.19. Результат расчета задачи о распаде МГД-разрыва (Тест 4) на момент времени  $t = 0,1$  по схеме Роу-Эйнфельда-Ошера. Обозначения те же, что и на рис. 7.21

$h = 0,5$ . В областях за ударными волнами (4 и 2) происходит увеличение пространственного разрешения расчетной сетки, поскольку в этих областях величина  $K_x = \partial x / \partial \xi$  уменьшается. В областях разрежения (1, 2 и 5) пространственное разрешение сетки, наоборот, уменьшается. На рис. 8.22 показаны распределения тех же величин для случая  $h = 0,999$ , что, фактически, соответствует лагранжевой сетке.

В качестве второго примера рассмотрим задачу об объемно-распределенном взрыве в среде, пронизанной однородным магнитным

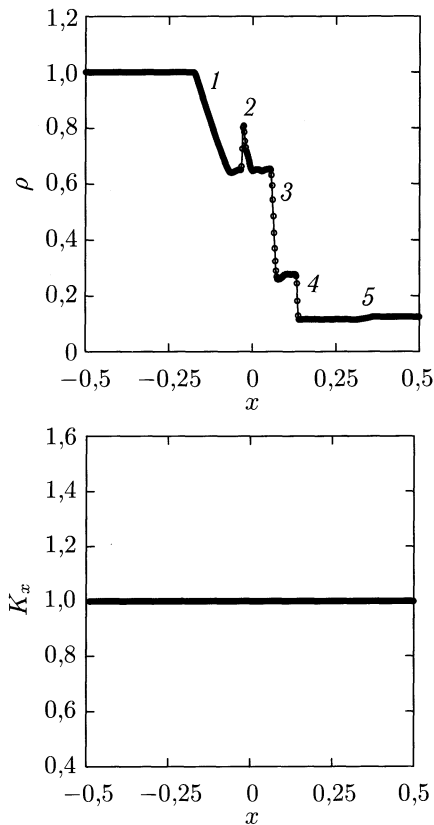
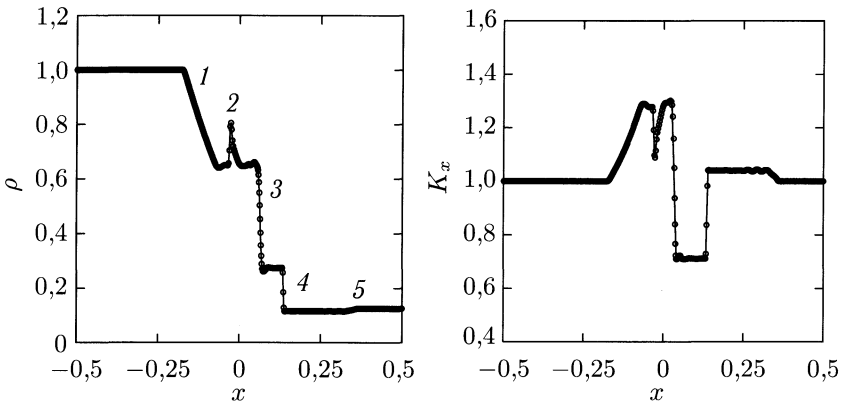
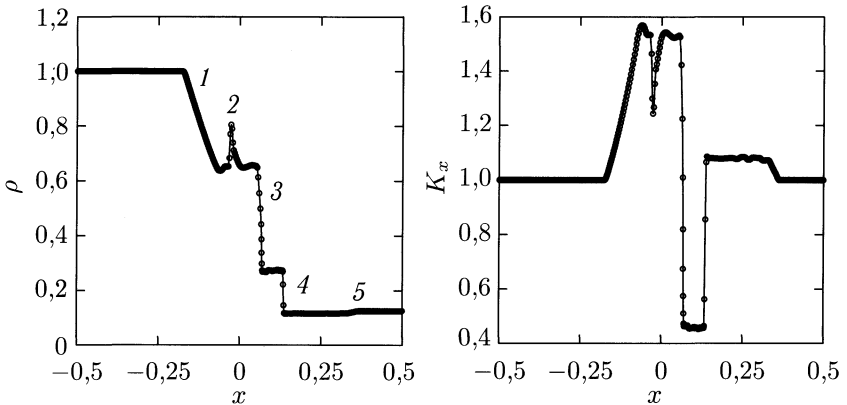


Рис. 8.20. Задача Римана о распаде произвольного МГД-разрыва ( $h = 0$ ). Показан момент времени  $\tau = 0,1$ . Цифры соответствуют: 1, 5 — быстрые волны разрежения, 2 — медленная комбинированная МГД-волна, 3 — контактный разрыв, 4 — медленная ударная волна. Вверху показано распределение плотности, внизу показано распределение компоненты матрицы преобразования координат  $K_x = \partial x / \partial \xi$

полем. В начальный момент времени в центре расчетной области ( $-0,5 \leq x \leq 0,5$ ;  $-0,5 \leq y \leq 0,5$ ;  $-0,5 \leq z \leq 0,5$ ) во всем объеме бесконечно длинного цилиндрического облака радиусом  $R = 0,1$  с плотностью  $\rho = 1$  происходил мгновенный взрыв, так что давление в облаке возрастало в 10 раз по сравнению с давлением во внешней среде. Плотность и давление во внешней среде были заданы следующими:  $\rho_{\text{ext}} = 0,125$ ,  $P_{\text{ext}} = 0,1$ . Магнитное поле в начальный момент времени было однородным:  $B_x = 1/4$ ,  $B_y = \sqrt{3}/4$ . Поскольку в каждой плоскости  $z = \text{const}$  картина течения одна и та же, задача, фактически, является двумерной. Расчет проводился на сетке с числом ячеек  $N = 128 \times 128 \times 2$ .

Рис. 8.21. То же, что на рисунке 8.20, но для случая  $h = 0,5$ Рис. 8.22. То же, что на рисунке 8.20, но для случая  $h = 0,999$ 

Как и в предыдущем примере были рассчитаны три варианта с параметрами движения сетки  $h = 0, 0,5$  и  $0,999$ . На рис. 8.23 показаны распределения плотности (изолинии) в расчетной области к моменту времени  $t = 0,26$  для случаев  $h = 0, 0,5$  и  $0,999$  соответственно. На некоторых изолиниях приведены рассчитанные значения плотности. В последнем варианте ( $h = 0,999$ ), который, фактически, соответствует лагранжевой сетке, разрывы выделены гораздо более отчетливо, по сравнению с первыми двумя вариантами ( $h = 0$  и  $0,5$ ).

На рис. 8.24 показана структура расчетной сетки к моменту времени  $t = 0,26$ , полученная в последних двух вариантах ( $h = 0,5$  и  $h = 0,999$ ). Линии соединяют центры ячеек, рассчитанные с помощью выражений (7.248). Рисунок показывает, что к представлен-

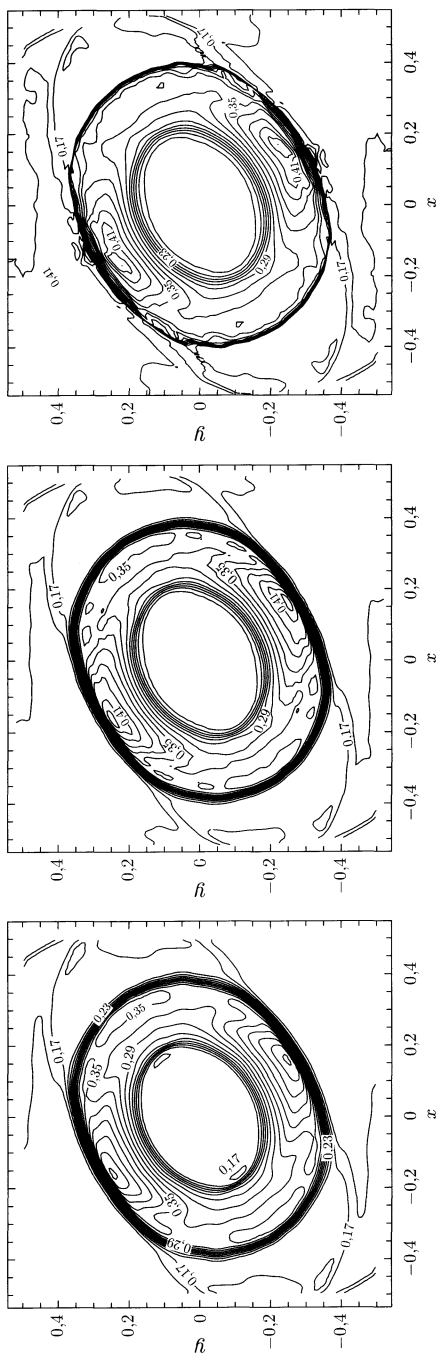


Рис. 8.23. Распределение плотности в задаче о численном моделировании объемно-распределенного взрыва в момент времени  $t = 0,26$  для случаев  $h = 0$  (левая панель),  $0,5$  (средняя панель) и  $0,999$  (правая панель)



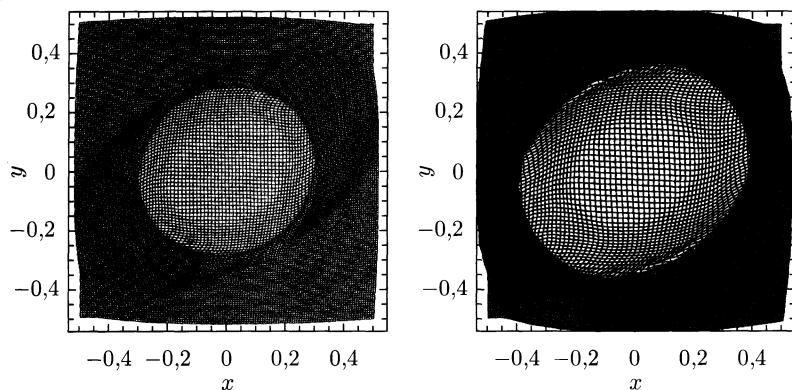


Рис. 8.24. Структура расчетной сетки в задаче о численном моделировании объемно-распределенного взрыва в магнитном поле в момент времени  $t = 0,26$  для случая  $h = 0,5$  (слева) и  $0,999$  (справа)

ному моменту времени сетки сильно деформируются, особенно в областях разрывов. Формы внутренней области разрежения различаются достаточно сильно. Это связано с тем, что в варианте с параметром  $h = 0,5$  сетка движется вдвое медленнее жидкости и за время расчета накапливается эффект отставания ячеек сетки от жидких частиц.

**Часть III**

**СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ ВЕЩЕСТВА  
В ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДАХ  
БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

**МОРФОЛОГИЯ ТЕЧЕНИЯ**

Рассмотрим ТДС, относящиеся к классу полуразделенных двойных звезд, в которых один из компонентов заполняет критическую поверхность, что обуславливает обмен массой между компонентами системы. Как отмечалось в гл. 1, критическая поверхность в общем случае имеет сложную форму, что требует привлечения специальных математических моделей для описания процесса перетекания вещества в системе. Однако наличие большого количества наблюдательных данных, подтверждающих малый эксцентриситет орбит и высокий уровень синхронизации в двойных системах, позволяет использовать для определения формы звезды стандартную модель Роша. В этом случае критическая поверхность отождествляется с внутренней поверхностью (поверхностью Роша) в ограниченной задаче трех тел, и предполагается, что обмен веществом между компонентами системы происходит через окрестность внутренней точки Лагранжа  $L_1$ , где градиент давления не уравновешивается прочими силами.

Газодинамику переноса вещества через внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$  неоднократно исследовали многие авторы. Первые попытки рассмотрения картины течения были сделаны Прендергастом [391] и Горбацким [392, 393]. Значительный прогресс в анализе течения вещества в окрестности  $L_1$  был достигнут Любовым и Шу [57], которые в полуаналитическом приближении, используя метод возмущения по малому параметру, оценили основные характеристики потока. Эти, а также ряд других оценок подробно обсуждались в ч. I книги.

Для описания процесса массообмена в системе помимо определения параметров струи необходимо рассмотреть дальнейшее движение вещества от  $L_1$  к аккретору. Именно процесс переноса вещества формирует общую картину течения и, соответственно, определяет основные наблюдательные проявления, поэтому исследованию данного вопроса уделялось большое внимание. Впервые динамика частиц, вылетевших из  $L_1$  и движущихся в гравитационном поле двойной системы, рассматривалась в работах [57, 60, 394]. Полученные в этих, а также в ряде последующих работ результаты, нашли широкое признание и были рассмотрены нами в гл. 2. Однако использование результатов баллистического приближения при анализе конкретных систем привело к обнаружению существенных расхождений с наблюдательными данными. Наличие этих расхождений объясняется неучетом газодинамических

эффектов. Для рассмотрения влияния формирующейся околозвездной оболочки на движение газа, и, соответственно, для корректного описания течения необходимо решение полной системы газодинамических уравнений, которое возможно только в рамках достаточно сложных математических моделей.

Использование численных методов при рассмотрении газодинамики переноса вещества в ТДС долгое время было ограничено развитием вычислительной техники, и поэтому для анализа течения использовались двумерные модели. Несмотря на упрощенность двумерного подхода, его применение позволило рассмотреть отдельные детали картины течения вещества и получить ряд интересных результатов (см., например, [65, 395–398]). В 90-х гг. XX в., начиная с пионерских работ [399–401], появилась возможность численного исследования газодинамики переноса вещества в рамках более реальных трехмерных моделей. В этих работах, в частности, рассматривалось формирование аккреционного диска в полуразделенных двойных системах ([399, 402–404]), а также исследовалась область взаимодействия струи вещества, истекающего из  $L_1$  с диском [400, 405].

В этой Главе книги будут представлены результаты трехмерного численного исследования картины течения в полуразделенных двойных системах, полученные, главным образом, авторами в оригинальных работах ([20, 126, 406–435]). Для проведения расчетов использовался TVD-метод решения системы газодинамических уравнений — схема Рунге–Эйфельдта с ограничителями антидиффузионных потоков в форме Ошера (см. ч. II, гл. 8). Это позволило исследовать морфологию газовых потоков в системе и рассмотреть влияние образующейся межкомпонентной оболочки системы на структуру течения, несмотря на наличие значительных градиентов плотности. Газодинамика перетекания вещества в ТДС исследовалась на больших временных интервалах, что позволило рассмотреть основные особенности картины течения в установившемся (стационарном) режиме.

## 9.1. Системы с горячими аккреционными дисками

Рассмотрим газодинамику вещества в тесных двойных системах с горячими дисками. Эти решения были получены для случаев, когда температура внешних частей аккреционного диска составляла величину порядка 100–200 тысяч кельвинов.

Представление о морфологии течения в рассматриваемых системах можно получить из рис. 9.1, где на левой диаграмме представлено распределение плотности и векторов скорости в экваториальной плоскости системы, а на правой диаграмме — визуализация поля скоростей при помощи треков множества частиц. На левой диаграмме этого рисунка также показаны ограничивающая аккреционный диск линия тока (белая линия) и линия тока, проходящая через ударную

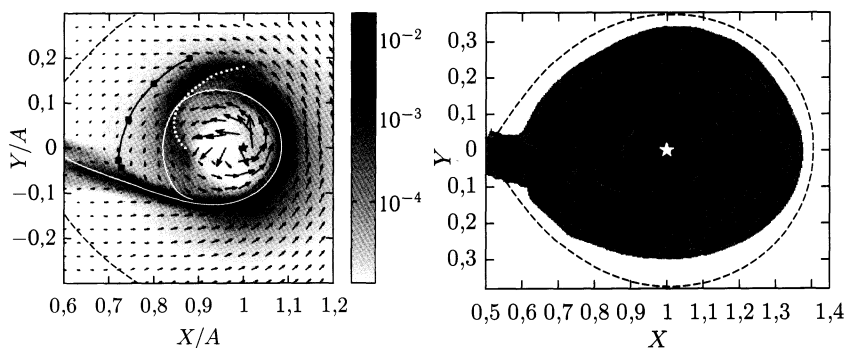


Рис. 9.1. *Слева*: Распределение плотности и векторов скорости в экваториальной плоскости системы для решения с горячим аккреционным диском. Координаты  $x$  и  $y$  представлены в единицах расстояния между компонентами  $A$ . Аккректор обозначен звездочкой. Штриховые линии показывают границы полости Роша. Линия тока, ограничивающая аккреционный диск, показана белой линией с точками. Линия тока, проходящая через ударную волну на краю струи, обозначена черной линией с квадратиками. Значки на линии тока большего размера соответствуют месту расположения ударной волны. Пунктирной линией обозначен рукав приливной спиральной ударной волны. *Справа*: Визуализация поля скорости в экваториальной плоскости системы.

волну на краю струи (черная линия с квадратиками). Следуя определениям монографии [20], газодинамика течения вещества в полуразделенной двойной системе определяется наличием струи вещества из  $L_1$ , квазиэллиптическим аккреционным диском, околodисковым гало и межкомпонентной оболочкой. Введенная классификация основных элементов картины течения основывается на их физических свойствах: 1) если движение газа не определяется гравитационным полем аккректора, тогда он образует межкомпонентную оболочку, заполняющую пространство между компонентами; 2) если газ обращается вокруг аккректора и после смешивается с веществом струи, тогда он не принадлежит диску, а формирует околodисковое гало; 3) аккреционный диск образуется из вещества струи, которое, попав в гравитационное поле аккректора, не взаимодействует в дальнейшем со струей, а движется к звезде, теряя угловой момент.

Анализ полученных результатов выявил, что в самосогласованном решении задачи отсутствует ударное взаимодействие истекающей из внутренней точки Лагранжа  $L_1$  струи вещества с образующимся аккреционным диском («горячее пятно»). Действительно, изменения параметров газа вдоль всех принадлежащих диску линий тока вплоть до граничной линии (белая линия на рис. 9.1) не претерпевают разрывов, и течение является гладким. Отсутствие разрывов свидетельствует о безударном взаимодействии струи вещества с веществом диска, что, в свою очередь означает отсутствие «горячего пятна» на краю диска.

Из рассмотрения представленной картины течения видно, что вещество диска является частью вещества струи, гравитационно захваченной аккретором. Единая морфология течения приводит к тому, что струя, отклоняясь под действием газа гало и межкомпонентной оболочки, подходит к диску по касательной и не вызывает ударного возмущения края диска. В то же время из результатов расчетов следует, что взаимодействие струи с околodисковым гало и межкомпонентной оболочкой приводит к формированию протяженной ударной волны. Положение волны может быть определено по излому линий тока, проходящих через разрыв (см., например, черную линию с квадратиками на левой диаграмме рис. 9.1). Эта ударная волна, так называемая «горячая линия», отчетливо видна на обеих диаграммах рис. 9.1.

Приливное воздействие звезды-донора приводит к возникновению спиральной ударной волны, обозначенной на левой диаграмме рис. 9.1 пунктирной линией. В решении с высокой температурой газа присутствует только один рукав спиральной ударной волны, в то время как в области, где должен находиться второй рукав, структура течения определяется струей вещества из  $L_1$ . Отметим также, что в рассматриваемом случае приливная спиральная волна заходит глубоко во внутренние части диска.

## 9.2. Системы с холодными аккреционными дисками

Рассмотрим морфологию течения вещества в полуразделенной двойной системе со стационарным холодным ( $T \sim 1,4 \cdot 10^4$  К) диском. На рис. 9.2 изображено распределение плотности и векторов скорости в экваториальной плоскости системы. Ударные волны, образующиеся в диске, видны на этом рисунке как сгущения изолиний плотности. Сгущение изолиний на краю аккреционного диска соответствует резкому падению плотности от характерных для диска величин до фоновой плотности.

Область взаимодействия струи и околodискового гало в экваториальной плоскости системы укрупненно изображена на рис. 9.3, где на левой панели показаны изолинии плотности и векторы скорости, а на правой панели показана визуализация поля скоростей. Как видно из представленных результатов, взаимодействие околodискового гало и струи имеет все типичные черты косоугольного столкновения двух потоков. Возникающая при этом структура из двух ударных волн и тангенциального разрыва между ними отчетливо видна на рис. 9.3. Область ударного взаимодействия газа околodискового гало и струи расположена вне диска и имеет сложную форму. Удаленные от диска части гало имеют малую плотность и ударная волна, вызванная их взаимодействием со струей, лежит вдоль края струи. По мере увеличения плотности газа гало ударная волна изгибается и, в конце концов, занимает положение вдоль края диска. Образующаяся ударная волна имеет достаточно большую протяженность и может быть

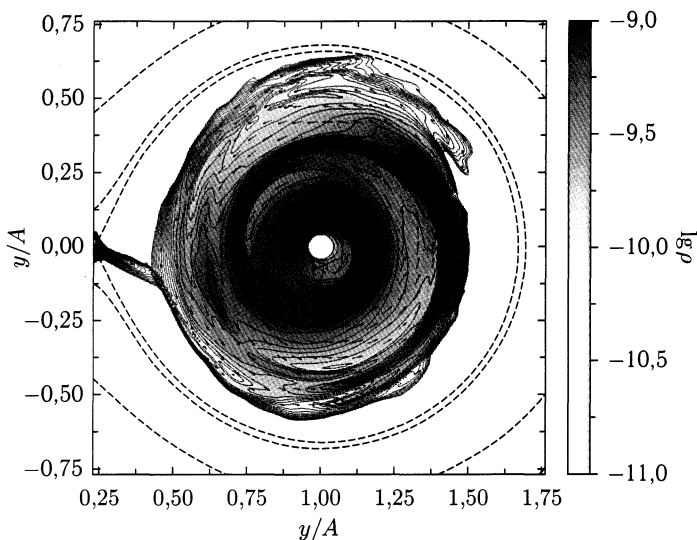


Рис. 9.2. Распределение плотности (в десятичной логарифмической шкале) и векторов скорости в экваториальной плоскости типичной ТДС с холодным аккреционным диском. Координаты  $x$  и  $y$  представлены в единицах расстояния между компонентами  $A$ . Аккректор обозначен белым кружком. Штриховые линии показывают эквипотенциали Роша

названа «горячей линией». Как следует из приведенных выше общих характеристик картины течения, в месте взаимодействия газ гало и газ струи проходят через ударные волны, соответствующие своему потоку, смешиваются и это вещество движется вдоль тангенциального разрыва между двумя ударными волнами. В дальнейшем, из этого вещества и формируется собственно диск, гало и межкомпонентная оболочка.

Приливное воздействие звезды-донора приводит к возникновению спиральной ударной волны. Эта волна состоит из двух рукавов, расположенных на внешних краях аккреционного диска.

При типичных для аккреционных дисков ТДС значениях параметра Шакуры-Сюняева  $0,001 \leq \alpha \leq 0,01$  скорость аккреции не превышает 50% от общего количества вещества, входящего в систему, т. е. не менее половины вещества струи формирует общую оболочку системы. Наличие столь мощной оболочки приводит, в частности, к формированию отошедшей ударной волны, расположенной перед аккректором по пути его орбитального движения. Протяженность и сила этой волны зависят от принятых параметров системы, однако во всех расчетах ТДС фиксировалось ее образование. Более того, для систем, в которых центр масс располагался на достаточном удалении от центра донора, наблюдалось также формирование отошедшей волны, связанной с орбитальным движением донора в общей оболочке. Наличие этой

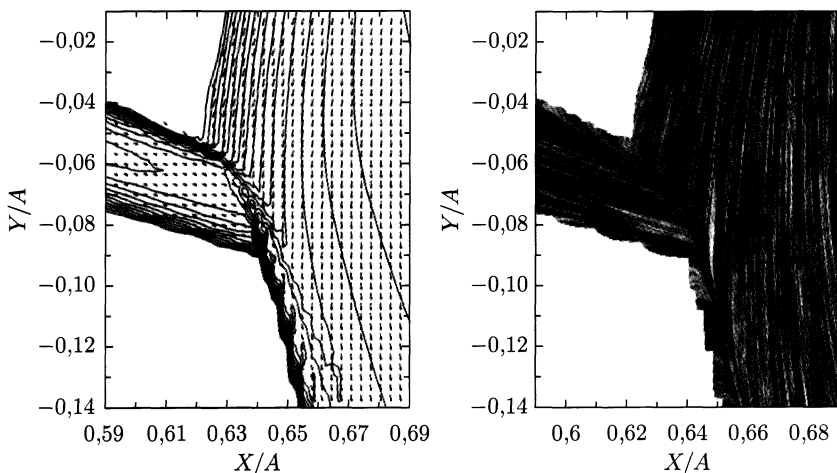


Рис. 9.3. Изолинии плотности и векторы скорости (левая панель) и визуализация поля скоростей (правая панель) в области взаимодействия струи и околодискового гало в экваториальной плоскости системы для решения с холодным аккреционным диском

волны можно объяснить по аналогии с задачей обтекания твердого тела сверхзвуковым потоком: за счет вращения системы (против часовой стрелки на рис. 9.2) диск всегда будет испытывать действие набегающего потока газа, а так как плотность диска на несколько порядков превышает плотность потока, наблюдаемые при этом эффекты будут похожи на те, что возникают при обтекании твердого тела.

Выявленные особенности течения для случаев горячего и холодного аккреционных дисков схематически представлены на верхней и нижней панелях рис. 9.4 соответственно. На обеих панелях рис. 9.4 показаны часть донора, заполняющего свою полость Роша, положение внутренней точки Лагранжа  $L_1$ , струя вещества, истекающего из  $L_1$ , а также положение аккретора. Пунктирной линией отмечена эквипотенциаль Роша, проходящая через внутреннюю точку Лагранжа. Аккреционный диск обозначен на рисунках как зона «В», околодисковое гало как зона «С», «горячая линия» отмечена маркером «НЛ», а рукава приливной спиральной ударной волны — маркером «I». Трехмерные газодинамические расчеты показывают, что решение для случая холодного аккреционного диска имеет те же качественные особенности, что и решение для случая высоких температур: взаимодействие струи и диска является безударным, область повышенного энерговыделения — ударная волна «НЛ» — вызвана взаимодействием газа околодискового гало и струи и расположена вне диска. В то же время, для холодного случая аккреционный диск становится существенно более плотным (по сравнению с плотностью вещества струи), его высота уменьшается, а форма



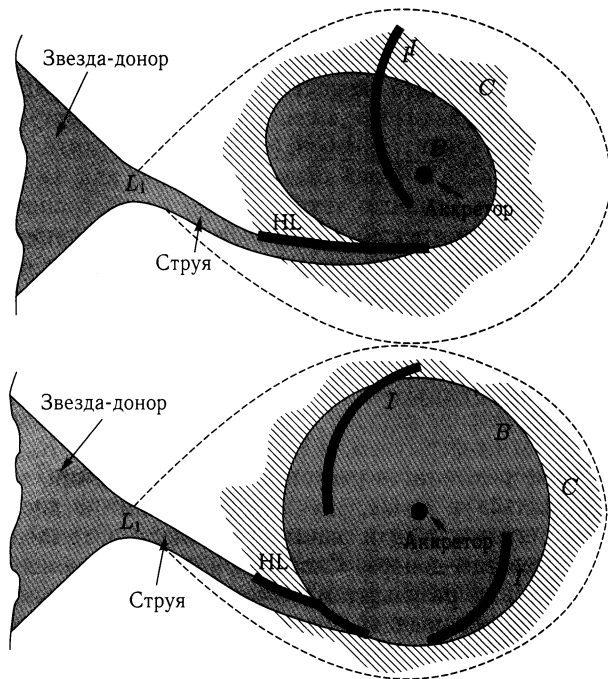


Рис. 9.4. Схематическое изображение основных особенностей картины течения вещества в полуразделенных двойных системах для случая высокой (верхняя панель) и низкой (нижняя панель) температуры газа.

меняется от квази-эллиптической до практически круговой. Околосистемное гало также существенно уменьшается в размерах. В диске формируется второй рукав приливной спиральной ударной волны, причем оба рукава не подходят к аккректору, а расположены во внешних частях диска.

Из рассмотрения результатов расчетов возникает естественный вопрос — а в чем принципиальная разница между моделями «горячего пятна» и «горячей линии». Действительно, есть существенные различия в положении и протяженности «пятна» и «линии», что, несомненно, важно при интерпретации наблюдений, но достаточно ли этого, чтобы говорить о переходе к новой модели течения. Как видно из расчетов, принципиальным отличием является то, что «горячая линия» является следствием косоугольного столкновения газа околосистемного гало и межкомпонентной оболочки с веществом струи, а не прямого удара струи о диск. Очевидным результатом различий физических механизмов формирования этих структур должны быть различные количества энергии, выделяемые в «пятне» и «линии» при одинаковых параметрах задачи. Рассмотрим общее энерговыделение в этих образованиях. В соответствии со стандартной моделью «горячего пятна» предположим, что оно

образуется на внешнем краю диска на расстоянии  $R_{\text{внеш}}$  от аккретора. В этом случае высвобождение энергии в результате взаимодействия струи и диска происходит со скоростью (см., например, [61])

$$\Delta E_{\text{пятна}} = \frac{1}{4} \frac{GM_2 \dot{M}}{R_{\text{внеш}}} \quad (\text{эрг/с}), \quad (9.1)$$

где  $\dot{M}$  — скорость потери массы звездой-донором. При принятых значениях плотности  $\rho_{L_1}$  и температуры (скорости звука  $c_s$ ) на поверхности звезды,  $\dot{M}$  в стандартных моделях определяется как

$$\dot{M} = \rho_{L_1} c_s S, \quad (9.2)$$

где  $S$  — площадь сечения струи в окрестности  $L_1$  (см. уравнение (2.1) в гл. 2). Следуя этим формулам, и определяя величину  $R_{\text{внеш}}$  из представленных выше результатов расчетов в предположении, что «пятно» должно образоваться в точке, где струя подходит к диску, оценим  $\Delta E_{\text{пятна}}$  для принятых в модели значений плотности и температуры газа на поверхности звезды-донора. Скорость энерговыделения в ударной волне определялась по результатам расчета ее интенсивности в численных газодинамических моделях. Сравнение скорости энерговыделения в ударной волне  $\Delta E_{\text{волны}}$  с полученной оценкой  $\Delta E_{\text{пятна}}$  показывает, что  $\Delta E_{\text{волны}}$  заметно (вплоть до порядка величины для отдельных систем) меньше  $\Delta E_{\text{пятна}}$ . Это означает, что оценки темпа массообмена, сделанные с использованием модели «пятна», сильно занижены, а реальный темп массообмена может быть в несколько раз большим. Это принципиальное различие, которое важно для корректного рассмотрения эволюции звезд.

Следует отметить, что представленные результаты получены для установившегося режима течения. В нестационарном режиме, когда морфология течения определяется внешними факторами и не является самосогласованной, возможно возникновение и других особенностей течения, в частности, областей ударного взаимодействия струи вещества из  $L_1$  и диска. Так, например, в случае, если диск сформировался еще до заполнения звездой-донором своей полости Роша <sup>1)</sup>, то после начала стадии обмена массой через окрестность  $L_1$  возможно возникновение «горячего пятна» в месте соприкосновения струи вещества с наружным краем диска. Поскольку после выхода течения на стационарный режим следует ожидать самосогласованного решения без «пятна», то принципиальным является определение

<sup>1)</sup> Образование аккреционного диска до начала стадии интенсивного обмена массой через  $L_1$  возможно либо вследствие звездного ветра на ранних стадиях, либо если процесс заполнения полости Роша имеет циклический характер и интервал между двумя моментами заполнения не превышает времени жизни аккреционного диска.

времени жизни этого образования. В качестве характерного времени жизни «пятна» естественно принять интервал, за который количество вещества, вносимого в систему струей, будет сопоставимо с массой внешних частей аккреционного диска, поскольку после полной замены вещества в этих частях диска решение станет самосогласованным. При типичных для полуразделенных систем параметрах массообмена и аккреционного диска [436] следует ожидать, что уже на временах порядка десятков периодов обращения системы установится стационарный режим течения. Данное обстоятельство означает, что большую часть времени картина течения в рассматриваемых полуразделенных системах описывается представленной выше моделью «горячей линии».

### 9.3. Наблюдательные проявления элементов структуры течения

**9.3.1. «Горячая линия».** В полученном газодинамическом решении одним из ключевых элементов является «горячая линия». Дело в том, что эта ударная волна возникает в результате взаимодействия околodискового гало со струей вещества из  $L_1$ , а ее параметры зависят от свойств аккреционного диска. Таким образом, из анализа свойств этого элемента структуры течения мы можем сделать выводы о свойствах аккреционного диска, околodискового гало и струи из точки  $L_1$ , и, соответственно, о справедливости всей газодинамической модели.

Один из наиболее информативных способов исследования тесных двойных систем является анализ их кривых блеска. Короткий период обращения (несколько часов), свойственный этим звездам, позволяет за сравнительно небольшое время наблюдений определить свойства и характерные параметры протекающих в системе процессов. На кривых блеска затменных ТДС присутствуют дополнительные детали, которые невозможно объяснить в рамках простой модели «холодная звезда–белый карлик–аккреционный диск». В частности, абсолютное большинство кривых блеска затменных ТДС имеет так называемый «горб». Для его объяснения Горбацим [437] и Смаком [438] было высказано предположение, что «горб» представляет собой свечение «горячего пятна», возникающего на границе аккреционного диска, в месте столкновения струи вещества из  $L_1$  с диском. Модель «горячего пятна» в течение последних 40 лет широко применялась для интерпретации кривых блеска катаклизмических двойных систем.

В ходе газодинамических исследований обмена веществом в ТДС было показано (см. предыдущие параграфы главы), что струя и аккреционный диск представляют собой морфологически единое образование, и их взаимодействие является безударным. Естественно, что в подобном решении в месте соприкосновения струи и диска нет увеличения температуры и, следовательно, мы вынуждены отказаться от гипотезы «горячего пятна» для объяснения «горбов» на кривых блеска затменных ТДС. Трехмерные расчеты структуры течения вещества

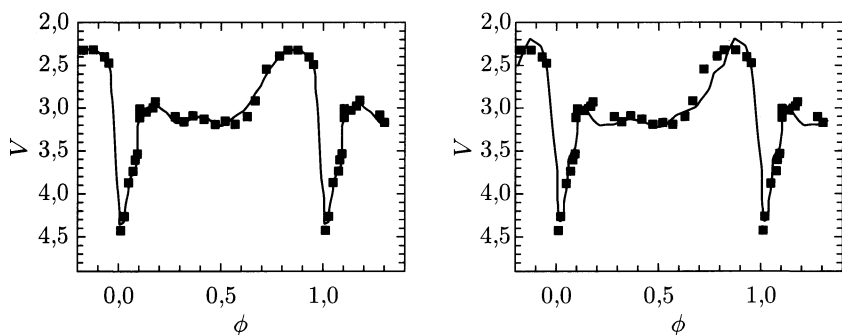


Рис. 9.5. Средняя кривая блеска (точки) системы IP Peg, находящейся в спокойном состоянии, в V-фильтре. Синтетические кривые блеска, рассчитанные в моделях «горячей линии» и «горячего пятна», показаны сплошными линиями на левой и правой панелях соответственно.

во взаимодействующей ТДС показали, что в стационарном случае ударное взаимодействие, приводящее к повышению температуры, возникает при столкновении вещества околорискового гало и струи, вытекающей из  $L_1$ . Это взаимодействие формирует протяженную ударную волну («горячую линию»), излучение которой позволяет объяснить наблюдаемые эффекты на кривых блеска катаклизмических переменных, и в частности, появление нормальных и аномальных горбов, сопровождающих затмения аккреционного диска звездой-донором. Решение обратной задачи по интерпретации затменных кривых блеска катаклизмических переменных различных типов в рамках двух альтернативных моделей показало, что в модели «горячей линии» удается лучше, чем в модели «горячего пятна», описать наблюдаемые кривые блеска как во время вспышки, так и в спокойном состоянии системы (см., например, [439–442]). В качестве примера такого сравнения на рис. 9.5 показаны наблюдаемая и синтетические кривые блеска системы IP Peg, находящейся в спокойном состоянии, в V-фильтре. В модели «горячей линии» лучше воспроизводится ширина горбов на кривых блеска, форма затмения и детали внезатменных изменений блеска. Сравнение моделей «горячего пятна» и «горячей линии» убедительно доказывает преимущества последней при интерпретации кривых блеска ТДС, что позволяет говорить о полученной в расчетах ударной волне («горячей линии») как о реально существующей структуре в аккреционных дисках тесных двойных звезд.

Еще одним доказательством существования «горячей линии» может служить исследование возможной природы провалов на кривых блеска полуразделенных двойных систем со стационарными дисками [426].

Наблюдения маломассивных рентгеновских двойных (ММРД) выявили наличие провалов на рентгеновских кривых блеска ряда систем. Для объяснения этих провалов использовалась гипотеза о наличии утолщения на внешнем крае аккреционного диска на фазе  $\sim 0,8$ ,

соответствующей положению этой особенности на кривой блеска. Наличие вещества, окружающего рентгеновский источник, на значительной высоте над орбитальной плоскостью системы, а также тот факт, что вещество распределено неравномерно по азимуту, могут объясняться как гравитационным воздействием компаньона на аккреционный диск, так и взаимодействием струи вещества из внутренней точки Лагранжа  $L_1$  с диском. Совпадение фазы наблюдаемых провалов с предполагаемым положением места, где струя из  $L_1$  подходит к внешнему краю диска, сфокусировало усилия астрономов на исследовании именно этой области. Для объяснения появления вещества на высотах, значительно превышающих толщину диска, наиболее плодотворной считалась идея о рикошете струи от внешнего края диска, позволяющая объяснять наличие наблюдаемых провалов на кривых блеска ММРД [405].

Наличие провалов на кривых блеска, вызванных появлением вещества в определенных местах высоко над диском, легче всего идентифицировать в ММРД, так как они содержат очень компактный источник в центре диска. Тем не менее, подобные особенности кривых блеска в разных диапазонах длин волн были зафиксированы и в целом ряде катаклизмических двойных во время вспышки (U Gem, OY Car, Z Cha). Дальнейшие наблюдения показали, что и для систем, находящихся в стационарном состоянии, возможно появление провалов на кривых блеска. Так исследования ультрафиолетовых кривых блеска затменных новоподобных катаклизмических двойных UX UMa и RW Tri [443] подтвердили эту гипотезу и дали основания говорить об универсальном характере этого явления в полуразделенных двойных системах с аккреционными дисками. Интересно отметить, что, в отличие от взрывных систем, звезды со стационарными дисками показывают наличие предзатменных провалов на существенно более ранних фазах 0,6–0,7<sup>1)</sup> [443, 444].

Возникает вопрос, а что приводит к появлению вещества на значительной высоте над аккреционным диском в случае, когда взаимодействие струи и диска является стационарным? Газодинамические исследования установившейся картины течения в полуразделенных двойных системах показывают, что в этом случае взаимодействие струи и диска является безударным. В отличие от модели с «горячим пятном», где предполагается удар струи о край аккреционного диска, в стационарном случае струя взаимодействует с газом околodискового гало, формируя протяженную область повышенного энерговыделения, так называемую, «горячую линию». Это означает, что в установившемся режиме не будет возникать рикошета струи и, следовательно, этот

<sup>1)</sup> Фазовый угол  $\varphi$  отсчитывается, как это принято при анализе наблюдательных данных, от линии соединяющей центры звезд в направлении противоположном вращению системы. Нулевая фаза соответствует положению звезд относительно наблюдателя, когда донор затмевает аккретор.

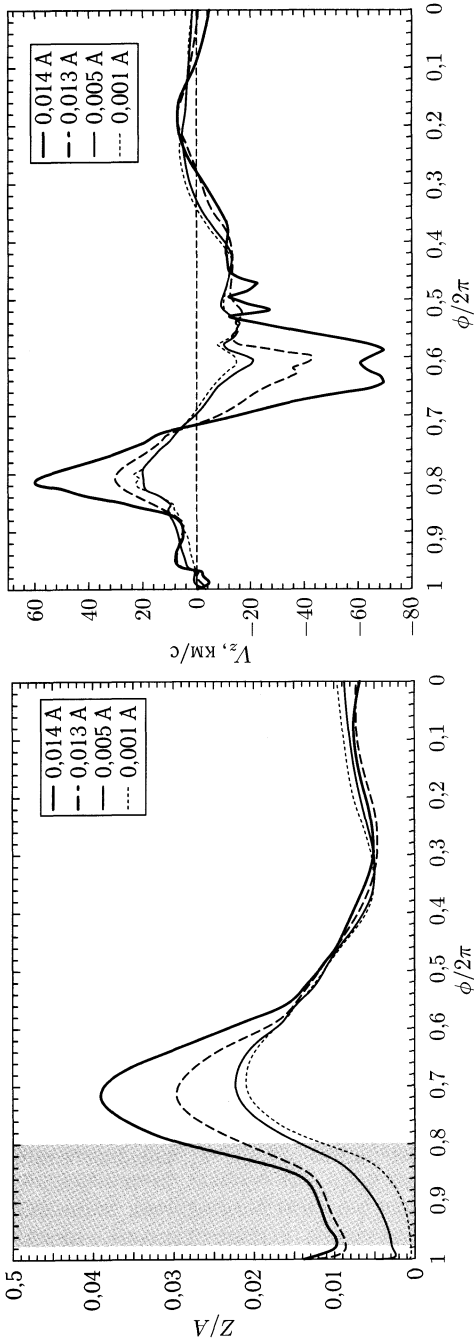


Рис. 9.6. Слева. Зависимость высоты над орбитальной плоскостью ( $z(\varphi)$ ) для четырех линий тока лежат в окрестности  $L_1$  и имеют координаты  $(x_{L_1}, 0, z_0)$ . Значения  $z_0$  для каждой линии тока указаны на графике. Заштрихованная область соответствует области роста  $v_z$  в ударной волне «горячая линия». Справа. Зависимость вертикальной скорости  $v_z(\varphi)$  вдоль тех же четырех линий тока

эффект не может использоваться для объяснения провалов на кривых блеска двойных систем со стационарными дисками. Исследование толщины околodискового гало в ТДС со стационарными дисками показывает, что и в случае отсутствия прямого столкновения струи и диска возможно возникновение утолщения гало над диском. В газодинамической картине течения, описываемой моделью с «горячей линией» в процессе взаимодействия струи с околodисковым гало значительная часть вещества получает вертикальное ускорение. Движение газа по вертикали, вызванное наличием  $z$ -компоненты скорости, совместно с его движением вдоль внешнего края диска приводит к постепенному росту толщины околodискового гало (рис. 9.6). Область вертикального ускорения ограничена областью «горячей линии», угловые размеры которой не превышают  $\sim 65^\circ$ . Однако, после прохождения этой области газ имеет достаточно большую вертикальную компоненту скорости,

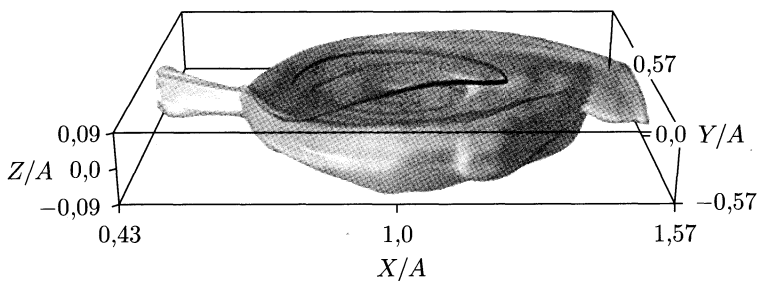


Рис. 9.7. Трехмерная изоповерхность плотности при значении  $\rho = 5 \cdot 10^{-11}$  г/см<sup>3</sup>. На рисунке также показан фрагмент линии тока, начинающейся в окрестности  $L_1$ .

что заставляет его подниматься выше вплоть до момента пока не будет исчерпан запас кинетической энергии. Точка, где прекращается движение вверх, соответствует максимуму высоты и достигается на фазе  $\sim 0,7$ , т.е. уже существенно за пределами «горячей линии». Высота утолщения в несколько раз превышает характерную высоту диска и достигает значений  $\sim 0,04A$  (это соответствует отношению высоты утолщения к расстоянию до аккретора  $>0,1$ ), а его угловые размеры превышают  $\sim 130^\circ$ . Максимум полученного в расчетах утолщения гало над наружным краем диска приходится на фазу  $\sim 0,7$  (рис. 9.7), что совпадает с наблюдаемыми значениями для катаклизмических переменных со стационарными дисками. Это подтверждает предложенную ранее для описания картины течения вещества в полуразделенных двойных звездах модель «горячей линии» и открывает дополнительные возможности для интерпретации кривых блеска таких систем.

**9.3.2. Приливная спиральная волна.** В последние годы, для исследования газодинамики в ТДС, стали широко использоваться наблюдения двойных систем в форме последовательных спектрограмм

определенной эмиссионной линии  $I(\lambda, t)$  (или, другими словами,  $I(V_R, \varphi)$ ). Для анализа таких спектрограмм лучше всего подходит метод доплеровской томографии [446]. Данный метод преобразует орбитальную переменность интенсивности эмиссионных линий в карту светимости в двумерном пространстве скоростей. Доплеровская томограмма строится как результат преобразования серии спектрограмм для последовательных моментов времени  $I(V_R, t)$  (или, что тоже самое, для последовательных орбитальных фаз  $I(V_R, \varphi)$ ) в распределение светимости на плоскости  $(V_x, V_y)$ . Чтобы преобразовать распределение  $I(V_R, \varphi)$  в доплеровскую томограмму  $I(V_x, V_y)$  решается обратная задача, которая может быть описана интегральным уравнением:

$$I(V_R, \varphi) = \iint I(V_x, V_y) g[V - V_c + V_x \cos(\varphi) - V_y \sin(\varphi)] dV_x dV_y, \quad (9.3)$$

где  $V_c$  — скорость системы,  $g(V)$  — нормированный локальный профиль линии, а интегралы берутся от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Данная обратная задача является плохо обусловленной и для ее решения требуется специальная регуляризация. В результате решения обратной задачи получается доплеровская карта — распределение интенсивности излучения в частотах некоторой эмиссионной линии в пространстве скоростей.

К сожалению, задача реконструкции пространственного распределения интенсивности эмиссионной линии на основе доплеровской карты в общем случае не имеет решения, так как точки, находящиеся на большом расстоянии, могут иметь одинаковые скорости и давать вклад в одно и то же место доплеровской карты. Таким образом, преобразование  $I(V_x, V_y) \rightarrow I(x, y)$  невозможно без некоторых априорных предположений о структуре поля скоростей. Ситуация кардинально меняется, когда наряду с техникой доплеровской томографии используются газодинамические расчеты [421]. В этом случае уже нет необходимости решать обратную задачу, так как доплеровская томограмма может быть построена непосредственно:  $[\rho(x, y), T(x, y)] \rightarrow I(x, y)$  и  $[I(x, y), V_x(x, y), V_y(x, y)] \rightarrow I(V_x, V_y) \rightarrow I(V_R, \varphi)$ . Дальнейшее сравнение синтетических томограмм с наблюдениями дает возможность отождествить главные элементы течения на доплеровских картах без решения плохо обусловленной обратной задачи, а, следовательно, позволяет уточнить газодинамическую модель и интерпретировать наблюдательные данные.

Огромным достоинством метода доплеровской томографии является возможность увидеть звезды — компоненты двойной системы в пространстве скоростей, хотя они не могут быть пространственно разрешены посредством прямых наблюдений. Доплеровская карта легче поддается интерпретации, чем исходные спектрограммы, кроме того, в ряде случаев томограмма может показывать (или, по крайней мере, давать подсказку) некоторые особенности структуры течения.



Так, например, линии с двугорбым профилем, соответствующие круговому движению в аккреционном диске, превращаются в размытое кольцо на доплеровской карте. Спиральные волны в диске сохраняют форму при переходе в скоростные координаты, и на томограммах видны как спирали.

Рассмотрим в качестве примера томограмму карликовой новой *Ir Peg*. Эта система показывает вспышки с периодом  $\sim 3$  месяца, причем  $\sim 10$  дней приходится на вспышку и  $\sim 80$  — на спокойное состояние (соответственно,  $\sim 60$  и  $\sim 500$  орбитальных периодов). При нахождении в активном состоянии (см., например, обзоры [447, 448]), доминирующей особенностью структуры течения является диск, а относительная роль струи вещества из внутренней точки Лагранжа уменьшается. Чтобы получить газодинамическую картину, качественно

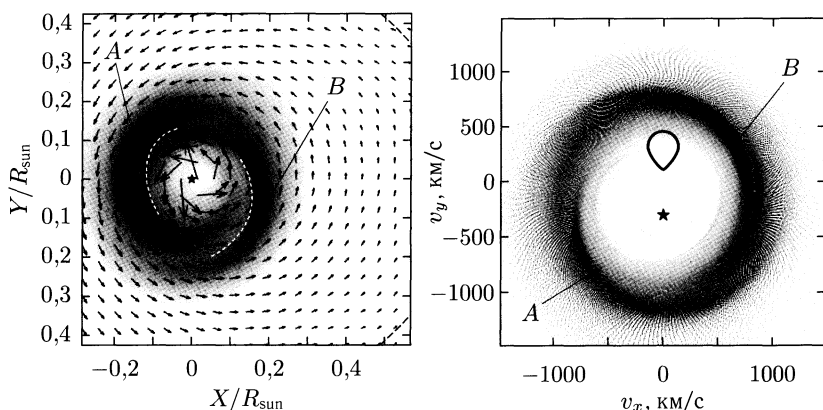


Рис. 9.8. Слева: Распределение интенсивности в экваториальной плоскости системы *Ir Peg* в активном состоянии. Маркеры *A* и *B* обозначают зоны максимальной интенсивности излучения — два рукава приливной спиральной волны. Справа: Синтетическая доплеровская карта для системы *Ir Peg* в активном состоянии. На рисунке также показана полость Роша звезды-донора (жирная сплошная линия) и аккректор (звездочка). Маркеры *A* и *B* обозначают те же зоны, что и на левой панели рисунка

подобную структуре течения во время взрыва, мы, следуя работам [417] и [418], после достижения установившегося режима течения значительно уменьшили темп обмена веществом между компонентами системы. Несомненно, предложенная модель не отслеживает вспышку с последующим увеличением диска, однако на качественном уровне правильно соотносит влияние диска и струи на картину течения. Распределение интенсивности в экваториальной плоскости системы *Ir Peg* в активном состоянии и синтетическая доплеровская карта показаны на рис. 9.8 [421]. В этом случае основной вклад в светимость вносят диск и два рукава приливной спиральной волны. Типичный

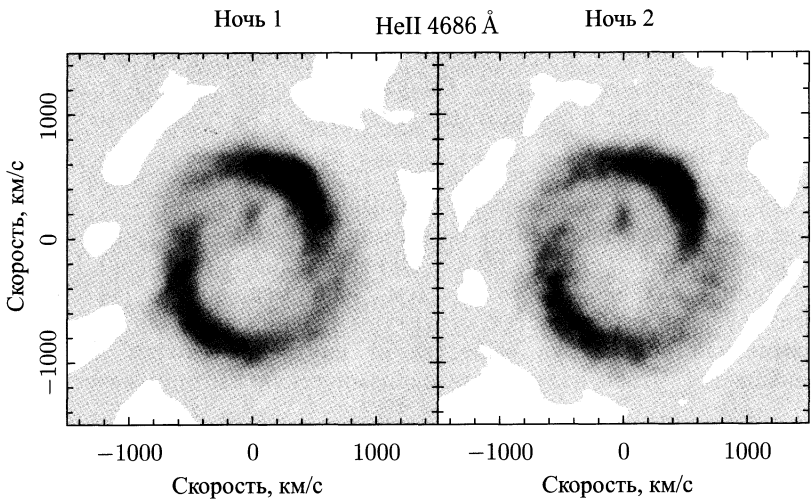


Рис. 9.9. Доплеровская томограмма Ir Peg в линии He II  $\lambda$  4686 Å в активном состоянии системы [445]. Этот рисунок воспроизводится с любезного согласия L. Morales-Rueda

пример наблюдаемой доплеровской томограммы для активного состояния системы представлен на рис. 9.9 [445]. Характерными особенностями этих томограмм являются наличие кольца, соответствующего аккреционному диску, и ярких спиральных рукавов в двух квадрантах доплеровской карты. Из сравнения с рис. 9.8 следует, что в этом случае оба ярких пятна вызваны эмиссией в областях повышенной плотности за двумя рукавами приливной спиральной ударной волной.

**9.3.3. Отошедшая ударная волна.** Комбинируя результаты газодинамических расчетов с данными доплеровской томографии, рассмотрим основные элементы структуры течения в системе SS Cyg в спокойном состоянии. SS Cyg — одна из ярчайших карликовых новых звезд на северном небосклоне. Компоненты полуразделенной двойной звезды SS Cyg — красный карлик класса R(4-5)V с массой  $\sim 0,56 M_{\odot}$  и радиусом  $\sim 0,68 R_{\odot}$  и белый карлик с массой  $\sim 0,97 M_{\odot}$  и радиусом  $\sim 0,07 R_{\odot}$ . Красный карлик теряет вещество со скоростью  $\sim 10^{-9} - 10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$ . Расстояние между компонентами системы —  $2,05 R_{\odot}$ , орбитальный период системы — 6,6 часов.

Структура газовых потоков в полученном решении представлена на рис. 9.10. На левой диаграмме рис. 9.10 показаны распределение плотности и векторы скорости в экваториальной плоскости системы (плоскость  $xy$ ). Значения плотности даны в логарифмической шкале в долях от плотности вещества во внутренней точке Лагранжа  $\rho_{L_1}$  (в расчетах плотность вещества в точке  $L_1$  равнялась  $3,1 \cdot 10^{-8} \text{ г/см}^3$ , что соответствует скорости обмена веществом между компонентами

$8 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$ ). Анализ представленных результатов показывает, что газодинамика течения вещества в полуразделенной двойной системе определяется наличием струи вещества из  $L_1$ , квазиэллиптическим аккреционным диском, околodисковым гало и межкомпонентной оболочкой. Также в системе присутствуют следующие яркие детали: ударная волна — «горячая линия», два рукава приливной спиральной волны, и отошедшая ударная волна.

На правой диаграмме рис. 9.10 представлено распределение логарифма интенсивности рекомбинационного излучения (в произвольных единицах) в экваториальной плоскости системы. Для определения интенсивности излучения значения плотности и температуры брались из газодинамических расчетов, а коэффициенты рекомбинации из работы [449] для мензеловского случая В. Основные элементы течения обозначены маркерами. Струя вещества из  $L_1$  показана сплошной линией с кружками; «горячая линия» — сплошной линией с ромбами; два рукава приливной спиральной волны обозначены сплошными линиями с треугольниками (рукава отличаются направлением вершины треугольника); прецессионная спиральная волна (детальное описание этого элемента структуры течения будет приведено в следующей главе) показана пунктирной линией. Также на нижней панели обозначены три области межкомпонентной оболочки за отошедшей ударной волной (области ограничены сплошными линиями с маленькими квадратиками и обозначены литерами А, В, С). Начало каждой линии обозначено значком, заключенным в круг.

Для идентификация основных элементов течения в системе SS Cyg были проведены спектральные наблюдения SS Cyg в спокойном состоянии [433] на двухметровом телескопе Zeiss-2000 (пик Терскол). Для построения доплеровских томограмм мы воспользовались методом максимальной энтропии [450]. Полученные томограммы в двух спектральных линиях  $H_{\beta}$ ,  $H_{\gamma}$  представлены на рис. 9.11. Более темные области на томограммах соответствуют большей интенсивности. На обеих картах наблюдается явно выраженное кольцо, что может объясняться наличием в системе аккреционного диска. Кольцо в линии  $H_{\gamma}$  имеет характерный радиус  $\sim 400$  км/с, а в линии  $H_{\beta}$   $\sim 300$  км/с. Бóльший размер кольца в линии  $H_{\gamma}$  связан, по-видимому, с тем, что более коротковолновое излучение в этой линии приходит из внутренних областей диска, имеющих высокую скорость. В линии же  $H_{\beta}$  становится заметным вклад от медленных внешних частей диска, околodискового гало и межкомпонентной оболочки, что и приводит к уменьшению характерного радиуса кольца. На обеих картах рис. 9.11 можно выделить несколько зон повышенной яркости в области внешнего края диска. Кроме того, на обеих томограммах наблюдается асимметрия, причем в линии  $H_{\beta}$  эта асимметрия выражена сильнее.

Для идентификации элементов течения необходимо построить синтетическую доплеровскую карту. Синтетические доплеровские карты подразумевают, что каждая точка геометрической области дает вклад

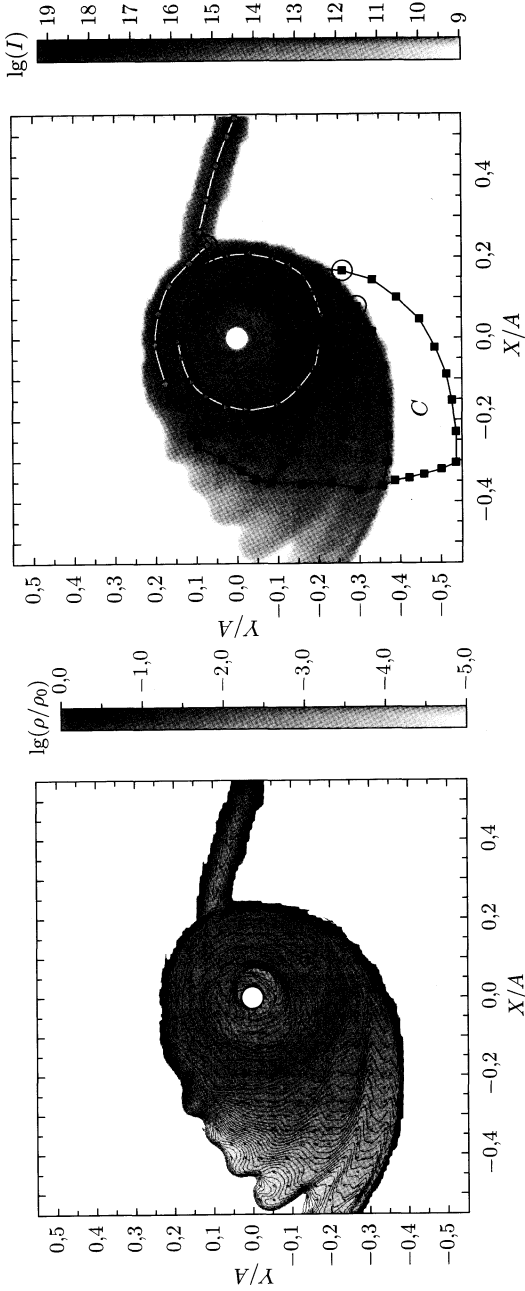


Рис. 9.10. Результаты трехмерных газодинамических расчетов для системы SS Cug в спокойном состоянии без учета магнитного поля. Слева показано распределение логарифма плотности вещества в экваториальной плоскости системы. Справа показано распределение логарифма интенсивности рекомбинационного излучения. Маркерами на правой диаграмме обозначены основные элементы течения

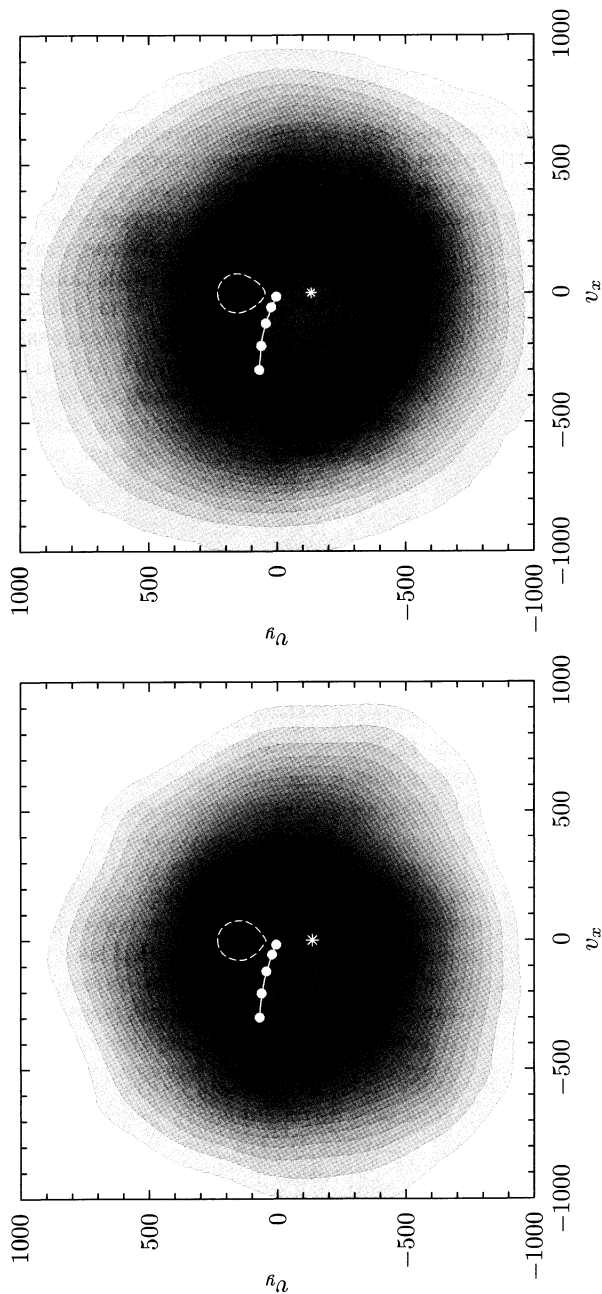


Рис. 9.11. Наблюдаемые доплеровские томограммы в линиях  $N_\beta$  (слева) и  $N_\gamma$  (справа). Пунктиром показана полость Роша донора. Положение аккректора обозначено звездочкой. Линией с кружками показана траектория струи из внутренней точки Лагранжа

в соответствующее место на плоскости скоростей, при этом эта точка остается видимой для любой орбитальной фазы. Действительно, из (9.3) следует, что

$$I(V_R, \varphi + \pi) = I(-V_R, \varphi), \quad (9.4)$$

т. е. построение доплеровских карт возможно только для наборов последовательных спектрограмм  $I(V_R, \varphi)$ , которые отображаются симметрично при взгляде на систему «с другой стороны», т. е. для случая, когда нет затмений и одни элементы двойной системы не заслоняются другими. Очевидно, затменные системы не соответствуют этому допущению, что существенно усложняет анализ их доплеровских томограмм (см., например, [421, 451]). В случае, когда доплеровская карта строится по наблюдениям, затменные участки последовательных спектрограмм просто исключаются из набора входных данных, по которым строится томограмма. Результатом является доплеровская карта, соответствующая случаю без затмений (другими словами, звезда-донор считается «прозрачной»). В нашем случае преобразование результатов газодинамических расчетов предполагает использование всех данных, что также соответствует «прозрачному» случаю.

Доплеровские томограммы изображают светимость на плоскости скоростных координат. Обозначим векторное поле скоростей в лабораторной системе координат (системе координат наблюдателя) как  $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ . В случае, когда наблюдатель расположен в орбитальной плоскости двойной системы, координаты доплеровской томограммы  $(V_x, V_y)$  совпадают с  $U_x$  и  $U_y$ . Для случая наклоненной системы эти координаты определяются с помощью проекции  $\mathbf{U}$  на плоскость, образованной векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, указывающий направление от наблюдателя к двойной системе. Интенсивность линии в пространстве скоростей вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} I(V_x, V_y) \sim & \int dx dy dz \int_{U_x} dU_x \int_{U_y} dU_y I(x, y, z) \times \\ & \times \delta[U_x(x, y, z) \sin i + U_z(x, y, z) \cos i - V_x] \times \\ & \times \delta[U_y(x, y, z) \sin i + U_z(x, y, z) \cos i - V_y], \end{aligned} \quad (9.5)$$

где  $i$  — наклон орбиты.

Как уже было сказано выше, для построения синтетических доплеровских томограмм использовалась интенсивность рекомбинационного излучения для мензеловского случая В. На рис. 9.12 показана синтетическая доплеровская карта системы, построенная с учетом угла наклона системы SS Cyg к наблюдателю  $i = 40^\circ$  [452]. На доплеровскую карту перенесены маркеры, соответствующие маркерам на правой панели рис. 9.10. Следует отметить, что на рис. 9.12 изображено мгновенное распределение интенсивности, полученное на определенный момент времени в поле скоростей, определенном тоже только для этого

момента времени. Это приводит к тому, что на синтетической доплеровской карте будут видны и элементы, имеющие собственное движение во вращающейся системе координат, в то время как на наблюдаемой томограмме они отображаться не будут. В частности, прецессионная спиральная волна, отмеченная на синтетической доплеровской карте пунктирной линией, не должна отображаться на наблюдаемых томограммах.

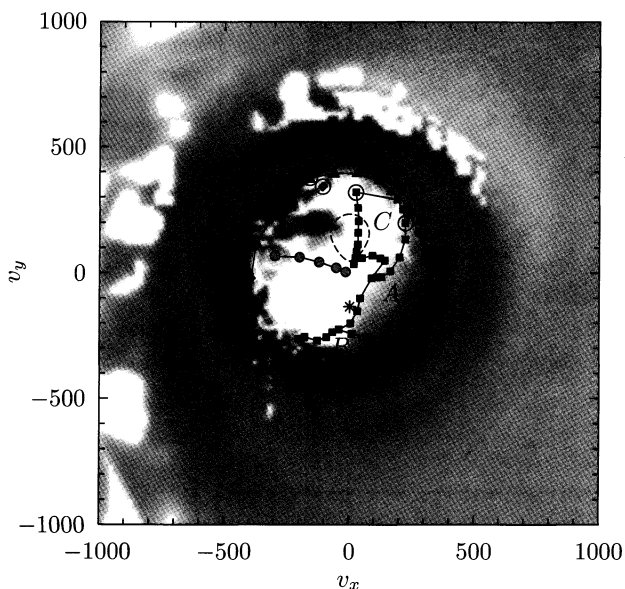


Рис. 9.12. Синтетическая доплеровская карта системы SS Cyg. Маркеры на карте соответствуют маркерам на правой диаграмме рис. 9.10

Для удобства сравнения синтетических и наблюдаемых томограмм на рис. 9.13 снова изображены наблюдательные томограммы, но на них нанесены те же маркеры, что и на синтетической карте. По результатам сравнения можно заключить, что основной вклад в светимость на томограмме вносят приливная спиральная волна и области межкомпонентной оболочки, расположенные вблизи отошедшей ударной волны. Невысокое разрешение исходных спектров мешает отождествлению малоcontrastных деталей, хорошо отслеживаемых на синтетической карте. Так, струя вещества из точки  $L_1$  практически не видна на томограммах. Область «горячей линии» может быть идентифицирована на обеих наблюдательных томограммах, но не как конкретная деталь. Наличие поярчания в области расположения «горячей линии» (отчетливо заметно на синтетической карте) приводит к изменению градиента яркости в этом месте наблюдаемой томограммы и позволяет говорить о присутствии «горячей линии» в картине течения.

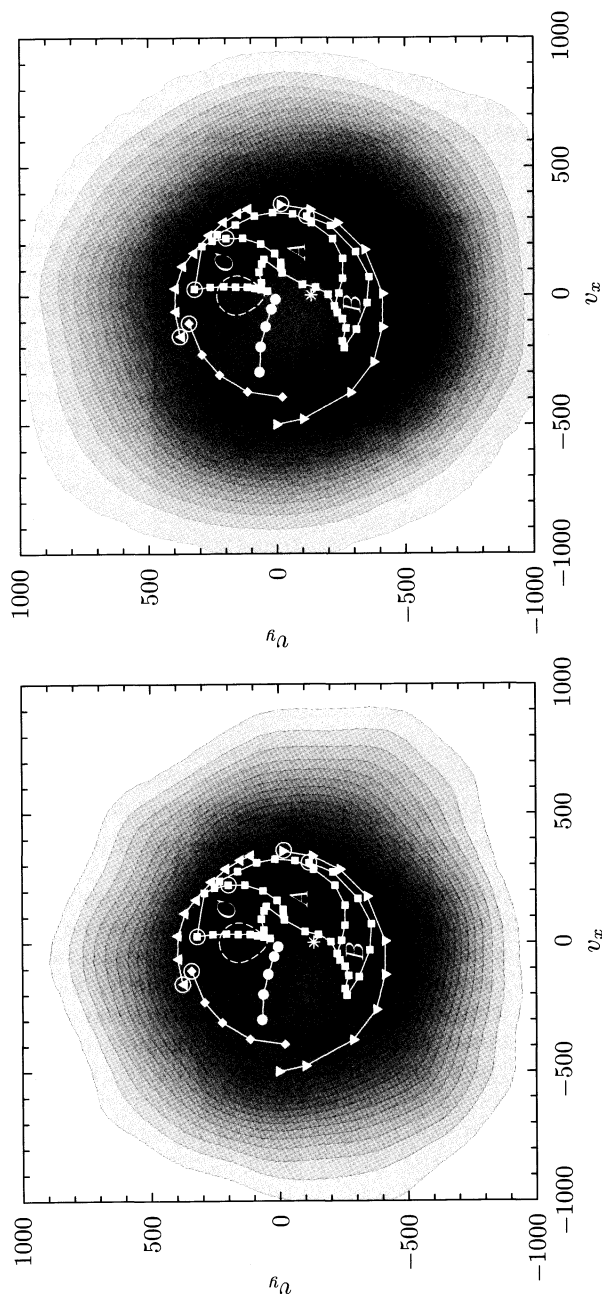


Рис. 9.13. То же, что и на рис. 9.11, но с нанесенными маркерами с правой диаграммы рис. 9.10



Из анализа томограмм можно определить некоторые параметры аккреционного диска. Внешние части диска легко отождествляются на томограммах по положению рукавов спиральной волны, что позволяет оценить его характерный радиус как  $\sim 1/3A$ . Размеры внутреннего радиуса диска могут быть оценены по полуширине линий на уровне континуума. Полуширина линии  $H_\gamma$  составляет  $2080 \pm 120$  км/с, что соответствует  $\sim 5,2$ – $6,5$  радиусам белого карлика. Если внутренние части диска оптически толстые, то мы видим поверхность, где оптическая толщина  $\tau \sim 1$ , и не можем сделать предположение о реальном внутреннем радиусе диска. Если же излучение в линии  $H_\gamma$  приходит из самых внутренних частей диска, то полученная оценка внутреннего радиуса диска позволяет предположить наличие в системе SS Cyg магнитного поля, препятствующего проникновению диска к звезде.

Одна из самых заметных деталей на наблюдаемых томограммах — это ярко выраженная асимметрия их внутренних частей. В обеих линиях видно увеличение яркости в правом нижнем квадранте, причем в линии  $H_\beta$  область максимальной яркости доходит практически до центра области, занимаемой донором. На синтетической карте аналогичная асимметрия образована излучением вещества межкомпонентной оболочки в области за отошедшей ударной волной (см. рис. 9.10, 9.12).

## ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ В АККРЕЦИОННЫХ ДИСКАХ

В ходе численного исследования газодинамики течения в полуразделенных двойных звездах авторами были обнаружены неизвестные ранее структуры — волны плотности — как в холодных, так и в горячих аккреционных дисках. Опираясь на результаты оригинальных работ ([23, 417, 418, 423, 424, 453–455]), в этой главе мы опишем основные свойства открытых волн, а также их наблюдательные проявления.

### 10.1. «Прецессионная» волна в холодных дисках

Принимая во внимание слабое влияние струи вещества на плотные внутренние части диска, а также тот факт, что ударные волны («горячая линия» и два рукава приливной волны) расположены во внешних частях диска, можно выделить в низкотемпературном решении (см. рис. 9.4) еще один элемент структуры течения, а именно: внутреннюю область диска (зона *A*, на рис. 10.1), где влиянием указанных газодинамических возмущений можно пренебречь.

Рассмотрим поведение вещества во внутренних частях диска, не подверженных газодинамическим возмущениям. В отсутствие внешних воздействий частица будет вращаться вокруг гравитирующего центра — аккретора по эллиптической орбите. Известно (см, например, [18, 19]), что в двойной звезде влияние второго компонента будет приводить к ретроградной прецессии орбиты частицы, вращающейся вокруг звезды-аккретора, причем скорость прецессии уменьшается при приближении к аккретору в соответствии с выражением

$$\frac{P_{\text{pr}}}{P_{\text{orb}}} \simeq \frac{4}{3} \frac{(1+q)^{1/2}}{q} \left(\frac{r}{A}\right)^{-3/2}, \quad (10.1)$$

где  $P_{\text{pr}}$  — период прецессии орбиты, а  $r$  — характерный размер орбиты. Остальные обозначения соответствуют принятым ранее в книге.

Аккреционный диск формируется из множества частиц, каждая из которых движется по своей эллиптической орбите. Так как частицы взаимодействуют между собой и образуют газ, то рассматривать диск следует в газодинамическом приближении и, следовательно, от орбит нужно перейти к линиям тока, которые тоже будут эллиптическими. Как известно, в газе не может быть взаимно пересекающихся течений, следовательно линии тока могут лишь касаться друг друга. Из геомет-

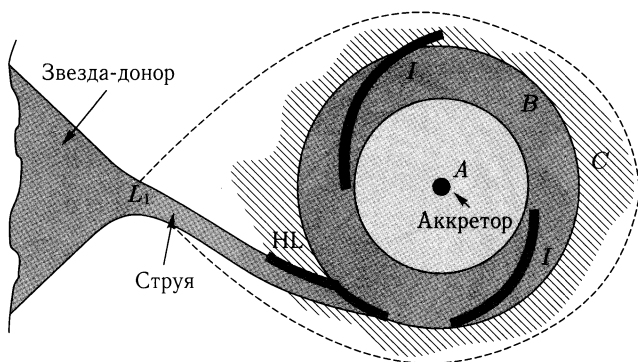


Рис. 10.1. Схематическое изображение основных особенностей картины течения вещества в полуразделенных двойных системах. Маркером  $A$  обозначена зона, свободная от сильных газодинамических возмущений.

рических соображений очевидно, что составить диск из непересекающихся эллипсов можно, лишь вкладывая эллипсы друг в друга. Если эксцентриситет всех эллиптических линий тока равен нулю, то мы получаем круглый диск. Если эксцентриситеты линий тока не равны нулю, то может реализовываться «равновесное» решение, когда большие полуоси всех линий тока лежат на одной прямой. Если в системе присутствует внешнее воздействие (что неизбежно в двойной звезде) и есть прецессия орбит со скоростью, когда более удаленные от аккректора линии тока стремятся прецессировать быстрее, то они должны постоянно обгонять линии тока с меньшими полуосями. При этом, так как в газодинамическом диске не может быть пересекающихся линий тока, то со временем устанавливается равновесие и все линии тока начинают прецессировать с одной угловой скоростью, т. е. твердотельно. Из-за зависимости скорости прецессии от характерного размера орбиты более удаленные от аккректора линии тока должны быть повернутыми на больший угол, причем в сторону, противоположную вращению вещества, так как прецессия ретроградная. Скорость прецессии лежит в диапазоне между скоростями прецессии внешних («быстрых») и внутренних («медленных») орбит. Положение внутренней орбиты определяется тем, что в этой области диска влиянием второго компонента по сравнению с гравитационным полем аккректора можно пренебречь. Положение внешней орбиты определяется размерами области без газодинамических возмущений, так как наличие возмущений нарушит регулярность прецессии линий тока. Очевидно, что положение и внутренней и внешней орбит зависит как от параметров собственно системы, так и от параметров массообмена, поэтому следует ожидать, что средняя скорость прецессии будет различной для различных систем. Формирование спиральных структур в аккреционных дисках рассматривалось в работах [423, 456, 457].

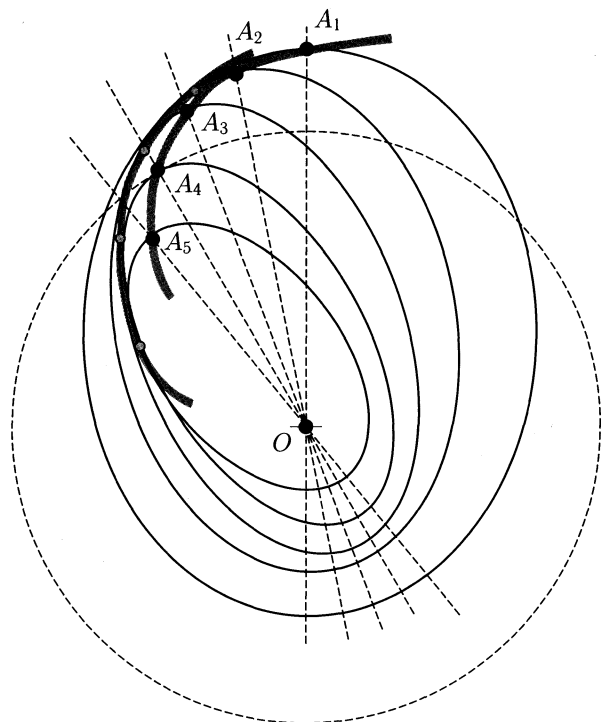


Рис. 10.2. Схема образования спиральных структур во внутренних газодинамически невозмущенных частях холодного диска.

Рассмотрим решение, когда большие полуоси линий тока будут повернуты относительно некоего выбранного направления на угол, прямо пропорциональный величине большой полуоси орбиты (рис. 10.2). Очевидно, что в таком решении образуются спиральные структуры. В частности, из-за того, что частицы движутся по линии тока неравномерно и в апоастре будет максимум плотности, линия, соединяющая апоастры (на рис. 10.2 обозначены маркерами  $A_1, A_2, \dots, A_5$ ), будет являться спиральной волной плотности. Линия, соединяющая точки максимального сближения линий тока (обозначены на рис. 10.2 светлыми кружками), также является спиралью. Поскольку после прохождения апоастра скорость частицы (в том числе и радиальная скорость, направленная к аккретору) возрастает, то очевидно, что за волной плотности будет наблюдаться увеличение радиального потока вещества к аккретору  $\dot{F}_r = nv_r$ , вызванное увеличением как  $n$ , так и  $v_r$ . Линия, соединяющая пики потока вещества к аккретору, будет также иметь форму спирали. Увеличение радиального потока вещества за волной приведет к росту скорости аккреции в области где «прецессионная» волна подходит к поверхности звезды.

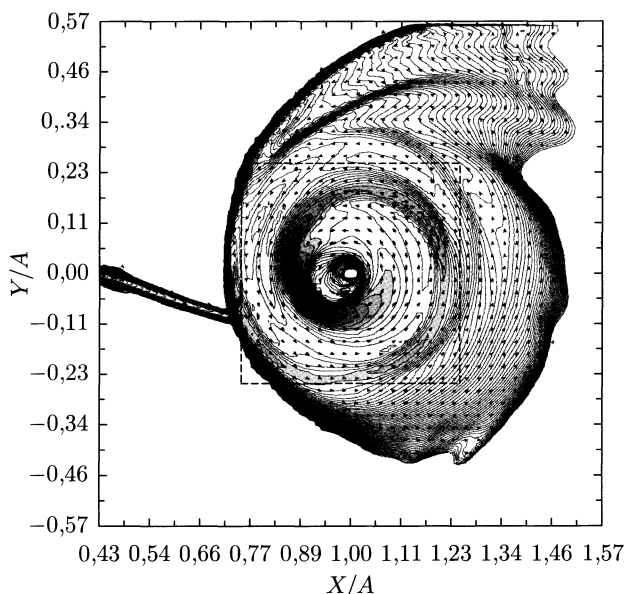


Рис. 10.3. Изолинии плотности и векторы скорости в экваториальной плоскости системы. Координаты  $x$  и  $y$  представлены в единицах расстояния между компонентами  $A$

Резюмируя приведенное качественное рассмотрение структуры течения вещества в полуразделенных двойных системах, отметим следующее: 1) в холодном диске возникает область, свободная от газодинамических возмущений; 2) наличие ретроградной прецессии орбит должно приводить к возникновению спиральной волны плотности во внутренних газодинамически невозмущенных частях диска; 3) скорость вращения этой волны определяется средней скоростью прецессии орбит; 4) за волной плотности должно возникать увеличение радиального потока вещества к аккректору.

Анализ представленных результатов трехмерного численного моделирования (рис. 10.3, см. также рис. 9.2) полностью подтверждает гипотезу о возможности образования спиральной волны плотности во внутренних частях холодного диска. О характере движения волны можно судить по рис. 10.4, где показано распределение плотности и векторов скорости в экваториальной плоскости системы для двух моментов времени, отличающихся на 1,5 орбитальных периода. Двурукавная приливная спиральная волна покоится в неинерциальной системе координат связанной с двойной звездой, в то время как прецессионная волна движется с небольшой скоростью в лабораторной системе координат (системе координат неподвижного наблюдателя). Согласно результатам расчетов, для различных звезд скорость обращения волны в лабораторной системе координат составляет величину

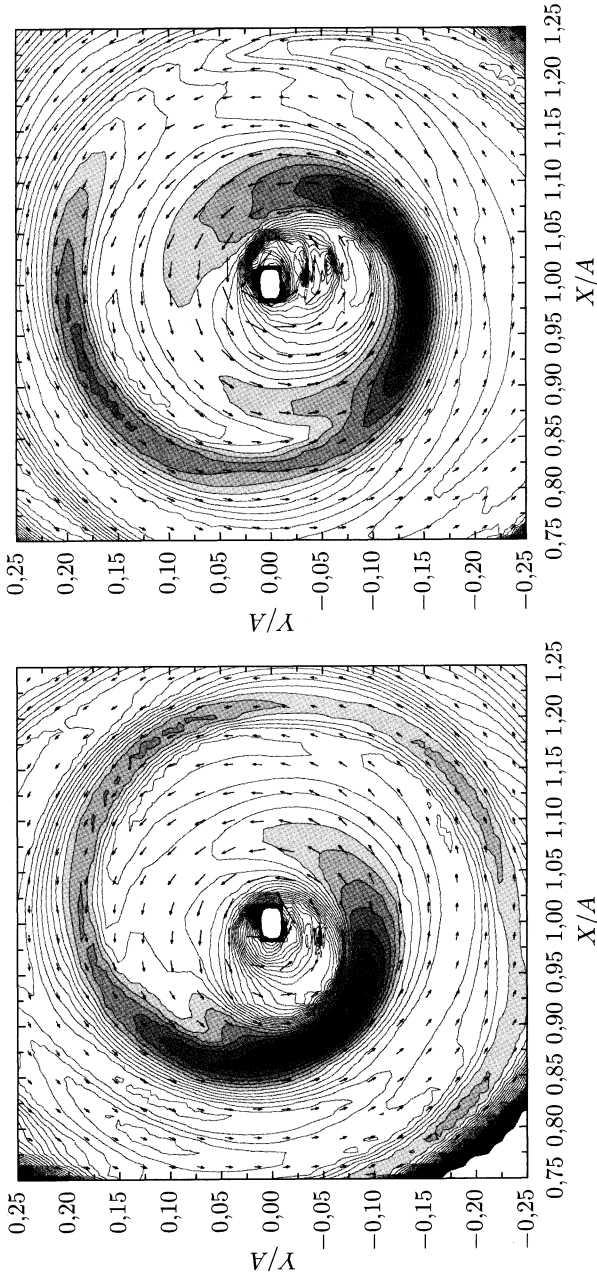


Рис. 10.4. Изолинии плотности и векторы скорости в экваториальной плоскости системы вблизи аккректора (область, обозначенная на рис. 10.3 пунктирным квадратом) для двух моментов времени, времени  $t_1$  (левая панель) и  $t_2$  (правая панель), где  $t_2 = t_1 + 1.5P_{\text{orb}}$

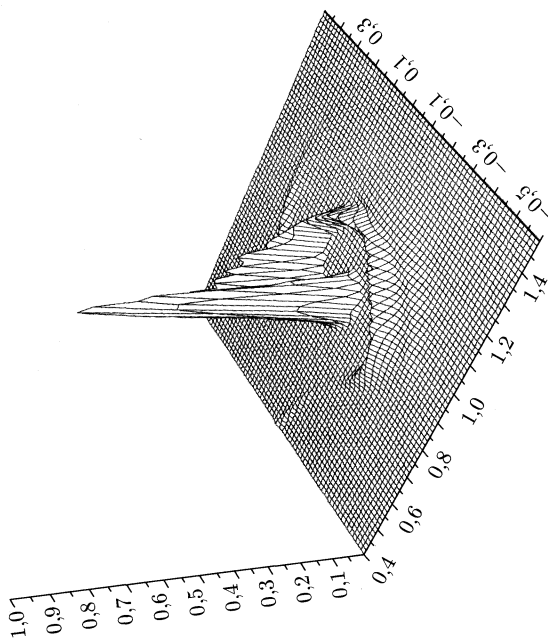
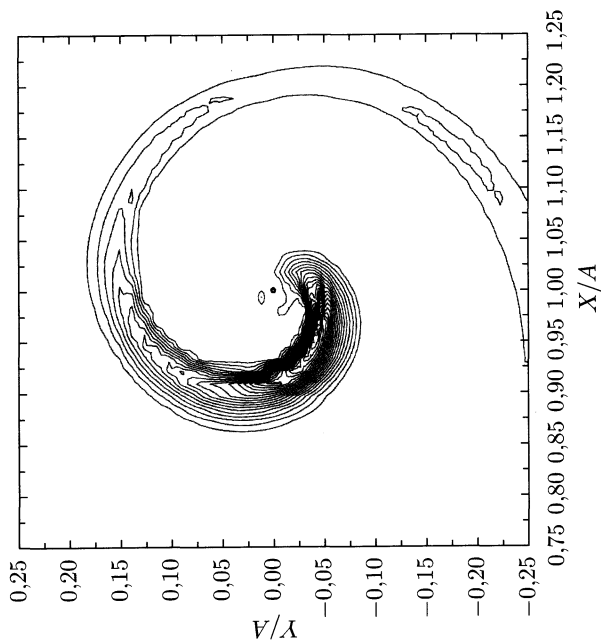


Рис. 10.5. Распределение радиального потока вещества к аккректору по диску в экваториальной плоскости системы. Величина потока нормирована на максимальное значение.

от  $\sim -0,02$  до  $-0,1$  оборота за один орбитальный период системы. Другими словами, спиральная волна совершает полный оборот в лабораторной системе координат за  $\approx 10-50$  оборотов системы, что находится в хорошем согласии с теоретическими оценками.

Обнаруженная волна является волной плотности, тем не менее, ее влияние на решение довольно значительно. На рис. 10.5 в двух видах показано распределение радиального потока вещества к аккректору по диску в экваториальной плоскости системы. Величина потока вещества к аккректору нормирована на его максимальное значение. Отчетливо видно, что линия, соединяющая пики потока вещества к аккректору, имеет форму спирали. Скорость аккреции, вызванная увеличением радиального потока вещества за «прецессионной» волной плотности, может возрасти в несколько раз (вплоть до порядка величины) по сравнению с решением без волны.

## 10.2. Спирально-вихревая структура в горячих дисках

В работах [423, 424] было обнаружено, что даже небольшое изменение темпа массообмена в двойной системе приводит к возмущению равновесного состояния горячего аккреционного диска, и, как следствие, к формированию сгустка вещества, движущегося по диску со скоростью примерно в 6 раз большей орбитальной угловой скорости  $\Omega$  (рис. 10.6).

Из результатов расчетов следует, что сгусток является долгоживущим образованием, не меняющим существенно свои средние характеристики на временах порядка нескольких десятков орбитальных периодов системы. Иллюстрацией этому может служить рис. 10.7, где представлено изменение во времени средней плотности вещества, проходящего через полуплоскость, расположенную перпендикулярно плоскости системы и секущую диск вдоль линии, соединяющей компоненты в направлении от аккректора к внешней точке Лагранжа (плоскость  $xz$  ( $y = 0, x > A$ )). На рис. 10.7 представлено три кривых, соответствующих уменьшению темпа массопереноса в 2 (верхняя кривая), 10 (средняя кривая) и  $10^5$  (нижняя кривая) раз. Видно, что наряду с общим изменением плотности существуют ее квазипериодические колебания, вызванные прохождением сгустка. Анализ представленных кривых показывает, что после изменения (уменьшения) темпа массообмена в системе в диске формируется уплотнение, движущееся с периодом  $\sim 0,15P_{\text{orb}}-0,18P_{\text{orb}}$ . Как следует из представленных данных, сгусток не расплывается под действием диссипативных процессов (величина  $\bar{\rho}$  меняется только в начальный переходный период), а частота его вращения сохраняется неизменной практически до момента исчезновения диска.

В работах А.М. Фридмана и др. [453, 454] были приведены аргументы в пользу волнового характера этого сгустка, являющегося ничем иным, как однорукавной спиральной волной плотности. Последняя,



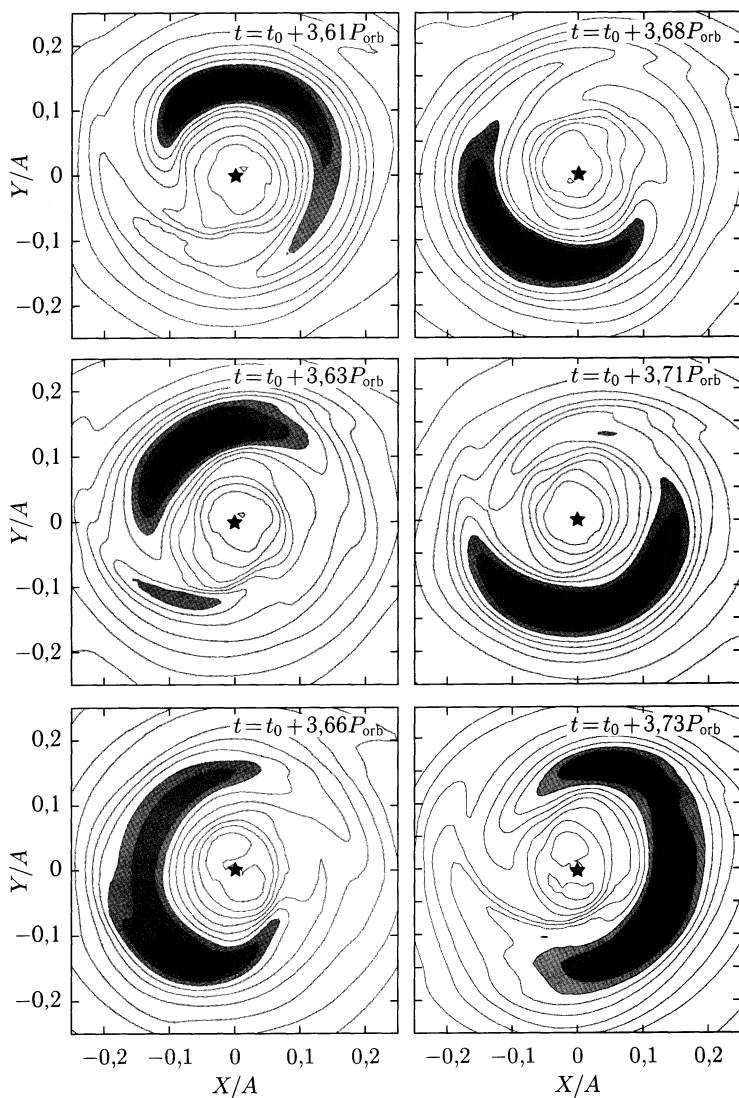


Рис. 10.6. Распределения плотности в экваториальной плоскости системы вблизи аккректора (обозначен черной звездочкой) для 6 моментов времени 3,61, 3,63, 3,66, 3,68, 3,71, и 3,73 (в единицах  $P_{\text{orb}}$ ), покрывающих период обращения сгустка. Максимум плотности на всех панелях рисунка имеет величину  $\rho \simeq 0,035\rho_{L_1}$

как известно из хорошо развитой теории галактических спиральных волн плотности, вращается твердотельно и не растягивается дифференциальным вращением.

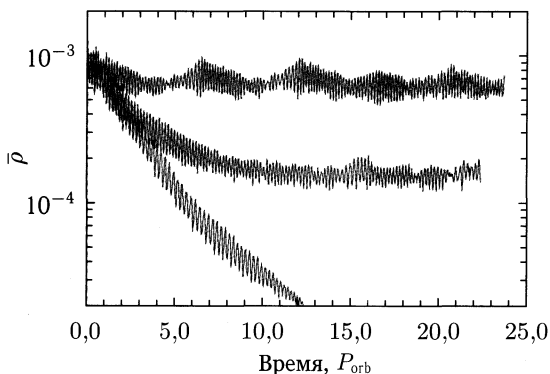


Рис. 10.7. Кривые изменения во времени средней плотности вещества, проходящего через полуплоскость, расположенную перпендикулярно плоскости системы и секущую диск вдоль линии, соединяющей компоненты в направлении от аккретора к внешней точке Лагранжа. Представлено три кривых, соответствующих уменьшению темпа массопереноса в 2 (верхняя кривая),  $10^5$  (средняя кривая) и  $10^5$  (нижняя кривая) раз

Как было отмечено выше, течение вещества в двойной системе определяется полем сил, задаваемым потенциалом Роша (1.18). Чтобы выяснить природу сгустка, вначале рассмотрим, какие колебания в плоскости диска может возбуждать гравитационный потенциал. Вычтем из общего потенциала сферически-симметричный потенциал аккретора  $\Phi_a$ :  $\tilde{\Phi} = \Phi - \Phi_a$ , и рассмотрим фурье-спектры по азимутальным гармоникам потенциала  $\tilde{\Phi}$  в различных радиальных областях диска. На рис. 10.8 показаны амплитуды компонентов фурье-спектра потенциала  $\tilde{\Phi}$  для различных радиальных областей аккреционного диска. Видно, что во всей рассматриваемой области доминирует гармоника  $m = 2$ . Доминирование второй гармоники демонстрирует характер приливного воздействия донора, что также подтверждается монотонным ростом абсолютной величины потенциала с радиусом диска. В наиболее приближенной к донору периферийной области диска абсолютная величина несферической части потенциала максимальна.

Однако мы можем убедиться в том, что в представленных расчетах гравитационная сила не является определяющей для распределения вещества диска. Рассмотрим спектр «очищенной»<sup>1)</sup> поверхностной плотности  $\tilde{\sigma}$  после возмущения, т. е., после того, как темп массообмена был изменен и в аккреционном диске возник сгусток. Соответствующие гармоники спектра поверхностной плотности изображены на рис. 10.9. Видно, что в фурье-спектре поверхностной плотности доминирует

<sup>1)</sup> «Очищенная» функция определяется вычитанием усредненного по периоду распределения.

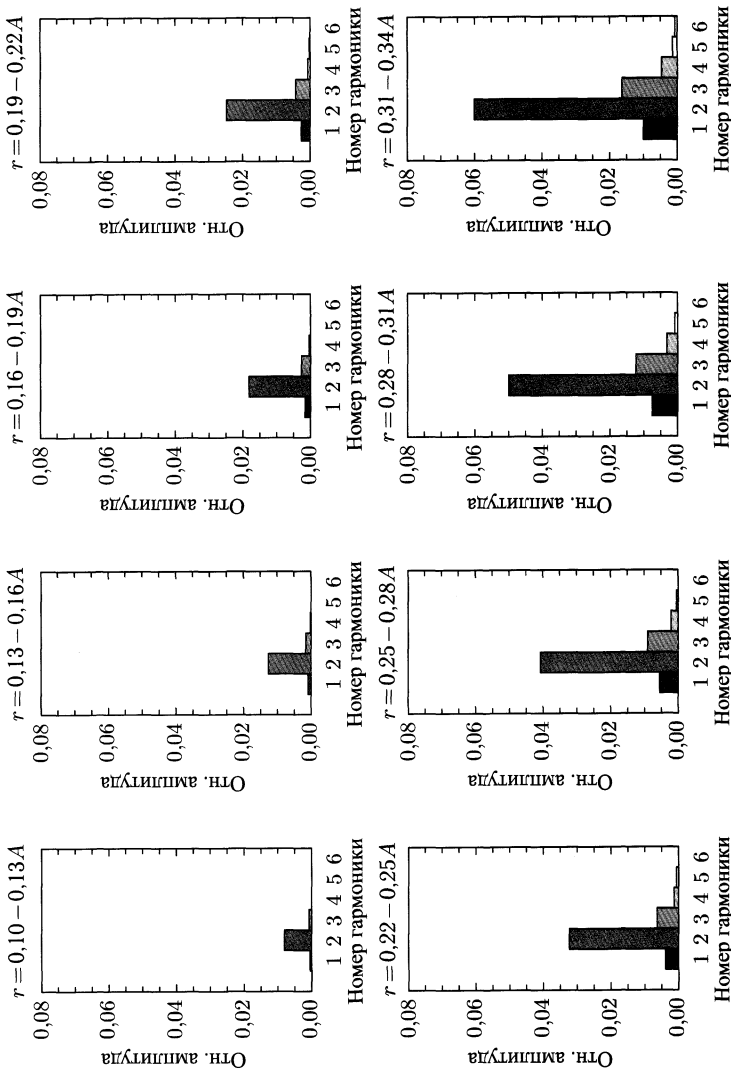


Рис. 10.8. Относительные амплитуды первых пяти компонентов фурье-спектра неосесимметричной части потенциала для различных радиальных экваториальных областей (кольцевых зон, внутренний и внешний радиус которых указан над каждой панелью) аккреционного диска

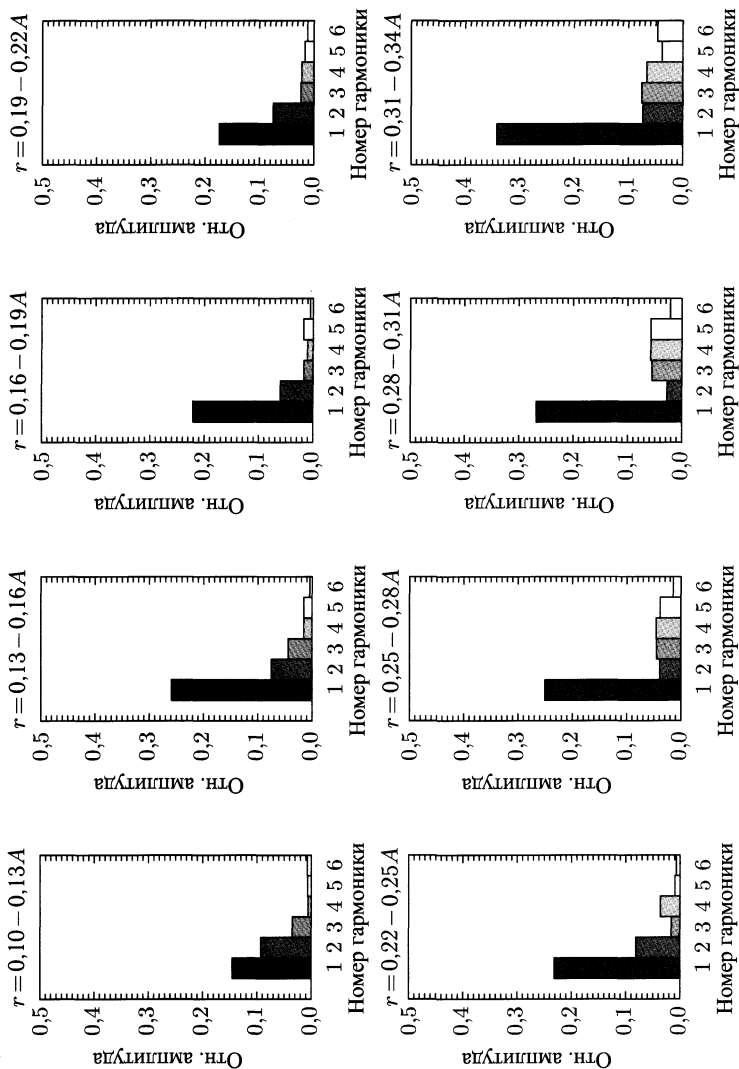


Рис. 10.9. Относительные амплитуды гармоник несимметричной части «очищенной» поверхностной плотности для различных радиальных областей аккреционного диска, внутренний и внешний радиус которых указаны над каждой панелью

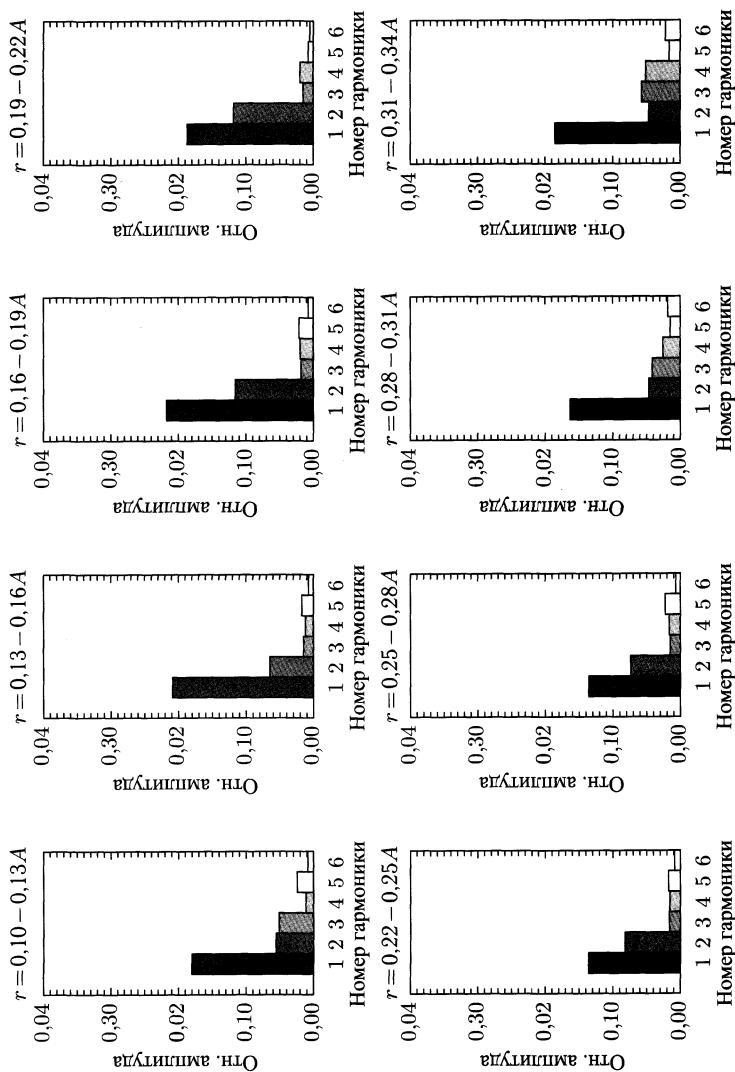


Рис. 10.10. Относительные амплитуды гармоник неосесимметричной части «очищенной» радиальной скорости для различных радиальных областей аккреционного диска, внутренний и внешний радиус которых указаны над каждой панелью

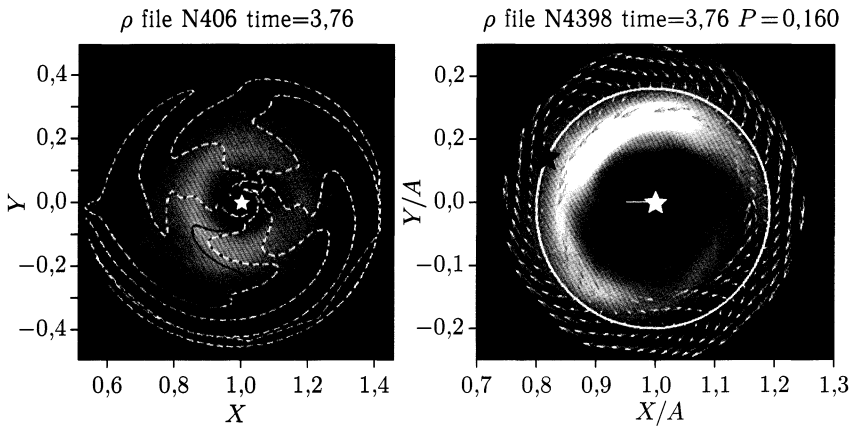


Рис. 10.11. *Левая диаграмма:* Фазовые кривые максимальной плотности первой азимутальной гармоники профиля плотности за период обращения сгустка в орбитальной плоскости. Сплошной черной линией изображена фазовая кривая максимальной плотности к моменту одного обращения сгустка. Звездочкой обозначено положение аккректора. *Правая диаграмма:* Распределение плотности и скорости в экваториальной плоскости в системе координат, связанной со сгустком, для момента времени  $t = 3,56 P_{\text{orb}}$ . Белая звездочка изображает аккректор, черная — центр антициклона. Белый отрезок показывает направление на аккректор. Белой окружностью показаны точки, лежащие на радиусе коротации

мода  $m = 1$ , что согласуется с наличием в диске рассматриваемого уплотнения. Аналогичная картина видна и в распределении гармоник радиальной скорости (рис. 10.10).

Анализируя фазовую кривую максимальной плотности первой азимутальной гармоники профиля плотности в различные моменты времени, можно заметить, что положение фазовой кривой максимальной плотности моды  $m = 1$  в каждый момент времени жестко связано со сгустком вещества. Более того, если рассмотреть все фазовые кривые максимальной плотности первой азимутальной гармоники профиля плотности за период обращения сгустка (см. левую диаграмму рис. 10.11), мы увидим, что совершив полный оборот, фазовая кривая максимальной плотности практически не изменила своей формы, что свидетельствует о том, что дифференциальное вращение диска не размывает эту гармонику.

Отличная от приливной моды фазовая скорость вращения моды  $m = 1$  и твердотельный характер ее вращения позволяют предположить, что сгусток представляет собой спиральную волну плотности. Согласно теории спиральных волн плотности в галактических дисках наличие однорукавной спиральной волны должно сопровождаться антициклоническим вихрем с центром на радиусе коротации (см., например, [458]). Центр антициклона должен располагаться в окрестности

максимума поверхностной плотности. Анализ поля скоростей в плоскости диска в системе координат, связанной со сгустком, показывает наличие антициклонического вихря за уплотнением (см. правую диаграмму рис. 10.11). Центр антициклона, показанный черной звездочкой, в полном согласии с теорией находится в окрестности максимума поверхностной плотности — в окрестности сгустка. Более того, как и предсказывает теория спиральных волн плотности, центр антициклона располагается в точности на коротационной окружности, обозначенной на рисунке сплошной белой линией.

Суммируя все сказанное, приведем доказательства того, что мода  $m = 1$  представляет собой спирально-вихревую однорукавную структуру:

1) мода  $m = 1$  вращается с отличной от приливной моды  $m = 2$  фазовой скоростью;

2) деформация фазы максимальных значений поверхностной плотности диска в этой моде дифференциальным вращением практически отсутствует;

3) поскольку вычисленный радиус коротации моды  $m = 1$  оказался в области сильного доминирования этой моды, то по аналогии с галактическими дисками мы были вправе ожидать наличия одного антициклона с центром на коротационной окружности и в соответствующей области — в окрестности максимума поверхностной плотности. Антициклон оказался точно в указанной области диска.

### 10.3. Влияние волн плотности на картину течения

Из газодинамических расчетов мы знаем, что после возникновения в диске «прецессионной» волны плотности, темп аккреции резко возрастает (вплоть до порядка величины). Вызванное волной увеличение темпа аккреции должно приводить к развитию вспышки в системе. Вещество подводится к поверхности аккретора вдоль прецессионной волны, поэтому область, в которой оно аккрецируется, локализована по азимуту и, следовательно, образует светящееся пятно на поверхности аккретора. Это должно приводить к возникновению «горба» на кривой блеска. Волна медленно прецессирует в системе координат, связанной с неподвижным наблюдателем, вызывая смещение области повышенной аккреции (т. е. «горба») с каждым новым оборотом системы. Биения между орбитальным периодом системы и прецессионным периодом волны дают период этого «горба».

Действительно, подобные явления были обнаружены в ряде систем. Сверхгорбы — модуляции на кривой блеска двойной системы, период которых на несколько процентов отличается от орбитального, наблюдаются, в основном, во время супервспышек в системах типа SU UMa. В монографиях [18, 19] выделены основные наблюдательные особенности сверхгорбов. Для объяснения феномена сверхгорбов различными исследователями предлагался ряд моделей (их краткое описание

и критика приведены, например, в [18, 19]). Наибольшую популярность получила модель, объясняющая эти вариации блеска прецессией внешних частей аккреционного диска. Наличие в диске линдбладовского резонанса 3:1 приводит к развитию неустойчивости, в результате чего внешняя часть диска начинает прецессировать с периодом, в несколько раз превышающим орбитальный. Биения между двумя периодами — орбитальным и прецессионным вызывают периодические колебания блеска, ассоциируемые со сверхгорбом. Следует отметить, что данная модель обладает рядом недостатков, наиболее существенным из них является ограничение на максимальное отношение масс компонентов системы. Чтобы линдбладовский резонанс 3:1 находился внутри аккреционного диска, отношение масс компонентов системы (отношение массы донора к массе аккретора)  $q$  не должно превышать  $\sim 0,33$  [459], в то время, как известен ряд систем, в которых сверхгорбы наблюдаются и при существенно большем  $q$ . Примером подобной системы является TV Col, где  $q$  лежит в диапазоне  $\sim 0,6-0,9$ .

**10.3.1. Супервспышки в системах типа SU UMa.** В 2004 г. авторами был предложен новый механизм формирования сверхгорбов в системах типа SU UMa, основанный на предположении о возникновении в аккреционном диске волны плотности «прецессионного» типа [424]. Модель супервспышки, вызванной прецессионной спиральной волной в аккреционном диске, впервые позволила объяснить все значимые наблюдательные проявления супервспышек и сверхгорбов в системах типа SU UMa, включая период, длительность, энергетику и антикор-

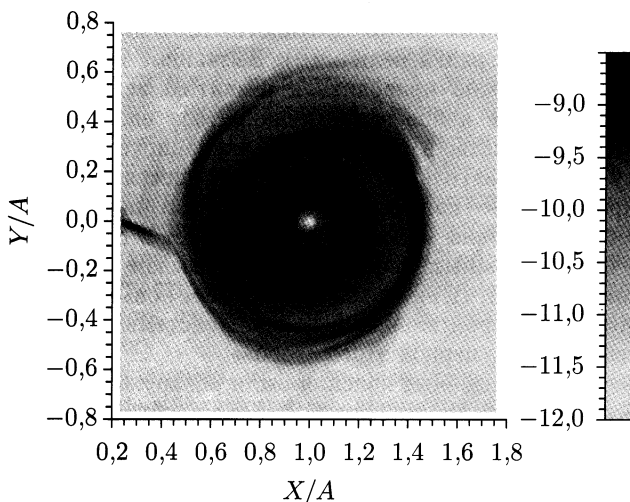


Рис. 10.12. Распределение плотности (в десятичной логарифмической шкале) в экваториальной плоскости системы для модели с  $q = 0,05$



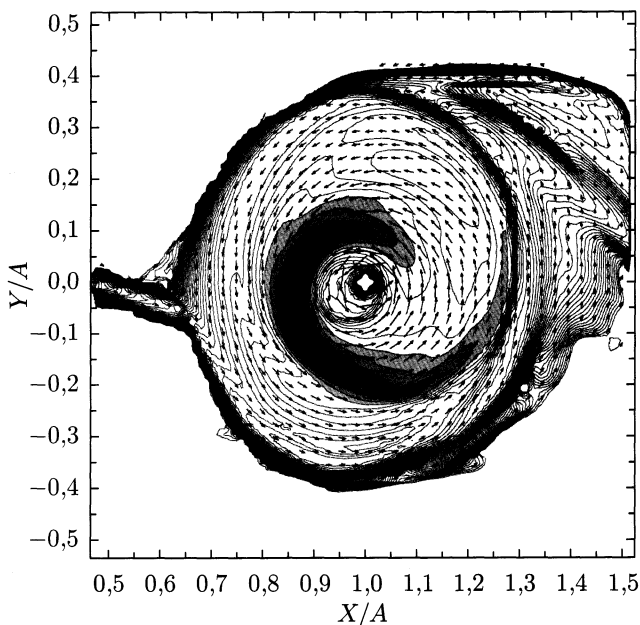


Рис. 10.13. Изолинии плотности и векторы скорости в экваториальной плоскости системы для модели с  $q = 0,7$ . В окрестности прецессионной волны изолинии плотности представлены градиациями серого цвета, максимальная плотность соответствует черному цвету

реляцию яркости и цветовой температуры в максимуме обычного сверхгорба, явление «позднего сверхгорба» и др. Кроме того, предложенная модель не накладывает жестких ограничений на отношение масс компонент двойной системы и может быть применена для объяснения механизма образования сверхгорбов в системах с большим отношением масс, вплоть до  $q \sim 1$ . Примеры расчетов для систем с  $q = 0,05$  и  $q = 0,7$  представлены на рис. 10.12 и 10.13, соответственно. Из анализа представленных на рисунках распределений плотности отчетливо видно, что волны «прецессионного» типа образуются при любых значениях  $q$ .

**10.3.2. Изменения яркости на внезатменных частях кривых блеска CVs.** Рассмотрим ТДС после вспышки, когда часть вещества диска аккрецировалась и его плотность уменьшилась. В подобных системах температура диска должна возрастать вследствие большей интенсивности излучения центрального объекта и меньшей эффективности радиативного выхолаживания. Согласно результатам газодинамического моделирования, в этом случае возможно формирование однорукавной волны плотности, вращающейся по диску со скоростью в несколько раз большей орбитальной.

Наличие волны плотности, открытой в высокотемпературных решениях, может проявляться в изменении блеска затменных катаклизмических переменных с большими углами наклона орбиты. Естественно предположить, что наличие волны (сгустка вещества, вращающегося в аккреционном диске) может привести к колебаниям яркости на внезатменных частях кривых блеска. Для поиска наблюдательного свидетельства наличия однорукавной спиральной волны плотности в аккреционных дисках нами были выбраны системы IP Peg и WX Agi. IP Peg представляет собой затменную катаклизмическую переменную с орбитальным периодом 3,8 часа и углом наклона орбиты  $\sim 68^\circ$ . WX Agi — также затменная катаклизмическая переменная с наклоном орбиты  $\sim 72^\circ$  и орбитальным периодом 3,34 часа.

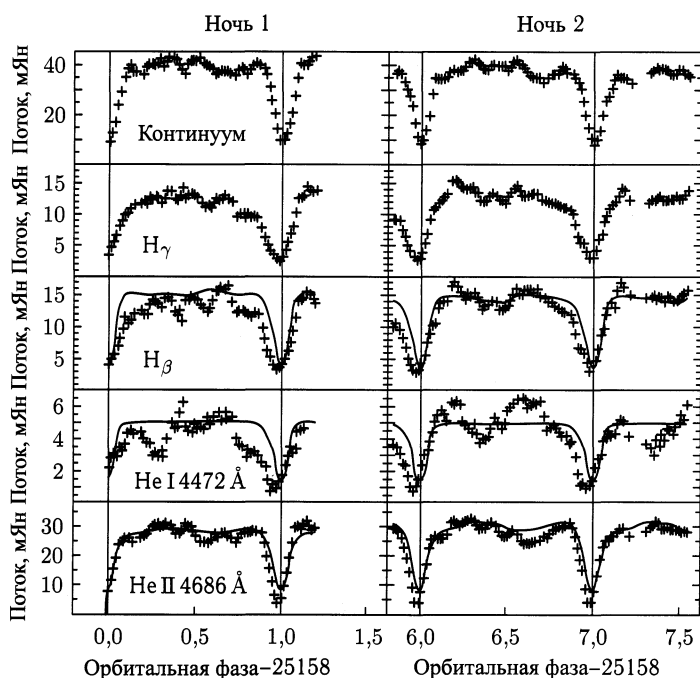


Рис. 10.14. Кривые блеска IP Peg [445] в континууме, линиях  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$ , He I 4472 и He II 4686 Å.

На рис. 10.14 показаны кривые блеска IP Peg [445], полученные через 5 и 6 дней после вспышки в континууме, линиях  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$ , He I 4472 и He II 4686 Å. Даже беглый взгляд позволяет идентифицировать колебания яркости на внезатменных частях кривых блеска этих систем. Фурье-анализ показывает, что в представленных кривых максимально выделяется гармоника с частотой  $5,5 \Omega$ . Полученные данные о спектрах кривых блеска могут служить свидетельством наличия в аккрецион-

ном диске у катаклизмической переменной IP Peg спиральной волны плотности, вращающейся с частотой, в 5,5 раза превышающей частоту орбитального вращения системы. Наиболее наглядно наличие сгустка демонстрирует кривая блеска в линии He II. Это можно объяснить тем обстоятельством, что оптически плотная волна плотности, перемещаясь по аккреционному диску, периодически закрывает от наблюдателя излучающую в этой линии горячую область между волной и вторым компонентом. Проявление этого феномена также частично заметно и в кривой блеска для континуума.

Дальнейшее исследование кривых блеска катаклизмических переменных демонстрирует наличие похожих гармоник и в других объектах этого класса. Например, в кривых блеска WX Aгi доминирует гармоника с частотой  $\sim 6,25 \Omega$ . Таким образом, анализ кривых блеска катаклизмических переменных, обладающих характеристиками, в достаточной степени соответствующими характеристикам численной модели, позволяет говорить о наличии изменений яркости на внезатменной части этих кривых с частотой около  $1/5$ – $1/6$  орбитального периода, что совпадает с периодом обращения сгустка, полученным в расчетах.

**10.3.3. О возможности возникновения газодинамической турбулентности в аккреционных дисках.** Обнаруженная в численном эксперименте однорукавная спирально-вихревая структура движется по горячему аккреционному диску с периодом  $\tilde{T} \simeq (1/6)P_{\text{orb}}$  (в системе координат, вращающейся с угловой скоростью системы). Этот период не связан с периодом, вызванным силой приливного взаимодействия донора. В работах [23, 454, 455] было сделано предположение, что эта волна генерируется неустойчивостью сверхотражения в аккреционном диске.

Неустойчивость сверхотражения вызывает появление различных линейных мод. Для исследования этих спиральных волн плотности упростим задачу: будем рассматривать двумерный диск со стационарными осесимметричными параметрами, и будем анализировать динамику только малых (линейных) возмущений. В такой постановке все возмущенные величины имеют малые отклонения  $\delta\tilde{F}$  от невозмущенных стационарных величин  $F_0$ :

$$F(r, \varphi, t) = F_0(r) + \delta\tilde{F}(r, \varphi, t), \quad (10.2)$$

а отклонения могут быть записаны в стандартном виде:

$$\delta\tilde{F}(r, \varphi, t) = \delta F(r) \exp[i(m\varphi - \omega t)], \quad (10.3)$$

где  $\omega$  — собственная частота возмущений,  $m$  — азимутальное число.

Использование линейного приближения позволило вычислить собственные значения задачи [454], [455]: угловую фазовую скорость вращения  $\Omega_{\text{ph}} \equiv \text{Re}(\omega)/m$  и инкремент неустойчивости  $\gamma \equiv \text{Im}(\omega)$ .

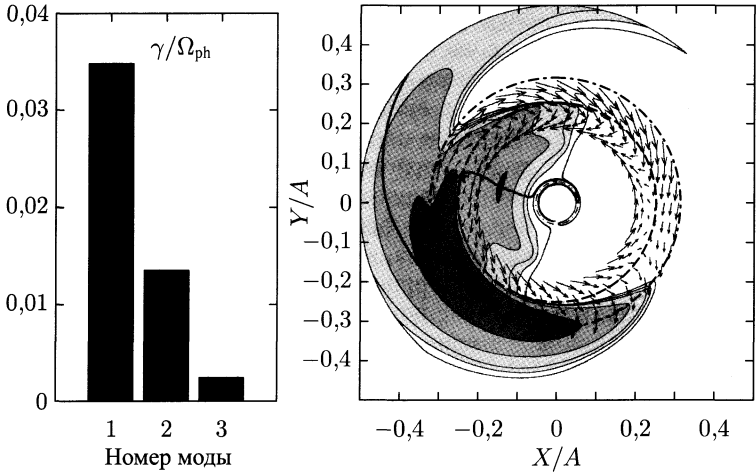


Рис. 10.15. Результаты численного исследования линейных мод, генерируемых неустойчивостью сверхотражения в двумерной модели изолированного аккреционного диска. *Левая панель:* инкременты первых трех крупномасштабных мод ( $m = 1, 2, 3$ ). *Правая панель:* собственные функции возмущенной поверхностной плотности (величина которой превосходит плотность фона  $\sigma_0(r)$ ) и возмущенной скорости (обозначенные стрелками) для наиболее неустойчивой однорукавной спиральной моды ( $m = 1$ )

На левой панели рис. 10.15 показаны величины инкрементов роста первой, второй и третьей мод в единицах фазовой скорости  $\Omega_{\text{ph}}$ . На правой панели представлены основные собственные функции для наиболее неустойчивой однорукавной спирали ( $m = 1$ ). Возмущенная поверхностная плотность (только величина, превосходящая величину стационарного фона) представлена затемнением, жирная черная линия есть фазовая кривая максимальной поверхностной плотности. Векторное поле возмущенной скорости (в системе координат, вращающейся с однорукавной модой) показано стрелками, черная звездочка поставлена в центре антициклонического вихря. Пунктирная окружность соответствует коротационному радиусу  $r_c$ , штрих-пунктирная — внешнему линдбладовскому резонансу. Видно, что коротационная окружность проходит через центр антициклона в соответствии с теорией волн плотности [458]. Центр антициклонического вихря вращается со спиральной волной плотности с той же самой угловой скоростью  $\Omega_{\text{ph}}^{(m=1)}$  и играет важную роль в перераспределении углового момента диска.

Все исследованные линейные моды проявляют аналогичные свойства: они локализованы в окрестности своих коротационных радиусов. Эти радиусы близки один к другому, лежат во внутренней части диска и могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$r_c^{(m)} \simeq r_c^{(1)}(1 + \beta)^{m-1}, \quad r_c^{(1)} \simeq 0,25A, \quad \beta \simeq 0,024, \quad m = 1, 2, 3. \quad (10.4)$$

Эти величины близки к значению  $r_c^{(1)} \simeq 0,21A$ , оцененному из трехмерного численного расчета. Что же касается вращательных частот, то последние могут быть аппроксимированы так <sup>1)</sup>:

$$\omega_r^{(m)} \equiv 2\pi f^{(m)} \equiv m\Omega_{\text{ph}}^{(m)} \simeq m\Omega_{\text{ph}}^{(1)}(1 + \beta_1)^{-(m-1)}, \quad \beta_1 \simeq 0,045. \quad (10.5)$$

Как мы видели в предыдущем разделе, на внезатменной части кривых блеска видимая амплитуда вариаций меняется с периодом  $T \simeq (1/6)P_{\text{orb}}$  (см. рис. 10.14). В системе IP Peg угол наклона орбиты составляет  $\sim 68^\circ$ , поэтому более холодные волны плотности будут периодически закрывать от наблюдателя внутреннюю горячую область. Эмиссионная линия He II 4686 Å заведомо выходит из внутренних частей диска с высокой температурой, превышающей порог ионизации He II. Анализируя вариации блеска в этой линии, мы можем получить представление о волнах плотности, затмевающих излучение во внешних частях аккреционного диска.

Представим плотность в экваториальной плоскости аккреционного диска ( $z = 0$ ) на некотором радиусе  $r$  и при фиксированном азимутальном угле  $\varphi$  в виде

$$\rho(t) = \langle \rho \rangle + \Delta\rho(t), \quad \Delta\rho(t) = \delta\rho_{\text{tidl}}(t) + \sum_{m=1}^{m_{\text{max}}} \delta\rho^{(m)}(t). \quad (10.6)$$

Здесь мы предположили, что вариации плотности около среднего уровня  $\langle \rho \rangle$  вызваны суперпозицией приливной гармоник  $\delta\rho_{\text{tidl}}(t)$  и основными собственными азимутальными модами, связанными с неустойчивостью сверхотражения,  $m$  ( $m_{\text{max}} \leq (3-4)$ ). Затем мы можем аналогичным образом аппроксимировать наблюдаемую интенсивность излучения в линии He II 4686 Å как суперпозицию среднего уровня  $\langle I \rangle$  и некоторых пульсаций  $\Delta I(t)$ , т. е.

$$I(t) = \langle I \rangle + \Delta I(t), \quad \Delta I(t) = \delta I_{\text{tidl}}(t) + \sum_{m=1}^{m_{\text{max}}} \delta I^{(m)}(t). \quad (10.7)$$

Здесь  $\delta I_{\text{tidl}}(t)$  — приливная гармоника с частотой  $f_{\text{tidl}} \simeq 2f_{\text{orb}}$ ,  $f_{\text{orb}} \equiv 1/P_{\text{orb}}$ . Другие пульсации соответствуют основным собственным модам и имеют простую гармоническую зависимость

$$\delta I^{(m)}(t) \simeq A_m \cos [2\pi f_m(t - t_{0m})]. \quad (10.8)$$

Поэтому амплитуда  $A_m$   $m$ -й гармоники должна быть пропорциональна амплитуде  $|\delta\rho^{(m)}|$  соответствующей собственной моды,  $A_m \equiv$

<sup>1)</sup> В случае чисто кеплеровского вращения мы имеем  $\omega_r^{(m)} \simeq m\Omega_{\text{ph}}^{(1)}(1 + \beta)^{-3(m-1)/2}$ .

$\equiv A(k_{\perp}^{(m)}) \propto |\delta\rho^{(m)}|$ . Вычисленный спектр Фурье [454] (зависимость квадрата модуля амплитуды  $|A_m|^2$  от нормализованной орбитальной частоты  $f_{\text{orb}}$ ) пульсаций  $\Delta I(t)$  показывает четыре основных пика кроме приливной гармоники (рис. 10.16). Первый пик, имеющий частоту  $f_1 \simeq 4,94$ , соответствует моде  $m = 1$ , а три последующих пика — модам  $m = 2, 3$  и  $4$ .

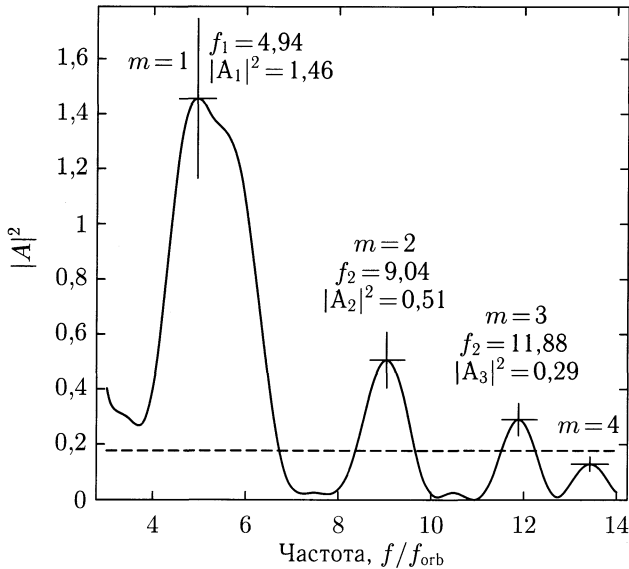


Рис. 10.16. Фурье-спектр переменности блеска системы IP Peg в линии He II 4686 Å (1-я ночь на рис. 10.14). Горизонтальная пунктирная линия показывает уровень, соответствующий наблюдаемому отношению сигнал/шум равному единице

Наличие различных линейных мод, вызванных неустойчивостью сверхотражения, будет приводить к возникновению развитой турбулентности в аккреционном диске. Оценим коэффициент турбулентной вязкости и величину  $\alpha$ -параметра, вызванного наличием этой газодинамической неустойчивости.

В монографиях и обзорах по физике плазмы формула для оценки коэффициента турбулентной вязкости  $\nu_{\text{turb}}$  записывается в виде (см., например, [460])

$$\nu_{\text{turb}} \approx \frac{(\gamma_L)_{\text{max}}}{(k_{\perp}^2)_{\text{min}}}, \quad (10.9)$$

где  $(\gamma_L)_{\text{max}}$  — максимальный инкремент линейной неустойчивости, которая вызывает соответствующую турбулентную вязкость,  $(k_{\perp}^2)_{\text{min}}$  — минимальное волновое число, соответствующее максимальной длине волны, генерируемой данной неустойчивостью. Формула (10.9) может

быть легко получена из размерностного анализа. Действительно, размерность турбулентной вязкости  $[\nu_{\text{turb}}]$ , так же как и молекулярной  $[\nu_{\text{mol}}]$ , есть  $[\nu_{\text{turb}}] = [\nu_{\text{mol}}] = \text{см}^2/\text{с}$ . Подставляя в правую часть последнего выражения величины соответствующей размерности:  $\text{см}^2 = [k^{-2}]$ ,  $\text{с}^{-1} = [\gamma]$ , мы приходим к формуле (10.9).

Развитая колмогоровская турбулентность в аккреционных дисках означает, что максимальный размер турбулентных пульсаций много меньше, чем полутолщина диска  $H$ , т.е.  $k_{\perp} H \gg 1$ , или в предельном случае  $(k_{\perp})_{\text{min}} H \geq 1$ . Тогда, учитывая максимальный инкремент неустойчивости сверхотражения для моды  $m = 1$  (см. левую панель рис. 10.15) и условие равновесия диска по  $z$  координате,  $H \cong c_s/\omega_K$ , мы имеем

$$(\gamma_L)_{\text{max}} \simeq 0,035\Omega_{\text{ph}} = 0,035\Omega_{\text{cor}} = 3,5 \cdot 10^{-2} \left( \frac{c_s}{H} \right), \quad (10.10)$$

$$(k_{\perp})_{\text{min}} \cong H^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (10.9), мы получаем коэффициент турбулентной вязкости в виде

$$\nu_{\text{turb}} \approx 3,5 \cdot 10^{-2} c_s H, \quad (10.11)$$

и, следуя модели  $\alpha$ -диска, мы находим

$$\alpha \approx 3,5 \cdot 10^{-2}. \quad (10.12)$$

Полученное значение  $\alpha$ -параметра согласуется с наблюдательными и теоретическими оценками многих авторов. Таким образом, гидродинамическая неустойчивость сверхотражения может приводить к развитию турбулентности в аккреционных дисках, способной объяснить высокий темп переноса углового момента и измеряемую скорость аккреции.

**ФОРМИРОВАНИЕ ОБЩЕЙ ОБОЛОЧКИ**

Общие оболочки двойных звезд являются достаточно распространенным явлением. Чаще всего рассматривается оболочка, представляющая собой остаток протозвездного облака, аккрецируемый двойной звездой на ранних стадиях ее эволюции. На продвинутых стадиях эволюции двойную систему может также окружать оболочка, возникшая за счет звездного ветра с одного или с обоих компонентов. Результаты газодинамического моделирования показали, что возможно возникновение третьего типа околозвездных оболочек, формируемых за счет газа, выброшенного из ТДС в процессе массообмена [432, 434, 435]. Действительно, для определенных из наблюдений ТДС значений вязкости  $\alpha = 0,001-0,1$  скорость дисковой аккреции в системах без магнитного поля не превышает 50%. Это означает, что значительная часть вещества, покидающего донор через окрестность внутренней точки Лагранжа, будет заполнять пространство между компонентами системы и формировать общую оболочку.

В предыдущих главах книги мы рассматривали лишь внутреннюю часть этой оболочки, называя ее межкомпонентной оболочкой. Дело в том, что численное моделирование общей оболочки сопряжено с большими трудностями, обусловленными, прежде всего, большими размерами расчетной области, в которой необходимо проводить моделирование. При условии, что сеточное разрешение должно быть достаточно высоким, это выражается в большом количестве узлов разностной сетки и задача становится чрезвычайно ресурсоемкой. Решение подобной задачи стало возможным только в последние годы с появлением массивно-параллельных суперкомпьютеров. До этого численное моделирование общей оболочки приходилось проводить на грубых сетках (см., например, [461]) или же при использовании метода сглаженных частиц SPH с относительно небольшим числом частиц и, соответственно, с невысокой точностью (см., например, [462]). Вообще же число работ по численному моделированию общих оболочек двойных систем невелико, причем в основном рассматривались широкие двойные. В то же время необходимость изучения оболочек ТДС достаточно очевидна, так как они влияют на наблюдательные проявления, и их следует учитывать при рассмотрении эволюции двойной звезды.



## 11.1. Механизм образования оболочки

Рассмотрим результаты численного моделирования полуразделенной двойной системы, состоящей из заполняющей свою полость Роша звезды-донора с массой  $M_d = 0,56M_\odot$ , звезды-аккретора с массой  $M_a = 0,6M_\odot$ , и расстоянием между компонентами  $A = 1,65R_\odot$ . Моделирование проводилось в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с двойной системой, на регулярной трехмерной сетке в декартовых координатах [432]. Размеры расчетной области ( $3,4A \times 3,4A \times 0,5A$ ) были выбраны таким образом, чтобы вместить все точки Лагранжа. В направлении  $Z$  размер расчетной области достаточен, чтобы звезда-донор находилась в ней целиком. Принятые размеры расчетной области позволяют исследовать процессы переноса вещества из внутренних областей тесной двойной системы в общую оболочку.

На рис. 11.1 показано распределение плотности (в десятичной логарифмической шкале) и векторы скорости в экваториальной плоскости системы. Обозначена звезда-донор (координаты центра масс  $(0, 0)$ ), заполняющая свою полость Роша, и звезда-аккретор (координаты  $(1, 0)$ ). Также на рисунке пунктирными линиями показаны эквипотенциали Роша и отмечены точки  $L_{1-5}$ . В полученном решении присутствуют все выявленные ранее элементы структуры течения: общая оболочка, околосферическое гало, аккреционный диск, а также все обнаруженные ранее волны в диске — «горячая линия», двурукавная спиральная приливная волна, и прецессионная волна плотности. Общая оболочка формируется из вещества, движение которого не определяется гравитационным полем аккретора. Вещество оболочки принадлежит двойной системе в целом, но не ее компонентам в отдельности.

Сплошной линией на рис. 11.1 ограничены плотные части оболочки, с  $\rho > 5 \cdot 10^{-8} \rho_{L_1}$ . Наиболее заметной деталью течения на рис. 11.1 является протяженный шлейф вещества, истекающего из окрестности диска через точку  $L_3$ . Плотность его достаточно велика по сравнению с плотностью вещества оболочки. Вещество шлейфа имеет достаточную скорость для того, чтобы газ мог покинуть расчетную область. Непосредственно перед диском (вверху на рис. 11.1) можно видеть отошедшую ударную волну. Кроме отошедшей ударной волны с противоположной стороны диска (внизу на рис. 11.1) наблюдается турбулентный след (закрученный под действием силы Кориолиса), аналогичный «дорожке Кармана» в задачах обтекания твердого тела. Кроме перечисленных выше элементов в течении можно выделить два вихря с центрами в точках Лагранжа  $L_4$  и  $L_5$ . Потенциал Роша имеет максимум в этих точках и вещество стремится переместиться в направлении от точек  $L_4$ ,  $L_5$ , закручиваясь под действием силы Кориолиса, что приводит к образованию двух крупномасштабных вихрей с центрами в данных точках.

На рис. 11.2 изображены изолинии плотности в экваториальной плоскости системы полученные по результатам расчетов для четырех

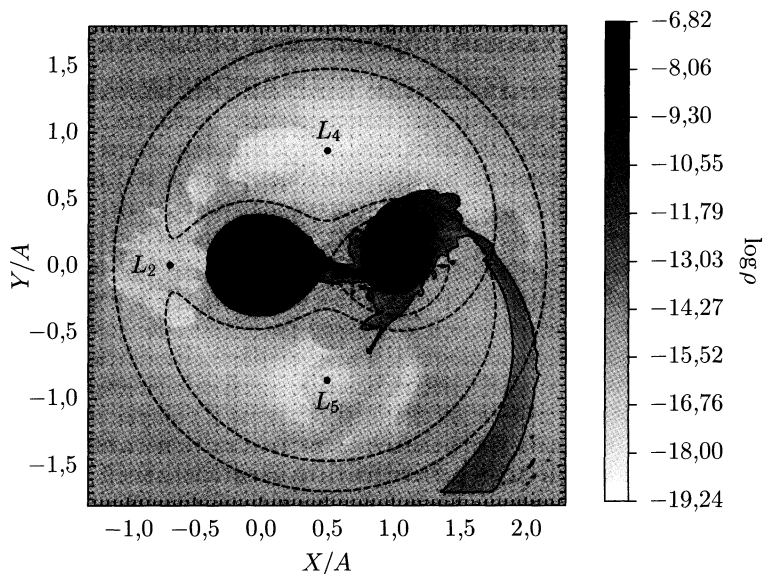


Рис. 11.1. Структура общей оболочки тесной двойной системы, находящейся в стационарном режиме аккреции. Показано распределение плотности (в десятичной логарифмической шкале) и векторы скорости в экваториальной плоскости системы. Обозначена звезда-донор (координаты центра масс  $(0, 0)$ ), заполняющая свою полость Роша, и звезда-аккректор (координаты  $(1, 0)$ ). Также на рисунке пунктирными линиями показаны эквипотенциалы Роша и отмечены точки  $L_{1-5}$ . Сплошной линией ограничены области, в которых плотность достаточно велика ( $\rho > 5 \cdot 10^{-8} \rho_{L_1}$ )

моментов времени, покрывающих один орбитальный период. Структура течения изображена в системе координат неподвижного наблюдателя. Показанная область включает в себя аккректор (в центре), часть звезды-донора, струю вещества из точки  $L_1$ , аккреционный диск и непосредственно примыкающие к нему элементы течения — отошедшую ударную волну, шлейф выбрасываемого вещества и турбулентный след за диском. Также внутри диска черными точками обозначены апоастры (точки наибольшего удаления от аккректора) линий тока.

На рисунках можно выделить ряд элементов структуры течения, формирование которых обусловлено влиянием общей оболочки — отошедшую ударную волну, шлейф вещества из окрестности точки  $L_3$ , турбулентный след за аккреционным диском. Однако начнем наш анализ с рассмотрения поведения прецессионной спиральной волны. Как было показано в предыдущей главе, прецессионная волна формируется во внутренней области аккреционного диска, свободной от газодинамических возмущений, таких как приливные ударные волны или «горячая линия». В этой области силы, связанные с градиентом газового давления, становятся достаточно малыми по сравнению

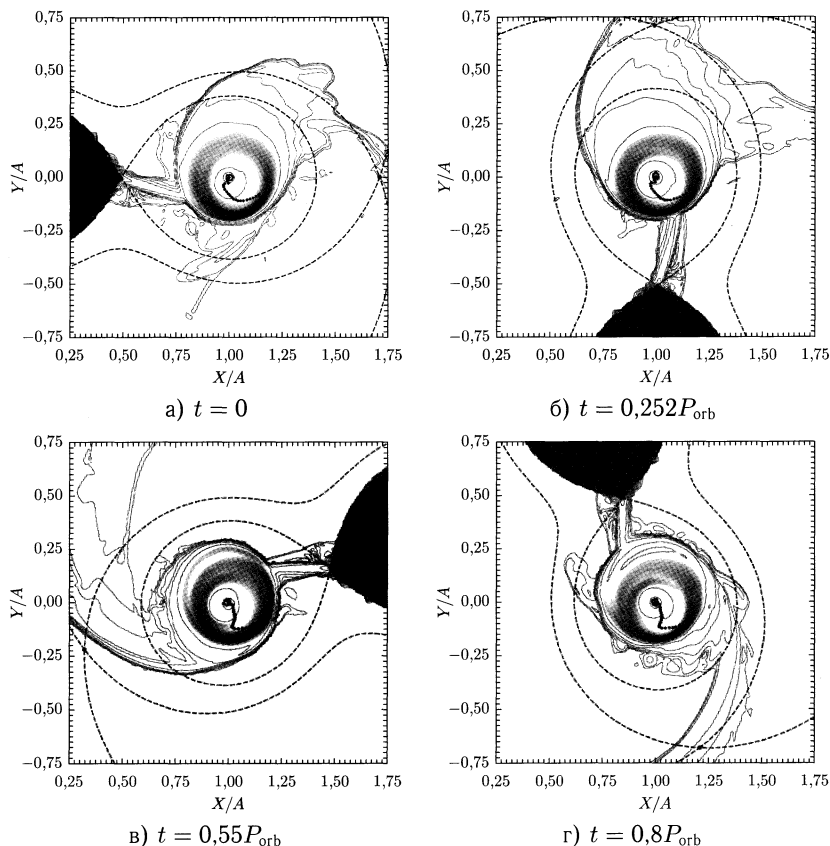


Рис. 11.2. Структура течения в системе координат неподвижного наблюдателя для различных моментов времени. Показан аккректор (кружок в центре), часть звезды-донора, струя вещества из точки  $L_1$ , аккреционный диск и непосредственно примыкающие к нему элементы течения — отходящая ударная волна, шлейф выбрасываемого вещества и турбулентный след за диском. Во внутренних частях диска точками показаны апоастры линий тока, формирующие спиральную волну

с силами гравитации, которые фактически и определяют структуру течения вещества в данной части диска. Формируемые под действием этих сил линии тока в диске имеют форму эллипсов, содержащих в одном из фокусов звезду-аккректор. Несферичность гравитационного поля приводит к смещению линии апсид каждой линии тока, заставляя ее «прецессировать» в системе координат неподвижного наблюдателя. Период прецессии каждой линии тока достаточно велик (для системы с отношением масс  $q = 0,93$  период прецессии внешней линии тока составляет  $\sim 20P_{\text{orb}}$ ) и падает при увеличении размера ее большей полуоси. Так как пересекающихся линий тока в газовом диске быть

не может, линии тока сталкиваются, образуя спиральную структуру. Эта спиральная волна плотности в диске отчетливо видна на рис. 11.2. Следует обратить внимание на то, что волна в системе координат неподвижного наблюдателя практически неподвижна на временах порядка одного орбитального периода.

Как показывает численное моделирование, внешний конец прецессионной волны доходит, практически, до края аккреционного диска. Наличие в диске прецессионной волны определяет его форму — аккреционный диск является эллиптическим, при этом наиболее удаленная от аккретора часть диска (его апоастрон) является достаточно плотной, так как в ней находится внешняя оконечность прецессионной спиральной волны. Так как положение «апоастрона» определяется положением прецессионной волны, его ориентация относительно прочих элементов течения двойной системы (таких, как струя вещества из  $L_1$ , приливная волна, отошедшая ударная волны и пр.) будет циклически меняться на временах порядка  $P_{\text{orb}}$ . Дело в том, что в системе координат наблюдателя волна (а следовательно и значительная часть диска) будет практически неподвижна, в то время как остальные элементы течения будут менять свое положение из-за орбитального вращения системы.

Изменение положения «апоастрона» диска относительно системы приводит к периодическому смещению отошедшей ударной волны, которая образуется в результате столкновения набегающего потока с краем диска. На рис. 11.3 показана структура течения для двух моментов времени:  $a$  — когда диск повернут апоастроном к волне и отошедшая волна наиболее удалена от аккретора и  $b$  — когда диск повернут апоастроном от волны, что соответствует максимальному ее приближению к аккретору.

Рассматривая поле скоростей в системе можно отметить, что подпитка внешних частей общей оболочки осуществляется только за счет истечения вещества через окрестность точки  $L_3$ . Во всех остальных областях потоки вещества направлены либо к аккретору, либо к звезде-донору и не вносят дополнительного вклада в наполнение оболочки. Поток вещества через окрестность  $L_3$  складывается из двух частей — части набегающего потока, возникающего за счет движения системы относительно оболочки, и вещества покинувшего аккреционный диск и околосовое гало. Плотность в аккреционном диске и гало на порядки величины выше плотности набегающего потока, и формирование общей оболочки системы происходит, в основном, за счет вещества аккреционного диска и околосового гало.

Чтобы покинуть полость Роша аккретора и стать частью общей оболочки вещество диска должно получить дополнительный угловой момент. В рассматриваемой модели вещество может получить момент двумя путями — за счет диссипативных процессов, отнимая его у аккрецирующегося вещества, либо под действием сил газового давления. Последний механизм реализуется при взаимодействии двух сталкивающихся потоков, образующих отошедшую ударную волну. Как следует

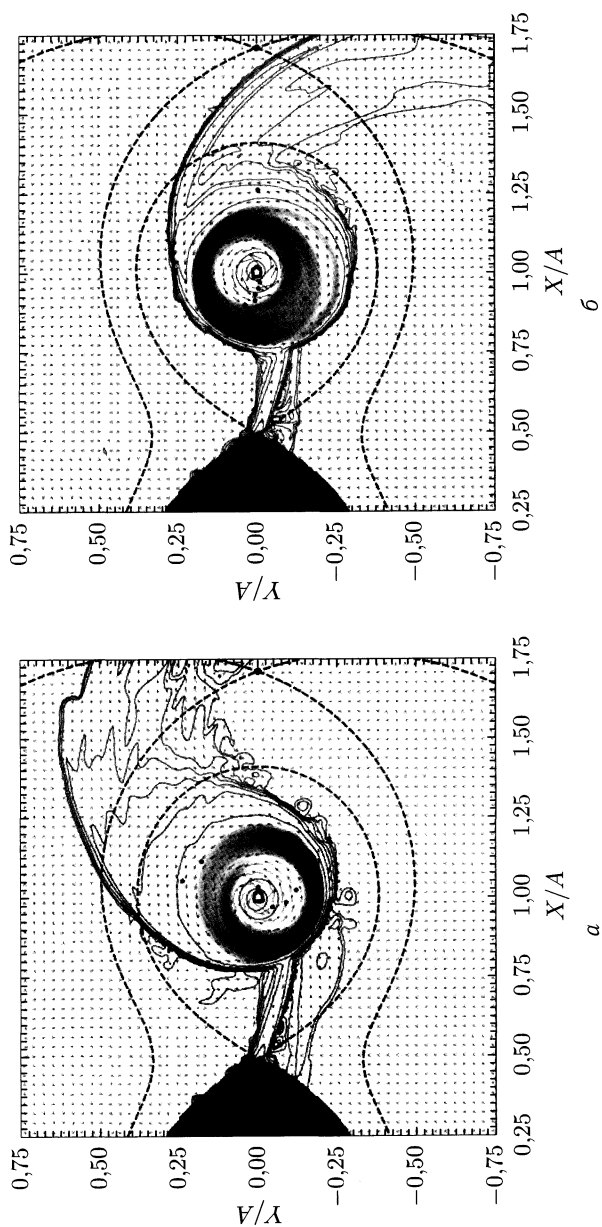


Рис. 11.3. Структура течения для двух крайних положений отошедшей ударной волны, соответствующих максимальному удалению (а) и приближению (б) к аккректору. Обозначения те же, что и на рис. 11.2. Векторами показано поле скоростей

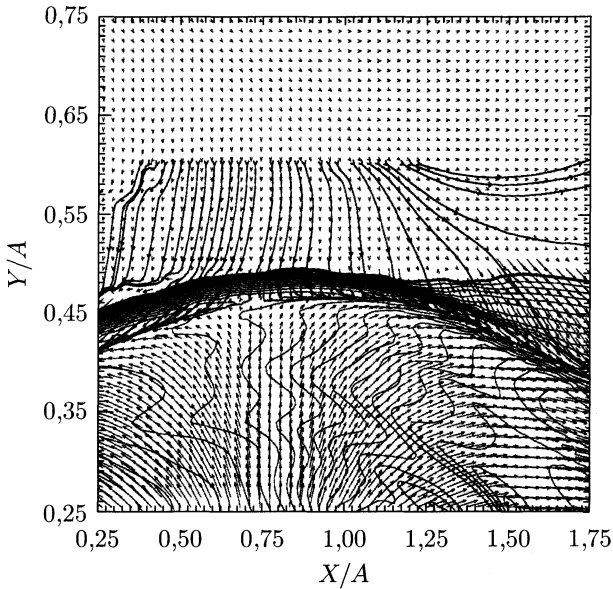


Рис. 11.4. Разделение набегающего потока на отошедшей ударной волне. Часть потока движется к точке  $L_1$  (влево) передавая веществу диска угловой момент. Другая часть движется в сторону точки  $L_3$ , отнимая угловой момент у вещества диска. Показаны изолинии плотности, векторы скорости и линии тока в окрестности «точки лобового столкновения»

из результатов расчетов (рис. 11.4), набегающий поток разделяется на две части, огибающие диск с двух сторон. Точка, в которой происходит разделение — точка лобового столкновения потоков определяет, какая часть вещества потока направится в сторону  $L_3$ , отнимая угловой момент у вещества диска (так как движется противоположно движению вещества в диске), а какая — в сторону  $L_1$ , передавая веществу диска угловой момент. Соответственно, положение точки лобового столкновения будет определять скорость передачи углового момента потоку диску и околосдисковому гало и темп потери ими вещества. Изучение результатов расчетов картины течения в различные моменты времени показывает, что точка лобового столкновения смещается (приближается/удаляется относительно точки  $L_3$ ) на характерных временах порядка одного орбитального периода. Это является следствием периодического изменения относительного положения эллиптического диска и набегающего потока, что должно приводить к неравномерности истечения вещества через окрестность  $L_3$ .

На рис. 11.5 показана зависимость величины потока вещества, покидающего полость Роша аккректора через окрестность точки  $L_3$  от фазы. Фаза  $t = 0$  соответствует моменту, когда апоастрон аккреционного диска повернут в сторону звезды-донора к точке  $L_1$ . Видно,

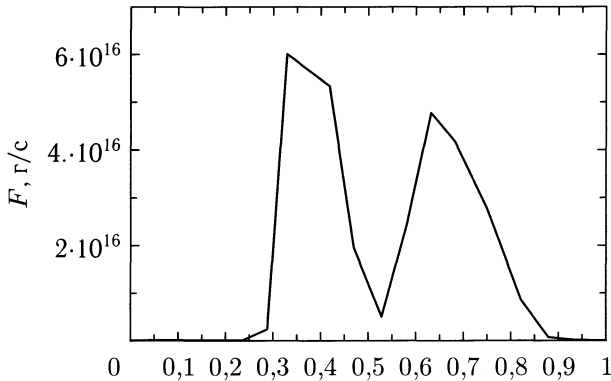


Рис. 11.5. Зависимость потока вещества через окрестность точки  $L_3$  от фазы

что в окрестности точки  $L_3$  происходят периодические выбросы вещества, разделяемые промежутками времени, в течение которых потока вещества наружу нет совсем. Кроме того, сами выбросы являются бимодальными, состоящими из двух четко разделенных пиков.

Для объяснения двугорбого профиля на рис. 11.5 рассмотрим течение вблизи  $L_3$  более подробно. На рис. 11.6 схематически показаны 6 фаз, которые система последовательно проходит в течение орбитального периода. На схеме тонкими линиями обозначены полость Роша аккректора и эквипотенциаль Роша, проходящая через  $L_3$ , показан эллиптический аккреционный диск, отошедшая ударная волна и точка лобового столкновения. Стрелками обозначено направление движения вещества в различных областях течения. В начальный момент времени  $t = 0$  (рис. 11.6 а), аккреционный диск повернут выступающей частью — «апоастроном» к точке  $L_1$ , и отошедшая волна почти полностью перекрывает область вблизи точки  $L_3$  (обозначенную на рисунке А), мешая формированию потока вещества в общую оболочку системы. Точка лобового столкновения при этом расположена близко к  $L_1$  и передача углового момента диску недостаточна для эффективного наполнения области А веществом. В процессе перехода к фазе, изображенной на рис. 11.6 б, «апоастроном» диска перемещается по часовой стрелке, сдвигая отошедшую ударную волну в направлении вращения системы. Через время  $\sim 0,25P_{\text{orb}}$  «апоастроном» диска оказывается повернут навстречу отошедшей волне, что соответствует ее максимальному удалению от аккректора. Под действием градиента давления область А заполняется веществом. Смещение плотных частей диска и околодискового гало в сторону  $L_3$  приводит к одновременному смещению и точки лобового столкновения к  $L_3$ , приводя к более эффективной передаче момента веществу диска и, как следствие, к более быстрому заполнению области А. При дальнейшем повороте «апоастронома» диска точка лобового столкновения смещается еще больше в сторо-

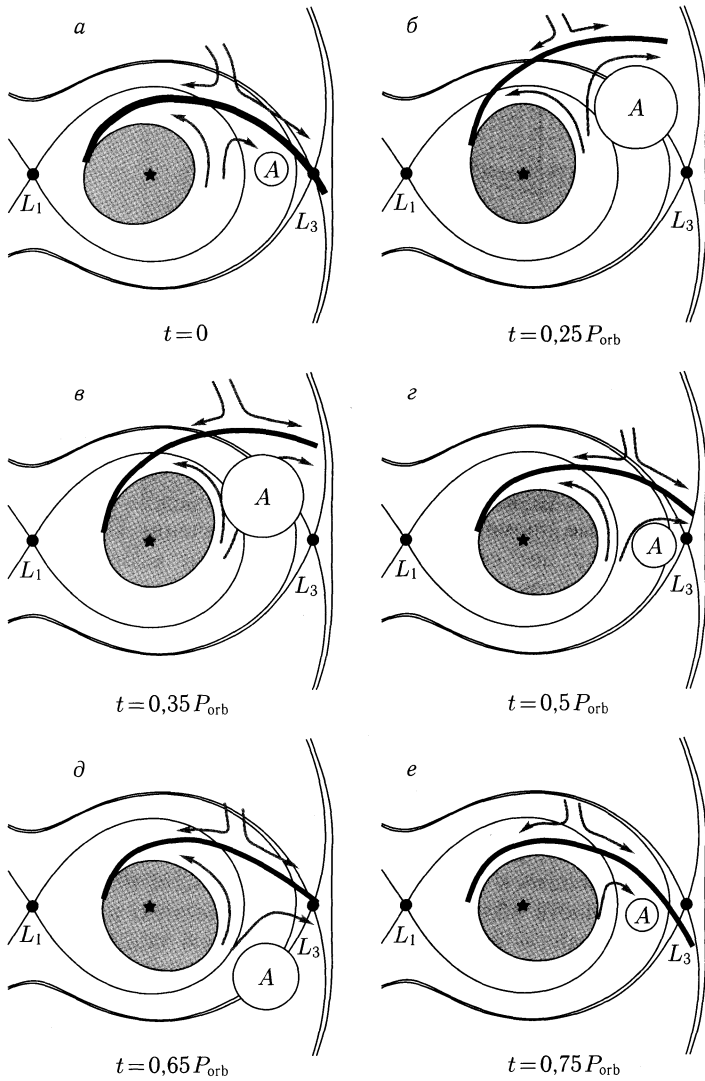


Рис. 11.6. Схематическое изображение структуры течения на различных моментах времени. Показана полость Роша аккретора, эквипотенциаль Роша проходящая через  $L_3$  и аккреционный диск. Буквой  $A$  обозначена область, в которой происходит накопление вещества. Стрелками обозначено направление течения в диске и набегающем потоке. Положением стрелок обозначена точка лобового столкновения потоков

ну  $L_3$ . Кроме того, при приближении апоастрона диска к  $L_3$  более плотные части диска и околодискового гало оказываются максимально приближенными к области истечения. Все это приводит к дальнейшему



росту потока вещества. Однако, по мере того как диск поворачивается апоастроном к  $L_3$ , отошедшая волна начинает подходить ближе к аккретору и перекрывать область истечения, смещая зону  $A$  от  $L_3$  в сторону противоположную вращению системы. Противодействие двух процессов приводит к тому, что пик потока расположен между  $t = 0,25P_{\text{orb}}$  (когда волна максимально отходит от аккретора) и  $t = 0,5P_{\text{orb}}$  (когда апоастрон и точка лобового столкновения максимально сдвинуты к  $L_3$ ) на  $t \sim 0,35P_{\text{orb}}$ . Положение элементов течения, соответствующее максимуму потока, показано на панели рис. 11.6 *в*. После прохождения фазы  $z$ , когда апоастрон повернут к  $L_3$ , волна подходит еще ближе к аккретору. Плотность вещества в зоне  $A$  начинает падать, а точка лобового столкновения смещается в сторону  $L_1$ . С формальной точки зрения, это означает, что поток в общую оболочку должен продолжать уменьшаться. Тем не менее, из рис. 11.5 видно, что поток имеет второй пик, смещенный относительно первого на  $\sim 0,3P_{\text{orb}}$ . Положение элементов течения, соответствующее второму пику ( $t \sim 0,65P_{\text{orb}}$ ), показано на рис. 11.6 *д*. Возникновение второго пика связано с тем, что приближение отошедшей ударной волны к аккретору (минимальное расстояние от аккретора приходится на момент времени  $t \sim 0,75P_{\text{orb}}$ , когда апоастрон повернут от волны) приводит к смещению все еще достаточно плотной области  $A$  вниз навстречу вращению системы. После того как область  $A$  достигнет эквипотенциали, проходящей через  $L_3$ , поток вещества во внешние слои общей оболочки начинает возрастать, приводя к формированию второго пика. Максимум второго пика приходится приблизительно на середину между фазами  $z$  и  $e$  рис. 11.6. Отметим, что помимо остатков вещества из зоны  $A$ , выдавливаемых волной, существенный вклад в поток вносит и вещество, сорванное с «апоастро́на» диска под действием силы Кориолиса. Сила Кориолиса постоянно действует на все вещество аккреционного диска. Однако практически везде вещество, сорванное с края диска под действием силы Кориолиса, возвращается обратно в диск или струю под действием набегающих потоков. Лишь в небольшом промежутке времени, когда диск находится в положении между фазами  $z$  и  $e$  сила Кориолиса становится доминирующей и вещество может покинуть диск под ее действием. При этом плотность в области отрыва вещества повышена, так как там находится «апоастрон» диска, что существенно усиливает эффект. После перехода в фазу  $e$  истечение прекращается и далее, в течение половины орбитального периода истечение вещества практически отсутствует.

Резюмируя представленные результаты, можно сделать вывод, что общая оболочка тесной двойной звезды пополняется за счет периодических выбросов вещества аккреционного диска через окрестность точки Лагранжа  $L_3$ . В рассматриваемом механизме формирования общей оболочки положение апоастро́на диска определяется прецессионной волной плотности. Прецессионная волна медленно движется в ретроградном направлении и, следовательно, на каждом новом обороте

апоастрону диска нужно на несколько процентов больший период, чтобы достичь оптимального положения, соответствующего максимуму потока. Таким образом, период выбросов вещества во внешние части общей оболочки на несколько процентов превосходит  $P_{\text{orb}}$ .

## 11.2. Структура оболочки

В предыдущем параграфе было показано, что хорошо коллимированные выбросы, имеющие достаточно высокую плотность, приводят к формированию общей оболочки в ТДС. Для исследования структуры общей оболочки расчетная область в экваториальной плоскости двойной системы была расширена с  $3,4A$  до  $12A$ , что позволило рассмотреть внешние части общей оболочки [434]. Для максимального разрешения особенностей оболочки использовалась сетка с высоким разрешением во внутренней части ( $\sim 3A \times 3A$ ) в экваториальной плоскости системы и неоднородная, с увеличивающимися к границе расчетной области ячейками — во внешней части. В перпендикулярном к экваториальной плоскости направлении также использовалась неоднородная сетка с увеличивающимся к экватору разрешением. Общее количество ячеек составляло  $630 \times 630 \times 40$ .

**11.2.1. Общая картина течения.** На рис. 11.7 показана структура течения в экваториальной плоскости системы после установления квазистационарного решения, при котором общая масса вещества в расчетной области испытывает лишь небольшие колебания вокруг некоторого постоянного значения. Контурами показаны изолинии плотности, стрелками — векторы скорости. На рисунке можно отметить следующие элементы: звезду-донор ( $x = 0,0A, y = 0,0A$ ), заполняющую свою полость Роша, звезду-аккректор ( $x = 1,0A, y = 0,0A$ ), струю вещества из точки Лагранжа  $L_1$ , аккреционный диск, отошедшую ударную волну перед аккреционным диском, плотный спиральный шлейф вещества, истекающего через окрестность точки  $L_3$ , и общую оболочку системы, имеющую сложную структуру.

В структуре общей оболочки можно выделить четыре основные части: внутреннюю область (межкомпонентную оболочку), спиральный шлейф вещества, фрагментированную оболочку, переходящую постепенно в диффузионный диск. Внутренняя часть оболочки, окружающая компоненты системы и аккреционный диск, находится на расстоянии менее  $1,5A$  от центра масс системы. Вещество в ней сильно разрежено и нестационарно. Данная область имеет много газодинамических особенностей, но так как плотность вещества достаточно мала ( $\rho \sim 10^{-15}$  г/см<sup>3</sup>), ее влияние на наблюдательные проявления системы будет невелико. Вторая часть общей оболочки, находящаяся на расстоянии  $\sim 1,5A-7,5A$  от центра масс, представляет собой достаточно плотный ( $\rho \sim 10^{-13}-10^{-11}$  г/см<sup>3</sup>) спиралеобразный шлейф, насчитывающий до полутора витков. Формирующее его вещество выбрасывается

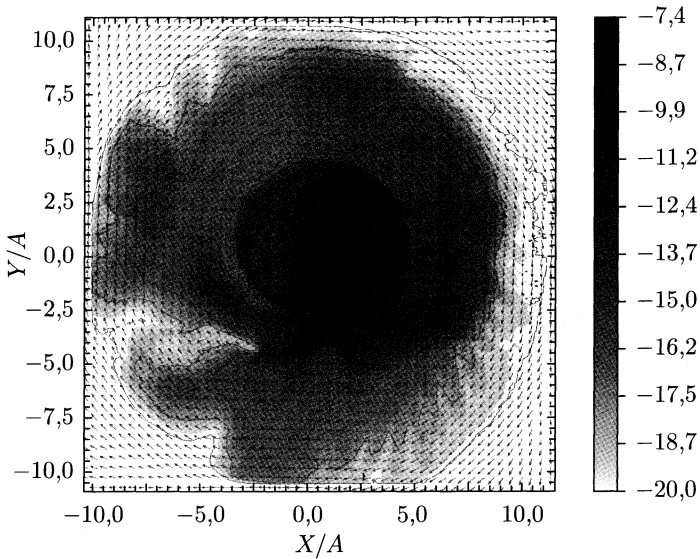


Рис. 11.7. Общая картина течения. Изображены изолинии плотности и векторы скорости в экваториальной плоскости системы. Область включает в себя звезду-донор ( $x = 0,0A, y = 0,0A$ ), заполняющую свою полость Роша, звезду-аккретор ( $x = 1,0A, y = 0,0A$ ), струю вещества из точки Лагранжа  $L_1$ , аккреционный диск, отошедшую ударную волну перед аккреционным диском, плотный спиральный шлейф вещества, истекающего через окрестность точки  $L_3$ , и общую оболочку системы, имеющую сложную структуру.

из системы через окрестность точки  $L_3$ . На расстоянии  $\sim 7A-8A$  спираль разрушается, переходя в фрагментированное, волокнистое кольцо, простирающееся до примерно  $10A$ . На больших расстояниях фрагментированная часть оболочки переходит в протяженный диффузный диск.

**11.2.2. Формирование спирального шлейфа.** Взаимодействие эллиптического аккреционного диска с окружающими его элементами течения приводит к неравномерному оттоку вещества через окрестность точки  $L_3$  (см. рис. 11.5). Поток вещества в оболочку имеет два хорошо выраженных пика, соответствующих двум последовательным выбросам вещества, совершаемым в течение одного орбитального периода.

На левой панели рис. 11.8 показана картина течения на момент первого максимума потока вещества в оболочку (первый пик на рис. 11.5). Изображены изолинии плотности и векторы скорости в области, включающей в себя часть течения вблизи аккреционного диска и области  $L_3$  (обозначена прямоугольником на рис. 11.7). На конце отошедшей ударной волны, расположенной перед аккреционным диском, можно видеть «излом», свидетельствующий о столкновении потока первого выброса

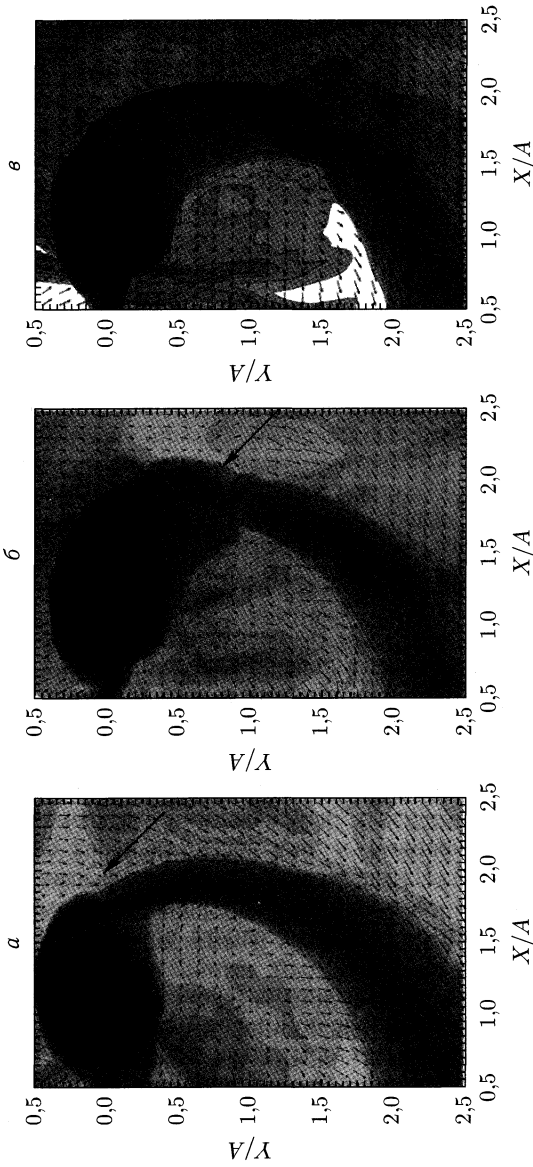


Рис. 11.8. Картина течения в окрестности точки  $L_3$  для трех последовательных моментов времени. Изображены изолинии плотности и векторы скорости в области обозначенной прямоугольником на рис. 11.7. Стрелкой показано уплотнение, вызванное прохождением через поток ударной волны

с окружающим веществом. Скорости в потоке направлены вдоль поверхности отошедшей ударной волны в сторону точки  $L_3$ , плотность газа в потоке  $\rho \sim 10^{-11}$  г/см<sup>3</sup>, скорость  $v \sim 170$  км/с.

На средней панели рис. 11.8 картина течения соответствует моменту формирования второго максимума потока вещества в оболочку. К этому моменту область, расположенная за аккреционным диском, в направлении, противоположном орбитальному движению аккретора, уже заполнена достаточно плотным веществом (с плотностью всего на порядок меньшей, чем в самом диске). Как видно из рисунка, эта область значительно увеличилась в размерах и сместилась дальше в направлении против вращения системы. Векторы скорости практически во всей этой области направлены против вращения системы (вправо-вниз на рисунке), по величине достигают  $v \sim 280$  км/с, плотность  $\rho \sim 10^{-11}$ – $10^{-12}$  г/см<sup>3</sup>. Как первый, так и второй выбросы происходят на расстоянии  $\sim 1,2A$  от центра масс системы, орбитальная скорость в этом месте составляет 400–450 км/с, в лабораторной системе отсчета поток в целом будет направлен по направлению вращения системы, но со скоростью существенно меньшей орбитальной. Следует отметить наличие интересной особенности течения, возникающей за аккреционным диском: поток, сформированный первым выбросом и движущийся вдоль отошедшей ударной волны, сталкивается с потоком, формирующим второй выброс, образуя ударную волну, которую можно видеть на левой и средней панелях рис. 11.8. Сталкивающиеся потоки образуют шлейф из выброшенного вещества, движущийся по спиральной траектории. Шлейф достаточно хорошо коллимирован и имеет уплотнение вызванное прохождением ударной волны (обозначено стрелкой на рис. 11.8). Данное уплотнение существует в потоке довольно продолжительное время, постепенно размываясь (см. правую панель рис. 11.8). При этом, так как выбросы направлены противоположно орбитальному движению аккретора, оно достаточно медленно движется в системе координат неподвижного наблюдателя.

Спиральный шлейф выброшенного вещества медленно уширяется по ходу движения, при этом отчетливо выделяется неоднородный профиль плотности: в середине потока плотность составляет  $\rho \sim 10^{-12}$  г/см<sup>3</sup>, с краю  $\rho \sim 10^{-13}$  г/см<sup>3</sup>. Сечение шлейфа имеет форму близкую к круговой, ширина на первом витке составляет  $\sim 0,5A$ , через один оборот ширина шлейфа в экваториальной плоскости системы достигает  $2A$ – $2,5A$ . В направлении перпендикулярном к экваториальной плоскости системы шлейф также значительно уширяется, с уменьшением  $z$ -компоненты градиента гравитационного потенциала.

**11.2.3. Внутренняя часть оболочки.** На рис. 11.9 показана внутренняя часть общей оболочки (межкомпонентная оболочка) системы, расположенная внутри спиральной структуры-шлейфа. Вещество межкомпонентной оболочки сильно разрежено ( $\rho \sim 10^{-16}$  г/см<sup>3</sup>) и имеет высокую температуру  $\sim 10^5$  К вследствие

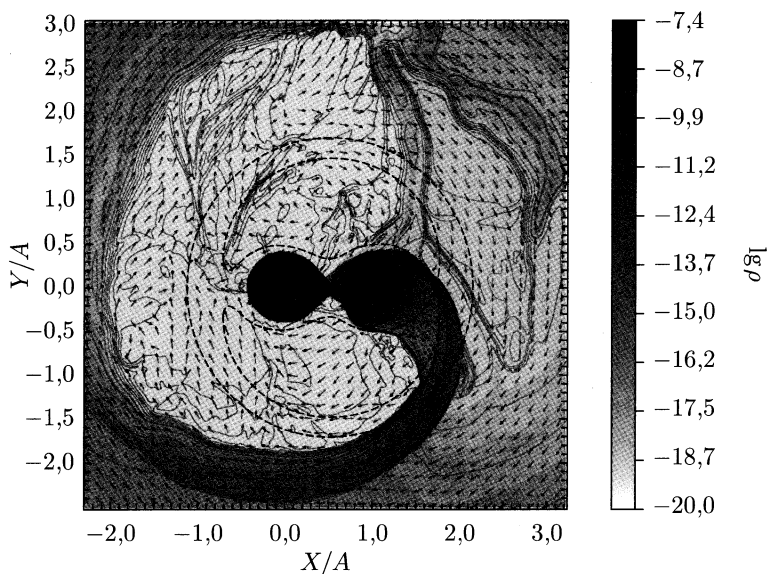


Рис. 11.9. Межкомпонентная оболочка системы. Показаны изолинии плотности и векторы скорости в экваториальной плоскости двойной звезды. На рисунке изображена звезда-донор, звезда-аккректор, аккреционный диск, струя вещества из точки  $L_1$ , отошедшая ударная волна перед аккреционным диском, часть шлейфа вещества, выбрасываемого через окрестность точки  $L_3$ , и внутренняя, разреженная область, взаимодействующая непосредственно со звездой-донором и аккреционным диском. Штриховыми линиями показаны изолинии потенциала Роша

неэффективности радиационного охлаждения при малых плотностях. В то же время вещество спиральной структуры имеет значительно большую плотность ( $\rho \sim 10^{-11} - 10^{-12}$  г/см<sup>3</sup>) и меньшую температуру ( $\sim 10^4$  К). Таким образом, во внутренней части общей оболочки тесной двойной системы возникает ситуация, когда в поле гравитационного потенциала плотное и холодное вещество шлейфа оказывается «над» горячим и разреженным газом (область внутри первого витка спирали), что создает условия для развития неустойчивости Рэлея–Тейлора на внутренней границе спиральной структуры. Различие в тангенциальных скоростях на границе спираль–межкомпонентная оболочка также может приводить к возникновению неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

Возмущение внутренней границы спирального истечения приводит к явлениям, заметно влияющим на структуру течения. Прежде всего, в результате развития неустойчивостей, периодически возникает отток вещества с внутреннего края шлейфа во внутреннюю разреженную полость. В результате этого нестационарного процесса возникают радиальные переемычки во внутренней области общей оболочки,

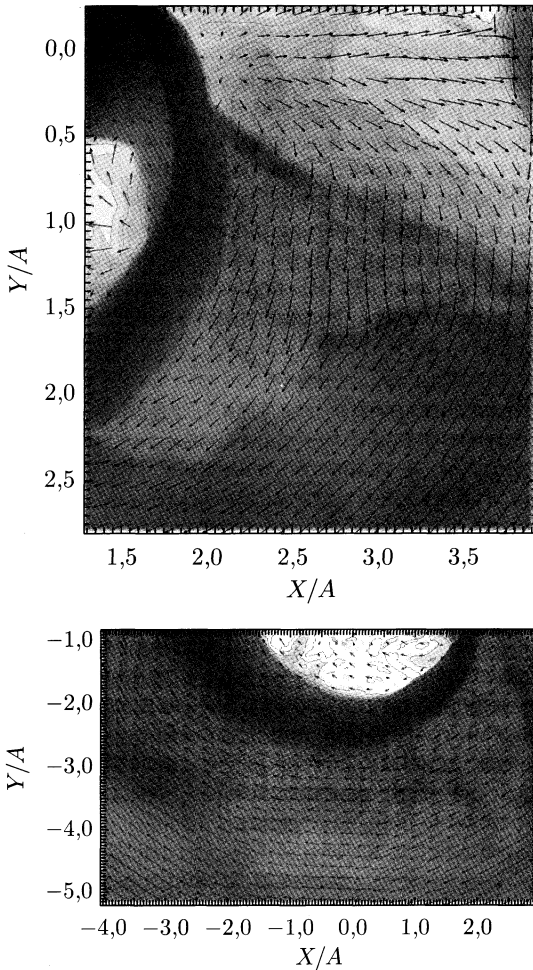


Рис. 11.10. *Верхняя панель:* выход ударной волны, вызванной коллимацией горячего разреженного газа внутренней полости между витками спиральной структуры. *Нижняя панель:* разрушение второго витка спирали

формирующиеся на фазах  $0,5-1,0$ <sup>1)</sup>. На фазах  $0,0-0,5$  перемычки взаимодействуют с присоединенной ударной волной у звезды-донора, что приводит к накоплению на ней вещества и последующему его смещению по фазе в направлении движения потока. Смещение имеет дифференциальный характер и на фазах  $0,25-0,5$  приводит к отрыву присоединенной ударной волны от поверхности звезды-донора.

<sup>1)</sup> Фаза, как обычно, отсчитывается от момента главного минимума в направлении, противоположном вращению системы.

Возникновение перемычек и снос их потоком происходит регулярно, однако четкой периодичности не прослеживается.

Другое явление имеет место при попадании горячего и относительно разреженного вещества из внутренней области общей оболочки в промежутки между первым и вторым витком спирального истечения. Обжатие горячего газа значительно более холодным и плотным веществом спирального истечения приводит к адиабатическому разогреву, генерации ударных волн и интенсивному перемешиванию, что нарушает структуру наименее плотного второго витка вплоть до полного его разрушения. На рис. 11.10 показана структура ударных волн, образующихся в результате коллимации вещества межкомпонентной оболочки.

**11.2.4. Внешняя часть оболочки.** Движение газа в системе определяется двумя основными факторами — градиентами гравитационного потенциала и газового давления. На рис. 11.11 показана баллистическая траектория материальной точки, начальная скорость которой соответствует скорости газа в спирали. Вблизи компонент тесной двойной системы на траекторию выбрасываемого вещества главным образом влияет гравитация. Это подтверждается близостью видимой траектории струи и расчетных баллистических траекторий для разных начальных точек внутри спирального истечения. Спиралеобразность траектории обусловлена движением точки в неинерциальной системе координат, связанной с вращающейся двойной звездой.

Баллистическая траектория при дальнейшем движении не уходит на большое расстояние от центра масс системы, удаляясь от него, максимум, на  $\sim 5A$ . Это говорит о том, что кинетической энергии вещества недостаточно для покидания системы. Соответственно, рано или поздно, баллистическая кривая будет иметь точку самопересечения. В связи с тем, что спиральный шлейф постепенно расширяется, как за счет некоторого начального разброса скоростей, так и под действием диффузии, самопересечение может возникнуть на довольно ранних стадиях. В нашем случае, это происходит уже после полутора оборотов — внутренний край второго витка сталкивается с внешним краем первого.

Выше была рассмотрена структура течения в разреженной межкомпонентной оболочке, непосредственно примыкающей к внутреннему краю спирального шлейфа и было отмечено, что коллимация вещества, попадающего между витками, может приводить к образованию уплотнений и ударных волн и выходу их за пределы спирали на фазах 0,5–0,7. Подобные волны практически не возмущают достаточно плотное вещество первого витка шлейфа, однако приводят к полному разрушению второго, менее плотного витка. После выхода уплотнения или ударной волны, в течение еще  $\sim 3/4$  орбитального периода продолжается разрушение второго витка шлейфа, что приводит к появлению фрагментированной волокнистой структуры на периферии



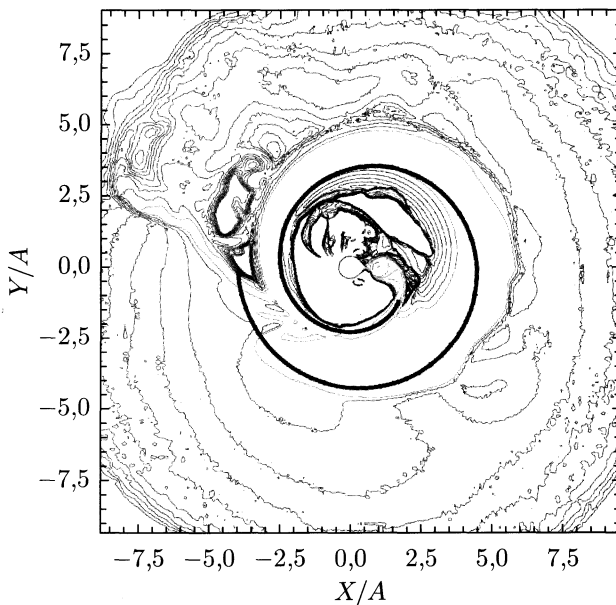


Рис. 11.11. Структура внешней части общей оболочки. Контурными показаны изолинии плотности, жирной кривой — баллистическая траектория материальной точки, начальная скорость которой равна соответствующей скорости внутри шлейфа, выбрасываемого из системы вещества

оболочки. Размеры волокон составляют  $0,5A-1,5A$ , отношение максимальной плотности газа во фрагменте к минимальной  $\rho_{\max}/\rho_{\min} \sim 4-5$ . Далее, вещество продолжает расширяться, двигаясь со скоростями, близкими к локальной кеплеровской скорости. Расширение приводит к размытию фрагментов, так что на внешней части фрагментированной оболочки остаются сгустки размером  $1A-3A$  с гладким профилем плотности, отношение максимальной плотности к минимальной в которых составляет  $\rho_{\max}/\rho_{\min} \sim 1,5-2$ . По мере удаления от двойной системы плотность оболочки уменьшается и сгустки плотности из фрагментированной зоны расплываются под действием диссипативных процессов в равномерное распределение — диффузный диск.

### 11.3. Наблюдательные проявления общей оболочки

Как отмечалось в предыдущем параграфе, в структуре общей оболочки можно выделить следующие основные части: *межкомпонентную оболочку*<sup>1)</sup>, имеющую характерные размеры порядка нескольких  $A$ , *спиральный шлейф*, насчитывающий до полутора

<sup>1)</sup> В англоязычной литературе называемой «circumbinary envelope».

витков, *фрагментированную оболочку*, формирующуюся после распада спирали и состоящую из сгустков плотности с характерными размерами от  $0,5A$  до  $1,5A$ , а также *диффузный диск*, образующийся на больших расстояниях от ТДС.

Внутренняя часть оболочки, непосредственно окружающая компоненты системы и аккреционный диск, находится на расстоянии менее  $1,5A$  от центра масс системы. Вещество в большей части этой области (кроме областей, занятых струей, аккреционным диском и окрестности отошедшей ударной волны) сильно разрежено ( $\rho < 10^{-15}$  г/см<sup>3</sup>), нестационарно и имеет много газодинамических особенностей. В силу малой плотности, влияние ее на наблюдательные проявления системы должно быть невелико.

Вторая часть общей оболочки, находящаяся на расстоянии  $\sim 1,5-7,5A$  от центра масс системы, представляет собой достаточно плотный ( $\rho \sim 10^{-11}-10^{-13}$  г/см<sup>3</sup>) спиральный шлейф, насчитывающий полтора витка. Шлейф формируется за счет вещества, выбрасываемого из системы через окрестность точки  $L_3$  и имеет характерный размер в экваториальной плоскости  $2-2,5A$ . На расстоянии  $\sim 7-8A$  спиральная структура разрушается, переходя во фрагментированную оболочку — кольцо, простирающееся до примерно  $10A$ . Плотность сгустков фрагментированной оболочки  $\rho \sim 10^{-13}$  г/см<sup>3</sup>. На больших расстояниях фрагментированная оболочка переходит в протяженный диффузный диск. Благодаря большой протяженности и высокой плотности, эти элементы могут иметь существенную оптическую толщину и оказывать влияние на наблюдаемую кривую блеска системы [435].

На рис. 11.12 показана зависимость колонковой плотности от фазы для разных углов наклона. Плотность на этом и последующих рисунках указана для модели с темпом массообмена  $\dot{M} = 10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$ . Расчет значений колонковой плотности проводился путем интегрирования плотности вдоль луча зрения от границы счетной области до внутренней границы межкомпонентной оболочки (находящейся на расстоянии  $> 1,5A$  от центра масс системы). Отсчет фаз ведется в направлении, противоположном направлению вращения системы, от момента главного минимума. Как видно из рис. 11.12, средняя плотность быстро падает с уменьшением угла наклона: при  $i = 90^\circ$  значение плотности в максимуме достигает  $\sim 2,28$  г/см<sup>2</sup>, при  $i = 87,5^\circ$  —  $\sim 0,2$  г/см<sup>2</sup>, при  $i = 85^\circ$  —  $\sim 0,07$  г/см<sup>2</sup>, при  $i = 83^\circ$  —  $\sim 0,02$  г/см<sup>2</sup>. Таким образом, при изменении наклона на  $7^\circ$ , значение колонковой плотности уменьшается на два порядка. Как и следовало ожидать из распределения плотности, наибольший вклад в колонковую плотность вносит основание спирального шлейфа, вытекающего из окрестности точки  $L_3$ , что обуславливает скачек на фазе  $\varphi = 0,5$ . Амплитуда скачка может составлять до двух порядков по величине. На фазах  $\varphi \sim 0,6-0,7$  колонковая плотность уменьшается приблизительно на порядок величины, по сравнению с максимумом. Колебания колонковой

плотности на  $\varphi > 0,75$  соответствуют, по видимому, вкладу сгустков фрагментированной оболочки.

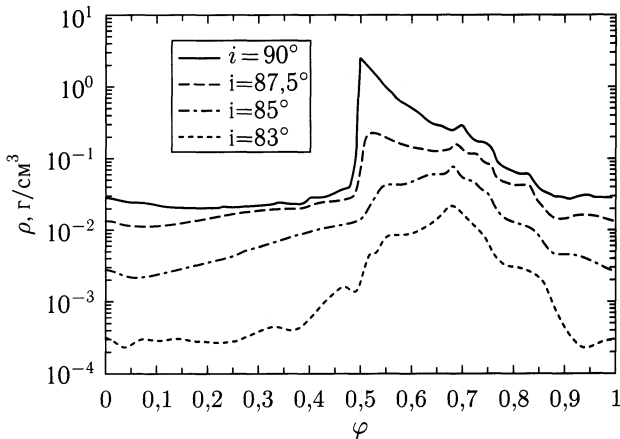


Рис. 11.12. Зависимость колонковой плотности общей оболочки от фазы. Показаны четыре графика, для разных углов наклона системы  $i = 90$ ;  $87,5$ ;  $85$  и  $83$  градусов.

На рис. 11.13 показана зависимость колонковой плотности от времени на фазе  $\varphi = 0,625$  для наклона  $i = 90^\circ$  в течение одного орбитального периода. На рис. 11.13 отчетливо видна сильная нестационарность колонковой плотности в заданном направлении: максимум  $\rho$

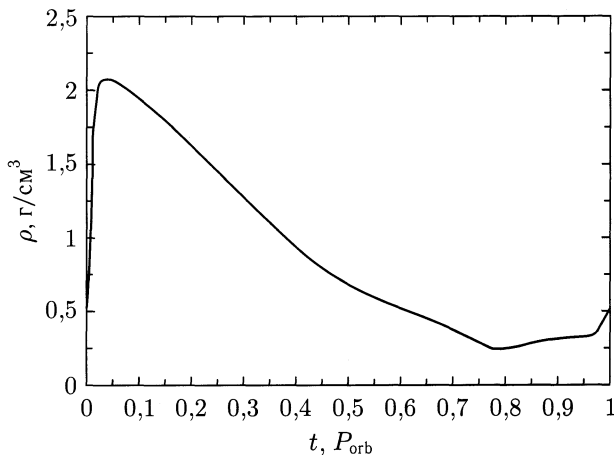


Рис. 11.13. Зависимость колонковой плотности от времени на фазе 0,625 при наблюдении системы с ребра

имеет значение  $\sim 2,0 \text{ г/см}^2$ , слабый вторичный максимум ( $t \sim 0,4P_{\text{orb}}$ ), отражающийся в изменении наклона кривой, имеет величину  $\rho \sim \sim 0,7 \text{ г/см}^2$ , а минимум —  $\rho \sim 0,2 \text{ г/см}^2$ . Наличие двух максимумов обусловлено бимодальностью выбросов, формирующих общую оболочку. Изменение плотности вызвано движением вещества в шлейфе.

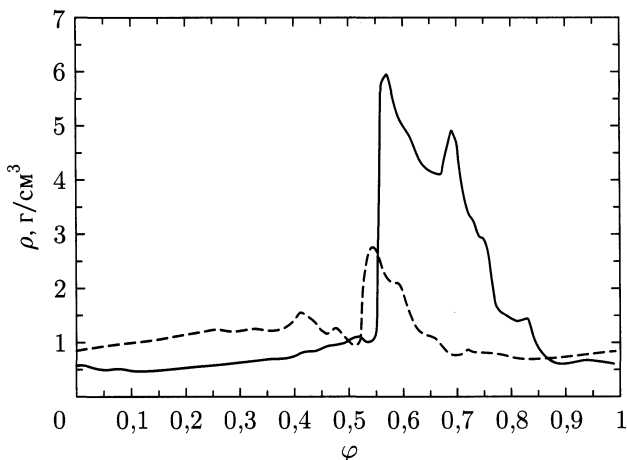


Рис. 11.14. Зависимость колонковой плотности общей оболочки от фазы для двух моментов времени, соответствующих максимуму (сплошная линия) и минимуму (пунктирная линия) потока вещества через окрестность точки  $L_3$

На рис. 11.14 приведена зависимость колонковой плотности от фазы для наклонения  $i = 90^\circ$  для двух моментов времени, соответствующих началу и окончанию выброса вещества через окрестность точки  $L_3$  (максимум и минимум колонковой плотности на рис. 11.13).

Из этого рисунка следует, что в зависимости от ориентации точки выброса по отношению к наблюдателю колонковая плотность может меняться в 100 раз и, соответственно, вызывать существенные изменения наблюдаемой светимости. Для иллюстрации влияния нестационарности оболочки на светимость системы на рис. 11.15 показаны модельная кривая блеска ТДС в континууме, и две кривые блеска с учетом поглощения в оболочке, соответствующие двум моментам времени, когда поток вещества через окрестность  $L_3$  максимален и минимален в момент вторичного минимума. При расчете кривой блеска звезда-донор рассматривалась как шар с эквивалентным радиусом Роша и температурой  $T_d = 5000 \text{ К}$ , радиус аккректора  $R_a = 0,1A$ , температура аккректора  $T_a = 10000 \text{ К}$ , учтен эффект потемнения к краю с коэффициентом 0,6. Донор и аккректор с аккреционным диском считались единым центральным источником с модельной кривой блеска, излучение аккреционного диска и ударных волн в системе отдельно не учитывалось.

На рис.11.16 показана кривая блеска в момент максимума выброса через окрестность  $L_3$  в направлении на наблюдателя для систем

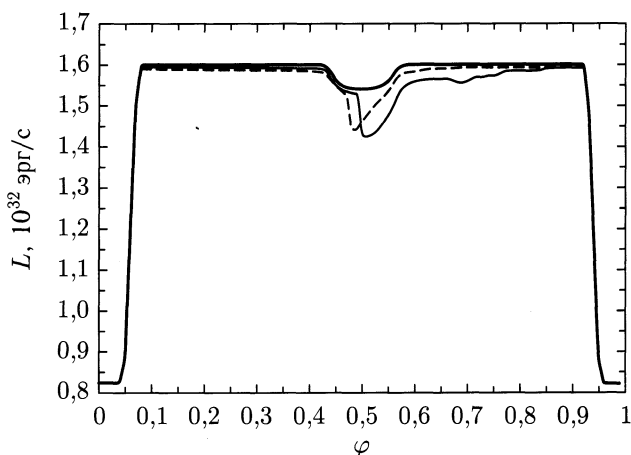


Рис. 11.15. Модельная кривая блеска с учетом поглощения в оболочке. Толстой сплошной линией показана идеальная кривая блеска, без учета поглощения в оболочке. Тонкая сплошная линия соответствует кривой блеска, построенной с учетом поглощения в оболочке в момент, когда поток вещества через точку  $L_3$  максимален в направлении на наблюдателя. Тонкая штриховая линия построена для момента, когда поток минимален. Угол наклона  $i = 90^\circ$

с темпами массообмена  $10^{-7} M_\odot/\text{год}$  и  $10^{-6} M_\odot/\text{год}$ . Как видно из рис. 11.16, наличие общей оболочки у двойных систем с большим темпом массообмена может значительно исказить кривую блеска.

На рис. 11.17 приведены зависимости оптической толщины общей оболочки от фазы в линиях  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$  в момент максимума выброса для системы с темпом  $\dot{M} = 10^{-8} M_\odot/\text{год}$ . Видно, что на определенных фазах оптическая толщина достигает нескольких единиц, что свидетельствует о том, что для систем с  $\dot{M} > 10^{-8} M_\odot/\text{год}$  влияние поглощения в оболочке на кривую блеска может быть определяющим.

Плотность общей оболочки зависит от количества вбрасываемого в нее вещества, которое можно оценить по формуле  $\dot{M}(1 - \dot{M}_a/\dot{M})$ , где  $\dot{M}$  — темп массообмена,  $\dot{M}_a$  — темп аккреции,  $\dot{M}_a/\dot{M}$  — эффективность аккреции. Эффективность аккреции зависит от скорости отвода углового момента. В рассматриваемой численной модели значение параметра Шакуры-Сюняева  $\alpha$  составило  $\sim 0,01$ , что обусловило эффективность аккреции  $\sim 30\%$ . Как показало моделирование, при принятом уровне эффективности аккреции и при темпе массообмена  $\dot{M} > 10^{-8} M_\odot/\text{год}$  общая оболочка в экваториальной плоскости системы оказывается оптически толстой и ее наличие должно быть учтено при интерпретации наблюдений.

Анализ вертикальной структуры общей оболочки позволяет сделать вывод о том, что оболочка имеет форму диска с отношением высоты к радиусу  $H/r \simeq 0,09-0,1$ . Это соответствует раствору между границей диска оболочки и экваториальной плоскостью системы порядка  $5^\circ$ .

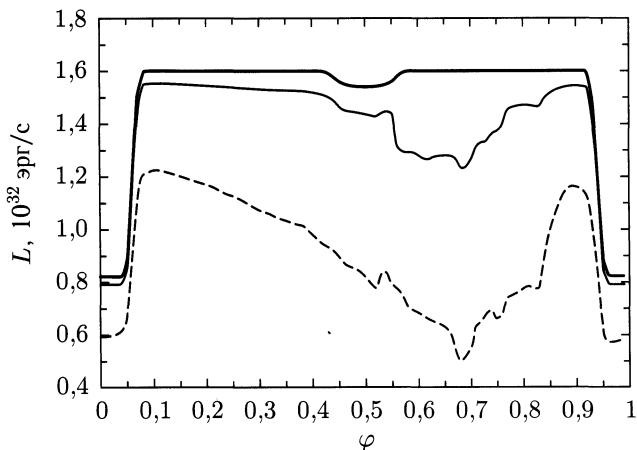


Рис. 11.16. Модельная кривая блеска с учетом поглощения в оболочке для систем с большим темпом массообмена. Толстая сплошная линия соответствует модельной кривой без учета поглощения, тонкая сплошная — с учетом поглощения в оболочке для системы с  $\dot{M} = 10^{-7} M_{\odot}/\text{год}$ , штриховая линия — системе с  $\dot{M} = 10^{-6} M_{\odot}/\text{год}$ . Кривые построены для момента максимума потока через окрестность  $L_3$  в направлении на наблюдателя. Угол наклона  $i = 90^\circ$

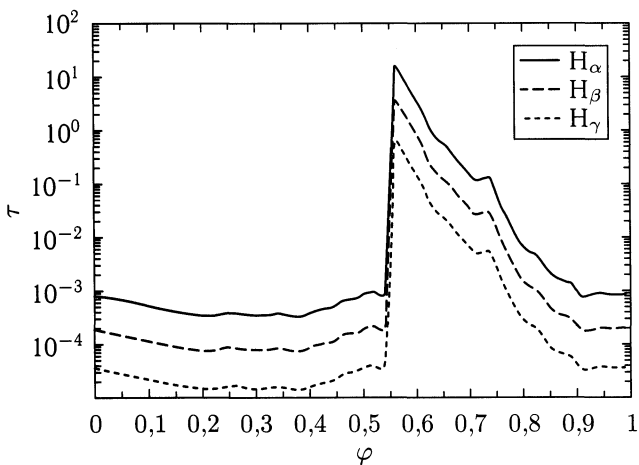


Рис. 11.17. Оптическая толщина оболочки для центральных частот линий  $H_{\alpha}$ ,  $H_{\beta}$ ,  $H_{\gamma}$  в момент максимума выброса для системы с темпом  $\dot{M} = 10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$

Учитывая сильную зависимость колонковой плотности от наклона (см. рис.11.12), можно сделать вывод о том, что общая оболочка будет влиять на светимость системы только при углах наклона  $\sim 90 \pm 3^\circ$ .

## 11.4. Влияние потери массы и углового момента на эволюцию двойной звезды

Результаты трехмерных газодинамических расчетов свидетельствуют о том, что в ходе эволюции тесных двойных систем существенная часть потерянного донором вещества должна уходить из системы. Анализ структуры течения вдали от компонентов системы показывает, что уходящее вещество имеет значительные тангенциальные скорости и, следовательно, вместе с веществом из системы уносится угловой момент. Потери вещества и углового момента из системы несомненно должны учитываться в эволюционных моделях двойных звезд.

Физика и эволюция катаклизмических двойных звезд и сходных с ними по характеру эволюции маломассивных источников рентгеновского излучения активно исследуются начиная с конца 60-х годов XX века (см., например, [3, 463–467] и приведенные в этих работах ссылки). В ряде работ, помимо рассмотрения стандартного сценария, когда предполагается, что эволюция определяется потерей системами орбитального углового момента за счет излучения гравитационных волн [11, 468] и замагниченного звездного ветра [469, 470], исследовалось также влияние на эволюцию потери углового момента вместе с веществом, покидающим систему, и перераспределение момента между компонентами и аккреционным диском (например, [471–473]). Однако, в отсутствие газодинамических расчетов обмена веществом в двойных системах упомянутые процессы рассматривались в параметрическом приближении.

По мере появления трехмерных газодинамических расчетов структуры течения на различных стадиях жизни двойной системы возникает хорошая основа для уточнения эволюционных сценариев. Целью этого параграфа является рассмотрение возможных путей учета газодинамических решений в эволюционных сценариях. Следует отметить, что материалы этого параграфа в значительной степени являются методологическими и, в первую очередь, призваны выявить те «подводные камни», с которыми мы столкнулись при попытках использования газодинамических решений в эволюционных моделях [474, 475].

**11.4.1. Основные факторы, определяющие эволюцию двойных звезд.** В качестве момента системы как правило рассматривается только орбитальный момент, т.е. сумма угловых моментов двух звезд, которые считаются материальными точками. Следовательно, в общий момент системы не включаются моменты осевого вращения компонентов системы, момент аккреционного диска (если он есть), момент потоков вещества, имеющих в системе. Также не учитывается отклонение момента донора от момента материальной точки, которое может быть значительным [36]. Такой упрощенный подход является вынужденным, так как включить в расчеты все перечисленные факторы крайне

трудно. В рассматриваемом случае орбитальный момент двойной системы с круговой орбитой равен

$$J = G^{1/2} A^{1/2} \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{1/2}}. \quad (11.1)$$

Согласно общепринятым в настоящее время представлениям, эволюция катаклизмических двойных звезд определяется потерей системой момента посредством излучения гравитационных волн (ИГВ) и/или магнитного звездного ветра (МЗВ) донора, а также обменом веществом между компонентами. В стандартной модели эволюции предполагается, что собственно обмен веществом между компонентами не изменяет момент системы, и его влияние проявляется косвенно — через возможную потерю массы системой и унос углового момента уходящим веществом (ПОТ). Поэтому уравнение для изменения орбитального момента системы можно записать как

$$\frac{dJ}{dt} = \left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)_{\text{ИГВ}} + \left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)_{\text{МЗВ}} + \left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)_{\text{ПОТ}}. \quad (11.2)$$

Рассмотрим отдельные составляющие формулы (11.2).

**1) Потеря момента системой посредством ИГВ.** Изменение орбитального момента системы в результате излучения гравитационных волн дается формулой [476]

$$\left(\frac{\partial \ln J}{\partial t}\right)_{\text{ИГВ}} = -\frac{32}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{A^4}, \quad (11.3)$$

где  $c$  — скорость света. Характерное свойство ИГВ — очень сильная зависимость его интенсивности от величины полуоси орбиты и, соответственно, от орбитального периода. Этот процесс является существенным для короткопериодических систем с орбитальным периодом  $P_{\text{orb}} < 10$  часов, поскольку только в этом случае характерное время потери момента становится меньше возраста Вселенной.

**2) Потеря момента системой посредством МЗВ донора.** В работах [469, 477] был предложен механизм потери углового момента системой посредством МЗВ донора. Если донор имеет конвективную оболочку и, соответственно, поверхностное магнитное поле, то его собственное осевое вращение тормозится магнитным звездным ветром и темп потери углового момента может оказаться существенным даже при малом темпе потери вещества. Последующая синхронизация осевого вращения донора с орбитальным вращением, обусловленная приливным взаимодействием между компонентами, приводит к потере орбитального момента системы и к уменьшению расстояния между компонентами  $A$ . Для учета этого эффекта наиболее часто используется предложенная Фербунтом и Цваном [470] полуэмпирическая



формула, позволяющая определить уменьшение орбитального момента со временем

$$\left(\frac{\partial \ln J}{\partial t}\right)_{\text{МЗВ}} = -0.5 \cdot 10^{-28} C k^2 G \frac{(M_1 + M_2)^2 R_1^4}{M_2 A^5}. \quad (11.4)$$

Здесь  $R_1$  — радиус звезды-донора, а  $k$  — ее гирорадиус,  $C$  — численный коэффициент, определяемый из сравнения теоретических расчетов с наблюдательными данными.

**3) Потеря момента системой при уходе из нее вещества.** В теоретических исследованиях эволюции катаклизмических двойных и родственных им систем возможность потери вещества из системы рассматривалась, как правило, в качестве параметра, варьируя который, удаётся достичь согласия с наблюдениями.

Более определенные предположения делались лишь в случаях, когда рассматривалась эволюция систем, в которых: а) темп присоединения вещества к аккретору (белому карлику) ограничен скоростью горения водорода ( $\sim 10^{-7}$ – $10^{-6}$   $M_{\odot}$ /год), а темп потери вещества донором существенно выше этого предела, но не превышает эддингтоновский предел для карлика, близкий к  $1,5 \cdot 10^{-5}$   $M_{\odot}$ /год (например, [478, 479]); избыток вещества при этом может теряться посредством звездного ветра [480]; б) когда вещество теряется при вспышках на белом карлике (например, [471, 481–483])<sup>1)</sup>. В обоих случаях обычно предполагается, что удельный момент вещества, уходящего из системы, равен удельному моменту аккретора.

Для описания потери массы и момента из системы удобно ввести параметры, характеризующие степень неконсервативности эволюции по массе:

$$\beta = -\frac{\dot{M}_2}{\dot{M}_1} = -\frac{\partial M_2}{\partial M_1} \quad (11.5)$$

и по угловому моменту<sup>2)</sup>:

$$\psi = \frac{\dot{J}}{\dot{M}} / \frac{J}{M} = \frac{\partial \ln J}{\partial \ln M}, \quad (11.6)$$

<sup>1)</sup> В двух последних работах рассматривалась также потеря момента в результате взаимодействия донора с оболочкой, выброшенной новой звездой.

<sup>2)</sup> Вместо  $\psi$  иногда используют значение удельного углового момента, уносимого из системы, в единицах  $\Omega A^2$ , где  $\Omega$  — угловая скорость орбитального обращения:

$$\alpha_{\lambda} = \frac{\dot{J}}{\dot{M}} / \Omega A^2 = \frac{\dot{J}}{\dot{M}} / \frac{J}{\mu} = \frac{q}{(1+q)^2} \psi, \quad \mu = \frac{M_1 M_2}{M}.$$

где  $M = M_1 + M_2$ . В этом случае выражение для потери момента, уносимого уходящим из системы веществом, приобретает вид:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)_{\text{ПОТ}} = (1 - \beta)M_1\psi \frac{J}{M}. \quad (11.7)$$

Непосредственно в расчетах эволюции катаклизмических двойных используется не уравнение для изменения момента со временем, а полученное из него уравнение для изменения со временем полуоси орбиты. Продифференцируем выражение (11.1) для орбитального момента системы и подставим результат дифференцирования в уравнение (11.2) с использованием соотношения  $\dot{M}_2 = -\beta\dot{M}_1$ . Тогда уравнение для изменения полуоси орбиты можно записать как:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\text{ОБ}} + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\text{ПОТ}} + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\text{ИГВ}} + \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\text{МЗВ}}. \quad (11.8)$$

Здесь индекс «ОБ» соответствует изменению  $A$  в результате обмена веществом между компонентами. Отметим, что если в уравнении (11.2) отсутствует слагаемое  $(\partial J/\partial t)_{\text{ОБ}}$ , то в уравнении (11.8) соответствующее слагаемое  $(\partial A/\partial t)_{\text{ОБ}}$  присутствует, что является естественным следствием зависимости орбитального момента как от полуоси орбиты, так и от масс компонентов системы. При консервативном по массе и моменту обмене веществом изменение полуоси орбиты определяется предположением о том, что обмен не изменяет орбитального момента системы. В ходе обмена веществом с удельным моментом донора переносится на аккректор и приобретает в конечном счете удельный момент аккректора. Из предположения о неизменности орбитального момента следует, что если донор менее массивен, чем аккректор, избыточный момент аккрецированного вещества должен поступить в орбитальный, и процесс обмена действует в направлении увеличения полуоси орбиты. Если же донор более массивен, то недостающий момент аккрецированного вещества должен быть позаимствован из орбитального момента, поэтому обмен веществом действует в направлении уменьшения полуоси орбиты.

Численное исследование эволюции катаклизмических двойных представляет собой одновременный расчет эволюции донора и изменения со временем полуоси орбиты двойной системы. Рассмотрим параметры, определяющие временную эволюцию полуоси орбиты. Используя параметры  $\beta$  и  $\psi$ , выпишем формулы для составляющих уравнения (11.8), в которых массы выражены в  $M_{\odot}$ , расстояния — в  $R_{\odot}$ , а время — в годах:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\text{ОБ}} = 2A \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \beta \dot{M}_2, \quad (11.9)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\text{ПОТ}} = -(1 - \beta)A \frac{2M_2(1 - \psi/q) + M_1}{M_1(M_1 + M_2)} \dot{M}_2, \quad (11.10)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\text{ИГВ}} = -1,65 \cdot 10^{-9} \frac{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{A^3}, \quad (11.11)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\text{МЗВ}} = -6,06 \cdot 10^{-7} C \frac{(M_1 + M_2)^2}{M_1} \left(\frac{R_1}{A}\right)^4. \quad (11.12)$$

Следует отметить, что при рассмотрении эволюции системы часто используется эффективный радиус полости Роша  $R_{L_1}$  (определение и основные аппроксимационные формулы для  $R_{L_1}$  приведены в гл. 1). Использование  $R_{L_1}$  при анализе позволяет значительно упростить рассмотрение, поскольку в этом случае легко определить неустойчивый обмен веществом в системе как ситуацию, когда скорость изменения радиуса донора больше скорости изменения эффективного радиуса полости Роша:  $\dot{R}_1 > \dot{R}_{L_1}$ . Соответственно, используя производные радиусов по массе донора  $M_1$ , условие устойчивости обмена веществом в системе имеет вид:

$$\frac{\partial \ln R_1}{\partial \ln M_1} > \frac{\partial \ln R_{L_1}}{\partial \ln M_1}, \quad (11.13)$$

где производную эффективного радиуса полости Роша можно записать как

$$\frac{\partial \ln R_{L_1}}{\partial \ln M_1} = \frac{\partial \ln A}{\partial \ln M_1} + \frac{\partial \ln (R_{L_1}/A)}{\partial \ln M_1}. \quad (11.14)$$

Из (11.14) видно, что изменение среднего радиуса полости Роша с уменьшением массы звезды определяется изменением масс донора и аккретора и расстояния между ними, т. е. зависит от потери системой вещества и момента.

В ряде случаев можно упростить выражение (11.14) и получить аналитические формулы для производной радиуса полости Роша. В частности, в отсутствие потери углового момента из-за излучения гравитационных волн и магнитного звездного ветра, зависимость изменения расстояния между компонентами системы (первое слагаемое формулы (11.14)) от отношения их масс и параметров потери вещества и момента  $\beta$  и  $\psi$  получается из (11.9) и (11.10):

$$\frac{\partial \ln A}{\partial \ln M_1} = \frac{2\psi(1-\beta) + \beta + 2\beta/q - 2q - 1}{1+q}. \quad (11.15)$$

Для второго слагаемого (11.14) используем выражение для  $R_{L_1}$  из гл. 1, предложенное в [33], и получим

$$\frac{\partial \ln (R_{L_1}/A)}{\partial \ln M_1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{(1-\beta)}{1+q}. \quad (11.16)$$

Из (11.15) и (11.16) для полностью консервативного обмена веществом без потери массы и момента из системы ( $\beta = 1$ ) следует:

$$\frac{\partial \ln R_{L_1}}{\partial \ln M_1} = \frac{2}{q} - \frac{5}{3}. \quad (11.17)$$

Из тех же уравнений для так называемой «джинсовской моды» потери массы, когда обмен массой в системе отсутствует, но донор теряет вещество со звездным ветром и оно уходит из системы, унося удельный момент донора ( $\beta = 0$ ,  $\psi = q$ ), получаем:

$$\frac{\partial \ln R_{L_1}}{\partial \ln M_1} = \frac{q/3 - 1}{1 + q}. \quad (11.18)$$

Для случая звездного ветра от аккректора, когда все вещество потерянное донором перетекает на аккректор, но затем покидает систему, унося удельный угловой момент аккректора (здесь нужно формально положить  $\beta = 0$  и  $\psi = q^{-1}$ ), имеем:

$$\frac{\partial \ln R_{L_1}}{\partial \ln M_1} = \frac{2/q - 5q/3 - 1}{1 + q}. \quad (11.19)$$

**11.4.2. Расчет скорости потери углового момента в трехмерных газодинамических моделях.** Приведенный выше анализ показывает, что скорость изменения расстояния между компонентами  $A$  в эволюционных расчетах критическим образом зависят от двух параметров: степени неконсервативности обмена веществом по массе  $\beta$  и угловому моменту  $\psi$ . Значения этих параметров могут быть найдены только посредством трехмерного газодинамического моделирования переноса вещества в двойных системах.

Трехмерные газодинамические расчеты движения газовых потоков в двойных системах, описанные в этой части книги, показывают, что в ходе обмена веществом у двойной звезды образуется общая оболочка и существенная часть потерянного донором вещества действительно уходит из системы. Анализ полученных результатов показывает, что при всех значениях  $q$  массообмен в рассматриваемых двойных системах является неконсервативным и степень неконсервативности составляет  $\beta \sim 0,4-0,6$  для определенных из наблюдений значений  $\alpha$ -параметра. Расчеты течения в трехмерной численной модели показывают также, что вещество покидает систему со значительным угловым моментом.

Однако, проблема определения степени неконсервативности обмена веществом по угловому моменту оказывается более сложной, чем определение степени неконсервативности по массе. Из стационарных газодинамических уравнений во вращающейся системе координат следует уравнение для переноса углового момента:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\lambda + \frac{1}{\rho} \left[ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times (\nabla \cdot \hat{P}) \right]_z = - [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \nabla \Phi]_z, \quad (11.20)$$

где, как обычно,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $\rho$  — плотность,  $\Phi$  — потенциал Роша,  $\Omega$  — орбитальная угловая скорость,  $\hat{P}$  — тензор напряжений,  $\mathbf{r}_c$  — радиус-вектор центра масс системы, а угловой момент  $\lambda$  (в лабораторной системе координат) определяется выражением

$$\begin{aligned}\lambda &= (x - x_c)v_y - yv_x + \Omega [(x - x_c)^2 + y^2] = \\ &= (x - x_c)[v_y + \Omega(x - x_c)] - y(v_x - \Omega y).\end{aligned}\quad (11.21)$$

Запишем уравнение переноса углового момента в дивергентном виде:

$$\nabla \cdot (\rho\lambda\mathbf{v}) + [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times (\nabla \cdot \hat{P})]_z = -\rho[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \nabla\Phi]_z.\quad (11.22)$$

Проинтегрировав это уравнение, получим интегральный закон изменения углового момента:

$$\oint_{\Sigma} \rho\lambda\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\Sigma} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \hat{P} \cdot d\mathbf{S}]_z = \Pi,\quad (11.23)$$

где величина

$$\Pi = \int_V \rho[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \nabla\Phi]_z dV\quad (11.24)$$

выражает изменение углового момента вследствие нецентральности силового поля, определяемого потенциалом Роша. По определению, величина

$$\mathbf{F}_\lambda = \rho\lambda\mathbf{v} + \hat{P} \cdot \mathbf{r}', \quad \mathbf{r}' = (-y, x - x_c, 0)\quad (11.25)$$

есть плотность потока углового момента  $\lambda$ . В результате для стационарного случая имеем:

$$-\int_{\Sigma_1} \mathbf{F}_\lambda \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{F}_\lambda \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Sigma_3} \mathbf{F}_\lambda \cdot d\mathbf{S} - \Pi,\quad (11.26)$$

где  $\Sigma_1$  — граница донора,  $\Sigma_2$  — аккретора,  $\Sigma_3$  — внешняя граница. По аналогии с потоком массы из системы

$$\dot{M} = -\int_{\Sigma_3} \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}\quad (11.27)$$

можно оценить поток углового момента из системы:

$$\dot{J} = -\int_{\Sigma_3} \mathbf{F}_\lambda \cdot d\mathbf{S},\quad (11.28)$$

и использовать его в выражении для параметра неконсервативности эволюции по угловому моменту (11.6).

Использование выражения (11.28) в газодинамических численных расчетах дает значение  $\psi \sim 6$ , что соответствует  $\alpha_\lambda = 0,83$  (см. определение  $\alpha_\lambda$  в сноске в начале этого параграфа) для системы с  $q = 5$

[411], а для двойной системы с  $q = 1$  [410] —  $\psi \sim 5$ , что соответствует  $\alpha_\lambda = 1,25$ . Последнее значение находится в согласии с результатами работы [484], в которой проведены двумерные расчеты двойной системы с равными массами компонентов и получено значение  $\alpha_\lambda = 1,65$ .

Однако использование этих оценок  $\psi$  в эволюционных расчетах показало, что такой темп потери углового момента двойной системой настолько велик, что в большинстве двойных систем обмен веществом быстро становится нестабильным и темп потери массы донором неограниченно возрастает. По-видимому, использование формулы (11.28) для оценки потери углового момента в расчетах эволюции катаклизмических двойных не вполне корректно, поскольку газодинамическая и эволюционные модели плохо стыкуются. В используемой газодинамической модели не учитывается изменение положения звезд с временем, и, следовательно, изменение углового момента газа вследствие нецентрального поля  $\Pi$  не компенсируется соответствующим изменением углового момента звезд.

Использование более общей газодинамической модели, в которой учитывается изменение положения звезд, позволяет корректно оценить изменение углового момента системы в виде интеграла от плотности потока момента через внешнюю границу для замкнутой системы «донор+аккретор+оболочка». Однако, учитывая сложность газодинамических расчетов, такие оценки возможны только для конкретного этапа жизни двойной системы. Более того, полученные газодинамические результаты не могут непосредственно использоваться в стандартных эволюционных моделях, не принимающих во внимание наличие межкомпонентного вещества в системе. Поэтому, перспективным в ближайшем будущем представляется подход, когда на основе газодинамических расчетов разрабатывается упрощенная модель переноса углового момента в системе, и в эволюционных расчетах используются результаты уже этой упрощенной и параметризованной модели. Пример использования такого подхода можно найти в [474, 475].

## ОБМЕН ВЕЩЕСТВОМ В ДВОЙНЫХ СИСТЕМАХ С НЕСИНХРОННЫМ ВРАЩЕНИЕМ КОМПОНЕНТОВ

Используемое в газодинамических расчетах этой части книги предположение, что звезда-донор заполняет свою полость Роша и истечение идет через окрестность точки  $L_1$ , справедливо, если конфигурация системы описывается моделью Роша. Как было показано в гл. 1, одним из важных постулатов модели Роша является предположение о синхронном вращении компонентов системы с орбитальным движением.

Считается, что двойные звезды могут рождаться с довольно большим отклонением собственного вращения компонентов от синхронного (см., например, [25]). По мере того, как звезда эволюционирует, приливные эффекты воздействуют на орбитальное движение системы и собственное вращение звезд, в результате чего орбитальное вращение становится круговым, собственное вращение звезд синхронизируется с орбитальным и, кроме того, оси вращения звезд занимают положение, перпендикулярное к орбитальной плоскости. Начиная с работ [29, 485–489] был построен целый ряд теорий приливной эволюции в двойных системах, предлагающих различные механизмы синхронизации. Общий вывод этих теорий — что синхронизация имеет место, если существует механизм (например, связанный с магнитным полем), жестко связывающий компоненты двойной системы, или если угловой момент эффективно перераспределяется во внешней конвективной оболочке благодаря вязкой диссипации. В случае, если подходящий механизм отсутствует или не действует достаточно долго, а также в случае переходных процессов в эволюции нормального компонента, возможна ситуация несинхронного вращения.

Рассмотрение маломассивных звезд с протяженной внешней конвективной зоной показало, что они достаточно быстро приходят в состояние синхронного вращения (за время  $\sim 10^6$  лет для звезд с  $A/R_1 < 2,6$  [29, 41]). Что же касается звезд с радиативными оболочками, несинхронная фаза может длиться в них более чем  $10^7$ – $10^{10}$  лет [29, 40, 47]. Это означает, что вероятность обнаружения звезд с несинхронным вращением достаточно велика. Действительно, после открытия Ф. Шлезингером несинхронного вращения в спектрально-двойной  $\delta$  Весов в 1909 г. и в затменной двойной  $\lambda$  Тельца в 1910 г. несинхронное

вращение было обнаружено во многих двойных системах различных типов. Более того, во многих двойных звездах вектор собственного углового вращения компонентов не соосен вектору орбитального вращения системы.

В этой главе будет рассмотрено влияние несинхронного вращения на газодинамические решения. Для исследования обмена веществом в двойных звездах принципиально важным является несинхронность вращения звезды-донора. В этом случае вещество, покидающее поверхность звезды, будет иметь другой угловой момент, что должно приводить к изменению картины течения. В случае несинхронного вращения звезды-аккретора определенные изменения также возможны. Более того, для систем с магнитным полем вращение аккретора является критическим параметром (см. гл. 14). Однако, в рассматриваемом случае немагнитных систем, где скорость аккреции определяется параметрами диска, умеренная несинхронность звезды-аккретора не будет приводить к существенным изменениям структуры течения. Именно поэтому в данной главе будут рассмотрены лишь случаи несинхронного вращения звезды-донора.

## 12.1. Полуразделенные двойные системы

Первые попытки исследовать влияние несинхронности вращения звезды-донора на процессы перетекания вещества были выполнены в баллистическом приближении в работах [490–492], однако, учет газодинамических факторов в этих расчетах позволяет получить только качественную картину течения. Корректное рассмотрение картины течения в системах с несинхронным вращением в силу трехмерного характера задачи возможно только в рамках трехмерных газодинамических моделей. Впервые такие расчеты были представлены в работах [493, 494]. К сожалению, в этих работах использовалась упрощенная постановка и не учитывалось изменение формы звезды-донора в случае несинхронного вращения (см. гл. 1), а также не принималось во внимание влияние межкомпонентного газа на структуру течения вблизи звезды-донора. Впервые результаты решения самосогласованной задачи, лишенные недостатков предыдущих моделей, были получены в работах [412, 413].

Для рассматриваемого случая  $\Omega_* \neq \Omega$  приливной горб от воздействия аккретора движется по поверхности звезды-донора. В этом случае вещество звезды будет двигаться по закону, отличному от твердотельного вращения. Кроме того, воздействие силы Кориолиса также будет приводить к отклонению от твердотельного режима вращения. Тем не менее, довольно часто для проведения численных расчетов систем с несинхронным вращением используется предположение о твердотельном вращении. Для этого потенциал  $\Psi_1$  записывается в виде (1.46), и его стационарные точки играют роль точек Лагранжа. В случае двойных систем с синхронно вращающимися компонентами



положение внутренней точки Лагранжа определяется балансом удельных сил гравитационного притяжения к каждому из компонентов и центробежной силы. В случае несинхронного вращения компонентов размеры звезды ограничены вращательной внутренней точкой Лагранжа  $L_1^{rot}$ , положение которой определяется равенством указанных удельных сил и центростремительного ускорения на поверхности звезды. Для быстро вращающихся звезд, имеющих угловую скорость собственного вращения большую, чем орбитальная, расстояние от центра звезды до  $L_1^{rot}$  меньше, чем до  $L_1$  (см. гл. 1). При достижении внутренней точки Лагранжа  $L_1^{rot}$  градиент давления не может быть скомпенсирован, движение частицы по окружности становится невозможным и, как и в синхронном случае, начинается истечение вещества.

Численное решение, полученное при данных предположениях, может рассматриваться только как приближенное. Дело в том, что если в несинхронном случае поверхность звезды описывается поверхностью постоянного потенциала, то твердотельный закон вращения приводит к появлению ненулевой нормальной компоненты скорости на поверхности звезды, что противоречит закону сохранения массы.

Для изучения влияния несинхронности вращения звезды-донора на структуру течения рассмотрим двойную систему с параметрами, типичными для маломассивных рентгеновских двойных и близких к X1822-371 [495, 496]. В расчетах предполагалось, что масса звезды-донора  $M_1 = 0,28 M_\odot$ , а температура газа на его поверхности  $T_1 = 10^4$  К. Звезда-аккректор характеризовалась следующими параметрами:  $R_2 = 0,05 R_\odot$ ,  $M_2 = 1,4 M_\odot$ . Орбитальный период системы  $P_{orb}$  принимался равным 5,56 часов, а расстояние между центрами компонент  $A = 1,97 R_\odot$ . Предполагалось, что скорость вращения звезды-донора в лабораторной системе координат в два раза превышает орбитальную скорость вращения системы.

Трехмерные расчеты проводились как для случая соосного вращения, так и для случая, когда ось вращения звезды не совпадает с осью орбитального вращения. Решение системы уравнений проводилось от произвольно выбранных начальных условий вплоть до получения установившегося режима течения. Для случая несоосного вращения достижение стационарного режима невозможно в силу периодической зависимости граничных условий от времени. Поэтому решение считалось установившимся, когда основные особенности структуры течения повторялись с периодом изменения граничных условий. Форма звезды-донора определялась как эквипотенциаль, проходящая через внутреннюю точку Лагранжа  $L_1^{rot}$ . Граничные условия на поверхности этой звезды определялись в результате решения задачи о распаде разрыва между параметрами газа ( $\rho_0$ ,  $v_0$ ,  $P_0$ ) на поверхности истекающей звезды и параметрами в ближайшей к данной точке поверхности расчетной ячейке. Значения скорости на поверхности звезды-донора задавались в виде

$$v_0 = \Omega_*^{rot} \times r + nc_s, \quad (12.1)$$

где  $\Omega_*^{rot} = \Omega_* - \Omega$  — вектор угловой скорости собственного вращения звезды-донора во вращающейся системе координат,  $c_s$  — скорость звука на поверхности звезды,  $n$  — нормаль к поверхности звезды.

Как уже отмечалось выше, принятое предположение однородного вращения звезды подразумевает, что вектор скорости на поверхности звезды-донора имеет составляющую, направленную вдоль нормали к поверхности, обусловленную не только скоростью звука, но и наличием собственного вращения звезды. Очевидно, что на поверхности равновесной звезды не должно существовать нормального к поверхности движения газа, отличного от теплового. В предположении однородности вращения звезда должна иметь форму эллипсоида вращения, простирающегося до  $L_1^{rot}$ , однако форма, рассчитанная по полному потенциалу, не дает такого решения (из-за несферичности звезды возникает дополнительная нормальная к поверхности составляющая скорости). Это означает, что принятый закон собственного вращения не является самосогласованным. Задача об определении самосогласованного закона вращения звезды в двойной системе до сих пор не решена, за исключением двух выделенных случаев — синхронного вращения и случая, когда вектор углового момента звезды-донора равен нулю в лабораторной системе отсчета (см. гл. 1). Одновременное использование в газодинамической модели формы поверхности звезды и граничных значений скорости газа, определенных в предположении однородного вращения звезды, является частичным решением задачи о нахождении самосогласованного решения для этого случая. В рассматриваемой модели газ, истекающий с поверхности донора при принятых граничных условиях, имеет возможность сформировать наружные слои звезды-донора и, таким образом, подстроиться под самосогласованное решение. К сожалению, наличие дополнительных сил (не входящих в потенциал силы Кориолиса и градиента давления) позволяет говорить только о приближении к самосогласованному решению, однако на данный момент подобное рассмотрение является, по-видимому, оптимальным.

Для рассмотрения влияния собственного вращения звезды-донора на структуру течения вещества проведем сравнение вариантов расчетов с синхронным (результаты представлены в предыдущих главах этой части книги), несинхронным соосным и несинхронным несоосным вращением истекающей звезды. Граничное значение скорости газа на поверхности звезды-донора задавалось по формуле (12.1), причем для обоих вариантов несинхронного вращения предполагалось, что собственная скорость вращения звезды в лабораторной системе координат в два раза превосходит угловую скорость вращения системы. Для расчета с несоосным вращением угол наклона вектора собственного вращения звезды  $\vartheta$  к оси  $z$  в лабораторной системе принимался равным  $15^\circ$  (угол наклона вектора собственного вращения звезды во вращающейся системе координат  $\vartheta^* = 30^\circ$ ).

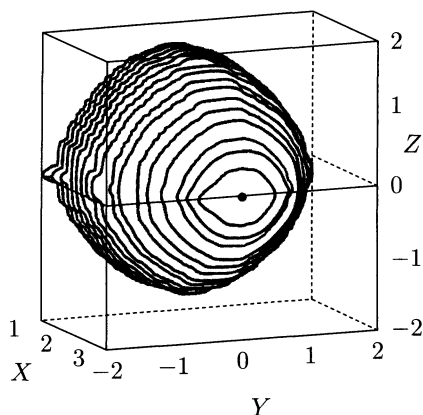


Рис. 12.1. Изоповерхность плотности в окрестности внутренней точки Лагранжа на уровне  $\rho = 0,02\rho_{L_1}$  для случая синхронного вращения. Сечение плоскостью  $yz$  проведено на расстоянии  $0,066A$  от  $L_1$ . Жирной точкой на рисунках отмечена проекция положения внутренней точки Лагранжа на сечение  $yz$

Рассматриваемые варианты расчетов отличаются лишь принятыми граничными значениями скорости на поверхности звезды-донора. Значения компонент вектора скорости во внутренней точке Лагранжа в принятой системе координат для случая синхронного вращения соответствует наличию лишь компоненты скорости  $v_x = c_s$ , в то время как  $v_y = v_z = 0$ . В случае соосного несинхронного вращения  $v_x = c_s$ ,  $v_y = x_{L_1^{rot}} \Omega_*^{rot}$ ,  $v_z = 0$ , а в случае несоосного несинхронного вращения  $v_x = c_s$ ,  $v_y = x_{L_1^{rot}} \Omega_*^{rot} \cos(\vartheta^*)$ ,  $v_z = -x_{L_1^{rot}} \Omega_*^{rot} \sin(\vartheta^*) \sin(-\Omega t)$ , причем  $v_z$  является периодической функцией времени. Отличия в граничных условиях на поверхности истекающей звезды приводят, в частности, к изменению параметров струи вещества, втекающего в систему через окрестность внутренней точки Лагранжа. Иллюстрацией данного обстоятельства могут служить рис. 12.1–12.4. На рис. 12.1, 12.2 показаны изоповерхности плотности в окрестности внутренней точки Лагранжа на уровне  $\rho = 0,02\rho_{L_1}$  для случаев синхронного и соосного несинхронного вращения, соответственно. Сечение плоскостью  $yz$ , ограничивающее рисунок, проведено вблизи (на расстоянии  $0,066 A$ ) от  $L_1$ . Жирной точкой на рисунках отмечена проекция положения внутренней точки Лагранжа на сечение  $yz$ . Поскольку для случая несоосного несинхронного вращения принятые граничные условия и, как следствие, полученное решение являются функциями времени, на рис. 12.3, 12.4 показаны изоповерхности плотности в окрестности внутренней точки Лагранжа на уровне  $\rho = 0,02\rho_{L_1^{rot}}$  для двух моментов времени  $t = t_0 + (3/8)P_{orb}$  и  $t = t_0 + (3/4)P_{orb}$ , иллюстрирующих изменение параметров струи. Сравнение рис. 12.1–12.4 показывает, что параметры струи в рассматриваемых вариантах расчетов отличаются существенным образом. Для расчета с несинхронным соосным

вращением (рис. 12.2) наблюдается сжатие струи вдоль оси вращения (ось  $z$ ) и расширение вдоль оси  $y$  по сравнению с синхронным случаем (рис. 12.1). Для расчета с несинхронным несоосным вращением (рис. 12.3, 12.4) наблюдается периодическое смещение струи вдоль оси  $z$ .

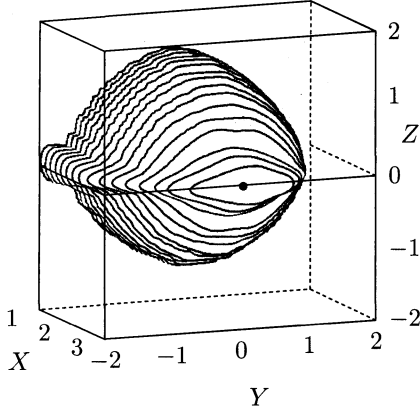


Рис. 12.2. Изоповерхность плотности в окрестности внутренней точки Лагранжа на уровне  $\rho = 0,02\rho_{L_1^{rot}}$  для случая несинхронного соосного вращения. Сечение плоскостью  $yz$  проведено на расстоянии  $0,066A$  от  $L_1$  или на расстоянии  $0,117A$  от  $L_1^{rot}$ . Жирной точкой на рисунках отмечена проекция положения внутренней точки Лагранжа на сечение  $yz$

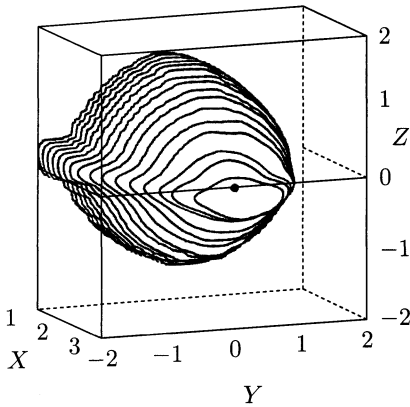


Рис. 12.3. Изоповерхность плотности в окрестности внутренней точки Лагранжа на уровне  $\rho = 0,02\rho_{L_1^{rot}}$  для случая несинхронного несоосного вращения для момента времени  $t = t_0 + (3/8)P_{orb}$ . Сечение плоскостью  $yz$  проведено на расстоянии  $0,066A$  от  $L_1$  или на расстоянии  $0,110A$  от  $L_1^{rot}$ . Жирной точкой на рисунках отмечена проекция положения внутренней точки Лагранжа на сечение  $yz$

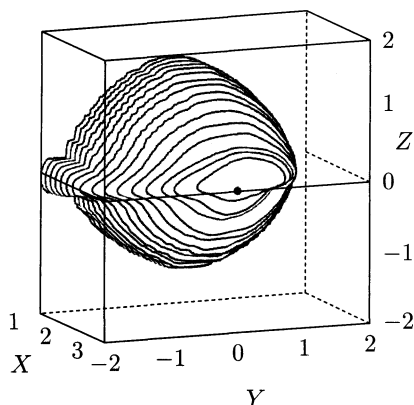


Рис. 12.4. Изоповерхность плотности в окрестности внутренней точки Лагранжа на уровне  $\rho = 0,02\rho_{L_1^{rot}}$  для случая несинхронного несоосного вращения для момента времени  $t = t_0 + (3/4)P_{orb}$ . Сечение плоскостью  $yz$  проведено на расстоянии  $0,066A$  от  $L_1$  или на расстоянии  $0,110A$  от  $L_1^{rot}$ . Жирной точкой на рисунках отмечена проекция положения внутренней точки Лагранжа на сечение  $yz$

Решения, полученные для случаев с синхронным и с соосным несинхронным вращением являются стационарными. Основные детали полученной картины течения для синхронного случая описаны в предыдущих главах этой части. Влияние наличия соосного несинхронного вращения звезды-донора выражается лишь в ряде количественных изменений, хотя картина течения, в целом, остается качественно подобной. Наличие  $y$ -компоненты скорости для случая несинхронного вращения приводит к изменению параметров струи вещества, втекающего в систему (рис. 12.2). Связанное с  $y$ -компонентой скорости смещение струи в области  $L_1$  приводит к тому, что по мере продвижения в систему струя подходит ближе к аккретору и образующийся диск имеет существенно меньшие линейные размеры, чем в случае синхронного вращения.

В результатах расчета с несоосным несинхронным вращением сохранились основные особенности течения, присущие предыдущим вариантам. Однако, в этом решении есть и принципиальные отличия. Так, для расчетов с относительно высокой численной вязкостью ( $\alpha = 0,1$ ) обнаружено, что поведение диска и околоскопического гало отражает изменения струи истекающего вещества (граничных условий на поверхности звезды-донора). Данное обстоятельство позволяет говорить о реализации в расчете модели «ведомого диска», предложенного в работах Шакуры [62] и Робертса [497]. В отличие от случая соосного несинхронного вращения вещество диска и околоскопической структуры колеблется вокруг экваториальной плоскости, что приводит к возникновению сложной структуры течения. Наличие «следов» вещества

(газовых образований над и под экваториальной плоскостью) приводит к тому, что формирующийся диск имеет средние (между вариантами с синхронным и с соосным несинхронным вращением) линейные размеры и толщину. В силу «ведомого» характера решения формирование «следов» также происходит периодически.

## 12.2. Системы с компонентами, не заполняющими свои полости Роша

В разделенной двойной системе оба компонента не заполняют свои полости Роша и, в стандартном сценарии, обмен веществом между ними может идти только посредством звездного ветра. Однако, наличие несинхронного вращения одного из компонентов может существенно изменить картину течения и, в отдельных случаях, привести к тому, что в таких системах будет наблюдаться обмен веществом через окрестность внутренней точки Лагранжа. Рассмотрим физический механизм, приводящий к возникновению элементов течения ТДС в разделенных двойных звездах.

Возьмем быстро вращающуюся одиночную звезду. Для случая, когда скорость вращения звезды на экваторе  $V_{\text{rot}}$  достигает первой космической скорости, или, другими словами, критической скорости  $V_{\text{cr}} = \sqrt{GM/R}$ , центробежная сила уравнивает силу гравитации:

$$F_c \equiv \frac{V_{\text{rot}}^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \equiv F_{\text{grav}}, \quad (12.2)$$

и сила давления на поверхности звезды ничем не скомпенсирована, что позволяет веществу истекать с экваториального пояса (так называемый предел Роша). Частица, имеющая удельную кинетическую энергию  $V_{\text{rot}}^2/2$ , вращается вокруг звезды по замкнутым траекториям, образуя оболочку. Для ухода на бесконечность от одиночной звезды частица должна получить избыток энергии и достичь второй космической скорости  $V = \sqrt{2}V_{\text{cr}}$ .

Для случая двойной системы ситуация существенно меняется. Если вращение компонентов синхронизовано с орбитальным движением, то поле сил в такой системе описывается потенциалом Роша  $\Phi$  (см. (1.18) из гл. 1). Наличие дополнительных сил в двойной системе (по сравнению со случаем одиночной звезды) приводит к тому, что условия равновесия нарушаются сначала во внутренней точке Лагранжа  $L_1$ , где сила давления не скомпенсирована градиентом потенциала Роша. Данное обстоятельство приводит к тому, что при достижении звездой внутренней точки Лагранжа вещество начинает истекать через окрестность  $L_1$ , а не со всей экваториальной зоны звезды. Положение внутренней точки Лагранжа  $L_1$  определяется условием  $\nabla\Phi = 0$ .

Для случая несинхронного ( $|\Omega_*| \neq |\Omega|$ ), но соосного ( $\Omega_* \parallel \Omega$ ) вращения звезды-донора в условия равновесия должна быть включена

центробежная сила, связанная с ее собственным вращением. В этом случае поле сил на поверхности звезды определяется несинхронным потенциалом Роша  $\Psi_1$  (см. (1.46) из гл. 1), а положение внутренней точки Лагранжа для несинхронного случая  $L_1^{rot}$  определяется условием  $\nabla\Psi_1 = 0$ .

При вращении звезды быстрее орбитального  $x_{L_1^{rot}}/x_{L_1} < 1$  (см., рис. 1.3), и «несинхронная» полость Роша меньше стандартной. Дополнительной иллюстрацией вышесказанному может служить рис. 12.5, где в экваториальной плоскости двойной системы с отношением масс  $q = 0,1$  штриховой линией показана линия равного потенциала  $\Phi$ , проходящая через  $L_1$  (т. е. линия, ограничивающая стандартную полость Роша), а сплошными линиями показаны линии равного потенциала  $\Psi_1$ , проходящие через  $L_1^{rot}$  для трех значений параметра несинхронности  $f = \Omega_\star/\Omega$ : верхняя, средняя и нижняя панели рис. 12.5 для  $f = 2$ ,  $f = 10$  и  $f = 100$  соответственно. На рисунке также показаны векторы линейной скорости вращающейся звезды в точке  $x_{L_1^{rot}}$  в принятой системе координат,  $\mathbf{V}_{rot} = (\Omega_\star - \Omega) \times \mathbf{r}_{L_1^{rot}}$ .

Наличие второго компонента, приводящее к тому, что вещество может уходить из системы, достигнув точки  $L_1^{rot}$ , меняет значение скорости вращения, обеспечивающей уход вещества с поверхности звезды. Зависимость отношения линейной скорости в точке  $L_1^{rot}$  к критической скорости, определенной для одиночной звезды с такими же параметрами, приведена на рис. 12.6 как функция отношения масс компонентов  $q$  для различных значений показателя несинхронности  $f$ . Из анализа данных, представленных на рис. 12.6, видно, что в ряде случаев даже небольшая дополнительная скорость вращения может приводить к уходу вещества через окрестность  $L_1^{rot}$ , однако для звезды с параметрами  $q \sim 0,1$  и  $f \sim 100$  истечение звезды начнется при скорости вращения, близкой к критической. Существенным, однако, является тот факт, что, несмотря на близость  $V_{rot}$  к  $V_{cr}$  истечение начнется не со всего экваториального пояса (предел Роша в случае одиночной звезды), а из окрестности  $L_1^{rot}$ . Несомненно, данное обстоятельство может сильно повлиять на структуру течения вблизи истекающей звезды и, тем самым, определить свойства формирующейся оболочки.

Наличие второго компонента приводит также к еще одному заметному изменению в механизме истечения вещества от вращающейся звезды. Так, если для одиночной звезды уход вещества с поверхности на бесконечность обеспечивается лишь достижением второй космической скорости, то в двойной системе частица, вылетевшая из  $L_1^{rot}$ , будет потеряна, если она обладает достаточным запасом энергии, чтобы достичь  $L_1$  и в дальнейшем быть захваченной полем притяжения второго компонента. Если запаса энергии недостаточно для достижения  $L_1$ , то частица будет двигаться по замкнутым траекториям вокруг истекающего компонента. На рис. 12.7 показан избыток энергии  $\Delta E$ , обезразмеренный на характерную энергию системы  $E_{сист} = (A\Omega)^2$ ,

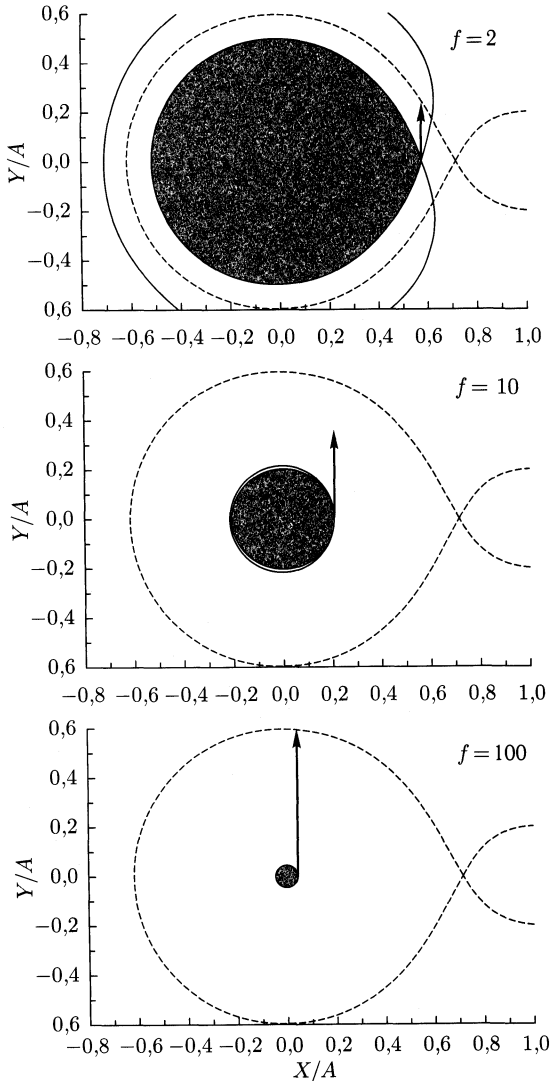


Рис. 12.5. Эквипотенциалы Роша (штриховые линии) и эквипотенциалы «несинхронного» потенциала  $\Psi_1$  (сплошные линии) для  $q = 0,1$  и различных значений  $f$ . Стрелкой показана линейная скорость вещества звезды в точке  $L_1^{rot}$ , равная  $0,58A\Omega$  для верхней панели,  $1,88A\Omega$  для средней панели и  $4,45A\Omega$  для нижней панели (масштаб абсолютной величины скорости на рисунке не выдержан)

который должен быть добавлен частице, вылетевшей из  $L_1^{rot}$  со скоростью  $V_{rot} = (\Omega_x - \Omega)x_{L_1^{rot}}$ , чтобы она могла достичь  $L_1$ , в зависимости от  $f$  для двух значений отношений масс компонентов  $q = 1$  и  $q = 0,1$ .



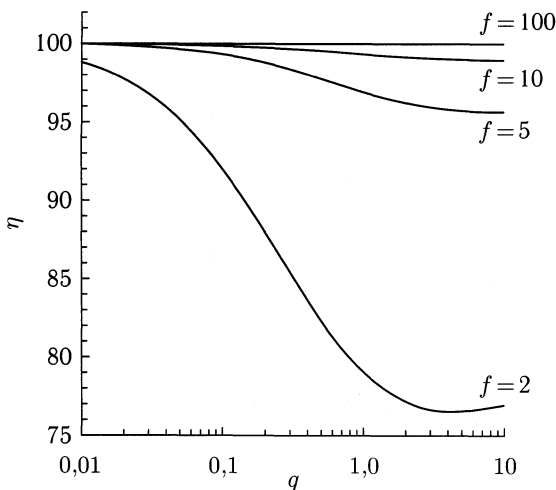


Рис. 12.6. Отношение скорости вращения в «несинхронной» внутренней точке Лагранжа (в лабораторной системе координат) к критической скорости  $\eta = \Omega_* x_{L_1^{rot}} / \sqrt{GM_1/x_{L_1^{rot}}} \cdot 100\%$  как функция  $q$  для различных значений параметра несинхронности  $f = \Omega_*/\Omega$

Представленные результаты убедительно свидетельствуют, что для параметров, типичных для двойных звезд, сумма потенциальной энергии в  $L_1^{rot}$  (в терминах потенциала  $\Phi$ ) и кинетической энергии, связанной с собственным вращением звезды, меньше потенциальной энергии в  $L_1$ :

$$\Phi(L_1^{rot}) + \frac{1}{2}(\Omega_* - \Omega)^2 x_{L_1^{rot}}^2 < \Phi(L_1), \quad (12.3)$$

и что количество дополнительной энергии должно достигать значений, на порядок величины превышающих характерную энергию системы  $E_{\text{сист}}$ . Учитывая, что типичные температуры звезд не превышают десятков тысяч градусов, тепловая энергия не изменит существенно энергетические характеристики вещества на поверхности звезды. Это означает, что в баллистическом рассмотрении оболочка вокруг звезды будет замкнутой.

Однако, баллистическое приближение не учитывает целый ряд важных физических факторов. Со временем, диссипативные процессы и отбор углового момента за счет приливного взаимодействия компонента будут приводить к расширению оболочки. Очевидно, что внутренние части оболочки будут аккрецироваться звездой, в то время, как внешний ее край постепенно достигнет границы полости Роша и станет источником истечения вещества на вторичный компонент из окрестности точки  $L_1$ . Численные исследования ([422, 498–500]) подтвердили вывод о незамкнутости оболочек в таких системах, и выявили наличие потока вещества ко второму компоненту через окрестность точки  $L_1$ .

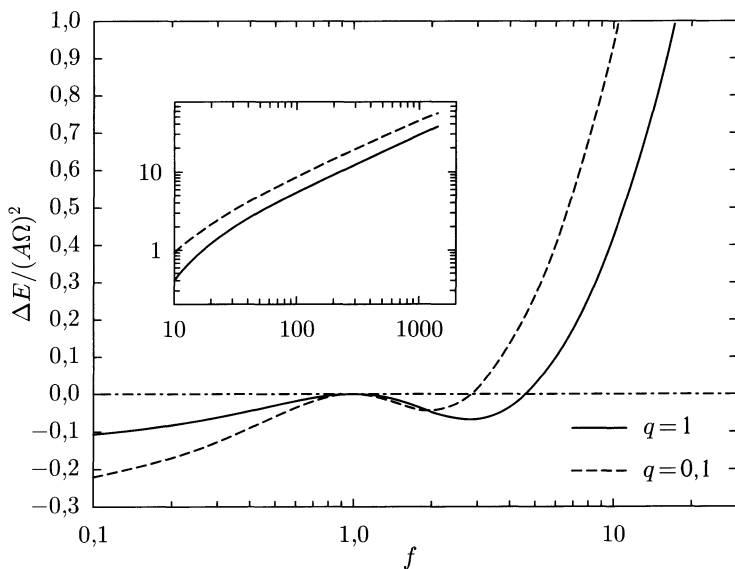


Рис. 12.7. Дополнительная энергия  $\Delta E$  (в единицах  $A\Omega$ ), необходимая для достижения  $L_1$ , как функция параметра несинхронности  $f$  для значений отношения масс  $q = 0,1$  и  $1$ . Штрих-пунктирной линией показано значение  $\Delta E = 0$ . Дополнительная панель внутри рисунка показывает зависимость  $\Delta E$  от  $f$  для больших значений  $f$

### 12.3. Двойные Ве-звезды

Рассмотрим численную модель формирования незамкнутой оболочки и потока вещества через окрестность точки  $L_1$  в разделенных системах с быстро вращающейся звездой-донором на примере Ве-звезды.

Ве-звезды характеризуются присутствием в спектрах эмиссионных линий, принадлежащих, главным образом, водороду. Спектральные характеристики этих пекулярных объектов дают основания предполагать, что Ве-звезды окружены оболочкой. Оболочка не является протяженной атмосферой звезды. В ней плотность заметно ниже и ее изменение при удалении от звезды сильно отличается от того, что следует ожидать в протяженных атмосферах.

Большие скорости вращения, присущие Ве-звездам, дали основания О. Струве в конце 30-х годов XX века предположить, что оболочки Ве-звезд образуются из-за быстрого вращения этих звезд. Однако, наблюдения показывают, что, как правило, скорости вращения Ве-звезд меньше критической и недостаточны для ухода вещества с поверхности. Кроме того, существует еще целый ряд наблюдательных аргументов против этой теории (см., например, [422]).

В то же время, наблюдения показывают, что существенная часть Ве-звезд является тесными двойными с периодами  $\sim 10\text{--}300$  дней. Используя этот факт, в работе [422] была предложена модель, обеспечивающая истечение вещества звезды, вращающейся с докритической скоростью, за счет гравитационного воздействия вторичного компонента двойной Ве-звезды. Как и предсказывалось механизмом, описанным в предыдущем параграфе, в численных исследованиях формировалась дископодобная оболочка, обладающая всеми свойствами оболочек Ве-звезд.

В работе [422] моделирование было проведено для системы с высокой температурой оболочки,  $\sim 10^5$  К. При моделировании были приняты следующие параметры системы:  $M_1 = 8,6M_\odot$ ,  $M_2 = 0,86M_\odot$  (что соответствует типичному для двойных Ве-звезд отношению масс  $q = M_2/M_1 = 0,1$ ), экваториальный радиус звезды 1,  $R_1 = 4,6R_\odot$ , орбитальный период  $P_{\text{orb}} = 50$  дней. Для принятых параметров расстояние от центра звезды 1 до внутренней точки Лагранжа  $x_{L_1} = 87R_\odot$ ,  $f = 128,6$ .

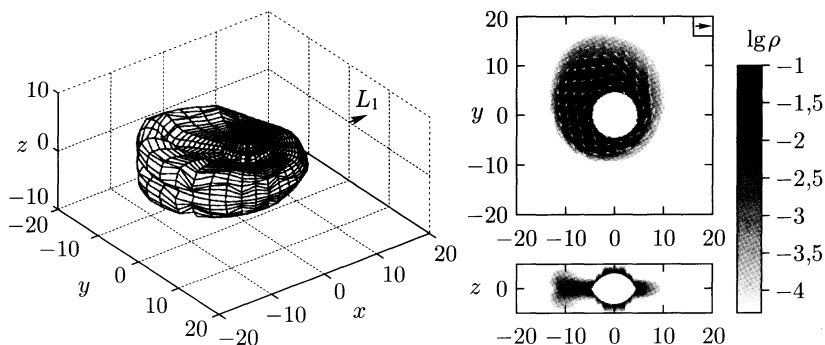


Рис. 12.8. Слева: Трехмерная изоповерхность плотности на уровне  $\rho = 5 \cdot 10^{-5} \rho(L_1^{rot})$  для момента времени  $t = 0,514 P_{\text{orb}}$ . Стрелкой показано направление на внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$ . Справа сверху: Распределение плотности и скорости в экваториальной  $xy$ -плоскости. Вектор в правом верхнем углу соответствует скорости 500 км/с. Справа внизу: Распределение плотности в плоскости  $xz$ . Координаты на всех панелях выражены в  $R_\odot$

На рис. 12.8 и 12.9 изображены трехмерные изоповерхности плотности на уровне  $\rho = 5 \cdot 10^{-5} \rho(L_1^{rot})$  для моментов времени  $t = 0,514 P_{\text{orb}}$  и  $0,608 P_{\text{orb}}$ , соответственно. Распределения плотностей в экваториальной  $xy$ , и фронтальных плоскостях  $xz$  также показаны на этих рисунках. Как видно из представленных результатов, истечение вещества из точки  $L_1^{rot}$  действительно ведет к образованию оболочки, причем оболочка испытывает ретроградное апсидальное движение с угловой скоростью  $\Omega_{\text{aps}} = -6\Omega$  ( $P_{\text{aps}} = P_{\text{orb}}/6$ ). Как видно из рис. 12.8 и 12.9, оболочка часть времени имеет торообразную форму, а часть —

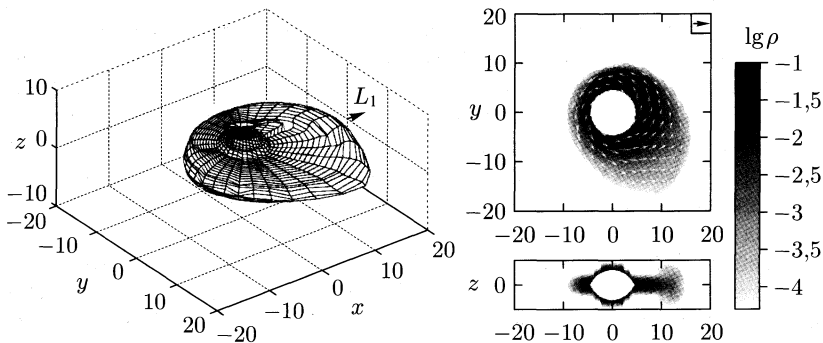


Рис. 12.9. То же, что и на рис. 12.8 для момента времени  $t = 0,608P_{\text{orb}}$

дискообразную. Изменения формы оболочки вызваны гравитационным воздействием второго компонента и взаимодействием оболочки со струей вещества из  $L_1^{\text{rot}}$  в ходе ее апсидального движения. Характерные линейные размеры оболочки составляют  $\sim 3R_1$  или  $\sim 15R_{\odot}$  для торообразной оболочки (на уровне  $\rho = 5 \cdot 10^{-5} \rho(L_1^{\text{rot}})$ ), и  $\sim 4,5R_1$  ( $\sim 21R_{\odot}$ ) для моментов времени, когда оболочка является дискообразной.

Результаты численного моделирования для холодной оболочки с температурой  $\sim 10^4$  К представлены на рис. 12.10–12.13. На рис. 12.10 и 12.11 представлены изоповерхности плотности на уровне  $\rho = 10^{-3} \rho(L_1^{\text{rot}})$  и проекции оболочек на экваториальную плоскость для моментов времени  $t = 38,22P_{\text{orb}}$  и  $t = 38,87P_{\text{orb}}$  соответственно. На рис. 12.12 и 12.13 представлены изоповерхности внешних частей оболочки на уровне  $\rho = 5 \cdot 10^{-5} \rho(L_1^{\text{rot}})$  также для двух моментов времени. Из анализа представленных результатов видно, что оболочка в низкотемпературном решении становится заметно больше —  $\sim 35R_{\odot}$  на уровне  $\rho = 10^{-3} \rho(L_1^{\text{rot}})$  и  $\sim 45R_{\odot}$  на уровне  $\rho = 5 \cdot 10^{-5} \rho(L_1^{\text{rot}})$ . Оболочка имеет круглую форму и ее вариации со временем намного меньше, чем в решении с высокой температурой. Характерная полутолщина оболочки составляет всего  $H \sim 0,1R_1$  на уровне  $\rho = 10^{-3} \rho(L_1^{\text{rot}})$ , в то время как для горячего случая  $H \sim R_1$ .

Как следует из качественного анализа, наличие диссипативных механизмов и гравитационное воздействие второго компонента должны приводить к расширению оболочки и формированию струи вещества из окрестности точки  $L_1$ . Вопрос о замкнутости оболочек Ве-звезд возник после открытия рентгеновского излучения от части этих объектов, так называемых, Ве/X-звезд (см. [501]). Наблюдения пульсационных периодов Ве/X-звезд ([502–505]) позволили предположить, что по крайней мере часть из них содержат нейтронную звезду в качестве вторичного компонента, излучающего рентген. Ве/X-звезды, не показывающие наличие рентгеновских пульсаций, могут, очевидно, содержать в качестве вторичного компонента белый карлик или черную дыру.

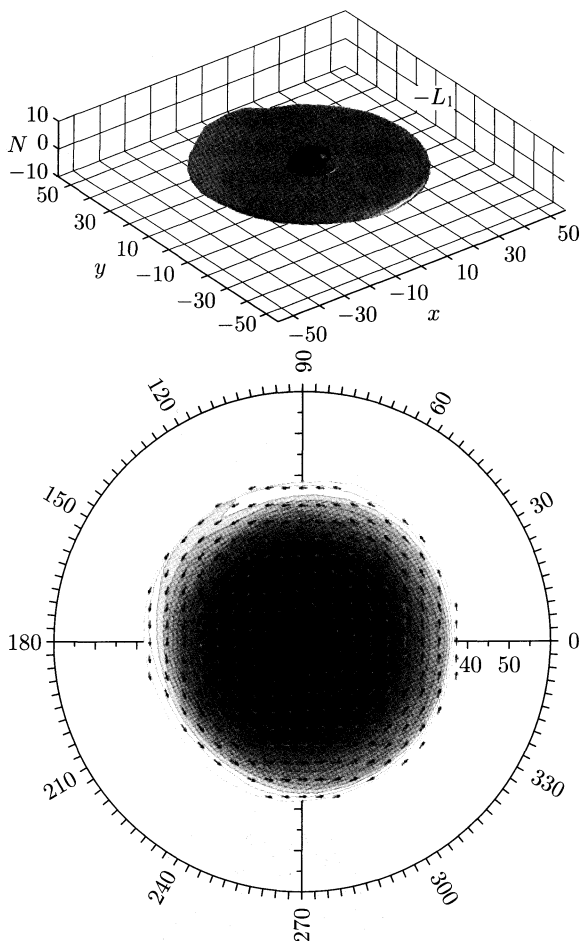


Рис. 12.10. *Верхняя диаграмма:* Трехмерная изоповерхность плотности на уровне  $\rho = 10^{-3}\rho(L_1^{rot})$  для момента времени  $t = 38,22P_{orb}$ . Стрелкой показано направление на внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$ . Координаты выражены в  $R_\odot$ . *Нижняя диаграмма:* Проекция оболочки на экваториальную плоскость

Согласно каталогу [501], типичные рентгеновские светимости для Ве/Х-звезд составляют  $\sim 10^{34}-10^{39}$  эрг/с. Предполагая, что рентгеновское излучение возникает за счет аккреции вещества нейтронной звездой с массой  $M_x \approx 1M_\odot$  и половина энергии аккрецируемого вещества излучается в рентгеновском диапазоне, можно определить зависимость между рентгеновской светимостью  $L_x$  и темпом аккреции:

$$L_x = \frac{GM_x\dot{M}}{2} \left( \frac{1}{R_x} - \frac{1}{A - x_{L_1}} \right) \approx 7.21 \cdot 10^{19} \dot{M} \quad (\text{эрг/с}), \quad (12.4)$$

где  $\dot{M}$  — темп аккреции, который в стационарном режиме равен темпу массообмена,  $R_x \approx 10^6$  см — радиус рентгеновского компонента ( $R_x \ll A - x_{L_1}$ ),  $A$  — расстояние между компонентами Ве/X-звезды,  $x_{L_1}$  — расстояние от центра масс оптической компоненты Ве/X звезды до внутренней точки Лагранжа  $L_1$ . Подставляя в эту формулу наблюдаемые значения рентгеновской светимости из каталога [501], получим, что темп массообмена в Ве/X-звездах должен составлять величину  $10^{-7} - 10^{-12} M_{\odot}/\text{год}$ .

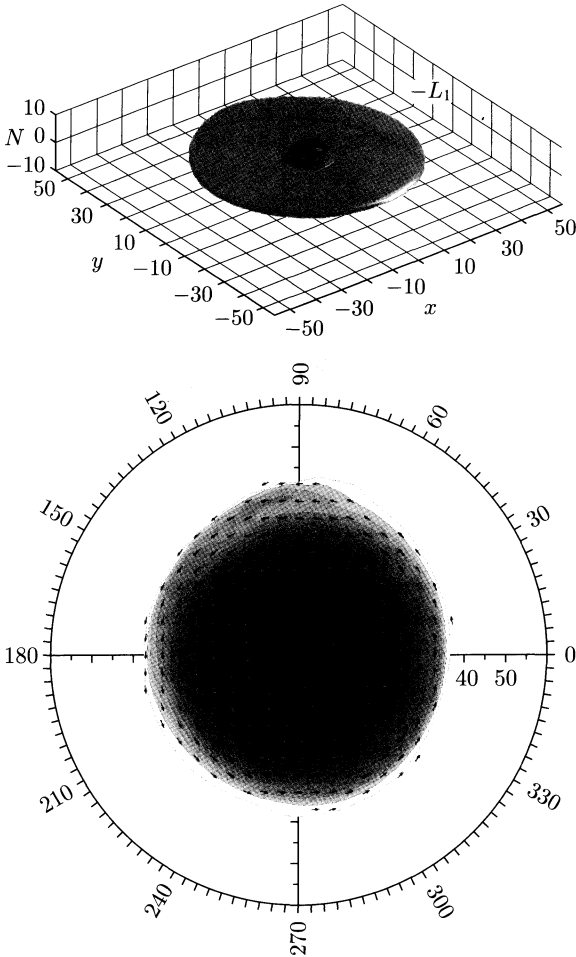


Рис. 12.11. То же, что и на рис. 12.10 для момента времени  $t = 38,87 P_{\text{orb}}$

Возникает вопрос: каков механизм потери массы оптической компонентой Ве/X-звезды?

Согласно теоретическим оценкам, подтвержденным результатами численного моделирования, оболочка изначально принимает кольцеобразную форму, с максимумом плотности, приходящемся на расстояние  $\sim 3R_1$ . При этом, типичный радиус Ве-звезды составляет  $\sim 7R_\odot$  [506] и не меняется существенно от звезды к звезде.

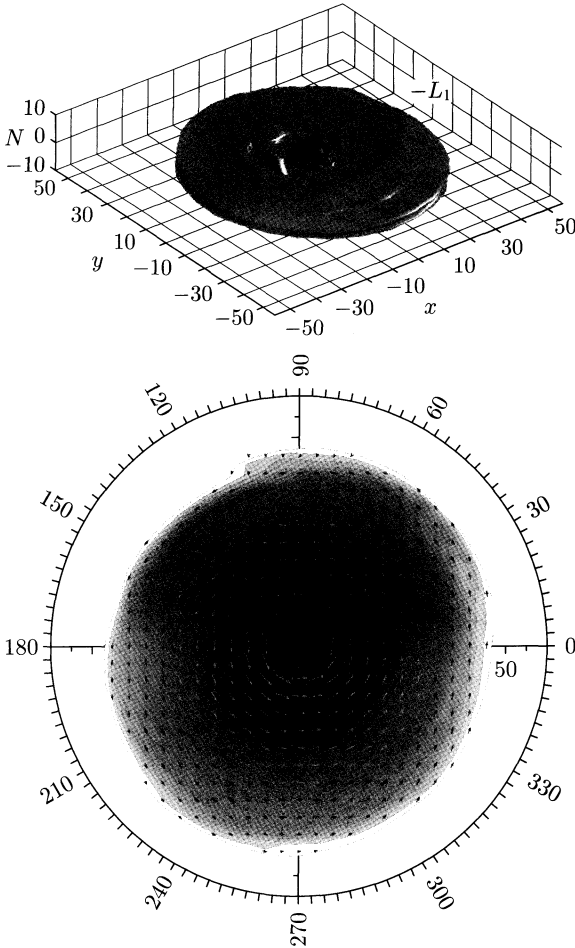


Рис. 12.12. *Верхняя диаграмма:* Трехмерная изоповерхность плотности на уровне  $\rho = 5 \cdot 10^{-5} \rho(L_1^{rot})$  для момента времени  $t = 38,22P_{orb}$ . Стрелкой показано направление на внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$ . Координаты выражены в  $R_\odot$ . *Нижняя диаграмма:* Проекция оболочки на экваториальную плоскость

Простые оценки показывают, что темп массообмена  $\dot{M}$  будет различным при различных положениях точки  $L_1$ . Темп массообмена зависит от плотности  $\rho$ , радиальной скорости  $v_r$  и площади  $S$  окрестности

точки  $L_1$ , откуда происходит истечение вещества,  $\dot{M} = \rho v_r S$ . Так как расширение оболочки определяется диффузионными процессами, плотность в ней должна падать экспоненциально при приближении

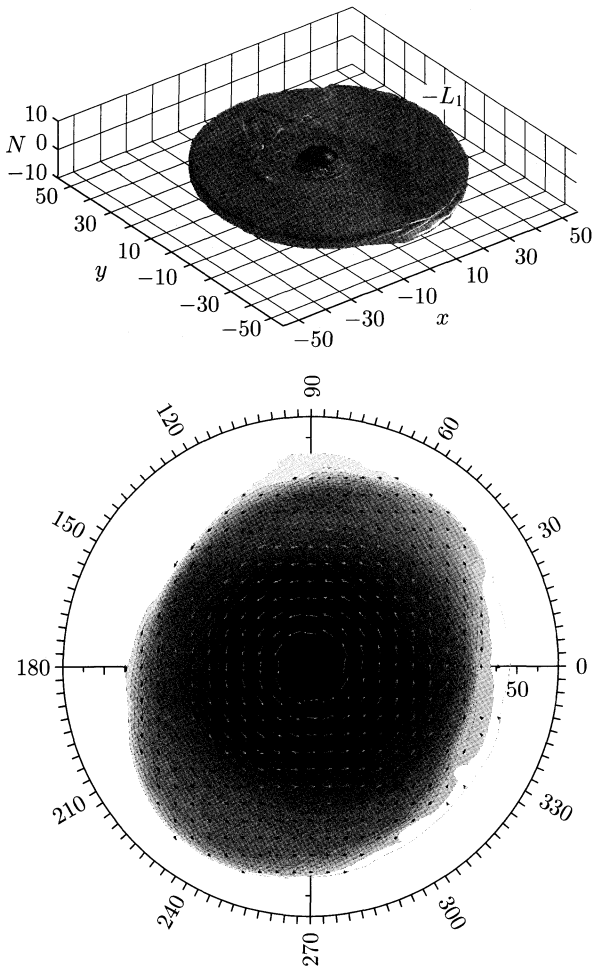


Рис. 12.13. То же, что и на рис. 12.12 для момента времени  $t = 38,87P_{\text{orb}}$

к внешнему краю. Из наблюдений падение плотности оболочки оценивается как  $\sim r^{-3}$ , (см., например, [507]). Предполагая, что скорость в оболочке меняется по кеплеровскому закону, ее значение будет уменьшаться как  $\sim r^{-1/2}$ . В стандартной постановке, площадь окрестности внутренней точки Лагранжа  $S$ , через которую будет происходить истечение вещества определяется локальной скоростью звука. Наличие



собственного вращения оболочки будет приводить к уменьшению  $S$ , пропорционально уменьшению скорости.

Предполагая постоянство углового размера области истечения, можно ожидать, что  $S$  при удалении  $L_1$  будет расти по квадратичному закону. В то же время, наличие собственного вращения с уменьшающейся скоростью приведет к увеличению  $S$  по заметно более слабому закону. Это означает, что с удалением  $L_1$ <sup>1)</sup> площадь и скорость меняются разнонаправленно и не столь значительно, как плотность. Совокупность всех этих факторов будет приводить к существенному падению  $M$  и, следовательно, рентгеновской светимости при удалении  $L_1$  от Ве-звезды.

Рассмотрим результаты численных расчетов темпа истечения внешних частей оболочки через окрестность точки  $L_1$  при различных орбитальных периодах двойной Ве/X-звезды [500].

Моделирование проводилось в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с двойной системой, в цилиндрических координатах на трехмерной сетке. Так как задача является симметричной относительно экваториальной плоскости, моделировалась только половина пространства, ограниченная экваториальной плоскостью системы. Размеры расчетной области составляли по радиальной координате  $\sim 68,17R_\odot$ , по вертикальной координате  $\sim 50R_\odot$ . Вычислительная сетка имела размерность в  $81 \times 68 \times 100$  ячеек по направлениям  $r$ ,  $z$ ,  $\varphi$  соответственно. Для достижения лучшего разрешения оболочки Ве звезды, сетка сгущалась в  $z$ -направлении при приближении к экваториальной плоскости и в направлении  $r$  при приближении к оптической звезде.

В качестве параметров системы приняты типичные для Ве/X [506] масса оптического компонента  $M_1 \sim 10M_\odot$ , его радиус  $R_1 \sim 7R_\odot$ , масса рентгеновского компонента  $M_x \sim 1M_\odot$  и его радиус  $R_x = 10^6$  см (нейтронная звезда). Скорость вращения оптической компоненты Ве/X-звезды принималась на несколько процентов ниже критической. Функции нагрева и охлаждения были заданы так, чтобы получить равновесную температуру оболочки  $T \sim 3 \cdot 10^4$  К. Было сделано три расчета с различными периодами, параметры вариантов приведены в таблице 12.1. Каждый расчет проводился до момента достижения стационарного по массе решения.

На рис. 12.14 показаны распределения плотностей вдоль прямой, соединяющей центры компонентов двойной Ве/X-звезды для трех вариантов расчетов систем с орбитальными периодами, указанными в таблице 12.1. Оболочка, как это видно из графика, представляет собой кольцо, с максимумом плотности на расстояниях  $r \sim 16-20R_\odot$ , что

<sup>1)</sup> В этой модели расстояние до  $L_1$  варьировалось путем изменения расстояния между компонентами или, другими словами, изменением только орбитального периода системы.

соответствует  $\sim 2-3R_1$ . Очевидно, что плотность в точке  $L_1$  составляет достаточно малую величину относительно  $\rho_1$ .

Таблица 12.1. Параметры расчетов:  $P_{\text{orb}}$  — орбитальный период системы,  $A$  — расстояние между компонентами,  $x_{L_1}$  — расстояние от центра оптической компоненты до внутренней точки Лагранжа  $L_1$

№	$P_{\text{orb}}$ (дн.)	$A$ ( $R_{\odot}$ )	$x_{L_1}$ ( $R_{\odot}$ )
1	13,98	55,77	40,01
2	20,41	70,94	50,90
3	28,134	88,94	63,82

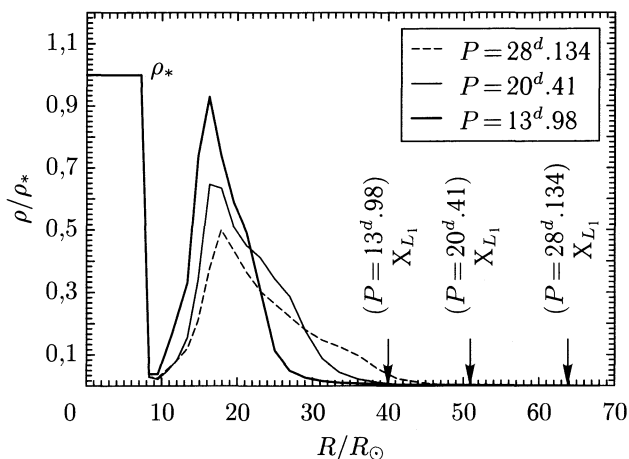


Рис. 12.14. График распределения плотности вдоль прямой, соединяющей центры компонентов двойной Ве/X-звезды. Плотность нормирована на поверхностную плотность звезды для трех расчетов с различными орбитальными периодами. Стрелками указано положение точки  $L_1$  для каждого расчета

В сводной таблице результатов 12.2 приведены усредненные величины потоков  $\dot{M}$ , плотностей  $\rho_{L_1}$  (в долях поверхностной плотности звезды), радиальных скоростей  $v_{L_1}$  (в км/с), угловых и линейных размеров области истечения в окрестности  $L_1$ . Следует отметить, что задача является масштабируемой относительно  $\rho$ , так что значения плотностей в оболочке должны быть пропорциональны плотности на поверхности звезды  $\rho_1$ . В представленных расчетах концентрация вещества на поверхности звезды принималась равной  $n_1 = 10^{13} \text{ см}^{-3}$  согласно работе [507]. Таким образом, чтобы получить значения потоков при другом  $n_1$ , следует умножить приведенные результаты на величину  $n_1/(10^{13} \text{ см}^{-3})$ .

Таблица 12.2. Результаты расчетов:  $\dot{M}$  — темп массообмена через окрестность точки  $L_1$ ,  $\rho_{L_1}/\rho_1$  — отношение средней плотности в окрестности точки  $L_1$  к плотности на поверхности звезды,  $v_r$  — средняя радиальная скорость в окрестности точки  $L_1$ ,  $d\varphi_{L_1}$  — угловой размер по  $\varphi$ -окрестности точки  $L_1$ , откуда происходит истечение,  $R_\varphi$  — линейный размер области истечения в экваториальной плоскости,  $\varepsilon$  — диаметр области истечения в окрестности точки  $L_1$ , исходя из условия  $\Delta\Phi = c_s^2$

$\dot{M}$ ( $M_\odot/\text{год}$ )	$\rho_{L_1}/\rho_1$	$v_r$ (км/с)	$d\varphi_{L_1}$	$R_\varphi = 2\pi x_{L_1} d\varphi_{L_1}$ (см)	$\varepsilon$ (см)
$2,1 \cdot 10^{-8}$	0,09	675	$91^\circ$	$4,5 \cdot 10^{12}$	$6,19 \cdot 10^{10}$
$1,3 \cdot 10^{-8}$	0,03	546	$86^\circ$	$5,4 \cdot 10^{12}$	$8,88 \cdot 10^{10}$
$6,8 \cdot 10^{-9}$	0,01	445	$83^\circ$	$6,5 \cdot 10^{12}$	$1,25 \cdot 10^{11}$

На рис. 12.15, 12.16 и 12.17 для расчета с орбитальным периодом  $P = 28,134$  дней показаны трехмерная изоповерхность плотности оболочки Ве-звезды, распределение плотности  $\rho$  и радиального потока вещества в экваториальной плоскости системы соответственно. В окрестности  $L_1$  потоки имеют существенную величину, так что часть вещества пересекает границу полости Роша рентгеновского компонента. Это является подтверждением предположения о том, что рентгеновское излучение может возникать в результате аккреции вещества оболочки Ве-звезды.

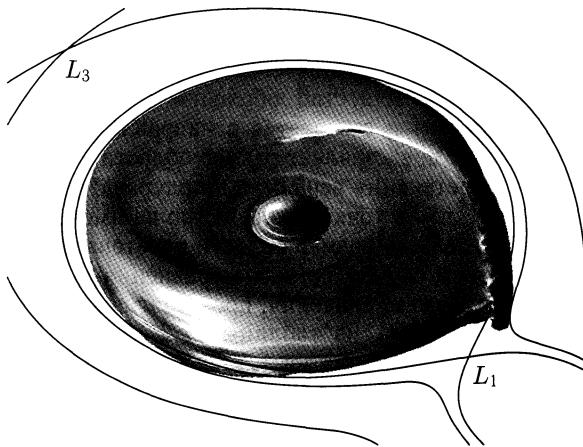


Рис. 12.15. Трехмерная изоповерхность плотности оболочки Ве-звезды для расчета с орбитальным периодом  $P = 28,134$  дней. Линиями показаны эквипотенциали Роша в экваториальной плоскости системы, обозначены точки  $L_1$  и  $L_3$ . В центре области находится оптический компонент Ве/Х-звезды

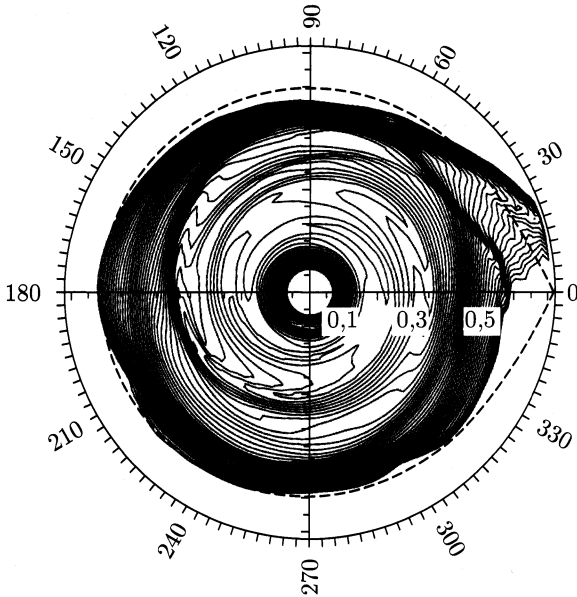


Рис. 12.16. Распределение плотности в экваториальной плоскости системы для расчета с орбитальным периодом  $P_{\text{orb}} = 28,134$  дней. Ве-звезда находится в центре расчетной области. Тонкими сплошными линиями показаны изолинии плотности, жирной пунктирной линией обозначена эквипотенциаль Роша, проходящая через точку  $L_1$ . Вращение оболочки, Ве-звезды и всей системы происходит против часовой стрелки

Из рис. 12.15, 12.16 и 12.17 видно, что область перетекания вещества несимметрична по  $\varphi$  относительно точки  $L_1$ . Этот факт может быть объяснен тем, что вещество оболочки в этой области имеет отличный от нуля момент и смещается в направлении вращения оболочки. Особый интерес представляет размер области перетекания по  $\varphi$ . При исследовании перетекания вещества в полуразделенных системах, обычно предполагают, что в точке  $L_1$  вещество не имеет существенных линейных скоростей, так что размер области перетекания определяется скоростью звука. В этом случае, согласно уравнениям из гл. 2, диаметр области перетекания  $\varepsilon$  имеет значения, представленные в таблице 12.2. Сравнивая значения  $\varepsilon$  и  $R_\varphi$  из таблицы 12.2, можно отметить, что во всех случаях вторая величина на 1,5–2 порядка выше, и, следовательно, размер области истечения по  $\varphi$  определяется, прежде всего, не локальной скоростью звука, а кинетической энергией вещества оболочки. Значения радиальной скорости  $v_r$  в окрестности  $L_1$ , приведенные в таблице 12.2, это подтверждают. Все приведенные скорости на полтора порядка превышают скорость звука в оболочке.

Из приведенных оценок и результатов расчетов следует, что темп массообмена в двойной Ве/X-звезде обратно пропорционален ее орби-

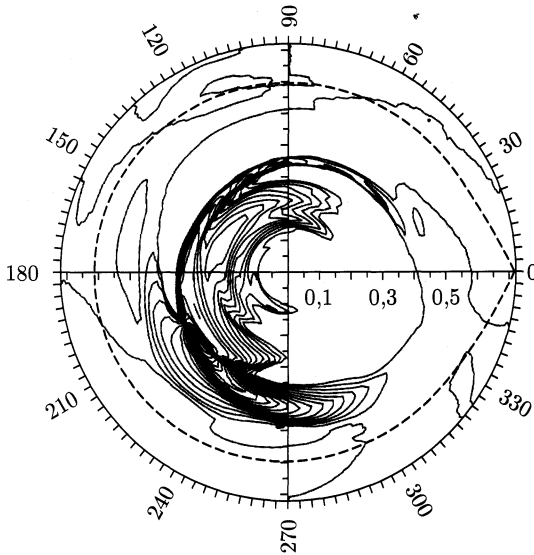


Рис. 12.17. Распределение радиального потока вещества в экваториальной плоскости системы для расчета с орбитальным периодом  $P_{\text{orb}} = 28,134$  дней. Показаны только положительные потоки, направленные от Ве-звезды. Тонкими сплошными линиями показаны изолинии потока, жирной пунктирной линией обозначена эквипотенциаль Роша, проходящая через точку  $L_1$

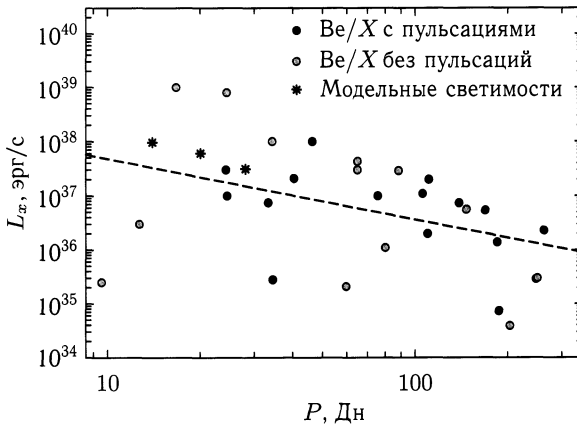


Рис. 12.18. Зависимость рентгеновской светимости от периода для наблюдаемых Ве/Х-звезд (кружки) и расчетные величины  $L_x$  для трех численных расчетов (звездочки). Жирными кружками отмечены Ве/Х-звезды, для которых наблюдаются пульсационные периоды, пунктирной линией показана аппроксимация зависимости  $L_x(P_{\text{orb}})$  для этих звезд

тальному периоду. На рис. 12.18 показана зависимость между орбитальным периодом и рентгеновской светимостью для 30 Be/X-звезд из каталога [501]. Отдельно отмечены звезды, для которых наблюдаются пульсационные периоды, т. е. те, рентгеновский компонент которых является нейтронной звездой. Пунктирная линия показывает аппроксимационную зависимость между периодом и рентгеновской светимостью Be/X-звезд с пульсационными периодами. Звездочками обозначены рентгеновские светимости, вычисленные по результатам расчетов темпа массообмена. Как видно из рисунка, зависимость, полученная по результатам моделирования соответствует наблюдаемой, как по наклону, так и по абсолютной величине  $L_x$ . Из этого можно сделать вывод, что предложенная модель подтверждается как численными расчетами, так и результатами наблюдений. Это, в свою очередь, означает, что в случае несинхронного вращения даже в разделенных системах возможно перетекание вещества через окрестность внутренней точки Лагранжа.

**Часть IV**

**ДИНАМИКА ВЕЩЕСТВА В МАГНИТНЫХ  
ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДАХ**

К тесным двойным системам, в которых на течение вещества существенное влияние оказывает магнитное поле, в первую очередь нужно отнести поляры и промежуточные поляры [18]. Это полуразделенные двойные системы, состоящие из маломассивной звезды позднего спектрального класса (звезда-донор) и белого карлика (звезда-аккретор). В результате процесса массообмена вещество из звезды-донора перетекает через внутреннюю точку Лагранжа на белый карлик.

В полярах (системы типа AM Her) белый карлик имеет сильное собственное магнитное поле ( $B_a \approx 10^7-10^8$  Гс на поверхности). Эти системы характеризуются относительно короткими орбитальными периодами (1–5 часов), а собственное вращение компонентов является синхронным [106]. Анализ наблюдательных данных показывает, что аккреционные диски в полярах не формируются, а перетекающее из звезды-донора вещество формирует коллимированные потоки, которые вдоль силовых линий магнитного поля попадают в районы магнитных полюсов звезды-аккретора [18].

В промежуточных полярах белый карлик обладает относительно слабым магнитным полем ( $B_a \approx 10^4-10^6$  Гс на поверхности). Эти системы занимают промежуточное положение между полярами и немагнитными катаклизмическими переменными. Следует отметить, что периоды собственного вращения звезды-аккретора в этих системах существенно короче орбитального — в десятки, сотни и даже тысячи раз [106]. Асинхронность собственного вращения аккретора в промежуточных полярах объясняется взаимодействием магнитного поля белого карлика с веществом диска в области границы магнитосферы. В результате этого взаимодействия устанавливается режим равновесного вращения, при котором радиус коротации равен радиусу магнитосферы [18, 107].

Попытки исследования ТДС с магнитным полем предпринимались неоднократно. Моделирование методом квазичастиц [106, 112–117] показало, что в промежуточных полярах в зависимости от параметров системы могут формироваться структуры течения самого различного типа, от удерживаемых магнитным полем аккреционных потоков до аккреционных дисков, как в немагнитных катаклизмических переменных. Следует отметить, что в этих расчетах не учитывался ряд важных эффектов, таких как влияние газового и магнитного давлений, процессы нагрева-охлаждения и т.п. В работах [118–121] представлены результаты трехмерного численного моделирования аккреции плазмы на гравитирующий объект с магнитным полем дипольного типа, ось симметрии которого не совпадает с осью вращения звезды. Авторам этих работ удалось детально исследовать трехмерную структуру течения в области магнитосферы центрального объекта, где магнитное поле играет доминирующую роль.

С точки зрения интерпретации наблюдений наиболее важным является полноценное моделирование аккреционного диска, которое впервые было проведено в работах авторов. В области формирующегося



аккреционного диска в полуразделенных двойных системах магнитное поле изначально не является достаточно сильным. Однако с течением времени происходит его интенсивная генерация. В результате в процессе формирования и эволюции диска будет развиваться процесс существенного взаимодействия магнитного поля и вещества. Моделирование таких систем вызывает огромный интерес, так как они составляют большинство среди ТДС, и, кроме того, интерпретация их наблюдений невозможна без корректной модели диска.

В серии работ [122–125, 508] авторам удалось разработать полноценную трехмерную численную модель для расчета структуры течения в магнитных ТДС. В нашем подходе для моделирования использована полная система уравнений магнитной газодинамики, позволяющая описать все основные динамические эффекты, связанные с магнитным полем. В численной модели учитываются процессы радиационного нагрева и охлаждения, а также диффузия магнитного поля за счет диссипации токов в турбулентных вихрях, магнитной плавучести и волновой МГД-турбулентности. Важно отметить, что в разработанной модели формирование и последующая эволюция аккреционного диска происходят естественным образом в результате процесса массопереноса вещества через внутреннюю точку Лагранжа. Таким образом, нам впервые удалось добиться самосогласованного описания структуры МГД-течений в тесных двойных системах и получить результаты, которые могут использоваться для интерпретации наблюдений в классической астрономии. Часть IV книги посвящена описанию этой численной модели и полученным с ее помощью результатам.

## ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

### 13.1. Плазма в сильном магнитном поле

**13.1.1. Свойства МГД-течений в ТДС.** В отсутствие токов в оболочке двойной системы магнитное поле будет определяться только собственным полем аккретора  $B_*$ . Поскольку это поле создается токами, распределенными внутри аккретора, то в оболочке двойной системы оно должно удовлетворять условию потенциальности:  $\text{rot } B_* = 0$ . Поэтому в оболочке его можно описывать с помощью скалярного потенциала:  $B_* = -\nabla\varphi$ . В простейшем случае потенциал  $\varphi$  соответствует дипольному полю. Однако магнитное поле аккретора может быть и более сложным (см. гл. 16).

В общем случае собственное вращение аккретора является асинхронным и в системе отсчета, вращающейся вместе с двойной системой, характеризуется угловой скоростью  $\Omega_*$ . Рассмотрим случай, когда ось собственного вращения аккретора совпадает по направлению с осью вращения двойной системы. С учетом асинхронного вращения магнитное поле аккретора является нестационарным. Изменение  $B_*$  во времени можно описать следующим уравнением:

$$\frac{\partial B_*}{\partial t} = \text{rot}(v_* \times B_*), \quad (13.1)$$

где  $v_* = \Omega_* \times (r - r_a)$  — скорость силовых линий магнитного поля аккретора,  $r_a$  — радиус-вектор центра аккретора.

Простые оценки показывают, что в аккреционных струях полярных скорости распространения альфвеновских и магнитозвуковых волн могут во много раз превышать скорость движения самой плазмы, а в некоторых случаях являются релятивистскими. В самом деле, альфвеновская скорость, оцениваемая выражением

$$\frac{u_A}{c} = 2,97 \left( \frac{B_a}{10^7 \text{ Гс}} \right) \left( \frac{\rho}{10^{-9} \text{ г/см}^3} \right)^{-1/2}, \quad (13.2)$$

в аккреционных струях полярных формально может превышать скорость света  $c$ . Поэтому использование нерелятивистской магнитной газодинамики для моделирования структуры такого течения, строго говоря, является некорректным.

Более строгое описание можно получить в рамках приближения релятивистской магнитной газодинамики (см. раздел В.3 в Приложении В). Однако в данном случае для описания течения можно использовать более простую модель. Это обусловлено тем, что течение самой плазмы в аккреционной струе является существенно нерелятивистским, а с релятивистскими скоростями распространяются только альфвеновские и магнитозвуковые волны. За характерное динамическое время эволюции медленного течения плазмы МГД-волны успевают пройти по аккреционной струе в продольном и поперечном направлениях много раз. В результате динамику плазмы в струе можно рассматривать в рамках модифицированной нерелятивистской магнитной газодинамики как некоторое усредненное течение на фоне своеобразной волновой МГД-турбулентности.

**13.1.2. Модификация уравнений МГД.** Прежде чем перейти к модифицированной магнитной газодинамике, описывающей динамику плазмы в сильном магнитном поле, проанализируем как описывается влияние внешнего поля на динамику плазмы в рамках обычной МГД. Полное магнитное поле в плазме  $\mathbf{B}$  можно представить в виде суммы внешнего поля  $\mathbf{B}_*$  и магнитного поля  $\mathbf{b}$ , создаваемого токами в самой плазме,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{b}$ . Поэтому удельная электромагнитная сила может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{f}_{\text{em}} = -\frac{\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}}{4\pi\rho} = -\frac{\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{b}}{4\pi\rho} + \mathbf{f}_*. \quad (13.3)$$

Здесь первое слагаемое в правой части описывает часть электромагнитной силы, обусловленную собственным полем плазмы  $\mathbf{b}$ . Второе слагаемое описывает силу  $\mathbf{f}_*$ , обусловленную наличием внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_*$ ,

$$\mathbf{f}_* = -\frac{\mathbf{B}_* \times \text{rot } \mathbf{b}}{4\pi\rho}. \quad (13.4)$$

При вычислении  $\mathbf{f}_{\text{em}}$  в (13.3) учтено, что внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_*$  является потенциальным:  $\text{rot } \mathbf{B}_* = 0$ . Уравнение индукции с учетом (13.1) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{b}) + \text{rot}[(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}_*] - \text{rot}(\eta_{\text{OD}} \text{rot } \mathbf{b}), \quad (13.5)$$

где  $\eta_{\text{OD}}$  — коэффициент омической диффузии магнитного поля.

Внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_*$  является бессильным и не может оказывать непосредственного воздействия на динамику плазмы. Из выражений (13.4) и (13.5) видно, что это воздействие происходит за счет токов, индуцированных в самой плазме. Действительно, рассмотрим два частных случая движения плазмы в направлении вдоль силовых линий внешнего поля  $\mathbf{B}_*$  и в поперечном направлении. В первом случае  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}_* = 0$  и из уравнения индукции (13.5) следует,

что магнитное поле в плазме  $\mathbf{b}$  не возникает. Это означает, что  $\mathbf{f}_* = 0$  и внешнее поле никакого воздействия на динамику плазмы оказывать не будет. Различные внешние силы (например, сила гравитации аккретора) могут заставлять плазму двигаться в направлении поперек магнитных силовых линий. В этом случае  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}_* \neq 0$  и в плазме будет возникать собственное магнитное поле  $\mathbf{b}$  и соответствующий ток

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{b}. \quad (13.6)$$

Появление этого тока и приводит к возникновению силы  $\mathbf{f}_*$ .

Однако в сильном внешнем магнитном поле быстрые (высокочастотные) поперечные движения будут сопровождаться возникновением и дальнейшим распространением в плазме высокоскоростных альфвеновских и магнитозвуковых волн. С другой стороны, за счет действия поперечных внешних сил плазма будет медленно просачиваться в поперечном направлении сквозь магнитные силовые линии. Таким образом, динамика плазмы в сильном внешнем магнитном поле характеризуется относительно медленным средним движением частиц вдоль магнитных силовых линий, дрейфом поперек силовых линий и распространением с очень большими скоростями на этом фоне альфвеновских и магнитозвуковых волн. Для описания структуры такого течения можно использовать усредненную картину, рассматривая влияние быстрых пульсаций по аналогии с волновой МГД-турбулентностью. Для описания медленного движения самой плазмы необходимо выделить быстро распространяющиеся флуктуации и применить определенную процедуру усреднения по ансамблю волновых пульсаций.

Рассмотрим соотношение

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad (13.7)$$

выражающее закон Ома для плазмы в приближении магнитной газодинамики (см. гл. 4). Здесь  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля в плазме,  $\sigma$  — коэффициент электропроводности. Представим все динамические величины в виде суммы среднего значения и флуктуации, например,  $\mathbf{b} = \langle \mathbf{b} \rangle + \delta \mathbf{b}$ . Усредняя соотношение (13.7), находим:

$$c \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{v} \rangle \times \langle \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}_* + \langle \delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{b} \rangle = \frac{c}{\sigma} \langle \mathbf{j} \rangle. \quad (13.8)$$

Последнее слагаемое в левой части можно оценить часто используемым в теории динамо выражением (см., например, [510], [511])

$$\langle \delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{b} \rangle = \alpha \langle \mathbf{b} \rangle - \eta_w \text{rot } \langle \mathbf{b} \rangle, \quad (13.9)$$

где  $\alpha \propto \langle \delta \mathbf{v} \cdot \text{rot } \delta \mathbf{v} \rangle$  определяется средней спиральностью флуктуаций скорости  $\delta \mathbf{v}$ ,  $\eta_w$  — коэффициент диффузии среднего магнитного

поля, обусловленный волновой МГД-турбулентностью. Первым членом ( $\alpha$ -эффект) можно пренебречь, поскольку он описывает относительно слабый и медленный процесс генерации среднего магнитного поля в аккреционном диске.

Усредняя уравнение Максвелла

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (13.10)$$

находим:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{c}{4\pi} \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle. \quad (13.11)$$

Подставляя выражения (13.9) и (13.11) в (13.8), получим:

$$c \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{v} \rangle \times \langle \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}_* - \eta_w \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle = \eta_{OD} \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle. \quad (13.12)$$

Поскольку, как правило,  $\eta_w \gg \eta_{OD}$ , то правой частью можно пренебречь. Кроме того, в случае сильных внешних магнитных полей можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с третьим.

Далее, усредняя уравнение Максвелла, выражающее закон электромагнитной индукции,

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13.13)$$

получим:

$$c \mathbf{rot} \langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{\partial \langle \mathbf{b} \rangle}{\partial t} - \mathbf{rot} (\mathbf{v}_* \times \mathbf{B}_*). \quad (13.14)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения связано с изменением среднего магнитного поля  $\langle \mathbf{b} \rangle$  за характерные динамические времена. По порядку величины это слагаемое соответствует второму слагаемому в (13.12). Поэтому среднее значение напряженности электрического поля можно оценивать из выражения

$$c \langle \mathbf{E} \rangle = -\mathbf{v}_* \times \mathbf{B}_*. \quad (13.15)$$

Оставляя в (13.12) доминирующие члены, приходим к следующему соотношению:

$$\eta_w \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle = (\langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}_*. \quad (13.16)$$

Полученное выражение можно использовать для вычисления усредненной электромагнитной силы  $\mathbf{f}_{em}$  в уравнении движения. Пренебрегая флуктуациями плотности, а также волновым магнитным давлением и натяжением, находим:

$$\langle \mathbf{f}_{em} \rangle = -\frac{\langle \mathbf{B} \times \mathbf{rot} \mathbf{B} \rangle}{4\pi\rho} = -\frac{\langle \mathbf{b} \rangle \times \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle}{4\pi\rho} + \langle \mathbf{f}_* \rangle. \quad (13.17)$$

Первое слагаемое в правой части описывает электромагнитную силу, обусловленную собственным магнитным полем плазмы  $\langle \mathbf{b} \rangle$ . Для вы-

числения второго слагаемого, описывающего усредненную силу  $\langle \mathbf{f}_* \rangle$ , воспользуемся полученным соотношением (13.16). Имеем

$$\langle \mathbf{f}_* \rangle = -\frac{\mathbf{B}_* \times \text{rot} \langle \mathbf{b} \rangle}{4\pi\rho} = -\frac{\langle (\mathbf{v}) - \mathbf{v}_* \rangle_{\perp}}{t_w}, \quad (13.18)$$

где значок  $\perp$  определяет поперечные к магнитному полю  $\mathbf{B}_*$  компоненты скоростей, а характерное время релаксации

$$t_w = \frac{4\pi\rho\eta_w}{B_*^2}. \quad (13.19)$$

Отметим, что сила  $\langle \mathbf{f}_* \rangle$  имеет только поперечную к полю  $\mathbf{B}_*$  компоненту. Поэтому в отсутствие внешних поперечных сил плазма будет свободно скользить вдоль магнитных силовых линий. Любые поперечные движения будут иметь тенденцию к экспоненциальному затуханию по закону  $\sim \exp(-t/t_w)$ .

Коэффициент диффузии магнитного поля  $\eta_w$ , связанный с волновой МГД-турбулентностью, можно оценить выражением

$$\eta_w = \frac{\tau_w}{3} \langle \delta v^2 \rangle, \quad (13.20)$$

где  $\tau_w$  — корреляционное время пульсаций. Это соотношение можно параметризовать следующим образом:

$$\eta_w = \alpha_w \frac{B_* l_w}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (13.21)$$

где  $\alpha_w$  — некоторый безразмерный параметр, близкий к единице, а  $l_w$  — характерный пространственный масштаб пульсаций. В качестве последнего можно использовать шкалу неоднородности внешнего магнитного поля  $l_w = B_* / |\nabla B_*|$ . Например, в случае дипольного магнитного поля  $l_w \approx r/3$ .

Проведем оценки зависимостей величин  $\eta_w$  и  $t_w$  от радиуса  $r$  в колонковой аккреционной струе. Предполагая однородное распределение плотности в струе, из выражений (13.19), (13.21) получаем  $\eta_w \propto r^{-2}$ ,  $t_w \propto r^4$ . Однако поперечное сечение струи при приближении к аккретору должно меняться. Для учета этого эффекта воспользуемся законом сохранения массы:  $\rho v S = \text{const}$ . Площадь поперечного сечения  $S$  струи можно оценить из закона сохранения магнитного потока  $B_* S = \text{const}$ . При постоянной скорости потока  $v$  получаем  $\eta_w \propto r^{-3/2}$ ,  $t_w \propto r^{5/2}$ . Если скорость потока оценивать скоростью свободного падения  $v \propto r^{-1/2}$ , то  $\eta_w \propto r^{-1}$ ,  $t_w \propto r^3$ . Таким образом, во всех случаях коэффициент диффузии  $\eta_w$  увеличивается при приближении к аккретору, а время релаксации  $t_w$  — уменьшается. Это означает, что вблизи аккретора волновая МГД-турбулентность будет приводить практически к полной диссипации среднего магнитного поля плазмы  $\langle \mathbf{b} \rangle$ , а движение вещества будет происходить, в основном, в направлении магнитных силовых линий.

Модифицированное уравнение индукции можно получить с помощью процедуры усреднения исходного уравнения (13.5). Используя соотношение (13.9) и пренебрегая  $\alpha$ -эффектом, находим:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{b} \rangle}{\partial t} = \mathbf{rot}(\langle \mathbf{v} \rangle \times \langle \mathbf{b} \rangle) + \mathbf{rot}[(\langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_* ) \times \mathbf{B}_*] - \mathbf{rot}(\eta_w \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle). \quad (13.22)$$

При выводе этого уравнения учтено, что  $\eta_{OD} \ll \eta_w$ . Таким образом, полученное модифицированное уравнение индукции по своему виду совпадает с исходным уравнением (13.5). Однако в нем вместо самих величин используются их средние значения, а диффузия магнитного поля определяется волновой МГД-турбулентностью.

**13.1.3. Учет холловских токов.** На структуру МГД-течения в магнитных ТДС существенное влияние может оказывать эффект Холла (см. гл. 4, параграф 4.5). Напомним, что этот эффект проявляется в замагниченной плазме, когда  $\omega_B \tau \gg 1$ , где  $\omega_B$  — ларморовская частота электронов,  $\tau$  — характерное время между столкновениями электронов с ионами ( $\tau^{-1}$  — частота столкновений).

Для исследования влияния холловских токов на динамику плазмы оценим параметры, характеризующие этот эффект. Эффективная частота кулоновских столкновений в полностью ионизованной плазме с учетом экранировки зарядов на больших расстояниях определяется выражением [155]

$$\tau^{-1} = 5,5 T^{-3/2} n \Lambda_C \quad [\text{с}^{-1}], \quad (13.23)$$

где  $T$  — температура,  $n$  — концентрация частиц в плазме,  $\Lambda_C = \ln(220 T n^{-1/3})$  — кулоновский логарифм. Длина свободного пробега  $l$  и ларморовский радиус  $r_L$  электронов определяются выражениями

$$l = v_T \tau, \quad r_L = \frac{v_T}{\omega_B}, \quad (13.24)$$

где  $v_T = \sqrt{kT/m_e}$  — тепловая скорость электронов. Поскольку  $\omega_B \tau = l/r_L$ , то условие замагниченности плазмы  $\omega_B \tau \gg 1$  равносильно условию  $l \gg r_L$ . Это означает, что в замагниченной плазме электроны совершают движения, в основном, по ларморовским орбитам. За время между столкновениями они успевают совершить много оборотов вокруг магнитных силовых линий. В этом случае в плазме будет проявляться существенная анизотропия, связанная с наличием сильного магнитного поля.

Выделим в магнитных ТДС такие характерные области течения, как аккреционный диск (АД), магнитосферу акретора в промежуточных полярах (МС) и аккреционную колонку в промежуточных полярах (АК). Значения параметров плазмы в этих областях приведены в табл. 13.1. Заметим, что в аккреционных струях полярных параметры плазмы имеют приблизительно такие же значения, как и в аккреционных колонках промежуточных полярных. Используя значения

из табл. 13.1, находим, что в аккреционном диске  $\omega_{BT} \approx 0,0035$ , в магнитосфере  $\omega_{BT} \approx 11208$ , а в аккреционной колонке  $\omega_{BT} \approx 24,4$ . Таким образом, приведенные простые оценки показывают, что эффект Холла может проявляться в области магнитосферы аккректора, в аккреционных колонках и аккреционных струях полярных, а также, по видимому, в разреженной оболочке двойной системы. В аккреционном диске влиянием эффекта Холла, как правило, можно пренебречь.

Таблица 13.1. Характерные значения параметров для различных областей течения в магнитных ТДС. Обозначения: АД — аккреционный диск, МС — магнитосфера, АК — аккреционная колонка

	$B$ , Гс	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	$\tau^{-1}$ , с <sup>-1</sup>	$l$ , см	$r_L$ , см	$\omega_B$ , с <sup>-1</sup>
АД	100	$10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^{11}$	$8 \cdot 10^{-4}$	0,02	$1,8 \cdot 10^9$
МС	$10^4$	$10^{-12}$	$1,6 \cdot 10^7$	2,6	$2 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{11}$
АК	$10^5$	$10^{-8}$	$7 \cdot 10^{10}$	$5,7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{12}$

Для учета холловских токов необходимо заново провести выкладки из предыдущего раздела но в рамках более общих предположений. Именно, исходное уравнение (13.7), выражающее собой обобщенный закон Ома, должно быть теперь заменено на уравнение

$$\mathbf{j} + \frac{\omega_{BT}}{B} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \sigma \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (13.25)$$

Это уравнение нужно усреднить. При этом, в частности,

$$\langle \mathbf{j} \times \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle \times \langle \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{j} \rangle \times \mathbf{B}_* + \langle \delta \mathbf{j} \times \delta \mathbf{b} \rangle. \quad (13.26)$$

Здесь последнее слагаемое в правой части можно опустить, поскольку оно связано с волновыми магнитными давлением и натяжением. Как и в предыдущем разделе, пренебрежем этими эффектами. После несложных преобразований приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \eta_{OD} \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle + \frac{\omega_{BT}}{B} \eta_{OD} (\mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle \times \langle \mathbf{b} \rangle) + \frac{\omega_{BT}}{B} \eta_{OD} (\mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle \times \mathbf{B}_*) = \\ = c \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{v} \rangle \times \langle \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}_* - \eta_w \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Используя равенство (13.15) и оставляя в (13.27) доминирующие члены, получим

$$\eta_w \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle - \frac{\omega_{BT}}{B} \eta_{OD} (\mathbf{B}_* \times \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle) = (\langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}_*. \quad (13.28)$$

Это выражение является обобщением (13.16) на случай учета холловских токов.

Отметим, что так же как и в предыдущем случае, из (13.28) следует:  $\mathbf{B}_* \cdot \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle = 0$ . Иными словами, усредненный ток  $\langle \mathbf{j} \rangle$  имеет только поперечную к полю  $\mathbf{B}_*$  компоненту. Это обстоятельство позволяет



в (13.28) выразить  $\mathbf{B}_* \times \text{rot} \langle \mathbf{b} \rangle$  явным образом. Для этого умножим (13.28) векторно на  $\mathbf{B}_*$  слева. Находим:

$$\eta_w (\mathbf{B}_* \times \text{rot} \langle \mathbf{b} \rangle) + \frac{\omega_{B\tau}}{B} \eta_{\text{OD}} B_*^2 \text{rot} \langle \mathbf{b} \rangle = B_*^2 (\langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_*)_{\perp}. \quad (13.29)$$

Отсюда и из (13.28) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_* \times \text{rot} \langle \mathbf{b} \rangle = & \frac{1}{1 + \chi^2} \frac{B_*^2}{\eta_w} (\langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_*)_{\perp} + \\ & + \frac{\chi}{1 + \chi^2} \frac{B_*^2}{\eta_w} [\mathbf{n}_* \times (\langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_*)], \end{aligned} \quad (13.30)$$

где  $\mathbf{n}_*$  — единичный вектор в направлении вектора  $\mathbf{B}_*$ , а коэффициент

$$\chi = \frac{\omega_{B\tau}}{B} \frac{\eta_{\text{OD}}}{\eta_w} B_*. \quad (13.31)$$

Выражение (13.18) для средней электромагнитной силы  $\langle \mathbf{f}_* \rangle$ , действующей со стороны внешнего магнитного поля, с учетом холловских токов преобразуется к виду

$$\langle \mathbf{f}_* \rangle = -\frac{1}{1 + \chi^2} \frac{(\langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_*)_{\perp}}{t_w} - \frac{\chi}{1 + \chi^2} \frac{\mathbf{n}_* \times (\langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_*)}{t_w}. \quad (13.32)$$

В отличие от выражения (13.18), выведенного без учета эффекта Холла, в данном случае в первом слагаемом в правой части возникает поправочный коэффициент, по сути модифицирующий время релаксации  $t_w$  в (13.18):  $t_w \rightarrow (1 + \chi^2)t_w$ . Кроме этого появляется второе слагаемое в правой части. Это слагаемое соответствует дополнительной силе, которая также действует в поперечном к магнитному полю направлении, но не в плоскости векторов  $\mathbf{B}_*$  и  $\langle \mathbf{v} \rangle - \mathbf{v}_*$ , а перпендикулярно этой плоскости.

Полученное выражение (13.32) переходит в исходное выражение (13.18) в пределе при  $\chi \rightarrow 0$ . Следует отметить, что коэффициент  $\chi$  можно переписать в более наглядном виде. Подставляя в (13.31) формулы для  $\omega_B$ ,  $\eta_{\text{OD}}$  и  $\eta_w$ , находим:

$$\chi = \frac{1}{\omega_{B,p} t_w}, \quad (13.33)$$

где

$$\omega_{B,p} = \frac{eB_*}{m_p c} \quad (13.34)$$

определяет ларморовскую частоту для протонов в магнитном поле аккректора  $\mathbf{B}_*$ .

Наконец, получим модифицированное уравнение индукции с учетом эффекта Холла. В качестве исходного уравнения индукции теперь нужно рассматривать уравнение (4.110). Усредняя его по ансамблю волновых пульсаций по аналогии с выводом уравнения (13.22) и оставляя доминирующие члены, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{b} \rangle}{\partial t} = \mathbf{rot}(\langle \mathbf{v} \rangle \times \langle \mathbf{b} \rangle) + \mathbf{rot}[\langle (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}_* \rangle] - \\ - \mathbf{rot}(\eta_w \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle) + \mathbf{rot}[\chi \eta_w (\mathbf{n}_* \times \mathbf{rot} \langle \mathbf{b} \rangle)]. \quad (13.35)$$

Это уравнение индукции отличается от уравнения (13.22) из предыдущего раздела наличием последнего слагаемого в правой части, описывающего эффект Холла. Оно исчезает в пределе при  $\chi \rightarrow 0$ .

## 13.2. Численная модель, основанная на усредненных характеристиках течения

**13.2.1. Основные уравнения.** В полуразделенных двойных системах звезда-донор заполняет свою внутреннюю критическую поверхность. В описываемой модели эта поверхность отождествляется с полостью Роша в ограниченной задаче трех тел. Напомним (см. ч. I), что в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  системы вокруг общего центра масс, потенциал Роша  $\Phi$  определяется выражением:

$$\Phi = -\frac{GM_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{GM_d}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_d|} - \frac{1}{2} [\Omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)]^2, \quad (13.36)$$

где  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}_d$  — радиус-векторы центров аккретора и донора, а  $M_a$  и  $M_d$  — их массы, соответственно,  $\mathbf{r}_c$  — радиус-вектор центра масс двойной системы. Обмен веществом в системе происходит через внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$ , поскольку в этой точке градиент давления не уравновешивается силой тяготения.

Для описания течения в двойной системе используем декартову систему координат  $(x, y, z)$ , заданную следующим образом. Начало координат находится в центре аккретора:  $\mathbf{r}_a = (0, 0, 0)$ . Центр масс донора лежит на расстоянии  $A$  на оси  $x$  от центра аккретора:  $\mathbf{r}_d = (-A, 0, 0)$ . Ось  $z$  направлена вдоль оси вращения:  $\Omega = (0, 0, \Omega)$ .

В лабораторной инерциальной системе отсчета, связанной с внешним наблюдателем, уравнения магнитной газодинамики можно записать следующим образом:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (13.37)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P - \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{rot} \mathbf{B}}{4\pi} + \rho \mathbf{g}, \quad (13.38)$$

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{rot}(\eta \mathbf{rot} \mathbf{B}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13.39)$$

$$\rho \Gamma \frac{Ds}{Dt} = n^2 (\Gamma - \Lambda) + \frac{\eta}{4\pi} (\mathbf{rot} \mathbf{B})^2, \quad (13.40)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}$  — скорость в инерциальной системе отсчета,  $P$  — давление,  $\mathbf{B}$  — индукция магнитного поля,  $s$  — энтропия, рассчитанная на единицу массы газа,  $n = \rho/m_p$  — концентрация,  $m_p$  — масса

протона,  $\eta$  — коэффициент магнитной вязкости,  $\mathbf{g}$  — гравитационная сила от звезд, рассчитанная на единицу массы. Зависимости функций радиационного нагрева  $\Gamma = \Gamma(T)$  и охлаждения  $\Lambda = \Lambda(T)$  от температуры  $T$  имеют достаточно сложный вид (см. рис. 3.4). Последний член в правой части уравнения для энтропии (13.40) описывает нагрев вещества за счет диссипации токов. Плотность, энтропия и давление связаны уравнением состояния идеального газа:  $s = c_V \ln(P/\rho^\gamma)$ , где  $c_V$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты. В этих уравнениях использовано обозначение  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  для полной производной в инерциальной системе отсчета.

Преобразуем эти уравнения к вращающейся системе отсчета. Обозначим скорость газа во вращающейся системе отсчета через  $\mathbf{v}$ . Тогда скорости связаны соотношением

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c), \quad (13.41)$$

а магнитное поле не меняется, поскольку скорости газа  $v \ll c$  (см., например, [162]). Полные производные от скалярной  $\varphi$  и векторной  $\mathbf{a}$  величин преобразуются следующим образом:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{D\mathbf{a}}{Dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}, \quad (13.42)$$

где полная производная во вращающейся системе отсчета  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ .

Поскольку  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = 0$ , то  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ . Поэтому уравнение непрерывности (13.37) принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (13.43)$$

Далее имеем

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) + \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)]. \quad (13.44)$$

С учетом этого соотношения уравнение движения (13.38) записываем в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \frac{\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}}{4\pi} + \rho \mathbf{g} + 2\rho (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) - \rho \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)]; \quad (13.45)$$

Член  $2(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})$  в этом уравнении описывает силу Кориолиса, а последнее слагаемое — центробежную силу. Заметим, что

$$\mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)] = -\nabla \Phi, \quad (13.46)$$

где  $\Phi$  — потенциал Роша (13.36). Уравнение (13.40) для энтропии переписывается в виде:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = n^2 (\Gamma - \Lambda) + \frac{\eta}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{B})^2. \quad (13.47)$$

Наконец, при преобразовании уравнения индукции (13.39) заметим, что  $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}$ . Поэтому во вращающейся системе отсчета, находим:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \text{rot}(\eta \text{rot} \mathbf{B}). \quad (13.48)$$

Окончательно, уравнения магнитной газодинамики во вращающейся системе отсчета можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13.49)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{B}}{4\pi\rho} + 2(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) - \nabla \Phi, \quad (13.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \text{rot} \mathbf{B}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13.51)$$

$$\rho T \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s \right] = n^2 (\Gamma - \Lambda) + \frac{\eta}{4\pi} (\text{rot} \mathbf{B})^2. \quad (13.52)$$

Для описания течения плазмы, возникающего в результате массообмена в ТДС, с учетом сильного магнитного поля  $\mathbf{B}_*$  компактного объекта необходимо перейти к усредненным величинам с помощью процедуры усреднения, описанной в предыдущем параграфе. В дальнейшем для упрощения записи угловые скобки для обозначения усредненных величин будем опускать. В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = & -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{b}}{4\pi\rho} + \\ & + 2(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) - \nabla \Phi - \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)_{\perp}}{t_w}, \end{aligned} \quad (13.54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{b} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}_* - \eta \text{rot} \mathbf{b}], \quad (13.55)$$

$$\rho T \left[ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s \right] = n^2 (\Gamma - \Lambda) + \frac{\eta}{4\pi} (\text{rot} \mathbf{b})^2. \quad (13.56)$$

Последнее слагаемое в уравнении движения (13.54) описывает силу, действующую на плазму со стороны магнитного поля аккректора и влияющую на поперечную к направлению магнитных силовых линий компоненту скорости плазмы  $\mathbf{v}_{\perp}$ . Отметим, что движение частиц плазмы поперек магнитного поля вызывается, в основном, силой гравитации компактного объекта (гравитационный дрейф) [151–153]. Вследствие ларморовского характера движения частиц в магнитном поле происходит торможение их усредненного движения в поперечном направлении. Сильное внешнее магнитное поле выступает в роли эффективной жид-

кости, с которой взаимодействует плазма. При этом последний член в уравнении (13.54) можно трактовать как силу трения между плазмой и магнитным полем, который по своему виду аналогичен силе трения между компонентами в плазме, состоящей из нескольких сортов частиц [151] (см. формулу (4.68)).

Следует отметить, что похожее выражение для электромагнитной силы со стороны сильного магнитного поля аккректора использовалось в работах [106, 112–117], в которых структура течения моделировалась в рамках метода квазичастиц. При этом в качестве квазичастиц подразумевались отдельные комки плазмы, попадающие в полость Роша аккректора через внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$ . Авторы этих работ обосновывали выражение для тормозящей силы вида  $-v_{\perp}/t_w$  тем, что при движении комков плазмы во внешнем магнитном поле в них возникает диамагнитный эффект [512], препятствующий их свободному движению поперек магнитных силовых линий.

При записи уравнений (13.53)–(13.56) не учтены холловские токи. Это обусловлено тем, что мы будем рассматривать, главным образом, структуру течения в аккреционном диске, где эффектом Холла можно пренебречь. Однако учет холловских токов никаких принципиальных затруднений не вызывает. Для этого необходимо внести соответствующие поправки в уравнения движения (13.54) и индукции (13.55). Все эти поправки были подробно описаны в предыдущем параграфе.

Приведем некоторые пояснения по поводу используемого нами в численной модели уравнения для энтропии (13.56) вместо уравнения энергии. С одной стороны, существенным недостатком такого подхода является то, что при моделировании течений с ударными волнами получаемые численные решения отличаются от истинных обобщенных решений соответствующих газодинамических и МГД-задач. Это связано с тем, что описываемый численный метод в качестве одной из консервативных переменных использует плотность энтропии  $\rho s$ , а не плотность полной энергии газа. На ударных волнах полная энергия газа должна сохраняться, а энтропия газа при прохождении по нему ударной волны должна возрастать вследствие диссипативных процессов в ударном переходе (см., например, [145]). Поэтому рассчитываемые в рамках данного подхода скорости ударных волн и значения скачков величин на них будут отличаться от истинных. При этом, однако, структура контактных разрывов и волн разрежения будет моделироваться корректно, поскольку в них энтропия газа не изменяется. Эти замечания налагают определенные ограничения на использование нашей численной модели для расчета структуры МГД-течений. Именно, применение этой модели является корректным, в тех случаях, когда в области течения отсутствуют достаточно сильные ударные волны. Однако в задачах моделирования аккреции в ТДС сильных ударных волн, как правило, не возникает. Поэтому в этих случаях получаемые численные решения описывают картину возникающего течения с достаточно хорошей точностью. В связи с этим необходимо сделать следующее важное

замечание. Если в точном решении в области течения присутствуют ударные волны, то они будут вполне однозначно возникать и в численном решении, получаемом в рамках рассматриваемой модели. Таким образом, сам факт возникновения в расчетах какой-либо ударной волны будет указывать на то, что эта ударная волна присутствует в каком-либо виде и в точном решении. Но в отличие от точного решения в данной модели положение фронта этой ударной волны и скачки величин при переходе через нее будут рассчитаны неточно.

С другой стороны, подход, основанный на использовании энтропии вместо энергии, имеет свои существенные достоинства. Дело в том, что в процессе аккреции на компактный гравитирующий объект, скорости газа вблизи поверхности звезды могут достигать достаточно больших значений порядка скорости свободного падения. При этом плотность полной энергии газа  $e = \rho\varepsilon + \rho v^2/2$  будет в основном определяться плотностью кинетической энергии  $\rho v^2/2$ . В подходе, основанном на уравнении энергии, при вычислении внутренней энергии газа  $\varepsilon$  в области вблизи звезды приходится вычитать из одного большого числа (плотность полной энергии  $e$ ) другое большое число (плотность кинетической энергии  $\rho v^2/2$ ). Такая операция может приводить к численным ошибкам, в результате чего, внутренняя энергия газа  $\varepsilon$  (а следовательно, и его температура  $T$ ) в области вблизи поверхности звезды будут вычисляться неточно. Расчеты тестовой задачи об аккреции адиабатического ( $\gamma = 5/3$ ) газа на гравитирующую точечную массу (так называемая, аккреция Бонди [513]) показывают, что такие численные ошибки в некоторых местах могут даже приводить к нефизической ситуации, когда получаемые значения внутренней энергии  $\varepsilon$  (а, значит температуры  $T$  и давления  $P$ ) оказываются отрицательными. Заметим, что учет магнитного поля может еще более ухудшить эту ситуацию. В нашем случае это совершенно неприемлемо, поскольку при учете магнитных полей в ТДС важнейшим элементом течения является магнитосфера, формирующаяся вблизи поверхности аккретора. Поэтому для корректного моделирования структуры магнитосферы необходимо, чтобы в численном методе значения всех величин в области течения вблизи аккретора рассчитывались корректно. Эти соображения обусловили наш выбор уравнения для энтропии при построении численной модели. Как показывают результаты тестовых расчетов аккреции Бонди, наша численная модель дает решение, практически совпадающее с точным во всей расчетной области. Это отчасти связано с тем, что в точном решении этой задачи энтропия газа во всем пространстве является постоянной.

**13.2.2. Магнитное поле аккретора и диска.** Будем считать, что звезда-аккретор обладает собственным магнитным полем дипольного типа. Потенциал, соответствующий дипольной компоненте поля [476],

$$\varphi = \frac{\mu(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \quad (13.57)$$

где  $\mu$  — магнитный момент аккретора,  $\mathbf{d}$  — единичный вектор, определяющий ось симметрии дипольного поля. Вектор магнитного момента  $\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{d}$ . Индукция магнитного поля

$$\mathbf{B}_* = \frac{\mu}{r^3} [3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}], \quad (13.58)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . Обозначим через  $B_a$  величину индукции магнитного поля на магнитном полюсе звезды. Тогда из выражения (13.58) магнитный момент  $\mu = B_a R_a^3/2$ , где  $R_a$  — радиус аккретора.

На поверхности аккретора, когда  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_a$ , вектор индукции магнитного поля (13.58) принимает вид

$$\mathbf{B}_*(\mathbf{R}_a) = \frac{B_a}{2} (3 \cos \Theta \mathbf{n} - \mathbf{d}), \quad (13.59)$$

где теперь  $\mathbf{n}$  имеет смысл вектора нормали к поверхности звезды, а  $\Theta$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{d}$ . Введем еще вектор  $\boldsymbol{\tau}$ , касательный к магнитному меридиану. Поскольку векторы  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  лежат в одной плоскости, то один из них можно выразить через два других. Это легко сделать, если заметить, что угол между векторами  $\mathbf{d}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  равен  $\Theta + \pi/2$ . Поэтому скалярное произведение  $\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\sin \Theta$ . Квадрат вектора  $\mathbf{B}_*$ , а также его нормальная и тангенциальные компоненты на поверхности звезды определяются выражениями

$$B_*^2 = \frac{B_a^2}{4} (3 \cos^2 \Theta + 1), \quad (13.60)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_* = B_a \cos \Theta, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_* = \frac{B_a}{2} \sin \Theta. \quad (13.61)$$

Распределения этих величин вдоль магнитного меридиана на поверхности аккретора показаны на рис. 13.1. Видно, что распределение абсолютной величины индукции дипольного магнитного поля на поверхности аккретора обладает как осевой, так и экваториальной симметрией. Максимальное значение индукции, равное  $B_a$ , достигается на магнитных полюсах, а минимальное значение, равное  $B_a/2$ , — на магнитном экваторе. В северном магнитном полушарии ( $\Theta < \pi/2$ ) нормальная компонента поля положительна и поэтому магнитные силовые линии выходят из аккретора. В южном магнитном полушарии ( $\Theta > \pi/2$ ) нормальная компонента поля, наоборот, становится отрицательной и магнитные силовые линии входят в аккретор. На магнитных полюсах поле имеет только нормальную компоненту, а на магнитном экваторе — только тангенциальную.

В общем случае собственное вращение аккретора является асинхронным и в выбранной системе отсчета характеризуется угловой скоростью  $\Omega_*$ . Будем рассматривать частный случай, когда ось собственного вращения аккретора совпадает по направлению с осью вращения двойной системы:  $\boldsymbol{\Omega}_* = (0, 0, \Omega_*)$ .

С другой стороны, направление вектора магнитного момента  $\boldsymbol{\mu}$  может не совпадать с направлением вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$  двойной

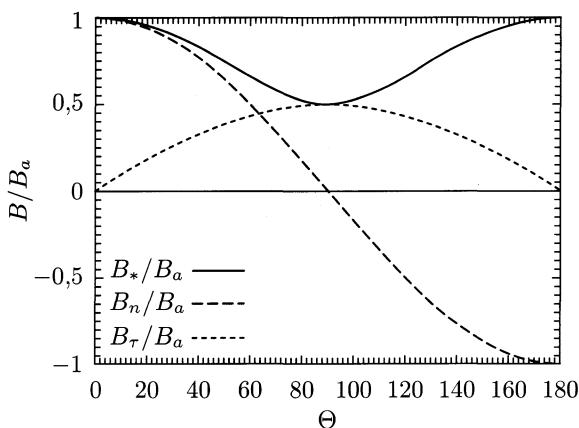


Рис. 13.1. Распределение индукции дипольного магнитного поля на поверхности аккректора

системы. Обозначим угол наклона вектора  $\mu$  относительно оси  $z$  через  $\theta$ , а зависящий от времени угол между осью  $x$  и проекцией вектора  $\mu$  на плоскость  $xy$  через  $\varphi = \Omega_* t + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — начальное значение этого угла. Тогда компоненты магнитного момента будут иметь следующий вид:

$$\mu_x = \mu \sin \theta \cos \varphi, \quad \mu_y = \mu \sin \theta \sin \varphi, \quad \mu_z = \mu \cos \theta, \quad (13.62)$$

где  $\mu$  — модуль вектора  $\mu$ . Геометрия дипольного магнитного поля аккректора для случая наклона магнитной оси  $\theta = 30^\circ$  показана на рис. 13.2. Градация серого цвета на поверхности звезды соответствует величине индукции магнитного поля. При этом величина поля растет от светлого оттенка к темному. На рисунке показаны также ось вращения аккректора (тонкая прямая линия) и магнитная ось (наклонная жирная линия).

Таким образом, магнитное поле аккректора является нестационарным:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial t} = \frac{3(\dot{\mu} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\dot{\mu}}{r^3}, \quad (13.63)$$

где вектор  $\dot{\mu} = \Omega_* (-\mu_y, \mu_x, 0)$ . Отметим, что в случаях  $\Omega_* = 0$  (синхронное вращение аккректора) и  $\theta = 0, \pi$  (магнитная ось аккректора совпадает с его осью вращения)  $\dot{\mu} = 0$  и, следовательно, магнитное поле аккректора не изменяется со временем.

В аккреционном диске течение имеет турбулентный характер и поэтому скорость и магнитное поле можно представить следующим образом:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \delta \mathbf{B}, \quad (13.64)$$



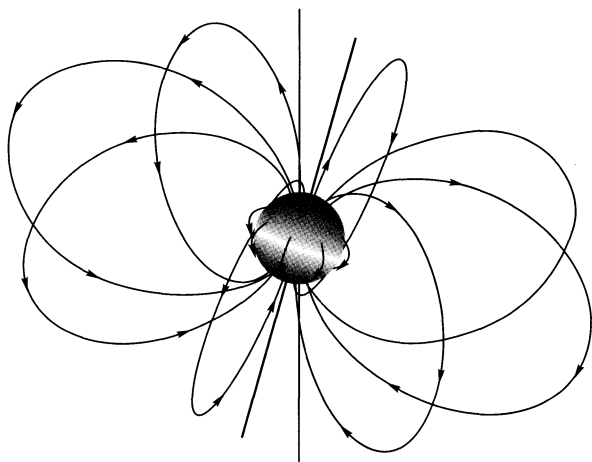


Рис. 13.2. Геометрия дипольного магнитного поля аккректора. Градация серого цвета на поверхности звезды соответствует величине индукции магнитного поля. Величина поля растет от светлого оттенка к темному. Показаны ось вращения аккректора и магнитная ось

где  $\langle \mathbf{v} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{B} \rangle$  — усредненные величины, а  $\delta \mathbf{v}$  и  $\delta \mathbf{B}$  — мелкомасштабные флуктуации на фоне среднего течения. Усредняя уравнение индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \mathbf{rot}(\eta_{\text{OD}} \mathbf{rot} \mathbf{B}) \quad (13.65)$$

по ансамблю турбулентных пульсаций, получим

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \mathbf{rot} [\langle \mathbf{v} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B} \rangle - \eta_{\text{OD}} \mathbf{rot} \langle \mathbf{B} \rangle]. \quad (13.66)$$

Среднее значение (см. [510])

$$\langle \delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B} \rangle = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \eta_{\text{T}} \mathbf{rot} \langle \mathbf{B} \rangle, \quad (13.67)$$

где  $\alpha$  — осесимметричная функция, связанная со спиральностью течения, а  $\eta_{\text{T}}$  — коэффициент магнитной вязкости, обусловленный турбулентностью. Уравнения (13.66), (13.67) означают, что турбулентный характер течения в аккреционном диске будет приводить не только к накручиванию поля вследствие дифференциального вращения, но и к генерации полоидальной компоненты магнитного поля ( $\alpha\omega$ -динамо).

В нашей модели турбулентная вязкость (в уравнении движения) явным образом не учитывается. Однако в решении всегда присутствует численная вязкость, которая определяется используемой разностной схемой и разрешением расчетной сетки. Результаты численного моделирования позволяют определить параметр Шакуры–Сюняева  $\alpha_{\text{T}}$ , характеризующий турбулентную вязкость в аккреционном диске.

Например, в приведенных выше (см. гл. 9) газодинамических расчетах в аккреционном диске в системе SS Cyg величина  $\alpha_T$  оказалась равной 0,01–0,1, что соответствует наблюдениям.

В аккреционных дисках, формирующихся в ТДС, орбиты частиц являются эллиптическими. Поэтому течение имеет неосесимметричный характер. Это может служить дополнительным источником динамо. Усреднение уравнения индукции (13.65) по азимуту приводит к уравнению (13.66), но в котором  $\langle \mathbf{v} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{B} \rangle$  — усредненные по азимуту осесимметричные величины, а  $\delta \mathbf{v}$  и  $\delta \mathbf{B}$  описывают неосесимметричные отклонения. В случае, когда неосесимметричные члены малы по сравнению с осесимметричными, а магнитное поле является почти тороидальным, можно показать, что [509]

$$\langle \delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B} \rangle = \alpha \langle B \rangle \mathbf{n}_\varphi, \quad (13.68)$$

где  $\mathbf{n}_\varphi$  — азимутальный единичный вектор. Соотношения (13.67) и (13.68) дают очень близкие результаты, если магнитное поле является преимущественно тороидальным, что выполняется для аккреционных дисков в ТДС. Подчеркнем, что в данной численной модели учитываются оба этих эффекта и, таким образом, это позволяет исследовать процесс динамо-генерации магнитного поля и формирующуюся магнитную структуру аккреционного диска. Более подробно структура магнитного поля в аккреционном диске описана ниже в гл. 15.

**13.2.3. Диффузия магнитного поля.** К диссипации магнитного поля в плазме могут приводить процессы омической, амбиполярной и турбулентной диффузии. Поскольку плазма в аккреционных дисках, формирующихся в тесных двойных системах, является, как правило, почти полностью ионизованной, то амбиполярной диффузией (см. раздел 4.5.2) можно пренебречь. С другой стороны коэффициент турбулентной диффузии магнитного поля на несколько порядков превышает коэффициент омической диффузии [83, 108]. Поэтому в нашей модели процессы омической диффузии не учитываются.

Известно (см., например, [108]), что в аккреционных дисках, формирующихся в тесных двойных системах турбулентная диффузия магнитного поля определяется двумя основными эффектами. Первый эффект обусловлен магнитным пересоединением и диссипацией токов в турбулентных вихрях. Коэффициент диффузии, соответствующий этому эффекту, можно оценить выражением [83]  $\eta_T = \alpha_T c_s H$ , где  $c_s$  — скорость звука,  $H$  — полутолщина диска,  $\alpha_T$  — параметр Шакуры–Сюняева, характеризующий турбулентную вязкость в аккреционном диске. Оценивая  $H$  из условия вертикального гидростатического равновесия диска, получаем

$$\eta_T = \alpha_T \frac{c_s^2}{\omega_K}, \quad (13.69)$$

где  $\omega_K$  — угловая скорость вращения кеплеровского диска.

Второй эффект связан с плавучестью силовых трубок тороидального магнитного поля, генерируемого в диске в результате дифференциального вращения. Коэффициент диффузии магнитного поля, соответствующий этому эффекту, можно оценить, рассматривая устойчивость равновесия магнитных силовых трубок в диске [510]. Несложный анализ приводит к выражению:  $\eta_B = \alpha_B l_P |b_\varphi| / \sqrt{4\pi\rho}$ , где  $\alpha_B$  — коэффициент эффективности магнитной плавучести, близкий к единице,  $l_P$  — шкала неоднородности давления. Полагая  $l_P = H$ , находим:

$$\eta_B = \alpha_B \frac{c_s |b_\varphi|}{\omega_K \sqrt{4\pi\rho}}. \quad (13.70)$$

В системах с сильным магнитным полем аккреционный диск может вообще не формироваться и течение будет иметь характер колонковой струи, направленной из внутренней точки Лагранжа  $L_1$  к магнитному полюсу аккретора. В этом случае основным эффектом, приводящим к диссипации токов в плазме, по-видимому, будет волновая МГД-турбулентность, обусловленная распространением в колонковой аккреционной струе альфвеновских и магнитозвуковых волн. При этом скорость этих волн будет во много раз превышать скорость самой плазмы, а в некоторых случаях может быть даже релятивистской. Коэффициент диффузии магнитного поля  $\eta_w$ , связанный с волновой МГД-турбулентностью, можно оценить выражением (см. предыдущий параграф)

$$\eta_w = \alpha_w \frac{B_* l_w}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (13.71)$$

где  $\alpha_w$  — близкий к единице безразмерный параметр, определяющий эффективность волновой диффузии, а  $l_w$  — характерный пространственный масштаб пульсаций. В качестве последнего можно использовать шкалу неоднородности внешнего магнитного поля  $l_w = B_* / |\nabla B_*|$ . Для случая дипольного магнитного поля  $l_w \approx r/3$ .

Полный коэффициент диффузии магнитного поля  $\eta = \eta_T + \eta_B + \eta_w$ . В приведенных ниже расчетах использовались значения  $\alpha_T = 0,01$ ,  $\alpha_B = 0,01$ ,  $\alpha_w = 0,3$ . Следует отметить, что коэффициент магнитной вязкости  $\eta_B$ , обусловленный магнитной плавучестью, зависит от величины магнитного поля в плазме  $b$ . Поэтому турбулентная диффузия магнитного поля в целом имеет нелинейный характер.

### 13.3. Численный метод

**13.3.1. Расщепление по физическим процессам.** Допустим, что нам известно распределение всех величин в расчетной области в момент времени  $t^n$ . Для получения этих значений на следующем временном слое, соответствующем моменту времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ , проведем расщепление системы уравнений (13.53)–(13.56) по физическим процессам. Полный алгоритм состоит из пяти последовательных шагов. Приведем их краткое описание.

На первом шаге алгоритма выделяется подсистема уравнений, описывающая динамику плазмы в собственном магнитном поле.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13.72)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{b}}{4\pi\rho}, \quad (13.73)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{b}), \quad (13.74)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0. \quad (13.75)$$

Эта система уравнений по своему виду совпадает с уравнениями идеальной магнитной газодинамики [162] (см. гл. 4). Для ее численного решения используется разностная схема годовновского типа повышенного порядка точности [508, 514], описанная ниже в этом параграфе. При этом при построении разностной схемы применялась техника унифицированных переменных для уравнений МГД [514], которая позволяет использовать в численном коде адаптивные сетки. В приводимых ниже расчетах использовалась геометрически адаптивная сетка, сгущающаяся к плоскости экватора и к поверхности звезды-аккретора. Это позволило значительно повысить пространственное разрешение вертикальной структуры аккреционного диска и в области магнитосферы звезды-аккретора. Для очистки дивергенции магнитного поля  $\mathbf{b}$  используется восьми-волновой метод (см. раздел 7.4.5.). Заметим, что внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_*$  в эту систему уравнений не входит. Этот прием напоминает метод исключения сильного внешнего магнитного поля [515], использованный в работах других авторов (см., например, [118, 218, 328]). Отметим, что аналогичный метод исключения фонового поля использовался в наших ранних работах [122, 508]. В результате использования такого приема ограничения временного шага  $\Delta t$ , связанные с условием устойчивости разностной схемы (условием Куранта–Фридрихса–Леви), будут не слишком жесткие<sup>1)</sup>.

На втором этапе учитывается изменение скорости газа за счет внешних сил (Кориолиса и градиента потенциала Роша):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 2(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{g}. \quad (13.76)$$

<sup>1)</sup> Следует отметить, что ранее использовавшаяся нами модель [122, 123, 508] позволяла проводить моделирование структуры течения в ТДС с учетом только относительно слабого магнитного поля аккретора ( $B_a = 10^5$  Гс на поверхности). Моделирование с большими значениями  $B_a$  затруднялось тем, что увеличение индукции магнитного поля приводит к слишком жестким ограничениям на величину временного шага в условии устойчивости разностной схемы. Использование методики учета сильных магнитных полей, описанной в предыдущем параграфе, позволило снять это ограничение.

Все остальные величины на данном шаге алгоритма считаются неизменными. Поскольку потенциал Роша не зависит от времени, то решение этого уравнения на интервале  $t^n \leq t \leq t^{n+1}$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} v_x &= A \cos(2\Omega t) + B \sin(2\Omega t) + \frac{g_y}{2\Omega}, \\ v_y &= B \cos(2\Omega t) - A \sin(2\Omega t) - \frac{g_x}{2\Omega}, \\ v_z &= v_z^0 - g_z(t - t^n). \end{aligned} \quad (13.77)$$

В этих выражениях константы интегрирования  $A$  и  $B$  определяются из начальных условий:

$$\begin{aligned} A &= \left(v_x^0 - \frac{g_y}{2\Omega}\right) \cos(2\Omega t^n) - \left(v_y^0 + \frac{g_x}{2\Omega}\right) \sin(2\Omega t^n), \\ B &= \left(v_x^0 - \frac{g_y}{2\Omega}\right) \sin(2\Omega t^n) + \left(v_y^0 + \frac{g_x}{2\Omega}\right) \cos(2\Omega t^n). \end{aligned} \quad (13.78)$$

Начальные значения скорости  $\mathbf{v}^0$  равны значениям, полученным в момент времени  $t^{n+1}$  на предыдущем этапе алгоритма из решения уравнений (13.72)–(13.75).

На третьем этапе алгоритма учитывается сила торможения при движении плазмы поперек магнитных силовых линий, а также генерация магнитного поля за счет этого движения. Соответствующие уравнения могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial t} &= -\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)_\perp}{t_w}, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \mathbf{rot} [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)_\perp \times \mathbf{B}_*]. \end{aligned} \quad (13.79)$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)_\perp &= (\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}_*)_\perp e^{-\frac{t-t^n}{t_w}}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^0 + \mathbf{rot} \left[ (\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}_*)_\perp \times \int_{t^n}^t d\tau e^{-\frac{\tau-t^n}{t_w}} \mathbf{B}_*(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (13.80)$$

Интеграл в квадратных скобках вычисляется аналитически.

На четвертом шаге алгоритма учитываются эффекты диффузии магнитного поля. Напомним, что в нашей модели уравнение, описывающее диффузию магнитного поля, является нелинейным. Поэтому применение явных методов для его решения привело бы к слишком жестким ограничениям на величину временного шага. В нашем подходе это уравнение решалось численно с помощью неявного локально-одномерного метода с факторизованным оператором [203]. При этом

для учета смешанных производных, возникающих в случае использования адаптивной сетки, используется регуляризация факторизованного оператора. Фактически, процедура регуляризации сводится к замене операторов-сомножителей, составляющих исходный факторизованный оператор, некоторыми эквивалентными трехдиагональными операторами. При этом параметр регуляризации определяется максимальным по модулю собственным значением метрического тензора, описывающего криволинейную систему координат. Для корректного учета нелинейных членов в схеме организуется итерационный процесс до получения решения с заданной точностью. На каждой итерации возникает система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которая решается численно с помощью метода скалярной прогонки. Более детально метод решения уравнения диффузии магнитного поля описан ниже в этом параграфе.

Наконец, на последнем пятом этапе учитываются эффекты радиационного нагрева и охлаждения, а также нагрева за счет диссипации токов. Эти процессы описываются правой частью уравнения (13.56). Следует подчеркнуть, что на всех дополнительных этапах алгоритма (кроме первого) использовались полуаналитические или неявные безусловно устойчивые методы. Поэтому на величину временного шага  $\Delta t$  кроме условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви, возникающего при решении системы уравнений (13.72)–(13.75), никаких других ограничений не накладывается.

**13.3.2. Гиперболическая подсистема.** При построении вычислительного алгоритма для гиперболической подсистемы (13.72)–(13.75) удобно перейти к безразмерным переменным. Это можно сделать с помощью выделения характерных размерных масштабов. В уравнениях (13.72)–(13.75) такой переход можно осуществить по схеме:  $f \rightarrow f_0 f$ , где  $f$  — какая-либо величина, а  $f_0$  — ее характерный размерный масштаб. Чтобы не загромождать запись, безразмерные переменные далее в этом разделе будем обозначать теми же символами, что и сами исходные размерные переменные.

В качестве масштабов длины и времени выберем следующие величины:  $r_0 = A$ ,  $t_0 = 1/\Omega$ . В качестве масштаба плотности выберем значение плотности во внутренней точке Лагранжа  $\rho_0 = \rho(L_1)$ . Остальные масштабные соотношения можно записать в виде  $v_0 = r_0/t_0$ ,  $P_0 = \rho_0 v_0^2$ ,  $s_0 = c_V$ ,  $B_0 = \sqrt{4\pi\rho_0} v_0$ .

В безразмерных переменных в консервативной форме уравнения (13.72)–(13.75) могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (13.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \nabla \cdot [\rho v v + \hat{I} (P + b^2/2) - b b] = 0, \quad (13.82)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \nabla \cdot (v b - b v) = -v (\nabla \cdot b), \quad (13.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0, \quad (13.84)$$

где  $\hat{\Gamma}$  — трехмерный единичный тензор. Источниковый член, пропорциональный дивергенции магнитного поля, в уравнении индукции (13.83) введен с целью дальнейшего использования восьмиволнового метода численного решения системы уравнений магнитной газодинамики (см. описание этого метода в разделе 7.4.5).

Будем рассматривать уравнения (13.81)–(13.84) в декартовой системе координат  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . Перейдем в этих уравнениях от переменных  $(t, x, y, z)$  к новым переменным  $(\tau, \xi, \eta, \zeta)$  с помощью преобразований, введенных в разделе 7.4.6. Скорость  $\omega$  движения исходной системы координат относительно новой будем задавать в виде  $\omega = h\mathbf{v}$ . Величина  $h$  представляет собой некоторую скалярную функцию переменных  $\tau, \xi, \eta$  и  $\zeta$ . Такой способ задания скорости предполагает, что исходная система координат относительно новой в любой точке движется в направлении скорости газа, но по абсолютной величине эти скорости, вообще говоря, различны. В представленных ниже численных расчетах использовались неподвижные сетки, когда значение  $h = 0$ . Однако, вообще говоря, эту функцию можно задавать произвольным образом из допустимого диапазона значений  $0 \leq h < 1$ . В целях возможного дальнейшего использования подвижных сеток, все выражения будем выписывать в общем виде, с учетом ненулевых значений  $h$ .

Система уравнений (13.81)–(13.84) после преобразования к новым координатам с учетом геометрических законов сохранения может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial \xi_k} = \mathbf{R}, \quad (13.85)$$

где  $\mathbf{U} = (Q\rho, Q\rho\mathbf{v}, Q\mathbf{B}, Q\rho s, \mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M})^T$  — вектор консервативных переменных,  $Q$  — якобиан преобразования координат. Векторы потоков  $\mathbf{H}_k$  определяются выражениями

$$\mathbf{H}_1 = |\mathbf{L} \times \mathbf{M}| \begin{pmatrix} (1-h)\rho v_\xi \\ (1-h)\rho v_\xi \mathbf{v} + \mathbf{k} \left( P + \mathbf{b}^2/2 \right) - b_\xi \mathbf{b} \\ (1-h)v_\xi \mathbf{b} - b_\xi \mathbf{v} \\ (1-h)\rho s v_\xi \\ -h\mathbf{v}/|\mathbf{L} \times \mathbf{M}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.86)$$

$$\mathbf{H}_2 = |\mathbf{M} \times \mathbf{K}| \begin{pmatrix} (1-h)\rho v_\eta \\ (1-h)\rho v_\eta \mathbf{v} + \mathbf{l} \left( P + \mathbf{b}^2/2 \right) - b_\eta \mathbf{b} \\ (1-h)v_\eta \mathbf{b} - b_\eta \mathbf{v} \\ (1-h)\rho s v_\eta \\ 0 \\ -h\mathbf{v}/|\mathbf{M} \times \mathbf{K}| \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.87)$$

$$\mathbf{H}_3 = |\mathbf{K} \times \mathbf{L}| \begin{pmatrix} (1-h)\rho v_\zeta \\ (1-h)\rho v_\zeta \mathbf{v} + \mathbf{k} \left( P + \mathbf{b}^2/2 \right) - b_\zeta \mathbf{b} \\ (1-h)v_\zeta \mathbf{b} - b_\zeta \mathbf{v} \\ (1-h)\rho s v_\zeta \\ 0 \\ 0 \\ -h\mathbf{v}/|\mathbf{K} \times \mathbf{L}| \end{pmatrix}. \quad (13.88)$$

Вектор источников

$$\mathbf{R} = (0, 0, -Q\mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{b}), 0, 0, 0, 0)^T. \quad (13.89)$$

При записи всех этих выражений использовались обозначения из раздела 7.4.6.

Для решения этой системы уравнений использовалась разностная схема, описанная в разделе 7.4.6. В качестве базовой схемы использовалась схема Лакса–Фридрихса. Необходимые для построения этой схемы собственные значения матриц гиперболичности также выписаны в разделе 7.4.6. Для повышения порядка аппроксимации использовалась поправка Ошера, подробно описанная в гл. 8. Получающаяся при этом разностная схема относится к классу схем, удовлетворяющих принципу неувеличения полной вариации решения (TVD), не требует вычисления собственных векторов матрицы гиперболичности, а использует только максимальные по модулю ее собственные значения (спектральный радиус). Она имеет третий порядок аппроксимации по пространственной переменной в областях гладкости решения и первый порядок аппроксимации по времени. Следует отметить, что при соответствующих граничных условиях эта разностная схема обеспечивает точное выполнение законов сохранения для физических величин в пространстве исходных переменных  $(x, y, z)$ . Условие устойчивости схемы обеспечивается ограничением временного шага  $\Delta\tau$  (условие Куранта–Фридрихса–Леви) (см. параграф 8.2).



**13.3.3. Численный метод решения уравнения диффузии.** Уравнение индукции на диффузионном шаге можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} \mathbf{b}), \quad (13.90)$$

где  $\eta$  — коэффициент полной магнитной вязкости. Используя соотношение векторного анализа

$$\operatorname{rot}(\eta \operatorname{rot} \mathbf{b}) = \nabla \eta \times \mathbf{b} - \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (13.91)$$

уравнение (13.90) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \eta. \quad (13.92)$$

Это уравнение необходимо записать в нестационарной криволинейной системе координат, которая обеспечивает динамическую адаптацию расчетной сетки. Поскольку движение сетки уже учтено на этапе решения гиперболической подсистемы, то на данном этапе алгоритма решения полной задачи систему криволинейных координат следует считать неподвижной. В результате несложных преобразований уравнение (13.92) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \tau} = \frac{\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left( \sqrt{g} g^{kl} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \xi_l} \right) + \mathbf{b} \times \nabla \eta. \quad (13.93)$$

В этом уравнении для вектора  $\mathbf{b}$  используются компоненты в исходных декартовых координатах. Поэтому вид оператора Лапласа от вектора  $\mathbf{b}$  в криволинейных координатах получается такой же, как и для скалярной величины.

Уравнение (13.93) содержит нелинейный диффузионный оператор, поэтому использование явных разностных схем для его решения может привести к слишком сильным ограничениям на временной шаг  $\Delta \tau$ . При построении неявных схем для численного решения уравнения (13.93) основной трудностью является то, что диффузионный оператор содержит смешанные производные. Поэтому обычные неявные схемы, развитые для решения уравнения диффузии в ортогональных координатах, в данном случае не подходят.

Запишем схему для уравнения (13.93) в виде

$$\mathbf{b}_\tau + \hat{A} [\sigma \mathbf{b}^{n+1} + (1 - \sigma) \mathbf{b}^n] = \mathbf{f}^n, \quad (13.94)$$

где обозначено  $\mathbf{b}_\tau = (\mathbf{b}^{n+1} - \mathbf{b}^n) / \Delta \tau$ ,  $\sigma$  — параметр неявности,  $\hat{A}$  — разностный оператор, аппроксимирующий со знаком минус первое слагаемое в правой части уравнения (13.93),  $\mathbf{f}^n$  — источник, описывающий второе слагаемое в правой части (13.93). Схема (13.94) является абсолютно устойчивой при условии [203]

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta \tau \|\hat{A}\|}, \quad (13.95)$$

но не является экономичной. Перепишем ее в другом виде:

$$\widehat{B}b_\tau + \widehat{A}b^n = f^n, \quad (13.96)$$

где оператор  $\widehat{B} = 1 + \Delta\tau\sigma\widehat{A} \geq \Delta\tau\sigma\widehat{A}$ . Заменим в (13.96) оператор  $\widehat{B}$  факторизованным оператором

$$\widehat{F} = \prod_{\alpha} \widehat{B}_{\alpha} \geq \widehat{B}, \quad \widehat{B}_{\alpha} = 1 + \omega\widehat{R}_{\alpha}, \quad (13.97)$$

где  $\omega$  — параметр регуляризации,  $\widehat{R}_{\alpha}$  — регуляризующие операторы. Свойство абсолютной устойчивости схемы останется в силе при условии  $\omega\widehat{R} \geq \Delta\tau\sigma\widehat{A}$ , где полный регуляризующий оператор  $\widehat{R} = \sum_{\alpha} \widehat{R}_{\alpha}$ .

При этом

$$\widehat{F} = 1 + \omega \sum_{\alpha} \widehat{R}_{\alpha} + \mathcal{O}(\Delta\tau^2) = 1 + \omega\widehat{R} + \mathcal{O}(\Delta\tau^2) \geq \omega\widehat{R}. \quad (13.98)$$

Легко видеть, что в качестве регуляризующих операторов  $\widehat{R}_{\alpha}$  можно взять операторы

$$\widehat{R}_{\alpha} = -\frac{\eta}{\sqrt{g}}\delta_{\alpha}^2, \quad \omega = \Delta\tau\sigma\lambda, \quad (13.99)$$

где  $\delta_{\alpha}^2$  — оператор второй разностной производной в пространственном направлении  $\alpha$ ,  $\lambda$  — максимальное по модулю собственное значение матрицы  $\sqrt{g}g^{ik}$  на разностной сетке.

Факторизованную схему (13.96) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{B}_1 w_1 &= f^n - \widehat{A}b^n, \\ \widehat{B}_2 w_2 &= w_1, \quad \widehat{B}_3 w_3 = w_2, \\ b^{n+1} &= b^n + \Delta\tau w_3. \end{aligned} \quad (13.100)$$

Данная схема абсолютно устойчива при  $\sigma \geq 1/2$ , имеет порядок аппроксимации  $\mathcal{O}((\sigma - 1/2)\Delta\tau + \Delta\tau^2 + \Delta\xi^2)$  и является экономичной. На каждом шаге алгоритма (13.100) обращение оператора  $\widehat{B}_{\alpha}$  осуществляется с помощью скалярных прогонок в направлении  $\alpha$ . Однако операторы  $\widehat{B}_{\alpha}$  зависят от магнитной вязкости  $\eta$ , которая сама может зависеть от  $b$ . Поэтому для повышения устойчивости и точности поверх схемы (13.100) необходимо дополнительно организовать итерационный процесс.

Разностный оператор  $\widehat{A}$  должен аппроксимировать первое слагаемое в правой части уравнения (13.93). Выражение для этого оператора можно получить с помощью методов аппроксимации дифференциальных операторов, описанных в гл. 5. При этом необходимо учесть, что в криволинейных координатах оператор Лапласа содержит смешанные производные. Более подробно данная схема, представление оператора  $\widehat{A}$ , а также алгоритм параллельной скалярной прогонки описаны в работе авторов [516].

## Глава 14

# СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ

### 14.1. Общая морфология течения в промежуточных полярах

Исследуем влияние магнитного поля аккректора на структуру течения на примере тесной двойной системы, параметры которой соответствуют SS Cyg (см., например, [517]). Звезда-донор (красный карлик) в этой системе имеет массу  $M_d = 0,56 M_\odot$  и эффективную температуру 4000 К. Звезда-аккректор (белый карлик) имеет массу  $M_a = 0,97 M_\odot$  и эффективную температуру 37000 К. Период обращения системы составляет  $P_{orb} = 6,6$  часов, а расстояние между компонентами  $A = 2,05 R_\odot$ . Внутренняя точка Лагранжа  $L_1$  находится на расстоянии  $0,56 A$  от центра аккректора. За более чем столетний период наблюдений накоплено большое количество информации об этой системе. Однако до сих пор многие вопросы о ее физических свойствах остаются открытыми. По морфологическим признакам исследователи относят SS Cyg к подклассу звезд типа U Gem. Однако наблюдается ряд признаков, позволяющих отнести SS Cyg к промежуточным полярам с величиной магнитного поля  $B_a = 10^4 - 10^6$  Гс [518], [519]. Наличие магнитного поля существенно влияет на характер течения, поэтому сведения о структуре течения будут способствовать пониманию физических процессов, происходящих в системе.

Период собственного вращения аккректора в системе SS Cyg с учетом значения угла наклона плоскости орбиты к лучу зрения  $i = 40^\circ$   $P_{spin} = 68,4$  с =  $0,0029 P_{orb}$  [452, 520]. Собственное вращение аккректора, характеризующееся периодом  $P_{spin} = (1 + \Omega_*/\Omega)^{-1} P_{orb}$ , является важным фактором и его необходимо учитывать при моделировании двойных систем с устойчивыми аккреционными дисками. Шкалу времени изменения  $P_{spin}$  в таких системах можно оценить по характерному времени прироста углового момента аккректора в результате аккреции вещества из внутренних частей диска [107]:

$$t_A \approx (R_a/A)^2 \sqrt{(1+q)A/R_{in}} M_a/\dot{M}_a, \quad (14.1)$$

где  $R_{in}$  — внутренний радиус диска. Для параметров, соответствующих типичным промежуточным полярам, получаем время  $t_A$  порядка  $10^4 - 10^5$  лет. Действие тормозящего момента сил со стороны магнитно-

го поля, приводящее к установлению режима равновесного вращения аккректора, может еще больше увеличить эту оценку.

Будем рассматривать тесную двойную систему с формирующимся аккреционным диском. Характерные времена выхода на стационарный режим составляют от 10 до 15 орбитальных периодов [126]. Поэтому изменением угловой скорости вращения звезды, связанным с формирующимся диском, можно пренебречь. Представляется целесообразным в качестве первой задачи рассмотреть ситуацию, когда в момент включения процесса массопереноса в двойной системе собственное вращение аккректора является синхронным:  $P_{\text{spin}} = P_{\text{orb}}$ . Вопрос о влиянии собственного вращения аккректора на структуру уже сформированного диска будет рассмотрен в параграфе 14.4.

Степень влияния магнитного поля на структуру течения можно определить, используя оценки радиуса магнитосферы аккректора. Будем считать, что на границе магнитосферы магнитное давление равно динамическому давлению аккрецирующего газа (см. [107]):

$$\frac{B^2}{8\pi} = \rho v_{\text{ff}}^2, \quad (14.2)$$

где  $v_{\text{ff}} = \sqrt{2GM_a/r}$  — скорость свободного падения<sup>1)</sup>. Плотность вещества найдем из выражения для темпа аккреции:  $\dot{M}_a = 4\pi r^2 \rho v_{\text{ff}}$ . Подставляя в (14.2)  $B = B_a (R_a/r)^3$ , находим радиус магнитосферы:

$$r_m = \left( \frac{B_a^4 R_a^{12}}{8GM_a \dot{M}_a^2} \right)^{1/7}. \quad (14.3)$$

Зависимость радиуса магнитосферы  $r_m$  от индукции магнитного поля  $B_a$  на поверхности аккректора представлена на рис. 14.1. Различные линии соответствуют различным значениям темпа аккреции  $\dot{M}_a$ , выраженным в единицах  $M_\odot/\text{год}$ . Тонкими линиями показаны задаваемый в расчетах численный радиус аккректора 0,0125 $A$  (нижняя линия) и расстояние от центра аккректора до внутренней точки Лагранжа 0,56 $A$  (верхняя линия). В приводимых ниже расчетах характерный темп аккреции на звезду составлял величину  $10^{-10} M_\odot/\text{год}$ . В этом случае радиус магнитосферы равен примерно 5–6 $R_a$  для поля  $B_a = 10^5$  Гс и примерно 20 $R_a$  для поля  $B_a = 10^6$  Гс. Для магнитного поля  $B_a = 10^4$  Гс радиус магнитосферы оказывается меньше радиуса «численной звезды», хотя все еще остается больше радиуса белого карлика.

Приведем результаты численного моделирования структуры МГД-течения. В расчетах индукция магнитного поля на поверхности белого карлика задавалась равной  $B_a = 10^5$  Гс, а параметры ориентации

<sup>1)</sup> Иногда для оценок магнитосферного радиуса в системах с аккреционными дисками используют не  $\rho v_{\text{ff}}^2$ , а  $\rho v_\varphi^2$  [521]. Однако, поскольку в аккреционных дисках  $v_\varphi \approx v_K$ , то значения  $r_m$  в этих двух случаях практически совпадают.

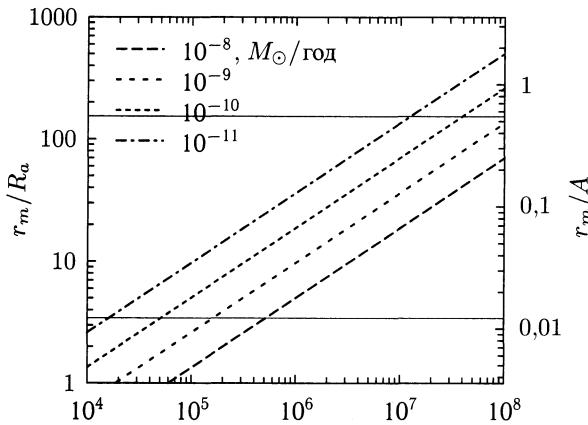


Рис. 14.1. Радиус магнитосферы белого карлика в системе SS Cyg в зависимости от индукции магнитного поля на поверхности. Различные кривые соответствуют различным значениям темпа аккреции (в единицах  $M_{\odot}/\text{год}$ ). Тонкими горизонтальными линиями показаны численная граница поверхности аккректора  $0,0125A$  (нижняя линия) и расстояние от центра аккректора до внутренней точки Лагранжа  $0,56A$  (верхняя линия)

вектора магнитного момента —  $\varphi = 0^\circ$  и  $\theta = 30^\circ$ . Напомним, что не зависящее от времени значение угла  $\varphi$  соответствует случаю, когда формирование аккреционного диска в двойной системе происходит в условиях синхронного вращения аккректора. Рассчитанная для этого случая структура МГД-течения на момент времени  $t = 10,7P_{\text{orb}}$  показана на рис. 14.2. На левой диаграмме этого рисунка представлено распределение плотности (изолинии) и скорости (стрелки) в экваториальной плоскости ( $xy$ ) двойной системы. Граница полости Роша показана пунктирной линией. Кроме того, сплошной жирной линией со стрелками показана линия тока, начинающаяся из внутренней точки Лагранжа  $L_1$ . Правые диаграммы демонстрируют структуру течения в вертикальной плоскости ( $xz$ ). При этом на нижней правой диаграмме показана увеличенная область вблизи аккректора.

Следует отметить, что в данном варианте расчета магнитное поле оказывается доминирующим, поскольку плазменный параметр  $\beta = 8\pi P/B^2$ , представляющий собой отношение газового давления к магнитному давлению, в аккреционном диске изменяется в пределах от  $10^{-2}$  до  $10^{-1}$ , а в магнитосферной области вблизи аккректора падает до предельно низких значений  $10^{-5}$ – $10^{-6}$ . Результаты исследования характера генерации магнитного поля и его детальной структуры представлены в гл. 15. Здесь же только отметим, что магнитное поле в диске является преимущественно тороидальным. Ко времени установления режима течения во внешних частях диска индуцированное поле  $\mathbf{b}$  превосходит по величине исходное поле белого карлика  $\mathbf{B}_*$  более чем

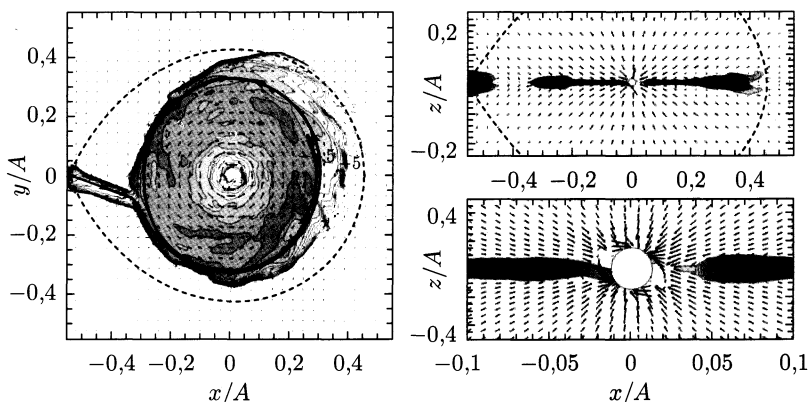


Рис. 14.2. Распределение плотности и скорости в экваториальной  $(xy)$  и вертикальной  $(xz)$  плоскостях в магнитном случае. На некоторых изолиниях указаны значения логарифма плотности, выраженной в единицах  $\rho(L_1)$ . Пунктирная линия соответствует границе полости Роша. Жирной линией со стрелками показана линия тока, начинающаяся из внутренней точки Лагранжа

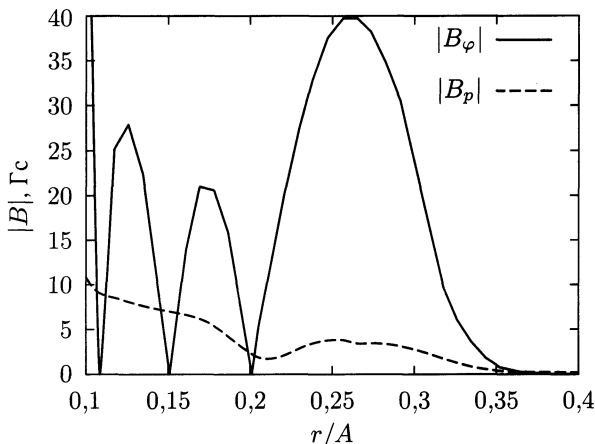


Рис. 14.3. Усредненные по азимуту абсолютные значения торoidalного  $B_\varphi$  и полоидального  $B_p$  магнитного поля в экваториальной плоскости аккреционного диска

в 100 раз. Рост магнитного поля ограничивается в основном магнитной плавучестью, поскольку соответствующий коэффициент диффузии зависит от величины торoidalного магнитного поля (см. (13.70)).

На рис. 14.3 показаны усредненные по азимуту абсолютные значения индукции торoidalного  $B_\varphi$  и полоидального  $B_p$  магнитного поля в экваториальной плоскости диска. В интервале расстояний от  $0,1A$  до  $0,2A$  в аккреционном диске формируются токовые слои. На данном графике их положения соответствуют точкам, в которых индукция

тороидального магнитного поля обращается в нуль. Механизм формирования токовых слоев будет рассмотрен в следующей главе. В зоне токовых слоев тороидальное магнитное поле по абсолютной величине превосходит полоидальное в 3–4 раза. Во внешней зоне аккреционного диска в интервале расстояний от  $0,2A$  до  $0,35A$  тороидальное магнитное поле на порядок величины превосходит полоидальное.

Несмотря на доминирующую роль магнитного поля все основные элементы структуры аккреционного диска, отмеченные нами ранее для газодинамического случая, образовались и в магнитном случае. Это можно объяснить тем, что формирование этих структур обусловлено в первую очередь гравитационными эффектами, а там, где это необходимо, роль газового давления берет на себя давление тороидального магнитного поля. Образование двурукавной ударной волны связано с приливным гравитационным воздействием от звезды-донора [65]. При этом положения фронтов незначительно меняются из-за отличия в скоростях газодинамических и ударных МГД-волн. Область формирования «горячей линии» практически не сместилась, поскольку в струе вещества из внутренней точки Лагранжа  $L_1$  индукция магнитного поля близка к нулю. Механизм образования спиральной волны прецессионного типа обусловлен чисто гравитационными эффектами во внутренних областях холодных аккреционных дисков [423], поэтому эта волна формируется и в магнитогазодинамическом диске.

Отметим наиболее существенные отличия структуры магнитогазодинамического течения от газодинамического случая. Из-за магнитного торможения вращения в диске темп аккреции увеличивается в 1,5 раза по сравнению с газодинамическим случаем, в котором он составлял 20–30% от темпа массообмена. В результате масса аккреционного диска в магнитном случае оказывается примерно в 1,5 раза меньше, чем газодинамического диска ( $\approx 3 \cdot 10^{-12} M_{\odot}$ ). При этом радиусы газодинамического и магнитогазодинамического дисков имеют практически одинаковые значения ( $0,3A$ ). Толщина магнитного диска примерно в 3 раза превосходит толщину газодинамического диска. Характерная плотность газа в диске в магнитном случае оказывается почти в 5 раз меньше, по сравнению с газодинамическим случаем ( $10^{-7} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ).

В аккреционном диске, в котором присутствует сильная тороидальная компонента магнитного поля, может развиваться ряд магнитогазодинамических неустойчивостей. Среди них следует выделить магниторотационную неустойчивость, открытую Велиховым [94] и заново переоткрытую для астрофизических дисков в работе Балбуса и Хаули [96]. При существенном превышении тороидального поля над полоидальным в диске может развиваться тип магниторотационной неустойчивости, который изучался в работе [522]. Численное исследование развития неустойчивости этого типа при взрывах сверхновых проведено в работе [523]. Наконец, в диске может развиваться неустойчивость, обусловленная плавучестью силовых трубок тороидального магнитного

поля [510]. Обзор этих неустойчивостей можно найти, например, в работе [81]. Следует отметить, что все эти неустойчивости приводят к генерации мелкомасштабного полоидального поля из крупномасштабного тороидального поля. В нашей численной модели магнитная плавучесть учтена явным образом в соответствующем коэффициенте диффузии магнитного поля (см. (13.70)), а для развития магниторотационной неустойчивости нет никаких формальных запретов. Анализ численных результатов показывает, что в областях аккреционного диска, где выполняется соответствующий критерий, наблюдается возникновение магниторотационной неустойчивости. Однако эта неустойчивость не распространяется по диску. Это может объясняться, например, относительно высокой вязкостью в численном решении  $\alpha_T \approx 0,01$ , величина которой соответствует наблюдениям.

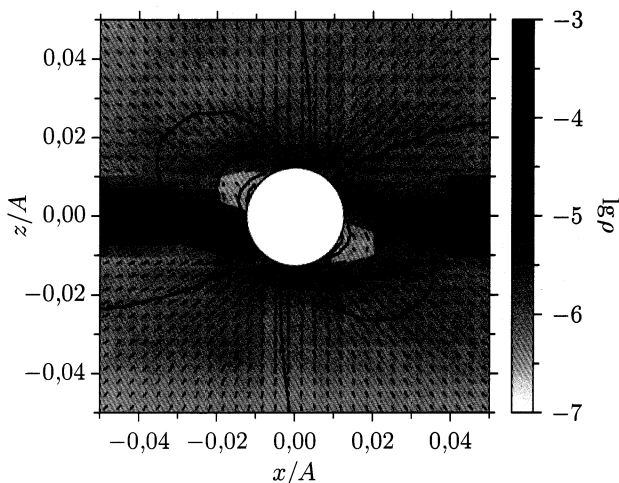


Рис. 14.4. Распределение плотности, скорости (стрелки) и структура магнитного поля (жирные линии со стрелками) в области магнитосферы аккретора в вертикальной плоскости ( $xz$ ) к моменту времени  $10,7 P_{\text{orb}}$

Вблизи поверхности аккретора формируется область магнитосферы, а процесс аккреции носит колонковый характер. Характерный радиус этой зоны равен  $0,02A$ , что соответствует примерно 6 радиусам белого карлика. Это значение хорошо согласуется с оценками внутреннего радиуса аккреционного диска в SS Cyg (5,2–6,5 радиусов белого карлика), полученными из анализа наблюдательных доплеровских томограмм [433]. Более подробно картина течения в магнитосферной области вблизи аккретора показана на рис. 14.4. Вещество движется преимущественно вдоль магнитных силовых линий и попадает на звезду в основном в области ее магнитных полюсов, формируя аккреционные колонки. Магнитное поле звезды оказывается существенно искаженным, поскольку в диске вблизи магнитосферной области происходит



интенсивная генерация тороидального поля. В районе магнитного экватора аккректора сформировались вакуумные области. Их образование обусловлено тем, что магнитное поле не позволяет веществу проникать в эти области, поскольку в районе магнитного экватора магнитные силовые линии проходят преимущественно вдоль поверхности звезды.

## 14.2. Роль диффузии магнитного поля

Для выяснения роли диффузии магнитного поля сравним результаты моделирования структуры МГД-течения с учетом диффузии магнитного поля (модель А) и без учета (модель В) [123]. На рис. 14.5 показаны распределения плотности и скорости в экваториальной ( $xy$ ) и вертикальной ( $xz$ ) плоскостях системы к моменту времени установления стационарного режима ( $t = 13,4P_{\text{orb}}$ ) для модели В. Обозначение на этом рисунке те же, что и на рис. 14.2.

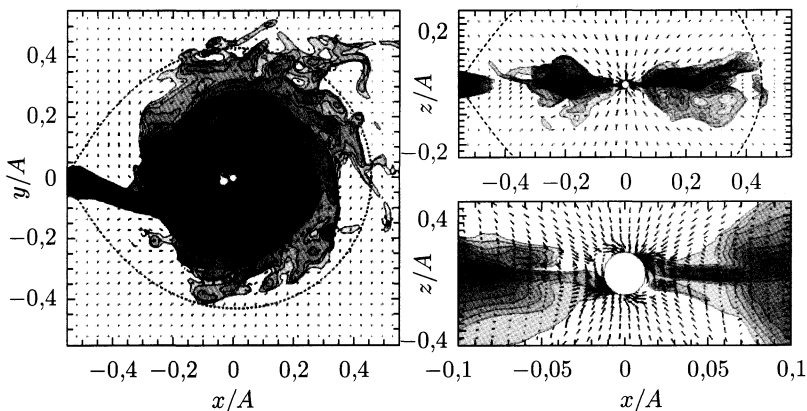


Рис. 14.5. Распределение плотности и скорости в экваториальной ( $xy$ ) и вертикальной ( $xz$ ) плоскостях в магнитном случае в приближении идеальной магнитной газодинамики. Обозначения те же, что и на рис. 14.2

Все основные элементы течения, отмеченные в предыдущем параграфе для модели А, сформировались и в модели В. Дифференциальное вращение в аккреционном диске приводит к интенсивной генерации магнитного поля. Магнитное поле оказывается доминирующим в аккреционном диске в обеих моделях, поскольку плазменный параметр  $\beta$  меньше 1. Как указывалось выше, в модели А в аккреционном диске  $\beta \approx 0,1$ . В модели В плазменный параметр уменьшается на два порядка ( $\beta \approx 10^{-3}$ ). В области магнитосферы аккректора в обеих моделях плазменный параметр падает до экстремально низких значений  $10^{-5}$ – $10^{-6}$ .

Магнитное поле  $\mathbf{b}$  в аккреционном диске является преимущественно тороидальным. В полученном стационарном решении абсолютное значение вектора  $\mathbf{b}$  во внешних частях диска превышает исходное

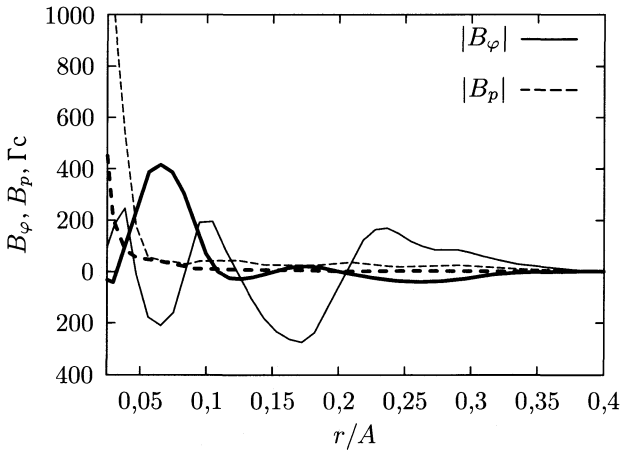


Рис. 14.6. Усредненные по азимуту тороидальное  $B_\varphi$  и полоидальное  $B_p$  магнитное поле в экваториальной плоскости аккреционного диска для модели А (жирные линии) и модели В (тонкие линии)

магнитное поле  $B_*$  более чем в 100 раз. На рис. 14.6 показаны усредненные по азимуту тороидальная  $B_\varphi$  и полоидальная  $B_p$  компоненты полного магнитного поля  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{b}$  в экваториальной плоскости аккреционного диска в обеих моделях. Характерные значения индукции магнитного поля в средних частях аккреционного диска составляют 200 Гс для модели В и около 50 Гс для модели А.

Аккреционный диск в модели А оказывается примерно в 3 раза более массивным по сравнению со случаем модели В. Внешний радиус диска в модели В равен  $0,2A$ , а в модели А примерно  $0,3A$ . Характерная плотность в диске в модели В равна  $10^{-3}\rho(L_1)$ , что существенно меньше, чем в модели А ( $5 \cdot 10^{-2}\rho(L_1)$ ). Другой примечательной особенностью структуры течения в модели В является образование обширного разреженного гало вокруг аккреционного диска, чего не наблюдается в модели А.

Вертикальная структура магнитного аккреционного диска обусловлена в основном градиентом давления тороидального магнитного поля, а не градиентом газового давления, поскольку практически всюду в диске плазменный параметр  $\beta \ll 1$ . В магнитном случае из-за эффектов магнитной плавучести толщина диска становится существенно больше, чем в газодинамическом случае. Этот результат нетрудно понять с помощью следующих простых соображений. Полное давление

$$P_T = P + \frac{B^2}{8\pi} = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) P. \quad (14.4)$$

Поэтому характерная толщина магнитного диска

$$H_m \approx \sqrt{P_T/\rho} \omega_K^{-1} \approx \sqrt{1 + 1/\beta} H_g, \quad (14.5)$$

где  $H_g$  — характерная толщина газодинамического диска. В случае  $\beta \ll 1$  получаем  $H_m \approx H_g/\sqrt{\beta}$ . Используя соответствующие значения плазменного параметра  $\beta$ , можно получить следующие оценки:  $H_m \approx 30H_g$  для модели В и  $H_m \approx 3H_g$  для модели А. Следовательно, диффузия магнитного поля может существенно уменьшить толщину диска (на порядок величины и даже больше).

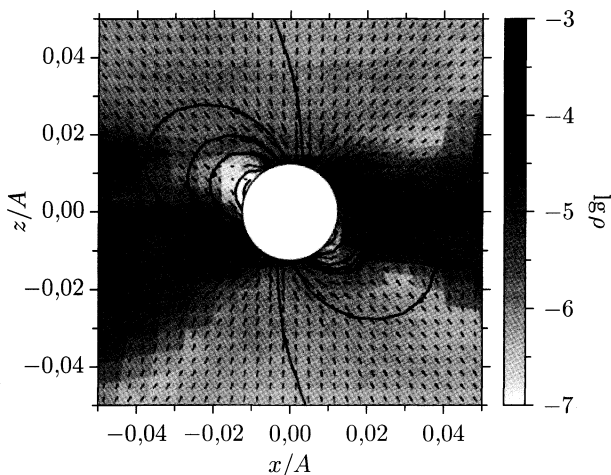


Рис. 14.7. Распределение плотности, скорости (стрелки) и структура магнитного поля (жирные линии со стрелками) в области магнитосферы аккретора в вертикальной плоскости ( $xz$ ) к моменту времени  $10,7 P_{\text{orb}}$  в модели В без учета диффузии магнитного поля

Характерный радиус магнитосферы в обеих моделях равен приблизительно  $0,02A$ , что соответствует примерно 6 радиусам белого карлика и находится в согласии с наблюдениями [433]. С другой стороны, нельзя не отметить согласие этого значения с аналитическими оценками радиуса магнитосферы, полученными с помощью формулы (14.3). Структура течения в области магнитосферы практически одна и та же в обеих моделях (см. рис. 14.4 и 14.7). В этой области плазма движется вдоль магнитных линий и попадает на аккректор в районе его магнитных полюсов. Вблизи магнитного экватора формируется область сильно разреженной плазмы. Это связано с тем, что в этой зоне скорость плазмы практически параллельна поверхности аккректора.

На рис. 14.8 показана зависимость темпа аккреции  $\dot{M}_a$  от времени в течение нескольких последних орбитальных периодов для обеих моделей. Поведение этих кривых является существенно различным. В случае идеальной магнитной газодинамики (модель В) темп аккреции испытывает сильные вариации нерегулярного характера. Среднее значение темпа аккреции для этой модели примерно равно темпу массообмена  $\dot{M} = 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$ . При этом амплитуда осцилляций достигает  $1,5 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$ . Максимальное значение темпа аккреции

может вдвое превышать темп массообмена. Турбулентная диффузия магнитного поля уменьшает темп аккреции почти в два раза и существенно сглаживает его вариации. Это можно объяснить следующим образом. В случае идеальной магнитной газодинамики магнитное поле в аккреционном диске является достаточно сильным. Поэтому угловой момент от внешних частей диска за счет магнитного торможения переносится к аккретору гораздо эффективнее, чем в модели А. Кроме того, диффузия магнитного поля может существенно размазать колонковое течение и, следовательно, сгладить вариации темпа аккреции.

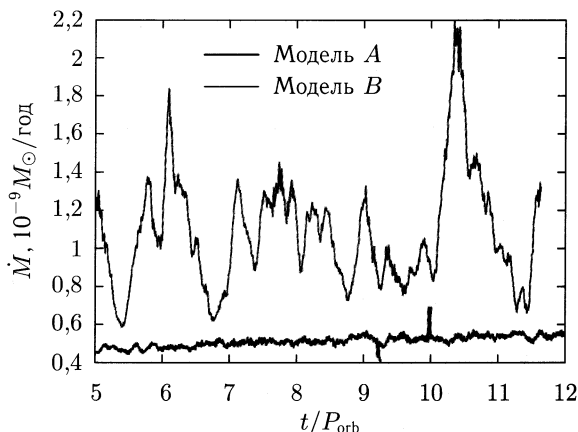


Рис. 14.8. Эволюция темпа аккреции в течении нескольких последних орбитальных периодов

Рассмотрим эволюцию темпа аккреции на звезду в течение нескольких орбитальных периодов (рис. 14.8). Максимальная амплитуда колебаний темпа аккреции в модели А составляет величину порядка 15–25%. В случае идеальной магнитной газодинамики (модель В) без учета диффузионных эффектов амплитуда этих колебаний может превышать 200%. Очень похожее поведение демонстрируют и наблюдательные кривые потока излучения в УФ-диапазоне из SS Cyg в промежутках между вспышками (см. [524]). При этом колебания потока достигают 70%. Существует несколько возможных механизмов, приводящих к вариации скорости аккреции. Один из них обусловлен квази-периодическим характером генерации магнитного поля в диске, и подробно описан в гл. 15. Еще один возможный механизм вариаций может быть обусловлен взаимодействием магнитного поля звезды со спиральной прецессионной волной, формирующейся во внутренней части диска. В газодинамическом случае увеличение радиального потока вещества за этой волной приводит к росту скорости аккреции и образованию компактной области повышенного энерговыделения на поверхности аккретора [423]. В магнитном случае аккреция на звезду имеет колонковый характер. Однако, в те моменты, когда

прецессионная волна подходит к поверхности звезды в районе магнитных полюсов, темп аккреции должен возрастать. В рассматриваемой системе отсчета период вращения спиральной волны приблизительно равен (на несколько процентов больше) орбитальному периоду системы. Таким образом, примерно дважды за период должны наблюдаться всплески темпа аккреции при прохождении спиральной волной окрестностей северного и южного магнитных полюсов звезды.

Сравнительный анализ результатов моделирования, проведенный в этом разделе, показывает, что структура течения, полученная в решении с учетом диффузии поля, оказывается промежуточной между чисто газодинамическим случаем и случаем идеальной магнитной газодинамики.

### 14.3. Влияние величины магнитного поля на решение

Для исследования влияния величины индукции магнитного поля аккректора на структуру течения в ТДС были проведены три расчета, в которых индукция магнитного поля на поверхности аккректора была задана равной  $10^5$  Гс (модель 1),  $5 \cdot 10^5$  Гс (модель 2) и  $10^6$  Гс (модель 3) [125]. Эти модели описывают структуру течения в системах с относительно слабыми магнитными полями, в которых происходит формирование аккреционного диска, что соответствует случаю промежуточных полярков. Расчет проводился до выхода на квазистационарный режим, который определялся примерным (с точностью до 1%) постоянством полной массы вещества в расчетной области. При этом время выхода на квазистационарный режим составляло около 10–15 орбитальных периодов.

Структура течения в экваториальной ( $xy$ ) и вертикальной ( $xz$ ) плоскостях продемонстрирована на рис. 14.9 для модели 1 ( $B_a = 10^5$  Гс), рис. 14.10 для модели 2 ( $B_a = 5 \cdot 10^5$  Гс) и рис. 14.11 для модели 3 ( $B_a = 10^6$  Гс). Показаны распределения плотности (изолиниями или градацией серого цвета) и скорости (стрелки). На некоторых изолиниях указаны значения десятичного логарифма плотности (в единицах  $\rho(L_1)$ ). На левых диаграммах этих рисунков показаны также граница полости Роша аккректора (пунктирная линия) и линия тока, начинающаяся из внутренней точки Лагранжа  $L_1$ . На правых диаграммах показаны магнитные силовые линии.

Трехмерную структуру течения демонстрируют рисунки 14.12 для модели 1, 14.13 для модели 2 и 14.14 для модели 3. На этих рисунках показаны изоповерхности десятичного логарифма плотности  $\lg \rho = -4,5$  (в единицах  $\rho(L_1)$ ) и магнитные силовые линии, начинающиеся с поверхности аккректора. Оттенки серого цвета магнитных силовых линий соответствуют величине индукции магнитного поля. При этом светлые оттенки силовых линий соответствуют более сильному полю, а темные — более слабому. Показаны также ось вращения (прямая тонкая линия) и магнитная ось (жирная наклонная линия) аккректора.

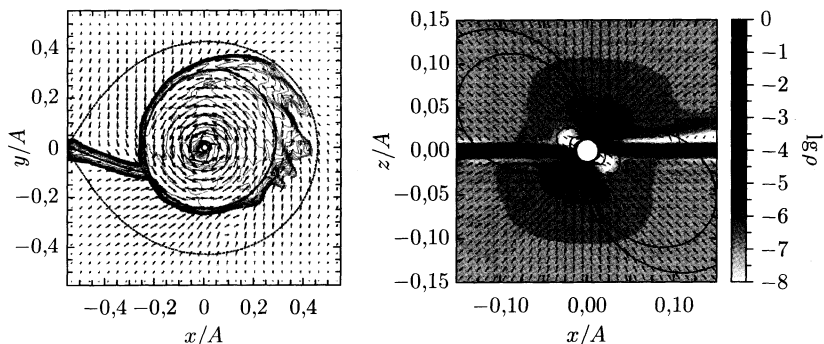


Рис. 14.9. Структура течения в экваториальной (слева) и вертикальной (справа) плоскостях для модели 1 ( $B_a = 10^5$  Гс). Показано распределение плотности (слева — изолинии, справа — градиация серого цвета) и скорости (стрелки). Пунктирная линия соответствует границе полости Роша аккректора. Жирными линиями со стрелками показаны линия тока из точки Лагранжа  $L_1$  (слева) и магнитные силовые линии (справа)

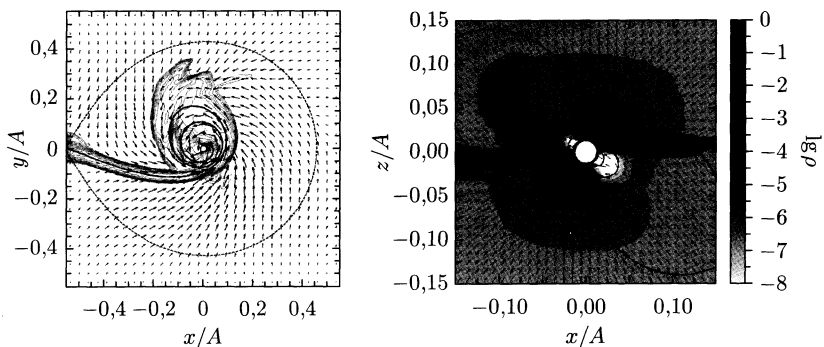


Рис. 14.10. То же, что и на рис. 14.9, но для модели 2 ( $B_a = 5 \cdot 10^5$  Гс)

В случае  $B_a = 10^5$  Гс (модель,1) картина течения соответствует случаю, описанному в предыдущем параграфе. В случае  $B_a = 5 \cdot 10^5$  Гс (модель 2) внешний радиус аккреционного диска становится существенно меньше (около  $0,15A$ ). Увеличивается эффективность магнитного торможения и переноса углового момента. В этом можно убедиться, анализируя поведение линии тока на рис. 14.10. Область магнитосферы стала намного больше. Более четко выделились аккреционные колонки вблизи магнитных полюсов аккректора. Наконец, в случае  $B_a = 10^6$  Гс (модель,3) аккреционный диск практически вырождается. Вещество успевает делать всего 1–2, оборота до падения на аккректор. Для описания такой структуры течения лучше подходит термин «спиралодиск», поскольку в нем скорость вещества сильно отличается от кеплеровской. Внешний радиус этого аккреционного «спиралодиска» равен примерно  $0,1A$ . Практически целиком он находится

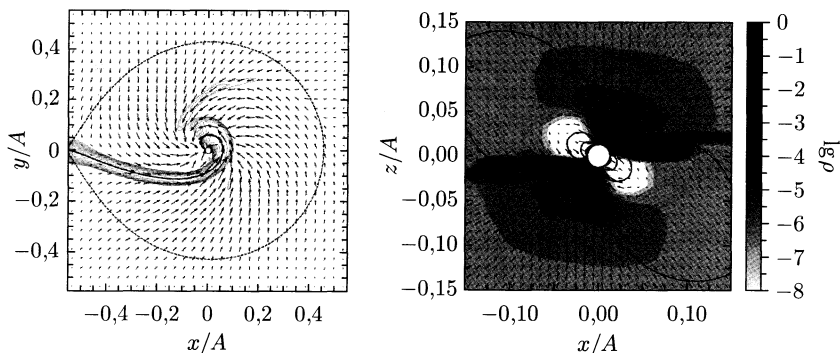


Рис. 14.11. То же, что и на рис. 14.9, но для модели 3 ( $B_a = 10^6$  Гс)

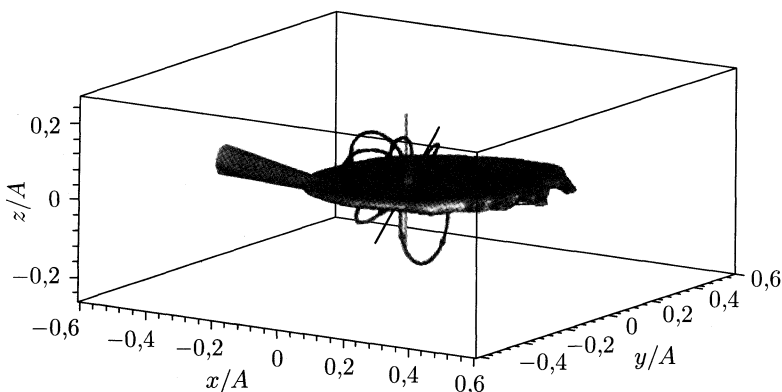


Рис. 14.12. Трехмерная структура течения для модели 1 ( $B_a = 10^5$  Гс). Показаны изоповерхность плотности  $\rho(L_1)$  ( $\lg \rho = -4,5$ ) и магнитные силовые линии. Оттенки серого цвета магнитных силовых линий соответствуют величине индукции магнитного поля. Величина поля растет от темного оттенка к светлому. Серой вертикальной линией показана ось вращения аккректора, а черной наклонной линией — магнитная ось

в области магнитосферы аккректора. Существенную часть «спиралодиска» составляют аккреционные колонки. Можно предположить, что этот вариант соответствует предельному случаю промежуточных полюров.

Следует отметить, что полученные в численных расчетах размеры области магнитосферы аккректора хорошо согласуются с аналитическими оценками (14.3) (см. рис. 14.1).

Расчеты показали, что темп аккреции  $\dot{M}_a$  вещества на звезду-аккректор зависит от величины индукции магнитного поля  $B_a$ . При этом с увеличением индукции магнитного поля темп аккреции  $\dot{M}_a$  возрастает, а амплитуда его вариаций уменьшается. Такое поведение темпа аккреции находит естественное объяснение и связано с процессом переноса углового момента в диске. Действительно, увеличение индукции магнитного поля на поверхности звезды-аккректора

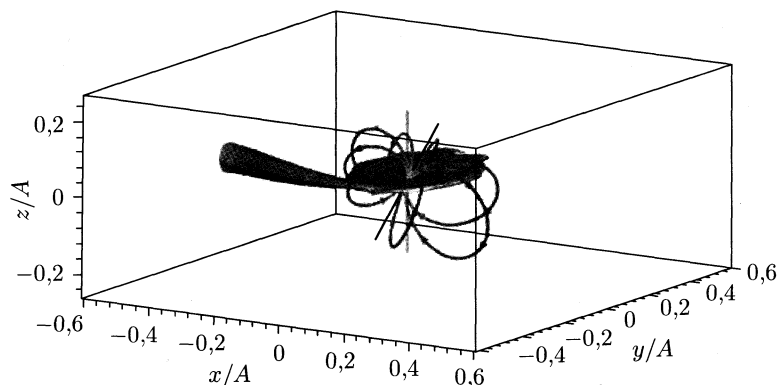


Рис. 14.13. То же самое, что и на рис. 14.12, но для модели 2 ( $B_a = 5 \cdot 10^5$  Гс)

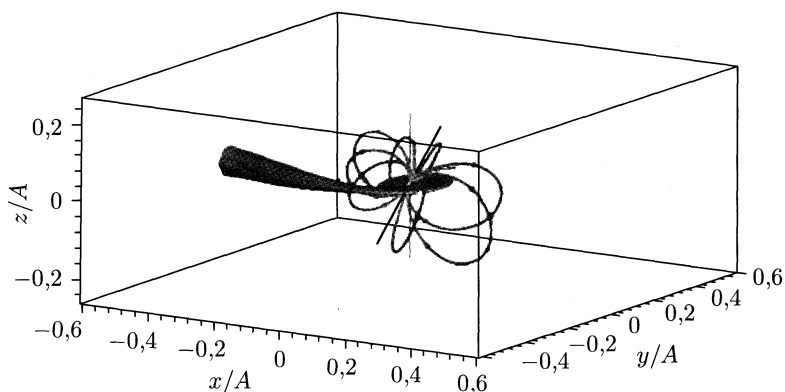


Рис. 14.14. То же самое, что и на рис. 14.12, но для модели 3 ( $B_a = 10^6$  Гс)

должно приводить к усилению эффективности магнитного торможения в аккреционном диске и, следовательно, к увеличению радиальных скоростей. Соответственно, увеличение индукции магнитного поля будет приводить к возрастанию темпа аккреции. Следует подчеркнуть, что такая зависимость соответствует случаю именно промежуточных поляр. В случае поляр темп аккреции с ростом поля, наоборот, убывает (см. параграф 14.5).

#### 14.4. Зависимость решения от степени асинхронности вращения аккректора

Влияние скорости собственного вращения аккректора на структуру МГД-течения в ТДС можно характеризовать соотношением между радиусом магнитосферы  $r_m$  (14.3) и радиусом коротации  $r_c$ . Радиус коротации определяется как расстояние, на котором скорость вращения



силовых линий магнитного поля аккретора равна скорости вращения вещества в аккреционном диске. Считая, что силовые линии магнитного поля в магнитосфере вращаются твердотельно с угловой скоростью  $\Omega_*$ , а угловая скорость вещества равна кеплеровской скорости  $\omega_K$ , находим [107]

$$r_c = \left( \frac{GM_a}{\Omega_*^2} \right)^{1/3}. \quad (14.6)$$

Если вращение аккретора является достаточно медленным ( $r_c > r_m$ ), то скорость вращения магнитного поля на границе магнитосферы оказывается меньше кеплеровской. Поэтому вещество, зацепившись за магнитные силовые линии, может свободно упасть на поверхность. Такой режим можно назвать режимом «аккретора». В случае быстрого вращения аккретора ( $r_c < r_m$ ) на границе магнитосферы возникает центробежный барьер, препятствующий свободному падению вещества на поверхность. Такой режим получил название режима «пропеллера». В этом режиме процесс аккреции имеет существенно нестационарный характер [121, 525, 526]. В состоянии равновесного вращения выполняется соотношение  $r_c = r_m$ . Анализ показывает [107], что взаимодействие магнитосферы аккретора с веществом диска заставляет систему с течением времени эволюционировать в состояние равновесного вращения.

Этой классификации отвечает наблюдаемое распределение промежуточных поляров по периодам собственного вращения аккретора [106] (см. табл. 14.4). Подавляющее большинство этих систем находится в состоянии равновесного вращения (регулярные промежуточные поляры). Системы, находящиеся в состоянии «аккретор», делятся на синхронные промежуточные поляры ( $P_{\text{spin}} \approx P_{\text{orb}}$ ) и системы типа EX Нуа ( $P_{\text{spin}} \approx 0,1P_{\text{orb}}$ ). Системы с быстрым вращением можно разделить на системы типа DQ Нег ( $P_{\text{spin}} \approx 0,01P_{\text{orb}}$ ) и системы типа AE Aqg ( $P_{\text{spin}} \approx 0,001P_{\text{orb}}$ ). В системах типа DQ Нег формируются аккреционные диски, но при этом реализуется режим «пропеллер»<sup>1)</sup>. В системах типа AE Aqg вращение аккретора является настолько быстрым, что аккреционный диск не формируется. Поэтому для такого режима можно использовать термин «суперпропеллер»<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Тщательное изучение [18] системы DQ Нег — прототипа звезд, демонстрирующих режим «пропеллера», показало, что, на самом деле, она находится в пограничном состоянии между режимами «аккретор» и «пропеллер».

<sup>2)</sup> Возможно, что для таких систем более подходящим термином является «эжектор». Напомним (см., например, [107]), что эжекторами называются быстро вращающиеся нейтронные звезды. Аккрецирующее на такую звезду вещество останавливается давлением электромагнитных волн, которые порождаются вращающимся дипольным магнитным полем в волновой зоне за пределами светового цилиндра.

Для исследования влияния асинхронного вращения аккретора на структуру течения в тесной двойной системе были проведены трехмерные численные расчеты для различных значений отношения периодов  $P_{\text{spin}}/P_{\text{orb}}$ . Параметры моделей приведены в табл. 14.4. Конкретные значения величин выписаны для системы с параметрами SS Cyg. Однако различные модели вполне соответствуют описанным выше типам промежуточных полярков. Индукция магнитного поля на поверхности аккретора во всех моделях была задана равной  $10^5$  Гс, а наклон магнитной оси  $\theta = 30^\circ$ .

Таблица 14.1. Параметры моделей в расчетах, учитывающих асинхронное вращение аккретора. Значения величин указаны для ТДС с параметрами SS Cyg. Прототипы соответствуют используемой в настоящее время классификации промежуточных полярков [106].

Модель	Прототип	$P_{\text{spin}}/P_{\text{orb}}$	$r_c/r_m$	Режим
1	Синхронные	1	$\infty$	«Аккретор»
2	EX Hya	0,1	1,48	«Аккретор»
3	Регулярные	0,033	1,00	Равновесное вращение
4	DQ Her	0,01	0,66	«Пропеллер»
5	AE Aqr	0,001	0,31	«Пропеллер»

Следует отметить, что модель 1 (синхронное вращение) эквивалентна модели 1 (для  $B_a = 10^5$  Гс) из параграфа 14.3. Структура течения в модели 3 (равновесное вращение) мало отличается от структуры течения в модели 2 («аккретор», системы типа EX Hya). Поэтому проведем более подробное сравнение результатов расчетов моделей 2 и 4, которые соответствуют режимам «аккретор» и «пропеллер» на фоне сформировавшегося аккреционного диска.

На рис. 14.15 показаны распределения плотности и скорости в экваториальной ( $xy$ , верхние диаграммы) и вертикальной ( $xz$ , нижние диаграммы) плоскостях для моделей 2 (слева) и 4 (справа) к моменту времени установления стационарного режима течения (около 17 орбитальных периодов). В модели 2, соответствующей режиму «аккретор», структура течения похожа на аналогичную структуру, полученную для случая синхронного вращения (см. рис. 14.5). Влияние вращения аккретора приводит к формированию более сильного шлейфа вещества, истекающего через точку Лагранжа  $L_3$ .

Однако в модели 4 в структуре течения появляются качественные отличия. Аккреционный диск имеет больший размер. Линия тока, выходящая из внутренней точки Лагранжа  $L_1$ , в одном месте даже заходит за границу полости Роша. Хорошо видно формирование мощного шлейфа вещества, истекающего через точку Лагранжа  $L_3$  во внешнюю оболочку двойной системы. Во внутренних частях диска формируется

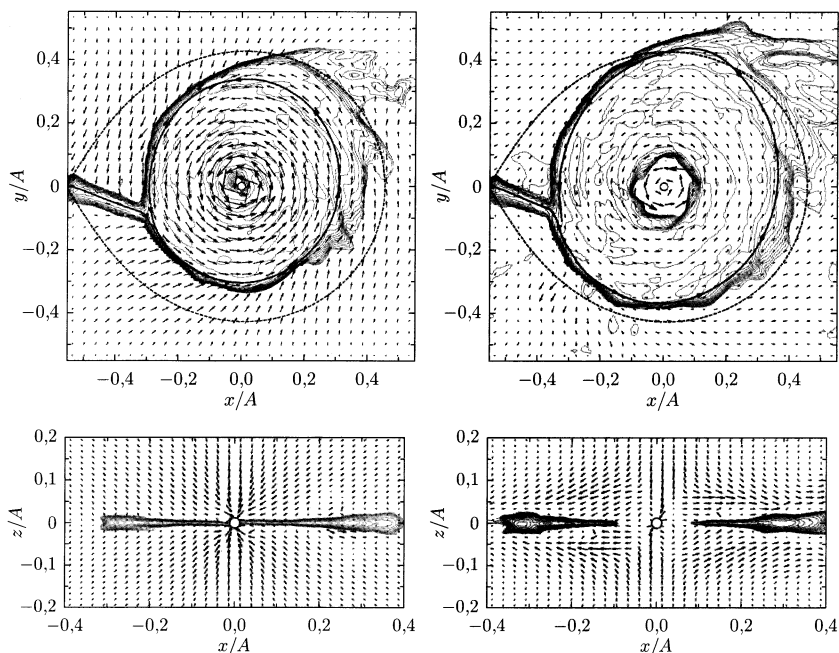


Рис. 14.15. Распределение плотности и скорости в экваториальной ( $xy$ , сверху) и вертикальной ( $xz$ , внизу) плоскостях в моделях 2 («аккректор», слева) и 4 («пропеллер», справа). Обозначения те же, что и на рис. 14.2

магнитосферная каверна, радиус которой равен  $(0,05-0,1)A$ . На границе этой каверны развивается неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Возникающие при этом спиральные волны имеют тенденцию переходить в ударные. На вертикальном срезе (правая нижняя диаграмма) видно, что вещество из оболочки аккрецирует в основном не на звезду, а на диск.

Поскольку в магнитосферной каверне вещества практически нет, темп аккреции на звезду в модели 4 оказывается близким к нулю. С другой стороны, процесс массообмена продолжается и масса аккреционного диска будет постепенно расти со временем<sup>1)</sup>. В определенный момент плотность на краю каверны может вырасти настолько, что вещество продавит магнитосферу и начнет аккрецироваться на поверхность звезды. После освобождения лишней массы система снова перейдет в состояние «пропеллер». Описанный механизм, возможно, объясняет квазипериодические вспышки карликовых новых, которые наблюдаются в системах типа DQ Her [19]. Следует

<sup>1)</sup> Такие аккреционные диски часто называют дисками-накопителями (см., например, [107]).

заметить, что по наблюдаемому значению  $P_{\text{spin}}$  (см. параграф 14.1) систему SS Cyg также следует отнести к этому типу промежуточных поляр. Примечательно, что в системе SS Cyg примерно через каждые 200 орбитальных периодов наблюдаются вспышки. При этом амплитуда вспышек SS Cyg достигает  $4.5^m$ . Если предположить что основной поток энергии от системы обусловлен аккрецией, то такое увеличение светимости соответствует увеличению темпа аккреции приблизительно в 60 раз. Структура течения в SS Cyg во время вспышки на основе наблюдаемых спектров и доплеровских томограмм исследовалась в работе [527].

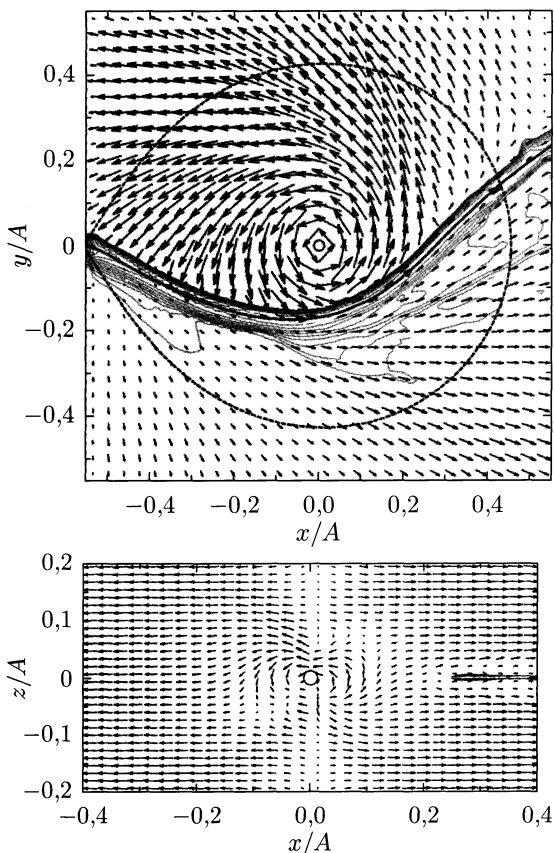


Рис. 14.16. Распределение плотности и векторов скорости в экваториальной ( $xy$ , вверху) и вертикальной ( $xz$ , внизу) плоскостях в модели 5 («суперпропеллер»). Обозначения те же, что и на рис. 14.2

На рис. 14.16 показано распределение плотности и скорости в экваториальной ( $xy$ , вверху) и вертикальной ( $xz$ , внизу) плоскостях двойной системы для модели 5, которая соответствует промежуточным

поляркам типа АЕ Аqr. В этом случае «суперпропеллера» предполагалось, что период собственного вращения  $P_{\text{spin}}$  в 1000 раз меньше орбитального периода  $P_{\text{orb}}$ . Вращение аккректора является настолько быстрым, что аккреционный диск в системе не формируется. Вещество, истекающее из оболочки донора через внутреннюю точку Лагранжа  $L_1$ , подхватывается быстро вращающейся магнитосферой аккректора, получает дополнительный угловой момент и выбрасывается за пределы полости Роша.

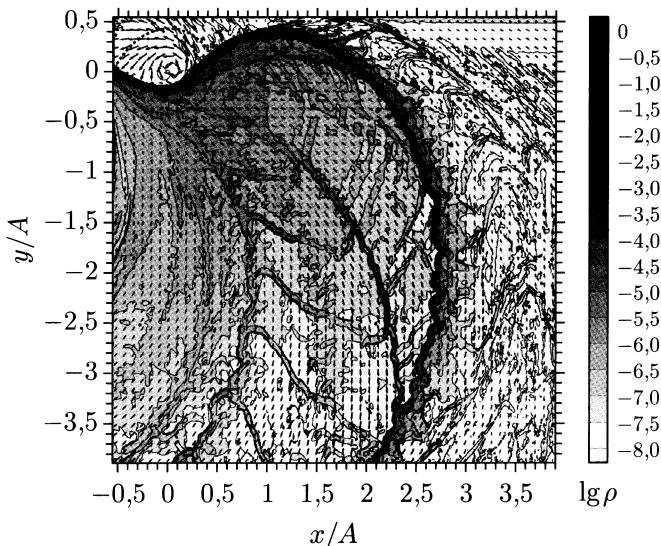


Рис. 14.17. Распределение плотности и скорости в экваториальной плоскости в модели 5 («суперпропеллер», расширенная область)

На рис. 14.17 показана структура течения в экваториальной плоскости системы в расширенной области. Видно, что выброшенное за пределы полости Роша аккректора вещество формирует длинный шлейф, закручивающийся по спирали вокруг двойной системы. В дальнейшем из вещества этого шлейфа формируется общая оболочка двойной системы. На рис. 14.17 хорошо видно, что вдоль шлейфа развивается неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Кроме основного шлейфа можно заметить и несколько параллельных шлейфов более слабой интенсивности. Интересно, что некоторые из них соединены поперечными перегородками. Полученная в наших расчетах для модели 5 картина течения хорошо согласуется с результатами ранее проведенных расчетов в рамках метода квазичастиц [114, 116].

Анализ наблюдаемых доплеровских томограмм системы АЕ Аqr [114, 116] свидетельствует о наличии в структуре течения значительных выбросов вещества, аналогичных полученным в расчетах. В то же время, из анализа наблюдательных данных о системе АЕ Аqr следу-

ет, что некоторая часть вещества все-таки остается в полости Роша. Можно выделить несколько возможных механизмов, способствующих задержке вещества: амбиполярная диффузия, давление электромагнитных волн и релятивистское запаздывание вращения магнитных линий. Оценки этих эффектов применительно к системе АЕ Aqr показывают, что влиянием амбиполярной диффузии и давления электромагнитных волн можно пренебречь. Однако в области внутренней точки Лагранжа эффект релятивистского запаздывания вращения магнитных силовых линий оказывается существенным и его необходимо учитывать при моделировании.

### 14.5. Картина течения вещества в полярах — системах с сильным магнитным полем

Для исследования структуры течения в ТДС с сильным магнитным полем ( $10^6$ – $10^8$  Гс) были проведены численные расчеты соответствующих моделей, в которых индукция магнитного поля на поверхности аккректора была задана равной  $5 \cdot 10^6$  Гс (модель 4),  $10^7$  Гс (модель 5),  $5 \cdot 10^7$  Гс (модель 6) и  $10^8$  Гс (модель 7)<sup>1</sup>). В этой группе моделей магнитное поле является сильным и аккреционный диск в системе не формируется. Поэтому они соответствуют случаю полярных звезд. Во всех этих моделях расчет проводился до выхода на квазистационарный режим, который происходил за время порядка 5 орбитальных периодов.

Структура МГД-течения для моделей 4 ( $B_a = 5 \cdot 10^6$  Гс), 5 ( $B_a = 10^7$  Гс), 6 ( $B_a = 5 \cdot 10^7$  Гс) и 7 ( $B_a = 10^8$  Гс) представлена на рис. 14.18–14.21 соответственно. Верхние диаграммы на рисунках демонстрируют трехмерную структуру течения. На них показаны изоповерхности десятичного логарифма плотности  $\lg \rho = -5$  (в единицах  $\rho(L_1)$ ) и магнитные силовые линии. Оттенки серого цвета магнитных силовых линий соответствуют величине индукции магнитного поля. При этом светлому оттенку соответствует более сильное поле, а темному — более слабое. Показаны также ось вращения (серая вертикальная линия) и магнитная ось (черная наклонная линия) аккректора. Изображение повернуто таким образом, чтобы были видны особенности аккреционного потока вблизи поверхности аккректора. На нижних диаграммах показаны распределения плотности (градация серого цвета) и скорости (стрелки) в вертикальной плоскости  $xz$ . Показаны также граница полости Роша аккректора (пунктирная линия) и магнитные силовые линии.

Анализ этих рисунков позволяет сделать вывод, что в данной группе моделей структура течения качественным образом отличается от структуры течения в моделях 1, 2 и 3, которые соответствовали

<sup>1</sup>) Модели 1 ( $10^5$  Гс), 2 ( $5 \cdot 10^5$  Гс) и 3 ( $10^6$  Гс), соответствующие случаю промежуточных полярных звезд, были описаны в параграфе 14.3.

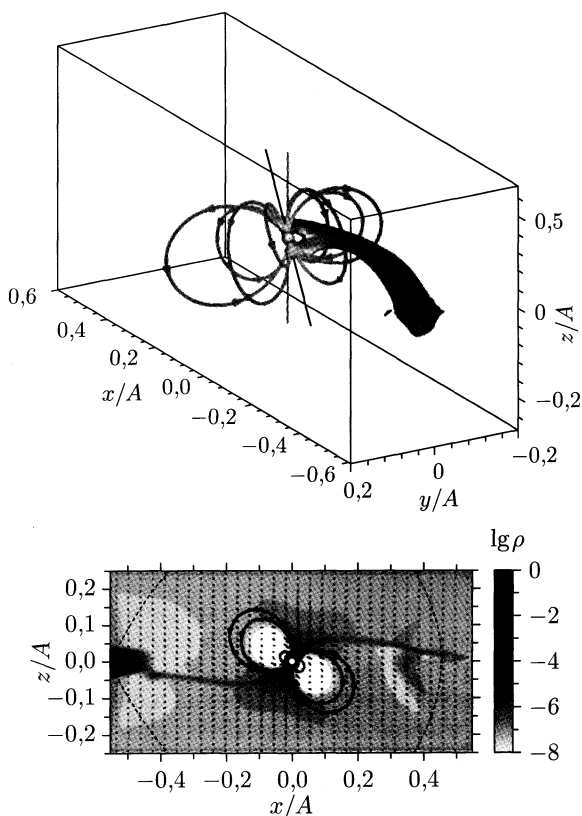


Рис. 14.18. Структура течения в модели 4 ( $B_a = 5 \cdot 10^6$  Гс). На верхней диаграмме показана изоповерхность плотности, выраженной в  $\rho(L_1)$  ( $\lg \rho = -4,5$ ), и магнитные силовые линии. Оттенки серого цвета магнитных силовых линий соответствуют величине индукции магнитного поля. Величина поля растет от темного оттенка к светлому. Серой вертикальной линией показана ось вращения аккректора, а черной наклонной линией — магнитная ось. На нижней диаграмме показано распределение плотности в вертикальной плоскости (градация серого цвета) и скорости (стрелки). Пунктирная линия соответствует границе полости Роша аккректора. Жирными линиями со стрелками показаны магнитные силовые линии

случаю промежуточных полярных. В данных моделях аккреционный диск не формируется, а течение имеет характер колонковой аккреционной струи. В моделях 4 и 5 струя, начинающаяся из внутренней точки Лагранжа  $L_1$ , при подходе к поверхности аккректора расщепляется на два потока. После этого первый поток попадает на северный магнитный полюс звезды, а второй — на южный. При этом в модели 4 более мощным является северный аккреционный поток, а в модели 5 — южный. Отметим, что в нашей постановке задачи южный магнитный

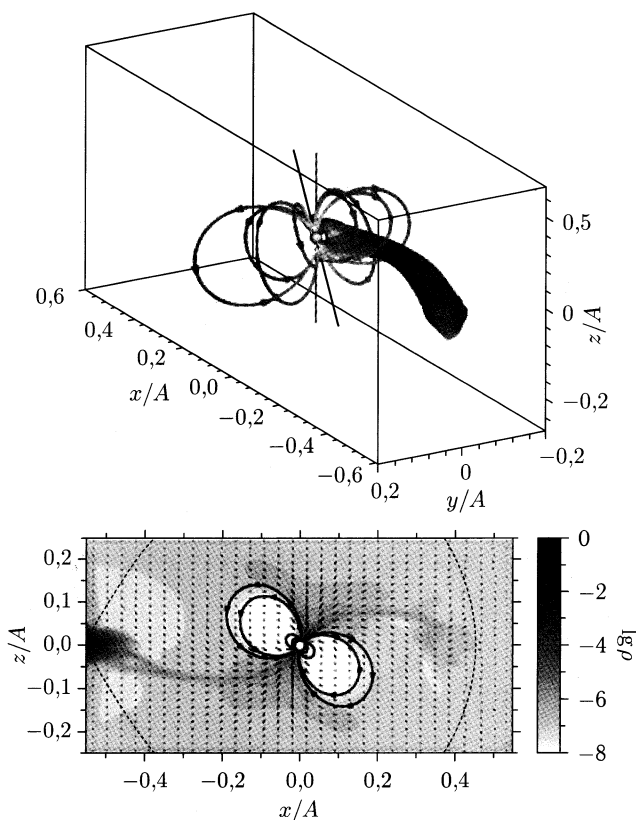


Рис. 14.19. То же, что и на рис. 14.18, но для модели 5 ( $B_a = 10^7$  Гс)

полюс аккректора находится ближе к точке Лагранжа  $L_1$ , чем северный. Как следствие, в сильном магнитном поле движение плазмы к южному магнитному полюсу аккректора оказывается энергетически более выгодным, что приводит к преимущественной аккреции на южный полюс. Это наблюдение подтверждается в модели 6, в которой формируется уже только один аккреционный поток, заканчивающийся на южном магнитном полюсе звезды.

В последней модели 7 магнитное поле является настолько сильным, что практически полностью контролирует течение внутри полости Роша аккректора. Почти сразу же за точкой Лагранжа вещество подхватывается магнитным полем и направляется вдоль магнитных силовых линий к поверхности звезды, формируя мощную струю южного потока и более слабую струю северного. Рисунок 14.1 показывает, что в этом случае магнитосфера оказывается больше полости Роша аккректора и поэтому частично захватывает оболочку донора. По видимому, эта модель соответствует, так называемым, *магнеторам* [107], которые



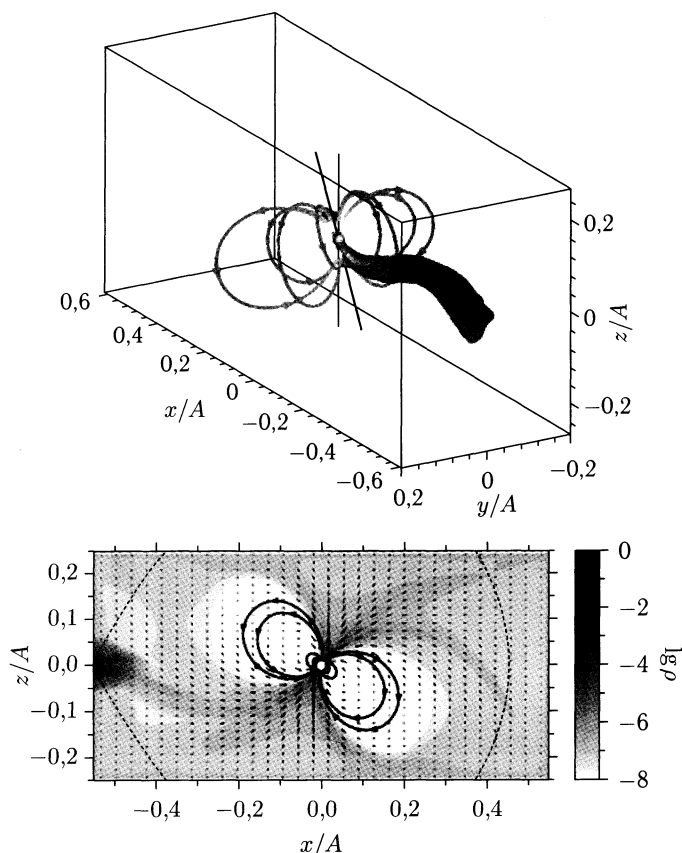


Рис. 14.20. То же, что и на рис. 14.18, но для модели 6 ( $B_a = 5 \cdot 10^7$  Гс)

представляют собой предельный случай полярных с очень сильным магнитным полем белого карлика.

Таким образом, в наших расчетах структуры течения в ТДС, параметры которой соответствуют SS Cyg, в моделях с магнитным полем  $B_a \leq 10^6$  Гс формируется аккреционный диск, а при более сильных полях аккреционный диск не формируется. Для объяснения этого результата можно привести следующие простые соображения. Поскольку характер течения в струе сверхзвуковой, поведение струи вещества, истекающего из внутренней точки Лагранжа  $L_1$  внутрь полости Роша аккректора, с хорошей точностью можно исследовать в баллистическом приближении без учета эффектов, связанных с давлением и магнитным полем [20, 23]. Анализ траекторий показывает, что струя подходит достаточно близко к поверхности аккректора на расстояние  $R_{\min}$  [57] (см. формулу (2.18) из параграфа 2.2 гл. 2). Если величина  $R_{\min}$  больше магнитосферного радиуса  $r_m$  (см. (14.3)), то магнитное поле

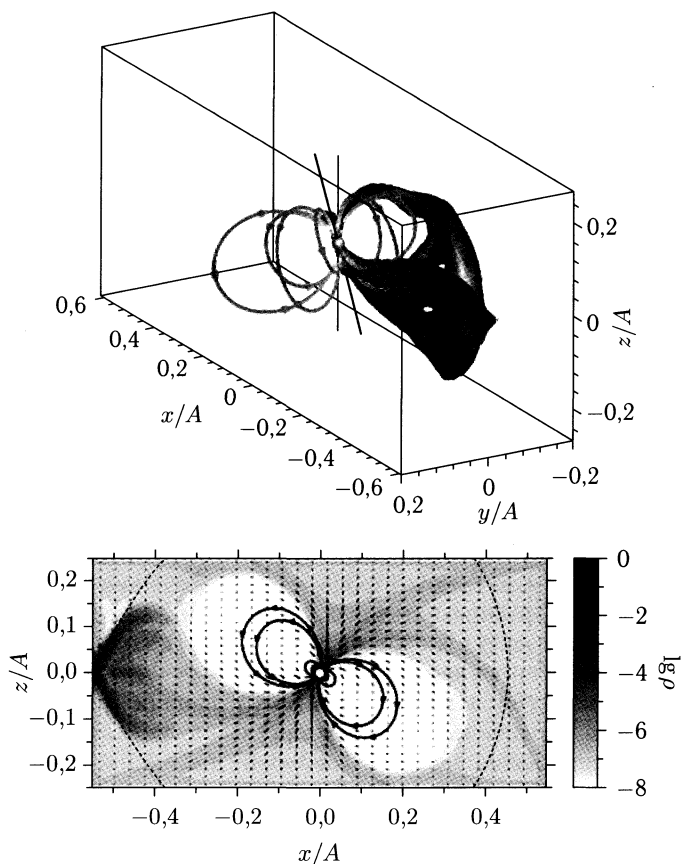


Рис. 14.21. То же, что и на рис. 14.18, но для модели 7 ( $B_a = 10^8$  Гс)

не оказывает существенного влияния на движение вещества. Поток сможет обогнуть звезду и в конце концов пересечет сам себя в некоторой точке. Дальнейшая эволюция такого течения приведет к формированию в системе аккреционного диска. Если же минимальное расстояние  $R_{\min}$  меньше магнитосферного радиуса  $r_m$ , то на некотором участке своей траектории поток оказывается в зоне существенного влияния магнитного поля. Действие электромагнитных сил в этой зоне приведет к торможению потока и потере его углового момента. В результате поток не сможет обогнуть звезду и сформировать аккреционный диск.

Таким образом, граница между промежуточными полярами (аккреционные диски формируются) и полярами (аккреционные диски не формируются) определяется соотношением  $r_m = R_{\min}$ . Подставляя сюда параметры системы SS Cyg, находим значение индукции магнитного поля  $B_a \approx 10^6$  Гс, которое разделяет эти два режима. Однако эта оценка индукции магнитного поля, разделяющего промежуточные

полюсы и полюсы, имеет достаточно общий характер, поскольку в катаклизмических переменных величина  $q$  варьируется незначительно и равна примерно 0,5.

На рис. 14.22 показана полученная в расчетах моделей 1–7 зависимость темпа аккреции  $\dot{M}_a$  от величины индукции магнитного поля  $B_a$  на поверхности аккретора. Вертикальными отрезками показаны характерные значения вариаций темпа аккреции. Главной особенностью является ее немонотонный характер. Для значений  $B_a < 10^6$  Гс темп аккреции возрастает с увеличением магнитного поля, а амплитуда его вариаций уменьшается. В точке  $B_a = 10^6$  Гс достигается максимальное

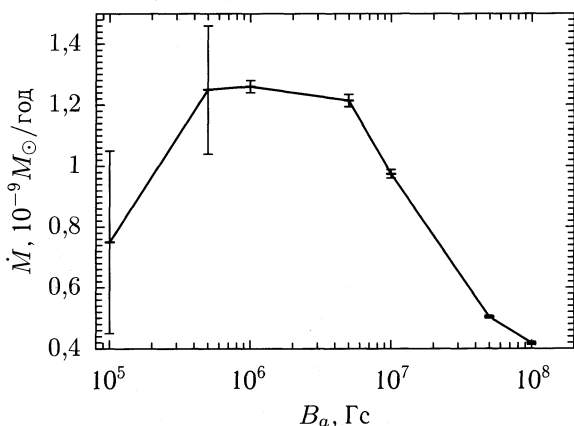


Рис. 14.22. Зависимость темпа аккреции от величины индукции магнитного поля на поверхности аккретора  $B_a$ . Вертикальными отрезками показаны характерные амплитуды вариаций темпа аккреции

значение темпа аккреции. При дальнейшем увеличении индукции магнитного поля  $B_a$  темп аккреции убывает.

Эта зависимость полностью отвечает вышеизложенным соображениям. При  $B_a < 10^6$  Гс в системе формируется аккреционный диск и темп аккреции определяется процессами переноса углового момента в диске. Увеличение индукции магнитного поля приводит к усилению эффективности магнитного торможения в диске. Поэтому при  $B_a < 10^6$  Гс зависимость  $\dot{M}_a(B_a)$  является возрастающей. Начиная со значения индукции магнитного поля  $B_a = 10^6$  Гс аккреционный диск в системе уже не формируется, а течение имеет характер аккреционной колонковидной струи. В этом случае значение темпа аккреции  $\dot{M}_a$  определяется пропускной способностью струи. С ростом индукции магнитного поля сечение струи <sup>1)</sup> уменьшается и темп аккреции падает.

<sup>1)</sup> Сечение  $S$  струи в этом случае можно оценивать из условия сохранения магнитного потока  $B \cdot S = \text{const}$ .

В свою очередь, уменьшение темпа аккреции приводит и к уменьшению амплитуды его вариаций, относительная величина которой показан на рис. 14.22 вертикальными отрезками.

## 14.6. Случай сложного (мультипольного) магнитного поля

**14.6.1. Системы со сложным магнитным полем.** Среди магнитных катаклизмических переменных имеются системы, в которых белый карлик имеет сложное магнитное поле. Такие магнитные поля определяются как поля, которые не могут быть адекватно представлены в виде центрированного или смещенного дипольного поля. Впервые на наличие сложных магнитных полей в белых карликах, по видимому, указано в работе [543]. Авторы этой работы моделировали объект PG 1031+234, используя наклоненное центрированное дипольное поле с добавлением магнитного пятна в области магнитного экватора белого карлика. Ву и Викрамасинг [544] предположили, что в присутствии сложного магнитного поля основными зонами аккреции на поверхности белого карлика в полярах будут области вблизи пересечения магнитного экватора и орбитальной плоскости. Детальные исследования еще ряда полярных выявили признаки существования сложных магнитных полей (см., например, [545]). Однако в этих случаях все наблюдательные проявления могут быть объяснены и в рамках модели смещенного магнитного диполя. Сильным доводом в пользу существования сложных магнитных полей служат наблюдательные свойства асинхронного поляра ВУ Сам [546–548]. Недавно существование сложных магнитных полей в белых карликах было подтверждено с помощью зеемановской томографии нескольких полярных [549–552].

Сложное магнитное поле в первом приближении можно представить в виде суперпозиции дипольной и квадрупольной компонент поля. Характер аккреции на белый карлик, который имеет сложное магнитное поле, может существенным образом отличаться от случая чисто дипольного поля. В частности, такая конфигурация поля может иметь несколько магнитных полюсов, что, в свою очередь, приведет к формированию нескольких зон аккреции. Определяющей наблюдательной характеристикой такого поля является возможность аккреции на магнитный экватор или вблизи него.

На рис. 14.23 схематически показаны основные особенности аккреции в ТДС в случае сильного чисто квадрупольного поля аккретора, ось симметрии которого (показана вектором  $\mathbf{q}$ ) наклонена к оси вращения (показана вектором угловой скорости собственного вращения звезды  $\Omega_*$ ). Вещество из аккреционной струи формирует кольцо в непосредственной близости от поверхности белого карлика, поскольку магнитное поле не позволяет ему сразу упасть на аккретор. Аккрецирующее вещество обладает угловым моментом и поэтому плоскость симметрии этого кольца почти совпадает с орбитальной

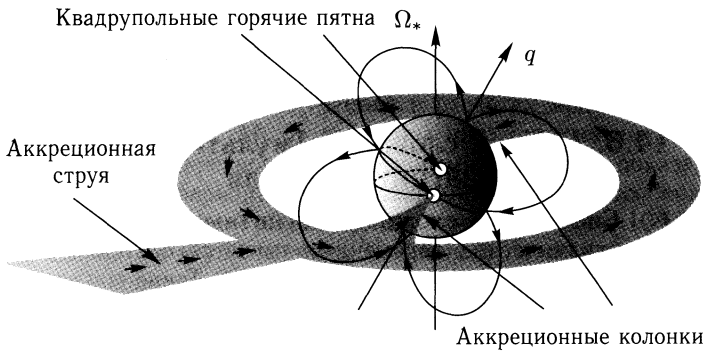


Рис. 14.23. Схема, поясняющая характер аккреции на гравитирующий компактный объект с сильным квадрупольным магнитным полем. Оси вращения звезды и симметрии квадрупольного магнитного поля отмечены векторами  $\Omega_*$  и  $q$  соответственно. Показаны также линии географического и магнитного экваторов звезды

плоскостью двойной системы. В случае квадрупольного магнитного поля вещество может попасть на звезду либо в районе магнитных полюсов, либо в области магнитного экватора. Однако с учетом закона сохранения углового момента наиболее выгодным оказывается режим аккреции в точки пересечения магнитного и географического экваторов звезды. Именно в этих точках (отмечены кружками) будут формироваться аккреционные горячие пятна. Следует подчеркнуть, что характер поляризации излучения, приходящего из этих зон, может существенно отличаться от характера поляризации излучения, приходящего из северного и южного магнитных полюсов. Это обусловлено тем, что интенсивность и структура магнитного поля в экваториальных и полюсных зонах могут существенно различаться между собой.

К настоящему времени обнаружено несколько полярных с асинхронным собственным вращением белого карлика (системы типа BY Cam [553]). Прототипом и наиболее известным представителем этого типа систем является сама система BY Cam. Период собственного вращения белого карлика в этой системе отличается от величины орбитального периода примерно на 1% (см., например, [546]). Кроме того, как показывает анализ наблюдательных данных, магнитное поле белого карлика в системе BY Cam имеет существенную квадрупольную компоненту [546, 547, 554, 555]. Асинхронность вращения белого карлика и сложная геометрия его магнитного поля приводят к ряду замечательных особенностей, наблюдаемых в этой системе [548, 554, 556]. Асинхронные полярные представляют наблюдательные данные, существенно ограничивающие возможные конфигурации магнитного поля.

В асинхронных полярных типа BY Cam кривая блеска изменяется в течение спин-орбитального периода [547, 548, 554, 555, 557]. Исследования кривых блеска BY Cam, проведенные в этих работах,

в целом подтвердили модель сложного магнитного поля, предложенную Масоном [546]. В системе ВУ Сам орбитальный период и период собственного вращения белого карлика отличаются примерно на 2 минуты. Это позволяет достаточно подробно исследовать структуру магнитного поля на всех фазах спин-орбитального периода, равного 14,1 дня.

Впервые трехмерное МГД-моделирование дисковой аккреции на звезду со сложной геометрией магнитного поля было проведено в работах [558, 559]. Результаты расчетов этих авторов показали, что в случае дисковой аккреции на звезду с чисто квадрупольным магнитным полем вещество из диска аккрецирует в районе квадрупольного магнитного пояса. При учете дипольной компоненты этот пояс смещается в сторону южного магнитного полюса, поскольку суммарное магнитное поле в северной полусфере сильнее, чем в южной. Отметим, что эти эффекты проявились и в наших расчетах, результаты которых представлены ниже. В работе [560] рассматривались более сложные конфигурации магнитного поля звезды с учетом октупольной компоненты. Эти модели применялись для моделирования процесса дисковой аккреции на молодые звезды типа Т Тау.

В данном параграфе мы опишем модификацию численной модели на случай учета более сложной геометрии магнитного поля аккретора. Представлены также результаты численного моделирования структуры течения в полярах с магнитным полем белого карлика, имеющего дипольную и квадрупольную компоненты [561]. Эти расчеты проведены для нескольких значений азимутальных углов, которые соответствуют различным моделям полярных. В совокупности они могут описать модель одного асинхронного полярного.

**14.6.2. Описание модели.** Рассмотрим тесную двойную систему с синхронным вращением аккретора, когда период его собственного вращения равен орбитальному периоду. В отсутствие токов в оболочке двойной системы магнитное поле будет определяться собственным полем аккретора  $\mathbf{B}_*$ . Магнитное поле аккретора в области магнитосферы может быть достаточно сильным. Поэтому полное магнитное поле в плазме  $\mathbf{B}$  удобно представить в виде суммы магнитного поля аккретора  $\mathbf{B}_*$  и магнитного поля  $\mathbf{b}$ , индуцированного токами в самой плазме:  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{b}$ .

В оболочке двойной системы собственное магнитное поле аккретора должно удовлетворять условию  $\text{rot } \mathbf{B}_* = 0$ , поскольку оно определяется токами внутри аккретора. Поэтому в оболочке его можно описывать с помощью скалярного потенциала:  $\mathbf{B}_* = -\nabla\varphi$ . Сложное магнитное поле аккретора можно представить в виде суперпозиции мультипольных компонент поля. Далее будем предполагать, что каждая мультипольная компонента поля обладает осевой симметрией. При этом в общем случае оси симметрии различных мультипольных компонент могут не совпадать между собой. Учтем только дипольную и квадрупольную компоненты магнитного поля аккретора.

Потенциал, соответствующий дипольной компоненте поля, имеет вид

$$\varphi_d = \frac{\mu(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \quad (14.7)$$

где  $\mu$  — магнитный момент аккретора,  $\mathbf{d}$  — единичный вектор, определяющий ось симметрии дипольного поля. Вектор магнитного момента  $\boldsymbol{\mu} = \mu\mathbf{d}$ . Индукция магнитного поля

$$\mathbf{B}_d = \frac{\mu}{r^3} [3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}], \quad (14.8)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . Обозначим через  $B_{d,a}$  величину индукции дипольного магнитного поля на дипольном магнитном полюсе звезды. Тогда из выражения (14.8) магнитный момент  $\mu = B_{d,a}R_a^3/2$ , где  $R_a$  — радиус аккретора. Геометрия дипольного магнитного поля обсуждалась в разделе 13.2.2.

Потенциал, соответствующий квадрупольной компоненте поля [476],

$$\varphi_q = D_{ik} \frac{n_i n_k}{2r^3}, \quad (14.9)$$

где  $D_{ik}$  — тензор квадрупольного момента аккретора. Если распределение токов в аккреторе является осесимметричным, то относительно оси симметрии диагональные компоненты квадрупольного момента  $D_{11} = D_{22} = -D/2$ ,  $D_{33} = D$ , а недиагональные компоненты равны нулю. В этом случае потенциал квадрупольного магнитного поля

$$\varphi_q = \frac{D}{4r^3} [3(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})^2 - 1], \quad (14.10)$$

где  $\mathbf{q}$  — единичный вектор, определяющий ось симметрии квадрупольного поля. Индукция соответствующего магнитного поля

$$\mathbf{B}_q = \frac{3D}{4r^4} [5(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} - \mathbf{n} - 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\mathbf{q}]. \quad (14.11)$$

Обозначим через  $B_{q,a}$  величину индукции квадрупольного магнитного поля на квадрупольном магнитном полюсе звезды. Тогда из выражения (14.11) квадрупольный момент  $D = 2B_{q,a}R_a^4/3$ .

На поверхности аккретора вектор индукции квадрупольного магнитного поля (14.11) принимает вид

$$\mathbf{B}_q(\mathbf{R}_a) = \frac{B_{q,a}}{2} (5 \cos^2 \Theta \mathbf{n} - \mathbf{n} - 2 \cos \Theta \mathbf{q}), \quad (14.12)$$

где  $\Theta$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{q}$ . Квадрат вектора  $\mathbf{B}_q$ , а также его нормальная и тангенциальные компоненты на поверхности звезды определяются выражениями:

$$\mathbf{B}_q^2 = \frac{B_{q,a}^2}{4} (5 \cos^4 \Theta - 2 \cos^2 \Theta + 1), \quad (14.13)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_q = \frac{B_{q,a}}{2} (3 \cos^2 \Theta - 1), \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_q = B_{q,a} \sin \Theta \cos \Theta. \quad (14.14)$$

Распределения этих величин вдоль магнитного меридиана на поверхности аккректора показаны на рис. 14.24. На рисунке видно, что распределение абсолютной величины индукции квадрупольного магнитного поля на поверхности аккректора, так же как и для дипольного

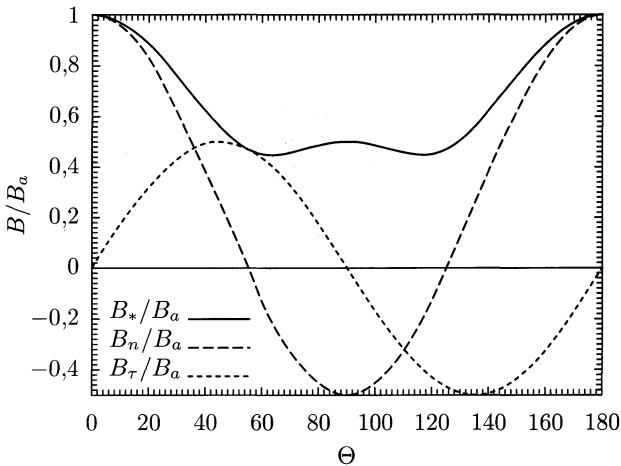


Рис. 14.24. Распределение индукции квадрупольного магнитного поля на поверхности аккректора

магнитного поля, обладает как осевой, так и экваториальной симметрией. Максимальное значение индукции, равное  $B_{q,a}$ , достигается на магнитных полюсах. На магнитном экваторе индукция магнитного поля равна  $B_{q,a}/2$ . Минимальное значение индукции магнитного поля, равное  $B_{q,a}/\sqrt{5}$ , достигается в точках поверхности, которым соответствуют углы  $\Theta^+$  и  $\Theta^-$ , удовлетворяющие равенству  $\cos \Theta = \pm 1/\sqrt{5}$ . Эти углы равны  $\Theta^+ = 63,4^\circ$  и  $\Theta^- = 116,6^\circ$ . Таким образом, на магнитном экваторе имеется локальный максимум индукции магнитного поля. Вблизи северного и южного магнитных полюсов, когда  $\Theta < \Theta^+$  или  $\Theta > \Theta^-$ , нормальная компонента поля положительна и поэтому магнитные силовые линии выходят из аккректора. В промежуточной области  $\Theta^+ < \Theta < \Theta^-$  нормальная компонента поля является отрицательной и магнитные силовые линии входят в аккректор. На магнитных полюсах и на магнитном экваторе поле имеет только нормальную компоненту. В случае, когда угол  $\Theta$  удовлетворяет равенству  $\cos \Theta = \pm 1/\sqrt{3}$  (т. е. угол  $\Theta$  равен  $54,7^\circ$  или  $125,3^\circ$ ), поле имеет только касательную компоненту. Проведенный анализ дает основания полагать, что в случае чисто квадрупольного магнитного поля аккреция вещества может происходить не только на магнитные полюса, но и на магнитный экватор.

Геометрия квадрупольного магнитного поля аккректора для случая наклона магнитной оси  $\theta = 30^\circ$  показана на рис. 14.25. Градация серого цвета на поверхности звезды соответствует величине индукции



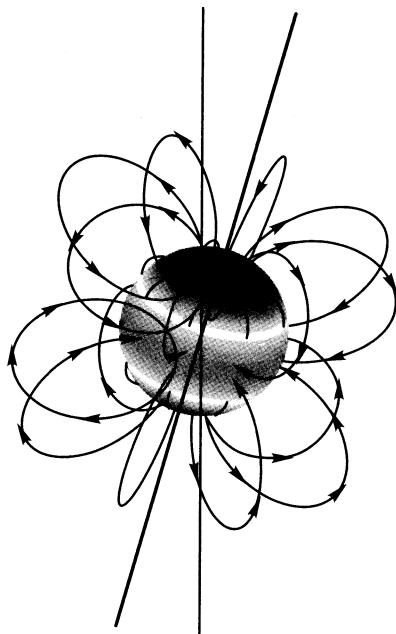


Рис. 14.25. Геометрия квадрупольного магнитного поля аккретора. Градация серого цвета на поверхности звезды соответствует величине индукции магнитного поля. Величина поля растет от светлого оттенка к темному. Показаны ось вращения аккретора (вертикальная линия) и магнитная ось (наклонная линия)

магнитного поля. При этом величина поля растет от светлого оттенка к темному. На рисунке показаны также ось вращения аккретора (тонкая вертикальная линия) и магнитная ось (жирная наклонная линия). Полное магнитное поле аккретора в нашей модели  $\mathbf{B}_* = \mathbf{B}_d + \mathbf{B}_q$ . При этом предполагалось, что оси симметрии дипольного и квадрупольного поля совпадают ( $\mathbf{d} = \mathbf{q}$ ). В этом случае в расчетах удобно задавать  $B_{d,a} = \alpha_d B_a$ ,  $B_{q,a} = \alpha_q B_a$ , где  $B_a$  — полная индукция поля на магнитном полюсе аккретора, а коэффициенты  $\alpha_d$  и  $\alpha_q$  удовлетворяют соотношению  $\alpha_d + \alpha_q = 1$  и определяют относительные вклады дипольной и квадрупольной компонент в полную величину магнитного поля. В плоскости магнитного экватора  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ , поэтому индукции дипольного и квадрупольного полей равны соответственно

$$B_d = \frac{B_{d,a}}{2} \frac{R_a^3}{r^3}, \quad B_q = \frac{B_{q,a}}{2} \frac{R_a^4}{r^4}. \quad (14.15)$$

Отношение этих величин  $B_d/B_q = (\alpha_d/\alpha_q)(R_a/r)$ . Это соотношение показывает, что при  $\alpha_q > \alpha_d$  в районе магнитного экватора будет существовать некоторая область, в которой квадрупольное поле будет преобладать над дипольным полем. В противном случае при  $\alpha_q < \alpha_d$

течение плазмы в окрестности аккретора будет полностью контролироваться дипольной компонентой магнитного поля.

Использованная в наших расчетах геометрия магнитного поля аккретора ( $\alpha_q = 10\alpha_d$ ) показана на рис. 14.26. Обозначения соответствуют рис. 14.25. Максимальное значение индукции магнитного поля на поверхности аккретора достигается на магнитных полюсах и в полосе,

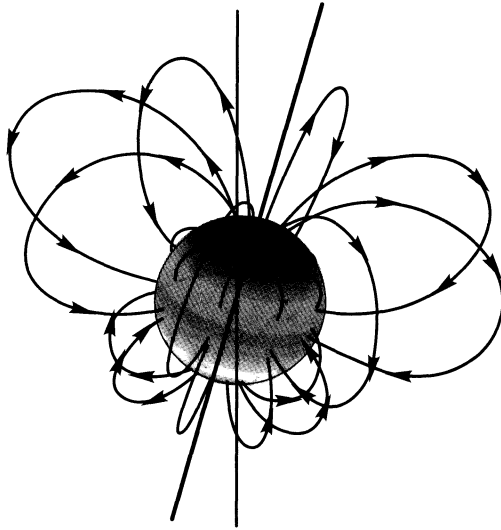


Рис. 14.26. Геометрия магнитного поля аккретора. Градация серого цвета на поверхности звезды соответствует величине индукции магнитного поля. Величина поля растет от светлого оттенка к темному. Показаны ось вращения аккретора (вертикальная линия) и магнитная ось (наклонная линия)

проходящей около магнитного экватора. Как уже указывалось выше, для чисто квадрупольного поля эта полоса проходит в точности вдоль магнитного экватора. При добавлении дипольного поля также наблюдается увеличение поля в районе полюсов и в экваториальной области. Однако в северном полушарии магнитное поле оказывается более сильным по сравнению с южным полушарием [562, 563]. Это связано с тем, что силовые линии чисто дипольного магнитного поля выходят из северного полушария и входят в южное полушарие. Для чисто квадрупольного поля силовые линии в обоих полушариях выходят из полярных областей и входят в аккретор в экваториальных областях. Поэтому в случае комбинированного поля дипольные и квадрупольные компоненты магнитного поля в северном полушарии складываются, а в южном — вычитаются.

Действительно, нетрудно убедиться, что в этом случае квадрат вектора индукции магнитного поля, а также его нормальная и тангенциальные компоненты на поверхности аккретора с учетом соотношений (14.8) и (14.11) равны

$$B_*^2 = \frac{B_a^2}{4} [\alpha_d^2 (3 \cos^2 \Theta + 1) + \alpha_q^2 (5 \cos^4 \Theta - 2 \cos^2 \Theta + 1) + 8\alpha_d \alpha_q \cos^3 \Theta]. \quad (14.16)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_* = B_a \left[ \alpha_d \cos \Theta + \frac{\alpha_q}{2} (3 \cos^2 \Theta - 1) \right], \quad (14.17)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_* = B_a \sin \Theta \left( \frac{\alpha_d}{2} + \alpha_q \cos \Theta \right). \quad (14.18)$$

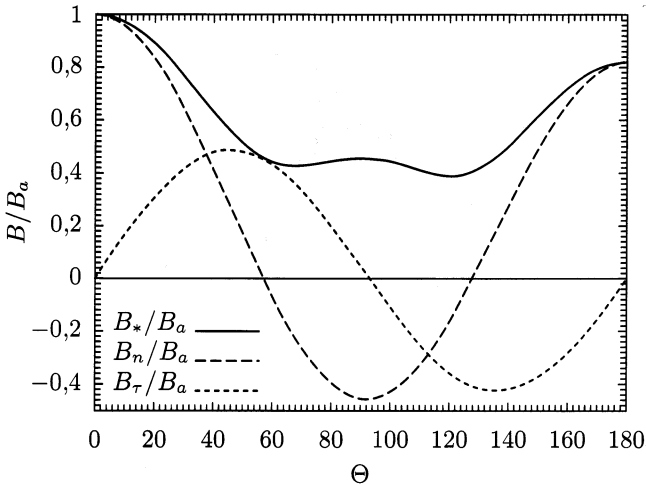


Рис. 14.27. Распределение индукции поля вдоль магнитного меридиана на поверхности аккректора

Распределения этих величин показаны на рис. 14.27. Проведем анализ этих выражений. Вычисляя производную по  $\Theta$  от выражения (14.16), можно определить углы, при которых достигаются максимальные и минимальные значения индукции магнитного поля. Приравнивая производную по  $\Theta$  нулю, приходим к уравнению

$$\cos \Theta \sin \Theta (3\alpha_d^2 - 2\alpha_q^2 + 10\alpha_q^2 \cos^2 \Theta + 12\alpha_d \alpha_q \cos \Theta) = 0. \quad (14.19)$$

Максимальное значение индукции магнитного поля, равное  $B_a$ , достигается на северном магнитном полюсе ( $\Theta = 0$ ). На южном магнитном полюсе ( $\Theta = \pi$ ) индукция поля равна  $|\alpha_d - \alpha_q| B_a$ . Еще один локальный максимум индукции поля, равный  $\sqrt{\alpha_d^2 + \alpha_q^2} B_a / 2$ , имеется на магнитном экваторе ( $\Theta = \pi/2$ ). Оставшиеся два корня  $\Theta^+$  и  $\Theta^-$  уравнения (14.18) определяются корнями выражения в скобках. При таких значениях угла  $\Theta$  индукция магнитного поля на поверхности аккректора достигает минимума. Решая соответствующее уравнение, находим:

$$\cos \Theta^{\pm} = -\frac{3\alpha_d}{5\alpha_q} \pm \sqrt{\frac{3}{50} \left(\frac{\alpha_d}{\alpha_q}\right)^2 + \frac{1}{5}}. \quad (14.20)$$

Вычисляя производную по  $\Theta$  от выражения (14.17) и приравнявая ее нулю, приходим к уравнению, определяющему экстремумы нормальной компоненты поля:

$$\sin \Theta (\alpha_d + 3\alpha_q \cos \Theta) = 0. \quad (14.21)$$

Два решения  $\Theta = 0, \pi$  соответствуют магнитным полюсам. Третье решение определяется равенством

$$\cos \Theta = -\frac{\alpha_d}{3\alpha_q}. \quad (14.22)$$

В этой точке нормальная компонента поля достигает минимального значения. Кроме того, в точках поверхности, которые соответствуют углам  $\Theta$ , удовлетворяющим равенству

$$\cos \Theta = -\frac{\alpha_d}{3\alpha_q} \pm \sqrt{\frac{4}{9} \left(\frac{\alpha_d}{\alpha_q}\right)^2 + \frac{1}{3}}, \quad (14.23)$$

нормальная компонента магнитного поля обращается в нуль. Иными словами, в этих точках магнитное поле имеет только касательную компоненту. Касательная компонента магнитного поля исчезает на магнитных полюсах и в точках, удовлетворяющих соотношению

$$\cos \Theta = -\frac{\alpha_d}{2\alpha_q}. \quad (14.24)$$

Максимальные и минимальные значения касательной компоненты достигаются в точках, удовлетворяющих равенству

$$\cos \Theta = -\frac{\alpha_d}{4\alpha_q} \pm \sqrt{\frac{1}{16} \left(\frac{\alpha_d}{\alpha_q}\right)^2 + \frac{1}{2}}. \quad (14.25)$$

Таким образом, структура магнитного поля, использованного в нашей модели, является достаточно сложной. При этом проведенный анализ дает основания полагать, что в случае такого поля аккреция вещества может происходить не только на магнитные полюса, но также и в области магнитного пояса, который определяется значением угла (14.24). Поскольку этот угол всегда больше  $90^\circ$ , то магнитный пояс всегда будет располагаться в южном полушарии.

Исследуем структуру течения в тесной двойной системе, параметры которой соответствуют ВУ Cam (см., например, [546]). Звезда-донор (красный карлик) в этой системе имеет массу  $M_d = 0,5M_\odot$  и эффективную температуру 4000 К. Звезда-аккретор (белый карлик) имеет массу  $M_a = 1M_\odot$ . Период обращения системы составляет  $P_{\text{orb}} = 3,36$  ч, а ее большая полуось  $A = 1,3R_\odot$ . Внутренняя точка Лагранжа  $L_1$

находится на расстоянии  $0,57A$  от центра аккретора. Период собственного вращения аккретора в системе ВУ Сат  $P_{\text{spin}} = 3,32$  ч. Это значение отличается от величины орбитального периода примерно на 1%. В системе отсчета, связанной с двойной системой, аккретор совершает полный оборот за время  $P_{\text{beat}} = 14,1$  сут. ( $1/P_{\text{beat}} = 1/P_{\text{spin}} - 1/P_{\text{orb}}$ ), что составляет около 101 орбитального периода.

Индукция магнитного поля на поверхности белого карлика в системе ВУ Сат оценивается из наблюдений величиной 28 МГс [564]. В нашей модели оси симметрии дипольного и квадрупольного магнитного поля совпадали. Угол их наклона по отношению к оси вращения аккретора был выбран равным  $30^\circ$ . В расчетах использовалось значение коэффициента  $\alpha_q = 10\alpha_d$ . Это означает, что на магнитном экваторе квадрупольная компонента поля в десять раз превосходит интенсивность дипольной компоненты. При этом радиус зоны влияния квадрупольного поля (расстояние, на котором значения  $B_d$  и  $B_q$  становятся равными друг другу (см. (14.15))) можно оценить значением  $r = 10R_a$ . Наличие сильного магнитного поля уже само по себе существенно влияет на процесс массообмена в системе. Кроме того, присутствие сильной квадрупольной компоненты значительно усложняет характер аккреции вещества на белый карлик.

Численные эксперименты показали, что выход решения на квазистационарный режим происходит за характерное время, приблизительно равное орбитальному периоду  $P_{\text{orb}}$ . При этом критерием выхода решения на квазистационарный режим считалось условие постоянства полной массы вещества в расчетной области. Характерное время выхода численного решения на квазистационарный режим течения существенно меньше времени  $P_{\text{beat}}$ . Поэтому структура течения моделировалась отдельно для разных фаз периода  $P_{\text{beat}}$  без учета собственного вращения аккретора. Всего было промоделировано 10 фаз, соответствующих моментам времени  $mP_{\text{beat}}$ , где значение  $m$  изменялось от 0 до 0,9 с шагом 0,1. Начальная фаза  $m = 0$  соответствовала положению аккретора, при котором его северный магнитный полюс находится на противоположной стороне от донора.

**14.6.3. Особенности динамики вещества.** Трехмерная картина течения, полученная в расчетах, для разных фаз представлена на рис. 14.28–14.37. Показаны изоповерхности десятичного логарифма плотности (в единицах  $\rho(L_1)$ ) для значений  $-6$ ,  $-5$  и  $-4$ . Магнитные силовые линии показаны линиями со стрелками. При этом градация серого цвета линий соответствует величине индукции магнитного поля. Темным оттенкам соответствует более сильное поле, а светлым — более слабое. Показаны также ось вращения аккретора (тонкая вертикальная линия) и ось симметрии магнитного поля (жирная наклонная линия). На левых диаграммах показана общая картина течения в расчетной области для данной фазы, а на правых диаграммах показана структура течения вблизи аккретора для той же самой фазы.

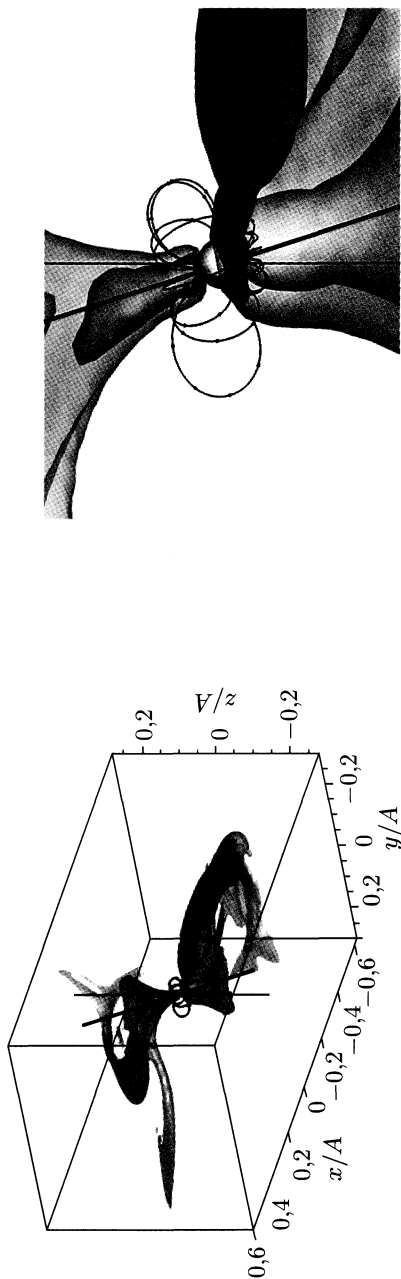


Рис. 14.28. Трехмерная структура течения для фазы 0. Показаны изоповерхности десятичного логарифма плотности (в единицах  $\rho(L_1)$ ) для значений  $-6$ ,  $-5$  и  $-4$  и магнитные силовые линии. Градация серого цвета магнитных силовых линий соответствует величине индукции магнитного поля. Величина поля растет от темного оттенка к светлому. Вертикальной линией показана ось вращения аккректора, а наклонной линией — магнитная ось. На правой диаграмме показана структура течения вблизи аккректора

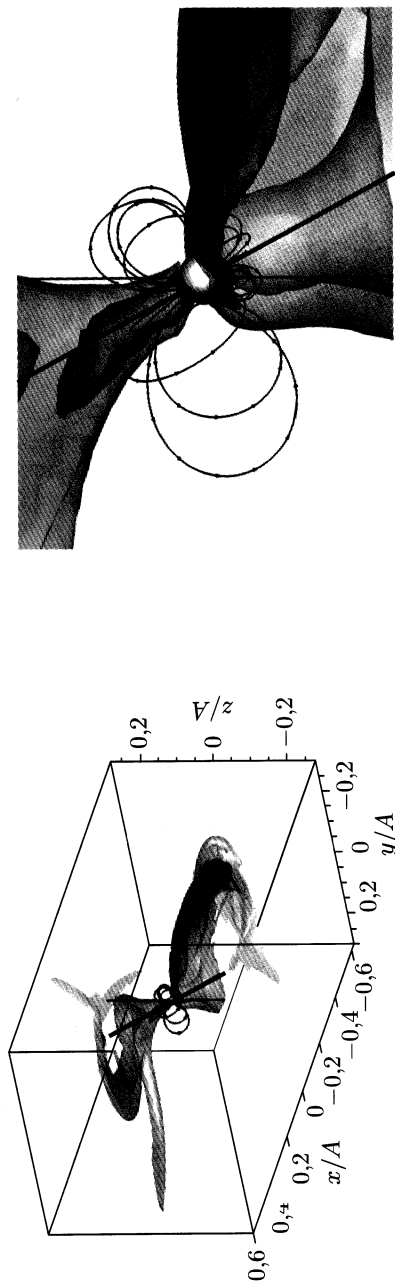


Рис. 14.29. То же самое, что на рис. 14.28, но для фазы 0,1

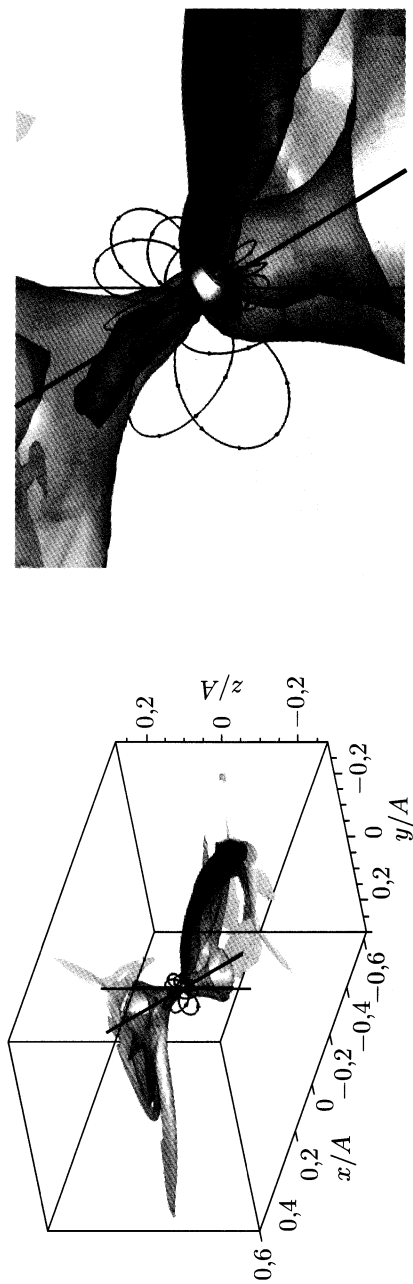


Рис. 14.30. То же самое, что на рис. 14.28, но для фазы 0,2



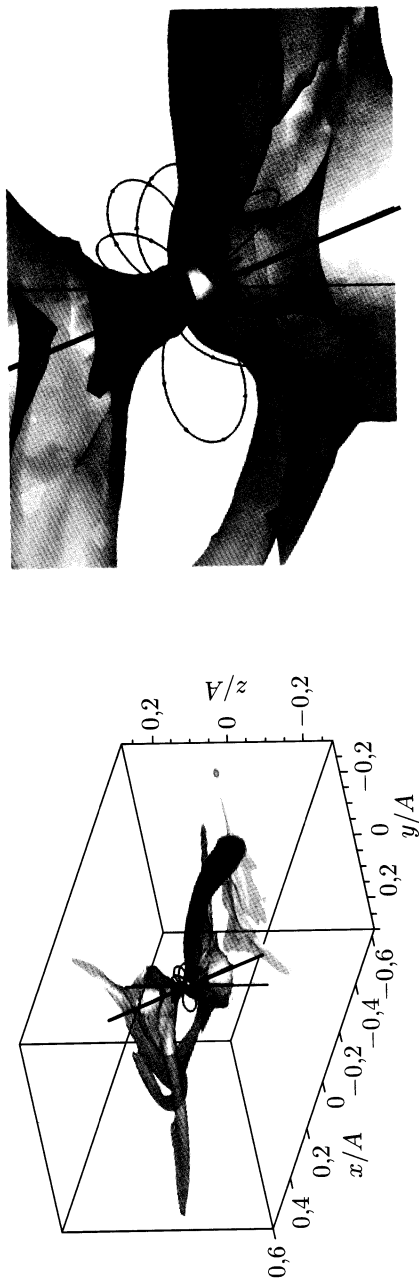


Рис. 14.31. То же самое, что на рис. 14.28, но для фазы 0,3

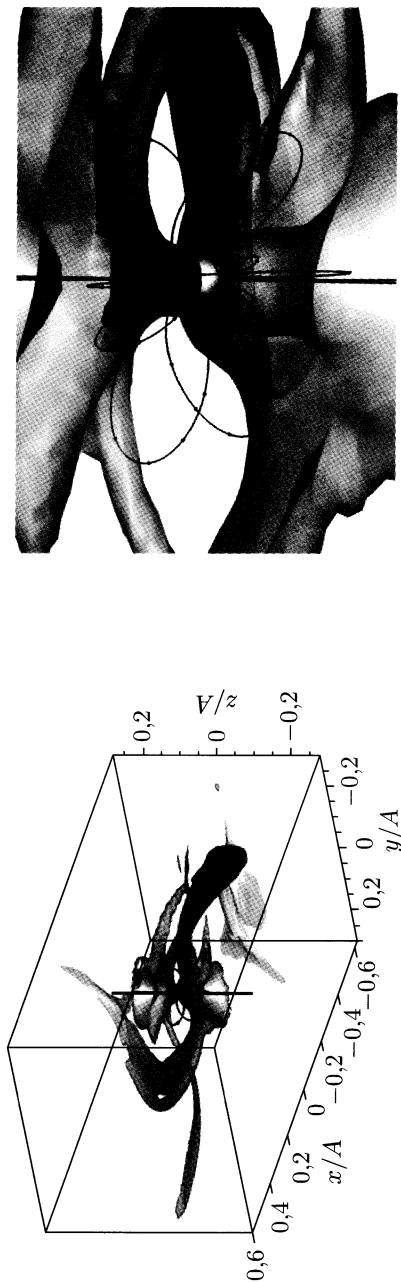


Рис. 14.32. То же самое, что на рис. 14.28, но для фазы 0,4

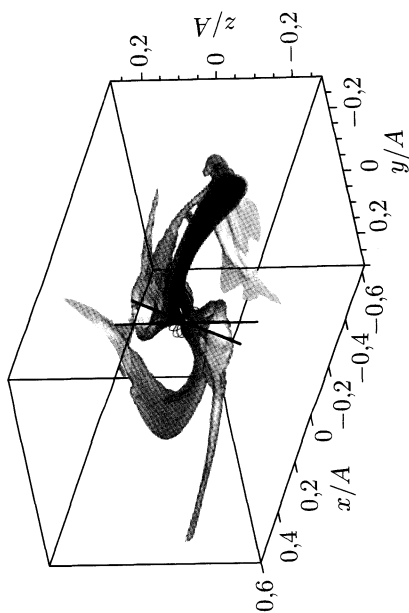
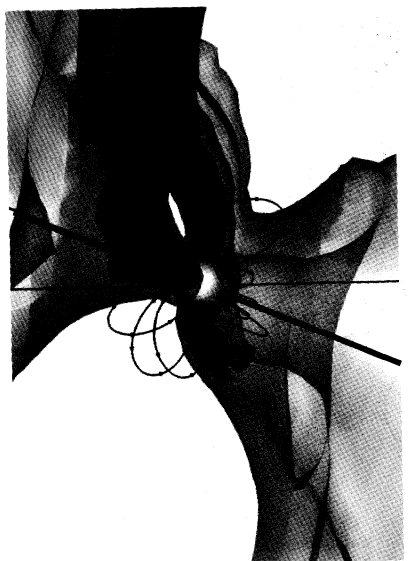


Рис. 14.33. То же самое, что на рис. 14.28, но для фазы 0,5

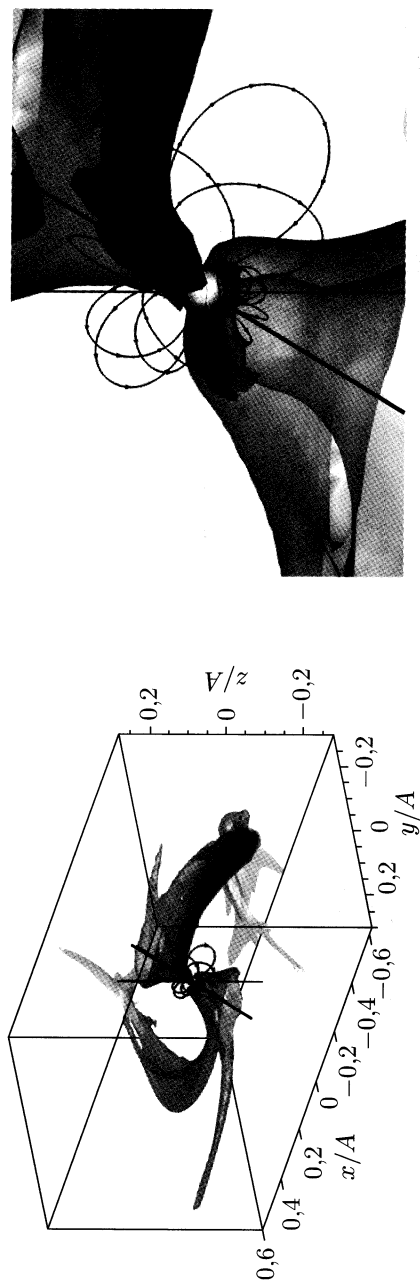


Рис. 14.34. То же самое, что на рис. 14.28, но для фазы 0,6

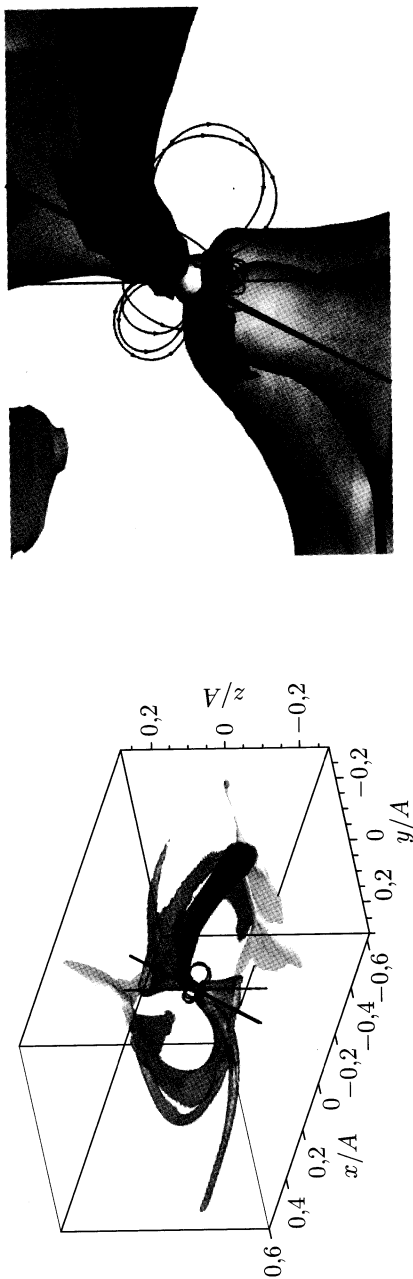


Рис. 14.35. То же самое, что на рис. 14.28, но для фазы 0,7

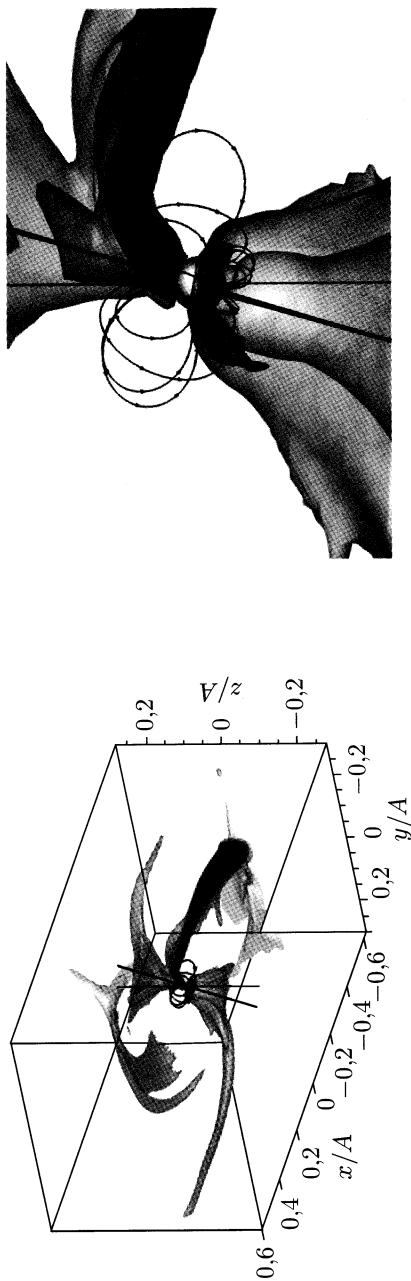


Рис. 14.36. То же самое, что на рис. 14.28, но для фазы 0,8

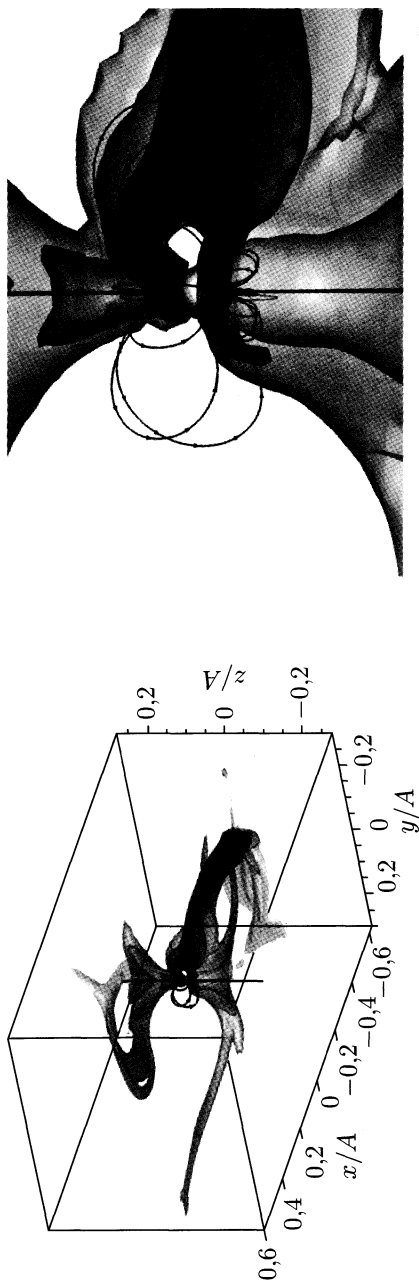


Рис. 14.37. То же самое, что на рис. 14.28, но для фазы 0,9

Рисунки показывают, что в течение периода  $P_{\text{beat}}$  структура течения в системе существенно меняется. На фазе 0 (рис. 14.28) аккреционная струя вещества, вытекающего из внутренней точки Лагранжа  $L_1$ , попадает на аккретор в районе магнитного пояса, наличие которого обусловлено присутствием квадрупольной компоненты поля. При этом вокруг аккретора формируется аккреционное кольцо, что хорошо согласуется с вышеизложенной схемой (см. рис. 14.23). Кроме того, вещество из оболочки формирует аккреционный поток на северный магнитный полюс и более слабый поток на южный магнитный полюс. Однако эти потоки намного более слабые по сравнению с основным потоком из аккреционной струи. Практически аналогичную картину течения можно наблюдать на фазах 0,1 (рис. 14.29), 0,2 (рис. 14.30) и 0,3 (рис. 14.31). Структура аккреционных потоков отличается на этих фазах только углом поворота магнитной оси относительно направления на вторичный компонент.

Следует отметить, что структура аккреционных потоков в случае сложной геометрии магнитного поля при наличии дипольной и квадрупольной компонент существенно отличается от случая аккреции на звезду с чисто дипольным магнитным полем [125]. Примеры расчетов, приведенных в предыдущем параграфе показывают, что в ТДС, в которых аккретор имеет сильное дипольное магнитное поле, аккреция вещества из оболочки вторичного компонента в зависимости от величины индукции магнитного поля и ориентации магнитной оси может происходить либо на северный магнитный полюс аккретора, либо на южный, либо на оба полюса сразу.

На фазе 0,4 (рис. 14.32) начинается перестройка структуры течения. Основной поток из аккреционной струи при подходе к аккретору расщепляется на два потока. Основная часть вещества все еще выпадает на поверхность аккретора в районе магнитного пояса. Вторая часть потока устремляется вдоль магнитных силовых линий к северному магнитному полюсу. На фазе 0,5 (рис. 14.33) эта вторая часть потока значительно усиливается и интенсивности двух потоков практически сравниваются. Таким образом, в этот момент времени на поверхности звезды формируются две зоны аккреции практически одинаковой интенсивности. Одна из них расположена на северном магнитном полюсе, а другая находится в районе магнитного пояса.

На фазах 0,6 (рис. 14.34), 0,7 (рис. 14.35) и 0,8 (рис. 14.36) аккреционный поток на магнитный пояс выключается и почти все вещество из аккреционной струи попадает в область северного магнитного полюса звезды. Такая картина течения аналогична случаю полярных, в которых аккретор имеет чисто дипольное магнитное поле [125].

Наконец, на фазе 0,9 (рис. 14.37) структура течения перестраивается второй раз за период  $P_{\text{beat}}$ . Поток из аккреционной струи при подходе к звезде снова расщепляется на два потока (как на фазе 0,5). Один поток по-прежнему выпадает на северный магнитный полюс, а второй формирует зону аккреции в районе магнитного пояса.



Таким образом, анализ результатов расчетов показывает, что за период  $P_{\text{beat}}$  структура течения перестраивается два раза. При этом изменяется конфигурация аккреционных потоков, а также расположение и количество зон аккреции.

**14.6.4. Наблюдательные проявления.** Для расчета расположения горячих пятен на поверхности аккретора, формирующихся в зонах интенсивной аккреции, мы использовали методику, описанную в работе [120]. Предполагается, что при падении вещества на поверхность аккретора в излучение переходит его тепловая и кинетическая энергии. Плотность соответствующего потока энергии через поверхность аккретора в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$  определяется выражением

$$f(\mathbf{R}) = -\rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right), \quad (14.26)$$

где  $\varepsilon$  — внутренняя энергия газа, рассчитанная на единицу массы,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности. Знак «минус» выбран из-за того, что на поверхности аккретора нормальная компонента скорости  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} < 0$ . В результате в выражении (14.26) величина  $f(\mathbf{R})$  оказывается положительной.

Для простоты будем считать, что излучение из зон аккреции имеет чернотельный характер. Это означает, что локальная эффективная температура  $T_{\text{eff}}$  в данной точке поверхности удовлетворяет соотношению  $f(\mathbf{R}) = \sigma T_{\text{eff}}^4(\mathbf{R})$ , где  $\sigma$  — постоянная Стефана–Больцмана. Следует заметить, что в отличие от работы [120] в нашем случае аккреция вещества идет не из диска, а непосредственно из аккреционной струи. Поэтому нормальная компонента скорости вещества на всей поверхности аккретора с хорошей точностью равна скорости свободного падения,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -v_{\text{ff}} = -\sqrt{\frac{2GM_a}{R_a}}. \quad (14.27)$$

Это означает, что распределение плотности потока энергии  $f(\mathbf{R})$ , а следовательно, и эффективной температуры  $T_{\text{eff}}(\mathbf{R})$ , на поверхности аккретора будет определяться распределением плотности  $\rho(\mathbf{R})$ .

Особенности распределения потока излучения, выходящего с поверхности аккретора, для разных фаз демонстрирует рис. 14.38. На рисунке показаны распределения десятичного логарифма плотности аккрецирующего на поверхность звезды вещества. Диаграммы от  $a$  до  $u$  соответствуют фазам от 0 до 0,9 периода  $P_{\text{beat}}$ .

На всех диаграммах используется одинаковая шкала градации серого цвета в интервале значений десятичного логарифма плотности от минимального значения  $-8$  до максимального значения  $-3$ . Можно считать, что области с минимальной плотностью (показаны черным цветом) соответствуют собственной эффективной температуре белого карлика  $T_{\text{eff}} = 37000$  К. На левой части каждой диаграммы показано

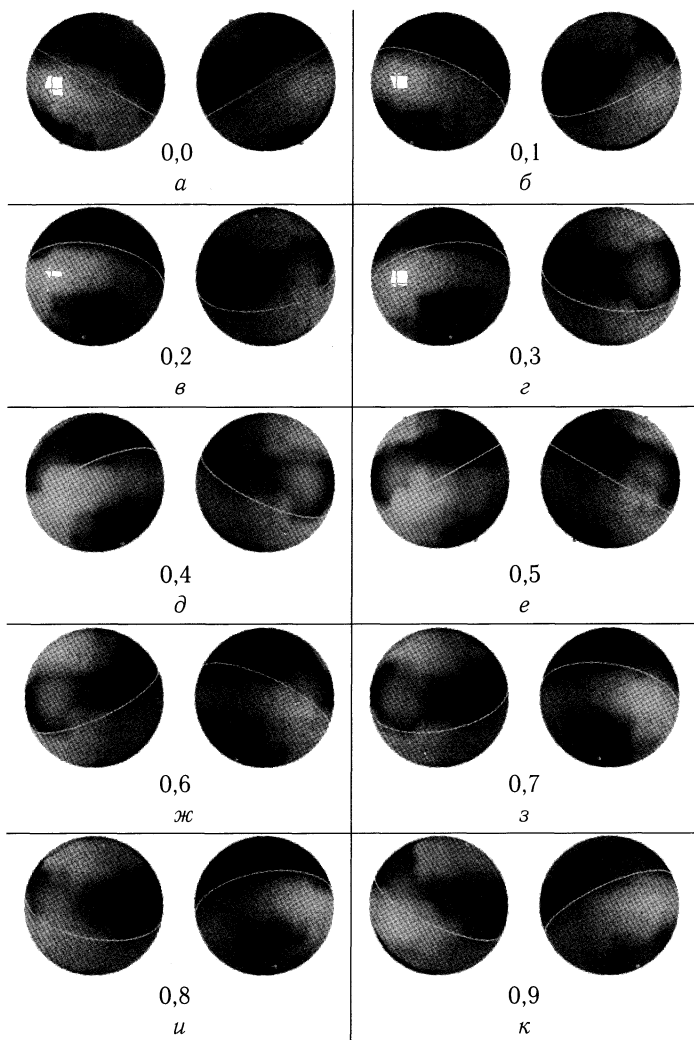


Рис. 14.38. Распределение десятичного логарифма плотности (в единицах  $\rho(L_1)$ ) от  $-8$  до  $-3$  на поверхности аккретора для различных фаз. На каждой диаграмме слева изображено западное полушарие, а справа — восточное (см. пояснение в тексте относительно ориентации системы координат). Освещенная часть поверхности направлена на донор. Белой линией показан магнитный экватор. Шарики указывают положения северного (вверху) и южного (внизу) магнитных полюсов

западное полушарие звезды, а на правой части — восточное. На диаграммах шариками отмечены положения северного (вверху) и южного (внизу) магнитных полюсов. Показана также линия магнитного экватора.

Изображения поверхности ориентированы следующим образом. Отсчет азимутальной координаты (долгота) на поверхности аккретора начинается от точки, находящейся на противоположной от донора стороне. Напомним, что в наших расчетах использовалась декартова система координат, начало которой расположено в центре аккретора, а центр донора находится в точке  $x = -A$ . Это означает, что точка пересечения нулевого меридиана (правый край левого полушария и левый край правого полушария) и экватора находится в точке с положительным значением координаты  $x$ . Это обстоятельство подчеркнуто на представленных диаграммах распределением освещенности поверхности аккретора. Освещенная часть поверхности обращена к донору, а затененная находится на противоположной от донора стороне. Принятое определение западного и восточного полушарий поясняет рис. 14.39.

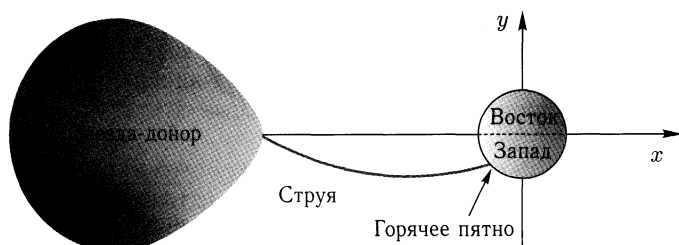


Рис. 14.39. Схема, поясняющая определение западного и восточного полушарий, показанных на рис. 14.38

Таким образом, на диаграммах показаны распределения плотности на поверхности аккретора в системе отсчета, связанной с донором. Координатная сетка (меридианы и параллели) на поверхности аккретора на диаграммах не описывает истинную географическую систему координат аккретора, поскольку она привязана не к аккретору, а к донору. В этой системе координат аккретор совершает полный оборот вокруг собственной оси за период  $P_{\text{beat}}$ . Следовательно, его истинная географическая система координат все время проскальзывает относительно нарисованной сетки. Поэтому все выглядит так, как если бы мы в течение периода  $P_{\text{beat}}$  наблюдали за аккретором из точки  $L_1$  или любой другой стационарной точки во вращающейся системе отсчета, связанной с двойной системой.

Рисунки показывают, что геометрия горячих пятен на поверхности аккретора является достаточно сложной. Однако она полностью соответствует описанию трехмерной структуры течения в предыдущем разделе. На всех диаграммах можно увидеть две основные зоны аккреции: в районе северного магнитного полюса и в области магнитного пояса, расположенного чуть южнее магнитного экватора. На начальной фазе (верхняя левая диаграмма) основное горячее пятно расположено в западном полушарии. На противоположной стороне в восточном

полушарии можно разглядеть аналогичное пятно, но меньшей интенсивности. Формирование этих двух горячих пятен полностью соответствует картине аккреции, схематически изображенной на рис. 14.23. Третье пятно, также относительно слабой интенсивности, формируется на северном магнитном полюсе. Подобная картина распределения горячих пятен наблюдается и на диаграммах, соответствующих фазам 0,1, 0,2 и 0,3 (первый и второй ряд диаграмм).

Как указывалось выше, на фазе 0,4 начинается перестройка структуры течения. Основной аккреционный поток расщепляется на два потока. В результате происходит ослабление горячего пятна в районе магнитного пояса и усиление пятна на северном магнитном полюсе. На фазе 0,5 (третий ряд, правая диаграмма) мы видим два соответствующих горячих пятна практически одинаковой интенсивности. На фазах 0,6, 0,7 и 0,8 основное горячее пятно расположено уже на северном магнитном полюсе. Второе пятно в районе магнитного пояса выключается. Наконец, на фазе 0,9 (нижняя правая диаграмма) аккреционный поток снова расщепляется и формирует два горячих пятна.

Таким образом, за период  $P_{\text{beat}}$  интенсивность, расположение и количество горячих пятен на поверхности аккретора нетривиальным образом меняется. Все это отражается на наблюдательных свойствах системы.

На рис. 14.40 представлены кривые, описывающие вариации интегральной интенсивности излучения (в произвольных единицах) поверхности аккретора в течение периода  $P_{\text{beat}}$ . Сплошная кривая соответствует западному полушарию, а пунктирная — восточному. Рисунок показывает, что излучение западного полушария является значительно более интенсивным, по сравнению с излучением восточного полушария. Это обусловлено тем, что аккреционная струя из-за орбитального вращения двойной системы подходит к аккретору со стороны западного полушария. Поэтому практически все энерговыделение сосредоточено именно в этой области.

На кривой, соответствующей западному полушарию, имеются два максимума и два минимума. Поэтому в течение периода  $P_{\text{beat}}$  происходят два всплеска интенсивности излучения. Амплитуда вариаций интенсивности излучения при этом достигает 65%. Первый всплеск начинается с глубокого минимума на фазе 0,6 и заканчивается максимумом на фазе 0,1. Второй всплеск является более резким и достигает максимума на фазе 0,4. Интересно отметить, что на этих фазах (0,1 и 0,4) наблюдаются максимумы и на кривой, соответствующей восточному полушарию. При этом амплитуда вариаций интенсивности излучения восточного полушария достигает 60%.

Сравнение кривых на рис. 14.40 с диаграммами на рис. 14.38 показывает, что максимумы интенсивности соответствуют моментам времени, когда горячее пятно в районе магнитного пояса находится точно на географическом экваторе аккретора. Поток излучения от второго

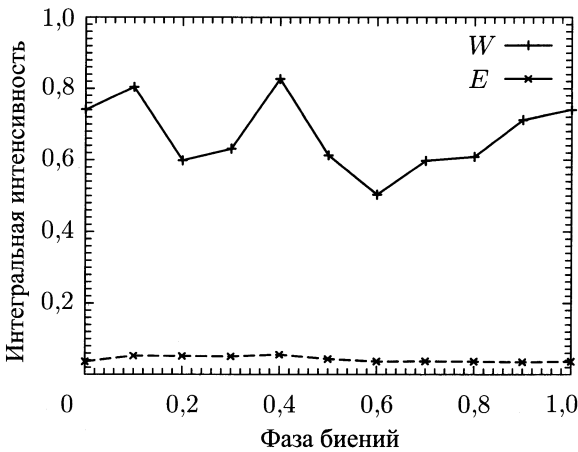


Рис. 14.40. Вариации интегральной интенсивности излучения поверхности аккретора для западного ( $W$ ) и восточного ( $E$ ) полушарий в течение спин-орбитального периода биений  $P_{\text{beat}}$ .

горячего пятна, формирующегося на северном магнитном полюсе, является более слабым, поскольку оно находится на краю диска аккретора.

Для более наглядного представления результатов расчетов и сравнения их с наблюдениями нами были построены синтетические кривые блеска. Они позволяют проследить и исследовать вариации интенсивности излучения системы, связанные с изменением расположения и количества горячих пятен на поверхности аккретора. Для построения кривых блеска мы использовали методику, описанную в работе [120].

Интенсивность излучения с поверхности аккретора вычислялась с помощью выражения

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{\cos \beta > 0} f(\mathbf{R}) \cos \beta dS, \quad (14.28)$$

где  $dS$  — элемент сферической поверхности аккретора,  $\cos \beta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, направленный из данной точки поверхности к наблюдателю. Вектор  $\mathbf{k}$  определяется углом  $i$  наклона орбитальной плоскости двойной системы:  $\cos i = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k} / \Omega$ . Интегрирование в (14.28) проводится только по видимой наблюдателем части полушферы,  $\cos \beta > 0$ . Геометрический фактор, обусловленный затмениями излучения аккретора донором, при вычислении интеграла (14.28) нами не учитывался, поскольку затмений в системе BY Cam не наблюдается. Это означает, что угол  $i$  наклона орбитальной плоскости этой системы должен лежать в пределах  $i \lesssim 60^\circ$  или  $i \gtrsim 120^\circ$ .

Полученные синтетические кривые блеска показаны на рис. 14.41–14.45. Графики соответствуют различным фазам периода  $P_{\text{beat}}$ . Различные кривые на графиках соответствуют различным углам ориентации системы  $i$ .

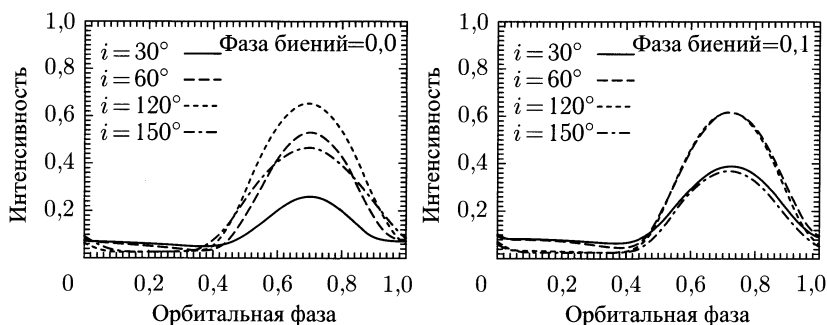


Рис. 14.41. Синтетические кривые блеска, построенные для фаз 0,0 и 0,1 периода  $P_{\text{beat}}$ . Различные кривые на графиках соответствуют различным углам ориентации  $i$  двойной системы относительно наблюдателя

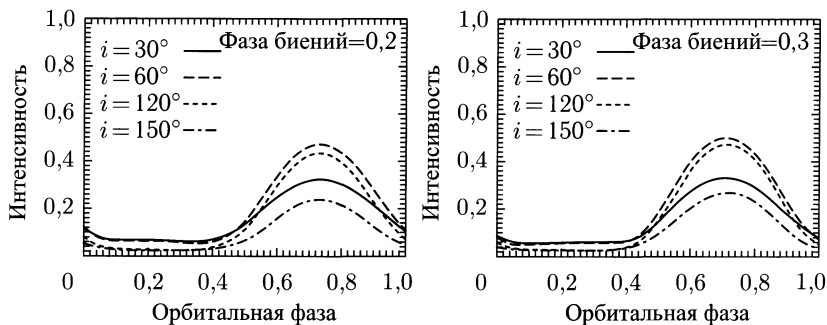


Рис. 14.42. Синтетические кривые блеска, построенные для фаз 0,2 и 0,3 периода  $P_{\text{beat}}$ . Обозначения те же, что и на рис. 14.41

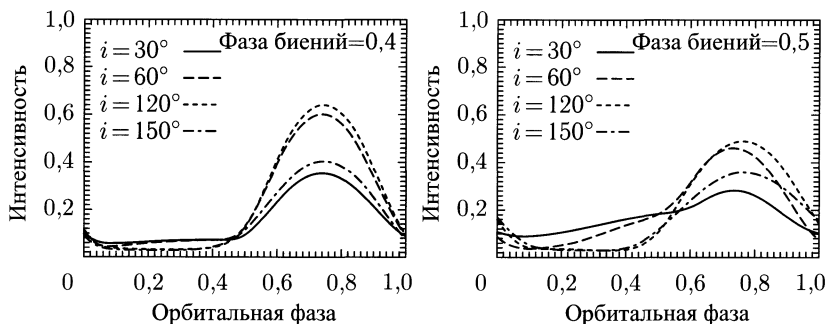


Рис. 14.43. Синтетические кривые блеска, построенные для фаз 0,4 и 0,5 периода  $P_{\text{beat}}$ . Обозначения те же, что и на рис. 14.41

Анализ кривых блеска показывает, что в течение периода  $P_{\text{beat}}$  амплитуда интенсивности излучения системы может изменяться в два и более раза в зависимости от значений угла  $i$ . Первая половина периода  $P_{\text{beat}}$  является относительно спокойной, поскольку в это время аккректор повернут к наблюдателю своим восточным полушарием,

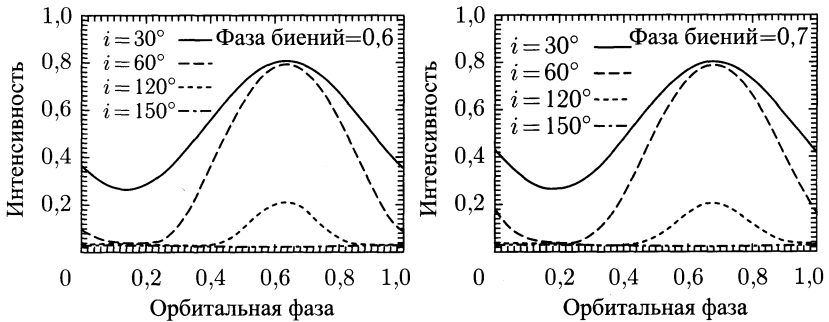


Рис. 14.44. Синтетические кривые блеска, построенные для фаз 0,6 и 0,7 периода  $P_{\text{beat}}$ . Обозначения те же, что и на рис. 14.41

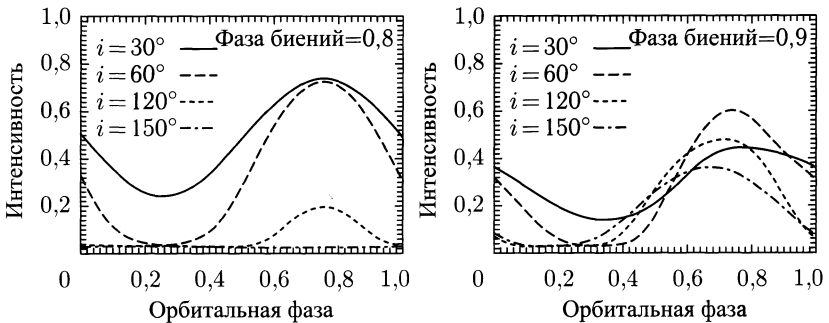


Рис. 14.45. Синтетические кривые блеска, построенные для фаз 0,8 и 0,9 периода  $P_{\text{beat}}$ . Обозначения те же, что и на рис. 14.41

а, как следует из проведенного выше анализа, интенсивные горячие пятна в восточном полушарии аккректора не формируются. Вторая половина периода  $P_{\text{beat}}$  напротив является существенно более активной. В это время аккректор повернут к наблюдателю своим западным полушарием. Горячие пятна, формирующиеся аккреционным потоком в восточном полушарии аккректора, приводят к увеличению блеска системы на этих орбитальных фазах. Очень похожую картину демонстрируют и наблюдаемые кривые блеска системы BY Cam [546, 555].

Другим интересным эффектом, который можно наблюдать на синтетических кривых блеска, является смещение положений максимумов и минимумов блеска в течение периода  $P_{\text{beat}}$ . Например, на фазе 0,6 максимум блеска достигается на орбитальной фазе 0,6, а на фазах 0,8 и 0,9 максимум блеска достигается на орбитальной фазе 0,8. Минимум блеска на фазе 0,6 достигается на орбитальной фазе 0,1, а на фазе 0,9 минимум блеска достигается на орбитальной фазе 0,4. Отметим, что подобное сложное поведение демонстрируют и наблюдаемые кривые блеска BY Cam [546, 555].

**МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В АККРЕЦИОННОМ ДИСКЕ****15.1. Механизмы усиления поля**

В предыдущей Главе были представлены результаты численного моделирования структуры МГД-течения в полуразделенных двойных системах. Было показано, что при учете магнитного поля могут изменяться основные параметры аккреционного диска, такие как темп аккреции и характерная плотность. Рассмотрим теперь структуру магнитного поля. В аккреционном диске магнитное поле компактного объекта может усиливаться за счет дифференциального вращения, радиальных движений и динамо. К ослаблению магнитного поля приводят диффузия, турбулентная диссипация и магнитная плавучесть. В результате действия этих эффектов может сформироваться магнитное поле довольно сложной структуры.

Следует отметить, что в отличие от одиночных объектов (звезда, аккреционный диск и т.п.) в ТДС существенную роль могут играть и свои специфические механизмы генерации магнитного поля [109]. Например, в полярах может работать динамо Герценберга [110, 111], приводящее к генерации магнитного поля в оболочке вторичного компонента. Считается, что возникающий при этом тормозящий момент электромагнитных сил приводит к синхронизации вращения компонент в этих системах [108].

В этой главе мы рассмотрим структуру магнитного поля в аккреционных дисках, формирующихся в полуразделенных двойных системах. Можно отметить следующие основные процессы, определяющие характер магнитного поля в аккреционном диске. Во внутренней части диска доминирует процесс генерации тороидального магнитного поля за счет дифференциального вращения [108]. Характер генерируемого поля определяется законом вращения в диске. Однако существенными здесь могут оказаться и эффекты, связанные с наличием полоидальной скорости в диске, перераспределяющие магнитное поле по диску [83, 528–530]. Магнитное поле может взаимодействовать с волнами, возникающими во внутренней области диска [423, 426], и приводить к квазипериодическим вариациям темпа аккреции на звезду [123].

Во внешней части аккреционного диска магнитное поле может частично усиливаться за счет динамо. При этом в аккреционных дисках в тесных двойных системах может работать как ламинарное



(за счет неосесимметричных движений) динамо [509], так и турбулентное  $\alpha\omega$ -динамо [510, 531, 532]. Динамо-генерация магнитного поля в аккреционных дисках изучалась, например, в работах [108, 533–537]. Для динамо-генерации магнитного поля необходимо, чтобы средняя спиральность  $\alpha$  неосесимметричных и турбулентных движений газа не обладала зеркальной симметрией относительно экваториальной плоскости диска. С физической точки зрения это означает, что число правовинтовых вихрей не равно числу левовинтовых, поскольку дополнительную закрутку вихрей создает сила Кориолиса. В случае, когда  $\alpha > 0$ , над экваториальной плоскостью доминирующей является квадрупольная мода магнитного поля [511]. Однако детальное численное моделирование магнитной турбулентности [538, 539] за счет развития магниторотационной неустойчивости [94, 96] в аккреционных дисках показало, что при определенных условиях может реализоваться и противоположная ситуация [540, 541]. При этом доминирующей становится дипольная компонента магнитного поля. Отметим, что эта компонента поля является предпочтительной для генерации биполярных истечений из диска за счет магнитоцентробежного механизма [87].

## 15.2. Результаты численного эксперимента

Рассмотрим поведение магнитного поля в диске типичного промежуточного поляра (модель В из раздела 14.2, модель 1 из раздела 14.3). На левой панели рис. 15.1 показана трехмерная структура магнитного поля в окрестности звезды-аккретора. Градация серого цвета силовых линий соответствует значению индукции магнитного поля в данной точке. Светлым оттенкам соответствует более сильное поле, а темным оттенкам — более слабое. Тонкой вертикальной линией показана ось вращения звезды, а жирной наклонной линией — ось симметрии магнитного диполя. Вблизи поверхности звезды магнитное поле сохраняет дипольный характер. Но при удалении от звезды поле магнитного диполя искажается за счет генерации тороидального поля в диске. На правой панели на фоне той же картины показана изоповерхность плотности, соответствующая значению логарифма  $\lg \rho = -4,5$  (в единицах  $\rho(L_1)$ ). Хорошо видно, что магнитное поле искажается именно в диске, вытягиваясь за счет дифференциального вращения. Кроме того видна аккреционная колонка вблизи северного магнитного полюса звезды.

На рис. 15.2 показана структура течения во внутренней части аккреционного диска. Линией со стрелками показана линия тока, начинающаяся на расстоянии  $0,1A$  от центра звезды-аккретора. Хорошо видна граница внутренней зоны диска. Во внешней зоне (густо распределенные линии тока) движение вещества происходит с малыми радиальными скоростями и с хорошей точностью описывается кеплеровским законом вращения. Во внутренней зоне вещество интенсивно теряет угловой момент за счет взаимодействия с магнитным

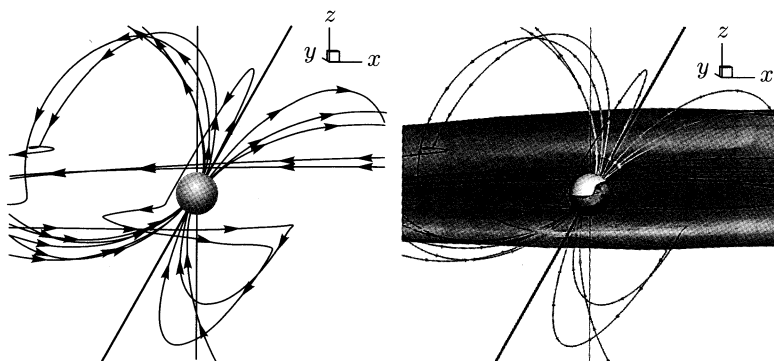


Рис. 15.1. Структура магнитного поля вблизи аккретора. Градация серого цвета магнитных силовых линий соответствует величине индукции магнитного поля. Величина поля растет от темного оттенка к светлому. Показаны ось вращения звезды (тонкая вертикальная линия) и магнитная ось (наклонная жирная линия). На правой панели показана изоповерхность плотности, выраженной в  $\rho(L_1)$ , соответствующая значению  $\lg \rho = -4,5$

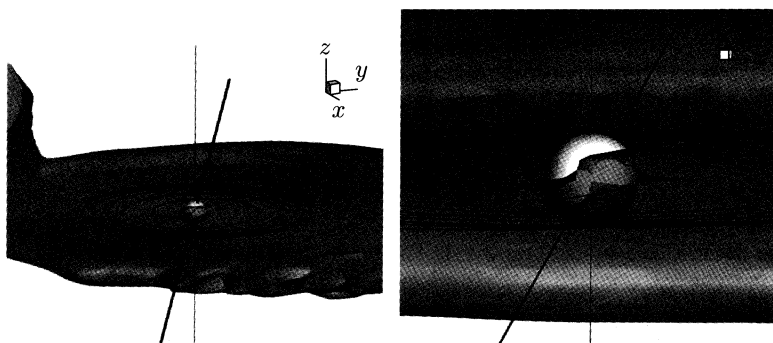


Рис. 15.2. Структура течения во внутренней области диска. Показана линия тока, начинающаяся на расстоянии  $0,1A$  от центра аккретора. Справа показана увеличенная область вблизи аккретора

полем звезды. Поэтому радиальные скорости существенно возрастают. Частицы вещества по спирали приближаются к поверхности звезды. В конце концов, вещество выпадает на поверхности звезды в районе одного из ее магнитных полюсов. На рисунке этим полюсом оказался северный магнитный полюс. На правой диаграмме рис. 15.2 показана увеличенная центральная область.

На рис. 15.3 показаны распределения индукции магнитного поля  $B$  (в единицах  $\sqrt{4\pi\rho(L_1)} A\Omega$ ) в экваториальной плоскости ( $xy$ ) диска для двух моментов времени  $12,75P_{\text{orb}}$  (слева) и  $13,36P_{\text{orb}}$  (справа).

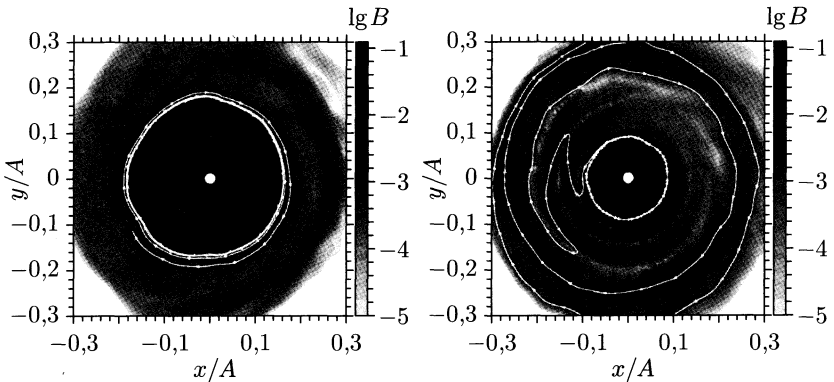


Рис. 15.3. Распределение индукции магнитного поля в экваториальной плоскости диска на моменты времени  $12,75P_{\text{orb}}$  (слева) и  $13,36P_{\text{orb}}$  (справа). Светлой линией со стрелками показана магнитная линия, проходящая через точку  $x = -0,175A$ ,  $y = 0,00A$

Светлой линией со стрелками показана магнитная силовая линия, проходящая через точку  $x = -0,175A$ ,  $y = 0,00A$ . На верхней диаграмме рис. 15.4 показаны радиальные распределения усредненного по азимуту тороидального магнитного поля  $B_\varphi$  в диске для различных моментов времени. На нижней диаграмме рис. 15.4 показаны аналогичные распределения полоидальной компоненты поля  $B_p = \sqrt{B_r^2 + B_z^2}$ .

Анализ этих рисунков позволяет сделать вывод, что в диске четко выделяются три зоны: внутренняя зона интенсивной генерации тороидального поля за счет дифференциального вращения, зона токовых слоев и внешняя зона диссипации магнитного поля. Радиус внутренней зоны составляет примерно  $0,1A$ . Токовые слои на рис. 15.3 проявляются в виде светлых колец. При прохождении через токовый слой магнитная линия меняет свое направление на противоположное. На правой панели рис. 15.3 можно разглядеть не менее трех токовых слоев. Зона токовых слоев расположена на расстоянии примерно от  $0,1A$  до  $0,2A$ . На рис. 15.4 токовым слоям соответствуют точки, в которых тороидальное поле  $B_\varphi$  обращается в нуль. В дальней зоне на расстояниях больше  $0,2A$  интенсивной генерации поля за счет дифференциального вращения не происходит, поскольку магнитное поле звезды в этой области очень слабое. Однако, правая панель рис. 15.4 показывает, что в этой зоне генерируется несильное полоидальное поле. В целом можно сказать, что магнитное поле в аккреционном диске является преимущественно тороидальным.

Формирование токового слоя происходит где-то на границе внутренней зоны или даже внутри нее. Изменение знака  $B_\varphi$  связано с изменением закона вращения в диске. Вблизи звезды формируется переходная зона, в которой происходит интенсивная потеря углового момента. В этой зоне угловая скорость газа уменьшается от кеплеровской

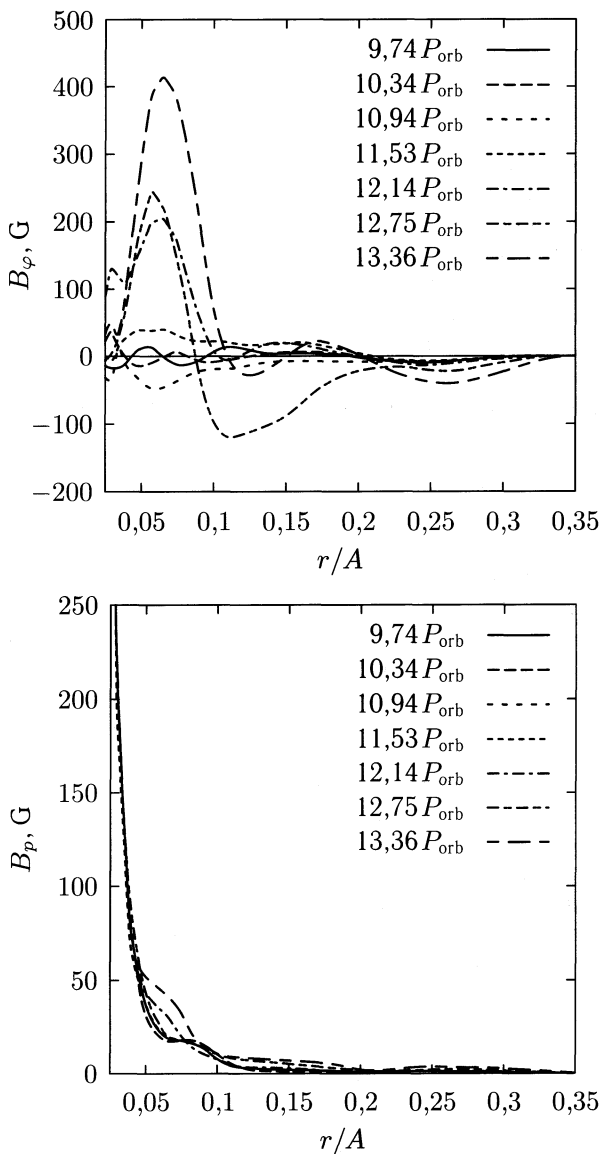


Рис. 15.4. Радиальные распределения усредненных по азимуту тороидального  $B_\varphi$  (сверху) и полоидального  $B_p$  (снизу) магнитного поля в диске для различных моментов времени

до скорости вращения силовых линий звезды. Изменение закона вращения сказывается на характере генерации тороидального поля.

Эти соображения можно пояснить с помощью следующей наглядной картины. Рассмотрим модельную зависимость угловой скорости  $\omega$  от радиуса  $r$ :

$$\omega = \frac{\omega_0(r/r_0)^a}{1 + (r/r_0)^{a+3/2}}, \quad (15.1)$$

где  $r_0$  — некоторый характерный радиус, приблизительно равный радиусу магнитосферы. При  $r \ll r_0$  получаем асимптотическую зависимость  $\omega = \omega_0(r/r_0)^a$ , определяющую закон вращения в области магнитосферы. В противоположном пределе при  $r \gg r_0$  выражение (15.1) приводит к кеплеровскому закону вращения:  $\omega = \omega_0(r/r_0)^{-3/2}$ . На рис. 15.5 продемонстрирована эволюция магнитного поля и формирование токового слоя. На рис. 15.5 *a* показаны проекции на экваториальную плоскость силовых линий магнитного поля звезды в начальный момент времени. На следующих диаграммах показана картина силовых линий магнитного поля в диске, полученная путем преобразования исходной картины поля с помощью закона вращения (15.1) на моменты времени  $2\pi/\omega_0$  (*б*),  $4\pi/\omega_0$  (*в*) и  $10\pi/\omega_0$  (*г*). Рисунок показывает, что токовый слой и магнитные зоны могут отчетливо сформироваться уже после первых нескольких оборотов диска. Однако на дальнейшую эволюцию этих структур могут существенно влиять процессы диссипации магнитного поля, радиальные движения и динамо.

Из приведенных выше соображений следует, что в режиме равновесного вращения звезды [107], когда радиус коротации (расстояние, на котором скорость вращения силовых линий равна скорости вращения вещества диска) равен радиусу магнитосферы, токовый слой формироваться не должен. Однако для этого звезда должна достаточно сильно раскрутиться веществом диска. В системах, в которых радиус коротации больше радиуса магнитосферы, токовые слои должны формироваться. Это условие связано с соотношением между угловой скоростью собственного вращения аккректора, его магнитным полем и темпом аккреции. В расчетах предполагалось, что вращение аккректора является синхронным. Поэтому это условие заведомо выполняется. Следует отметить, что в галактиках генерация крупномасштабного магнитного поля за счет динамо в сочетании со сложным законом вращения также может приводить к формированию магнитных зон и разделяющего их токового слоя [511]. Например, в галактике М31 радиус токового кольца составляет примерно 3 кпк.

Сформировавшийся токовый слой сносится во внешнюю часть диска за счет декреции вещества. На его месте через некоторое время формируется новый токовый слой. Таким образом, одновременно в диске могут присутствовать несколько токовых слоев. На рис. 15.6 показаны распределения плотности (градация серого) и скорости (стрелки) в экваториальной плоскости диска на моменты времени  $12,75P_{\text{orb}}$  (левая диаграмма) и  $13,36P_{\text{orb}}$  (правая диаграмма). Линиями со стрелками показаны линии тока, выходящие из точек  $x = -0,05A$ ,  $y = 0,00A$

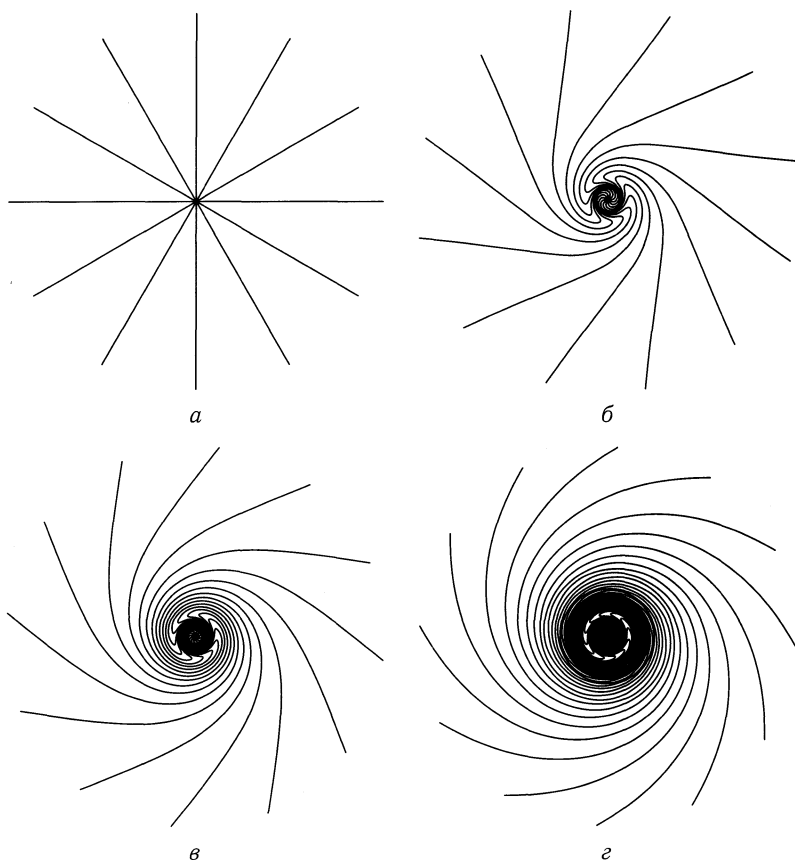


Рис. 15.5. Наглядная модель формирования двух магнитных зон и токовых слоев в аккреционных дисках. Показана схематическая картина силовых линий магнитного поля в экваториальной плоскости в начальный момент времени (а), после одного (б), двух (в) и пяти (г) оборотов диска

(внутренняя зона) и  $x = -0,175A$ ,  $y = 0,00A$  (внешняя зона). Сравнение рисунков позволяет сделать вывод, что в диске (особенно во внутренних его частях) происходит чередование режимов аккреции и декреции. Распределения усредненной по азимуту радиальной скорости в диске для различных моментов времени показаны на рис. 15.7. На нем также хорошо видны зоны аккреции и декреции и их эволюция во времени.

Чередование режимов аккреции и декреции во внутренних частях диска можно объяснить квазипериодическим характером генерации магнитного поля. Действительно, в результате генерации должен увеличиваться радиальный градиент давления тороидального магнитного поля, в конце концов останавливающий аккрецию. После

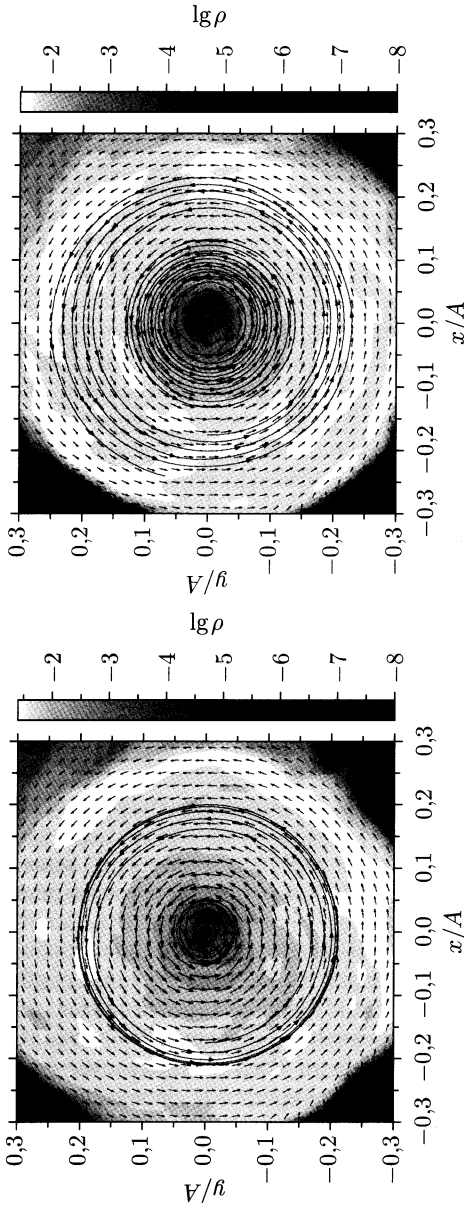


Рис. 15.6. Распределение плотности (градация серого) и скорости (стрелки) в экваториальной плоскости диска на моменты времени  $12.75 P_{orb}$  (слева) и  $13.36 P_{orb}$  (справа). Линиями со стрелками показаны линии тока, выходящие из точек  $x = -0.175A, y = 0.00A$  и  $x = -0.05A, y = 0.00A$

этого должен происходить отток поля во внешние части диска, уменьшение магнитного давления и переход обратно в режим аккреции. Изменения в распределении поля во внутренней зоне можно увидеть и на рис. 15.3, 15.4.

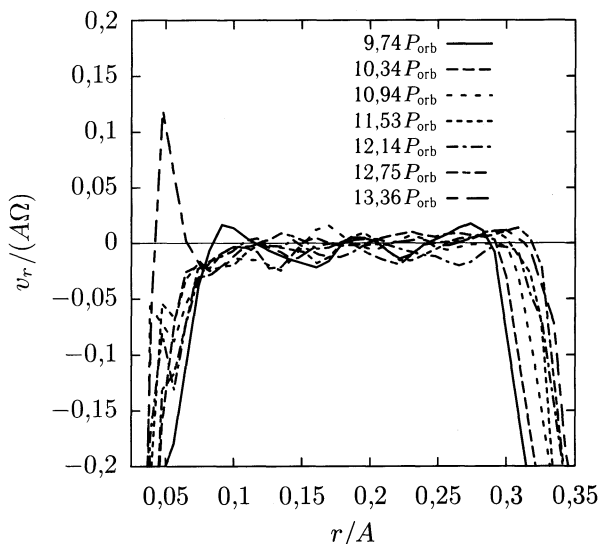


Рис. 15.7. Радиальные распределения усредненной по азимуту радиальной скорости  $v_r$  в диске для различных моментов времени

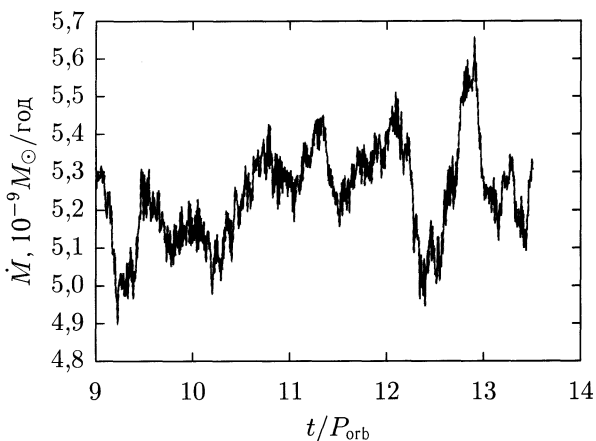


Рис. 15.8. Эволюция темпа аккреции на белый карлик

На рис. 15.8 показана эволюция темпа аккреции на звезду в течение нескольких орбитальных периодов. Максимальная амплитуда колебаний темпа аккреции составляет величину порядка 15%. Следует



отметить, что в случае идеальной магнитной газодинамики без учета диффузионных эффектов амплитуда этих колебаний может превышать 200% [123]. Очень похожее поведение демонстрируют и наблюдательные кривые потока излучения в УФ-диапазоне из SS Cyg в промежутках между вспышками (см. [524]). При этом колебания потока достигают 70%. Наблюдаемая амплитуда колебаний лежит в промежутке между значениями, полученными в численных моделях. Это может означать, что в области магнитосферы звезды-аккретора диффузионные процессы играют существенную роль, но в численной модели они могли быть в несколько раз переоценены. Кроме того, напомним, что в данных расчетах предполагалось синхронное вращение аккретора, когда период его собственного вращения равен орбитальному периоду системы. В случае же асинхронного вращения могут проявиться и другие эффекты.

### 15.3. Основные закономерности генерации поля в дисках

**15.3.1. Базовые уравнения.** Для выяснения основных закономерностей генерации магнитного поля в аккреционном диске рассмотрим более простую модель, в которой ось магнитного диполя звезды совпадает по направлению с осью ее вращения. В этом случае для описания магнитного поля, усредненного по турбулентным пульсациям и по азимуту (см. раздел 13.2.2), можно использовать осесимметричное приближение. Индукцию усредненного магнитного поля <sup>1)</sup> удобно представить в виде  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_* + \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{B}_*$  — магнитное поле звезды,  $\mathbf{b}$  — магнитное поле, сгенерированное индукционными токами в аккреционном диске. Исходное уравнение индукции (13.51) с учетом эффекта динамо можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_* + \mathbf{v} \times \mathbf{b} + \alpha \mathbf{b} - \eta \mathbf{rot} \mathbf{b}). \quad (15.2)$$

Магнитное поле звезды является полоидальным ( $\mathbf{B}_{*\varphi} = 0$ ,  $\mathbf{B}_{*p} = \mathbf{B}_*$ ), поэтому тороидальная компонента сгенерированного поля  $\mathbf{b}_\varphi = \mathbf{B}_\varphi$ . Обозначим  $\mathbf{b}_p = \mathbf{rot}(A \mathbf{n}_\varphi)$ , где  $\mathbf{n}_\varphi$  — единичный азимутальный вектор. Используя эти обозначения, уравнение (15.2) можно переписать в виде следующей системы:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{r}(\mathbf{v}_p \cdot \nabla)(rA) = \alpha B_\varphi + \eta \left( \nabla^2 A - \frac{A}{r^2} \right), \quad (15.3)$$

<sup>1)</sup> В этом параграфе усредненное магнитное поле будем обозначать через  $\mathbf{B}$ . Это не должно привести к недоразумениям, поскольку исходное неусредненное поле, удовлетворяющее уравнению (13.51), нигде далее не используется.

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r(\mathbf{B}_p \cdot \nabla)\omega - r\nabla \cdot \left( \frac{B_\varphi}{r} \mathbf{v}_p \right) - \\ - \frac{1}{r} \nabla \alpha \cdot \nabla(rA) - \alpha \left( \nabla^2 A - \frac{A}{r^2} \right) + \eta \left( \nabla^2 B_\varphi - \frac{B_\varphi}{r^2} \right), \quad (15.4)$$

где  $\omega = v_\varphi/r$  — угловая скорость вращения в диске.

В условиях аккреционного диска эти уравнения можно существенно упростить. Поскольку в аккреционном диске  $|v_r|, |v_z| \ll |v_\varphi|$ , то можно положить  $\mathbf{v}_p = 0$ . Кроме того, можно отбросить несущественные третий и четвертый члены в правой части (15.4), отвечающие за эффект  $\alpha^2$ -динамо. В диффузионных членах радиальными производными можно пренебречь по сравнению с вертикальными, поскольку их отношение порядка  $z/r \ll 1$ . Далее, используя оценки  $\partial\omega/\partial z \approx z/r \partial\omega/\partial r$ ,  $|b_z \partial\omega/\partial z| \ll |b_r \partial\omega/\partial r|$  и

$$B_{*r} = \frac{3}{2} B_a \left( \frac{R_a}{r} \right)^3 \frac{z}{r}, \quad B_{*z} = -\frac{1}{2} B_a \left( \frac{R_a}{r} \right)^3, \quad (15.5)$$

находим:

$$r(\mathbf{B}_p \cdot \nabla)\omega = \frac{z}{r} g B_0 - g \frac{\partial A}{\partial z}, \quad (15.6)$$

где  $g = r \partial\omega/\partial r$  — мера дифференциального вращения,  $B_0 = B_a (R_a/r)^3$  — характерное значение индукции магнитного поля звезды в диске. Наконец, будем считать, что величины  $g$  и  $\eta$  зависят только от  $r$ .

В результате этих упрощений приходим к следующей системе:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B_\varphi + \eta \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}, \quad (15.7)$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{z}{r} g B_0 - g \frac{\partial A}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2}. \quad (15.8)$$

Эти уравнения имеют простой физический смысл. Уравнение (15.7) описывает эволюцию полоидального магнитного поля в диске. При этом первый член в правой части определяет генерацию полоидального поля из тороидального за счет эффекта динамо, а второй член определяет диссипацию полоидального магнитного поля. Уравнение (15.8) описывает эволюцию тороидального магнитного поля в диске. Первый и второй члены в правой части этого уравнения определяют генерацию тороидального поля из магнитного поля звезды и сгенерированного полоидального поля за счет дифференциального вращения диска. Последний член в правой части описывает диссипацию тороидального магнитного поля.

### 15.3.2. Генерация поля дифференциальным вращением.

Во внутренних частях диска эффект динамо является слабым и магнитное поле генерируется за счет дифференциального вращения в диске. В этом случае в уравнении (15.7) можно пренебречь членом  $\alpha B_\varphi$ .

В результате находим  $A = 0$  и, следовательно, генерироваться будет только тороидальное магнитное поле. Оставшееся уравнение (15.8) примет вид

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{z}{r} g B_0 + \eta \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial z^2}. \quad (15.9)$$

Общее решение уравнения (15.9), удовлетворяющее начальному условию  $B_\varphi(t = 0) = 0$  и граничным условиям  $B_\varphi(z = 0) = B_\varphi(z = H) = 0$ , можно записать следующим образом [542]:

$$B_\varphi = 2B_{\varphi,0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\pi n)^3} \left[ 1 - e^{-(\pi n)^2 t / t_d} \right] \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right), \quad (15.10)$$

где  $B_{\varphi,0} = g B_0 H t_d / r$ , а  $t_d = H^2 / \eta$  — диффузионное время. На ранних стадиях генерации при  $t \ll t_d$  тороидальное поле растет по линейному закону:  $B_\varphi = g B_0 z t / r$ . Это решение описывает также и генерацию поля в случае идеальной МГД при  $\eta = 0$ . Однако следует заметить, что оно приводит к разрыву значения  $B_\varphi$  на поверхности диска при  $z = H$ . Это означает, что вблизи этой поверхности существенную роль играют процессы диссипации поля и, по крайней мере, в этой области ими пренебрегать нельзя. В другом предельном случае при  $t \gg t_d$  получаем стационарное решение

$$B_\varphi = \frac{1}{6} B_{\varphi,0} \frac{z}{H} \left( 1 - \frac{z^2}{H^2} \right). \quad (15.11)$$

Максимальное по модулю значение индукции поля  $B_\varphi$  достигается в точке  $z = H / \sqrt{3}$ . Среднее значение индукции поля по высоте диска  $\bar{B}_\varphi = B_{\varphi,0} / 24$ .

Множитель  $B_{\varphi,0}$  в (15.11) описывает радиальную структуру сгенерированного тороидального поля. Рассмотрим модельную зависимость (15.1) угловой скорости вращения в диске. Если предположить, что  $H \propto r$ ,  $\eta \propto r$ , то можно получить асимптотические законы  $B_{\varphi,0} \propto r^{a-2}$  при  $r \ll r_0$  и  $B_{\varphi,0} \propto r^{-7/2}$  при  $r \gg r_0$ . Поведение  $B_{\varphi,0}$  при  $r \rightarrow 0$  существенным образом зависит от параметра  $a$ , характеризующего вращение диска в области магнитосферы звезды:  $B_{\varphi,0} \rightarrow \infty$  при  $a < 2$ ,  $B_{\varphi,0} \rightarrow \text{const}$  при  $a = 2$  и  $B_{\varphi,0} \rightarrow 0$  при  $a > 2$ .

На левой панели рисунка 15.9 показаны характерные вертикальные профили стационарного тороидального магнитного поля в аккреционном диске для случая  $a = 3$  на различных расстояниях от звезды. На правой панели рисунка 15.9 показаны характерные радиальные профили поля для различных значений  $a$ . В точке  $r = (2a/3)^{1/(a+3/2)} r_0$  происходит изменение знака индукции поля на противоположный. Это означает, что на этом радиусе соседние магнитные силовые линии будут иметь противоположное направление и это приведет к формированию токового слоя, разделяющего два магнитных кольца. При этом во внутреннем и внешнем магнитном кольце индукция магнитного поля

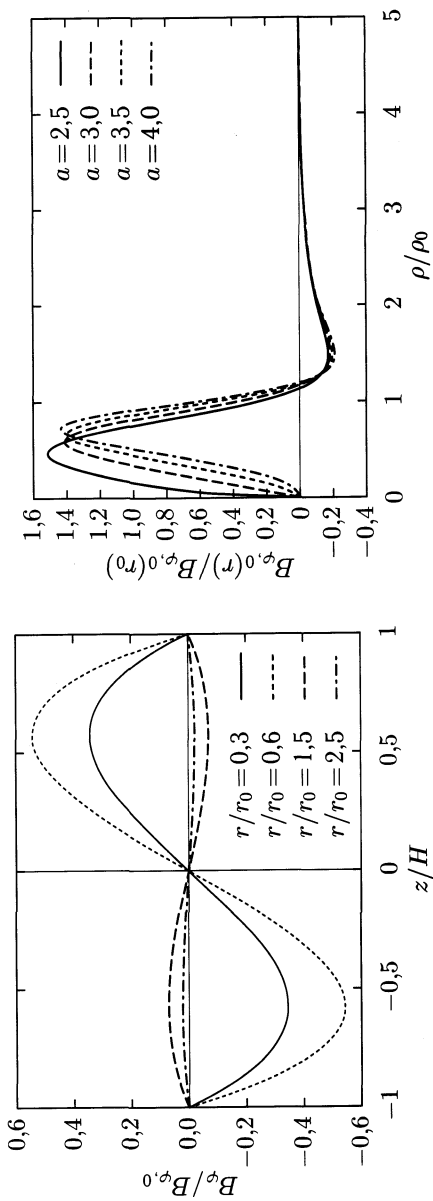


Рис. 15.9. Вертикальные и радиальные профили тороидального магнитного поля во внутренних частях аккреционного диска

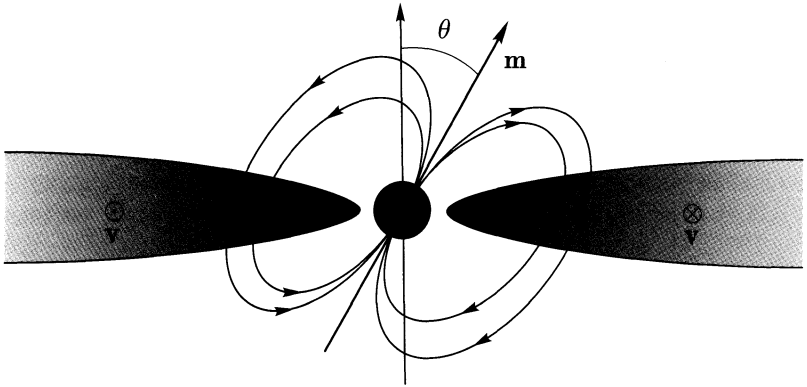


Рис. 15.10. Пояснение механизма генерации квадрупольной компоненты тороидального поля в аккреционном диске в случае наклонного магнитного момента.

имеет противоположные знаки. Напомним, что численное моделирование приводит к аналогичной картине (см. рис. 15.4).

Антисимметричный характер зависимости  $B_\varphi$  от  $z$  связан с предположением, что магнитная ось звезды совпадает по направлению с осью вращения. С учетом наклона магнитной оси антисимметрия поля относительно экваториальной плоскости нарушается. Эта ситуация продемонстрирована на рис. 15.10. В случае наклонной магнитной оси в диске возникает вполне определенный вертикальный градиент поля (показан стрелками). В правой части рисунка поле увеличивается снизу вверх, а в левой — сверху вниз. Генерация более сильного поля происходит более эффективно. С учетом направления вращения в диске в правой части рисунка быстрее будет расти поле, направленное от нас, а в левой части — к нам. В том и в другом случае результирующее тороидальное поле оказывается положительным. Такое же распределение индукции тороидального поля получается и в расчетах. Сильнее всего этот эффект будет выражен в случае наклона магнитной оси  $\theta = 45^\circ$ . Эти соображения позволяют прийти к следующему выводу. Антисимметричное тороидальное поле (дипольная мода) будет генерироваться только в случаях  $\theta = 0^\circ$  и  $90^\circ$ . Любые малые отклонения от этих значений вызовут подавление дипольной моды квадрупольной модой. Таким образом, генерация чистой дипольной моды в аккреционных дисках промежуточных полярных звезд, возможно, является неустойчивой. Более устойчивой оказывается квадрупольная мода. Следует также напомнить, что динамо-генерация поля во внешней части диска также в первую очередь приводит к росту квадрупольной компоненты поля [511].

**15.3.3.  $\alpha\omega$ -динамо.** Во внешних частях диска существенную роль в процессе генерации магнитного поля может оказывать эффект динамо. Поэтому для описания магнитного поля нужно использовать

полную систему уравнений (15.7), (15.8). Величина  $\alpha$ , входящая в эти уравнения, определяется средней спиральностью флуктуаций скорости  $\delta v$ :

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle \delta v \cdot \text{rot } \delta v \rangle, \quad (15.12)$$

где  $\tau$  — характерное корреляционное время. Угловые скобки означают усреднение по ансамблю турбулентных пульсаций и по азимуту. И в первом и во втором случае характерное корреляционное время можно оценить в соответствии с выражением  $\tau = H/(\alpha_T c_s)$ .

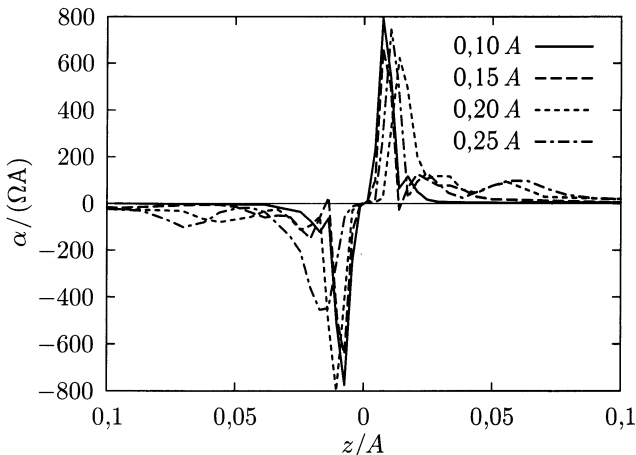


Рис. 15.11. Распределения средней спиральности  $\alpha$  в аккреционном диске на различных расстояниях от звезды-аккретора.

На рис. 15.11 показаны вертикальные распределения  $\alpha$  для неазимутальных флуктуаций скорости в аккреционном диске на различных расстояниях от аккретора, полученные в рамках трехмерного численного МГД-моделирования. Рисунок показывает, что спиральность обладает зеркальной антисимметрией относительно плоскости диска, что является необходимым условием для работы динамо [511]. Можно предположить, что аналогичные профили получаются и для турбулентных флуктуаций скорости. Для упрощения дальнейшего анализа будем использовать для величины  $\alpha$  значения, усредненные по полутолщине диска.

Ограничимся рассмотрением только стационарных решений уравнений (15.7), (15.8). В этом случае они могут быть сведены к одному уравнению для тороидального поля:

$$\frac{\partial^3 B_\varphi}{\partial z^3} + \frac{\alpha g}{\eta^2} B_\varphi + \frac{g B_0}{\eta r} = 0. \quad (15.13)$$

Это уравнение инвариантно относительно преобразования  $z \rightarrow -z$  и одновременной замены функции  $B_\varphi(z) \rightarrow -B_\varphi(-z)$ . Это означает, что оно описывает генерацию дипольной (антисимметричной) компоненты магнитного поля, в которой  $B_\varphi(-z) = -B_\varphi(z)$ . Как было показано в предыдущем разделе, такое поле возбуждается за счет поля звезды и дифференциального вращения диска. Однако на далеких расстояниях от звезды, где  $gB_0H^3/(\eta r) \ll 1$ , преобладающей может стать квадрупольная (симметричная) компонента поля [511], в которой  $B_\varphi(-z) = B_\varphi(z)$ .

В силу линейности уравнения (15.13) его общее решение можно представить в виде  $B_\varphi = B_\varphi^{(d)} + B_\varphi^{(q)}$ . Величины  $B_\varphi^{(d)}$  и  $B_\varphi^{(q)}$  описывают дипольную и квадрупольную компоненты поля и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^3 B_\varphi^{(d)}}{\partial z^3} + \frac{\alpha g}{\eta^2} B_\varphi^{(d)} + \frac{gB_0}{\eta r} = 0, \quad (15.14)$$

$$\frac{\partial^3 B_\varphi^{(q)}}{\partial z^3} + \frac{\alpha g}{\eta^2} B_\varphi^{(q)} = 0. \quad (15.15)$$

Эти уравнения удобно переписать в безразмерном виде. Обозначим  $B_\varphi^{(d,q)} = B_{\varphi,0} f_{d,q}(\zeta)$ , где  $\zeta = z/H$ . Тогда уравнения (15.14), (15.15) примут вид

$$f_d''' + D f_d + 1 = 0, \quad (15.16)$$

$$f_q''' + D f_q = 0, \quad (15.17)$$

где  $D = \alpha g H^3 / \eta^2$  — динамо-число, а штрихи обозначают производные по переменной  $\zeta$ . Эти уравнения нужно решать с учетом граничных условий  $f_d(0) = f_d(1) = 0$ ,  $f_d''(1) = -1$ ,  $f_q'(0) = f_q(1) = f_q''(1) = 0$ . Кроме того отметим, что во внешних частях диска при  $z > 0$  динамо-число  $D$  должно быть отрицательным, поскольку в этих областях отрицательна мера дифференциального вращения  $g$ .

Решение уравнения (15.16) для дипольной моды можно записать в виде

$$f_d = \frac{1}{N^3} + C_d^{(1)} e^{N\zeta} + e^{-\frac{N}{2}\zeta} \left[ C_d^{(2)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}N}{2}\zeta\right) + C_d^{(3)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}N}{2}\zeta\right) \right], \quad (15.18)$$

где обозначено  $N = |D|^{1/3}$ . Константы интегрирования  $C_d^{(1,2,3)}$  в этом выражении находятся из граничных условий. При этом в пределе малых динамо-чисел при  $N \rightarrow 0$  получаем асимптотическое соотношение  $f_d = \zeta(1 - \zeta^2)/6 + \mathcal{O}(N)$ , соответствующее решению (15.11).

Решение уравнения (15.17) для квадрупольной моды может быть записано в виде [108]

$$f_q = C_q \left[ e^{N(\zeta-1)} - 2e^{-\frac{N}{2}(\zeta-1)} \cos \left( \frac{\sqrt{3}N}{2}(\zeta-1) + \frac{\pi}{3} \right) \right], \quad (15.19)$$

где  $C_q$  — амплитуда. Величина  $N$  удовлетворяет соотношению

$$2 \cos \left( \frac{\sqrt{3}N}{2} \right) + e^{-\frac{3N}{2}} = 0. \quad (15.20)$$

Корни этого уравнения определяют дискретный набор допустимых значений параметра  $N$ . Первые три корня имеют значения  $N_1 = 1,85$ ,  $N_2 = 5,44$ ,  $N_3 = 9,07$ .

Полученные зависимости (15.18) и (15.19) определяют вертикальную структуру поля. Интересно отметить, что при учете эффекта динамо радиальная структура поля по-прежнему описывается множителем  $B_{\varphi,0}$ . При этом во внутреннем магнитном кольце с учетом наклона магнитной оси, по-видимому, всегда будет доминировать квадрупольная компонента поля. Во внешнем магнитном кольце с течением времени доминирующей также может стать квадрупольная компонента поля, поскольку за счет динамо она растет быстрее дипольной [511]. Такая структура магнитного поля во внутреннем и внешнем кольцах хорошо подтверждается представленными в предыдущем параграфе расчетами.

Рисунок 14.3 показывает, что во внешней зоне аккреционного диска ( $0,2A \leq r \leq 0,35A$ ), действительно, происходит генерация полоидальной компоненты магнитного поля, поскольку в этой зоне оно имеет хорошо заметный локальный максимум. На момент времени  $t \approx 11 P_{\text{orb}}$ , которому соответствуют распределения на рисунке, магнитное поле все еще является преимущественно тороидальным. Однако можно ожидать, что на более длительных интервалах времени полоидальная компонента поля может значительно усилиться за счет динамо и сравняться по характерной величине с тороидальной компонентой.

Эволюция радиальных распределений усредненных по азимуту абсолютных значений тороидального и полоидального магнитного поля на более длительных интервалах времени (от 10 до 50 орбитальных периодов) представлена на рис. 15.12. Величина магнитного поля выражена в гауссах и показана градацией серого цвета. На рисунке хорошо прослеживается возникновение и последующее перераспределение токовых слоев, которым соответствуют светлые зигзагообразные линии. Анализ рисунка позволяет заключить, что характерный период квазипериодических колебаний величины магнитного поля в диске составляет приблизительно один орбитальный период. Однако на фоне этих квазипериодических колебаний происходит и постепенный рост средних величин как тороидального, так и полоидального поля. В момент времени  $t = 10 P_{\text{orb}}$  отношение характерных величин тороидального и полоидального поля во внешней зоне диска было равно примерно 10



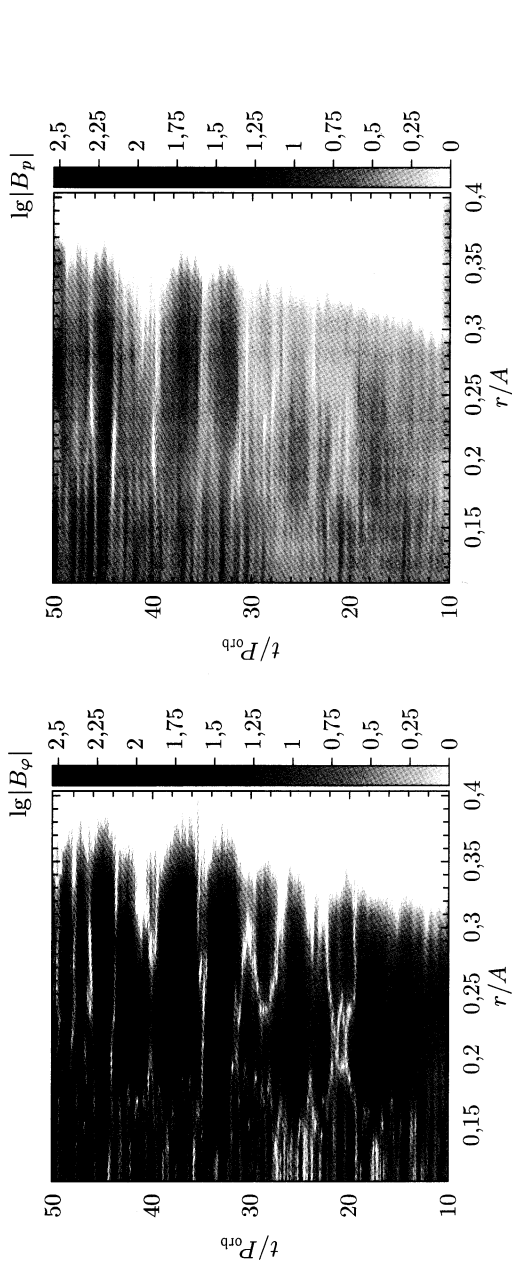


Рис. 15.12. Радиальные распределения усредненных по азимуту абсолютных значений торoidalного  $B_\varphi$  (слева) и поlongидального  $B_p$  (справа) магнитного поля в зависимости от времени

(см. рис. 14.3). К моменту времени  $t = 50 P_{\text{orb}}$  это отношение стало равным примерно 8. Экстраполируя эти данные на еще более длительные интервалы времени, можно прийти к выводу, что характерные значения величин тороидального и полоидального поля во внешней зоне диска могут сравняться приблизительно через 200 орбитальных периодов. Это характерное время сравнимо с характерным временем существования аккреционных дисков в тесных двойных системах рассматриваемого типа. Поэтому полученная оценка означает, что за время существования аккреционного диска эффект динамо во внешней зоне может быть значительным.

### 15.4. Особенности дисковой аккреции в промежуточных полях

Резюмируя результаты представленных расчетов, можно заключить, что в моделях с относительно слабым магнитным полем  $B_a \leq 10^6$  Гс в полуразделенной двойной системе формируется аккреционный диск с характерными особенностями структуры, присущими чисто газодинамическому решению: «горячей линией», приливными ударными волнами, прецессионной спиральной волной плотности и др. При учете магнитного поля аккретора появляются новые элементы структуры: выделяется магнитосферная область, аккреция имеет колонковый характер. Кроме того, существенно изменяются основные характеристики аккреционного диска: темп аккреции увеличивается более чем в два раза, масса уменьшается в 4 раза, радиус уменьшается в 1,5 раза, а характерная плотность уменьшается на порядок. Моделирование показало, что магнитное поле в диске является преимущественно тороидальным. С увеличением  $B_a$  размеры аккреционного диска уменьшаются и увеличивается радиус магнитосферы. Эти типы течения соответствуют промежуточным полярам.

Сильное влияние на структуру течения в магнитных ТДС оказывает асинхронное вращение звезды-аккретора. В случае медленного вращения ( $P_{\text{spin}} > 0,033P_{\text{orb}}$ , режим «аккретор») структура течения мало отличается от аналогичной структуры, полученной в расчетах при условии синхронного вращения. В случае быстрого вращения ( $P_{\text{spin}} < 0,033P_{\text{orb}}$ , режим «пропеллер») вблизи аккретора формируется магнитосферная каверна, а темп аккреции падает практически до нуля. Постепенный рост массы диска приводит, в конце концов, к продавливанию каверны, сбросу накопившегося вещества на поверхность аккретора и резкому увеличению темпа аккреции. В случае очень быстрого вращения ( $P_{\text{spin}} \approx 0,001P_{\text{orb}}$ ) аккреционный диск не формируется. Вещество выбрасывается из магнитосферы и формирует шлейф, закручивающийся вокруг двойной системы в виде спирали.

Проведенный анализ механизмов генерации магнитного поля в аккреционных дисках ТДС показал, что поле в диске является преиму-

щественно тороидальным. При этом в диске можно выделить три зоны: внутреннюю зону интенсивной генерации тороидального поля за счет дифференциального вращения, зону токовых слоев и внешнюю зону диссипации магнитного поля. Установлено, что усиление магнитного поля во внутренних частях диска приводит к столь сильному росту соответствующего градиента давления, что он останавливает аккрецию. После этого происходит отток поля во внешние части диска, уменьшение магнитного давления и переход обратно в режим аккреции. Таким образом, обнаружено чередование режимов аккреции и декреции во внутренних частях диска, вызванное квази-периодической генерацией магнитного поля. Наличие этого эффекта приводит к заметному (на 15–25 %) изменению темпа аккреции в системе, и следовательно, будет проявляться в наблюдаемых изменениях блеска звезды.

Еще одним следствием квазипериодического характера усиления поля является одновременное наличие в диске нескольких токовых слоев. Формирование токового слоя происходит во внутренней зоне. Механизм формирования связан с изменением закона вращения вещества диска вблизи магнитосферы звезды. Далее сформировавшийся токовый слой сносится во внешнюю часть диска за счет декреции вещества. На его месте через некоторое время формируется новый токовый слой. Поэтому в промежуточной зоне одновременно могут присутствовать несколько токовых слоев.

Токовые слои должны формироваться в системах, в которых радиус коротации больше радиуса магнитосферы. Это условие связано с соотношением между угловой скоростью собственного вращения аккретора, его магнитным полем и темпом аккреции. В токовых слоях происходит усиленная диссипация поля, увеличение температуры и высвечивание в ультрафиолетовом или рентгеновском диапазоне. Кроме того, из-за уменьшения в токовом слое интенсивности магнитного поля полное давление также уменьшается. Поэтому в области токовых слоев должна уменьшаться толщина диска. Численные расчеты подтверждают этот вывод. На рис. 15.13 показано распределение плотности в плоскости  $xz$  в диске на момент времени  $13,36P_{\text{orb}}$ . В промежуточной зоне ( $0,1 \leq r/A \leq 0,2$ ), где расположены токовые слои (см. рис. 15.3), толщина диска немного уменьшается по сравнению с внутренней и тем более с внешней зонами. В чисто газодинамическом случае толщина диска увеличивается с расстоянием монотонным образом. Изменение параметров диска и избыточное излучение, связанное с образованием токовых слоев, необходимо учитывать при интерпретации наблюдений в классической астрономии.

При учете наклона магнитной оси в диске возникает некоторый вертикальный градиент поля. Поэтому в результате генерации тороидальное поле приобретает симметричный (квадрупольная мода) относительно экваториальной плоскости характер. Сильнее всего этот эффект будет выражен в случае наклона  $\theta = 45^\circ$ . Антисимметричное тороидальное поле (дипольная мода) будет генерироваться только в случаях

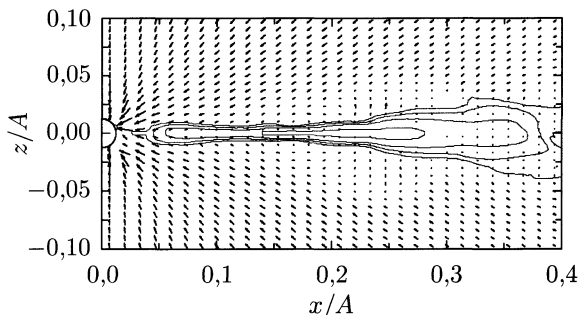


Рис. 15.13. Распределение плотности и скорости в плоскости  $xz$ .

$\theta = 0^\circ$  и  $90^\circ$ . Малые отклонения от этих значений вызовут подавление дипольной моды квадрупольной модой. Таким образом, генерация чистой дипольной моды в аккреционных дисках промежуточных полей, возможно, является неустойчивой. Более устойчивой оказывается квадрупольная мода.

Наши расчеты показывают, что движения в аккреционном диске обладают зеркально антисимметричной спиральностью. Поэтому во внешних частях диска магнитное поле может частично генерироваться за счет динамо. При этом наиболее быстро растущей также оказывается квадрупольная мода. Однако на коротких интервалах времени, порядка нескольких орбитальных периодов, роль динамо незначительна, поскольку в диске преобладают динамические эффекты. На более длительных интервалах, порядка нескольких сотен орбитальных периодов, динамо во внешней зоне способно усилить полоидальное поле настолько, что оно может сравняться по величине с тороидальным полем.

## **Заключение. Перспективы численного моделирования газодинамики тесных двойных систем**

Как следует из материалов книги, применение методов численного моделирования к исследованию газодинамики тесных двойных систем позволило получить ряд новых интересных результатов, меняющих общепринятые представления о картине течения вещества в ТДС. Мы надеемся, что эти результаты окажутся полезными для астрофизических исследований и будут использоваться как базис для последующих усложненных численных моделей.

Одним из важнейших, на наш взгляд, результатов книги является обоснование того факта, что приход в астрофизику столь мощного способа исследования, как вычислительный эксперимент, коренным образом меняет методологию изучения ТДС. Многообразие протекающих в двойной системе физико-химических процессов, а также сложности численного моделирования не позволяют в настоящее время разработать единую модель, детально описывающую рассматриваемые системы. В связи с этим, исследование процесса массообмена в двойных системах проводится с постепенным усложнением используемых моделей. В книге вниманию читателей представлены результаты исследований газодинамики тесных двойных звезд для достаточно простых случаев, когда в рассмотрение принимались лишь основные (управляющие) процессы, определяющие картину течения. Несомненно, основной задачей ближайшего будущего является развитие астрофизических численных моделей и применение их к более широкому кругу задач.

Рассмотрим очевидные направления развития численного моделирования, которые, в первую очередь, призваны ликвидировать недостатки имеющихся моделей. Для проведения численного исследования какого-либо объекта необходимо разработать модель, базирующуюся на следующих трех составных частях: 1) спецификации основных физических процессов, определяющих поведение системы; 2) выборе соответствующей системы уравнений, наиболее полно описывающей включенные в модель процессы; 3) разработке/адаптации оптимального для данной задачи численного метода решения.

Разработка физической модели системы (постановка задачи) является определяющим звеном при моделировании, поскольку именно на этой стадии, в зависимости от целей исследования, необходимо осуществить выбор включаемых в модель физических процессов. Исходя из общей логики математического моделирования, проведенная спецификация должна быть оптимальной как с точки зрения полноты системы (т. е. в модели должны быть представлены все определяющие

процессы, способные влиять на конкретное рассматриваемое явление), так и с точки зрения расходования вычислительных ресурсов. Несомненно, для корректного исследования течения вещества в двойной системе физическая часть модели должна быть расширена по сравнению с моделями, представленными в книге. Очевидными путями улучшения моделей массообмена в ТДС являются включение в них радиативных процессов в перетекающем веществе и учет релятивистских эффектов.

В моделях, описанных в книге, потери энергии из системы учитывались приближенно. В реальных двойных системах охлаждение газа зависит от многих факторов (степень ионизации, температура газа, оптическая толщина и т. д.) и может происходить неравномерно по пространству. Учет данного обстоятельства, несомненно, позволит выявить новые особенности структуры течения вещества в ТДС. В Приложении Б описаны более строгие способы учета излучения, основанные на приближении радиационной газодинамики. Кроме того, все использованные в книге модели были основаны на нерелятивистском приближении. Это ограничение позволило рассматривать только такие ТДС, в которых релятивистские эффекты не играют значительной роли. Вместе с тем, в настоящее время известно большое количество ТДС с релятивистскими компонентами — нейтронными звездами или черными дырами. Описание процесса массообмена в таких системах можно проводить в рамках релятивистской газодинамики или, если необходимо учитывать влияние магнитного поля, в рамках релятивистской магнитной газодинамики. Необходимые сведения по этим подходам приведены в Приложении В.

Второй составной частью модели является выбор соответствующей системы уравнений. В общем случае, в диапазоне характерных для двойных систем параметров, течение многокомпонентного химически и радиационно активного газа должно описываться на микроскопическом уровне при помощи методов неравновесной физико-химической кинетики. С математической точки зрения использование при описании течения вещества системы кинетических уравнений больцмановского типа с источниками чрезвычайно сложно, поскольку в структуру этой системы входят нелинейные интегро-дифференциальные уравнения высокой кратности, что сильно затрудняет возможности аналитического или численного подходов к решению краевых задач для систем такого рода. При исследовании динамической структуры течения вещества в двойных звездных системах возможно существенное упрощение математической модели, поскольку кинетические масштабы изменения состояния рассматриваемого газа (длина свободного пробега), как правило, много меньше характерных масштабов течения (линейные масштабы градиентов), и, соответственно, из-за высоких релаксационных свойств среды газ можно рассматривать в приближении локального равновесия по поступательным степеням свободы. В этом случае функция распределения по скоростям незначительно отклоняется от максвелловской и, состояние газа полностью определяется макропарамет-

рами — плотностью  $\rho$ , скоростью  $\mathbf{v}$ , и температурой  $T$ . В газе, находящемся в локальном равновесии, тензор вязких напряжений  $\hat{p}$  и вектор потока тепла  $\mathbf{q}$  исчезают, и уравнения сохранения сводятся к системе моментных уравнений Эйлера. Несомненно, для задач ближайшего будущего использование газодинамического подхода позволит с хорошей точностью определить характерные макроскопические особенности течения вещества в двойных системах.

Третьей составной частью модели является выбор схемы численной реализации. Эта часть модели развивается наиболее динамично, причем если модификация путем рассмотрением дополнительных физико-химических процессов имеет индивидуальный характер и определяется, в основном, свойствами исследуемой системы, то улучшение численной составляющей модели носит более общий характер, и поэтому является более важным. Развитие численных методов идет сразу по нескольким направлениям. В частности, наряду с появлением новых методов, идет постоянное совершенствование уже имеющихся схем, позволяющее более точно передавать детали исследуемых процессов. Кроме того, развитие вычислительной техники приводит к возможности существенного улучшения пространственного разрешения численных схем (меньший размер численной ячейки, вложенные сетки, адаптивные сетки и т. д.), а, следовательно, и к приближению численного решения к точному.

Резюмируя все вышеизложенное, мы можем констатировать, что численное моделирование газодинамики ТДС является динамично развивающимся разделом астрофизики, и что использование полученных результатов позволяет достичь определенного прогресса как при интерпретации наблюдательных данных, так и при анализе эволюционного статуса двойных систем.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение А

### ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Как обсуждалось в гл. 4, уравнения газодинамики и магнитной газодинамики являются гиперболическими. В ч. II при рассмотрении различных способов построения разностных схем для численного решения этих уравнений мы часто использовали специфические свойства уравнений гиперболического типа. Для удобства читателя мы суммировали основные особенности гиперболических систем уравнений в данном приложении.

#### А.1. Основы теории гиперболических систем одномерных уравнений

**А.1.1. Основные определения.** Математические свойства уравнений в частных производных являются принципиальным моментом при выборе схемы численного решения. Поэтому напомним кратко общепринятую классификацию уравнений и остановимся более подробно на свойствах решений уравнений гиперболического типа.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \quad (\text{A.1})$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  — постоянные коэффициенты. Различают три типа таких уравнений [542]:

- 1) *эллиптический*,  $B^2 - 4AC < 0$ ;
- 2) *параболический*,  $B^2 - 4AC = 0$ ;
- 3) *гиперболический*,  $B^2 - 4AC > 0$ .

Эта классификация связана со значениями коэффициентов только при высших производных. В более общем случае, когда коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются функциями  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ , критерии классификации носят локальный характер. Если количество независимых переменных больше чем 2, то появляются другие типы уравнений. Уравнения эллиптического типа описывают только стационарные задачи. Эволюционные задачи можно описывать только уравнениями параболического и гиперболического типов.



Простейшим примером линейного гиперболического уравнения второго порядка является волновое уравнение (см., например, [542])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Это уравнение можно переписать в виде эквивалентной системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Введем двухкомпонентный вектор  $\mathbf{u}$  и матрицу  $\mathcal{A}$  размерности  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Тогда систему уравнений (A.3) можно переписать в более компактном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Отметим, что матрица  $\mathcal{A}$  в (A.4) имеет два различных вещественных собственных значения  $\lambda_{1,2} = \mp 1$ .

Эти рассуждения можно распространить и на более общий случай. Именно, будем рассматривать уравнения (A.5), в которых вектор  $\mathbf{u}$  имеет  $n$  компонент. Введем следующие обозначения. Векторы  $\mathbf{l}^\alpha$  (векторы-строки) называются *левыми собственными векторами* матрицы  $\mathcal{A}$ , если выполняется соотношение

$$\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathcal{A} = \lambda_\alpha \mathbf{l}^\alpha, \quad (\text{A.6})$$

где  $\lambda_\alpha$  — соответствующие *собственные значения* матрицы  $\mathcal{A}$ . Индекс  $\alpha$  нумерует различные собственные значения и собственные векторы. Векторы  $\mathbf{r}_\alpha$  (векторы-столбцы) называются *правыми собственными векторами* матрицы  $\mathcal{A}$ , если выполняется соотношение

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{r}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{r}_\alpha. \quad (\text{A.7})$$

Левые и правые собственные векторы определены с точностью до произвольного множителя. Поэтому их всегда можно выбрать нормированными на единицу.

Нетрудно убедиться, что если два собственных значения  $\lambda_\alpha$  и  $\lambda_\beta$  являются различными, то соответствующие левый и правый собственные векторы являются взаимно ортогональными. Действительно, из выражений (A.6) и (A.7) следует

$$\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{r}_\beta = \lambda_\alpha (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta) = \lambda_\beta (\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta). \quad (\text{A.8})$$

Отсюда, в силу предположения  $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ , получаем условие ортогональности собственных векторов:

$$\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = 0. \quad (\text{A.9})$$

Если все собственные значения  $\lambda_\alpha$  являются попарно различными, то левые и правые собственные векторы составляют ортогональную систему векторов. Это означает, что при соответствующей нормировке этих векторов имеет место равенство

$$\Gamma^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad (\text{A.10})$$

где  $\delta_\beta^\alpha$  — символ Кронекера.

Система уравнений (А.5) называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы  $\mathcal{A}$  вещественны, а сама матрица  $\mathcal{A}$  является диагонализуемой. Второе условие означает, что матрица  $\mathcal{A}$  имеет полный набор левых собственных векторов. Иными словами, левые собственные векторы матрицы  $\mathcal{A}$  образуют базис в пространстве векторов  $\mathbf{u}$ . Сама матрица  $\mathcal{A}$  называется *матрицей гиперболичности*. Гиперболическая система уравнений (А.5) называется *строго гиперболической* (или гиперболической в узком смысле), если все собственные значения матрицы  $\mathcal{A}$  являются попарно различными.

Особую роль играют *консервативные системы* уравнений вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.11})$$

где  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, t, \mathbf{u})$  — вектор потоков. Вектор  $\mathbf{u}$  в этом случае называется вектором консервативных переменных. Уравнения (А.11) выражают собой некоторые законы сохранения в дифференциальной форме. Всякую консервативную систему (А.11) можно переписать в квазилинейной форме (А.5), в которой матрица гиперболичности определяется матрицей производных:

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}. \quad (\text{A.12})$$

Обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому консервативные гиперболические системы уравнений (А.11) представляют собой важный подкласс уравнений (А.5). Как правило, в физических приложениях приходится иметь дело именно с консервативными уравнениями. Например, уравнения газовой динамики и магнитной газовой динамики могут быть представлены в консервативной форме.

**А.1.2. Частные случаи.** В случае, когда размерность векторного пространства решений  $n = 1$ , система уравнений (А.5) переходит в скалярное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Если  $A = a = \text{const}$ , то приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Это уравнение называется *уравнением адвекции* и оно представляет собой простейшее уравнение гиперболического типа. Другим инте-

ресным частным примером является случай  $A = u$ . Соответствующее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.15})$$

называется уравнением Хопфа<sup>1)</sup>.

Перейдем в уравнении адвекции (A.14) к новым независимым переменным:

$$\tau = t, \quad \xi = x - at. \quad (\text{A.16})$$

Поскольку

$$d\tau = dt, \quad d\xi = dx - a dt, \quad (\text{A.17})$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} - a \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}. \quad (\text{A.18})$$

В новых переменных уравнение (A.14) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0. \quad (\text{A.19})$$

Если обозначить через  $u_0(x)$  начальный профиль функции  $u(x, t)$ , то решение уравнения (A.19) можно записать в виде

$$u(\xi, \tau) = u_0(\xi). \quad (\text{A.20})$$

Возвращаясь к исходным независимым переменным, мы можем написать:

$$u(x, t) = u_0(x - at). \quad (\text{A.21})$$

Найденное решение уравнения адвекции имеет простой смысл. Профиль функции  $u(x, t)$  в произвольный момент времени  $t$  представляет собой первоначальный профиль  $u_0(x)$ , смещенный на расстояние  $at$ . В случае  $a > 0$ , профиль смещается вправо, а в случае  $a < 0$  — влево.

Решение (A.21) обладает следующим замечательным свойством. Функция  $u(x, t)$  остается постоянной вдоль прямой линии, которая в плоскости переменных  $x$  и  $t$  задается уравнением  $x = x_0 + at$ . Эта прямая является интегральной кривой уравнения характеристики

$$\frac{dx}{dt} = a. \quad (\text{A.22})$$

В случае уравнения адвекции через каждую точку плоскости переменных  $x, t$  проходит только одна характеристика.

Система уравнений (A.5) в случае матрицы  $\mathcal{A}$ , состоящей из постоянных коэффициентов, становится системой линейных уравнений

<sup>1)</sup> Это уравнение часто также называют уравнением Бюргерса. Однако, оригинальное уравнение Бюргерса по сравнению с уравнением (A.15) содержит диффузионный член (см., например, [145]). С другой стороны, обобщенное решение для уравнения (A.15) было впервые построено Хопфом (1950).

гиперболического типа. Очевидно, что такую систему уравнений можно записать и в консервативной форме (А.7) с потоками

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}. \quad (\text{A.23})$$

Собственные значения  $\lambda_\alpha$  и собственные векторы  $\mathbf{l}^\alpha$ ,  $\mathbf{r}_\alpha$  постоянной матрицы  $\mathbf{A}$  также являются константами.

Умножим уравнение (А.5) слева на левый собственный вектор  $\mathbf{l}^\alpha$ . Используя (А.6), получим:

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \lambda_\alpha \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.24})$$

где скалярные величины

$$S^\alpha = \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A.25})$$

называются *инвариантами Римана*. Поскольку каждый инвариант Римана удовлетворяет уравнению адвекции со своим коэффициентом  $\lambda_\alpha$ , то, опираясь на (А.21), можно сразу написать решения этих уравнений:

$$S^\alpha(x, t) = S_0^\alpha(x - \lambda_\alpha t), \quad (\text{A.26})$$

где функции  $S_0^\alpha(x)$  описывают начальные профили инвариантов Римана. Таким образом, инвариант Римана  $S^\alpha$  с номером  $\alpha$  остается постоянным на прямой  $x - \lambda_\alpha t = \text{const}$ . Эта прямая является интегральной кривой уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_\alpha \quad (\text{A.27})$$

и представляет собой характеристику с номером  $\alpha$ . Через каждую точку плоскости переменных  $x$  и  $t$  проходит не более  $n$  характеристик. В случае строго гиперболической системы линейных уравнений количество характеристик в точности равно  $n$ . Для каждой характеристики существует свой инвариант Римана, который сохраняет постоянное значение при перемещении вдоль нее. Наоборот, для каждого инварианта Римана имеется характеристика, вдоль которой он сохраняет постоянное значение.

Используя полученные решения для инвариантов Римана (А.26), можно построить решения и для вектора  $\mathbf{u}$ . Для этого нужно обратить соотношение (А.25). Это можно сделать, поскольку левые собственные векторы  $\mathbf{l}^\alpha$  для гиперболической системы составляют базис. Для строго гиперболической системы левые и правые собственные векторы образуют ортогональную систему векторов (см. (А.10)). Если эти векторы являются нормированными, то искомое выражение имеет вид

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha S^\alpha. \quad (\text{A.28})$$

**А.1.3. Нелинейные системы.** В общем случае, когда матрица  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, t, \mathbf{u})$ , система (А.5) представляет собой гиперболическую систему нелинейных уравнений. При этом собственные значения  $\lambda_\alpha$  и собственные векторы  $\mathbf{l}^\alpha$ ,  $\mathbf{r}_\alpha$  также будут зависеть от  $x$ ,  $t$  и  $\mathbf{u}$ . Строго

говоря, для нелинейных систем свойство гиперболичности является локальным и может нарушаться за пределами некоторой области изменения переменных  $x$ ,  $t$  и  $\mathbf{u}$ .

Умножая уравнение (А.5) слева на левый собственный вектор  $\mathbf{l}^\alpha$ , получим

$$\mathbf{l}^\alpha \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = 0. \quad (\text{А.29})$$

Выражение в круглых скобках можно трактовать как полную производную  $\mathbf{u}$  по времени  $t$  вдоль характеристики с номером  $\alpha$ . Действительно, дифференциал функции  $\mathbf{u}$

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dx. \quad (\text{А.30})$$

Характеристики представляют собой интегральные кривые уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_\alpha(x, t, \mathbf{u}). \quad (\text{А.31})$$

Рассматривая две бесконечно близкие точки на характеристике с номером  $\alpha$ , из выражений (А.30) и (А.31) находим:

$$d_\alpha \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt + \lambda_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dt. \quad (\text{А.32})$$

Поэтому полная производная  $\mathbf{u}$  по времени вдоль характеристики

$$\frac{d_\alpha \mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}. \quad (\text{А.33})$$

Уравнение (А.29) представляет собой характеристическую форму записи исходных уравнений (А.5).

Определим инварианты Римана как набор скалярных функций  $S^\alpha$ , градиенты которых в пространстве векторов  $\mathbf{u}$  коллинеарны соответствующим левым собственным векторам  $\mathbf{l}^\alpha$  матрицы  $\mathcal{A}$ . Для строго гиперболических систем градиенты инвариантов Римана в пространстве векторов  $\mathbf{u}$  составляют ортогональную систему с правыми собственными векторами матрицы  $\mathcal{A}$ :

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (\text{А.34})$$

В общем случае построить инварианты Римана не удастся. Но в некоторых случаях можно подобрать такие интегрирующие множители  $\mu_\alpha = \mu_\alpha(x, t, \mathbf{u})$ , что при фиксированных значениях  $x$  и  $t$

$$\mu_\alpha \mathbf{l}^\alpha = \frac{\partial S^\alpha}{\partial \mathbf{u}}. \quad (\text{А.35})$$

В результате, дифференциальная форма

$$\mu_\alpha \mathbf{l}^\alpha \cdot d\mathbf{u} = \frac{\partial S^\alpha}{\partial \mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u}. \quad (\text{А.36})$$

Дифференциал инварианта Римана

$$dS^\alpha = \frac{dS^\alpha}{d\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{u} + \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial t}\right)_{\mathbf{u}} dt + \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial x}\right)_{\mathbf{u}} dx. \quad (\text{A.37})$$

Если интегрирующие множители подобрать удалось, то

$$dS^\alpha = \mu_\alpha I^\alpha \cdot d\mathbf{u} + \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial t}\right)_{\mathbf{u}} dt + \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial x}\right)_{\mathbf{u}} dx. \quad (\text{A.38})$$

Рассмотрим изменение инварианта Римана  $S^\alpha$  вдоль характеристики с номером  $\alpha$ . Поскольку при этом  $I^\alpha \cdot d_\alpha \mathbf{u} = 0$  (см. (A.29)), а  $dx = \lambda_\alpha dt$ , то полная производная по времени, вычисляемая вдоль характеристики,

$$\frac{d_\alpha S^\alpha}{dt} = \frac{\partial S^\alpha}{\partial t} + \lambda_\alpha \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} = \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial t}\right)_{\mathbf{u}} + \lambda_\alpha \left(\frac{\partial S^\alpha}{\partial x}\right)_{\mathbf{u}}. \quad (\text{A.39})$$

Мы получили уравнения, которым должны удовлетворять инварианты Римана для случая нелинейной гиперболической системы. Уравнения (A.39) представляют собой систему нелинейных скалярных уравнений с источником. В общем случае все эти уравнения являются взаимосвязанными как через собственные значения  $\lambda_\alpha$ , так и через источники члены в правой части. Если матрица  $\mathcal{A}$  не зависит явным образом от  $x$  и  $t$ , то источники члены в (A.39) исчезают. В этом случае вновь получаем, что каждый инвариант Римана  $S^\alpha$  остается постоянным вдоль соответствующей характеристики.

Как уже отмечалось, в общем случае для нелинейной системы уравнений (A.5) инварианты Римана не существуют. Однако, в некоторых частных случаях система (A.5) может быть приведена к инвариантам. Это имеет место для случая системы двух уравнений. Для полулинейной системы, когда матрица  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, t)$  не зависит явным образом от вектора  $\mathbf{u}$ , инварианты Римана  $S^\alpha = I^\alpha(x, t) \cdot \mathbf{u}$ . Наконец, в общем случае систему уравнений (A.5) можно определенным способом расширить и получить так называемую продолженную систему [233], которая всегда может быть приведена к инвариантам.

**А.1.4. Обобщенные решения.** Рассмотрим в плоскости переменных  $x, t$  произвольный замкнутый контур  $L$ , ограничивающий область  $S$ . Интегрируя систему консервативных уравнений (A.11) по области  $S$ , получим систему интегральных уравнений <sup>1)</sup>:

$$\oint_L \mathbf{u} dx - \mathbf{F} dt = 0. \quad (\text{A.40})$$

<sup>1)</sup> Для вывода уравнений (A.40) можно воспользоваться теоремой Грина:

$$\iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

Система уравнений (А.40) является более общей по сравнению с исходной системой (А.11). В самом деле, все решения исходной системы дифференциальных уравнений (А.11) содержатся среди решений системы интегральных уравнений (А.40). Обратное, вообще говоря, неверно, поскольку решения системы (А.40) могут быть разрывными.

Будем называть обобщенными решениями исходной системы дифференциальных уравнений (А.11) решения системы интегральных уравнений (А.40), содержащие конечное число точек разрыва и имеющие конечные предельные значения слева и справа от разрыва. В газовой динамике с помощью обобщенных решений можно описывать течения с ударными волнами, контактными разрывами и волнами разрежения.

Следует заметить, что для одной и той же исходной системы дифференциальных уравнений (А.11) можно, вообще говоря, построить более чем одно обобщенное решение. Продемонстрируем это замечание на примере уравнения Хопфа (А.15). Рассмотрим две консервативные формы этого уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^3}{3} \right) = 0. \quad (\text{А.41})$$

Соответствующие интегральные уравнения имеют вид

$$\oint_L u dx - \frac{u^2}{2} dt = 0, \quad \oint_L \frac{u^2}{2} dx - \frac{u^3}{3} dt = 0. \quad (\text{А.42})$$

С точки зрения классических решений эти два уравнения являются эквивалентными. Иными словами любое гладкое решение уравнения Хопфа одновременно удовлетворяет этим двум интегральным уравнениям. Однако разрывная функция  $u(x, t)$  может удовлетворять одному из этих интегральных уравнений и не удовлетворять другому.

Это означает, что различные физические процессы могут описываться одними и теми же дифференциальными уравнениями, но различными интегральными уравнениями. При этом различие этих процессов будет проявляться в решениях с разрывами. Таким образом, на практике выбор того или иного обобщенного решения должен осуществляться на основе дополнительных соображений физического характера.

Среди множества разрывов можно выделить *слабые* и *сильные* разрывы. На слабом разрыве сами величины  $\mathbf{u}$  остаются непрерывными, а скачки испытывают какие-либо их производные по  $x$  и  $t$  первого или более высокого порядков. На сильных разрывах скачки испытывают сами консервативные переменные  $\mathbf{u}$ .

Решение со слабым разрывом всегда можно представить в виде суперпозиции гладкого решения  $\mathbf{u}_0$  и некоторого малого возмущения  $\delta \mathbf{u}$ :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u}$ . Это означает, что слабые разрывы распространяются со скоростями, которые определяются характеристиками

системы (А.11). Действительно, линеаризуя систему (А.11), приходим к полулинейной системе уравнений для малых возмущений:

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, \mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x} = 0. \quad (\text{А.43})$$

Интегральные уравнения (А.40) позволяют вывести условия, которым должны удовлетворять решения  $\mathbf{u}$  на разрывах. Эти условия называются *условиями Гюгоньо*. Для вывода этих условий рассмотрим разрыв, координата которого  $x = x(t)$ . Производная  $dx/dt = D$  представляет собой скорость разрыва. Квадратными скобками будем обозначать скачок величин на разрыве, т. е.  $[q]$  означает разность между предельными значениями величины  $q$  справа и слева от разрыва. Рассмотрим некоторый интервал времени  $t_1 \leq t \leq t_2$  и построим замкнутый контур  $L$ , как показано на рис. А.1. Участки  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  контура  $L$  идут параллельно оси  $x$ , а участки  $A_2B_1$  и  $B_2A_1$  идут вдоль линии разрыва.

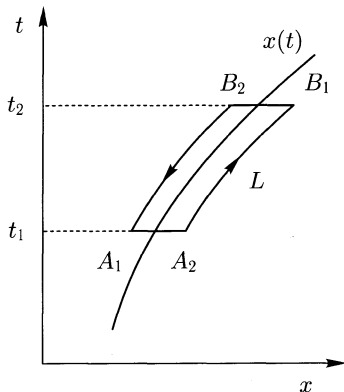


Рис. А.1. К выводу условий Гюгоньо

Будем приближать участки  $A_2B_1$  и  $B_2A_1$  контура к линии разрыва. Поскольку скачки  $\mathbf{u}$  на разрыве являются конечными величинами, то контурные интегралы вдоль участков  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  будут стремиться к нулю. На оставшихся участках контура можно перейти к интегрированию по  $dt$ , поскольку вдоль них  $dx = Ddt$ . В результате интегральное уравнение (А.40) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} (D[\mathbf{u}] - [\mathbf{F}]) dt = 0. \quad (\text{А.44})$$

Ввиду произвольности пределов интегрирования  $t_1$  и  $t_2$ , подинтегральное выражение должно равняться нулю:

$$D[\mathbf{u}] = [\mathbf{F}]. \quad (\text{А.45})$$

Полученные соотношения называются условиями Гюгоньо. Они связывают предельные значения величин слева и справа от разрыва.

Рассмотрим сильный разрыв, для которого удовлетворяются условия Гюгоньо (А.45). Для его реализации необходимы дополнительные условия, которые будут гарантировать, что в следующий момент времени он не распадется. Эти условия называются *условиями эволюционности* разрыва. Для выяснения этих условий возьмем вели-



чины  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  слева и справа от разрыва на малые величины  $\delta\mathbf{u}_1$  и  $\delta\mathbf{u}_2$  соответственно:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathcal{A}_0 \cdot \delta\mathbf{u}, \quad D = D_0 + \delta D. \quad (\text{A.46})$$

Подставляя эти соотношения в условия Гюгонио (A.45) и ограничиваясь величинами первого порядка малости, находим:

$$D_0[\delta\mathbf{u}] + \delta D[\mathbf{u}_0] = [\mathcal{A}_0 \cdot \delta\mathbf{u}]. \quad (\text{A.47})$$

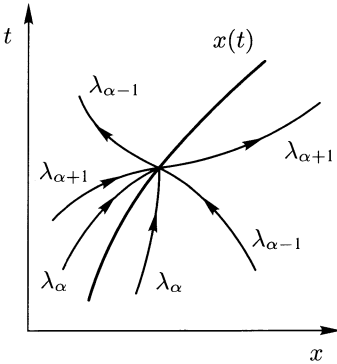


Рис. А.2. К анализу условий эволюционности сильного разрыва.

Решения можно записать в виде

$$\delta S^\alpha = \delta S_0^\alpha(x - \lambda_\alpha t), \quad (\text{A.50})$$

где  $\delta S_0^\alpha$  начальные профили инвариантов Римана. Для строго гиперболических систем возмущения

$$\delta\mathbf{u} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}(\mathbf{u}_0) \delta S^\alpha. \quad (\text{A.51})$$

Подставим это решение в линейризованные условия Гюгонио (A.47), получим:

$$\delta D[\mathbf{u}_0] = \left[ \sum_{\alpha} (\lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_0) - D_0) \mathbf{r}_{\alpha}(\mathbf{u}_0) \delta S^\alpha \right]. \quad (\text{A.52})$$

Мы получили систему из  $n$  алгебраических уравнений для  $2n + 1$  величин  $\delta S_1^\alpha$ ,  $\delta S_2^\alpha$  и  $\delta D$ . Обозначим через  $n_1$  и  $n_2$  количество волн, уходящих влево и вправо от разрыва. Тогда условие разрешимости уравнений (A.52) определяется равенством  $n_1 + n_2 + 1 = n$ . Рассмотрим некоторую точку на линии разрыва  $x(t)$ . Как следует из полученного условия, количество приходящих в эту точку характеристик должно

Возмущения на разрыве будут распространяться в области слева и справа от разрыва. Эволюция этих возмущений описывается линейризованным уравнением (A.11):

$$\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{A}_0 \cdot \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.48})$$

Это уравнение можно разрешить относительно инвариантов Римана  $\delta S^\alpha = \mathbf{I}^\alpha(\mathbf{u}_0) \cdot \delta\mathbf{u}$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \delta S^\alpha}{\partial t} + \lambda_{\alpha}(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \delta S^\alpha}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.49})$$

Поскольку каждое из этих уравнений является уравнением адвекции, реше-

быть на 2 больше количества уходящих характеристик. На рис. А.2 показаны приходящие и уходящие характеристики для данного разрыва в случае строго гиперболической системы. Анализ рисунка показывает, что условия эволюционности можно переписать в виде неравенств:

$$\lambda_{\alpha}^{(1)} \leq D \leq \lambda_{\alpha+1}^{(1)}, \quad \lambda_{\alpha-1}^{(2)} \leq D \leq \lambda_{\alpha}^{(2)}, \quad (\text{A.53})$$

где индексами 1 и 2 сверху отмечены величины, относящиеся к областям слева и справа от разрыва.

Таким образом, для того, чтобы разрыв был эволюционным, его скорость  $D$  должна удовлетворять определенным ограничениям по отношению к скоростям распространения возмущений в областях слева и справа от разрыва. Номер характеристики  $\alpha$ , для которого выполняются эти неравенства, называется *индексом разрыва*.

## А.2. Задача Римана

**А.2.1. Автомодельные решения.** Исследуем автомодельные решения гиперболической системы уравнений. Эти решения обладают следующим свойством подобия: если  $x_2 = x_1 t_2 / t_1$ , то

$$\mathbf{u}(x_2, t_2) = \mathbf{u}(x_1, t_1). \quad (\text{A.54})$$

Выполнение свойства (А.54) позволяет рассматривать  $\mathbf{u}(x, t)$  как функцию одной автомодельной переменной  $\xi = x/t$ ,  $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(\xi)$ . При этом система дифференциальных уравнений в частных производных (А.5) преобразуется в некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, что существенно упрощает поиск и анализ решений.

Рассматривая  $\mathbf{u}$  как функцию одной переменной  $\xi$ , находим:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi}. \quad (\text{A.55})$$

Подставляя эти соотношения в (А.5), получим уравнение

$$(\mathcal{A} - \xi \mathcal{I}) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = 0, \quad (\text{A.56})$$

где  $\mathcal{I}$  — единичная матрица. Здесь можно выделить два случая. Если определитель  $\det(\mathcal{A} - \xi \mathcal{I}) \neq 0$ , то эта система имеет только тривиальные решения  $d\mathbf{u}/d\xi = 0$  или  $\mathbf{u} = \text{const}$ . Допустим, что в некоторой области изменения  $\mathbf{u}$  определитель  $\det(\mathcal{A} - \xi \mathcal{I}) = 0$ . Тогда в этой области автомодельная переменная  $\xi$  должна быть равна одному из собственных значений  $\lambda_{\alpha}(\mathbf{u})$ . Но это означает, что производная  $d\mathbf{u}/d\xi$  является  $\alpha$ -м правым собственным вектором матрицы  $\mathcal{A}$ .

С учетом произвольности нормировки правых собственных векторов

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = a \mathbf{r}_{\alpha}, \quad (\text{A.57})$$

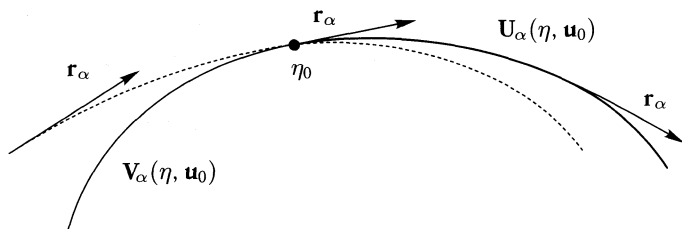


Рис. А.3. Интегральные кривые автомодельных решений.

где  $a$  — нормирующий множитель, а вектор  $\mathbf{r}_\alpha$  предполагается нормированным на единицу. Величина  $a$  не может быть произвольной, поскольку в рассматриваемой области, в которой реализуется автомодельное решение, выполняется равенство  $\xi = \lambda_\alpha$ . Дифференцируя это равенство по автомодельной переменной  $\xi$ , находим:

$$1 = \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = a \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_\alpha. \quad (\text{A.58})$$

Будем рассматривать случай, когда во всей интересующей нас области выполняется условие

$$\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_\alpha \neq 0. \quad (\text{A.59})$$

Правые собственные векторы  $\mathbf{r}_\alpha$  для каждого номера  $\alpha$  задают в пространстве векторов  $\mathbf{u}$  некоторое векторное поле  $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u})$ . Определим силовые линии этого поля, как линии в пространстве векторов  $\mathbf{u}$ , вдоль которых вектор  $\mathbf{r}_\alpha$  является касательным. Неравенство (A.59) означает, что производные  $\lambda_\alpha$  вдоль силовых линий поля  $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u})$  нигде не обращаются в нуль. Иными словами, величина  $\lambda_\alpha$  при перемещении вдоль силовой линии изменяется монотонным образом. Выразая  $a$  в (A.58) и подставляя в (A.57), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} = \mathbf{r}_\alpha \left( \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_\alpha \right)^{-1}. \quad (\text{A.60})$$

Решение системы (A.60) в некоторой области изменения автомодельной переменной  $\xi$  описывает *центрированную волну разрежения* индекса  $\alpha$ . Считая, что в точке  $\xi_0$  вектор  $\mathbf{u}(\xi_0) = \mathbf{u}_0$ , обозначим это решение следующим образом:

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{U}_\alpha(\xi, \mathbf{u}_0). \quad (\text{A.61})$$

Поскольку в волне разрежения  $\xi = \lambda_\alpha$ , то величина  $\lambda_\alpha$  изменяется монотонным образом при переходе от левого края волны разрежения к ее правому краю. Поэтому, если  $\mathbf{u}_0$  соответствует заданному левому состоянию  $\mathbf{u}^-$  в волне разрежения, то правое состояние  $\mathbf{u}^+$

определяется только одним параметром  $\eta = \lambda_\alpha(\mathbf{u}^+)$ . Таким образом, для волн разрежения правое состояние определяется выражением

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(\eta) = \mathbf{U}_\alpha(\eta, \mathbf{u}_0). \quad (\text{A.62})$$

В пространстве векторов  $\mathbf{u}$  соотношение (A.62) описывает гладкую кривую, которая параметризуется величиной  $\eta$ . Она начинается в точке  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^-$ , соответствующей значению параметра  $\eta = \eta_0$  и продолжается в сторону увеличения параметра  $\eta$ . Эта кривая является частью (при  $\eta > \eta_0$ ) силовой линии векторного поля  $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u})$ , проходящей через точку  $\mathbf{u}_0$  (см. рис. А.3). Остальная часть силовой линии при  $\eta < \eta_0$  (на рис. А.3 она показана пунктирной линией) является нефизической и описывает неэволюционные волны разрежения. В газовой динамике эта часть интегральной кривой описывает волны сжатия, которые, как известно, имеют тенденцию переходить в ударные волны.

Рассмотрим теперь автомодельные решения с разрывами. В таких решениях скорость разрыва должна быть равна некоторому значению автомодельной переменной  $D = \xi$ . Это означает, что координата разрыва  $x = Dt$  изменяется со временем по линейному закону. На разрыве должны удовлетворяться условия Гюгионо (A.45). Будем считать, что левое состояние  $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}_0$  на разрыве известно. Тогда скорость разрыва  $D$  и правое состояние  $\mathbf{u}^+$  определяются через левое состояние с помощью некоторого дополнительного параметра  $\eta$ ,  $D = D(\eta)$ ,  $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(\eta)$ . Причем будем считать, что левому состоянию отвечает значение параметра  $\eta_0$ ,  $\mathbf{u}(\eta_0) = \mathbf{u}_0$ . В качестве параметра  $\eta$ , как и для волн разрежения, можно выбрать  $\eta = \lambda_\alpha(\mathbf{u}^+)$ , поскольку из условий эволюционности (A.53) следует, что при переходе через разрыв индекса  $\alpha$  величина  $\lambda_\alpha$  изменяется монотонным образом. Обозначим эту часть кривой через

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(\eta) = \mathbf{V}_\alpha(\eta, \mathbf{u}_0). \quad (\text{A.63})$$

Она, как и кривая (A.62) для волн разрежения, начинается в точке  $\eta = \eta_0$  и продолжается в сторону уменьшения параметра  $\eta$  (см. рис. А.3).

Дифференцируя условия Гюгионо (A.45) по параметру  $\eta$  и подставляя затем в полученное выражение  $\eta = \eta_0$ , находим:

$$(\mathcal{A}_0 - D_0 \mathcal{I}) \cdot \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\eta} \right)_0 = 0. \quad (\text{A.64})$$

Нетривиальные решения этой системы существуют только при условии  $\det(\mathcal{A}_0 - D_0 \mathcal{I}) = 0$ . Это означает, что  $D_0 = \lambda_\alpha(\mathbf{u}_0)$ , а производная  $(d\mathbf{u}/d\eta)_0$  является правым собственным вектором матрицы  $\mathcal{A}_0$ . При этом снова с учетом произвольности нормировки собственных векторов,

$$\left( \frac{d\mathbf{u}}{d\eta} \right)_0 = a \mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u}_0). \quad (\text{A.65})$$

Далее, дифференцируя соотношение

$$\eta = \lambda_\alpha(\mathbf{u}(\eta)) \quad (\text{A.66})$$

по параметру  $\eta$  и подставляя затем начальное значение  $\eta_0$ , находим:

$$1 = a \left( \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{u}} \right)_0 \cdot \mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u}_0). \quad (\text{A.67})$$

Допустим, что скалярное произведение в правой части не равно нулю. Тогда из этого соотношения можно определить нормирующий множитель  $a$ . Подставляя его в (A.65), получаем:

$$\left( \frac{d\mathbf{u}}{d\eta} \right)_0 = \mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u}_0) \left( \left( \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{u}} \right)_0 \cdot \mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u}_0) \right)^{-1}. \quad (\text{A.68})$$

Сравнение этого выражения с (A.60) показывает, что в решении с разрывом производная  $d\mathbf{u}/d\eta$  при  $\eta = \eta_0$  имеет такое же значение, как и для волны разрежения. Можно показать [233], что в точке  $\eta = \eta_0$  сшиваются и вторые производные. Таким образом, для кривых (A.62) и (A.63) в точке  $\eta = \eta_0$  имеет место касание второго порядка. В малой окрестности точки  $\eta_0$  они ведут себя похожим образом. Однако на больших расстояниях от точки  $\eta_0$  структуры этих кривых принципиально различны (см. рис. А.3). В газовой динамике разрывы, которые описываются кривой (A.63), называются ударными волнами.

Решения в виде волн разрежения и ударных волн можно построить не для любых характеристик. Действительно, при построении соответствующих автомодельных решений нами было использовано условие (A.59). Такие характеристики называются *истинно нелинейными*. Характеристики, для которых

$$\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_\alpha \equiv 0, \quad (\text{A.69})$$

называются *линейно-вырожденными*. Для таких характеристик автомодельных решений в виде волн разрежения не существует. Соотношение (A.69) означает, что вдоль силовой линии  $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u})$  собственное значение  $\lambda_\alpha$  остается постоянным. Поэтому его нельзя, как это мы делали в предыдущих случаях, выбрать в качестве параметра этой кривой.

Выбирая в качестве параметра  $\eta$  любой другой параметр (например, длину кривой, отсчитываемую от произвольной ее точки), запишем уравнение силовой линии векторного поля  $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u})$  в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\eta} = \mathbf{r}_\alpha. \quad (\text{A.70})$$

Умножим это соотношение слева на матрицу  $A$ . Имеем:

$$A \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\eta} = \frac{d\mathbf{F}}{d\eta}, \quad (\text{A.71})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{r}_\alpha = \lambda_\alpha \frac{d\mathbf{u}}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} (\lambda_\alpha \mathbf{u}). \quad (\text{A.72})$$

При вычислениях в (A.72) мы использовали уравнение (A.70) и условие постоянства  $\lambda_\alpha$  вдоль интегральной кривой. Интегрируя полученное уравнение от точки  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\eta_0)$  (левое состояние) до другой произвольной точки  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\eta)$ , приходим к соотношениям Гюгионо:

$$D(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = \mathbf{F} - \mathbf{F}_0, \quad (\text{A.73})$$

где скорость разрыва

$$D = \lambda_\alpha(\mathbf{u}_0) = \lambda_\alpha(\mathbf{u}). \quad (\text{A.74})$$

В газовой динамике этому случаю соответствуют контактные разрывы.

Наконец, равенство

$$\frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}_\alpha = 0 \quad (\text{A.75})$$

может реализоваться в некоторой отдельной точке  $\xi_0$  (точка перегиба) внутри интересующей нас области изменения автомодельной переменной  $\xi$ . Характеристики, содержащие точки перегиба, представляют более сложный для анализа случай, поскольку для таких характеристик на силовой линии векторного поля  $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{u})$  собственное значение  $\lambda_\alpha$  может изменять знак. Если исходная гиперболическая система уравнений имеет только истинно нелинейные и линейно вырожденные характеристики, то она называется *выпуклой*. Если хотя бы одна характеристика имеет точку перегиба, то такая система называется *невыпуклой*.

**А.2.2. Линейные уравнения.** Задача Римана формулируется следующим образом. Необходимо найти решение гиперболической системы уравнений, записанных в консервативной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.76})$$

с начальными условиями

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.77})$$

В начальный момент времени  $t = 0$  в точке  $x = 0$  имеет место произвольный разрыв, поскольку величины слева  $\mathbf{u}_L$  и справа  $\mathbf{u}_R$  от разрыва никак между собой не связаны. Поэтому в следующий момент должен произойти распад этого разрыва. Рассмотрим сначала более простые частные случаи.

Для уравнения адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.78})$$

начальные условия принимают вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.79})$$

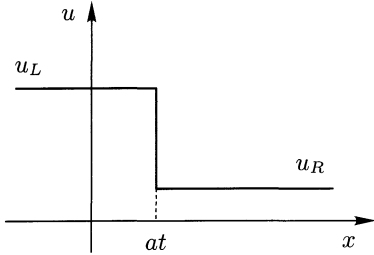


Рис. А.4. Распад разрыва в случае уравнения адвекции

при  $a < 0$  (рис. А.4). Скорость разрыва  $D = a$ . При этом на самом разрыве выполняется условие Гюгонио. Действительно,

$$[F] = [au] = a[u] = D[u]. \quad (\text{A.81})$$

Рассмотрим теперь задачу Римана для системы линейных уравнений. В этом случае вектор потоков в (А.76)  $\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$ , где матрица  $\mathbf{A}$  состоит из постоянных коэффициентов. Для простоты будем считать, что система уравнений является строго гиперболической. Начальные условия для инвариантов Римана запишем в виде

$$S^\alpha(x, 0) = \begin{cases} S_L^\alpha, & x < 0, \\ S_R^\alpha, & x > 0, \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

где обозначено

$$S_L^\alpha = \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_L, \quad S_R^\alpha = \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_R. \quad (\text{A.83})$$

Каждый инвариант Римана  $S^\alpha$  удовлетворяет своему уравнению адвекции (см. (А.24)). Поэтому можно воспользоваться найденным решением (А.80) для уравнения адвекции:

$$S^\alpha(x, t) = \begin{cases} S_L^\alpha, & x < \lambda_\alpha t, \\ S_R^\alpha, & x > \lambda_\alpha t. \end{cases} \quad (\text{A.84})$$

С помощью обратного преобразования (А.28) перейдем отсюда к исходным переменным:

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha S^\alpha(x, t) = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \begin{cases} \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_L, & x < \lambda_\alpha t, \\ \mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{u}_R, & x > \lambda_\alpha t. \end{cases} \quad (\text{A.85})$$

Проанализируем полученное решение. Между точками  $x_\alpha = \lambda_\alpha t$  функция  $\mathbf{u}$  остается постоянной. В точках  $x_\alpha$  имеют место сильные разрывы. Поскольку для строго гиперболической системы собственные значения можно упорядочить и расположить в порядке возрастания

Ранее нами было найдено общее решение уравнения (А.78) (см. (А.21)). Применяя это решение к начальному профилю (А.79), получаем:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < at, \\ u_R, & x > at. \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

В полученном решении первоначальный разрыв собственно не распадается, а просто смещается на расстояние  $at$  вправо при  $a > 0$  или влево

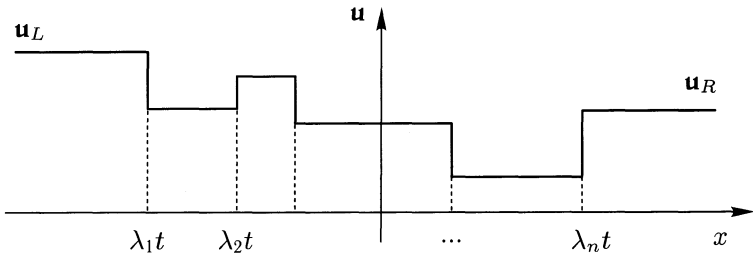


Рис. А.5. Распад разрыва в случае системы линейных уравнений.

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ , точки положения сильных разрывов также располагаются в порядке возрастания номеров  $\alpha$ ,  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Структура решения схематически показана на рис. А.5.

Рассмотрим точку  $x_\beta$ , соответствующую разрыву с номером  $\beta$ . Обозначим через  $[q]_\beta$  скачок величины  $q$  в точке разрыва  $\beta$ . Из решения для инвариантов Римана (А.84) следует, что  $[S^\alpha]_\beta = 0$  для всех  $\alpha \neq \beta$ . Следовательно, на разрыве с номером  $\beta$  скачок испытывает только инвариант Римана  $S^\beta$ , а остальные инварианты остаются непрерывными. Скорость разрыва  $D_\beta = \lambda_\beta$ . Поэтому

$$[u]_\beta = \sum_{\alpha} r_{\alpha} [S^{\alpha}]_{\beta} = r_{\beta} [S^{\beta}]_{\beta}. \tag{A.86}$$

С другой стороны,

$$[F]_{\beta} = A \cdot [u]_{\beta} = A \cdot r_{\beta} [S^{\beta}]_{\beta} = \lambda_{\beta} r_{\beta} [S^{\beta}]_{\beta} = \lambda_{\beta} [u]_{\beta} = D_{\beta} [u]_{\beta}. \tag{A.87}$$

Это означает, что на каждом разрыве выполняются условия Гюгоню. Таким образом, в данном случае первоначальный произвольный разрыв распадается на серию упорядоченных сильных разрывов, движущихся со скоростями  $\lambda_{\alpha}$ .

**А.2.3. Нелинейные уравнения.** Перейдем теперь к рассмотрению нелинейной системы (А.76). Покажем сначала, что задача Римана обладает определенной симметрией. Для этого перейдем к новым независимым переменным:

$$t' = kt, \quad x' = kx, \tag{A.88}$$

где  $k$  — положительная постоянная. Нетрудно убедиться, что в новых переменных задача Римана имеет такой же вид, как и в исходных переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + \frac{\partial F}{\partial x'} = 0, \tag{A.89}$$

$$u(x', 0) = \begin{cases} u_L, & x' < 0, \\ u_R, & x' > 0. \end{cases} \tag{A.90}$$



Если решение задачи Римана является единственным, то должно быть

$$\mathbf{u}(x', t') = \mathbf{u}(x, t). \quad (\text{A.91})$$

Таким образом, мы установили, что решение задачи Римана обладает свойством подобия,

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(kx, kt), \quad (\text{A.92})$$

которое удовлетворяется для любого постоянного положительного  $k$ . Отсюда следует, что если решение задачи Римана является единственным, то оно должно быть автомодельным. Действительно, рассмотрим пространственные профили  $\mathbf{u}$  для двух фиксированных моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ . Тогда легко убедиться, что условие автомодельности решения (A.54) удовлетворяется, если выбрать  $k = t_2/t_1$ ,

$$\mathbf{u}(x_1, t_1) = \mathbf{u}\left(\frac{t_2}{t_1}x_1, t_2\right) = \mathbf{u}\left(\frac{t_2}{t_1}x_1, \frac{t_2}{t_1}t_1\right). \quad (\text{A.93})$$

Проведенный анализ симметрии подобия задачи Римана показывает, что можно искать ее решение с помощью определенной комбинации рассмотренных ранее элементарных автомодельных решений. Для простоты будем рассматривать выпуклую строго гиперболическую систему уравнений. Предположим, что решение задачи Римана является ограниченным. Это означает, что можно выбрать такую положительную константу  $M$ , что будут одновременно выполняться неравенства

$$\|\mathbf{u}(\xi)\| \leq M, \quad |\lambda_\alpha(\mathbf{u})| \leq M, \quad (\text{A.94})$$

где  $\xi = x/t$  — автомодельная переменная.

Пусть в точке  $\xi = \xi_0$  функция  $\mathbf{u}(\xi)$  изменяется непрерывным образом. Тогда

$$|\xi_0| = |\lambda_\alpha(\mathbf{u}(\xi_0))| \leq M. \quad (\text{A.95})$$

Если в точке  $\xi = \xi_0$  функция  $\mathbf{u}(\xi)$  испытывает разрыв, то из условий его эволюционности (A.53) следует

$$|D| = |\xi_0| \leq \max_{\alpha, -, +} |\lambda_\alpha(\mathbf{u}(\xi_0))| \leq M. \quad (\text{A.96})$$

С другой стороны, начальным условиям в задаче Римана соответствуют пределы  $\xi \rightarrow \mp\infty$ . При этом

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mathbf{u} = \mathbf{u}_L, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mathbf{u} = \mathbf{u}_R. \quad (\text{A.97})$$

Отсюда и в силу полученных оценок (A.95) и (A.96) можно заключить, что вне пределов интервала  $-M \leq \xi \leq M$  функция  $\mathbf{u}(\xi)$  равна начальным значениям в задаче Римана,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_L$  при  $\xi \leq -M$  и  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$  при  $\xi \geq M$ .

Начнем строить решение задачи Римана слева направо. Допустим, что начиная с некоторой точки  $\xi = \xi_1^-$  функция  $\mathbf{u}(\xi)$  изменяется,

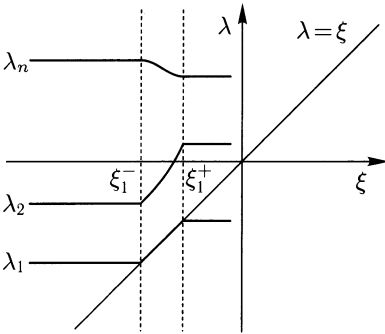


Рис. А.6. Распад произвольного разрыва с волной разрежения.

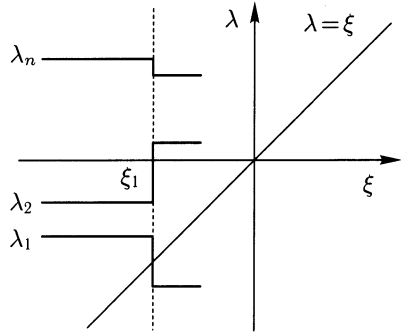


Рис. А.7. Распад произвольного разрыва с ударной волной.

образуя волну разрежения (рис. А.6). Поскольку минимальное собственное значение равно  $\lambda_1$ , то этой волной будет волна разрежения индекса 1. Это, в частности, означает, что характеристика, соответствующая  $\lambda_1$ , является истинно нелинейной. При этом на некотором интервале  $\xi_1^- \leq \xi \leq \xi_1^+$  будет выполняться соотношение  $\xi = \lambda_1(\mathbf{u})$ . Сразу за точкой  $\xi = \xi_1^+$  собственное значение  $\lambda_1$  окажется ниже прямой  $\lambda = \xi$ . Остальные собственные значения в силу условия строгой гиперболичности все еще будут лежать выше этой прямой.

Допустим теперь, что самая левая волна является ударной волной. Истинно нелинейные характеристики допускают и такой вариант. Из рис. А.7 ясно, что это будет сильный разрыв индекса 1. Из условий эволюционности следует, что в точке этого разрыва выполняются неравенства

$$\lambda_1^+ > \xi_1 > \lambda_1^-, \quad \lambda_\alpha^+ > \xi_1, \quad \alpha > 1. \tag{A.98}$$

Поэтому, как и в предыдущем случае, за точкой  $\xi = \xi_1$  собственное значение  $\lambda_1$  окажется ниже прямой  $\lambda = \xi$ , а остальные собственные значения останутся лежать выше этой прямой. Таким образом, если характеристика  $\lambda_1$  является истинно нелинейной, то самая левая бегущая волна должна быть либо волной разрежения индекса 1, либо ударной волной индекса 1.

Если характеристика, соответствующая собственному значению  $\lambda_1$ , является линейно вырожденной, то при пересечении прямой  $\lambda = \xi$  в точке  $\xi_1$  функция  $\lambda_1(\xi)$  останется постоянной. Остальные собственные значения  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ , вообще говоря, в этой точке испытают разрыв. За точкой  $\xi_1$  собственное значение  $\lambda_1$  вновь будет лежать ниже прямой  $\lambda = \xi$ , а остальные собственные значения останутся лежать выше этой прямой. Этот вариант схематически продемонстрирован на рис. А.8. Таким образом, учет линейно вырожденных характеристик приводит к выводу, что первая бегущая волна, кроме рассмотренных выше

вариантов, может оказаться сильным разрывом, на котором собственное значение  $\lambda_1$  остается постоянным. В газовой динамике таким бегущим волнам соответствуют контактные разрывы.

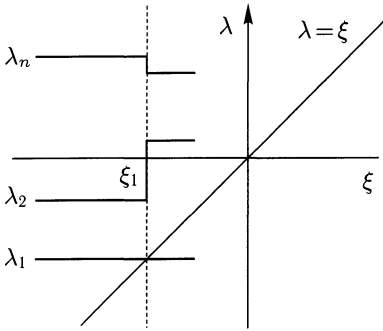


Рис. А.8. Распад произвольного разрыва с линейно вырожденной характеристикой.

Продолжая эти рассуждения дальше, приходим к выводу, что автомодельное решение задачи Римана представляет собой упорядоченное семейство бегущих волн (волн разрежения или сильных разрывов), индексы которых соответствуют номерам характеристик. Как мы видели ранее, на таких бегущих волнах, по известному левому состоянию правое состояние определяется с помощью только одного дополнительного параметра  $\eta$ . Поэтому решение задачи сводится к тому, чтобы, подбирая эти параметры для каждой волны, шить промежуточные состояния в бегущих волнах с левым и правым состоянием в первоначальном разрыве.

Для самой левой волны правое состояние определяется некоторым выражением

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_1(\eta_1, \mathbf{u}_L). \quad (\text{A.99})$$

Для следующей волны величина  $\mathbf{u}_1$  будет левым состоянием. При этом правое состояние

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2(\eta_2, \mathbf{u}_1) = \mathbf{f}_2(\eta_2, \mathbf{f}_1(\eta_1, \mathbf{u}_L)). \quad (\text{A.100})$$

Продолжая эти выкладки вплоть до самой правой волны, находим:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_R = \mathbf{f}_n(\eta_n, \mathbf{u}_{n-1}) = \dots = \mathbf{f}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \mathbf{u}_L). \quad (\text{A.101})$$

Мы получили систему  $n$  нелинейных алгебраических уравнений для  $n$  неизвестных  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ . Решение этой системы уравнений и дает автомодельное решение задачи Римана.

С помощью теоремы о неявных функциях можно показать, что если левое  $\mathbf{u}_L$  и правое  $\mathbf{u}_R$  начальные состояния, а также все промежуточные состояния  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$  лежат достаточно близко друг к другу, то существует единственное решение системы уравнений (A.101). В этом случае также существует единственное автомодельное решение и задачи Римана. Если это условие не выполняется, то задача Римана может либо вообще не иметь решений, либо решение будет не единственным. С некоторыми примерами таких задач можно ознакомиться в [233].

В качестве простого примера построим решение задачи Римана для уравнения Хопфа (А.15). Это уравнение можно записать в консервативной форме с функцией потока  $F(u) = u^2/2$ , которая является выпуклой,

$$F'(u) = \lambda(u) = u, \quad F''(u) = 1. \quad (\text{А.102})$$

Из условия Гюгони на сильном разрыве  $D[u] = [F]$  находим

$$D = \frac{[u^2/2]}{[u]} = \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (\text{А.103})$$

Здесь индексами 1 и 2 помечены соответственно левое и правое состояния в волне. При этом условия эволюционности сильного разрыва  $\lambda_1 < D < \lambda_2$  равносильны неравенству  $u_2 < u_1$ .

Рассмотрим непрерывное автомодельное решение  $u(\xi)$  уравнения Хопфа. Автомодельное уравнение имеет вид

$$(u - \xi) \frac{du}{d\xi} = 0. \quad (\text{А.104})$$

Нетривиальным решением этого уравнения является функция  $u(\xi) = \xi$ . Это решение описывает центрированную волну разрежения. Поскольку в волне разрежения автомодельная переменная  $\xi$  монотонно возрастает, то функция  $u(\xi)$  также является монотонно возрастающей. Поэтому условие эволюционности волны разрежения определяется неравенством  $u_1 < u_2$ .

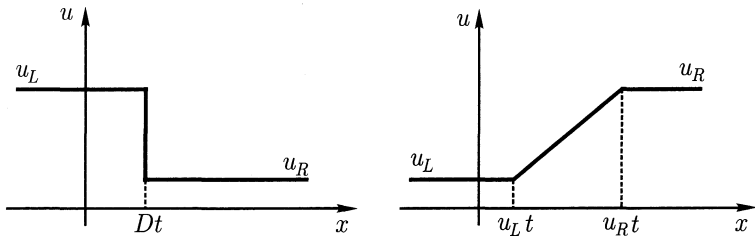


Рис. А.9. Распад разрыва в случае уравнения Хопфа.

Поскольку при распаде произвольного разрыва в данном случае возникает только одна бегущая волна, полученные условия эволюционности покрывают все пространство начальных значений  $u_L$  и  $u_R$ . В результате решение задачи Римана для уравнения Хопфа имеет следующий вид. В случае  $u_L > u_R$  при распаде возникает ударная волна, распространяющаяся со скоростью  $D = (u_L + u_R)/2$  (см. левую диаграмму рис. А.9). В противоположном случае  $u_L < u_R$  при распаде возникает волна разрежения, границы которой распространяются со скоростями  $u_L$  и  $u_R$  (см. правую диаграмму рис. А.9).

### А.3. Уравнения газовой динамики

**А.3.1. Характеристические свойства.** В гл. 4 из уравнения Больцмана были получены уравнения газовой динамики. Проанализируем их свойства с точки зрения описанной выше теории гиперболических систем уравнений. Система уравнений газовой динамики состоит из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{A.105})$$

уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{f} \quad (\text{A.106})$$

и уравнения адиабатичности

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0. \quad (\text{A.107})$$

Напомним, что в этих уравнениях  $\rho$  — плотность газа,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $P$  — давление,  $s$  — энтропия газа, рассчитанная на единицу массы. В правой части уравнения движения (А.106) учитываются внешние силы, которые описываются вектором  $\mathbf{f}$ . Для замыкания этой системы уравнений необходимо использовать уравнение состояния  $P = P(\rho, s)$ , описывающего термодинамические свойства вещества. Вместо уравнения адиабатичности можно использовать уравнение энергии

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varepsilon + \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{A.108})$$

где  $\varepsilon$  — внутренняя энергия газа, рассчитанная на единицу массы. Для гладких течений уравнения (А.107) и (А.108) являются эквивалентными. Однако в случае течений с разрывами для построения обобщенных решений необходимо использовать именно уравнение энергии, а не уравнение адиабатичности. Это связано с тем, что в ударных волнах происходит диссипация кинетической энергии и, следовательно, энтропия в ударном переходе возрастает. Полная энергия газа при этом сохраняется.

Уравнения газовой динамики могут быть записаны и в консервативной форме. Уравнение непрерывности (А.105) уже записано в консервативном виде и выражает закон сохранения массы. Уравнение движения (А.106), записанное в консервативной форме,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \hat{\mathbf{I}}) = \rho \mathbf{f}, \quad (\text{A.109})$$

выражает закон сохранения импульса. Здесь  $\rho \mathbf{v}$  — вектор плотности импульса, а  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \hat{\mathbf{I}}$  — тензор плотности потока импульса. Вели-

чина  $\rho \mathbf{f}$  представляет собой плотность внешней силы. Уравнение энергии в консервативной форме,

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e\mathbf{v} + P\mathbf{v}) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}, \quad (\text{A.110})$$

выражает закон сохранения энергии. Здесь  $e = \rho(\varepsilon + \mathbf{v}^2/2)$  — плотность полной энергии (сумма внутренней и кинетической энергий) газа, а правая часть описывает плотность работы внешних сил.

Рассмотрим случай плоского течения в отсутствие внешних сил. Тогда уравнения газовой динамики (A.105)–(A.107) примут вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.111})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.112})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.113})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.114})$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.115})$$

Вводя вектор переменных <sup>1)</sup>

$$\mathbf{q} = (\rho, v_x, v_y, v_z, s)^T, \quad (\text{A.116})$$

где значок  $T$  означает транспонирование, перепишем систему уравнений (A.111)–(A.115) в более компактном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathcal{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.117})$$

где матрица

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 & 0 & 0 \\ P'_\rho/\rho & v_x & 0 & 0 & P'_s/\rho \\ 0 & 0 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_x \end{pmatrix}, \quad (\text{A.118})$$

$$P'_\rho = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s, \quad P'_s = \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_\rho. \quad (\text{A.119})$$

<sup>1)</sup> Иногда его называют вектором примитивных переменных.

Проанализируем характеристики этой системы уравнений. Собственные значения матрицы  $\mathcal{A}$

$$\lambda_{1,5} = v_x \pm c_s, \quad \lambda_{2,3,4} = v_x, \quad (\text{A.120})$$

где  $c_s = \sqrt{P'_\rho}$ . Система (A.111)–(A.115) является гиперболической, если  $P'_\rho > 0$ . Это условие обеспечивает существование и устойчивость термодинамического равновесия среды и всегда выполняется для так называемых *нормальных газов* [39]. При этом величина  $c_s$  представляет собой адиабатическую скорость звука в газе. Правые собственные векторы, соответствующие собственным значениям (A.120), имеют вид

$$\mathbf{r}_{1,5} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm c_s/\rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -c_s^2/P'_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.121})$$

Характеристики 1 и 5 называются *звуковыми* и описывают распространение звуковых волн в газе. При этом знаки  $\mp$  соответствуют направлениям распространения звуковых волн относительно газа влево и вправо. Характеристика 2 называется *энтропийной* и описывает распространение возмущений энтропии. Наконец, характеристики 3 и 4 называются *вихревыми*. Они описывают распространение возмущений ротора скорости  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Отметим, что скорости распространения энтропийных и вихревых возмущений равны скорости газа  $v_x$ . Поэтому эти возмущения просто переносятся вместе с газом.

Проверим типы характеристик. Имеем:

$$\frac{\partial \lambda_{1,5}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}_{1,5} = \mp \frac{1}{2c_s} \left( P''_\rho + \frac{2c_s^2}{\rho} \right), \quad \frac{\partial \lambda_{2,3,4}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}_{2,3,4} \equiv 0. \quad (\text{A.122})$$

Энтропийная (2) и вихревые (3, 4) характеристики являются линейно вырожденными. Следовательно, для них нельзя построить автомодельные решения в виде волн разрежения и ударных волн. В решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва этим характеристикам могут соответствовать только контактные (или в более общем случае тангенциальные) разрывы. Звуковые характеристики 1 и 5 являются истинно нелинейными в случае выпуклого уравнения состояния, когда

$$P''_\rho + \frac{2c_s^2}{\rho} = -V^2 P''_V \neq 0, \quad (\text{A.123})$$

где  $V = 1/\rho$  — удельный объем. В нормальных газах всегда  $P''_V > 0$ , поэтому это условие удовлетворяется. В этом случае для звуковых характеристик можно построить автомодельные решения в виде волн разрежения и ударных волн.

**А.3.2. Бегущие волны.** Рассмотрим бегущие волны в идеальном политропном газе с уравнением состояния

$$P = K(s)\rho^\gamma, \quad (\text{A.124})$$

где  $K(s) = e^{s/c_V}$  — функция, зависящая только от энтропии  $s$ ,  $c_V$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $\gamma = c_P/c_V > 1$  — показатель адиабаты,  $c_P$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Такой газ является нормальным газом, поскольку

$$P'_\rho = c_s^2 = \gamma \frac{P}{\rho} > 0, \quad P''_V = \gamma(\gamma + 1)K(s)V^{-\gamma-2} > 0. \quad (\text{A.125})$$

Следовательно, в этом случае система уравнений газовой динамики является выпуклой гиперболической системой.

Построим для звуковых характеристик  $\alpha = 1, 5$  решения уравнений газовой динамики в виде волн разрежения. Автомодельные уравнения (см. (A.60))

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\xi} = \mathbf{r}_\alpha \left( \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}_\alpha \right)^{-1} \quad (\text{A.126})$$

в развернутой записи имеют вид

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \pm \frac{2\rho}{(\gamma + 1)c_s}, \quad (\text{A.127})$$

$$\frac{dv_x}{d\xi} = -\frac{2}{\gamma + 1}, \quad (\text{A.128})$$

$$\frac{dv_y}{d\xi} = 0, \quad \frac{dv_z}{d\xi} = 0, \quad \frac{ds}{d\xi} = 0. \quad (\text{A.129})$$

Из (A.129) сразу находим:  $s = s_0$ ,  $v_y = v_{y,0}$ ,  $v_z = v_{z,0}$ . Иными словами, энтропия  $s$  и поперечные компоненты скорости  $v_y$  и  $v_z$  в волне разрежения не изменяются. Интегрируя оставшиеся уравнения (A.127) и (A.128), получаем:

$$v_x = v_{x,0} - \frac{2}{\gamma + 1} (\xi - \xi_0), \quad (\text{A.130})$$

$$\rho = \rho_0 \left( 1 \pm \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{\xi - \xi_0}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma - 1}}, \quad (\text{A.131})$$

где обозначено  $c_0 = c_s(\xi_0)$ .

Давление в волне разрежения определяется из уравнения состояния:

$$P = P_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (\text{A.132})$$

Подставляя сюда (A.131), находим:

$$P = P_0 \left( 1 \pm \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{\xi - \xi_0}{c_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (\text{A.133})$$



Из выражений (А.130), (А.133) для скорости и для давления можно получить

$$v_x = v_{x,0} \mp \frac{2c_0}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right). \quad (\text{А.134})$$

Это соотношение нам понадобится в дальнейшем при решении задачи Римана о распаде произвольного газодинамического разрыва.

Перейдем теперь к рассмотрению сильных газодинамических разрывов. В случае газовой динамики условия Гюгонио в развернутой записи имеют следующий вид:

$$D[\rho] = [\rho v_x], \quad (\text{А.135})$$

$$D[\rho v_x] = [\rho v_x^2 + P], \quad (\text{А.136})$$

$$D[\rho v_y] = [\rho v_x v_y], \quad (\text{А.137})$$

$$D[\rho v_z] = [\rho v_x v_z], \quad (\text{А.138})$$

$$D \left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) \right] = \left[ \rho v_x \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) + P v_x \right]. \quad (\text{А.139})$$

Обозначим индексами 1 и 2 состояния газа соответственно до прохождения по нему сильного разрыва и после прохождения. Условия Гюгонио удобно переписать в системе отсчета, в которой сильный разрыв покоится. Нормальная скорость газа в этой системе отсчета  $v_n = v_x - D$ . Тангенциальная скорость газа при этом не изменится,  $v_\tau = (0, v_y, v_z)$ . Из первого условия (А.135) следует, что на разрыве остается непрерывной величина плотности потока массы  $j = \rho v_n$ . Поэтому эту величину можно рассматривать в качестве параметра сильного разрыва.

Учитывая введенные обозначения, условия Гюгонио (А.135)–(А.139) можно переписать в более компактном виде:

$$[\rho v_n^2 + P] = 0, \quad (\text{А.140})$$

$$j[v_\tau] = 0, \quad (\text{А.141})$$

$$j \left[ \varepsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{v_n^2 + v_\tau^2}{2} \right] = 0. \quad (\text{А.142})$$

Из этих соотношений следует, что все газодинамические сильные разрывы можно разделить на два типа: 1) *тангенциальные разрывы*, в которых поток массы  $j = 0$  и 2) *ударные волны*, в которых поток массы  $j \neq 0$ .

В случае тангенциальных разрывов из условия  $j = 0$  и  $\rho_1 \neq \rho_2$  получаем  $v_{n,1} = v_{n,2} = 0$ . Это означает, что скорость такого разрыва равна скорости газа:  $D = v_{x,1} = v_{x,2}$ . Из (А.140) следует, что на танген-

циальном разрыве давление непрерывно:  $[P] = 0$ . Скачок внутренней энергии  $[\varepsilon]$  определяется скачком плотности  $[\rho]$  и условием непрерывности давления. Тангенциальная скорость  $\mathbf{v}_\tau$  может испытывать произвольный скачок. Частным случаем тангенциальных разрывов являются *контактные разрывы*, в которых  $[\mathbf{v}_\tau] = 0$ .

В случае ударных волн  $j \neq 0$  и из (А.141) следует условие непрерывности тангенциальной скорости,  $[\mathbf{v}_\tau] = 0$ . Поэтому условия Гюгонио для ударных волн дают:

$$[\rho v_n^2 + P] = 0, \quad (\text{А.143})$$

$$\left[ \varepsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{v_n^2}{2} \right] = 0. \quad (\text{А.144})$$

Из первого соотношения находим:

$$j^2 = -\frac{[P]}{[1/\rho]}. \quad (\text{А.145})$$

Второе соотношение можно переписать в виде

$$\left[ \varepsilon + \frac{P}{\rho} \right] + \frac{j^2}{2} \left[ \frac{1}{\rho^2} \right] = 0. \quad (\text{А.146})$$

Подставляя сюда  $j^2$  из (А.145), приходим к соотношению:

$$[\varepsilon] + \frac{P_1 + P_2}{2} \left[ \frac{1}{\rho} \right] = 0. \quad (\text{А.147})$$

Уравнение (А.147) описывает *ударную адиабату*, которая связывает термодинамические величины за ударной волной с термодинамическими величинами перед ударной волной. Для идеального политропно-го газа с учетом уравнения состояния  $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$  ударную адиабату (А.147) удобно переписать в виде:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)P_2/P_1 + (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) + (\gamma - 1)P_2/P_1}. \quad (\text{А.148})$$

Отсюда, в частности, следует, что для предельно сильных ударных волн ( $P_2/P_1 \rightarrow \infty$ ) уплотнение газа за фронтом ударной волны стремится к конечному значению

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (\text{А.149})$$

Используя выражение (А.148) из (А.145) находим:

$$j = \pm \rho_1 c_1 \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{P_2}{P_1} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}. \quad (\text{А.150})$$

Здесь верхний знак снова соответствует ударным волнам, распространяющимся влево (для таких волн  $j > 0$ ), нижний знак соответствует ударным волнам, распространяющимся вправо (для таких волн  $j < 0$ ).

Условие (А.143) можно переписать в несколько ином виде:

$$j[v_n] + [P] = 0. \quad (\text{А.151})$$

Отсюда, используя найденное выражение для потока массы (А.150), получаем:

$$v_{x,2} = v_{x,1} \mp \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{P_2 - P_1}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P_2}{P_1} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}}. \quad (\text{А.152})$$

Это соотношение, как и аналогичное соотношение для волн разрежения (А.134), будет использоваться нами при построении решения газодинамической задачи Римана.

В заключение этого раздела выпишем условия эволюционности газодинамических ударных волн. Для левых ударных волн  $v_{n,1} > 0$ ,  $j > 0$ . Условия эволюционности сводятся к неравенствам

$$v_{n,1} < c_1, \quad v_{n,2} > c_2 \quad (\text{А.153})$$

или в терминах потока массы

$$\rho_2 c_2 < j < \rho_1 c_1. \quad (\text{А.154})$$

Для правых ударных волн  $v_{n,1} < 0$ ,  $j < 0$ . Условия эволюционности имеют вид

$$v_{n,1} < -c_1, \quad v_{n,2} > -c_2 \quad (\text{А.155})$$

или в терминах потока массы:

$$-\rho_2 c_2 < j < -\rho_1 c_1. \quad (\text{А.156})$$

**А.3.3. Задача Римана.** Рассмотрим две массы идеального газа, в начальный момент времени соприкасающиеся в плоскости  $x = 0$ . Газ в левом полупространстве  $x < 0$  характеризуется параметрами  $\rho_L$ ,  $P_L$  и  $v_L$ . Аналогичные параметры газа в правом полупространстве  $x > 0$  обозначим через  $\rho_R$ ,  $P_R$  и  $v_R$ . Величины слева и справа от плоскости  $x = 0$  никак между собой не связаны. Поэтому в начальный момент времени в плоскости  $x = 0$  имеет место произвольный разрыв. В следующий момент времени должен произойти его распад на некоторую совокупность бегущих волн, с течением времени расходящихся друг от друга. Полное решение задачи о распаде произвольного газодинамического разрыва для идеального газа впервые было построено Кочиным (1926). В дальнейшем эта задача исследовалась многими авторами и для других случаев. Подробное описание этой задачи и некоторых ее приложений содержится в книгах [214, 233].

Из предыдущего анализа следует, что при распаде газодинамического разрыва могут формироваться не более трех бегущих волн. Действительно, энтропийная и вихревые характеристики являются линейно вырожденными и поэтому могут порождать только тангенциальные разрывы (ТР). Поскольку соответствующие собственные значения совпадают, то будет формироваться только один тангенциальный разрыв. Звуковые характеристики дают еще не более двух бегущих волн. Следовательно, общее число волн не будет превышать трех. Звуковые характеристики являются истинно нелинейными. Поэтому они могут порождать при распаде разрыва либо ударные волны (УВ), либо волны разрежения (ВР).

Таким образом, при распаде разрыва могут реализоваться следующие конфигурации: 1) с двумя ударными волнами (УВ–ТР–УВ), 2) с левой волной разрежения и правой ударной волной (ВР–ТР–УВ), 3) с левой ударной волной и правой волной разрежения (УВ–ТР–ВР), 4) с двумя волнами разрежения (ВР–ТР–ВР). Однако конфигурации 2 и 3 могут быть получены друг из друга зеркальным отражением начальных условий относительно плоскости разрыва  $x = 0$ . Поэтому можно считать, что независимых конфигураций всего три. Конфигурацию с волной разрежения и ударной волной назовем конфигурацией «А», конфигурацию с двумя ударными волнами — «Б», а конфигурацию с двумя волнами разрежения — «В». Схематически эти три конфигурации показаны на рис. А.10.

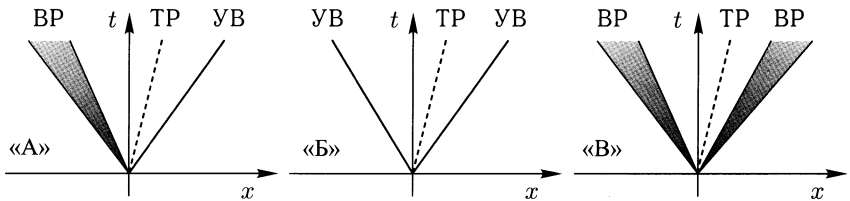


Рис. А.10. Возможные конфигурации в задаче о распаде произвольного газодинамического разрыва. Слева–направо: конфигурация «А», конфигурация «Б», конфигурация «В».

Будем помечать величины в непосредственных областях слева и справа от тангенциального разрыва звездочкой. Например, для какой-либо величины  $q$  значение  $q_L^*$  соответствует величине слева от тангенциального разрыва, а  $q_R^*$  — справа от него. Прежде чем переходить к анализу конфигураций заметим, что тангенциальная скорость  $v_\tau$  не изменяется в волнах разрежения и в ударных волнах. Поэтому она может изменяться только на тангенциальном разрыве. Следовательно, можно сразу написать  $v_{\tau,L}^* = v_{\tau,L}$ ,  $v_{\tau,R}^* = v_{\tau,R}$ .

Проанализируем конфигурацию «А». Будем для определенности считать, что  $P_L > P_R$ . Тогда волна разрежения будет распространяться в сторону левого газа, а ударная волна — в сторону правого газа,

как показано на левой диаграмме рис. А.10. Скорость газа за волной разрежения будет определяться формулой (А.134) в которой нужно выбрать верхний знак:

$$v_{x,L}^* = v_{x,L} - \frac{2c_L}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{P}{P_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right). \quad (\text{А.157})$$

Скорость газа за ударной волной определяется формулой (А.152), в которой нужно выбрать нижний знак:

$$v_{x,R}^* = v_{x,R} + \frac{1}{\rho_{RCR}} \frac{P - P_R}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P}{P_R} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}}. \quad (\text{А.158})$$

Приравнивая скорости слева (А.157) и справа (А.158) от тангенциального разрыва, получаем уравнение для определения давления  $P$ . Заметим, что в данном случае за волной разрежения давление должно падать, а за ударной волной — возрастать. Поэтому давление на тангенциальном разрыве  $P$  должно лежать в интервале значений между  $P_R$  и  $P_L$ ,  $P_R < P < P_L$ .

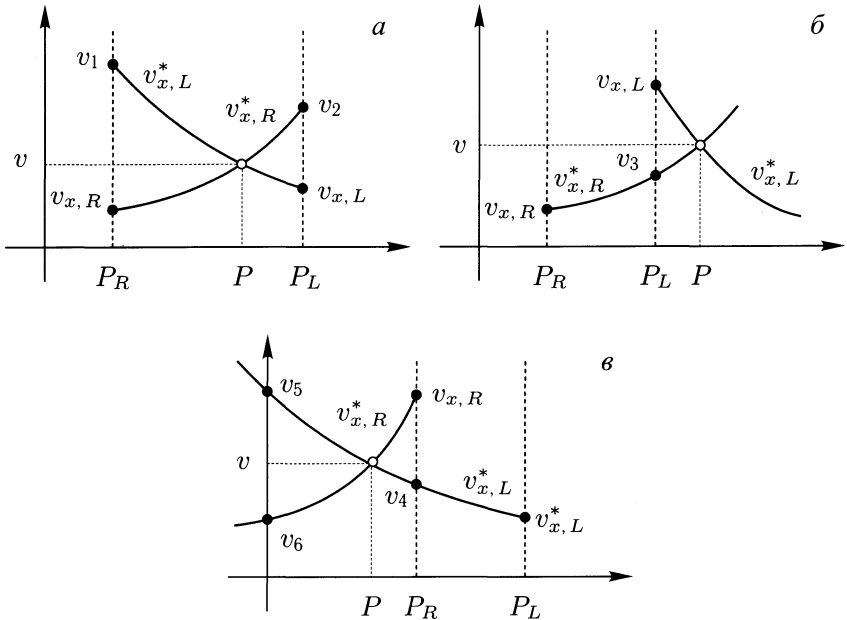


Рис. А.11. К анализу конфигураций «А» (а), «Б» (б) и «В» (в)

Схематически зависимости скоростей  $v_{x,L}^*$  и  $v_{x,R}^*$  от давления  $P$  показаны на рис. А.11 а. Функция  $v_{x,L}^*(P)$  является монотонно убыва-

ющей и в точке  $P_L$  достигает значения  $v_{x,L}$ . В точке  $P_R$  значение этой функции равно  $v_1 = v_{x,L} - v_A$ , где

$$v_A = \frac{2c_L}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{P_R}{P_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) < 0. \quad (\text{A.159})$$

Функция  $v_{x,R}^*(P)$  является монотонно возрастающей. В точке  $P_R$  она равна  $v_{x,R}$ , а в точке  $P_L$  достигает значения  $v_2 = v_{x,R} + v_B$ , где

$$v_B = \frac{1}{\rho_{RCR}} \frac{P_L - P_R}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P_L}{P_R} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}} > 0. \quad (\text{A.160})$$

Следовательно, при определенных условиях существует единственное решение уравнения  $v_{x,L}^*(P) = v_{x,R}^*(P)$ . Из графика на рис. А.11 а понятно, что эти условия имеют вид  $v_1 > v_{x,R}$ ,  $v_2 > v_{x,L}$ . Обозначив  $\Delta v = v_{x,L} - v_{x,R}$ , находим условие реализации конфигурации «А»:

$$v_A < \Delta v < v_B. \quad (\text{A.161})$$

Перейдем теперь к анализу конфигурации «Б». В этом случае имеем:

$$v_{x,L}^* = v_{x,L} - \frac{1}{\rho_{LCL}} \frac{P - P_L}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P}{P_L} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}}. \quad (\text{A.162})$$

Скорость  $v_{x,R}^*$  на правой стороне тангенциального разрыва определяется прежним выражением (А.158). В данном случае за ударными волнами давление должно возрасть. Поэтому на тангенциальном разрыве  $P$  должно быть больше  $P_L$ ,  $P > P_L$ . Качественное поведение функций  $v_{x,L}^*(P)$  и  $v_{x,R}^*(P)$  демонстрирует рис. А.11 б. Функция  $v_{x,L}^*(P)$  в точке  $P_L$  равна  $v_{x,L}$ , а затем монотонно убывает. Функция  $v_{x,R}^*(P)$  в точке  $P_R$  равна  $v_{x,R}$ , а затем монотонно возрастает. В точке  $P_L$  она достигает значения  $v_3 = v_{x,R} + v_B$ . Очевидно, что при условии  $v_3 < v_{x,L}$  существует единственное решение уравнения  $v_{x,L}^*(P) = v_{x,R}^*(P)$ . Это условие можно записать в виде:

$$\Delta v > v_B. \quad (\text{A.163})$$

Наконец, проанализируем конфигурацию «В». Поскольку давление за волнами разрежения должно падать, то в этом случае должно быть  $P < P_R$ . Скорость  $v_{x,L}^*$  определяется выражением (А.157), а

$$v_{x,R}^* = v_{x,R} - \frac{2c_R}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{P}{P_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right). \quad (\text{A.164})$$

Поведение функций  $v_{x,L}^*(P)$  и  $v_{x,R}^*(P)$  схематически показано на рис. А.11 в. Функция  $v_{x,L}^*(P)$  является монотонно убывающей и в точке  $P_L$  достигает значения  $v_{x,L}$ . В точке  $P_R$  она равна  $v_4 = v_{x,L} - v_A$ . Функция  $v_{x,R}^*(P)$  является монотонно возрастающей и достигает в точке  $P_R$  значения  $v_{x,R}$ . Из графиков видно, что при условии  $v_4 < v_{x,R}$  существует единственное решение уравнения  $v_{x,L}^*(P) = v_{x,R}^*(P)$ . Это условие можно переписать в виде

$$\Delta v < v_A. \quad (\text{A.165})$$

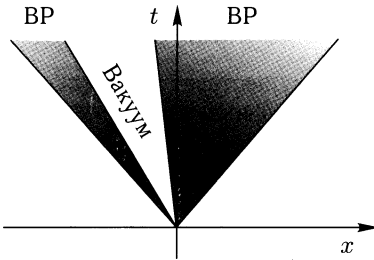


Рис. А.12. Конфигурация «В» с вакуумной областью.

Следует заметить, что может случиться так, что точка пересечения кривых  $v_{x,L}^*(P)$  и  $v_{x,R}^*(P)$  будет лежать в нефизической области отрицательных значений давления  $P$ . Этот случай соответствует отрыву газов и формированию вакуумной области между волнами разрежения. Схематически такая ситуация изображена на рис. А.12. Найдём условия формирования вакуумной области. Функция  $v_{x,L}^*(P)$  пересекает ось ординат в точке

$$v_5 = v_{x,L} + \frac{2c_L}{\gamma - 1}, \quad (\text{A.166})$$

а функция  $v_{x,R}^*(P)$  пересекает эту ось в точке

$$v_6 = v_{x,R} - \frac{2c_R}{\gamma - 1}. \quad (\text{A.167})$$

Если  $v_5 > v_6$ , то вакуумная область не формируется и решение  $P > 0$ . В противном случае при  $v_5 < v_6$  в области между волнами разрежения произойдет отрыв газов. Это условие можно записать в виде

$$\Delta v < v_C, \quad (\text{A.168})$$

где

$$v_C = -\frac{2}{\gamma - 1}(c_L + c_R) < 0. \quad (\text{A.169})$$

После того, как уравнение  $v_{x,L}^*(P) = v_{x,R}^*(P)$  решено и давление  $P$  на тангенциальном разрыве найдено, остальные величины во всех промежуточных областях течения можно восстановить с помощью выражений, приведенных выше в этом параграфе. Случай  $P_L < P_R$  получается из рассмотренного случая  $P_L > P_R$  зеркальным отражением начальных условий относительно плоскости разрыва  $x = 0$ .

Процедура решения задачи Римана для общего случая (для произвольного соотношения между  $P_L$  и  $P_R$ ) сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения для давления  $P$  на тангенциальном разрыве:

$$F(P) = f_L(P) + f_R(P) = \Delta v, \quad (\text{A.170})$$

где функции

$$f_k(P) = \frac{1}{\rho_k c_k} \frac{P - P_k}{\sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{P}{P_k} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}} \quad (\text{A.171})$$

при  $P \geq P_k$  и

$$f_k(P) = \frac{2c_k}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{P}{P_k} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right) \quad (\text{A.172})$$

при  $P < P_k$ . В этих выражениях индекс  $k$  принимает значения  $L$  или  $R$ . Можно показать [214], что функция  $F(P)$  является монотонной и выпуклой вверх:  $F' > 0$ ,  $F'' < 0$ . Поэтому для решения уравнения (A.170) можно использовать итерационный метод Ньютона:

$$P^{m+1} = P^m - \frac{f_L(P^m) + f_R(P^m) - \Delta v}{f'_L(P^m) + f'_R(P^m)}. \quad (\text{A.173})$$

Здесь индекс  $m$  обозначает номер итерации. Начальное приближение  $P^0$  для итераций нужно выбирать из условия  $F(P^0) \leq \Delta v$ . В этом случае последовательные приближения  $P^m$  монотонно возрастают и сходятся к корню уравнения (A.170) снизу.

Одним из возможных вариантов выбора начального приближения является значение давления из решения задачи о распаде разрыва в акустическом приближении. Это выражение можно определить из линеаризованного уравнения (A.170):

$$P^0 = \frac{\rho_R c_R P_L + \rho_L c_L P_R + \Delta v \rho_L \rho_R c_L c_R}{\rho_L c_L + \rho_R c_R}. \quad (\text{A.174})$$

Можно показать, что это значение удовлетворяет упомянутому выше условию  $F(P^0) \leq \Delta v$ . Были предложены и другие варианты начального приближения. Некоторые из них обсуждаются в монографии [218]. Там же можно ознакомиться с некоторыми способами приближенного решения уравнения (A.170).

## А.4. Уравнения магнитной газодинамики

**А.4.1. Характеристические свойства.** В гл. 4 из кинетических уравнений для многокомпонентной плазмы были получены уравнения магнитной газодинамики. Система уравнений идеальной магнитной газодинамики состоит из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (\text{A.175})$$



уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}}{4\pi\rho} + \mathbf{f}, \quad (\text{A.176})$$

уравнения индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.177})$$

и уравнения адиабатичности

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0. \quad (\text{A.178})$$

Здесь вектор  $\mathbf{B}$  описывает индукцию магнитного поля. По сравнению со случаем чистой газодинамики (см. уравнения (A.105)–(A.107)) в системе уравнений магнитной газодинамики появляется дополнительное уравнение индукции (A.177), описывающее эволюцию магнитного поля, а в уравнении движения (A.176) учитывается электромагнитная сила. Нетрудно проверить, что ее можно представить в виде

$$-\frac{\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}}{4\pi\rho} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{4\pi\rho}. \quad (\text{A.179})$$

Здесь первое слагаемое в правой части связано с градиентом магнитного давления  $\mathbf{B}^2/(8\pi)$ , а второе слагаемое связано с магнитным натяжением  $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}/(4\pi)$ .

Для замыкания системы уравнений (A.175)–(A.178), как и в случае газодинамики, необходимо использовать уравнение состояния  $P = P(\rho, s)$ , описывающее термодинамические свойства вещества. Отметим также, что вместо уравнения адиабатичности (A.178) можно использовать уравнение энергии

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varepsilon + \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.180})$$

Более того, для анализа обобщенных решений уравнений магнитной газодинамики использование этого уравнения является необходимым.

Уравнение движения (A.176) может быть записано в консервативной форме, выражающей закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P_{\Gamma} \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{4\pi} \right) = \rho \mathbf{f}, \quad (\text{A.181})$$

где полное давление

$$P_{\Gamma} = P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \quad (\text{A.182})$$

представляет собой сумму газового и магнитного давлений. Уравнение энергии в консервативной форме выражает закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial e_{\Gamma}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \mathbf{v} (e_{\Gamma} + P_{\Gamma}) - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{4\pi} \right] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}, \quad (\text{A.183})$$

где плотность полной энергии газа

$$\epsilon_T = \rho \left( \epsilon + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{B^2}{8\pi} \quad (\text{A.184})$$

включает внутреннюю и кинетическую энергию газа, а также энергию магнитного поля.

Для анализа характеристических свойств рассмотрим случай плоского течения в отсутствие внешних сил. Тогда уравнения магнитной газодинамики (A.175)–(A.178) примут вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.185})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{B_y}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{B_z}{4\pi\rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.186})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.187})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.188})$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.189})$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + B_y \frac{\partial v_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.190})$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_z \frac{\partial v_x}{\partial x} - B_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.191})$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.192})$$

Из уравнения для  $B_x$  следует, что  $B_x$  остается постоянной во времени. Кроме того, уравнение  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  в случае плоской симметрии сводится к уравнению  $\partial B_x / \partial x = 0$ . Следовательно, компонента поля  $B_x$  остается постоянной и в пространстве. Таким образом, величину  $B_x$ , фактически, можно рассматривать как параметр течения.

Вводя вектор переменных (без  $B_x$ )

$$\mathbf{q} = (\rho, v_x, v_y, v_z, B_y, B_z, s)^T, \quad (\text{A.193})$$

перепишем систему уравнений (A.185)–(A.192) в более компактном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathcal{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.194})$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_s^2 & v_x & 0 & 0 & \frac{B_y}{4\pi\rho} & \frac{B_z}{4\pi\rho} & \frac{P'_s}{\rho} \\ \rho & & & & & & \\ 0 & 0 & v_x & 0 & -\frac{B_x}{4\pi\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_x & 0 & -\frac{B_x}{4\pi\rho} & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & v_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_x \end{pmatrix}. \quad (\text{A.195})$$

Собственные значения этой матрицы имеют вид

$$\lambda_E = v_x, \quad \lambda_{\mp A} = v_x \mp u_A, \quad \lambda_{\mp S} = v_x \mp u_S, \quad \lambda_{\mp F} = v_x \mp u_F, \quad (\text{A.196})$$

где индексы  $E$ ,  $A$ ,  $S$  и  $F$  соответствуют энтропийной, альфвеновской, медленной и быстрой характеристикам. Характеристические скорости

$$u_A = \frac{|B_x|}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad u_{S,F} = \left\{ \frac{1}{2} \left[ c_s^2 + \mathbf{a}^2 \mp \sqrt{(c_s^2 + \mathbf{a}^2) - 4c_s^2 u_A^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.197})$$

где  $\mathbf{a} = \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}$ , описывают распространение альфвеновских, а также медленных и быстрых магнитозвуковых возмущений.

В общем случае имеют место неравенства

$$\lambda_{-F} < \lambda_{-A} < \lambda_{-S} < \lambda_E < \lambda_{+S} < \lambda_{+A} < \lambda_{+F}, \quad (\text{A.198})$$

и, следовательно, система уравнений (A.194) является строго гиперболической. Однако в частных случаях строгие неравенства (A.198) могут нарушаться. Обозначим тангенциальное магнитное поле  $\mathbf{B}_\tau = (0, B_y, B_z)$ . Если магнитное поле имеет только поперечную компоненту:  $B_x = 0$ ,  $\mathbf{B}_\tau \neq 0$ , то  $u_A = 0$  и

$$\lambda_E = \lambda_{\mp A} = \lambda_{\mp S} = v_x, \quad \lambda_{\mp F} = v_x \mp \sqrt{c_s^2 + \mathbf{a}_\tau^2}. \quad (\text{A.199})$$

Поэтому в этом случае альфвеновские и медленные магнитозвуковые характеристики сливаются с энтропийной характеристикой. Рассмотрим теперь случай, когда магнитное поле имеет только продольную компоненту:  $B_x \neq 0$ ,  $\mathbf{B}_\tau = 0$ . В этом случае  $\mathbf{a}^2 = u_A^2$  и, следовательно,

$$u_S = \min\{c_s, u_A\}, \quad u_F = \max\{c_s, u_A\}. \quad (\text{A.200})$$

Отсюда находим, что если  $c_s > u_A$ , то  $u_A = u_S$ , а если  $c_s < u_A$ , то  $u_A = u_F$ . Таким образом, альфвеновские характеристики в первом случае сливаются с медленными магнитозвуковыми характеристиками,

а во втором случае — с быстрыми магнитозвуковыми характеристиками. Этот случай вырождения соответствует так называемой двойной точке. Наконец, если при этом  $u_A = c_s$ , то  $c_s = u_A = u_S = u_F$  и альфвеновские, медленные и быстрые характеристики сливаются в одну шестикратно вырожденную характеристику. Этот случай соответствует тройной точке.

Непосредственными вычислениями нетрудно проверить, что энтропийная и альфвеновские характеристики являются линейно вырожденными:

$$\frac{\partial \lambda_E}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}_E \equiv 0, \quad \frac{\partial \lambda_{\mp A}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}_{\mp A} \equiv 0. \quad (\text{A.201})$$

Для магнитозвуковых характеристик

$$\frac{\partial \lambda_{\mp F}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}_{\mp F} \neq 0, \quad \frac{\partial \lambda_{\mp S}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}_{\mp S} \neq 0 \quad (\text{A.202})$$

при условии  $\mathbf{B}_\tau \neq 0$ . В случае  $\mathbf{B}_\tau = 0$  быстрые и медленные магнитозвуковые характеристики вырождаются в двойной точке при условиях (для идеального газа)

$$u_A = \sqrt{6\gamma} c_s, \quad u_A = \sqrt{\frac{2\gamma}{3}} c_s \quad (\text{A.203})$$

соответственно. Таким образом, система уравнений магнитной газодинамики является невыпуклой. Эта особенность приводит к существенному усложнению решения задачи Римана о распаде произвольного МГД-разрыва.

**А.4.2. Сильные разрывы.** Уравнения магнитной газодинамики в случае плоского течения (А.185)–(А.192) могут быть записаны в консервативной форме. Не выписывая явно эти уравнения (см. (А.175), (А.181), (А.177), (А.183)), запишем сразу систему условий Гюгионо (А.45):

$$D[\rho] = [\rho v_x], \quad (\text{A.204})$$

$$D[\rho v_x] = \left[ \rho v_x^2 + P_\Gamma - \frac{B_x^2}{4\pi} \right], \quad (\text{A.205})$$

$$D[\rho v_y] = \left[ \rho v_x v_y - \frac{B_x B_y}{4\pi} \right], \quad (\text{A.206})$$

$$D[\rho v_z] = \left[ \rho v_x v_z - \frac{B_x B_z}{4\pi} \right], \quad (\text{A.207})$$

$$D[B_x] = 0, \quad (\text{A.208})$$

$$D[B_y] = [v_x B_y - v_y B_x], \quad (\text{A.209})$$

$$D[B_z] = [v_x B_z - v_z B_x], \quad (\text{A.210})$$

$$D[e_T] = \left[ (e_T + P_T) v_x - \frac{B_x}{4\pi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right], \quad (\text{A.211})$$

где  $P_T$  — полное давление (см. (A.182)), а  $e_T$  — плотность полной энергии (см. (A.184)). Перейдем в систему отсчета, локально связанную с сильным разрывом. Скорость газа в этой системе отсчета определяется выражениями

$$v_n = v_x - D, \quad \mathbf{v}_\tau = (0, v_y, v_z). \quad (\text{A.212})$$

Кроме того, введем обозначения для нормальной и тангенциальной компонент магнитного поля:

$$B_n = B_x, \quad \mathbf{B}_\tau = (0, B_y, B_z). \quad (\text{A.213})$$

В результате система условий Гюгионо принимает следующий вид:

$$[\rho v_n] = 0, \quad (\text{A.214})$$

$$\left[ \rho v_n^2 + P + \frac{1}{8\pi} (B_\tau^2 - B_n^2) \right] = 0, \quad (\text{A.215})$$

$$\left[ \rho v_n \mathbf{v}_\tau - \frac{B_n}{4\pi} \mathbf{B}_\tau \right] = 0, \quad (\text{A.216})$$

$$[B_n] = 0, \quad [v_n \mathbf{B}_\tau - \mathbf{v}_\tau B_n] = 0, \quad (\text{A.217})$$

$$\left[ \rho v_n \left( w + \frac{v^2}{2} \right) + v_n \frac{B_\tau^2}{4\pi} - \frac{B_n}{4\pi} (\mathbf{v}_\tau \cdot \mathbf{B}_\tau) \right] = 0, \quad (\text{A.218})$$

где  $w = \varepsilon + P/\rho$  — тепловая функция (энтальпия) газа, приходящаяся на единицу массы.

Из этих соотношений видно, что при переходе через скачок остаются непрерывными нормальная компонента магнитного поля  $B_n$  и поток массы  $j = \rho v_n$ :

$$[B_n] = 0, \quad [j] = 0. \quad (\text{A.219})$$

Обозначим через  $V = 1/\rho$  удельный объем газа, т. е. объем, приходящийся на единицу массы. В результате получаем:

$$[P] + j^2 [V] + \frac{1}{8\pi} [B_\tau^2] = 0, \quad (\text{A.220})$$

$$j[w] + \frac{j^3}{2} [V^2] + \frac{j}{2} [v_\tau^2] + \frac{j}{4\pi} [V B_\tau^2] = \frac{B_n}{4\pi} [\mathbf{v}_\tau \cdot \mathbf{B}_\tau], \quad (\text{A.221})$$

$$j[V \mathbf{B}_\tau] = B_n [\mathbf{v}_\tau], \quad j[\mathbf{v}_\tau] = \frac{B_n}{4\pi} [\mathbf{B}_\tau]. \quad (\text{A.222})$$

В газовой динамике (в случае  $\mathbf{B} = 0$ ) существует два типа разрывов: тангенциальные разрывы и ударные волны. Это связано с тем, что уравнения Гюгионо (A.141) и (A.142) представляются в виде

произведения двух сомножителей. Равенство нулю этого произведения приводит к двум видам разрывов. В магнитной газодинамике уравнения Гюгионо не имеют такого вида, но тем не менее и здесь можно выделить определенные типы разрывов, не сводящиеся друг к другу.

Рассмотрим случай, когда через скачок разрыва нет потока массы:  $j = 0$ . Поскольку плотность  $\rho \neq 0$ , то это означает, что скорости жидкости  $v_{n,1} = v_{n,2} = 0$ . В результате приходим к следующей системе уравнений Гюгионо:

$$[P] + \frac{1}{8\pi}[B_\tau^2] = 0, \quad (\text{A.223})$$

$$\frac{B_n}{4\pi}[\mathbf{v}_\tau \cdot \mathbf{B}_\tau] = 0, \quad (\text{A.224})$$

$$B_n[\mathbf{v}_\tau] = 0, \quad \frac{B_n}{4\pi}[\mathbf{B}_\tau] = 0. \quad (\text{A.225})$$

Здесь возможны два случая.

1) Имеется ненулевая нормальная компонента магнитного поля:  $B_n \neq 0$ . Тогда получаем:

$$[\mathbf{B}_\tau] = 0, \quad [\mathbf{v}_\tau] = 0, \quad [P] = 0, \quad [\rho] \neq 0. \quad (\text{A.226})$$

Такой разрыв представляет собой границу раздела между двумя неподвижными средами с различными плотностями и температурами. Поэтому его можно по аналогии с газодинамикой назвать *контактным разрывом*.

2) Нормальная компонента магнитного поля отсутствует:  $B_n = 0$ . Получаем:

$$[\mathbf{v}_\tau] \neq 0, \quad [\mathbf{B}_\tau] \neq 0, \quad [\rho] \neq 0, \quad \left[ P + \frac{B_\tau^2}{8\pi} \right] = 0. \quad (\text{A.227})$$

В этом разрыве испытывают скачки касательная компонента скорости и магнитного поля. Скачок давления связан со скачком касательной компоненты магнитного поля. Скачок плотности является произвольным. Такой разрыв по аналогии с газодинамикой можно назвать *тангенциальным разрывом*.

Рассмотрим теперь случай разрывов, в которых присутствует поток массы  $j \neq 0$ . Среди них особое место занимают разрывы, в которых плотность не испытывает скачок:  $[V] = 0$ . Из условия  $[j] = 0$  получаем, что при этом должно быть  $[v_n] = 0$ . Система условий Гюгионо примет вид

$$[P] + \frac{1}{8\pi}[B_\tau^2] = 0, \quad (\text{A.228})$$

$$j[w] + \frac{j^2}{2}[v_\tau^2] + \frac{jV}{4\pi}[B_\tau^2] = \frac{B_n}{4\pi}[\mathbf{v}_\tau \cdot \mathbf{B}_\tau], \quad (\text{A.229})$$

$$jV[\mathbf{B}_\tau] = B_n[\mathbf{v}_\tau], \quad (\text{A.230})$$

$$j[\mathbf{v}_\tau] = \frac{B_n}{4\pi} [\mathbf{B}_\tau]. \quad (\text{A.231})$$

Последние два уравнения не противоречат друг другу при выполнении следующего условия:  $j = B_n/\sqrt{4\pi V}$ . С учетом этого соотношения получаем

$$[\mathbf{v}_\tau] = \sqrt{\frac{V}{4\pi}} [\mathbf{B}_\tau]. \quad (\text{A.232})$$

Второе уравнение с учетом первого дает

$$j[\varepsilon] + \frac{j}{2} \left[ \left( \mathbf{v}_\tau - \sqrt{\frac{V}{4\pi}} \mathbf{B}_\tau \right)^2 \right] = 0. \quad (\text{A.233})$$

Поскольку имеет место связь (A.232), мы заключаем, что внутренняя энергия на скачке должна быть непрерывной:  $[\varepsilon] = 0$ . С учетом непрерывности плотности должно выполняться и условие непрерывности давления:  $[P] = 0$ . Последнее означает, что должно выполняться условие  $[B_\tau^2] = 0$ . Кроме того, в силу  $[B_n] = 0$  непрерывной должна оставаться абсолютная величина магнитного поля  $[B] = 0$ , а также угол между вектором магнитного поля  $\mathbf{B}$  и вектором нормали к поверхности разрыва. Таким образом, в рассматриваемом типе разрывов вектор магнитного поля при переходе через поверхность разрыва поворачивается вокруг вектора нормали, образуя с ним определенный фиксированный угол. Все термодинамические величины при переходе через разрыв остаются непрерывными. Скачок испытывают только касательные компоненты магнитного поля  $\mathbf{B}_\tau$  и скорости  $\mathbf{v}_\tau$ , причем скачки этих величин связаны соотношением (A.232). Нормальные компоненты магнитного поля и скорости остаются непрерывными при переходе через скачок, при этом они связаны соотношением

$$v_n = \sqrt{\frac{V}{4\pi}} B_n = \frac{B_n}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (\text{A.234})$$

Рассматриваемый разрыв является предельным случаем альфвеновской волны, когда ее профиль определяется сильным разрывом величин  $\mathbf{B}_\tau$  и  $\mathbf{v}_\tau$ . Поэтому такие разрывы получили название *альфвеновских*, или *вращательных*, разрывов. Они распространяются по газу с альфвеновскими скоростями  $u_A = B_n/\sqrt{4\pi\rho}$ , как и альфвеновские волны.

Рассмотрим, наконец, разрывы, в которых  $j \neq 0$ ,  $[V] \neq 0$ . По аналогии с газодинамикой их называют *ударными волнами*. Таким образом, как и в газодинамике, ударные МГД-волны характеризуются тем, что в них имеется скачок плотности и газ течет сквозь них.

Проанализируем вначале случай, когда имеется нормальная компонента магнитного поля  $B_n \neq 0$ . При этом из уравнений (A.221) и (A.222) получаем, что векторы  $[\mathbf{B}_\tau]$  и  $[V\mathbf{B}_\tau]$  коллинеарны вектору  $[\mathbf{v}_\tau]$ , а следовательно, коллинеарны друг другу. Это означает, что

коллинеарны векторы  $\mathbf{B}_{\tau,1}$  и  $\mathbf{B}_{\tau,2}$ . Таким образом, в противоположность тангенциальным и альфвеновским разрывам в ударных волнах векторы  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  и вектор нормали к поверхности разрыва лежат в одной плоскости. В случае же отсутствия нормальной компоненты поля  $B_n = 0$  сразу получаем, что  $V_1 \mathbf{B}_{\tau,1} = V_2 \mathbf{B}_{\tau,2}$  и, следовательно, все выводы остаются в силе. С другой стороны, вектор  $[\mathbf{v}_\tau]$  параллелен векторам  $\mathbf{B}_{\tau,1}$  и  $\mathbf{B}_{\tau,2}$ . Значит, сами скорости  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  также можно считать лежащими в плоскости, построенной на векторе  $\mathbf{B}$  и нормали к плоскости разрыва.

Уравнения Гюгонио, определяющие скачки величин на ударных МГД-волнах, можно записать в следующем виде:

$$j^2[V\mathbf{B}_\tau] = \frac{B_n^2}{4\pi}[\mathbf{B}_\tau], \quad (\text{A.235})$$

$$j^2[V] + [P] + \frac{1}{8\pi}[B_\tau^2] = 0, \quad (\text{A.236})$$

$$[\varepsilon] + \frac{1}{2}(P_2 + P_1)[V] + \frac{1}{16\pi}[V][B_\tau]^2 = 0, \quad (\text{A.237})$$

$$[\mathbf{v}_\tau] = \frac{B_n}{4\pi j}[\mathbf{B}_\tau]. \quad (\text{A.238})$$

Уравнение (A.237) играет роль *ударной адиабаты* и отличается от своего газодинамического аналога (A.147) наличием третьего члена.

Рассмотрим случай так называемой *нормальной* ударной волны, когда  $B_n = 0$ . Для таких ударных волн выполняется условие  $[\mathbf{v}_\tau] = 0$ . Выбором соответствующей системы отсчета можно добиться, чтобы было  $\mathbf{v}_\tau = 0$ . Поэтому в такой системе отсчета газ будет двигаться перпендикулярно разрыву. Обозначим общее значение  $V_2 B_2 = V_1 B_1 = b$ . Тогда оставшиеся два уравнения для нормальной ударной волны могут быть переписаны в виде

$$j^2 = \frac{P_2^* - P_1^*}{V_1 - V_2}, \quad \varepsilon_2^* - \varepsilon_1^* + \frac{1}{2}(P_2^* + P_1^*)(V_2 - V_1) = 0, \quad (\text{A.239})$$

где

$$P^* = P + \frac{b^2}{8\pi V^2}, \quad \varepsilon^* = \varepsilon + \frac{b^2}{8\pi V}. \quad (\text{A.240})$$

В магнитной газодинамике справедлив аналог теоремы Цемплена, согласно которой в ударной волне давление и плотность увеличиваются:  $P_2 > P_1$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ . Эти соотношения являются следствиями закона возрастания энтропии газа при переходе через ударный скачок. В обычной газодинамике для их выполнения достаточно неравенства  $(\partial^2 V / \partial P^2)_s > 0$ , которое в идеальном политропном газе выполняется автоматически. В магнитной газодинамике для выполнения условия возрастания энтропии одного этого неравенства, вообще говоря, недостаточно. Это справедливо лишь для ударных волн слабой



интенсивности. В общем случае необходимо потребовать выполнения еще одного неравенства:  $(\partial V/\partial T)_P > 0$ , которое в случае идеального политропного газа также выполняется автоматически. Следовательно, в магнитной газодинамике, так же, как и в обычной газодинамике, существуют лишь ударные волны сжатия, ударных волн разрежения не существует.

Однако даже ударные волны сжатия могут оказаться неустойчивыми по отношению к распаду на два или несколько разрывов. Реальный скачок должен быть эволюционным. Напомним, что условие эволюционности сильного разрыва (например, ударной волны) означает, что любое малое возмущение начального состояния в скачке должно приводить к малым же изменениям разрыва. Это условие является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. В неэволюционных скачках первоначально малое возмущение может сразу стать большим в силу разрывного характера решения.

Для того чтобы возмущение оставалось малым, число параметров, характеризующих эти возмущения, должно быть равно числу граничных условий (линеаризованных условий Гюгонио) на поверхности разрыва. Если это условие не будет выполняться, то задача эволюции малого возмущения либо вообще не будет иметь решения, либо будет иметь бесчисленное множество решений. Такая ситуация говорит о противоречивости исходного предположения о малости первоначальных возмущений. В обычной газодинамике требование эволюционности не приводит к новым ограничениям по сравнению с условиями теоремы Цемплена. В магнитной газодинамике это уже не так. Из требования эволюционности ударных МГД-волн следует вывод о существовании двух типов ударных волн в магнитной газодинамике. Быстрые ударные МГД-волны удовлетворяют условиям

$$v_{n,1} > u_{F,1}, \quad u_{F,2} > v_{n,2} > u_{A,2}. \quad (\text{A.241})$$

Для медленных ударных МГД-волн

$$u_{A,2} > v_{n,1} > u_{S,1}, \quad u_{S,2} > v_{n,2}. \quad (\text{A.242})$$

Эти условия эволюционности приводят к определенному характеру изменения магнитного поля в ударной МГД-волне. Используя равенство

$$\frac{B_n^2}{4\pi j^2} [\mathbf{B}_\tau] = [V \mathbf{B}_\tau], \quad (\text{A.243})$$

перепишем его в виде

$$\left( \frac{B_n^2}{4\pi j^2} - v_{n,1} \right) \mathbf{B}_{\tau,1} = \left( \frac{B_n^2}{4\pi j^2} - v_{n,2} \right) \mathbf{B}_{\tau,2}. \quad (\text{A.244})$$

С учетом условий эволюционности можно убедиться, что коэффициенты при  $\mathbf{B}_\tau$  в данном соотношении имеют одинаковые знаки.

Это означает, что векторы  $B_{\tau,1}$  и  $B_{\tau,2}$  не только коллинеарны, но и сонаправлены. Поэтому в настоящей формуле вместо векторов можно указывать их абсолютные величины.

В медленной ударной волне

$$v_n < u_A < \frac{u_A^2}{v_n} = \frac{B_n^2}{4\pi j}. \quad (\text{A.245})$$

С другой стороны, из условия  $\rho_1 v_{n,1} = \rho_2 v_{n,2}$  и из неравенства  $\rho_1 < \rho_2$  следует, что  $v_{n,1} > v_{n,2}$ . Это, в свою очередь, означает, что

$$\frac{B_n^2}{4\pi j} - v_{n,1} < \frac{B_n^2}{4\pi j} - v_{n,2}. \quad (\text{A.246})$$

Отсюда и в силу (А.243) получаем, что  $B_{\tau,1} > B_{\tau,2}$ . Таким образом, в медленной ударной МГД-волне тангенциальное магнитное поле ослабляется. Аналогично, проводя рассуждения для быстрой ударной МГД-волны, заключаем, что для нее должно быть  $B_{\tau,1} < B_{\tau,2}$ . Таким образом, в быстрых ударных МГД-волнах тангенциальное магнитное поле усиливается.

## Приложение Б

### ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ

Везде в книге перенос излучения учитывался приближенно. Однако можно и, в принципе, технически несложно учесть в численных моделях и полную систему уравнений. Но к сожалению современный уровень развития вычислительной техники не позволяет пока использовать такие численные модели в реальных расчетах. Поэтому в данном приложении мы приводим различные приближенные подходы учета излучения.

#### Б.1. Уравнение переноса

**Б.1.1. Особенности учета излучения при моделировании астрофизических течений.** Теория переноса излучения создавалась и развивалась как инструмент для понимания процессов, происходящих в звездах, а также для объяснения их наблюдаемого свечения (см., например, [565, 566]). Однако в настоящее время элементы этой теории широко используются для моделирования самых разных астрофизических объектов. Это обусловлено тем, что в движущемся газе постоянно происходит излучение и поглощение энергии. Помимо этого, вещество может находиться в поле излучения внешних источников. Эти процессы приводят к превращению энергии излучения в тепловую энергию газа и наоборот. Излучение обладает давлением, которое может создавать дополнительную силу, влияющую на характер движения вещества. В свою очередь, распределения плотности и скорости вещества определяют процессы поглощения и теплового излучения в нем, что влияет на процесс лучистого переноса. В результате при взаимодействии вещества и излучения возникает сложная картина течения, которая может быть описана на основе самосогласованной системы уравнений, включающей уравнение переноса излучения и уравнений движения вещества. Такой синтез газовой динамики и теории переноса излучения называется радиационной газовой динамикой. С некоторыми проблемами и задачами радиационной газодинамики можно ознакомиться, например, в книгах [567–569].

Следует заметить, что энергия и давление теплового излучения становятся сравнимыми с энергией и давлением вещества только при достаточно высоких температурах и достаточно низких плотностях. Поэтому, как правило, более существенную роль играют процессы

потери энергии за счет высвечивания и лучистый теплообмен. Эти эффекты по разному проявляют себя в оптически тонкой и оптически толстой средах. Кроме того, на них большое влияние оказывает характер движения вещества. Дело в том, что в движущейся среде из-за эффекта Доплера происходит смещение частот, в результате чего в поле излучения возникает дополнительная анизотропия.

Решение уравнений радиационной газодинамики в общем случае связано с большими математическими трудностями. Причина этих трудностей кроется в том, что помимо самих величин, описывающих поле излучения, в эти уравнения входят интегральные величины, проинтегрированные по частотам и/или направлениям. В результате система уравнений радиационной газодинамики является интегро-дифференциальной. Кроме того, для расчета коэффициентов непрозрачности и излучения необходимо вычислять распределение атомов и молекул по уровням возбуждения, а также степени ионизации для всех типов ионов. Эта задача является достаточно сложной даже для случая неподвижной среды. В связи с этим в вычислительной радиационной газодинамике важное место отводится вопросам разработки различных методов приближенного учета излучения.

Для анализа влияния излучения на движение вещества полезно провести сравнение характерных безразмерных чисел (см. статью Михаласа в [569]). Обозначим характерный пространственный масштаб течения через  $L$ , характерную скорость движения вещества через  $v$ , а характерную длину свободного пробега фотонов через  $l$ . Тогда безразмерная величина  $\beta = v/c$  характеризует влияние релятивистских эффектов, а степень оптической прозрачности среды характеризует оптическая толщина  $\tau = L/l$ . В наиболее простом случае оптически тонкой среды, когда  $\tau \ll 1$ , собственная энергия вещества эффективно высвечивается и можно использовать приближение изотермической газодинамики. Если имеются источники внешнего излучения, то их влияние можно учесть с помощью функций радиационного нагрева и охлаждения (см. раздел Б.2.1). В противоположном пределе оптически толстой среды, когда  $\tau \gg 1$ , перенос излучения можно описывать в диффузионном приближении. При этом удобно выделить два частных предельных случая, когда  $\beta\tau \ll 1$  и  $\beta\tau \gg 1$ . В первом случае статической диффузии движение вещества не оказывает никакого влияния на перенос излучения. Во втором случае на процесс переноса излучения существенное влияние будет оказывать движение вещества, что проявляется в появлении дополнительных членов в уравнении, которое описывает диффузию излучения. Эти приближения обсуждаются ниже в разделах Б.2.2 и Б.3.4. Наиболее сложным является промежуточный случай, когда оптическая толщина  $\tau$  не является ни малой, ни большой. При моделировании таких течений для расчета поля излучения могут оказаться полезными более сложные приближения, такие например, как приближение диффузии с ограниченным потоком (см. раздел Б.2.5).

При моделировании переноса излучения в континууме обычно можно использовать так называемое приближение локального термодинамического равновесия (ЛТР), которое обсуждается ниже в разделе Б.1.4. Использование приближения ЛТР приводит к существенному упрощению задачи. С другой стороны, перенос излучения в линиях, как правило, в рамках приближения ЛТР описывается неточно. Это главным образом связано с тем, что очень часто формирование спектральных линий происходит в тех областях течения, где возбуждение атомов и молекул вызывается в основном не столкновениями, а излучением [565]. Моделирование переноса излучения при отказе от приближения ЛТР существенно усложняет задачу [570]. Вместе с тем, перенос излучения в линиях может приводить к динамическим эффектам, влияющим на движение вещества. Например, основным механизмом формирования звездного ветра у горячих звезд считается ускорение вещества, вызванного наличием градиента давления излучения в линиях. При моделировании таких задач часто используется приближение Соболева, описанное в разделе Б.2.6. В основе этого подхода лежит следующая идея. Движение вещества в расширяющейся оболочке звезды создает градиент проекции скорости на направление распространения излучения. Поэтому из-за сильной зависимости коэффициента поглощения в линии от частоты доплеровские смещения должны сильно изменять длины свободных пробегов фотонов. Пролетев некоторое расстояние, фотон смещается по частоте за пределы линии и теряет способность возбуждать атомы. В результате в случае сильного градиента скорости, удаленные объемы практически не взаимодействуют друг с другом за счет обмена фотонами в линиях. Это приводит к существенному упрощению задачи и позволяет рассчитать населенности уровней атомов и молекул в газе в условиях, весьма далеких от ЛТР, когда вклад радиативных возбуждений собственным излучением среды является определяющим.

**Б.1.2. Основные понятия теории излучения.** Отдельный фотон характеризуется частотой  $\nu$  и направлением распространения, которое определяется единичным вектором  $\mathbf{n}$ . Энергия и импульс фотона соответственно равны  $h\nu$  и  $\mathbf{p} = h\nu\mathbf{n}/c$ , где  $h$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света. Поле излучения можно характеризовать функцией распределения квантов  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ . По определению, величина  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{p}$  равна числу квантов в момент времени  $t$  в бесконечно малом объеме  $d\mathbf{r}$ , построенном вокруг точки  $\mathbf{r}$ , обладающих импульсами в заданном интервале  $d\mathbf{p}$  в окрестности значения  $\mathbf{p}$ .

Вместо функции  $f$ , которая определяет распределение фотонов по импульсам, можно использовать функцию  $f_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ , определяющую распределения фотонов по частотам и направлениям распространения. По определению, величина  $f_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)d\mathbf{r}d\nu d\Omega$  представляет собой число фотонов в момент времени  $t$  в объеме  $d\mathbf{r}$  в частотном интервале от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , направления распространения которых лежат

в бесконечно малом телесном угле  $d\Omega$ , построенном вокруг вектора  $\mathbf{n}$ . Используя очевидное соотношение

$$d\mathbf{p} = p^2 dp d\Omega = \frac{h^3 \nu^2}{c^3} d\nu d\Omega, \quad (\text{Б.1})$$

легко найти связь между этими функциями:

$$f_\nu = \frac{h^3 \nu^2}{c^3} f. \quad (\text{Б.2})$$

Функция  $f$  является в известном смысле более фундаментальной величиной по сравнению с функцией  $f_\nu$ . Действительно, поскольку фазовый объем  $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$  и число квантов  $f d\mathbf{r}d\mathbf{p}$  являются релятивистскими инвариантами [476], то сама функция распределения  $f$  также является релятивистским инвариантом. В случае функции  $f_\nu$  число частиц  $f_\nu d\mathbf{r}d\nu d\Omega$ , очевидно, является релятивистским инвариантом, но элемент  $d\mathbf{r}d\nu d\Omega$  и сама функция  $f_\nu$  по отдельности инвариантами не являются. Из (Б.2) следует, что инвариантом является комбинация  $f_\nu/\nu^2$ .

Величина

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) d\nu d\Omega = h\nu c f_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) d\nu d\Omega \quad (\text{Б.3})$$

представляет собой количество энергии излучения в спектральном интервале  $d\nu$ , протекающей в единицу времени через единичную площадку в точке  $\mathbf{r}$ , перпендикулярную направлению  $\mathbf{n}$ , в элементе телесного угла  $d\Omega$ . Функция

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = h\nu c f_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) \quad (\text{Б.4})$$

называется *спектральной интенсивностью* излучения. В силу сказанного выше эта величина не является релятивистским инвариантом, поскольку не является инвариантом правая часть (Б.4). Однако из (Б.4) и (Б.2) следует, что комбинация  $I_\nu/\nu^3$  является релятивистским инвариантом.

Введем дополнительные величины, описывающие поле излучения (см. например, [565, 566]). *Средняя интенсивность* определяется как усредненная по всем направлениям спектральная интенсивность излучения,

$$J_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu d\Omega, \quad (\text{Б.5})$$

где интегрирование в правой части производится по всем телесным углам. Величина  $J_\nu$  является моментом нулевого порядка от спектральной интенсивности  $I_\nu$ . *Плотность энергии* излучения

$$\mathcal{E}_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \oint I_\nu d\Omega = \frac{4\pi J_\nu(\mathbf{r}, t)}{c}. \quad (\text{Б.6})$$

Плотность потока излучения

$$\mathcal{F}_\nu(\mathbf{r}, t) = \oint I_\nu \mathbf{n} d\Omega \quad (\text{Б.7})$$

представляет собой момент первого порядка от спектральной интенсивности  $I_\nu$  по угловой переменной. Наконец, тензор давления излучения

$$\widehat{\mathcal{P}}_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \oint I_\nu \mathbf{n} \mathbf{n} d\Omega \quad (\text{Б.8})$$

выражается через момент второго порядка. Из (Б.6) и (Б.8), в частности следует, что тензор давления излучения является симметричным, а его след

$$\text{Tr } \widehat{\mathcal{P}}_\nu = \frac{1}{3} \mathcal{E}_\nu. \quad (\text{Б.9})$$

Кроме того, удобно ввести интегральные величины, которые определяются через интегралы по всем частотам. Полная (интегральная) интенсивность

$$I(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty J_\nu d\nu, \quad (\text{Б.10})$$

энергия излучения

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \mathcal{E}_\nu d\nu = \frac{I(\mathbf{r}, t)}{c}, \quad (\text{Б.11})$$

полный поток излучения

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu \quad (\text{Б.12})$$

и полный тензор давления излучения

$$\widehat{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \widehat{\mathcal{P}}_\nu d\nu. \quad (\text{Б.13})$$

Рассмотрим в качестве примера изотропное излучение, когда спектральная интенсивность  $I_\nu = I_\nu(\mathbf{r}, t)$  не зависит от направления  $\mathbf{n}$ . В этом случае интегралы

$$\oint d\Omega = 4\pi, \quad \oint \mathbf{n} d\Omega = 0, \quad \oint \mathbf{n} \mathbf{n} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \widehat{I}, \quad (\text{Б.14})$$

где  $\widehat{I}$  — трехмерный единичный тензор. Отсюда находим

$$J_\nu = I_\nu, \quad \mathcal{E}_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu, \quad \mathcal{F}_\nu = 0, \quad \widehat{\mathcal{P}}_\nu = \mathcal{P}_\nu \widehat{I}, \quad (\text{Б.15})$$

где давление излучения

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{4\pi}{3c} I_\nu = \frac{1}{3} \mathcal{E}_\nu. \quad (\text{Б.16})$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда все кванты распространяются в одном направлении, которое определяется вектором  $\mathbf{n}_0$ . Тогда легко видеть, что

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = 4\pi J_\nu(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0). \quad (\text{Б.17})$$

При этом поток и давление излучения определяются выражениями

$$\mathcal{F}_\nu = c \mathcal{E}_\nu \mathbf{n}_0, \quad \hat{\mathcal{P}}_\nu = \mathcal{E}_\nu \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0. \quad (\text{Б.18})$$

**Б.1.3. Вывод уравнения переноса.** Рассмотрим бесконечно малый цилиндр, построенный около точки  $\mathbf{r}$  и ориентированный своей осью вдоль вектора  $\mathbf{n}$ . Пусть площадь основания цилиндра равна  $d\sigma$ , а его длина равна  $ds$  (см. рис. Б.1). За время  $dt$  в левое основание цилиндра втекает количество энергии излучения равное  $I_\nu d\sigma dt$ . Из правого основания (за то же время вытекает количество энергии излучения равное  $(I_\nu + dI_\nu) d\sigma dt$ .

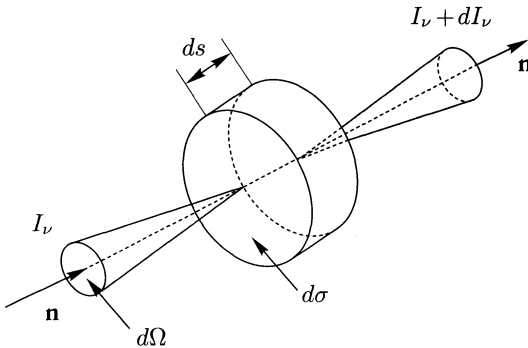


Рис. Б.1. К выводу уравнения переноса.

Интенсивность внутри цилиндра изменяется за счет процессов излучения, поглощения и рассеяния квантов. Количество излучаемой энергии за время  $dt$  равно  $\eta_\nu d\sigma ds dt$ , где  $\eta_\nu = \eta_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$  — коэффициент излучения. В общем случае коэффициент излучения описывает процессы теплового излучения и рассеяния. Процессы рассеяния приводят к перераспределению фотонов по частотам и направлениям и описываются интегральными выражениями от спектральной интенсивности  $I_\nu$ . Поэтому в общем случае уравнение переноса является интегро-дифференциальным.

Количество поглощенной и рассеянной энергии равно  $\chi_\nu I_\nu d\sigma ds dt$ , где коэффициент непрозрачности

$$\chi_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = k_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) + \sigma_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) \quad (\text{Б.19})$$



является суммой коэффициента поглощения  $k_\nu$  и коэффициента рассеяния  $\sigma_\nu$ . В коэффициенте непрозрачности  $\chi_\nu$  можно учитывать поправку на вынужденное излучение, поскольку скорость этого процесса пропорциональна интенсивности  $I_\nu$ . Следует заметить, что в общем случае коэффициенты  $k_\nu$ ,  $\sigma_\nu$  и  $\eta_\nu$  зависят от направления  $\mathbf{n}$ . Однако в неподвижной среде в отсутствие выделенных направлений, обусловленных магнитным полем, анизотропией вещества и т.п., эти коэффициенты не зависят от направления. В движущейся среде необходимо учитывать эффект Доплера, приводящий к смещению частот. Доплеровское смещение частот зависит от проекции скорости движения среды на направление распространения излучения  $\mathbf{n}$ . Поэтому в подвижной среде коэффициенты  $k_\nu$ ,  $\sigma_\nu$  и  $\eta_\nu$  зависят от направления  $\mathbf{n}$ .

Уравнение баланса энергии излучения в выделенном объеме можно записать в виде:

$$(I_\nu - dI_\nu) d\sigma dt - I_\nu d\sigma dt = (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu) d\sigma dt ds. \quad (\text{Б.20})$$

Поскольку скорость фотонов равна  $c$ , то приращение спектральной интенсивности равно

$$dI_\nu = \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \frac{ds}{c} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} ds. \quad (\text{Б.21})$$

Подставляя (Б.21) в (Б.20) и сокращая обе части на  $d\sigma dt ds$ , приходим к уравнению переноса излучения:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu. \quad (\text{Б.22})$$

Подчеркнем, что записанное в таком виде уравнение переноса справедливо в любой системе координат. В криволинейных координатах  $(X^1, X^2, X^3)$  компоненты векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$  будут изменяться при перемещении вдоль луча, поскольку при этом изменяются компоненты базисных векторов. Поэтому производная по направлению

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \frac{dX^i}{ds} \frac{\partial I_\nu}{\partial X^i} + \frac{dn^i}{ds} \frac{\partial I_\nu}{\partial n^i}. \quad (\text{Б.23})$$

Здесь, очевидно, производная  $dX^i/ds = n^i$ . В декартовых координатах компоненты  $n^i$  вектора  $\mathbf{n}$  не изменяются при движении вдоль луча. Поэтому уравнение переноса (Б.22) может быть записано в более простом виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu. \quad (\text{Б.24})$$

**Б.1.4. Локальное термодинамическое равновесие.** В условиях термодинамического равновесия каждый процесс уравновешивается противоположным ему процессом. Термодинамическое равновесие излучения характеризуется тем, что число квантов (или количество

энергии излучения), испускаемых веществом в единицу времени в единичном объеме в данном интервале частот  $d\nu$  и в данном интервале направлений  $d\Omega$ , в точности равно числу поглощаемых квантов (или количеству поглощенной энергии) в тех же интервалах частот и направлений  $d\nu$  и  $d\Omega$ . Таким образом, поле равновесного излучения изотропно, не зависит от положения, от направления и от конкретных свойств среды. Такое поле описывается некоторой универсальной функцией  $B_\nu(T)$  частоты  $\nu$  и температуры  $T$ .

Выражение для интенсивности равновесного излучения впервые было найдено Планком. Формула для функции Планка имеет вид:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (\text{Б.25})$$

где  $k$  — постоянная Больцмана. Поскольку интенсивность равновесного излучения не зависит от направления, с помощью формулы (Б.6) находим энергию равновесного излучения:

$$\mathcal{E}_\nu(T) = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T). \quad (\text{Б.26})$$

Поток равновесного излучения в любой точке равен нулю, поскольку односторонние потоки через любую площадку будут равны по модулю, но противоположны по направлению. Величину одностороннего потока равновесного излучения можно получить с помощью выражения (Б.7), в котором интегрирование проводится не по всем телесным углам, а по полусфере. В результате приходим к следующему выражению для одностороннего потока:

$$\mathcal{F}_\nu(T) = \frac{c}{4} B_\nu(T). \quad (\text{Б.27})$$

Наконец, тензор давления равновесного излучения

$$\widehat{\mathcal{P}}_\nu(T) = \mathcal{P}_\nu(T) \widehat{I}, \quad \mathcal{P}_\nu(T) = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T) = \frac{1}{3} \mathcal{E}_\nu(T). \quad (\text{Б.28})$$

Интегральная интенсивность равновесного излучения  $B(T)$  определяется интегрированием функции Планка (Б.25) по всем частотам:

$$B(T) = \frac{ac}{4\pi} T^4, \quad (\text{Б.29})$$

где коэффициент

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^2} \quad (\text{Б.30})$$

называется постоянной Стефана. Остальные интегральные величины определяются выражениями:

$$\mathcal{E}(T) = \frac{4\pi}{c} B(T) = aT^4, \quad (\text{Б.31})$$

$$\mathcal{F}(T) = \frac{c}{4} B(T) = \sigma T^4, \quad (\text{Б.32})$$

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi}{3c} B(T) = \frac{1}{3} \mathcal{E}(T) = \frac{a}{3} T^4, \quad (\text{Б.33})$$

где  $\sigma = ac/4$  — постоянная Стефана–Больцмана.

При термодинамическом равновесии интенсивность излучения не зависит от времени и от координат. Поэтому левая часть уравнения переноса (Б.22) обращается в нуль. Из равенства нулю правой части находим соотношение:

$$\eta_\nu = \chi_\nu B_\nu(T). \quad (\text{Б.34})$$

Это соотношение выражает закон Кирхгофа для равновесного излучения. Приближение локального термодинамического равновесия (ЛТР) означает, что в каждом элементарном объеме выполняется соотношение (Б.34) с некоторой своей температурой<sup>1)</sup>. Температура определяется из условия лучистого равновесия, при котором полное число квантов, излучаемых элементарным объемом, равно полному числу квантов, поглощаемых этим объемом. В приближении ЛТР уравнение переноса (Б.22) принимает более простой вид:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \chi_\nu (B_\nu - I_\nu). \quad (\text{Б.35})$$

**Б.1.5. Кинетическое уравнение для фотонов.** Уравнение переноса (Б.22), полученное в предыдущем разделе, тесным образом связано с кинетическим уравнением для функции распределения фотонов  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , которая была введена в разделе Б.1.2. Введем четырехмерные координаты  $x^\mu$  и четырехмерный вектор импульса фотонов с компонентами  $p^\mu$ . В лоренцевых системах координат

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad p^\mu = (h\nu/c, \mathbf{p}). \quad (\text{Б.36})$$

Кроме того, квадрат четырехмерного импульса фотонов равен нулю:  $p^\mu p_\mu = 0$ . Поэтому из четырех его компонент независимыми являются только три. В качестве них удобно брать пространственные компоненты  $p^i$ , составляющие трехмерный вектор импульса фотонов  $\mathbf{p}$ . Учитывая это замечание, функцию распределения фотонов теперь можно рассматривать в зависимости от  $x^\mu$  и  $p^\mu$ :  $f = f(x^\mu, p^\mu)$ .

Рассмотрим мировую линию какого-либо фотона из фазового объема  $dr^i dp^i$ . Напомним, что этот фазовый объем является релятивистским инвариантом. Параметризуем мировую линию выделенного фотона в пространстве–времени некоторым аффинным параметром  $\lambda$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Заметим, что при учете процессов рассеяния соотношение (Б.34) выполняется только для тепловых частей полных коэффициентов излучения и непрозрачности. В случае, когда рассеянием можно пренебречь, это выражение обретает строгий смысл. Далее мы будем всюду предполагать именно этот случай.

<sup>2)</sup> В качестве этого параметра мы не можем брать интервал вдоль мировой линии, поскольку для фотонов эта мировая линия является светоподобной, и,

Мировые линии всех остальных фотонов из фазового объема  $drdp$  также можно параметризовать тем же параметром  $\lambda$ .

При перемещении фотонов вдоль своих мировых линий их координаты и импульс изменяются определенным образом:  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ ,  $p^\mu = p^\mu(\lambda)$ . Изменение функции распределения фотонов на малом интервале  $d\lambda$  изменения аффинного параметра  $\lambda$  определяется выражением

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dp^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p^\mu}. \quad (\text{Б.37})$$

С другой стороны, число фотонов на этом интервале  $d\lambda$  может изменяться за счет процессов поглощения, рассеяния и излучения. Учитывая это обстоятельство, приходим к кинетическому уравнению для функции распределения фотонов:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dp^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = \frac{\delta f}{\delta \lambda}, \quad (\text{Б.38})$$

где интеграл столкновений  $\delta f/\delta \lambda$  в правой части описывает упомянутые процессы.

В предыдущем разделе при выводе уравнения переноса (Б.22) было показано, что правую часть (Б.38) можно записать в виде

$$\frac{\delta f}{\delta \lambda} = \beta - \alpha f, \quad (\text{Б.39})$$

где коэффициент  $\beta$  описывает процессы излучения фотонов и соответствует коэффициенту излучения  $\eta_\nu$  в уравнении переноса, а коэффициент  $\alpha$  описывает процессы поглощения и рассеяния и соответствует коэффициенту непрозрачности  $\chi_\nu$  в уравнении переноса.

Удобно выбрать аффинный параметр  $\lambda$  таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = p^\mu. \quad (\text{Б.40})$$

Тогда с учетом вида интеграла столкновений (Б.39) кинетическое уравнение для функции распределения фотонов (Б.38) можно записать в окончательном виде:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dp^\mu}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = \beta - \alpha f. \quad (\text{Б.41})$$

Следует отметить, что второе слагаемое в левой части обусловлено изменением компонент  $p^\mu$  четырехмерного импульса фотонов при их перемещении вдоль своих мировых линий. Этот эффект может проявляться либо в неинерциальных системах отсчета, либо при учете

---

следовательно, интервал между любыми двумя бесконечно близкими точками на ней равен нулю.

гравитационных полей в рамках общей теории относительности. В лоренцевых системах координат  $dp^\mu/d\lambda = 0$  и кинетическое уравнение упрощается:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \beta - \alpha f. \quad (\text{Б.42})$$

Однако эффекты, связанные с изменением  $p^\mu$  при перемещении вдоль мировой линии, существенно проявляются при рассмотрении переноса излучения в движущейся среде. Это связано с тем, что коэффициенты излучения и непрозрачности в этом случае необходимо вычислять в системе отсчета, в которой среда покоится. А для произвольно движущейся среды такая система отсчета является неинерциальной.

Уравнение (Б.41) для функции распределения фотонов является ковариантным. Учитывая связь функции распределения  $f$  и спектральной интенсивности излучения  $I_\nu$  (см. (Б.2) и (Б.4)),

$$I_\nu = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f, \quad (\text{Б.43})$$

уравнение (Б.41) можно рассматривать как ковариантное обобщение уравнения переноса (Б.22). При этом роль ковариантной спектральной интенсивности играет сама функция распределения фотонов  $f$ . Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  являются ковариантными аналогами коэффициентов непрозрачности  $\chi_\nu$  и излучения  $\eta_\nu$  соответственно. Расписывая уравнение (Б.41) в лоренцевой системе координат и сравнивая его с уравнением переноса (Б.22), находим связь этих коэффициентов:

$$\alpha = \frac{h\nu}{c} \chi_\nu, \quad \beta = \frac{c}{h^3 \nu^2} \eta_\nu. \quad (\text{Б.44})$$

Как уже отмечалось в разделе Б.1.2, величины, стоящие в правых частях этих выражений, действительно, являются релятивистскими инвариантами.

**Б.1.6. Моментные уравнения.** Рассмотрим уравнение переноса в декартовых координатах (Б.24). Интегрируя его по всем направлениям, приходим к уравнению для энергии излучения:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_\nu = -c \mathcal{G}_\nu^0, \quad (\text{Б.45})$$

где

$$\mathcal{G}_\nu^0 = -\frac{1}{c} \oint (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu) d\Omega. \quad (\text{Б.46})$$

Умножая (Б.24) на вектор  $\mathbf{n}$  и интегрируя по всем направлениям, получим уравнение для потока излучения:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{\mathcal{P}}_\nu = -\mathcal{G}_\nu, \quad (\text{Б.47})$$

где

$$\mathcal{G}_\nu = -\frac{1}{c} \oint (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu) \mathbf{n} d\Omega. \quad (\text{Б.48})$$

Интегрируя уравнения (Б.45) и (Б.47) по всем частотам, находим соответствующие уравнения для интегральных величин:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = -c \mathcal{G}^0, \quad (\text{Б.49})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{\mathcal{P}} = -\mathcal{G}, \quad (\text{Б.50})$$

где

$$\mathcal{G}^0 = -\frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu), \quad (\text{Б.51})$$

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu) \mathbf{n}. \quad (\text{Б.52})$$

Эти уравнения имеют тензорный характер. Поэтому несмотря на то, что мы их выводили из уравнения переноса (Б.24), записанного в декартовых координатах, все эти уравнения являются корректными и в любых криволинейных координатах.

Для того, чтобы подчеркнуть релятивистский характер этих уравнений, перепишем их в ковариантном виде. Для этого с помощью функции распределения фотонов введем тензор энергии-импульса поля излучения [571]

$$T^{\alpha\beta} = c^2 \int f p^\alpha p^\beta \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (\text{Б.53})$$

Здесь через  $d^3 p$  обозначен элемент трехмерного объема в пространстве импульсов, а  $p^0$  — временная компонента импульса  $p^\mu$ . Нетрудно проверить, что величина  $d^3 p/p^0$  не изменяется при преобразованиях координат [476].

Используя ранее полученные формулы, этот тензор можно выразить непосредственно через спектральную интенсивность излучения:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) n^\alpha n^\beta, \quad (\text{Б.54})$$

где в лоренцевых системах координат компоненты четырехмерного вектора  $n^\alpha = (1, \mathbf{n})$ . Отсюда видно, что в лоренцевых системах координат временная компонента  $T^{00} = \mathcal{E}$ , смешанные компоненты  $T^{0i}$  составляют вектор  $\mathcal{F}/c$ , а пространственные компоненты  $T^{ik}$  составляют тензор полного давления излучения  $\hat{\mathcal{P}}$ .

Уравнения (Б.49) и (Б.50) теперь можно переписать в ковариантном виде:

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = -G^{\alpha}, \quad (\text{Б.55})$$

где четырехмерный вектор плотности сил, действующих на поле излучения со стороны материи,

$$G^{\alpha} = -\frac{1}{c} \int_0^{\infty} d\nu \oint d\Omega (\eta_{\nu} - \chi_{\nu} I_{\nu}) n^{\alpha}. \quad (\text{Б.56})$$

В лоренцевых системах координат компонентами этого четырехмерного вектора будут  $G^{\alpha} = (G^0, \mathcal{G})$ , где  $G^0$  и  $\mathcal{G}$  определяются выражениями (Б.46) и (Б.48) соответственно.

## Б.2. Приближенные модели переноса излучения

**Б.2.1. Функции нагрева и охлаждения.** Наиболее простым и распространенным способом учета излучения при моделировании астрофизических течений является использование функций радиационного нагрева и охлаждения. Несмотря на то, что с помощью этих функций все влияние излучения сводится к учету локальных процессов, они в ряде случаев дают хорошее приближение для описания тепловой структуры оптически тонкой среды, находящейся в поле излучения внешних источников (см. гл. 3). Если среда является прозрачной для собственного излучения, то энергия квантов, освобождающихся в какой-либо точке, уходит на бесконечность. В результате газ охлаждается во всем объеме. Скорость охлаждения газа определяется объемным коэффициентом охлаждения  $\Lambda$  (измеряется в эрг  $\cdot$  см $^{-3}$   $\cdot$  с $^{-1}$ ), который равен количеству излучаемой из единицы объема энергии в единицу времени. Излучение, приходящее от внешних источников, может слабо взаимодействовать со средой и поэтому распространяется на большие расстояния. В результате нагрев происходит практически во всем объеме газа. Скорость этого процесса в каждой точке среды определяется объемным коэффициентом нагрева  $\Gamma$  (измеряется в эрг  $\cdot$  см $^{-3}$   $\cdot$  с $^{-1}$ ), который показывает какое количество энергии излучения идет на нагрев единицы объема газа в единицу времени. В состоянии теплового равновесия, когда в каждой точке среды процессы нагрева и охлаждения уравниваются друг друга, температура газа определяется из условия  $\Gamma = \Lambda$ . В противном случае в зависимости от знака разности  $\Gamma - \Lambda$  газ будет нагреваться или охлаждаться.

В тесных двойных системах главным механизмом потери энергии являются неупругие столкновения частиц. При столкновениях электронов и ионов число возбуждений с уровня  $j$  на уровень  $k$  в расчете на единицу объема за единицу времени будет равно  $n_e n_{ij} y_{jk}$ , где  $n_e$  — концентрация электронов,  $n_{ij}$  — концентрация ионов на уровне  $j$ , а  $y_{jk}$  — зависящая от температуры  $T$  константа скорости

возбуждения. Электроны, испытывающие такие столкновения, теряют энергию  $E_{jk} = E_j - E_k$ . После учета девозбуждающих столкновений и суммирования по всем переходам чистая потеря энергии за счет электронно-ионных столкновений в предположении, что все излученные фотоны в конечном счете уходят из среды, может быть записана в виде [133]

$$\Lambda_{ei} = n_e \sum_{j < k} E_{jk} (n_{ij} y_{jk} - n_{ik} y_{kj}). \quad (\text{Б.57})$$

При расчете этой функции охлаждения необходимо учитывать распределение ионов по уровням возбуждения. При этом может потребоваться (особенно в области высоких температур) учесть переходы между несколькими уровнями. Поскольку атомарный водород в равновесном состоянии излучает слабо, основной вклад в процессы охлаждения вносят тяжелые элементы С, N, O и другие, имеющие низко лежащие уровни возбуждения. Эффективное заселение этих уровней происходит при характерной температуре порядка  $10^4$  К.

С учетом всех элементарных процессов зависимость функции охлаждения  $\Lambda$  от температуры оказывается универсальной и определяется только химическим составом среды [131]. Вид этой зависимости в диапазоне от  $10^3$  К до  $10^5$  К показан сплошной жирной линией на рис. Б.2. Резкий подъем в области  $10^4$  К обусловлен возбуждением второго уровня атома водорода.

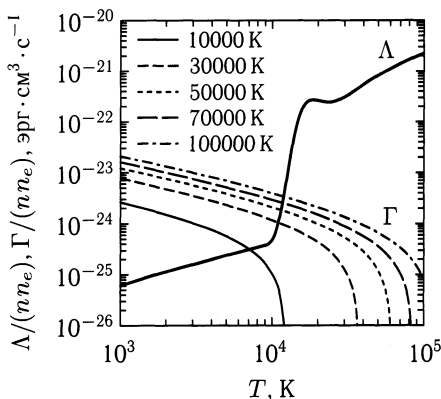


Рис. Б.2. Зависимость функций нагрева  $\Gamma$  и охлаждения  $\Lambda$  от температуры. Различные функции нагрева соответствуют различным значениям эффективной температуры горячего компонента

В системах с горячими компонентами главным механизмом нагрева газа служит фотоионизация нейтральных атомов. Поскольку предполагается, что в стационарном состоянии число актов фотоионизации равно числу актов захвата свободного электрона, то чистый нагрев



газа, обусловленный электронно-ионными рекомбинациями, может быть записан в виде [133]:

$$\Gamma_{ei} = n_e n_i \sum_j (\langle v \sigma_j \rangle \bar{E}_2 - \langle v \sigma_j E_1 \rangle), \quad (\text{Б.58})$$

где  $n_i$  — концентрация ионизованных атомов,  $\bar{E}_2$  — кинетическая энергия освобождающегося электрона, усредненная по всем ионизирующим фотонам,  $E_1$  — кинетическая энергия захваченного электрона,  $v$  — скорость теплового движения,  $\sigma_j$  — сечение захвата электрона на уровень  $j$  нейтрального атома. Угловыми скобками обозначены средние значения по максвелловскому распределению по скоростям. При записи выражения (Б.58) сделано предположение, что все ионизованные атомы находятся в основном состоянии. Заметим, что для величины  $\bar{E}_2$  можно определить соответствующую температуру  $\bar{T}$ , удовлетворяющую равенству  $\bar{E}_2 = k\bar{T}$ .

Для атома водорода можно получить следующие выражения [572]:

$$\sum_j \langle \sigma_j v \rangle = A \sqrt{\frac{8k\bar{T}}{\pi m_e}} \beta \varphi(\beta), \quad (\text{Б.59})$$

$$\sum_j \langle \sigma_j v E_1 \rangle = Ak\bar{T} \sqrt{\frac{8k\bar{T}}{\pi m_e}} \beta \chi(\beta), \quad (\text{Б.60})$$

где константа

$$A = \frac{16\hbar e^2}{3^{3/2} m_e^2 c^3}, \quad (\text{Б.61})$$

а параметр

$$\beta = \frac{h\nu_0}{k\bar{T}} = \frac{T_0}{\bar{T}}. \quad (\text{Б.62})$$

Частота  $\nu_0$  определяет предел ионизации атома водорода, которому соответствует температура  $T_0 = 158000$  К. Функции  $\varphi(\beta)$  и  $\chi(\beta)$  можно вычислять с помощью следующих формул:

$$\varphi(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{n^3} e^{\beta/n^2} E_1(\beta/n^2), \quad (\text{Б.63})$$

$$\chi(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{n^3} \left[ 1 - \frac{\beta}{n^2} e^{\beta/n^2} E_1(\beta/n^2) \right], \quad (\text{Б.64})$$

где интегральная показательная функция индекса 1

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi}. \quad (\text{Б.65})$$

Величина  $\bar{E}_2$  определяется выражением:

$$\bar{E}_2 = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} q_{\nu} k_{\nu} \mathcal{E}_{\nu} d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{k_{\nu} \mathcal{E}_{\nu}}{h\nu} d\nu}. \quad (\text{Б.66})$$

Здесь  $k_{\nu}$  — коэффициент поглощения, который в интересующем нас диапазоне частот изменяется как  $k_{\nu} \propto \nu^{-3}$  (см., например, [566]). Величина  $q_{\nu}$  представляет собой долю энергии поглощенного излучения, которая переходит в кинетическую энергию электронов:

$$q_{\nu} = \frac{h(\nu - \nu_0)}{h\nu} = 1 - \frac{\nu_0}{\nu}. \quad (\text{Б.67})$$

В случае тесной двойной системы плотность энергии излучения  $\mathcal{E}_{\nu}$  в данной точке можно оценить соотношением

$$\mathcal{E}_{\nu} = \frac{4\pi}{c} [W_1 B_{\nu}(T_1) + W_2 B_{\nu}(T_2)], \quad (\text{Б.68})$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — эффективные температуры компонентов, а  $W_1$  и  $W_2$  — соответствующие коэффициенты дилуции. После подстановки всех этих равенств в (Б.66) и несложных преобразований приходим к следующему выражению:

$$\bar{E}_2 = k\bar{T} = k \left( \frac{W_1 T_1 F_1 + W_2 T_2 F_2}{W_1 G_1 + W_2 G_2} - T_0 \right), \quad (\text{Б.69})$$

где величины (индекс  $s$  равен 1 или 2)

$$F_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\beta_s}, \quad G_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_1(n\beta_s). \quad (\text{Б.70})$$

В результате функцию нагрева можно привести к следующему виду:

$$\Gamma = n_e n_i \Gamma_0 \left( \frac{\bar{T}}{\sqrt{T}} \varphi(\beta) - \sqrt{T} \chi(\beta) \right), \quad (\text{Б.71})$$

где в единицах СГС коэффициент  $\Gamma_0 = 2,85 \cdot 10^{-27}$ . В общем случае функция нагрева будет зависеть от эффективных температур компонентов двойной системы и от расстояний до них. В частном случае, когда горячим является только один из компонентов (например, белый карлик), формула (Б.69) упрощается и принимает вид

$$\bar{E}_2 = k \left( T_{\text{WD}} \frac{F}{G} - T_0 \right), \quad (\text{Б.72})$$

где  $T_{\text{WD}}$  — эффективная температура белого карлика. Для таких двойных систем функция нагрева будет одинаковой во всех точках. Вид этой функции нагрева для различных значений  $T_{\text{WD}}$  показан на рис. Б.2. При этом равновесная температура газа  $T_{\text{eq}}$ , которая

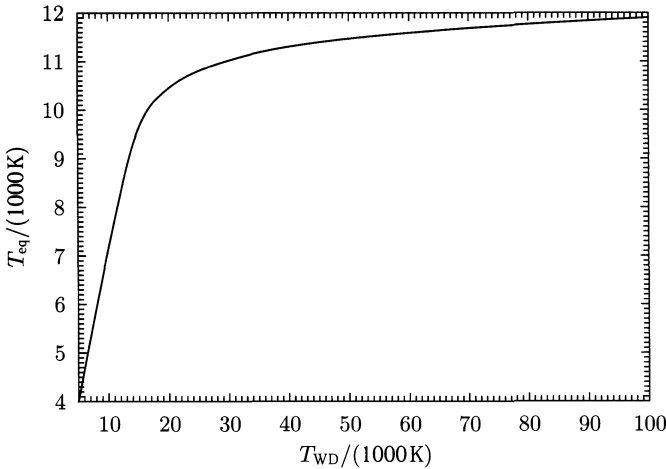


Рис. Б.3. Зависимость равновесной температуры газа от эффективной температуры горячего компонента

определяется равенством  $\Gamma = \Lambda$ , также будет одинаковой во всех точках и будет зависеть только от эффективной температуры горячего компонента. Вид этой зависимости в диапазоне эффективных температур от 5000 К до 100000 К показан на рис. Б.3. Рисунок показывает, что функция  $T_{\text{eq}}(T_{\text{WD}})$  является монотонно возрастающей. Быстрый рост  $T_{\text{eq}}$  на интервале  $T_{\text{WD}}$  примерно до 20000 К обусловлен тем, что функция охлаждения при таких температурах изменяется слабо (см. рис. Б.2). При высоких эффективных температурах  $T_{\text{WD}}$  (выше примерно 30000 К) равновесная температура  $T_{\text{eq}}$  практически не изменяется. Такое поведение связано с тем, что эти температуры попадают в область резкого подъема функции охлаждения (см. рис. Б.2).

**Б.2.2. Диффузионное приближение.** Если коэффициент непрозрачности  $\chi_\nu$  не зависит от направления, то в приближении ЛТР, получаем:

$$\mathcal{G}_\nu^0 = -\frac{1}{c} \oint \chi_\nu (B_\nu - I_\nu) d\Omega = -\frac{1}{c} \chi_\nu (4\pi B_\nu - c\mathcal{E}_\nu), \quad (\text{Б.73})$$

$$\mathcal{G}_\nu = -\frac{1}{c} \oint \chi_\nu (B_\nu - I_\nu) \mathbf{n} d\Omega = \frac{1}{c} \chi_\nu \mathcal{F}_\nu. \quad (\text{Б.74})$$

Поэтому уравнения (Б.45) и (Б.47) принимают вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_\nu = \chi_\nu (4\pi B_\nu - c\mathcal{E}_\nu), \quad (\text{Б.75})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{\mathcal{P}}_\nu = -\frac{1}{c} \chi_\nu \mathcal{F}_\nu. \quad (\text{Б.76})$$

Если излучение к тому же является почти изотропным, то должно быть

$$\mathcal{F}_\nu \approx 0, \quad \hat{p}_\nu \approx \frac{1}{3} \mathcal{E}_\nu \hat{I}. \quad (\text{Б.77})$$

Пренебрегая в этом случае производной по времени в (Б.76), находим:

$$\mathcal{F}_\nu = -\frac{c}{3\chi_\nu} \nabla \mathcal{E}_\nu. \quad (\text{Б.78})$$

Это соотношение позволяет замкнуть уравнение (Б.75). В результате для энергии излучения приходим к уравнению диффузии:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\nu}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{c}{3\chi_\nu} \nabla \mathcal{E}_\nu \right) + \chi_\nu (4\pi B_\nu - c \mathcal{E}_\nu). \quad (\text{Б.79})$$

Уравнение (Б.79) и выражение для потока излучения (Б.78) составляют основу диффузионного приближения в теории переноса излучения. Поскольку при выводе уравнения (Б.79) мы пренебрегли производной потока по времени, то итоговое уравнение оказалось диффузионного типа. При малых оптических толщинах это приводит к тому, что поток излучения может (Б.78) превышать  $c \mathcal{E}_\nu$ , что является нефизичным. Именно это обстоятельство привело к появлению методов с ограничителями потока (см. раздел Б.2.5).

В оптически толстой среде распределение поля излучения близко к равновесному. Поэтому можно приближенно положить

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu, \quad \mathcal{E} = aT^4. \quad (\text{Б.80})$$

Интегральный поток излучения

$$\mathcal{F} = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \nabla B_\nu d\nu = -\frac{16\sigma T^3}{3\chi_R} \nabla T, \quad (\text{Б.81})$$

где усредненный по Росселанду коэффициент непрозрачности  $\chi_R$  определяется выражением

$$\frac{1}{\chi_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}. \quad (\text{Б.82})$$

В результате уравнение для энергии излучения (Б.79) приобретает вид уравнения теплопроводности:

$$\frac{16\sigma T^3}{c} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{16\sigma T^3}{3\chi_R} \nabla T \right). \quad (\text{Б.83})$$

Этот случай соответствует приближению *лучистой теплопроводности*.

**Б.2.3. Приближение Шварцшильда–Шустера.** Это приближение применяется в основном в плоских задачах, когда поле излучения зависит только от одной декартовой координаты  $x$ . В этом случае зависимость интенсивности излучения от направления можно характеризовать углом  $\theta$  между осью  $x$  и вектором  $\mathbf{n}$ . Уравнение переноса при условии ЛТР можно записать в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial x} = \chi_\nu (B_\nu - I_\nu). \quad (\text{Б.84})$$

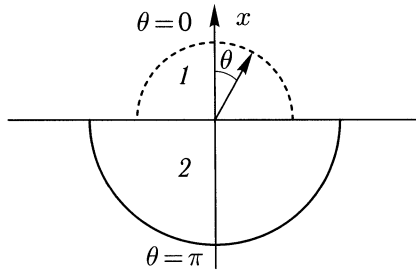


Рис. Б.4. Пояснение к приближению Шварцшильда–Шустера.

Объединим все кванты, летящие в сторону  $x > 0$  под углами  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , в одну группу, а кванты, летящие в противоположную сторону под углами  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$  — в другую (рис. Б.4). В результате энергии излучения, распространяющегося в верхнюю и нижнюю полусферы, могут быть представлены следующим образом:

$$\mathcal{E}_\nu^{(1)} = \frac{2\pi}{c} \int_0^{\pi/2} I_\nu \sin \theta d\theta, \quad \mathcal{E}_\nu^{(2)} = \frac{2\pi}{c} \int_{\pi/2}^{\pi} I_\nu \sin \theta d\theta. \quad (\text{Б.85})$$

При вычислении соответствующих потоков вынесем из каждого интеграла средние значения косинуса угла  $\theta$  по верхней и нижней полусферам ( $\langle \cos \theta \rangle = \pm 1/2$ ). В результате получим:

$$\mathcal{F}_\nu^{(1)} = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{c}{2} \mathcal{E}_\nu^{(1)}, \quad (\text{Б.86})$$

$$\mathcal{F}_\nu^{(2)} = 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{c}{2} \mathcal{E}_\nu^{(2)}. \quad (\text{Б.87})$$

Полные энергия и поток излучения представляются в виде

$$\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}_\nu^{(1)} + \mathcal{E}_\nu^{(2)}, \quad \mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}_\nu^{(1)} + \mathcal{F}_\nu^{(2)} = \frac{c}{2} (\mathcal{E}_\nu^{(1)} - \mathcal{E}_\nu^{(2)}). \quad (\text{Б.88})$$

Умножим уравнение переноса (Б.84) на  $\sin \theta$  и проинтегрируем его по углу  $\theta$  по нижней и верхней полусферам. Используя полученные выражения, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\nu^{(1)}}{\partial t} + \frac{c}{2} \frac{\partial \mathcal{E}_\nu^{(1)}}{\partial x} = \chi_\nu (2\pi B_\nu - c \mathcal{E}_\nu^{(1)}), \quad (\text{Б.89})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\nu^{(2)}}{\partial t} - \frac{c}{2} \frac{\partial \mathcal{E}_\nu^{(2)}}{\partial x} = \chi_\nu (2\pi B_\nu - c \mathcal{E}_\nu^{(2)}). \quad (\text{Б.90})$$

Эти два уравнения и лежат в основе приближения Шварцшильда–Шустера. Если решения  $\mathcal{E}_\nu^{(1)}$  и  $\mathcal{E}_\nu^{(2)}$  этих уравнений найдены, то по формулам (Б.88) можно определить полную энергию  $\mathcal{E}_\nu$  и поток  $\mathcal{F}_\nu$  излучения.

В стационарном случае уравнения (Б.89) и (Б.90) принимают более простой вид:

$$\frac{c}{2} \frac{d\mathcal{E}_\nu^{(1)}}{dx} = \chi_\nu (2\pi B_\nu - c \mathcal{E}_\nu^{(1)}), \quad (\text{Б.91})$$

$$-\frac{c}{2} \frac{d\mathcal{E}_\nu^{(2)}}{dx} = \chi_\nu (2\pi B_\nu - c \mathcal{E}_\nu^{(2)}). \quad (\text{Б.92})$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим:

$$\frac{d\mathcal{F}_\nu}{dx} = \chi_\nu (4\pi B_\nu - c \mathcal{E}_\nu), \quad (\text{Б.93})$$

$$\mathcal{F}_\nu = -\frac{c}{4\chi_\nu} \frac{d\mathcal{E}_\nu}{dx}. \quad (\text{Б.94})$$

Полученные выражения показывают, что в случае стационарного поля излучения приближение Шварцшильда–Шустера незначительно отличается от диффузионного приближения. Действительно, в формуле (Б.94) для потока излучения в коэффициенте стоит 4, а не 3, как в формуле (Б.78) для потока излучения в диффузионном приближении.

**Б.2.4. Приближение Эддингтона.** Напомним, что если коэффициент непрозрачности  $\chi_\nu$  не зависит от направления, то в условиях ЛТР моментные уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_\nu = \chi_\nu (4\pi B_\nu - c \mathcal{E}_\nu), \quad (\text{Б.95})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{\mathcal{P}}_\nu = -\frac{1}{c} \chi_\nu \mathcal{F}_\nu. \quad (\text{Б.96})$$

Эта система уравнений не является замкнутой, поскольку нет какого-либо выражения для тензора давления. Если бы, например, удалось добавить сюда соотношение, связывающее тензор давления  $\hat{\mathcal{P}}_\nu$  и энергию  $\mathcal{E}_\nu$ , то система уравнений (Б.95) и (Б.96) оказалась бы замкнутой.

Представим формально тензор давления в виде

$$\hat{\mathcal{P}}_\nu = \hat{f}_E \mathcal{E}_\nu, \quad (\text{Б.97})$$

где

$$\hat{f}_E = \frac{\oint I_\nu \mathbf{n} \mathbf{n} d\Omega}{\oint I_\nu d\Omega}. \quad (\text{Б.98})$$

В приближении Эддингтона тензор  $\hat{f}_E = f_E \hat{I}$ , где  $f_E$  — фактор Эддингтона. Он изменяется в небольших пределах от  $1/3$  (изотропное излучение) до  $1$  (однаправленный поток). Значение  $f_E = 1/3$  соответствует случаю оптически толстой среды, а  $f_E = 1$  соответствует случаю оптически тонкой среды. В приближении Эддингтона соотношение

$$\hat{P}_\nu = f_E \mathcal{E}_\nu \hat{I} \quad (\text{Б.99})$$

играет роль уравнения состояния для поля излучения. При этом фактор Эддингтона  $f_E$  является аналогом показателя адиабаты в газовой динамике.

Следует отметить, что приближение Эддингтона, в принципе, является точным методом описания переноса излучения, если известно точное значение фактора Эддингтона  $f_E$ . Для вычисления фактора Эддингтона, в свою очередь, используют решение уравнения переноса вдоль выделенных направлений при фиксированных значениях функций источников. Согласованное решение можно получить с помощью итерационного процесса между моментными уравнениями и блоком расчета фактора Эддингтона.

### Б.2.5. Приближение диффузии с ограниченным потоком.

В настоящее время в численных расчетах переноса излучения часто используется приближение диффузии с ограниченным потоком (FLD, flux limited diffusion) [573]. Чтобы получить уравнения в этом приближении, введем функцию  $\psi_\nu$  из условия  $I_\nu = c \mathcal{E}_\nu \psi_\nu$ . Эта функция содержит всю информацию о распределении спектральной интенсивности  $I_\nu$  по направлениям. Из определения энергии излучения (Б.6) следует, что функция  $\psi_\nu$  должна удовлетворять условию нормировки:

$$\oint \psi_\nu d\Omega = 1. \quad (\text{Б.100})$$

Для изотропного излучения  $\psi_\nu = 1/(4\pi)$ , а для однаправленного потока излучения  $\psi_\nu = \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)$ .

С учетом определения функции  $\psi_\nu$  уравнение переноса излучения в условиях ЛТР можно переписать в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi_\nu \mathcal{E}_\nu) + (\mathbf{n} \cdot \nabla) (\psi_\nu \mathcal{E}_\nu) = \frac{1}{c} \chi_\nu (B_\nu - c \psi_\nu \mathcal{E}_\nu). \quad (\text{Б.101})$$

Интегрируя (Б.101) по всем направлениям, получим:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_\nu = \chi_\nu (4\pi B_\nu - c \mathcal{E}_\nu), \quad (\text{Б.102})$$

где поток излучения

$$\mathcal{F}_\nu = c \mathbf{f}_\nu \mathcal{E}_\nu, \quad \mathbf{f}_\nu = \oint \psi_\nu \mathbf{n} d\Omega. \quad (\text{Б.103})$$

Из этих уравнений путем несложных преобразований можно получить:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\nu \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_\nu}{\partial t} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \psi_\nu \right] + \psi_\nu [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathcal{E}_\nu - \nabla \cdot (\mathbf{f}_\nu \mathcal{E}_\nu)] = \\ = \frac{\chi_\nu B_\nu}{c} (1 - 4\pi \psi_\nu). \end{aligned} \quad (\text{Б.104})$$

Уравнение (Б.104) является точным, поскольку оно получено непосредственно из уравнения переноса. Для получения приближенного решения предположим, что функция  $\psi_\nu$  медленно изменяется в пространстве и во времени. Это означает, что можно положить

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_\nu}{\partial t} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \psi_\nu = 0. \quad (\text{Б.105})$$

С помощью этого условия находим:  $\nabla \cdot \mathbf{f}_\nu = 0$ . С учетом этих соотношений уравнение (Б.104) упрощается и принимает вид

$$\psi_\nu [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathcal{E}_\nu - (\mathbf{f}_\nu \cdot \nabla) \mathcal{E}_\nu] = \frac{\chi_\nu B_\nu}{c} (1 - 4\pi \psi_\nu). \quad (\text{Б.106})$$

Введем вектор

$$\mathbf{R}_\nu = -\frac{c \nabla \mathcal{E}_\nu}{4\pi \chi_\nu B_\nu}. \quad (\text{Б.107})$$

Тогда решение уравнения (Б.106) можно формально записать следующим образом:

$$\psi_\nu = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_\nu + \mathbf{f}_\nu \cdot \mathbf{R}_\nu}. \quad (\text{Б.108})$$

Это соотношение с учетом определений (Б.103) позволяет заключить, что векторы  $\mathbf{f}_\nu$  и  $\mathbf{R}_\nu$  являются сонаправленными. Поэтому можно написать:

$$\mathbf{f}_\nu = \lambda_\nu (R_\nu) \mathbf{R}_\nu. \quad (\text{Б.109})$$

Для определения явного вида множителя  $\lambda_\nu$  воспользуемся условием нормировки (Б.100) функции  $\psi_\nu$ . Имеем:

$$1 = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{d\Omega}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_\nu + \lambda_\nu R_\nu^2} = \frac{1}{R_\nu} \text{Arth} \left( \frac{R_\nu}{1 + \lambda_\nu R_\nu^2} \right) \quad (\text{Б.110})$$

или

$$\lambda_\nu = \frac{1}{R_\nu} \left( \text{cth} R_\nu - \frac{1}{R_\nu} \right). \quad (\text{Б.111})$$



Для функции  $\psi_\nu$  получаем окончательное выражение:

$$\psi_\nu = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_\nu \operatorname{cth} R_\nu - \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_\nu}. \quad (\text{Б.112})$$

Поток излучения можно записать в виде

$$\mathcal{F}_\nu = -D_\nu \nabla \mathcal{E}_\nu, \quad D_\nu = \frac{c^2 \lambda_\nu \mathcal{E}_\nu}{4\pi \chi_\nu B_\nu}. \quad (\text{Б.113})$$

Величина  $\lambda_\nu$  в этом выражении играет роль ограничителя потока. Предельный случай  $R_\nu \rightarrow 0$ , при котором  $\lambda_\nu \rightarrow 1/3$ , соответствует оптически толстой среде. В этом случае поток излучения (Б.113)

$$\mathcal{F}_\nu = -\frac{c^2 \mathcal{E}_\nu}{12\pi \chi_\nu B_\nu} \nabla \mathcal{E}_\nu. \quad (\text{Б.114})$$

При этом в коэффициенте диффузии можно приближенно положить  $c \mathcal{E}_\nu \approx 4\pi B_\nu$ . Тогда выражение (Б.114) переходит в выражение для потока в диффузионном приближении,

$$\mathcal{F}_\nu = -\frac{c}{3\chi_\nu} \nabla \mathcal{E}_\nu. \quad (\text{Б.115})$$

Противоположный предел  $R_\nu \rightarrow \infty$ , при котором  $\lambda_\nu \approx 1/R_\nu$ , соответствует оптически тонкой среде. В этом случае поток излучения можно представить в виде

$$\mathcal{F}_\nu = c \mathcal{E}_\nu \mathbf{n}_\nu, \quad (\text{Б.116})$$

где вектор

$$\mathbf{n}_\nu = -\frac{\nabla \mathcal{E}_\nu}{|\nabla \mathcal{E}_\nu|}. \quad (\text{Б.117})$$

Тензор давления излучения в приближении FLD можно представить в виде (Б.97)

$$\hat{\mathcal{P}}_\nu = \hat{f}_E \mathcal{E}_\nu, \quad (\text{Б.118})$$

где тензор Эддингтона

$$\hat{f}_E = \frac{1}{2} \left[ (1 - f_E) \hat{I} + (3f_E - 1) \mathbf{n}_\nu \mathbf{n}_\nu \right], \quad (\text{Б.119})$$

а фактор Эддингтона

$$f_E = \lambda_\nu + \lambda_\nu^2 R_\nu^2. \quad (\text{Б.120})$$

В оптически толстом пределе  $\hat{\mathcal{P}}_\nu = (\mathcal{E}_\nu/3) \hat{I}$ , а в оптически тонком пределе  $\hat{\mathcal{P}}_\nu = \mathcal{E}_\nu \mathbf{n}_\nu \mathbf{n}_\nu$ .

**Б.2.6. Приближение Соболева.** Это приближение применяется при моделировании переноса излучения в задачах, где возникает сильный градиент скорости движения вещества в направлении распространения излучения. Метод расчета возбуждения атомов и формирования

линейчатых спектров в движущихся средах, разработанный Соболевым еще в 1940-х годах [574], позже развивался в работах многих авторов (см. [565]). Первоначально теория Соболева применялась к интерпретации интенсивностей и профилей линий в спектрах звезд Вольфа–Райе, Ве и близких к ним по кинематике объектов. Позже эта теория нашла широкое применение при количественной интерпретации особенностей спектров многих других объектов, таких как квазары, активные ядра галактик, космические мазеры и др. В настоящее время эта теория лежит в основе современной теории звездного ветра.

Основная идея, лежащая в основе метода Соболева, очень проста. Рассмотрим оболочку звезды, движение вещества в которой обладает сферической симметрией. Радиальная скорость  $v$  при этом будет зависеть только от расстояния  $r$  до центра звезды:  $v = v(r)$ . Градиент лучевой скорости  $v_s$  вдоль луча зрения будет равен

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} = \frac{dv}{dr} \cos^2 \theta + \frac{v}{r} \sin^2 \theta, \quad (\text{Б.121})$$

где  $\theta$  — угол между направлением распространения излучения и радиусом вектором. Следует заметить, что градиент  $\partial v_s / \partial s$  оказывается не равным нулю даже в случае постоянной скорости  $v = \text{const}$ . Аналогичную величину можно ввести и в случае произвольного поля скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ .

Рассмотрим некоторый элемент среды. Допустим, что этот элемент излучил фотон на частоте  $\nu$  в пределах некоторой линии, профиль которой имеет характерную ширину  $\Delta\nu$ . Из-за наличия градиента скорости будет иметь место дифференциальный доплеровский сдвиг между исходным элементом и любым другим элементом среды вдоль направления распространения фотона. На некотором расстоянии от исходной точки этот сдвиг может стать настолько большим, что излученный фотон уже не сможет поглотиться в пределах эффективного профиля линии. Таким образом, вне пределов некоторой области, окружающей исходную точку, фотоны не будут поглощаться движущейся средой и будут свободно уходить на бесконечность. Характерная ширина области поглощения  $\Delta L$  определяется выражением

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0}{c} \left| \frac{\partial v_s}{\partial s} \right| \Delta L, \quad (\text{Б.122})$$

где  $\nu_0$  — центральная частота линии. Далее, поскольку  $\Delta\nu = 2\nu_0 u/c$ , где  $u \ll v$  — тепловая скорость вещества, находим:

$$\Delta L = \frac{2u}{|\partial v_s / \partial s|}. \quad (\text{Б.123})$$

Отсюда видно, что в случае сильных градиентов скорости  $\partial v_s / \partial s$  ширина области поглощения  $\Delta L$  может быть достаточно малой. Поэтому эту область можно считать практически однородной по своим

физическим характеристикам. Иными словами, можно предполагать, что в области взаимодействия имеют место однородные распределения плотности, температуры, степени ионизации и т.п. В результате задача расчета поля излучения существенно упрощается и, фактически, становится локальной.

В пределе сильных градиентов скорости средняя интенсивность излучения в линии

$$J = \frac{1}{4\pi} \oint d\Omega \int_0^{\infty} I_{\nu} \varphi_{\nu} d\nu, \quad (\text{Б.124})$$

где  $\varphi_{\nu}$  — профиль линии, определяется комбинацией функции источника  $S$  для данного перехода и средней интенсивности внешнего излучения  $J_0$ :

$$J = (1 - \beta)S + \beta J_0. \quad (\text{Б.125})$$

Здесь коэффициент  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq 1$ ) представляет собой вероятность выхода фотона, проинтегрированную по направлениям и частотам в линии. Эту величину можно аппроксимировать выражением

$$\beta = \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}, \quad (\text{Б.126})$$

где  $\tau$  — эффективная оптическая толщина, соответствующая ширине  $\Delta L$  области взаимодействия. Отметим, что выражение (Б.126) является точным в случае, когда скорость движения оболочки  $v$  пропорциональна расстоянию до центра звезды,  $v \propto r$  (см. [565]). В пределе оптически тонкой среды,  $\tau \ll 1$ , коэффициент  $\beta \approx 1$  и средняя интенсивность оказывается равной  $J \approx J_0$ . В противоположном случае оптически толстой среды,  $\tau \gg 1$ , коэффициент  $\beta \ll 1$  и средняя интенсивность будет определяться функцией источника,  $J \approx S$ .

Таким образом, в методе Соболева задача расчета поля излучения сводится к задаче расчета вероятности выхода фотонов. В общем случае величина коэффициента  $\beta$  и оптическая толщина  $\tau$  определяются геометрией задачи и характером движения вещества. На практике выражение (Б.126) используется совместно с системой уравнений для баланса населенностей уровней для согласованного нахождения средней интенсивности  $J$  и функции источников  $S$ .

### Б.3. Перенос излучения в движущейся среде

**Б.3.1. Эффект Доплера.** Рассмотрим некоторый четырехмерный вектор  $a^{\mu}$ . В лоренцевой системе координат временная компонента этого вектора равна  $a^0$ , а пространственные компоненты  $a^i$  составляют трехмерный вектор  $\mathbf{a}$ . Рассмотрим другую лоренцеву систему координат, которая соответствует системе отсчета, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$  относительно системы отсчета, соответствующей исходной

лоренцевой системе координат. В этой другой лоренцевой системе координат компоненты векторов будем помечать значком 0 внизу. Например, для вектора  $a^\mu$  компонентами будут  $a_0^0$  и  $\mathbf{a}_0$ . Преобразования Лоренца для компонент вектора  $a^\mu$  можно записать в виде [476]

$$a^0 = \gamma \left( a_0^0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_0}{c} \right), \quad (\text{Б.127})$$

$$\mathbf{a} = \gamma \left( \mathbf{a}_0 + \frac{\mathbf{v}}{c} a_0^0 \right) + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_0)}{v^2}, \quad (\text{Б.128})$$

где  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — фактор Лоренца. Введем для удобства записи формул единичный вектор  $\mathbf{l}$  в направлении вектора скорости  $\mathbf{l} = \mathbf{v}/v$ . Тогда выражение (Б.128) переписется в виде

$$\mathbf{a} = \gamma \left( \mathbf{a}_0 + \frac{\mathbf{v}}{c} a_0^0 \right) + (\gamma - 1) [\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{a}_0)]. \quad (\text{Б.129})$$

При разворачивании этой и других аналогичных формул можно использовать свойство двойного векторного произведения:

$$\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{a}_0) = \mathbf{l}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{a}_0) - \mathbf{a}_0. \quad (\text{Б.130})$$

Запишем преобразования Лоренца для компонент четырехмерного волнового вектора  $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ . Имеем:

$$\omega = \gamma (\omega_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_0), \quad (\text{Б.131})$$

$$\mathbf{k} = \gamma \left( \mathbf{k}_0 + \frac{v\omega_0}{c^2} \right) + (\gamma - 1) [\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{k}_0)]. \quad (\text{Б.132})$$

Эти выражения описывают релятивистский эффект Доплера. В теории переноса излучения принято использовать обычную частоту  $\nu$  и вектор  $\mathbf{n}$ . С круговой частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  они связаны простыми соотношениями:

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \mathbf{k} = k\mathbf{n} = \frac{2\pi\nu}{c} \mathbf{n}. \quad (\text{Б.133})$$

Подставляя (Б.133) в (Б.131) и (Б.132), находим:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \gamma \left( 1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0}{c} \right), \quad (\text{Б.134})$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nu_0}{\nu} \left\{ \gamma \left( \mathbf{n}_0 + \frac{\mathbf{v}}{c} \right) + (\gamma - 1) [\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{n}_0)] \right\}. \quad (\text{Б.135})$$

Сделанные в разделе Б.1.2 замечания по поводу инвариантности величин  $I_\nu$ ,  $\eta_\nu$  и  $\chi_\nu$ , позволяют сразу записать законы их преобразования:

$$I_\nu = \frac{\nu^3}{\nu_0^3} I_{\nu_0}, \quad \eta_\nu = \frac{\nu^2}{\nu_0^2} \eta_{\nu_0}, \quad \chi_\nu = \frac{\nu_0}{\nu} \chi_{\nu_0}. \quad (\text{Б.136})$$

Заметим, что преобразования этих величин также связаны с эффектом Доплера. Наконец, из условия того, что величина  $d^3p/p^0$  является релятивистским инвариантом, следует преобразование элемента интегрирования

$$d\nu d\Omega = \frac{\nu_0}{\nu} d\nu_0 d\Omega_0. \quad (\text{Б.137})$$

Выведем формулы, описывающие преобразование компонент тензора энергии-импульса поля излучения:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega I_\nu n^\alpha n^\beta. \quad (\text{Б.138})$$

С помощью записанных выше соотношений перепишем это выражение в виде

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu_0 \oint d\Omega_0 \frac{\nu^2}{\nu_0^2} I_{\nu_0} n^\alpha n^\beta. \quad (\text{Б.139})$$

Напомним, что в лоренцевых системах координат временная компонента тензора энергии-импульса  $T^{00} = \mathcal{E}$ , смешанные компоненты  $T^{0i}$  составляют вектор  $\mathcal{F}/c$ , а пространственные компоненты  $T^{ik}$  составляют тензор давления излучения  $\hat{\mathcal{P}}$ .

Подставляя соотношения (Б.136) и (Б.137) в (Б.139) и производя несложные выкладки, приходим к следующим преобразованиям:

$$\mathcal{E} = \gamma^2 \left( \mathcal{E}_0 + 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}_0}{c^2} + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}}_0 \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right), \quad (\text{Б.140})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \gamma \left( \mathcal{F}_0 + \gamma \mathbf{v} \mathcal{E}_0 + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}}_0 + \gamma \mathbf{v} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}_0}{c^2} \right) + \\ + \gamma(\gamma - 1) \mathbf{l} \left( \mathbf{l} \cdot \mathcal{F}_0 + \mathbf{l} \cdot \hat{\mathcal{P}}_0 \cdot \mathbf{v} \right), \end{aligned} \quad (\text{Б.141})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}_0 + \gamma \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}}{c^2} \mathcal{E}_0 + \gamma \frac{\mathbf{v} \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_0 \mathbf{v}}{c^2} + 2(\gamma - 1) \mathbf{l} (\mathbf{l} \cdot \hat{\mathcal{P}}_0) + \\ + \gamma(\gamma - 1) \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathcal{F}_0) \mathbf{v} \mathbf{l} + \mathbf{l} \mathbf{v}}{c}. \end{aligned} \quad (\text{Б.142})$$

При записи предпоследнего слагаемого в выражении (Б.142) было использовано свойство симметричности тензора давления,  $\hat{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} \cdot \hat{\mathcal{P}}$ . Обратные преобразования получаются отсюда с помощью замены знака у скорости  $\mathbf{v}$ :

$$\mathcal{E}_0 = \gamma^2 \left( \mathcal{E} - 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}}{c^2} + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right), \quad (\text{Б.143})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 = \gamma \left( \mathcal{F} - \gamma \mathbf{v} \mathcal{E} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}} + \gamma \mathbf{v} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}}{c^2} \right) + \\ + \gamma(\gamma - 1) \mathbf{l} \left( \mathbf{l} \cdot \mathcal{F} - \mathbf{l} \cdot \hat{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{v} \right), \end{aligned} \quad (\text{Б.144})$$

$$\widehat{P}_0 = \widehat{P} + \gamma \frac{v\mathbf{v}}{c^2} \mathcal{E} - \gamma \frac{v\mathcal{F} + \mathcal{F}v}{c^2} + 2(\gamma - 1)l(l \cdot \widehat{P}) - \\ - \gamma(\gamma - 1) \frac{(l \cdot \mathcal{F})}{c} \frac{vl + lv}{c}. \quad (\text{Б.145})$$

**Б.3.2. Моментные уравнения для движущейся среды.** Моментные уравнения, записанные в ковариантной форме,

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = -G^\alpha, \quad (\text{Б.146})$$

остаются справедливыми в любой допустимой системе координат. Будем исследовать поле излучения в некоторой лабораторной лоренцевой системе координат. При этом однако коэффициенты непрозрачности  $\chi_\nu$  удобно выражать через величины, относящиеся к сопутствующей системе координат. Левая часть уравнения (Б.146) записана уже в нужном виде. В правой части величины  $G^\alpha$  нужно сначала выразить через величины в сопутствующей системе координат, оставить соответствующие коэффициенты непрозрачности, а все остальные величины, характеризующие поле излучения, снова преобразовать к лабораторной системе координат [569].

Будем считать, что коэффициенты непрозрачности  $\chi_\nu$ , относящиеся к сопутствующей системе координат, не зависят от направления  $\mathbf{n}_0$ . Кроме того, предполагаем, что в сопутствующей системе координат реализуется условие ЛТР:  $\eta_{\nu_0} = \chi_{\nu_0} B_{\nu_0}$ . Введем средние непрозрачности  $\chi_R, \chi_E, \chi_F$  с помощью следующих соотношений:

$$\int_0^\infty d\nu_0 \oint d\Omega_0 \chi_{\nu_0} B_{\nu_0} = \chi_R \int_0^\infty d\nu_0 \oint d\Omega_0 B_{\nu_0} = 4\pi \chi_R B_0, \quad (\text{Б.147})$$

$$\int_0^\infty d\nu_0 \oint d\Omega_0 \chi_{\nu_0} I_{\nu_0} = \chi_E \int_0^\infty d\nu_0 \oint d\Omega_0 I_{\nu_0} = c \chi_E \mathcal{E}_0, \quad (\text{Б.148})$$

$$\int_0^\infty d\nu_0 \oint d\Omega_0 \chi_{\nu_0} I_{\nu_0} \mathbf{n}_0 = \chi_F \int_0^\infty d\nu_0 \oint d\Omega_0 I_{\nu_0} \mathbf{n}_0 = \chi_F \mathcal{F}_0. \quad (\text{Б.149})$$

Величина  $\chi_R$  представляет собой коэффициент непрозрачности, *усредненный по Планку*,  $\chi_E$  — коэффициент непрозрачности, *усредненный по энергии излучения*, а  $\chi_F$  — коэффициент непрозрачности, *усредненный по потоку*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Если рассуждать строго, то нужно говорить о среднем по потоку тензоре непрозрачности  $\widehat{\chi}_F$ . Однако, как мы увидим ниже, для вычисления этого тензора можно использовать приближенное равенство  $\widehat{\chi}_F = \chi_R \widehat{I}$ , где  $\chi_R$  — коэффициент непрозрачности, усредненный по Росселанду в сопутствующей системе координат.

Компоненты  $\mathcal{G}_0^0$  и  $\mathcal{G}_0^i$  в сопутствующей системе координат определяются соотношениями:

$$-c\mathcal{G}_0^0 = 4\pi\chi_P B_0 - c\chi_E \mathcal{E}_0, \quad -c\mathcal{G}_0^i = -\chi_F \mathcal{F}_0. \quad (\text{Б.150})$$

При выводе этих выражений использованы определения средних непрозрачностей (Б.147)–(Б.149). В сопутствующей системе координат вещество покоится. Поэтому четырехмерный вектор скорости вещества  $u_0^\mu$  в этой системе координат имеет компоненты  $u_0^0 = 1$ ,  $u_0^i = 0$ . Рассмотрим четырехмерный вектор плотности импульса поля излучения  $P^\alpha$ , который определяется выражением

$$P^\alpha = \frac{1}{c} T^{\alpha\beta} u_\beta. \quad (\text{Б.151})$$

Очевидно, что в сопутствующей системе координат временная компонента этого вектора  $P_0^0 = T_0^{00}/c = \mathcal{E}_0/c$ , а пространственные компоненты  $P_0^i = T_0^{0i}/c$  составляют трехмерный вектор  $\mathcal{F}_0/c^2$ .

Для описания коэффициентов непрозрачности введем тензор  $\chi_{\beta}^\alpha$ , компоненты которого в сопутствующей системе координат имеют вид

$$\chi_{0\beta}^\alpha = \begin{pmatrix} \chi_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_F \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.152})$$

Нетрудно убедиться, что в сопутствующей системе координат

$$\chi_{0\beta}^\alpha = (\chi_E - \chi_F) u_0^\alpha u_{0\beta} + \delta_\beta^\alpha \chi_F. \quad (\text{Б.153})$$

Однако в силу того, что это соотношение имеет тензорный характер, оно останется справедливым и в любых других допустимых системах координат:

$$\chi_\beta^\alpha = (\chi_E - \chi_F) u^\alpha u_\beta + \delta_\beta^\alpha \chi_F. \quad (\text{Б.154})$$

Выражения (Б.150) теперь можно переписать в тензорном виде:

$$-cG_0^\alpha = 4\pi\chi_P B_0 u_0^\alpha - c^2 \chi_{0\beta}^\alpha P_0^\beta. \quad (\text{Б.155})$$

В силу тензорного характера оно останется справедливым и в любой другой системе координат. Используя соотношения (Б.151) и (Б.154), запишем окончательный результат вычисления величины  $G^\alpha$  в развернутом виде:

$$-G^\alpha = \frac{4\pi}{c} \chi_P B_0 u^\alpha - [(\chi_E - \chi_F) u^\alpha u_\beta + \delta_\beta^\alpha \chi_F] T^{\beta\gamma} u_\gamma. \quad (\text{Б.156})$$

Полученное выражение является правой частью уравнения (Б.146). Таким образом, (Б.146) совместно с (Б.156) представляет собой моментное уравнение переноса, записанное в ковариантной форме:

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} \chi_P B_0 u^{\alpha} - [(\chi_E - \chi_F) u^{\alpha} u_{\beta} + \delta_{\beta}^{\alpha} \chi_F] T^{\beta\gamma} u_{\gamma}. \quad (\text{Б.157})$$

Выведем трехмерный аналог этого уравнения. Компоненты  $\mathcal{G}^0$  и  $\mathcal{G}$  четырехмерного вектора  $G^{\alpha}$  в лабораторной системе координат с помощью преобразований (Б.127) и (Б.129) можно записать в виде

$$\mathcal{G}^0 = \gamma \left( \mathcal{G}_0^0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{G}_0}{c} \right), \quad (\text{Б.158})$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \gamma \frac{v}{c} \mathcal{G}_0^0 + (\gamma - 1) l(l \cdot \mathcal{G}_0). \quad (\text{Б.159})$$

Компоненты  $\mathcal{G}_0^0$  и  $\mathcal{G}_0$  в сопутствующей системе координат определяются соотношениями (Б.150). Подставляя сюда (Б.134) и (Б.135), окончательно находим:

$$\begin{aligned} -c \mathcal{G}^0 &= \gamma 4\pi \chi_P B_0 - \gamma^3 (\chi_E - \chi_F v^2/c^2) c \mathcal{E} - \\ &- \gamma^3 [(1 + v^2/c^2) \chi_F - 2\chi_E] \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}}{c} + \gamma^3 (\chi_F - \chi_E) \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{P} \cdot \mathbf{v}}{c}, \end{aligned} \quad (\text{Б.160})$$

$$\begin{aligned} -c \mathcal{G} &= [\gamma 4\pi \chi_P B_0 - \gamma^3 (\chi_E - \chi_F) c \mathcal{E}] \frac{\mathbf{v}}{c} - \gamma \chi_F \mathcal{F} + \gamma \chi_F (\mathbf{v} \cdot \hat{P}) + \\ &+ \gamma^3 (\chi_E - \chi_F) \left[ 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}}{c} - \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{P} \cdot \mathbf{v}}{c} \right] \frac{\mathbf{v}}{c}. \end{aligned} \quad (\text{Б.161})$$

Таким образом, моментные уравнения в лабораторной лоренцевой системе координат будут иметь вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = -c \mathcal{G}^0, \quad (\text{Б.162})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{P} = -\mathcal{G}, \quad (\text{Б.163})$$

где теперь правые части определяются выражениями (Б.160) и (Б.161).

**Б.3.3. Медленно движущаяся среда.** Выведем сначала уравнение переноса для спектральной интенсивности излучения в случае медленного движения среды, когда ее скорость  $v \ll c$  [569]. Эффект Доплера в этом случае сводится к соотношению для частот (см. (Б.134)):

$$\nu_0 = \nu \left( 1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right). \quad (\text{Б.164})$$



Обозначим коэффициенты непрозрачности и излучения в системе отсчета, связанной с неподвижной средой, через  $\chi_0(\nu_0)$  и  $\eta_0(\nu_0)$  соответственно. Эти величины могут быть известны либо из эксперимента, либо из какой-либо микроскопической теории, основанной на первых принципах. Для простоты будем считать, что они не зависят от направления. Тогда их значения в лабораторной системе отсчета с точностью до величин первого порядка по  $v/c$  определяются соотношениями

$$\chi_\nu = \frac{\nu_0}{\nu} \chi_0(\nu_0) = \chi_0(\nu) - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \left[ \chi_0(\nu) + \nu \frac{d\chi_0(\nu)}{d\nu} \right], \quad (\text{Б.165})$$

$$\eta_\nu = \frac{\nu^2}{\nu_0^2} \eta_0(\nu_0) = \eta_0(\nu) + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \left[ 2\eta_0(\nu) - \nu \frac{d\eta_0(\nu)}{d\nu} \right]. \quad (\text{Б.166})$$

Подчеркнем, что в этих выражениях используются зависимости коэффициентов  $\chi_0$  и  $\eta_0$  от частоты  $\nu$ , измеренной в лабораторной системе отсчета. Уравнение переноса принимает вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) I_\nu = \eta_0(\nu) + \chi_0(\nu) I_\nu + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \left\{ 2\eta_0(\nu) - \nu \frac{\partial \eta_0(\nu)}{\partial \nu} + \left[ \chi_0(\nu) + \nu \frac{\partial \chi_0(\nu)}{\partial \nu} \right] I_\nu \right\}. \quad (\text{Б.167})$$

Выведем моментные уравнения для случая медленно движущейся среды при  $v \ll c$ . Разлагая в ряд выражения (Б.143)–(Б.145) по  $v/c$  и оставляя только члены первого порядка малости, приходим к следующим преобразованиям энергии, потока и давления излучения:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}}{c^2}, \quad (\text{Б.168})$$

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} - v\mathcal{E} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}}, \quad (\text{Б.169})$$

$$\hat{\mathcal{P}}_0 = \hat{\mathcal{P}} - \frac{v\mathcal{F} + \mathcal{F}v}{c^2}. \quad (\text{Б.170})$$

Выражения (Б.160) и (Б.161) для  $\mathcal{G}^0$  и  $\mathcal{G}$  в случае медленно движущейся среды принимают следующий вид:

$$-c\mathcal{G}^0 = 4\pi\chi_{\text{P}}B_0 - \chi_{\text{E}}c\mathcal{E} - (\chi_{\text{F}} - 2\chi_{\text{E}}) \frac{v \cdot \mathcal{F}}{c}, \quad (\text{Б.171})$$

$$-c\mathcal{G} = [4\pi\chi_{\text{P}}B_0 - (\chi_{\text{E}} - \chi_{\text{F}})c\mathcal{E}] \frac{v}{c} - \chi_{\text{F}}\mathcal{F} + \chi_{\text{F}}(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}}). \quad (\text{Б.172})$$

В развернутой записи моментные уравнения (Б.162) и (Б.163) для медленно движущейся среды могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = 4\pi\chi_{\text{P}}B_0 - \chi_{\text{E}}c\mathcal{E} - (\chi_{\text{F}} - 2\chi_{\text{E}}) \frac{v \cdot \mathcal{F}}{c}, \quad (\text{Б.173})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{\mathcal{P}} = \left[ \frac{4\pi}{c} \chi_P B_0 - (\chi_E - \chi_F) \mathcal{E} \right] \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{\chi_F}{c} (\mathcal{F} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}}). \quad (\text{Б.174})$$

Заметим, что эти уравнения можно получить и непосредственно из ковариантных уравнений (Б.157).

### Б.3.4. Диффузия излучения в медленно движущейся среде.

Посмотрим, чему соответствует диффузионное приближение в случае медленно движущейся среды. В диффузионном приближении в сопутствующих координатах должны выполняться соотношения

$$\mathcal{F}_0 = -\frac{c}{3\chi_R} \nabla \mathcal{E}_0, \quad \hat{\mathcal{P}}_0 = \frac{1}{3} \mathcal{E}_0 \hat{I}. \quad (\text{Б.175})$$

Кроме того, поскольку в сопутствующих координатах выполняется приближенное равенство  $4\pi B_0 = c \mathcal{E}_0$ , с хорошей точности можно положить  $\chi_E = \chi_P$ ,  $\chi_F = \chi_R$ . Далее, подставляя в (Б.175) преобразования (Б.168)–(Б.170), получим:

$$\mathcal{F} - \mathbf{v} \mathcal{E} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}} = -\frac{c}{3\chi_R} \nabla \mathcal{E} + \frac{c}{3\chi_R} \nabla \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}}{c^2} \right), \quad (\text{Б.176})$$

$$\hat{\mathcal{P}} - \frac{\mathbf{v} \mathcal{F} + \mathcal{F} \mathbf{v}}{c^2} = \frac{1}{3} \mathcal{E} \hat{I} - \frac{1}{3} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathcal{F}}{c^2} \hat{I}. \quad (\text{Б.177})$$

Пренебрегая в (Б.176) последним слагаемым в правой части (оно приводит к пространственным производным третьего порядка), запишем поток излучения в виде

$$\mathcal{F} = \mathbf{v} \mathcal{E} + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}} - \frac{c}{3\chi_R} \nabla \mathcal{E}. \quad (\text{Б.178})$$

Первые два слагаемых в правой части этого выражения описывают плотность потока энthalпии излучения. Последний член в правой части описывает диффузионный поток.

Из (Б.177) и (Б.178) следует, что в выражениях вида  $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}}$  и  $\mathcal{F} \cdot \mathbf{v}/c^2$  можно пренебречь всеми слагаемыми второго порядка по  $v/c$  и получить

$$\mathcal{F} \cdot \mathbf{v} = -\frac{c}{3\chi_R} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{E}, \quad \mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{3} \mathcal{E} \mathbf{v}. \quad (\text{Б.179})$$

Подставляя (Б.178) в (Б.173) и учитывая (Б.179), приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathcal{E}) = \nabla \cdot \left( \frac{c}{3\chi_R} \nabla \mathcal{E} \right) + \chi_P (4\pi B_0 - c \mathcal{E}) - \\ - \frac{1}{3} \mathcal{E} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{2}{3} \frac{\chi_P}{\chi_R} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (\text{Б.180})$$

Это уравнение описывает эволюцию энергии излучения в диффузионном приближении в случае медленно движущейся среды.

В приближении диффузии с ограниченным потоком в сопутствующих координатах должны выполняться равенства

$$\mathcal{F}_0 = -\frac{c\lambda_0}{\chi_R} \nabla \mathcal{E}_0, \quad \hat{\mathcal{P}}_0 = \hat{f}_{E,0} \mathcal{E}_0, \quad (\text{Б.181})$$

где

$$\hat{f}_{E,0} = \frac{1}{2} \left[ (1 - f_{E,0}) \hat{I} + (3f_{E,0} - 1) \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0 \right], \quad (\text{Б.182})$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{R_0} \left( \text{cth} R_0 - \frac{1}{R_0} \right), \quad R_0 = \frac{|\nabla \mathcal{E}_0|}{\chi_R \mathcal{E}_0}, \quad (\text{Б.183})$$

$$\mathbf{n}_0 = -\frac{\nabla \mathcal{E}_0}{|\nabla \mathcal{E}_0|}, \quad f_{E,0} = \lambda_0 + \lambda_0^2 R_0^2. \quad (\text{Б.184})$$

Поступая так же, как и в случае приближения обычной диффузии, приходим к следующему соотношению:

$$\mathcal{F} = \mathbf{v} \mathcal{E} + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}} - \frac{c\lambda}{\chi_R} \nabla \mathcal{E}. \quad (\text{Б.185})$$

При этом с точностью до членов второго порядка малости по  $v/c$

$$\mathcal{F} \cdot \mathbf{v} = -\frac{c\lambda}{\chi_R} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{E}, \quad \mathbf{v} \cdot \hat{\mathcal{P}} = \mathbf{v} \cdot \hat{f}_E \mathcal{E}. \quad (\text{Б.186})$$

В этих формулах использованы обозначения для лабораторной системы координат:

$$\hat{f}_E = \frac{1}{2} \left[ (1 - f_E) \hat{I} + (3f_E - 1) \mathbf{n} \mathbf{n} \right], \quad (\text{Б.187})$$

$$\lambda = \frac{1}{R} \left( \text{cth} R - \frac{1}{R} \right), \quad R = \frac{|\nabla \mathcal{E}|}{\chi_R \mathcal{E}}, \quad (\text{Б.188})$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla \mathcal{E}}{|\nabla \mathcal{E}|}, \quad f_E = \lambda + \lambda^2 R^2. \quad (\text{Б.189})$$

Подставляя (Б.185) в (Б.173) и учитывая (Б.186), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathcal{E}) = & \nabla \cdot \left( \frac{c\lambda}{\chi_R} \nabla \mathcal{E} \right) + \chi_P (4\pi B_0 - c\mathcal{E}) - \\ & - \frac{1}{2} \nabla \cdot [(1 - f_E) \mathbf{v} \mathcal{E} + (3f_E - 1) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \mathcal{E}] + \\ & + \lambda \left( 1 - 2 \frac{\chi_P}{\chi_R} \right) (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathcal{E}. \quad (\text{Б.190}) \end{aligned}$$

Это уравнение описывает эволюцию энергии излучения в приближении FLD в случае медленно движущейся среды. В пределе оптически толстой среды при  $R \rightarrow 0$  ограничитель диффузионного потока  $\lambda \rightarrow 1/3$ . Уравнение (Б.190) при этом переходит в уравнение (Б.180),

описывающее чисто диффузионное приближение. В пределе оптически тонкой среды при  $R \rightarrow \infty$  ограничитель диффузионного потока  $\lambda \rightarrow 1/R$ . В этом случае (Б.190) переходит в уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot [(c\mathbf{n} + \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \mathcal{E}] = \chi_R (4\pi B_0 - c\mathcal{E}) + (\chi_R - 2\chi_P) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathcal{E}. \quad (\text{Б.191})$$

**Б.3.5. Уравнения газодинамики и магнитной газодинамики с учетом излучения.** Уравнения нерелятивистской радиационной газодинамики могут быть выведены из релятивистских уравнений, выражающих законы сохранения энергии и импульса. Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = F^\alpha, \quad (\text{Б.192})$$

где четырехмерный вектор  $F^\alpha$  описывает внешние силы, действующие на вещество,  $T^{\alpha\beta} = T_m^{\alpha\beta} + T_r^{\alpha\beta}$  — полный тензор энергии-импульса, равный сумме тензоров энергии-импульса вещества  $T_m^{\alpha\beta}$  и излучения  $T_r^{\alpha\beta}$ . Тензор энергии-импульса излучения  $T_r^{\alpha\beta}$  удовлетворяет уравнению (см. (Б.146))

$$\nabla_\beta T_r^{\alpha\beta} = -G^\alpha. \quad (\text{Б.193})$$

С учетом этого из (Б.192) получаем уравнение для тензора энергии-импульса вещества  $T_m^{\alpha\beta}$ :

$$\nabla_\beta T_m^{\alpha\beta} = F^\alpha + G^\alpha. \quad (\text{Б.194})$$

Система уравнений (Б.193), (Б.194) описывает эволюцию энергии и импульса взаимодействующих между собой вещества и излучения. Эти уравнения учитывают релятивистские эффекты и должны решаться совместно <sup>1)</sup>.

Уравнения нерелятивистской радиационной газодинамики могут быть получены из уравнения (Б.194) разложением в ряд по степеням  $v/c$  и отбрасыванием членов высокого порядка. Рассмотрим лоренцеву систему координат, соответствующую некоторой инерциальной системе отсчета. Для вывода уравнений радиационной газодинамики используем выражение для тензора энергии-импульса идеальной жидкости (см., например, [476])

$$T_m^{\alpha\beta} = wu^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta} P, \quad (\text{Б.195})$$

где  $P$  — давление,  $w = \rho c^2 + \rho\varepsilon + P$  — плотность энтальпии,  $\rho$  — массовая плотность,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия газа. Четырехмерный вектор скорости газа  $u^\alpha$  в лоренцевой системе координат

<sup>1)</sup> В полной релятивистской модели к этим уравнениям должны быть добавлены уравнение непрерывности для плотности массы и уравнение состояния. Более подробно уравнения релятивистской газодинамики и релятивистской магнитной газодинамики рассмотрены в Приложении В.

имеет следующие компоненты:  $u^0 = \gamma$ ,  $u^i = \gamma v^i/c$ , где  $\mathbf{v}$  — трехмерный вектор скорости,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — фактор Лоренца. Компоненты четырехмерного вектора внешних сил  $F^0 = \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}/c$ ,  $F^i = \gamma f^i$ , где  $\mathbf{f}$  — трехмерный вектор внешних сил.

Прежде всего заметим, что эффекты излучения не изменяют вид уравнения непрерывности для плотности массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{Б.196})$$

поскольку в нерелятивистском пределе можно пренебречь массой излучения по сравнению с массой вещества:  $\mathcal{E} \ll \rho c^2$ ,  $\rho \varepsilon \ll \rho c^2$ .

Пространственная компонента ( $\alpha = i$ ) уравнения (Б.194) принимает вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma^2 w v^i) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \gamma^2 w \frac{v^i v^k}{c^2} + \delta^{ik} P \right) = \gamma f^i + G^i. \quad (\text{Б.197})$$

В нерелятивистском пределе

$$\frac{1}{c^2} \gamma^2 w v^i \approx \rho v^i, \quad \gamma^2 w \frac{v^i v^k}{c^2} + \delta^{ik} P \approx \rho v^i v^k + \delta^{ik} P, \quad \gamma f^i \approx f^i. \quad (\text{Б.198})$$

Подставляя эти оценки в (Б.197), приходим к уравнению движения радиационной газодинамики:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \hat{\mathbf{I}}) = \rho \mathbf{g} + \mathbf{G}, \quad (\text{Б.199})$$

где мы обозначили вектор  $\mathbf{f}/\rho$  удельной внешней силы через  $\mathbf{g}$ .

Временная компонента ( $\alpha = 0$ ) уравнения (Б.194) может быть записана в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma^2 w - P) + \frac{\partial}{\partial x^k} (\gamma^2 w v^k) = \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + c G^0. \quad (\text{Б.200})$$

В нерелятивистском пределе

$$\gamma^2 \rho c^2 \approx \rho c^2 + \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2}. \quad (\text{Б.201})$$

Поэтому можно использовать следующие приближенные равенства:

$$\gamma^2 w - P \approx \rho c^2 + e, \quad \gamma^2 w v^k \approx \rho c^2 v^k + (e + P) v^k, \quad (\text{Б.202})$$

где  $e = \rho \varepsilon + \rho v^2/2$  — плотность полной энергии газа. Кроме того, можно положить  $\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}$ . С учетом уравнения непрерывности (Б.196) и приведенных оценок, из (Б.200) получаем уравнение энергии радиационной газодинамики:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [(e + P) \mathbf{v}] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + c G^0. \quad (\text{Б.203})$$

Для вычисления величин  $G^0$  и  $\mathbf{G}$  нужно использовать выражения (Б.171) и (Б.172). Напомним, что эти величины выражаются через характеристики излучения  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  и  $\hat{\mathcal{P}}$ . Для расчета этих характеристик можно использовать как точные уравнения (Б.162), (Б.163), так и какие-либо их приближенные аналоги, подобные тем, которые рассмотрены в предыдущем разделе.

Уравнения радиационной магнитной газодинамики могут быть получены способом, аналогичным тому, который мы использовали для вывода уравнений радиационной газодинамики. Не повторяя вывод, приведем эти уравнения в окончательном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{Б.204})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P_{\Gamma} \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}}{4\pi} \right) = \rho \mathbf{g} + \mathbf{G}, \quad (\text{Б.205})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (\text{Б.206})$$

$$\frac{\partial e_{\Gamma}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ (e_{\Gamma} + P_{\Gamma}) \mathbf{v} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{4\pi} \right] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + cG^0. \quad (\text{Б.207})$$

Напомним, что в этих уравнениях

$$P_{\Gamma} = P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad e_{\Gamma} = e + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}. \quad (\text{Б.208})$$

## Приложение В

# РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ

В книге рассматривались ТДС, в которых релятивистские эффекты не играют значительной роли. Однако имеется большое количество ТДС с релятивистскими компонентами, представляющими собой нейтронные звезды или черные дыры. Для описания процесса массообмена в таких системах необходимо использовать уравнения релятивистской газодинамики или релятивистской магнитной газодинамики. В данном приложении мы приводим необходимые уравнения и обсуждаем возможные подходы для моделирования структуры течения в ТДС с релятивистскими компонентами.

### **В.1. Описание релятивистских течений в тесных двойных системах**

**В.1.1. О возможных постановках задач моделирования структуры течения в ТДС с релятивистскими компонентами.** Существует достаточно большое число тесных двойных систем, в которых на процесс массообмена и аккреции существенное влияние могут оказывать релятивистские эффекты. К таким системам, в первую очередь, следует отнести рентгеновские двойные системы. Звездой-аккретором в них является релятивистский компактный объект — нейтронная звезда или черная дыра. Аккреция вещества на компактный объект приводит к высвечиванию энергии в рентгеновском диапазоне. Поэтому такие системы наблюдаются в виде интенсивных источников рентгеновского излучения.

Различают три основных типа рентгеновских двойных систем (см., например, [108]). К первому типу (I) относятся системы с массивными оптическими компонентами ранних спектральных классов (O–B звезды). Этот тип иногда подразделяют на два подтипа Ia и Ib, которые отличаются по величине периода пульсаций и интенсивности рентгеновского излучения. Ко второму типу (II) относятся системы с Be-компонентами. Некоторые аспекты, связанные с такими системами, были нами рассмотрены в гл. 12 (Be/X-звезды). Рентгеновское излучение в Be/X-звездах возникает в результате процесса аккреции вещества из оболочки Be-компонента на нейтронную звезду. К третьему типу (III) относятся системы с маломассивными компонентами.

Звездой-аккретором в таких системах является нейтронная звезда или черная дыра, а звездой-донором — маломассивная звезда главной последовательности, белый карлик или красный гигант. Наиболее яркой частью систем типа III является аккреционный диск, формирующийся вокруг компактного объекта. Орбитальные периоды этих двойных систем распределены в довольно широком диапазоне от 10 минут до сотни дней. Черные дыры обнаруживаются в рентгеновских двойных системах типа I и III [575].

Интересными объектами являются микроквazarы. Это тесные двойные системы с релятивистскими коллимированными струями (джетами), скорость движения вещества в которых может достигать значений до  $0.98c$ . Прототипом этих систем, по видимому, следует считать систему SS 433. К настоящему времени в нашей Галактике обнаружено около полутора десятков микроквazarов. Как правило, компактным объектом в них является черная дыра. Формирование джета происходит вблизи компактного объекта. Принято считать, что источником энергии джета в микроквazарах служит энергия вращения черной дыры [576], а коллимация джета обеспечивается магнитным полем за счет механизма, предложенного Блэндфордом и Знайеком [577].

Моделирование структуры течения в ТДС с учетом релятивистских эффектов можно проводить в рамках приближения релятивистской газодинамики (или магнитной газодинамики) на фоне заданной геометрии пространства–времени, формируемой гравитирующими объектами. Поскольку в общей теории относительности из-за нелинейности уравнений Эйнштейна принцип суперпозиции для гравитационного поля не работает (см., например, [476]), то аналитическое описание поля сил в двойной системе (например, по аналогии с приближением Роша в нерелятивистском случае) оказывается невозможным. С другой стороны оценки показывают, что для типичных представителей рентгеновских двойных звезд типа I и III гравитационный радиус компактного объекта

$$r_g = \frac{2GM_a}{c^2} \quad (\text{B.1})$$

лежит в пределах от  $10^{-6}A$  до  $10^{-4}A$ . Если, например, процесс массообмена в такой системе приводит к формированию аккреционного диска, то это означает, что релятивистские эффекты не оказывают влияния на структуру внешних частей диска. В самых внутренних частях диска, где становятся существенными релятивистские эффекты, гравитационное поле вторичного компонента можно не учитывать и поэтому структура пространства–времени будет определяться только компактным объектом.

На основе этих соображений задачу моделирования структуры течения в релятивистской ТДС можно разделить на две подзадачи. На первом этапе моделирования проводится расчет структуры течения во внешних частях аккреционного диска. Такое моделирование можно



проводить в рамках обычных постановок задач, которые рассмотрены нами в ч. III и IV книги. Возникающие на этом этапе небольшие релятивистские поправки (порядка 1%) можно учесть с помощью замены ньютоновского гравитационного потенциала звезды-аккретора на соответствующий псевдоньютоновский потенциал. В этом приближении в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг общего центра масс, потенциал Роша  $\Phi$  определяется выражением:

$$\Phi = -\frac{GM_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a| - r_g} - \frac{GM_d}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_d|} - \frac{1}{2} [\Omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)]^2, \quad (\text{B.2})$$

где  $r_g$  — гравитационный радиус компактного объекта (B.1). Использование псевдоньютоновского потенциала позволяет в рамках ньютоновской теории гравитации приближенно описать гравитационное поле невращающейся черной дыры. В частности, этот потенциал учитывает наличие особенности на гравитационном радиусе в метрике Шварцшильда. Кроме того, псевдоньютоновский потенциал дает правильное значение для радиуса внутренней устойчивой орбиты, равное  $3r_g$ .

На втором этапе моделирования проводится более подробный расчет структуры течения во внутренних частях аккреционного диска. На этом этапе гравитационное поле вторичного компонента можно непосредственно не учитывать, но его влияние косвенным образом учитывается за счет неосесимметричных граничных условий. При этом условия на внешней границе расчетной области на втором этапе необходимо задавать, используя результат решения задачи на предыдущем этапе. Численное решение внутренней задачи должно строиться с корректным учетом релятивистских эффектов в рамках общей теории относительности. Для этого структуру течения необходимо моделировать на фоне заданной геометрии пространства–времени, которая формируется гравитационным полем компактного объекта. В качестве фоновой геометрии можно рассматривать метрику Шварцшильда для невращающейся черной дыры или метрику Керра, описывающей гравитационное поле вращающейся черной дыры (см., например, [476]).

Задача дисковой аккреции на компактный релятивистский объект рассматривалась неоднократно многими авторами. С различными аспектами этой задачи можно ознакомиться, например, в книгах [64, 578, 579]. Здесь мы не будем обсуждать эти вопросы. Однако отметим, что в рамках этой задачи гравитирующий объект рассматривается как одиночный и влияние вторичного компонента не учитывается.

Для моделирования релятивистских течений на фоне заданной произвольной геометрии пространства–времени разработано множество разностных схем и соответствующих численных кодов. Обзор по методам численного моделирования релятивистских газодинамических течений можно найти в работе [580]. Разностные схемы годуновского типа для уравнений релятивистской магнитной газодинамики описаны в работах [307, 308, 582–591] (см. также обзор [592]).

**В.1.2. Описание систем отсчета в теории относительности.** В теории относительности (как в специальной, так и в общей) важную роль играет понятие системы отсчета. В общем случае это понятие не сводится к понятию системы координат, задаваемой в пространстве–времени. Система отсчета связана с процедурами измерения пространственных и временных промежутков, а также иных геометрических и физических величин, которые проводятся наблюдателями, находящимися в пространстве и, вообще говоря, движущимися произвольным образом. В качестве наблюдателей рассматриваются некие пробные частицы, с которыми связаны часы, показывающие их собственное время. Кроме того, можно считать, что у наблюдателей имеются и другие необходимые измерительные приборы. Собственные часы наблюдателей позволяют измерять временные компоненты тензорных величин и отделять их от пространственных компонент. Измеренные таким способом компоненты тензоров относятся именно к данному наблюдателю. Поскольку с ним связана мировая линия в пространстве–времени, то можно говорить о таких измерениях вдоль всей этой мировой линии. Для полного задания системы отсчета во всем пространстве–времени необходимо положить, что имеется континуум таких наблюдателей, мировые линии которых заполняют все пространство–время.

Мировые линии наблюдателей нигде не должны пересекаться. Иначе это означало бы, что в некоторых точках пространства в некоторые моменты времени одновременно оказываются два или большее число наблюдателей. Таким образом, через каждую точку пространства–времени должна проходить только одна такая мировая линия. При этом все мировые линии наблюдателей в совокупности должны заполнять собой все пространство–время. Это означает, что для задания системы отсчета в теории относительности необходимо определить *конгруэнцию* времени-подобных мировых линий, соответствующих различным наблюдателям. Ясно, что в данном пространстве–времени такие конгруэнции можно определить бесконечным количеством способов. Каждый способ задания конгруэнции соответствует выбору определенной системы отсчета.

Рассмотрим произвольную точку в пространстве–времени. Поскольку для заданной конгруэнции через эту точку проходит только одна мировая линия, то можно в этой точке задать четырехмерный единичный вектор, касательный к этой мировой линии. Обозначим этот вектор через  $\tau^\mu$ . Из условия времени-подобия мировых линий следует, что квадрат этого вектора  $\tau^\mu \tau_\mu = 1$ . Вектор  $\tau^\mu$  имеет простой физический смысл. В данной точке пространства–времени его следует отождествить с четырехмерным вектором скорости наблюдателя, мировая линия которого проходит через эту точку. Таким образом, описанный метод определения системы отсчета опирается на задание в каждой точке пространства–времени одного единичного времени-подобного вектора (монады), выделяющего временное направление. Поэтому этот

метод получил название *монадного* метода (см., например, [593]). Выделение вектора  $\tau^\mu$  в каждой точке пространства–времени позволяет провести процедуру локального (в малой окрестности данной точки пространства–времени) 1+3 расщепления четырехмерного пространства–времени на время и ортогональное ему трехмерное пространство. Подчеркнем, что это расщепление в общем случае является локальным и проводится в рамках конкретной системы отсчета.

В монадном методе трехмерное пространство рассматривается как пространственно-подобная гиперповерхность, ортогональная вектору монады  $\tau^\mu$ . Метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - h_{\mu\nu}, \quad (\text{B.3})$$

где симметричный тензор  $h_{\mu\nu}$  описывает метрику трехмерного пространства в данной системе отсчета. Используя (B.3), нетрудно убедиться, что вектор  $\tau_\mu$  и тензор  $h_{\mu\nu}$  удовлетворяют условию ортогональности:  $\tau^\alpha h_{\alpha\mu} = 0$ . Кроме того, тензор  $h_{\mu\nu}$  имеет не 10 (как исходный метрический тензор  $g_{\mu\nu}$ ), а только 6 независимых компонент, поскольку его квадрат  $h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 3$ , как и положено метрическому тензору в трехмерном пространстве.

Вектор монады  $\tau^\mu$  позволяет строить для данной системы отсчета временные компоненты тензора с помощью соответствующих проекций. В результате такой процедуры получаются четырехмерные скалярные величины. Например, для тензора  $A_{\mu\nu}^\alpha$  можно построить скалярную величину  $A_{\mu\nu}^\alpha \tau_\alpha \tau^\mu \tau^\nu$ . Произвольный вектор  $A^\mu$  можно разложить на продольную и поперечную составляющие:

$$A^\mu = \tau^\mu \tau_\alpha A^\alpha + \tilde{A}^\alpha, \quad (\text{B.4})$$

где

$$\tilde{A}^\mu = -h_\alpha^\mu A^\alpha, \quad \tau_\alpha \tilde{A}^\alpha = 0. \quad (\text{B.5})$$

В этом выражении тензор  $-h_\nu^\mu$  проектирует вектор  $A^\mu$  на гиперповерхность, ортогональную монаде  $\tau^\mu$ . При этом спроектированный вектор  $\tilde{A}^\mu$  является касательным к этой гиперповерхности, т. е. для данной системы отсчета он является пространственным вектором. Аналогичным образом можно строить проекции и для тензоров произвольной природы. Например,

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta A_{\alpha\beta}, \quad \tilde{A}_{\mu\nu}^\lambda = -h_\gamma^\lambda h_\mu^\alpha h_\nu^\beta A_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (\text{B.6})$$

Знаки перед правыми частями в этих выражениях равны  $(-1)^n$ , где  $n$  — ранг тензора.

Используя (B.3), перепишем выражение для квадрата интервала в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \tau_\mu \tau_\nu dx^\mu dx^\nu - h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{B.7})$$

Обозначим  $cd\tau = \tau_\mu dx^\mu$ . Эта величина описывает промежуток времени  $d\tau$  между двумя бесконечно близкими событиями, измеряемый

в данной системе отсчета. Вектор  $dx^\mu$  можно разложить на продольную и поперечную компоненты:  $dx^\mu = \tau^\mu c d\tau + d\tilde{x}^\mu$ . При этом

$$h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = h_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu = dl^2. \quad (\text{B.8})$$

Величина  $dl$  определяет пространственное расстояние между рассматриваемыми двумя бесконечно близкими событиями, измеряемое в данной системе отсчета. Таким образом, по отношению к данной системе отсчета квадрат интервала можно представить в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2. \quad (\text{B.9})$$

Из компонент метрического тензора (B.3) и их первых производных по координатам можно составить физико-геометрические тензорные величины, характеризующие систему отсчета. Простой анализ показывает [593], что можно построить три таких тензора: четырехмерный вектор  $a_\mu$ , антисимметричный тензор второго ранга  $\Omega_{\mu\nu}$  и симметричный тензор второго ранга  $D_{\mu\nu}$ . Все эти тензоры являются пространственно спроектированными, т. е. относятся к гиперповерхности, ортогональной к вектору монады  $\tau^\mu$ . Первый тензор  $a_\mu$  имеет смысл вектора ускорения наблюдателя, с которым локально связана данная система отсчета. Антисимметричный тензор  $\Omega_{\mu\nu}$  можно интерпретировать как тензор угловой скорости вращения системы отсчета. Наконец, тензор  $D_{\mu\nu}$  следует интерпретировать как тензор скоростей деформации системы отсчета. Явные выражения этих тензоров через вектор  $\tau^\mu$  и тензор  $h_{\mu\nu}$  мы выписывать не будем, поскольку они нам нигде в дальнейшем изложении не понадобятся. Заинтересованный читатель может найти эти выражения, например, в книге Владимирова [593].

Таким образом, монадный метод в общем случае подразумевает построение неинерциальной системы отсчета. Такая система отсчета может ускоряться, вращаться, а также деформироваться. Последнее свойство обусловлено тем, что система отсчета описывается непрерывным множеством наблюдателей, движения которых могут различаться. Это приводит к тому, что система отсчета, связанная с такими наблюдателями, является эластичной и может растягиваться или сжиматься (расхождение или схождение мировых линий соседних наблюдателей), а также иметь сдвиговые деформации (один наблюдатель отстает от другого).

Можно определить тензор  $K_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} - \Omega_{\mu\nu}$ , который имеет смысл тензора внешней кривизны пространственно-подобной гиперповерхности, ортогональной вектору монады  $\tau^\mu$ . В общем случае этот тензор не является симметричным. Однако в случае так называемых *нормальных* систем отсчета, в которых  $\Omega_{\mu\nu} = 0$ , этот тензор становится симметричным и равным тензору скоростей деформации  $K_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}$ . Использование нормальных систем отсчета приводит к более простым выражениям. Поэтому их активно используют при численном моделировании релятивистских течений.

**В.1.3. Метод кинеметрических инвариантов.** Как указывалось выше, в монадном методе в общем случае 1+3 расщепление пространства–времени имеет локальный характер. Однако для построения релятивистских численных моделей этого недостаточно, поскольку решение необходимо находить в любой заданной точке пространства–времени. Вместе с тем существуют целые классы методов глобального расщепления. Эти методы, как правило, основаны на использовании нормальных систем отсчета, в которых тензор угловой скорости вращения  $\Omega_{\mu\nu} = 0$ . Одним из таких методов является метод кинеметрических инвариантов <sup>1)</sup> [593]. Большинство современных численных моделей для описания релятивистских течений основаны на использовании этого метода (см., например, [580, 595]). Поэтому опишем его более подробно.

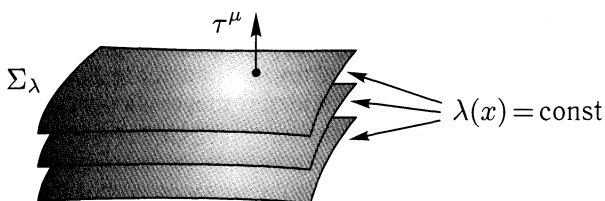


Рис. В.1. Глобальное 1+3 расщепление пространства–времени в методе кинеметрических инвариантов

Рассмотрим заданное в пространстве–времени некоторое регулярное скалярное поле  $\lambda(x) = \lambda(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , такое что градиент этого поля  $\nabla_\mu \lambda$  во всех точках является времени-подобным вектором. Свойство регулярности означает, что ни в одной точке градиент не обращается в нуль,  $\nabla_\mu \lambda \neq 0$ . Это свойство позволяет построить семейство не пересекающихся пространственно-подобных гиперповерхностей  $\Sigma_\lambda$ , представляющих собой поверхности равного уровня величины  $\lambda$ . Иными словами, каждая гиперповерхность  $\Sigma_\lambda$  определяется совокупностью точек пространства–времени, удовлетворяющих условию  $\lambda(x) = \text{const}$  (см. рис. В.1). Различные значения постоянной соответствуют различным гиперповерхностям. Таким образом, величина  $\lambda$  нумерует эти гиперповерхности, т.е. является их параметром. Совокупность всех гиперповерхностей  $\Sigma_\lambda$  полностью заполняет пространство–время.

Градиент  $\nabla_\mu \lambda$  представляет собой вектор, ортогональный к гиперповерхности  $\Sigma_\lambda$ . Будем рассматривать гиперповерхности  $\Sigma_\lambda$  в качестве трехмерных пространств для различных моментов времени в некоторой

<sup>1)</sup> В западной литературе этот метод известен как формализм Арновитта–Дезера–Мизнера (ADM) [594]. Заметим однако, что, как правило, его выводят самостоятельным образом, а не в рамках более общего монадного метода (см., например, [571]).

системе отсчета. Тогда вектор нормали к каждой гиперповерхности должен совпадать с вектором монады  $\tau^\mu$ . Учитывая условие нормирования вектора монады, можно положить

$$\tau_\mu = \alpha \nabla_\mu \lambda, \quad (\text{B.10})$$

где скалярная величина  $\alpha = 1/|\nabla_\mu \lambda|$  называется *функцией хода* [571]. Значение этой функции должно быть строго положительными ( $\alpha > 0$ ), поскольку вектор  $\tau_\mu$  должен быть направлен в будущее. Строгое неравенство связано с требованием регулярности скалярного поля  $\lambda(x)$ .

С построенным семейством гиперповерхностей  $\Sigma_\lambda$  удобно ассоциировать систему координат следующего вида. Для описания точек, лежащих на гиперповерхности  $\Sigma_\lambda$ , будем использовать координаты  $x^1, x^2, x^3$ . Параметр  $\lambda$ , нумерующий гиперповерхности можно связать с временной координатой  $\lambda = x^0$ . Совокупность координат  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  однозначным образом параметризует все точки пространства–времени. С этой системой координат можно связать координатный локальный базис. Векторы этого базиса представляют собой векторы, касательные к соответствующим координатным линиям. При этом особое значение имеют базисные векторы, определяющие временное направление. Ковариантным временным вектором локального базиса является вектор  $\nabla_\mu \lambda = \tau_\mu / \alpha$ , а контравариантным —  $\partial x^\mu / \partial \lambda$ . Учитывая условие нормировки

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \nabla_\mu \lambda = 1, \quad (\text{B.11})$$

контравариантный вектор  $\partial x^\mu / \partial \lambda$  можно в общем случае представить в следующем виде:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} = \alpha \tau^\mu + \beta^\mu. \quad (\text{B.12})$$

Вектор  $\beta^\mu$  называется *вектором сдвига*. Он удовлетворяет условию ортогональности  $\tau_\mu \beta^\mu = 0$  и поэтому является пространственно спроектированным вектором. Поскольку  $\beta^\mu \nabla_\mu \lambda = 0$ , то временная компонента  $\beta^0 = 0$ . Квадрат вектора сдвига

$$\beta_\mu \beta^\mu = -h_{\mu\nu} \beta^\mu \beta^\nu = -h_{ik} \beta^i \beta^k = -\beta_i \beta^i, \quad (\text{B.13})$$

где обозначено  $\beta_i = h_{ik} \beta^k$ .

Временная компонента метрического тензора

$$g_{00} = (\alpha \tau_\mu + \beta_\mu) (\alpha \tau^\mu + \beta^\mu) = \alpha^2 + \beta_\mu \beta^\mu = \alpha^2 - \beta_i \beta^i. \quad (\text{B.14})$$

Для остальных компонент метрического тензора можно получить следующие выражения:

$$g_{0i} = -\beta_i, \quad g_{ik} = -h_{ik}. \quad (\text{B.15})$$

При этом  $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{h}$ , где через  $g$  обозначен определитель матрицы  $g_{\mu\nu}$ , а через  $h$  — определитель матрицы  $h_{ik}$ . Квадрат интервала в построенной системе координат записывается в виде

$$ds^2 = (\alpha - \beta_i\beta^i)dx^0 dx^0 - 2\beta_i dx^i dx^0 - h_{ik} dx^i dx^k. \quad (\text{B.16})$$

Предельному случаю лоренцевой системы координат соответствуют значения  $\alpha = 1$ ,  $\beta^i = 0$ ,  $h_{ik} = \delta_{ik}$ . Вектор монады имеет следующие контравариантные и ковариантные компоненты:

$$\tau^\mu = \left( \frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^1}{\alpha}, -\frac{\beta^2}{\alpha}, -\frac{\beta^3}{\alpha} \right), \quad \tau_\mu = (\alpha, 0, 0, 0). \quad (\text{B.17})$$

В системе координат, определяемой квадратом интервала (B.16), контравариантные и ковариантные компоненты произвольного пространственного вектора могут быть представлены в виде

$$A^\mu = (0, A^1, A^2, A^3), \quad A_\mu = (\beta_i A^i, -A_1, -A_2, -A_3), \quad (\text{B.18})$$

где обозначено  $A_i = h_{ik} A^k$ . Аналогичные выражения можно записать и для контравариантных и ковариантных компонент пространственных тензоров произвольного ранга.

Описанная кинеметрическая система координат определена неоднозначным образом. Действительно, нетрудно проверить [593], что преобразования координат

$$x'^0 = x'^0(x^0), \quad x'^i = x'^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\text{B.19})$$

не выводят за пределы данной системы отсчета. Поэтому они позволяют построить бесконечное множество систем координат, связанных с одной и той же конгруэнцией мировых линий с касательными векторами  $\tau^\mu$  вида (B.17).

**В.1.4. Тензор энергии–импульса.** Рассмотрим монадное представление тензора энергии–импульса  $T_{\mu\nu}$ . В рамках заданной системы отсчета можно определить следующие величины: плотность энергии

$$W = \tau^\alpha \tau^\beta T_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.20})$$

вектор плотности потока энергии

$$S_\mu = -\tau^\alpha h_\mu^\beta T_{\alpha\beta} \quad (\text{B.21})$$

и тензор напряжений

$$\sigma_{\mu\nu} = -h_\mu^\alpha h_\nu^\beta T_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.22})$$

Отметим, что величина  $W$  является скаляром, а вектор  $S_\mu$  и тензор  $\sigma_{\mu\nu}$  являются пространственно спроектированными. С помощью введенных величин тензор энергии–импульса можно представить в виде

$$T_{\mu\nu} = W\tau_\mu\tau_\nu + S_\mu\tau_\nu + \tau_\mu S_\nu - \sigma_{\mu\nu}. \quad (\text{B.23})$$

Такое представление, записанное для произвольной системы отсчета, отвечает структуре тензора энергии–импульса в лоренцевых системах координат (см., например, [476]).

С учетом выражений (В.16) из (В.23) получаем явный вид контравариантных компонент тензора энергии–импульса:

$$T^{00} = \frac{1}{\alpha^2} W, \quad T^{0i} = \frac{1}{\alpha} S^i - \frac{1}{\alpha^2} W \beta^i, \quad (\text{В.24})$$

$$T^{ik} = \frac{1}{\alpha^2} W \beta^i \beta^k - \frac{1}{\alpha} (S^i \beta^k + S^k \beta^i) - \sigma^{ik}. \quad (\text{В.25})$$

Ковариантные и смешанные компоненты можно получить отсюда с помощью правил опускания индексов:

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}, \quad T_{\nu}^{\mu} = g_{\nu\alpha} T^{\mu\alpha}. \quad (\text{В.26})$$

Уравнение

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\mu} = 0, \quad (\text{В.27})$$

выражающее собой законы сохранения энергии и импульса, в развернутой записи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} T^{\alpha\mu}) = -\sqrt{-g} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} T^{\alpha\beta}, \quad (\text{В.28})$$

где  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  — символы Кристоффеля. Обозначим источниковый член в правой части (В.28) через  $R^{\mu}$ . Тогда в системе координат, определяемой квадратом интервала (В.16), с учетом выражений (В.24) и (В.25) компоненты уравнения (В.28) могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{h} W/\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{h} (S^k - \beta^k W/\alpha)] = R^0, \quad (\text{В.29})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^0} [\sqrt{h} (S^i - \beta^i W/\alpha)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{h} (\beta^i \beta^k W/\alpha - S^i \beta^k - S^k \beta^i - \alpha \sigma^{ik})] = R^i. \end{aligned} \quad (\text{В.30})$$

В параграфах В.2 и В.3 будут рассмотрены уравнения релятивистской газодинамики и релятивистской магнитной газодинамики. Для этих случаев будут определены в явном виде выражения для плотности энергии  $W$ , вектора плотности потока энергии  $S^i$  и тензора напряжений  $\sigma^{ik}$ .



## В.2. Релятивистская газодинамика

**В.2.1. Система уравнений релятивистской газодинамики.** В релятивистской физике закон сохранения массы не выполняется (см., например, [476]). Вместо этого удобнее говорить о сохранении числа частиц. Поэтому при описании релятивистских газодинамических течений, как правило, используются не удельные величины, как в нерелятивистской газодинамике, а величины, относящиеся к единичному объему.

Для описания термодинамических величин будем использовать следующие обозначения (см., например, [145]). Число частиц в единице объема обозначим через  $n$ <sup>1)</sup>. Давление и удельную внутреннюю энергию газа обозначим, как обычно, через  $P$  и  $\epsilon$  соответственно. Через  $s$  и  $e$  обозначим энтропию, рассчитанную на одну частицу и плотность полной внутренней энергии газа, которая включает помимо всего прочего энергию покоя газа. Плотность энтропии при этом будет равна  $ns$ . Наконец, введем плотность тепловой функции  $w$  (энтальпии), которая определяется выражением  $w = e + P$ . Отметим, что все эти термодинамические величины относятся к системе отсчета, в которой вещество покоится. Поэтому все они являются четырехмерными скалярами.

В сопутствующей системе отсчета отношение  $1/n$  равно объему, приходящемуся на одну частицу. Второе начало термодинамики удобно записать для величин, рассчитанных на одну частицу:

$$d\left(\frac{e}{n}\right) = Td\left(\frac{s}{n}\right) - Pd\left(\frac{1}{n}\right). \quad (\text{B.31})$$

Это соотношение можно переписать в более удобном виде:

$$de = nTds + \frac{w}{n}dn. \quad (\text{B.32})$$

Поскольку слева стоит полный дифференциал, то коэффициенты при дифференциалах в правой части должны удовлетворять равенствам:

$$\frac{w}{n} = \left(\frac{\partial e}{\partial n}\right)_s, \quad nT = \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_n \quad (\text{B.33})$$

или

$$P(n, s) = n \left(\frac{\partial e}{\partial n}\right)_s - e, \quad T(n, s) = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_n. \quad (\text{B.34})$$

Отсюда, в частности, следует, что если известна зависимость плотности полной энергии от числа частиц и плотности энтропии,  $e(n, s)$ ,

<sup>1)</sup> При очень высоких температурах может происходить рождение дополнительных частиц. В силу закона сохранения заряда они должны рождаться парами, состоящими из частиц и античастиц. При этом должна сохраняться разность между числом частиц и числом античастиц. В этом случае под величиной  $n$  нужно понимать эту разность.

то соответствующие зависимости для давления  $P(n, s)$  и температуры  $T(n, s)$  можно определить по формулам (В.34). Кроме того, из соотношений (В.33) находим:

$$\left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w}{n} \right) \right)_n = \left( \frac{\partial}{\partial n} (nT) \right)_s. \quad (\text{В.35})$$

Это позволяет получить следующее термодинамическое равенство:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_n = n^2 \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s. \quad (\text{В.36})$$

Рассмотрим движение какого-либо элемента газа («жидкой» частицы). В монадном методе квадрат интервала между двумя бесконечно близкими событиями, связанными с этим элементом, можно записать в виде (см. (В.9))

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2 = c^2 d\tau^2 (1 - v^2), \quad (\text{В.37})$$

где обозначено

$$v = \frac{1}{c} \frac{dl}{d\tau}. \quad (\text{В.38})$$

Можно ввести четырехмерный вектор

$$v^\mu = \frac{1}{c} \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} = -\frac{1}{c} h_\alpha^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (\text{В.39})$$

Тогда

$$v^2 = h_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = -g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \quad (\text{В.40})$$

Вектор  $v^\mu$  является пространственно-подобным, поскольку его квадрат отрицателен. Это свойство непосредственно связано с его определением (В.39) как пространственно спроектированного вектора. В монадном методе он относится к гиперповерхностям, ортогональным вектору монады  $\tau^\mu$  и описывает пространственную скорость элемента газа в данной системе отсчета. В методе кинематрических инвариантов временная контравариантная компонента этого вектора  $v^0 = 0$ , а пространственные контравариантные компоненты  $v^i$  соответствуют компонентам трехмерного вектора скорости элемента газа в данной системе отсчета.

Четырехмерный вектор скорости элемента газа

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\gamma}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (\text{В.41})$$

где  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  — фактор Лоренца. С учетом соотношения  $dx^\mu = \tau^\mu c d\tau + d\tilde{x}^\mu$  можно получить:

$$u^\mu = \gamma (\tau^\mu + v^\mu), \quad (\text{В.42})$$

Это выражение показывает, что продольная компонента вектора скорости  $u^\mu$  (вдоль вектора монады  $\tau^\mu$ ) равна  $\gamma\tau^\mu$ , а поперечная компонента

равна  $\tilde{u}^\mu = \gamma v^\mu$ . В системе координат, определяемой квадратом интервала (В.16), контравариантные компоненты вектора скорости

$$u^0 = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad u^i = \gamma \left( v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right). \quad (\text{В.43})$$

Уравнение непрерывности для числа частиц можно записать в виде

$$\nabla_\mu (n u^\mu) = 0. \quad (\text{В.44})$$

Вектор  $n u^\mu$  определяет плотность потока числа частиц. В развернутой записи с учетом выражений для компонент скорости (В.43) это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{h} n \gamma) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left[ \sqrt{h} n \gamma (\alpha v^k - \beta^k) \right] = 0. \quad (\text{В.45})$$

Закон сохранения энергии–импульса в релятивистской физике выражается уравнением (В.27), которое в развернутой записи имеет вид (В.29), (В.30). Тензор энергии–импульса в приближении идеальной жидкости имеет вид (см, например, [145])

$$T_{\mu\nu} = w u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} P. \quad (\text{В.46})$$

Используя формулы (В.24) и (В.25), после несложных выкладок, можно получить следующие выражения для плотности энергии, вектора плотности потока энергии и тензора напряжений:

$$W = \gamma^2 w - P, \quad S^i = \gamma^2 w v^i, \quad \sigma^{ik} = -\gamma^2 w v^i v^k - h^{ik} P, \quad (\text{В.47})$$

где  $h^{ik}$  — контравариантные компоненты пространственного метрического тензора. Эти компоненты получаются с помощью обращения матрицы, составленной из ковариантных компонент:  $h^{il} h_{lk} = \delta_k^i$ . Уравнения сохранения энергии–импульса в релятивистской газодинамике получаются теперь из уравнений (В.29) и (В.30) после подстановки в них выражений (В.47). Полная система уравнений релятивистской газодинамики включает при этом еще и уравнение непрерывности (В.45).

Подставляя выражение (В.46) для тензора энергии–импульса в уравнение сохранения (В.27) и вычисля дивергенцию  $\nabla_\alpha T^{\alpha\mu}$ , получим:

$$u^\mu (u^\alpha \nabla_\alpha w + w \nabla_\alpha u^\alpha) + w u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu - \nabla^\alpha P = 0. \quad (\text{В.48})$$

Спроектируем это уравнение на вектор скорости  $u^\mu$ . С учетом свойства  $u_\mu u^\mu = 1$  приходим к уравнению:

$$u^\alpha \nabla_\alpha e + w \nabla_\alpha u^\alpha = 0. \quad (\text{В.49})$$

Это уравнение является релятивистским аналогом уравнения энергии в нерелятивистской газодинамике.

Проекционный тензор  $P^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}$ , наоборот, отсекает перпендикулярное к вектору скорости  $u^\mu$  направление. Умножая скалярно уравнение сохранения энергии-импульса (В.27) на тензор  $P^{\mu\nu}$ , после несложных вычислений находим:

$$wu^\alpha \nabla_\alpha u^\mu + P^{\mu\alpha} \nabla_\alpha P = 0. \quad (\text{В.50})$$

Это уравнение представляет собой релятивистский аналог уравнения Эйлера в нерелятивистской газодинамике.

Найдем уравнение, которому удовлетворяет энтропия газа  $s$ . Будем рассматривать изменения термодинамических величин, характеризующих данный элемент газа при его перемещении вдоль мировой линии. Для двух бесконечно близких событий на мировой линии этого элемента эти изменения могут быть вычислены через производные вдоль вектора скорости. Например, изменение числа частиц

$$dn = dx^\alpha \nabla_\alpha n = (u^\alpha \nabla_\alpha n) ds. \quad (\text{В.51})$$

Поэтому второе начало термодинамики (В.32) можно переписать в виде уравнения

$$u^\alpha \nabla_\alpha e = \frac{w}{n} u^\alpha \nabla_\alpha n + nT u^\alpha \nabla_\alpha s. \quad (\text{В.52})$$

Далее, раскрывая дивергенцию в уравнении непрерывности (В.44), находим:

$$u^\alpha \nabla_\alpha n = -n \nabla_\alpha u^\alpha. \quad (\text{В.53})$$

Из уравнений (В.49), (В.52) и (В.53) получаем:

$$u^\alpha \nabla_\alpha s = 0. \quad (\text{В.54})$$

Это уравнение имеет простой физический смысл. В приближении идеальной жидкости, когда диссипативные процессы не учитываются, энтропия  $s$  сохраняется вдоль мировой линии элемента газа. С учетом уравнения непрерывности для числа частиц (В.44) это уравнение можно переписать в виде закона сохранения:

$$\nabla_\mu (nsu^\mu) = 0. \quad (\text{В.55})$$

Вектор  $nsu^\mu$  определяет плотность потока энтропии. В кинематрической калибровке (В.16) контравариантные компоненты этого вектора имеют вид

$$nsu^0 = \frac{\gamma}{\alpha} ns, \quad nsu^i = \frac{\gamma}{\alpha} ns (\alpha v^i - \beta^i). \quad (\text{В.56})$$

Поэтому в развернутой записи уравнение (В.55) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{h} \gamma ns) + \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{h} \gamma ns (\alpha v^k - \beta^k)] = 0. \quad (\text{В.57})$$

Исследуем характеристическую структуру уравнений релятивистской газодинамики. Проще всего это сделать, переписав все уравнения в квазилинейной форме. В качестве подходящей системы уравнений выберем систему, состоящую из уравнения непрерывности (В.53), уравнения Эйлера (В.50) и уравнения для энтропии (В.55), которое в квазилинейной форме имеет вид (В.54). Считая, что давление зависит от плотности и энтропии,  $P = P(n, s)$ , распишем градиент давления:

$$\nabla_{\alpha} P = P'_n \nabla_{\alpha} n + P'_s \nabla_{\alpha} s, \quad (\text{В.58})$$

где обозначено

$$P'_n = \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_s, \quad P'_s = \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_n. \quad (\text{В.59})$$

Определим вектор переменных  $\mathbf{q} = (n, w^{\mu}, s)^T$ . Тогда система уравнений (В.53), (В.50) и (В.54) может быть записана следующим образом:

$$\mathcal{A}^{\alpha} \cdot \nabla_{\alpha} \mathbf{q} = 0, \quad (\text{В.60})$$

где матрицы коэффициентов

$$\mathcal{A}^{\alpha} = \begin{pmatrix} u^{\alpha} & n \delta_{\nu}^{\alpha} & 0 \\ P'_n P^{\mu\alpha} & w u^{\alpha} \delta_{\nu}^{\mu} & P'_s P^{\mu\alpha} \\ 0 & 0_{\nu} & u^{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (\text{В.61})$$

Здесь индекс  $\alpha$  является номером матрицы, а индексы  $\mu$  и  $\nu$  независимо изменяются от 0 до 3. При этом верхний индекс  $\mu$  формирует столбцы, а нижний индекс  $\nu$  формирует строки внутри матрицы. Через  $0_{\nu}$  обозначен нулевой ковариантный вектор,  $0_{\nu} = (0, 0, 0, 0)$ . Сами матрицы  $\mathcal{A}^{\alpha}$  являются матрицами размерности  $6 \times 6$ . Следует отметить, что система уравнений (В.60) записана через ковариантные, а не частные производные. Однако это обстоятельство не мешает исследованию характеристических свойств этой системы. Это обусловлено тем, что ковариантные производные для скалярных величин совпадают с частными производными по координатам, а для векторных величин отличаются от частных производных недифференциальными поправками, которые выражаются через символы Кристоффеля. Эти поправки всегда можно перенести в правые части уравнений в виде источниковых членов, не влияющих на характеристические свойства системы.

Переписывая уравнение (В.60) в виде

$$\mathcal{A}^0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q} + \mathcal{A}^k \cdot \nabla_k \mathbf{q} = 0, \quad (\text{В.62})$$

нетрудно убедиться, что матрицей гиперболичности этой системы для пространственного направления  $k$  является матрица  $(\mathcal{A}^0)^{-1} \cdot \mathcal{A}^k$ . При этом предполагается, что матрица  $\mathcal{A}^0$  является невырожденной

и имеет обратную матрицу  $(\mathcal{A}^0)^{-1}$ . Собственные значения  $\lambda$  матрицы гиперболичности удовлетворяют уравнению

$$\det [(\mathcal{A}^0)^{-1} \cdot \mathcal{A}^k - \lambda \mathcal{I}] = \frac{\det (\mathcal{A}^k - \lambda \mathcal{A}^0)}{\det \mathcal{A}^0} = 0. \quad (\text{B.63})$$

Поскольку  $\det \mathcal{A}^0 \neq 0$ , то должно быть

$$\det (\mathcal{A}^k - \lambda \mathcal{A}^0) = 0. \quad (\text{B.64})$$

Для вычисления собственных значений удобно ввести характеристический вектор  $\chi_\alpha$ , выделяющий заданное пространственное направление. С помощью этого вектора можно определить характеристическую матрицу

$$\mathcal{A} = \chi_\alpha \mathcal{A}^\alpha. \quad (\text{B.65})$$

Например, в случае  $\chi_\alpha = (\lambda, -1, 0, 0)$  характеристическая матрица

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 - \lambda \mathcal{A}^0, \quad (\text{B.66})$$

т.е. равна матрице в (B.64) при  $k = 1$ . Таким образом, уравнение для собственных значений (B.64) равносильно равенству нулю определителя характеристической матрицы,  $\det \mathcal{A} = 0$ .

Характеристическая матрица имеет следующий вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} u & n\chi_\nu & 0 \\ P'_n P^\mu & w u \delta_\nu^\mu & P'_s P^\mu \\ 0 & 0_\nu & u \end{pmatrix}, \quad (\text{B.67})$$

где обозначено  $u = \chi_\alpha u^\alpha$ ,  $P^\mu = \chi_\alpha P^{\mu\alpha}$ . Простые вычисления показывают, что определитель этой матрицы <sup>1)</sup>

$$\det \mathcal{A} = w^4 u^4 [(1 - a^2)u^2 + a^2 \chi^2], \quad (\text{B.68})$$

где  $\chi^2 = \chi_\mu \chi^\mu$  и введено обозначение для скорости звука  $a$ , выраженной в единицах скорости света, которая определяется соотношением

$$a^2 = \frac{n}{w} P'_n. \quad (\text{B.69})$$

Из условия  $\det \mathcal{A} = 0$  получаем два уравнения для собственных значений:

<sup>1)</sup> Для вычисления определителя матрицы  $\mathcal{A}$  можно воспользоваться легко проверяемым соотношением

$$\begin{vmatrix} 1 & a_\nu \\ b^\mu & \delta_\nu^\mu \end{vmatrix} = 1 - a_\mu b^\mu.$$

$$u = 0, \quad (1 - a^2)u^2 + a^2\chi^2 = 0. \quad (\text{B.70})$$

При вычислении собственных значений в кинеметрической калибровке, которая определяется метрикой (B.16), удобно ввести следующие обозначения:

$$\hat{v} = v^1, \quad \hat{\beta} = \beta^1, \quad \hat{h} = h^{11}. \quad (\text{B.71})$$

Удобство этих обозначений заключается в том, что в выражениях для собственных значений для перехода к другому пространственному направлению, отличному от направления  $k = 1$ , достаточно соответствующим образом переопределить эти величины. Сами собственные значения  $\lambda$  удобно выражать через величины  $\mu$  с помощью соотношения

$$\lambda = \alpha\mu - \hat{\beta}. \quad (\text{B.72})$$

В этих обозначениях

$$u = \gamma(\mu - \hat{v}), \quad (\text{B.73})$$

а контравариантные компоненты  $\chi^\mu$  характеристического вектора определяются выражениями

$$\chi^0 = \frac{\mu}{\alpha}, \quad \chi^i = -\frac{\mu}{\alpha}\beta^i + h^{1i}. \quad (\text{B.74})$$

Поэтому

$$\chi^2 = \mu^2 - \hat{h}. \quad (\text{B.75})$$

Первое условие в (B.70) дает четырехкратное собственное значение, которое определяется величиной

$$\mu = \hat{v}. \quad (\text{B.76})$$

Это собственное значение соответствует энтропийной и вихревым характеристикам в нерелятивистской газодинамике. Второе условие в (B.70) дает еще два собственных значения, которые определяются двумя величинами

$$\mu = \frac{(1 - a^2)\hat{v} \mp \frac{a}{\gamma}\sqrt{(1 - a^2v^2)\hat{h} - (1 - a^2)\hat{v}^2}}{1 - a^2v^2}. \quad (\text{B.77})$$

Этим собственным значениям соответствуют звуковые характеристики.

В лоренцевых системах координат, в которых  $\alpha = 1$ ,  $\hat{\beta} = 0$ ,  $\hat{h} = 1$ , выражения для собственных значений упрощаются. Для энтропийно-вихревых характеристик

$$\lambda = \hat{v}, \quad (\text{B.78})$$

а для звуковых

$$\lambda = \frac{(1 - a^2)\hat{v} \mp \frac{a}{\gamma}\sqrt{1 - \hat{v}^2 - a^2(v^2 - \hat{v}^2)}}{1 - a^2v^2}. \quad (\text{B.79})$$

Последнее выражение, по-сути, описывает релятивистский эффект Доплера для звуковых волн. Это обусловлено тем, что фазовая скорость распространения звуковых волн равна  $\lambda$ . Для плоского течения, когда  $\hat{v} = v$ , (В.79) переходит в следующее выражение:

$$\lambda = \frac{\hat{v} \mp a}{1 \mp a\hat{v}}. \quad (\text{В.80})$$

В этом случае собственное значение определяется релятивистской суммой скорости газа  $\hat{v}$  и скорости звука  $a$ . Нетрудно убедиться, что все эти выражения для собственных значений в случае малых скоростей  $v \ll 1$  переходят в их соответствующие нерелятивистские аналоги, рассматривавшиеся нами в Приложении А.

**В.2.2. Уравнение состояния.** Система уравнений релятивистской газодинамики, записанная в предыдущем разделе, не является замкнутой. Для ее замыкания необходимо еще добавить уравнение состояния, которое описывает термодинамические свойства вещества. Удобно это уравнение записывать в виде выражения для давления  $P$  через плотность  $n$  и внутреннюю энергию  $e$ ,  $P = P(n, e)$ .

Рассмотрим релятивистский идеальный одноатомный газ. Уравнение состояния такого газа может быть записано в виде соотношений (см., например, [596])

$$P = nkT, \quad e = mnc^2 \left[ \frac{K_1(1/\eta)}{K_2(1/\eta)} + 3\eta \right], \quad (\text{В.81})$$

где  $m$  — масса покоя атомов,  $T$  — температура газа, а параметр

$$\eta = \frac{kT}{mc^2}. \quad (\text{В.82})$$

При записи выражения для плотности внутренней энергии в (В.81) использованы обозначения для функций Макдональда (см., например, [542])

$$K_n(x) = \frac{x^n}{(2n-1)!!} \int_0^\infty \text{sh}^{2n} \xi e^{-x \text{ch} \xi} d\xi. \quad (\text{В.83})$$

Если первое уравнение в (В.81) переписать как

$$P = nmc^2\eta, \quad (\text{В.84})$$

то становится видно, что два уравнения в (В.81) в параметрическом виде (через параметр  $\eta$ ) определяют уравнение состояния релятивистского идеального одноатомного газа в форме  $P = P(n, e)$ .

Рассмотрим предел низких температур ( $kT \ll mc^2$ ). В этом случае можно воспользоваться следующим асимптотическим соотношением для функций  $K_n(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  (см., например, [597], стр. 199):

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 + \frac{4n^2 - 1}{8x} + \dots \right). \quad (\text{В.85})$$



В этом приближении выражение для плотности энергии можно записать в виде

$$e = \rho c^2 + \rho \varepsilon, \quad (\text{B.86})$$

где введены плотность массы покоя  $\rho = mn$  и удельная внутренняя энергия газа  $\varepsilon$ , связанная с давлением и плотностью нерелятивистским соотношением

$$\varepsilon = \frac{P}{(\Gamma - 1)\rho}, \quad (\text{B.87})$$

где  $\Gamma = 5/3$  — показатель адиабаты для одноатомного газа.

В противоположном пределе высоких температур ( $kT \gg mc^2$ ) можно воспользоваться тем, что при  $x \rightarrow 0$  отношение  $K_1(x)/K_2(x) \rightarrow 0$ . Поэтому плотность энергии

$$e = 3nkT \quad (\text{B.88})$$

и, следовательно, уравнение состояния ультрарелятивистского газа можно записать как

$$P = \frac{1}{3}e. \quad (\text{B.89})$$

Уравнение состояния в форме (B.81) является громоздким и поэтому его неудобно использовать в расчетах. Однако на его основе можно получить более удобную для численных расчетов аппроксимацию [598]. Обозначим

$$\xi = \frac{e}{mnc^2}. \quad (\text{B.90})$$

Тогда второе соотношение в (B.81) можно переписать в безразмерной форме:

$$\xi = 3\eta + \frac{K_1(1/\eta)}{K_2(1/\eta)}. \quad (\text{B.91})$$

Это выражение можно рассматривать как задание в неявном виде функции  $\eta(\xi)$ . Анализ показывает, что эта функция является монотонно возрастающей. В пределе при  $\xi \rightarrow 1$  (нерелятивистский газ) значение функции  $\eta \rightarrow 0$ , а значение ее производной  $d\eta/d\xi \rightarrow 2/3$ . В противоположном пределе при  $\xi \rightarrow \infty$  (ультрарелятивистский газ) функция  $\eta \approx \xi/3$ , а ее производная  $d\eta/d\xi \rightarrow 1/3$ . Такое асимптотическое поведение можно приближенно описать с помощью более простой функции

$$\eta = \frac{\xi}{3} - \frac{3}{\xi}. \quad (\text{B.92})$$

Точная (B.91) и приближенная (B.92) функции имеют одинаковое асимптотическое поведение в предельных случаях нерелятивистского газа (при  $\xi \rightarrow 1$ ) и ультрарелятивистского газа (при  $\xi \rightarrow \infty$ ). Кроме того, значения производных этих функций  $d\eta/d\xi$  в этих предельных случаях также совпадают. На рис. В.2 показаны точная (кривая 1)

и приближенная (кривая 2) функции, а также асимптотики  $\eta = 2(\xi - 1)/3$  (кривая 3) и  $\eta = \xi/3$  (кривая 4), соответствующие предельным случаям нерелятивистского и ультрарелятивистского газов. Анализ рисунка позволяет сделать вывод, что уравнения (В.91) и (В.92) дают очень близкие значения на всем интервале температур. В размерной форме аппроксимированное уравнение состояния может быть записано следующим образом:

$$P = \frac{1}{3} \left( e - \frac{m^2 n^2 c^4}{e} \right). \quad (\text{В.93})$$

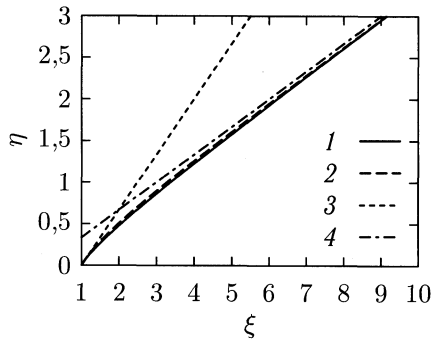


Рис. В.2. Функции  $\eta(\xi)$ , описывающие в безразмерном виде уравнение состояния идеального одноатомного газа. Цифры соответствуют: 1 — точное уравнение (В.91), 2 — аппроксимированное уравнение (В.92), 3 — уравнение  $\eta = 2(\xi - 1)/3$  для нерелятивистского газа, 4 — уравнение  $\eta = \xi/3$  для ультрарелятивистского газа.

Следует отметить, что характерная температура, при которой в уравнении состояния идеального одноатомного газа становятся существенными релятивистские эффекты, оценивается значением  $mc^2/k$ . Этой температуре соответствует значение безразмерного параметра  $\eta = 1$ . Подставляя сюда в качестве  $m$  массу протона, получаем температуру порядка  $10^{13}$  К. Такое высокое значение температуры газа может встречаться только в некоторых экстремальных процессах. С другой стороны, при высоких температурах вещество является полностью ионизованным и может рассматриваться как плазма, состоящая из электронов и протонов. Эффекты, связанные с рождением электронно-позитронных пар, начинают проявляться уже при температурах порядка  $10^9$  К. Таким образом, электронная компонента плазмы становится релятивистской уже при гораздо более низких температурах. В аккреционных дисках, формирующихся в ТДС, температура газа, как правило, существенно ниже этих значений. Поэтому в задачах моделирования структуры течения в ТДС с релятивистскими компонентами можно ограничиться уравнением состояния для нерелятивистского газа.

Ранее мы получили выражение для скорости звука в релятивистском газе в виде

$$a^2 = \frac{n}{w} \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_s. \quad (\text{B.94})$$

Это выражение основано на использовании уравнения состояния в форме

$$P = P(n, s), \quad e = e(n, s). \quad (\text{B.95})$$

Можно получить эквивалентное выражение для скорости звука, приспособленное для использования уравнения состояния в форме  $P = P(n, e)$ . Для этого выразим энтропию  $s$  из второго соотношения в (B.95) и подставим в первое соотношение. В результате получим:

$$P = P(n, s(n, e)) = P(n, e). \quad (\text{B.96})$$

Вычислим дифференциал давления,

$$dP = \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_s dn + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_n ds = \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_e dn + \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)_n de. \quad (\text{B.97})$$

Расписывая здесь дифференциал энтропии

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial n} \right)_e dn + \left( \frac{\partial s}{\partial e} \right)_n de, \quad (\text{B.98})$$

находим:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_e = \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_s + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_n \left( \frac{\partial s}{\partial n} \right)_e, \quad \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)_n = \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_n \left( \frac{\partial s}{\partial e} \right)_n. \quad (\text{B.99})$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)_n + \frac{n}{w} \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_e &= \\ &= \frac{n}{w} \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_s + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_n \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial e} \right)_n + \frac{n}{w} \left( \frac{\partial s}{\partial n} \right)_e \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.100})$$

Выражая дифференциал энтропии из второго начала термодинамики (B.32),

$$ds = \frac{1}{nT} de - \frac{w}{n^2 T} dn, \quad (\text{B.101})$$

получаем:

$$\left( \frac{\partial s}{\partial e} \right)_n = \frac{1}{nT}, \quad \left( \frac{\partial s}{\partial n} \right)_e = -\frac{w}{n^2 T}. \quad (\text{B.102})$$

С учетом этих соотношений, можно убедиться, что выражение в квадратных скобках в (B.100) обращается в нуль. Поэтому

$$\frac{n}{w} \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_s = \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)_n + \frac{n}{w} \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_e. \quad (\text{B.103})$$

Следовательно, выражение (В.94) для скорости звука может быть переписано в эквивалентной форме:

$$a^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial e} \right)_n + \frac{n}{w} \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_e. \quad (\text{В.104})$$

Подставляя сюда выражения (В.86) и (В.87), находим:

$$a^2 = (\Gamma - 1) \left( 1 - \frac{\rho c^2}{w} \right). \quad (\text{В.105})$$

В нерелятивистском пределе эта формула дает известное выражение для скорости звука

$$a^2 = \Gamma \frac{P}{\rho c^2}. \quad (\text{В.106})$$

В ультрарелятивистском пределе с учетом уравнения состояния (В.89) получаем:

$$a^2 = \frac{1}{3}. \quad (\text{В.107})$$

Для описания промежуточных случаев можно воспользоваться аппроксимированным уравнением состояния (В.93). При этом выражение для скорости звука может быть записано следующим образом:

$$a^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{m^2 n^2 c^4}{e^2} \right) + \frac{2}{1 - \frac{4e^2}{m^2 n^2 c^4}}. \quad (\text{В.108})$$

Нетрудно убедиться, что это выражение в предельных случаях переходит в (В.106) и (В.107).

### В.2.3. Релятивистские газодинамические сильные разрывы.

В трехмерном пространстве фронт сильного разрыва представляет собой гладкую двумерную поверхность. Движение каждой точки фронта в пространстве–времени создает мировую линию. Поскольку скорость движения сильного разрыва меньше скорости света, то любой бесконечно малый интервал на этой мировой линии является времени-подобным. Единичный касательный вектор  $D^\mu$  к этой мировой линии имеет смысл четырехмерного вектора скорости сильного разрыва. Квадрат этого вектора  $D_\mu D^\mu = 1$ . Движение фронта замечает в пространстве–времени некоторую времени-подобную гиперповерхность. Вектор нормали  $n^\mu$  к этой гиперповерхности является пространственно-подобным вектором,  $n_\mu n^\mu = -1$ .

Получим условия, которым должны удовлетворять газодинамические величины на релятивистских сильных разрывах. Рассмотрим сначала уравнение непрерывности для числа частиц:

$$\nabla_\alpha (n u^\alpha) = 0. \quad (\text{В.109})$$

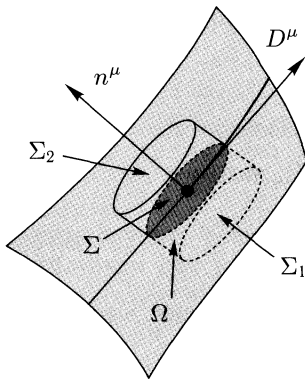


Рис. В.3. Схема, поясняющая вывод условий Гюгонио на сильных разрывах

Интеграл по охватываемой области  $\Omega$  замкнутой гиперповерхности можно представить в виде суммы интегралов по основаниям  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  и по боковой поверхности цилиндра. Устремим далее высоту цилиндра к нулю. Интеграл по боковой поверхности исчезнет в силу ограниченности газодинамических величин на разрыве. Основания цилиндра  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  перейдут в гиперповерхность  $\Sigma$ . Учитывая, что векторы нормали к основаниям  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$  равны, соответственно  $n^\mu$  и  $-n^\mu$  получим:

$$\int_{\Sigma} d\Sigma_{\alpha} [n u^{\alpha}] = 0, \quad (\text{В.111})$$

где квадратными скобками обозначены скачки величин на разрыве. Поскольку элемент интегрирования  $d\Sigma_{\alpha} = n_{\alpha} d\Sigma$ , а точка на гиперповерхности разрыва была выбрана произвольно, приходим к соотношению

$$n_{\alpha} [n u^{\alpha}] = 0. \quad (\text{В.112})$$

Аналогичным образом можно рассмотреть уравнения сохранения энергии-импульса

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\mu} = 0. \quad (\text{В.113})$$

Интегрирование этого уравнения по области  $\Omega$  и применение теоремы Остроградского-Гаусса дает:

$$\int d\Omega \nabla_{\alpha} T^{\alpha\mu} = \oint d\Sigma_{\alpha} T^{\alpha\mu} + \int d\Omega \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{В.114})$$

Будем снова стягивать цилиндр к гиперповерхности разрыва. Интеграл по объему, содержащий символы Кристоффеля, в силу ограниченности величин на разрыве будет стремиться к нулю. Интеграл по замкнутой

Построим вокруг некоторой точки на гиперповерхности разрыва малую цилиндрическую область  $\Omega$  таким образом, чтобы ее основания  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  находились по разные стороны гиперповерхности (рис. В.3). Участок гиперповерхности разрыва, пересекаемый областью  $\Omega$ , обозначим через  $\Sigma$ . Проинтегрируем уравнение (В.109) по области  $\Omega$  и воспользуемся четырехмерным аналогом теоремы Остроградского-Гаусса (см., например, [476]):

$$\int d\Omega \nabla_{\alpha} (n u^{\alpha}) = \oint d\Sigma_{\alpha} n u^{\alpha} = 0. \quad (\text{В.110})$$

гиперповерхности преобразуется тем же способом, как это мы делали для уравнения непрерывности. В результате, находим:

$$\int d\Sigma n_\alpha [T^{\alpha\mu}] = 0. \quad (\text{B.115})$$

Отсюда получаем соотношение Гюгонио для тензора энергии-импульса:

$$n_\alpha [T^{\alpha\mu}] = 0. \quad (\text{B.116})$$

В малой окрестности данной точки гиперповерхности сильного разрыва можно локально задать лоренцеву систему координат. Это можно сделать различными способами. Выберем направление оси  $x$  вдоль трехмерного вектора мгновенной скорости движения фронта разрыва. Тогда контравариантные компоненты вектора скорости разрыва  $D^\mu = (\gamma_D, \gamma_D D, 0, 0)$ , где  $D$  — трехмерная скорость сильного разрыва в единицах скорости света,  $\gamma_D = (1 - D^2)^{-1/2}$  — соответствующий фактор Лоренца. Из условия ортогональности  $n_\mu D^\mu = 0$ , находим:  $n_\mu = (-\gamma_D D, \gamma_D, 0, 0)$ . Наиболее простые выражения для условий Гюгонио получаются в локальной лоренцевой системе координат, мгновенно связанной с сильным разрывом. В этом случае  $D^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ,  $n_\mu = (0, 1, 0, 0)$ , а условия Гюгонио (B.112) и (B.116) принимают вид

$$[n u^1] = 0, \quad [T^{1\mu}] = 0. \quad (\text{B.117})$$

В явном виде эти соотношения выглядят следующим образом:

$$[n \gamma v_x] = 0, \quad [w \gamma^2 v_x] = 0, \quad (\text{B.118})$$

$$[w \gamma^2 v_x^2 + P] = 0, \quad [w \gamma^2 v_x v_\tau] = 0, \quad (\text{B.119})$$

где скорость газа  $\mathbf{v}$  записана с единицах скорости света,  $\mathbf{v}_\tau = (0, v_y, v_z)$  — вектор тангенциальной к фронту разрыва скорости газа. Первое соотношение в (B.118) выражает собой закон сохранения числа частиц газа при переходе через поверхность фронта разрыва. Плотность потока числа частиц  $j = n \gamma v_x$  является непрерывной величиной. С учетом этого обстоятельства остальные условия можно переписать в виде

$$j \left[ \frac{w}{n} \gamma \right] = 0, \quad j \left[ \frac{w}{n} \gamma v_x \right] + [P] = 0, \quad j \left[ \frac{w}{n} \gamma v_\tau \right] = 0. \quad (\text{B.120})$$

Анализ этих соотношений позволяет сделать вывод о том, что в релятивистской газодинамике, так же как и в нерелятивистской, сильные разрывы могут быть двух типов.

Разрывы, в которых  $j = 0$ , называются тангенциальными разрывами. Поскольку число частиц  $n \neq 0$ , то из этого условия следует,

что  $v_x = 0$ . Это означает, что скорость газа равна скорости разрыва. Из второго соотношения в (В.120) получаем условие непрерывности давления  $[P] = 0$ . Из третьего соотношения в (В.120) следует, что тангенциальная скорость в таких разрывах может испытывать произвольный скачок,  $[v_\tau] \neq 0$ . Частный случай  $[v_\tau] = 0$  соответствует контактному разрывам.

Рассмотрим теперь разрывы, в которых  $j \neq 0$ . Такие разрывы называются ударными волнами. В этом случае второе соотношение в (В.120) можно переписать как

$$j^2 \left[ \frac{w}{n^2} \right] + [P] = 0. \quad (\text{В.121})$$

Отсюда находим:

$$j^2 = - \frac{[P]}{[w/n^2]}. \quad (\text{В.122})$$

Из первого соотношения в (В.120) следует, что величина  $\gamma w/n$  не испытывает скачка на разрыве. С учетом этого обстоятельства из третьего соотношения в (В.120) получаем условие непрерывности тангенциальной скорости на разрыве:  $[v_\tau] = 0$ . Это означает, что можно выбрать систему координат, в которой будет  $v_\tau = 0$ , т. е. вектор скорости газа  $v$  будет иметь только нормальную к фронту разрыва компоненту  $v_x$ .

В этой системе координат из выражения для потока частиц  $j = n\gamma v_x$  можно получить

$$\gamma^2 = 1 + \frac{j^2}{n^2}. \quad (\text{В.123})$$

Поставляя это выражение в первое соотношение в (В.120) и используя (В.122), получаем:

$$\left[ \frac{w^2}{n^2} \right] = \left( \frac{w_1}{n_1} + \frac{w_2}{n_2} \right) [P]. \quad (\text{В.124})$$

Это уравнение описывает релятивистскую ударную адиабату (ударная адиабата Тауба). Это соотношение записано для термодинамических величин, которые являются четырехмерными скалярами. Поэтому оно справедливо не только в той частной системе координат, в которой мы его выводили, но и в любой другой системе координат.

Теория гиперболических систем уравнений, кратко изложенная в Приложении А, позволяет построить аналитические решения для релятивистских газодинамических волн разрежения. Мы не будем здесь этого делать, поскольку эти решения опираются на конкретный вид уравнения состояния. Однако на этой основе можно строить решение релятивистской задачи Римана о распаде произвольного газодинамического разрыва. Как и в нерелятивистском случае при распаде разрыва возникают три бегущие волны, одна из которых является тангенциальным разрывом. В зависимости от начальных условий может реализоваться три возможные конфигурации, когда оставшиеся две бегущие

волны являются: волной разрежения и ударной волной (конфигурация «А»), двумя ударными волнами (конфигурация «Б») или двумя волнами разрежения (конфигурация «В»). Решения этой задачи для различных случаев можно найти, например, в работах [306, 598–601].

### В.3. Релятивистская магнитная газодинамика

**В.3.1. Система уравнений релятивистской магнитной газодинамики.** В классической электродинамике электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором второго ранга  $F_{\mu\nu}$  (см., например, [476]). Можно определить дуальный тензор

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} E^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (\text{В.125})$$

где символ Леви-Чивиты

$$E^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{В.126})$$

$e^{\mu\nu\alpha\beta}$  — единичный абсолютно антисимметричный тензор. Тензоры  $F^{\mu\nu}$  и  $*F^{\mu\nu}$  удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\nabla_\alpha *F^{\alpha\mu} = 0, \quad \nabla_\alpha F^{\alpha\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (\text{В.127})$$

где  $j^\mu$  — четырехмерный вектор плотности тока.

Для описания электромагнитного поля в проводящей жидкости, движение которой характеризуется четырехмерным вектором скорости  $u^\mu$ , можно ввести следующие четырехмерные векторы:

$$E^\mu = F^{\mu\alpha} u_\alpha, \quad B^\mu = *F^{\mu\alpha} u_\alpha. \quad (\text{В.128})$$

Можно считать, что в сопутствующей системе отсчета, связанной с проводящей жидкостью, электрическое поле ковариантным образом описывается вектором  $E^\mu$ , а магнитное поле — вектором  $B^\mu$ . Действительно, в мгновенно сопутствующей лоренцевой системе координат вектор скорости  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  и, следовательно,  $E^\mu = (0, \mathbf{E})$ ,  $B^\mu = (0, \mathbf{B})$ . Здесь трехмерные векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  представляют собой векторы напряженностей электрического и магнитного полей в выбранной системе координат.

Из определения (В.128) векторов  $E^\mu$  и  $B^\mu$  следует, что они ортогональны вектору скорости  $u^\mu$ ,

$$E^\mu u_\mu = 0, \quad B^\mu u_\mu = 0. \quad (\text{В.129})$$

Поскольку вектор скорости  $u^\mu$  является времени-подобным вектором, то это свойство означает, что векторы  $E^\mu$  и  $B^\mu$  являются пространственно-подобными векторами. Этот вывод можно проверить



и непосредственно. Например, квадрат вектора  $B^\mu$  в мгновенно сопутствующей лоренцевой системе координат равен  $B_\mu B^\mu = -B^2$ , где обозначено  $B^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ . Величина  $B_\mu B^\mu$  является четырехмерным скаляром и ее значение (и, в частности, ее знак) в данной точке пространства–времени не зависит от выбора системы координат. В дальнейшем для квадрата вектора  $B^\mu$  в произвольной системе координат будем также использовать обозначение  $B_\mu B^\mu = -B^2$ .

Введем два антисимметричных тензора второго ранга:

$$N_{\mu\nu} = E_\mu u_\nu - E_\nu u_\mu, \quad Q_{\mu\nu} = B_\mu u_\nu - B_\nu u_\mu. \quad (\text{B.130})$$

Несложно показать, что имеют место следующие соотношения <sup>1)</sup>:

$$F_{\mu\nu} = N_{\mu\nu} - *Q_{\mu\nu}, \quad *F_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} + *N_{\mu\nu}. \quad (\text{B.131})$$

Эти формулы выражают тензоры электромагнитного поля  $F^{\mu\nu}$  и  $*F^{\mu\nu}$  через векторы  $E^\mu$  и  $B^\mu$ .

Плотность тока  $j^\mu$  можно представить в виде суммы конвекционно-го тока  $qu^\mu$ , где  $q$  — собственная плотность заряда, и тока проводимости  $j_*^\mu$ :

$$j^\mu = qu^\mu + j_*^\mu. \quad (\text{B.132})$$

Ток проводимости связан с вектором напряженности электрического поля  $E^\mu$  соотношением, выражающим закон Ома:

$$j_*^\mu = \sigma E^\mu, \quad (\text{B.133})$$

где  $\sigma$  — коэффициент электропроводности, измеренный в системе отсчета, в которой вещество покоится. Вспомним, что в нерелятивистской магнитной газодинамике приближение идеальной МГД соответствует тому, что в системе отсчета, в которой проводящая среда покоится, электрическое поле отсутствует. Это приближение можно обобщить и на релятивистский случай. Для этого перейдем в данной точке в мгновенно сопутствующую лоренцеву систему координат. В этой системе координат в приближении идеальной МГД должно быть  $\mathbf{E} = 0$ , а значит, и  $E^\mu = 0$ . Однако условие  $E^\mu = 0$  в силу его векторного характера будет выполняться и в любой другой системе координат. Таким образом, ковариантным обобщением приближения идеальной МГД является условие  $E^\mu = 0$ . Ток проводимости (B.133) при этом в нуль не обращается. Следовательно, рассматриваемое приближение формально соответствует случаю идеальной проводимости среды, которое реализуется в пределе при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

В приближении идеальной МГД электромагнитное поле в проводящей жидкости описывается только вектором  $B^\mu$ . Соотношения (B.131) при этом упрощаются:

<sup>1)</sup> Напомним, что для антисимметричного тензора второго ранга  $A_{\mu\nu}$  операция дуального сопряжения обладает следующим свойством:  $**A_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}$ .

$$F_{\mu\nu} = -{}^*Q_{\mu\nu}, \quad {}^*F_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}, \quad (\text{B.134})$$

а уравнения Максвелла (B.127) принимают вид

$$\nabla_\alpha Q^{\alpha\mu} = 0, \quad \nabla_\alpha {}^*Q^{\alpha\mu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (\text{B.135})$$

Тензор энергии–импульса электромагнитного поля может быть записан в следующем виде [476]:

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (\text{B.136})$$

Подставляя сюда выражение (B.134) для тензора  $F^{\mu\nu}$ , находим:

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( u^\mu u^\nu B^2 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} B^2 - B^\mu B^\nu \right). \quad (\text{B.137})$$

Полный тензор энергии–импульса  $T^{\mu\nu}$  в релятивистской магнитной газодинамике равен сумме тензора энергии–импульса идеальной жидкости (B.46) и тензора энергии–импульса электромагнитного поля (B.137):

$$T^{\mu\nu} = w_{\text{T}} u^\mu u^\nu - P_{\text{T}} g^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi} B^\mu B^\nu, \quad (\text{B.138})$$

где введены обозначения для полной энтальпии и полного давления:

$$w_{\text{T}} = w + \frac{B^2}{4\pi}, \quad P_{\text{T}} = P + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (\text{B.139})$$

В монадном методе можно ввести четырехмерные векторы  $\tilde{E}^\mu$  и  $\tilde{B}^\mu$ , описывающие ковариантным образом электрическое и магнитное поле относительно некоторой системы отсчета, соответствующей вектору монады  $\tau^\mu$  [593]:

$$\tilde{E}^\mu = F^{\mu\alpha} \tau_\alpha, \quad \tilde{B}^\mu = {}^*F^{\mu\alpha} \tau_\alpha. \quad (\text{B.140})$$

Эти векторы вводятся по аналогии с формулами (B.128), в которых роль вектора монады  $\tau^\mu$  играл вектор скорости вещества  $u^\mu$ . Векторы  $\tilde{E}^\mu$  и  $\tilde{B}^\mu$  являются пространственно спроектированными, поскольку они ортогональны вектору монады  $\tau^\mu$ :

$$\tilde{E}^\mu \tau_\mu = 0, \quad \tilde{B}^\mu \tau_\mu = 0. \quad (\text{B.141})$$

В приближении идеальной МГД векторы  $\tilde{E}^\mu$  и  $\tilde{B}^\mu$  определяются выражениями

$$\tilde{E}^\mu = -{}^*Q^{\mu\alpha} \tau_\alpha, \quad \tilde{B}^\mu = Q^{\mu\alpha} \tau_\alpha. \quad (\text{B.142})$$

Заметим, что в произвольной системе отсчета, соответствующей вектору монады  $\tau^\mu$ , напряженность электрического поля  $\tilde{E}^\mu$ , вообще говоря, отлична от нуля и выражается через напряженность магнитного поля  $B^\mu$ . Это означает, что в произвольной системе отсчета в приближении

идеальной МГД электрическое поле является релятивистским следствием магнитного поля. В случае сопутствующей системы отсчета, когда  $\tau^\mu = u^\mu$ , вектор  $\tilde{E}^\mu = E^\mu = 0$ .

Используя разложение вектора скорости  $u^\mu = \gamma\tau^\mu + \gamma v^\mu$ , представим напряженность магнитного поля в виде

$$\tilde{B}^\mu = \gamma B^\mu + \tau_\alpha B^\alpha u^\mu. \quad (\text{B.143})$$

Учитывая соотношения

$$\tau_\alpha B^\alpha = -u_\alpha \tilde{B}^\alpha = -\gamma v_\alpha \tilde{B}^\alpha, \quad (\text{B.144})$$

получаем:

$$\tilde{B}^\mu = \gamma B^\mu + \gamma u^\mu v_\alpha \tilde{B}^\alpha. \quad (\text{B.145})$$

Отсюда находим представление напряженности магнитного поля через величины, относящиеся к данной системе отсчета:

$$B^\mu = -\gamma\tau^\mu v_\alpha \tilde{B}^\alpha + \left(\frac{1}{\gamma}\tilde{B}^\mu - \gamma v^\mu v_\alpha \tilde{B}^\alpha\right). \quad (\text{B.146})$$

Поскольку  $v_\alpha \tilde{B}^\alpha = -v_i \tilde{B}^i$ , где обозначено  $v_i = h_{ik}v^k$ , компоненты вектора (B.146) могут быть записаны в виде

$$B^0 = \frac{\gamma}{\alpha} v_i \tilde{B}^i, \quad B^i = \frac{1}{\gamma} \tilde{B}^i + \frac{\gamma}{\alpha} (\alpha v^i - \beta^i) v_i \tilde{B}^i. \quad (\text{B.147})$$

Величина  $B^2 = -B_\mu B^\mu$ , определяющая квадрат вектора напряженности магнитного поля, равна

$$B^2 = (v_i \tilde{B}^i)^2 + \frac{\tilde{B}_i \tilde{B}^i}{\gamma^2}, \quad (\text{B.148})$$

где обозначено  $\tilde{B}_i = h_{ik} \tilde{B}^k$ .

Система уравнений релятивистской магнитной газодинамики состоит из уравнения непрерывности

$$\nabla_\alpha (n u^\alpha) = 0, \quad (\text{B.149})$$

уравнений сохранения энергии и импульса

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\mu} = 0, \quad (\text{B.150})$$

где тензор  $T^{\mu\nu}$  определяется выражением (B.138), и уравнения индукции

$$\nabla_\alpha (B^\alpha u^\mu - B^\mu u^\alpha) = 0, \quad (\text{B.151})$$

которое представляет собой первую пару уравнений Максвелла (первое уравнение в (B.135)), записанную в приближении идеальной МГД.

Используя формулы (В.24) и (В.25), можно получить следующие выражения для плотности энергии:

$$W = \gamma^2 w_T - P_T - \gamma^2 \frac{(v_i \tilde{B}^i)^2}{4\pi}, \quad (\text{В.152})$$

вектора плотности потока энергии:

$$S^i = \gamma^2 w_T v^i - \frac{v_k \tilde{B}^k}{4\pi} \tilde{B}^i - \gamma^2 \frac{(v_k \tilde{B}^k)^2}{4\pi} v^i, \quad (\text{В.153})$$

и тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma^{ik} = & -\gamma^2 w_T v^i v^k - h^{ik} P_T + \frac{\tilde{B}^i \tilde{B}^k}{4\pi \gamma^2} + \\ & + \frac{v_l \tilde{B}^l}{4\pi} (v^i \tilde{B}^k + v^k \tilde{B}^i) + \gamma^2 \frac{(v_l \tilde{B}^l)^2}{4\pi} v^i v^k. \end{aligned} \quad (\text{В.154})$$

Чтобы записать в кинеметрической калибровке уравнения сохранения энергии–импульса (В.150) в релятивистской магнитной газодинамике нужно в уравнения (В.29) и (В.30) подставить выражения (В.152)–(В.154).

В развернутой записи уравнение индукции (В.151) приводит к двум уравнениям. Временная компонента дает условие соленоидальности магнитного поля:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{h} \tilde{B}^k) = 0. \quad (\text{В.155})$$

Пространственные компоненты уравнения индукции можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{h} \tilde{B}^i) + \\ + \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \sqrt{h} \left[ \tilde{B}^i (\alpha v^k - \beta^k) - \tilde{B}^k (\alpha v^i - \beta^i) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{В.156})$$

Перепишем уравнение индукции (В.151) в квазилинейной форме:

$$u^\alpha \nabla_\alpha B^\mu + B^\mu \nabla_\alpha u^\alpha - B^\alpha \nabla_\alpha u^\mu - u^\mu \nabla_\alpha B^\alpha = 0. \quad (\text{В.157})$$

Умножая скалярно это уравнение на вектор скорости  $u_\mu$ , находим:

$$\nabla_\alpha B^\alpha + B_\beta u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0. \quad (\text{В.158})$$

Скалярное произведение уравнения (В.157) на вектор напряженности магнитного поля  $B_\mu$  дает:

$$\frac{1}{2} u^\alpha \nabla_\alpha B^2 + B^2 \nabla_\alpha u^\alpha + B_\beta B^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0. \quad (\text{В.159})$$

Четырехмерный вектор силы, действующей на вещество со стороны электромагнитного поля, определяется выражением

$$f^\mu = -\nabla_\alpha T_{\text{ем}}^{\alpha\mu}. \quad (\text{B.160})$$

Подставляя сюда (B.137), находим:

$$f^\mu = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2} \nabla^\mu B^2 - u^\mu u^\alpha \nabla_\alpha B^2 - B^2 u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu - \right. \\ \left. - B^2 u^\mu \nabla_\alpha u^\alpha + B^\alpha \nabla_\alpha B^\mu + B^\mu \nabla_\alpha B^\alpha \right). \quad (\text{B.161})$$

С помощью полученных соотношений (B.158) и (B.159) нетрудно проверить, что вектор  $f^\mu$  ортогонален векторам скорости  $u^\mu$  и напряженности магнитного поля  $B^\mu$ :

$$u_\mu f^\mu = 0, \quad B_\mu f^\mu = 0. \quad (\text{B.162})$$

При этом

$$P_\alpha^\mu f^\alpha = -f^\mu, \quad (\text{B.163})$$

где  $P^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}$  — проективный тензор.

Раскрывая дивергенцию в (B.150), можно получить:

$$u^\mu (u^\alpha \nabla_\alpha w + w \nabla_\alpha u^\alpha) + w u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu - \nabla^\mu P = f^\mu. \quad (\text{B.164})$$

Спроектируем это уравнение на вектор скорости  $u^\mu$ . С учетом свойств  $u_\mu u^\mu = 1$  и  $u_\mu f^\mu = 0$  приходим к уравнению энергии:

$$u^\alpha \nabla_\alpha e + w \nabla_\alpha u^\alpha = 0. \quad (\text{B.165})$$

Отсюда, так же как это было сделано в случае газодинамики, можно получить уравнение для энтропии:

$$\nabla_\mu (n s u^\mu) = 0. \quad (\text{B.166})$$

Наконец, спроектируем с помощью тензора  $P^{\mu\nu}$  уравнение (B.164) на направление, ортогональное вектору скорости  $u^\mu$ . Получим релятивистский МГД-аналог уравнения Эйлера:

$$w u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu + P^{\mu\alpha} \nabla_\alpha P - f^\mu = 0. \quad (\text{B.167})$$

**В.3.2. Характеристические свойства.** Анализ характеристических свойств системы уравнений релятивистской магнитной газодинамики можно провести тем же способом, который мы использовали в предыдущем параграфе для соответствующего анализа уравнений релятивистской газодинамики. Следует однако заметить, что прямое применение этого метода к полученным выше уравнениям приводит

к вырожденной характеристической матрице  $\mathcal{A}$ . Это обусловлено тем, что в уравнение индукции (В.151) входит антисимметричный тензор второго ранга. Поэтому не все компоненты этого уравнения являются эволюционными уравнениями. Действительно, в монадном методе временная компонента уравнения индукции является условием соленоидальности магнитного поля (В.155), а настоящими эволюционными уравнениями являются только пространственные компоненты (В.156). Для преодоления этой проблемы уравнения релятивистской магнитной газодинамики следует переписать в несколько ином виде. Напомним, что при анализе характеристических свойств уравнений нерелятивистской магнитной газодинамики (раздел А.4.1) мы уже использовали подобный прием, когда исключили из полной системы уравнений уравнение для продольной компоненты поля  $B_x$ . В одномерном случае из уравнения индукции и условия соленоидальности магнитного поля следует, что  $B_x = \text{const}$ . Поэтому эту величину можно считать параметром течения. При этом оставшиеся две поперечные компоненты поля  $B_y$  и  $B_z$  удовлетворяют эволюционным уравнениям, которые влияют на характеристические свойства гиперболической системы.

Воспользуемся для наших целей методикой, описанной в книге [602]. В качестве вектора переменных выберем  $\mathbf{q} = (P, u^\mu, B^\mu, s)^T$ . Расписывая градиент давления по формуле (В.58), уравнение непрерывности (В.53) можно переписать в виде

$$n \nabla_\alpha u^\alpha + \frac{1}{P'_n} (u^\alpha \nabla_\alpha P - P'_s u^\alpha \nabla_\alpha s) = 0. \quad (\text{В.168})$$

С учетом уравнения для энтропии

$$u^\alpha \nabla_\alpha s = 0 \quad (\text{В.169})$$

и выражения для скорости звука

$$a^2 = \frac{n}{w} P'_n \quad (\text{В.170})$$

уравнение (В.168) принимает вид

$$u^\alpha \nabla_\alpha P + a^2 w \nabla_\alpha u^\alpha = 0. \quad (\text{В.171})$$

Проектирование уравнения (В.164) на направление вектора  $B^\mu$  с учетом свойства  $B_\mu f^\mu = 0$  дает соотношение

$$B^\alpha \nabla_\alpha P = w B_\beta u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta. \quad (\text{В.172})$$

Уравнения движения (В.167) и индукции (В.157) с учетом соотношений (В.171), (В.172) и (В.158) перепишем в виде

$$H^{\mu\alpha} \nabla_\alpha P + w_\Gamma u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu + S_\nu^{\mu\alpha} \nabla_\alpha B^\nu = 0, \quad (\text{В.173})$$

$$q^{\mu\alpha}\nabla_\alpha P - B^\alpha\nabla_\alpha w^\mu + u^\alpha\nabla_\alpha B^\mu = 0, \quad (\text{B.174})$$

где введены следующие обозначения для тензоров:

$$H^{\mu\alpha} = P^{\mu\alpha} - \frac{B^2}{4\pi w a^2} w^\mu u^\alpha + \frac{1}{4\pi w} B^\mu B^\alpha, \quad (\text{B.175})$$

$$S_\nu^{\mu\alpha} = -\frac{1}{4\pi} [B^\alpha \delta_\nu^\mu + (P^{\mu\alpha} + u^\mu u^\alpha) B_\nu], \quad (\text{B.176})$$

$$q^{\mu\alpha} = \frac{1}{w} \left( u^\mu B^\alpha - \frac{1}{a^2} B^\mu u^\alpha \right). \quad (\text{B.177})$$

Систему уравнений (B.171), (B.169), (B.173) и (B.174) можно записать в векторном виде:

$$\mathcal{A}^\alpha \cdot \nabla_\alpha \mathbf{q} = 0, \quad (\text{B.178})$$

где матрицы

$$\mathcal{A}^\alpha = \begin{pmatrix} u^\alpha & a^2 w \delta_\nu^\alpha & 0_\nu & 0 \\ H^{\mu\alpha} & w_\Gamma u^\alpha \delta_\nu^\mu & S_\nu^{\mu\alpha} & 0^\mu \\ q^{\mu\alpha} & -B^\alpha \delta_\nu^\mu & u_\alpha \delta_\nu^\mu & 0^\mu \\ 0 & 0_\nu & 0_\nu & u^\alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{B.179})$$

Здесь, так же как и в газодинамическом случае, индекс  $\alpha$  является номером матрицы, а индексы  $\mu$  и  $\nu$  независимо изменяются от 0 до 3. Верхний индекс  $\mu$  формирует четырехкомпонентные столбцы, а нижний индекс  $\nu$  формирует четырехкомпонентные строки внутри матрицы. Через  $0_\nu$  и  $0^\mu$  обозначены нулевые ковариантный и контравариантный векторы. Сами матрицы  $\mathcal{A}^\alpha$  являются матрицами размерности  $10 \times 10$ .

Для вычисления собственных значений снова введем характеристический вектор  $\chi_\alpha$ , выделяющий заданное пространственное направление. С помощью этого вектора определим характеристическую матрицу

$$\mathcal{A} = \chi_\alpha \mathcal{A}^\alpha. \quad (\text{B.180})$$

Уравнение для собственных значений равносильно равенству нулю определителя характеристической матрицы,  $\det \mathcal{A} = 0$ . Характеристическая матрица имеет следующий вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} u & a^2 w \chi_\nu & 0_\nu & 0 \\ H^\mu & w_\Gamma u \delta_\nu^\mu & S_\nu^\mu & 0^\mu \\ q^\mu & -b \delta_\nu^\mu & u \delta_\nu^\mu & 0^\mu \\ 0 & 0_\nu & 0_\nu & u \end{pmatrix}, \quad (\text{B.181})$$

где обозначено  $u = \chi_\alpha u^\alpha$ ,  $P^\mu = \chi_\alpha P^{\mu\alpha}$ ,  $H^\mu = \chi_\alpha H^{\mu\alpha}$ ,  $b = \chi_\alpha B^\alpha$ ,  $S_\nu^\mu = \chi_\alpha S_\nu^{\mu\alpha}$ ,  $q^\mu = \chi_\alpha q^{\mu\alpha}$ . Вычисления показывают, что определитель этой матрицы

$$\det \mathcal{A} = w_T u^2 A^2 N_4, \quad (\text{B.182})$$

где

$$A = w_T u^2 - \frac{b^2}{4\pi}, \quad (\text{B.183})$$

$$N_4 = w(1 - a^2)u^4 + \left( wa^2 + \frac{B^2}{4\pi} \right) \chi^2 u^2 - a^2 \chi^2 \frac{b^2}{4\pi}, \quad (\text{B.184})$$

$\chi^2 = \chi_\mu \chi^\mu$ . Из условия  $\det \mathcal{A} = 0$  получаем три уравнения для собственных значений:

$$u = 0, \quad A = 0, \quad N_4 = 0. \quad (\text{B.185})$$

При вычислении собственных значений в кинеметрической калибровке, которая определяется метрикой (B.16), удобно ввести следующие обозначения:

$$\hat{v} = v^1, \quad \hat{B} = \tilde{B}^1, \quad \hat{\beta} = \beta^1, \quad \hat{h} = h^{11}. \quad (\text{B.186})$$

Собственные значения  $\lambda$  удобно выражать через величины  $\mu$  с помощью соотношения

$$\lambda = \alpha\mu - \hat{\beta}. \quad (\text{B.187})$$

В этих обозначениях

$$u = \gamma(\mu - \hat{v}), \quad (\text{B.188})$$

$$b = \gamma(\mu - \hat{v})(v_i \tilde{B}^i) - \frac{\hat{B}}{\gamma}. \quad (\text{B.189})$$

Первое условие в (B.185) дает двухкратное собственное значение, которое определяется величиной

$$\mu = \hat{v}. \quad (\text{B.190})$$

Это собственное значение соответствует энтропийной характеристике в нерелятивистской магнитной газодинамике. Второе условие в (B.185) дает два собственных значения, соответствующие альфвеновским характеристикам:

$$\mu = \hat{v} \mp \frac{\hat{B}}{\gamma^2(\sqrt{4\pi w_T} \mp v_i \tilde{B}^i)}. \quad (\text{B.191})$$

Наконец, последнее условие в (B.185) определяет уравнение для магнитозвуковых характеристик. В развернутой записи это уравнение выглядит следующим образом:



$$w(1 - a^2)\gamma^4(\mu - \hat{v})^4 + \gamma^2 \left( wa^2 + \frac{B^2}{4\pi} \right) (\mu^2 - \hat{h})(\mu - \hat{v})^2 - \\ - \frac{a^2\gamma^2}{4\pi}(\mu^2 - \hat{h}) \left[ (\mu - \hat{v})(v_i \tilde{B}^i) - \frac{\hat{B}}{\gamma^2} \right]^2 = 0. \quad (\text{B.192})$$

В общем случае оно сводится к алгебраическому уравнению четвертого порядка для величины  $\mu$  и поэтому его решение нельзя записать в явном виде.

Наиболее простой вид выражения для собственных значений принимают в мгновенно сопутствующей лоренцевой системе координат, в которой скорость  $v^i = 0$ . В этом случае имеем просто  $\mu = \lambda$  и кроме того,  $\alpha = 1$ ,  $\hat{\beta} = 0$ ,  $\hat{h} = 1$ . Собственные значения, соответствующие энтропийной и альфвеновской характеристикам, принимают вид

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \mp \frac{\hat{B}}{\sqrt{4\pi w_T}}. \quad (\text{B.193})$$

Для магнитозвуковых характеристик получаем биквадратное уравнение

$$\lambda^4 - \left[ a^2 + (1 - a^2) \frac{B^2}{4\pi w_T} - a^2 \frac{\hat{B}^2}{4\pi w_T} \right] \lambda^2 + \frac{a^2 \hat{B}^2}{4\pi w_T} = 0. \quad (\text{B.194})$$

Корни этого уравнения определяют значения для скоростей распространения быстрых и медленных магнитозвуковых волн. Нетрудно убедиться, что все эти выражения для собственных значений в нерелятивистском пределе переходят в соответствующие аналоги, рассматривавшиеся нами в Приложении А.

**В.3.3. Релятивистские сильные МГД-разрывы.** Условия Гюгонио на гиперповерхности сильного МГД-разрыва можно записать следующим образом:

$$n_\alpha [n u^\alpha] = 0, \quad (\text{B.195})$$

$$n_\alpha [T^{\alpha\mu}] = 0, \quad (\text{B.196})$$

$$n_\alpha [B^\alpha u^\mu - B^\mu u^\alpha] = 0, \quad (\text{B.197})$$

где тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  определяется выражением (В.138). Обозначим  $u_n = n_\alpha u^\alpha$ ,  $B_n = n_\alpha B^\alpha$ . В локальной лоренцевой системе координат  $u_n = \gamma\gamma_D(v_x - D)$ , а в локальной лоренцевой системе координат, мгновенно сопутствующей фронту сильного разрыва,  $u_n = \gamma v_x$ . Из соотношения (В.195) следует, что плотность потока числа частиц  $j = n u_n$  является непрерывной при переходе через гиперповерхность разрыва величиной. С помощью введенных величин оставшиеся два условия Гюгонио (В.196) и (В.197) можно переписать в виде

$$j \left[ \frac{w_T}{n} u^\mu \right] - n^\mu [P_T] - \frac{1}{4\pi} [B_n B^\mu] = 0, \quad (\text{B.198})$$

$$[B_n u^\mu] - j \left[ \frac{1}{n} B^\mu \right] = 0. \quad (\text{B.199})$$

Векторы скорости  $u^\mu$  и напряженности магнитного поля  $B^\mu$  можно разложить на сумму нормальных и тангенциальных компонент к гиперповерхности разрыва. Обозначив тангенциальные компоненты скорости и напряженности магнитного поля через  $U^\mu$  и  $b^\mu$ , соответственно, получим:

$$u^\mu = -u_n n^\mu + U^\mu, \quad B^\mu = -B_n n^\mu + b^\mu. \quad (\text{B.200})$$

Квадраты тангенциальных компонент векторов равны

$$U_\mu U^\mu = 1 + u_n^2, \quad b_\mu b^\mu = B_n^2 - B^2, \quad (\text{B.201})$$

а их скалярное произведение

$$b_\mu U^\mu = u_n B_n. \quad (\text{B.202})$$

Подставляя разложения (B.200) в (B.198), (B.199) и учитывая, что  $n_\mu U^\mu = 0$ ,  $n_\mu b^\mu = 0$ , условия Гюгионо запишем в виде

$$j^2 \left[ \frac{w_T}{n^2} \right] + [P_T] - \frac{1}{4\pi} [B_n^2] = 0, \quad (\text{B.203})$$

$$j \left[ \frac{w_T}{n} U^\mu \right] - \frac{1}{4\pi} [B_n b^\mu] = 0, \quad (\text{B.204})$$

$$[B_n U^\mu] - j \left[ \frac{1}{n} b^\mu \right] = 0. \quad (\text{B.205})$$

Рассмотрим сначала разрывы, в которых плотность потока числа частиц  $j = 0$ . Поскольку мы считаем, что  $n \neq 0$ , то в этом случае должно быть  $u_n = 0$ . Это означает, что скорость газа равна скорости разрыва. Заметим, что при условии  $u_n = 0$  квадрат тангенциальной компоненты скорости равен  $U_\mu U^\mu = 1$ , а скалярное произведение  $b_\mu U^\mu = 0$ . Соотношения Гюгионо (B.203)–(B.205) упрощаются и принимают вид

$$[P_T] - \frac{1}{4\pi} [B_n^2] = 0, \quad (\text{B.206})$$

$$[B_n b^\mu] = 0, \quad [B_n U^\mu] = 0. \quad (\text{B.207})$$

Здесь необходимо рассмотреть два частных случая.

Случай  $B_n \neq 0$ . Из второго условия в (B.207) следует, что векторы  $U_1^\mu$  и  $U_2^\mu$  являются коллинеарными. Но, с учетом свойства  $U_\mu U^\mu = 1$ , это означает, что должно быть  $[U^\mu] = 0$ . Отсюда следует, что  $[B_n] = 0$ . Из первого условия в (B.207) находим:  $[b^\mu] = 0$ . Таким образом, вектор напряженности магнитного поля  $B^\mu$  на таком разрыве является непрерывной величиной:  $[B^\mu] = 0$ . Наконец, из соотношения (B.206) находим:  $[P] = 0$ . Этот случай соответствует контактному МГД-разрывам.

Случай  $B_n = 0$ . Из соотношений (В.207) заключаем, что в таком разрыве тангенциальные компоненты скорости  $U^\mu$  и напряженности магнитного поля  $b^\mu$  могут испытывать произвольные скачки:  $[U^\mu] \neq 0$ ,  $[b^\mu] \neq 0$ . При этом полное давление  $P_T$  остается непрерывной величиной,  $[P_T] = 0$ . Этот случай соответствует тангенциальным МГД-разрывам.

Перейдем теперь к рассмотрению разрывов, в которых плотность потока числа частиц  $j \neq 0$ . В этом случае удобно ввести касательные к гиперповерхности разрыва векторы

$$V^\mu = B_n U^\mu - \frac{j}{n} b^\mu, \quad (\text{В.208})$$

$$W^\mu = j \frac{w_T}{n} U^\mu - \frac{B_n}{4\pi} b^\mu. \quad (\text{В.209})$$

Из условий Гюгонио (В.204) и (В.205) следует, что эти векторы являются непрерывными при переходе через разрыв,  $[V^\mu] = 0$ ,  $[W^\mu] = 0$ . Квадраты этих векторов  $H = V_\mu V^\mu$ ,  $K = W_\mu W^\mu$ , а также их скалярное произведение  $G = V_\mu W^\mu$  являются скалярными инвариантами разрыва, т. е. эти величины остаются непрерывными при переходе через гиперповерхность разрыва. Кроме того, как следует из соотношения (В.203), на разрыве остается непрерывной скалярная величина

$$F = j^2 \frac{w_T}{n^2} + P_T - \frac{B_n^2}{4\pi}. \quad (\text{В.210})$$

Таким образом, на гиперповерхности разрыва остаются непрерывными пять скалярных величин:  $j$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $K$  и две тангенциальные векторные величины:  $V^\mu$ ,  $W^\mu$ .

Вычисления скалярных величин  $H$  и  $G$  приводят к формулам

$$H = B_n^2 - \frac{j^2}{n^2} B^2, \quad G = j B_n \frac{w}{n}. \quad (\text{В.211})$$

Обозначим

$$\eta = \frac{w_T}{n^2} - \frac{B_n^2}{4\pi j^2} = \frac{w}{n^2} - \frac{H}{4\pi j^2}. \quad (\text{В.212})$$

Используя это обозначение, выражение (В.210) для величины  $F$  можно записать в более удобном виде:

$$F = j^2 \eta + P_T. \quad (\text{В.213})$$

Выражая из соотношения (В.208) вектор  $b^\mu$ , находим:

$$b^\mu = \frac{n}{j} (B_n U^\mu - V^\mu). \quad (\text{В.214})$$

Подставим это выражение в (В.209), получим:

$$W^\mu = j n \eta U^\mu + \frac{n B_n}{4\pi j} V^\mu. \quad (\text{В.215})$$

С помощью этого выражения вычисляем квадрат вектора  $W^\mu$ :

$$K = j^2 \eta^2 (n^2 + j^2) + 2\eta n^2 \frac{B_n^2}{4\pi} + \frac{n^2 B_n^2 H}{16\pi^2 j^2}. \quad (\text{B.216})$$

Это соотношение можно переписать в более удобной форме:

$$K = \frac{j^2 w^2}{n^4} (n^2 + j^2) + \frac{j^2 w \chi}{2\pi n^2} - \frac{H \chi}{16\pi^2}, \quad (\text{B.217})$$

где обозначено  $\chi = B^2 - H$ . Нетрудно проверить, что

$$KH = G^2 - j^2 \chi \eta^2. \quad (\text{B.218})$$

Поэтому величина

$$L = \chi \eta^2 = \frac{G^2 - KH}{j^2} \quad (\text{B.219})$$

является скалярным инвариантом разрыва.

Случаю альфвеновских разрывов соответствует ситуация, когда при переходе через гиперповерхность разрыва остаются непрерывными все термодинамические величины:  $[n] = 0$ ,  $[w] = 0$ ,  $[P] = 0$ . Из условия сохранения числа частиц следует, что при этом должно быть  $[u_n] = 0$ . Отсюда и из условий непрерывности величин  $H$  и  $G$  следует, что  $[B_n] = 0$ ,  $[B^2] = 0$ . Условия непрерывности векторов  $V^\mu$  и  $W^\mu$  приводят к соотношениям

$$B_n[U^\mu] - u_n[b^\mu], \quad (\text{B.220})$$

$$u_n w_T [U^\mu] - \frac{B_n}{4\pi} [b^\mu]. \quad (\text{B.221})$$

Эти уравнения оказываются согласованными при выполнении условия

$$u_n^2 = \frac{B_n^2}{4\pi w_T}, \quad (\text{B.222})$$

т.е. в альфвеновских разрывах  $\eta = 0$ . Отметим, что в этом случае векторы  $V^\mu$  и  $W^\mu$  являются коллинеарными (см. (B.215)). Величины скачков векторов  $U^\mu$  и  $b^\mu$  в альфвеновском разрыве могут быть произвольными, но должны быть связаны соотношением

$$[U^\mu] = \pm \frac{1}{\sqrt{4\pi w_T}} [b^\mu]. \quad (\text{B.223})$$

Наконец, рассмотрим случай ударных МГД-волн, когда все термодинамические величины испытывают скачки. Из условия сохранения числа частиц и  $[n] \neq 0$  следует, что величина  $u_n$  испытывает скачок,  $[u_n] \neq 0$ . В отличие от альфвеновских разрывов в ударных волнах векторы  $V^\mu$  и  $W^\mu$  являются неколлинеарными.

Мы не будем проводить детальный анализ свойств ударных МГД-волн. Интересующийся читатель может найти более подробное изложение этих вопросов в [602–604]. Выведем здесь только уравнение для ударной МГД-адиабаты.

Из непрерывности величин  $j$  и  $K$  можно получить:

$$\left[ \frac{w^2}{n^2} \right] + j^2 \left[ \frac{w^2}{n^4} \right] + \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{w\chi}{n^2} \right] + \frac{1}{4\pi} [\chi\eta] = 0. \quad (\text{B.224})$$

Далее, используя соотношения

$$j^2 = -\frac{[P_\Gamma]}{[\eta]} = -\frac{[P]}{[\eta]} - \frac{1}{8\pi} \frac{[\chi]}{[\eta]}, \quad (\text{B.225})$$

$$\left[ \frac{w^2}{n^4} \right] = \left( \frac{w_1}{n_1^2} + \frac{w_2}{n_2^2} \right) [\eta], \quad (\text{B.226})$$

находим:

$$\left[ \frac{w^2}{n^2} \right] - \left( \frac{w_1}{n_1^2} + \frac{w_2}{n_2^2} \right) [P] + \frac{1}{8\pi} (\chi_1 + \chi_2) \left[ \frac{w}{n^2} \right] + \frac{1}{4\pi} [\chi\eta] = 0. \quad (\text{B.227})$$

С учетом условия непрерывности величины  $L = \chi\eta^2$ , это соотношение можно записать в виде

$$\left[ \frac{w^2}{n^2} \right] - \left( \frac{w_1}{n_1^2} + \frac{w_2}{n_2^2} \right) [P] + \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} - \frac{L}{\eta_1\eta_2} \right) \left[ \frac{w}{n^2} \right] = 0. \quad (\text{B.228})$$

Уравнение (B.228) описывает ударную МГД-адиабату.

## Список литературы

1. *Iben I., Jr.* Stellar Evolution Within and Off the Main Sequence. — *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, 1967, v. 5, p. 571.
2. *Iben I., Jr.* Post Main Sequence Evolution of Single Star. — *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, 1974, v. 12, p. 215.
3. *Масевич А.Г., Тутуков А.В.* Эволюция звезд: теория и наблюдения. — М.: Наука, 1988.
4. *De Loore C.W.H., Doom C.* Structure and Evolution of Single and Binary Stars. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.
5. *Eggleton P.* Evolutionary Processes in Binary and Multiple Stars. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
6. *Postnov K.A., Yungelson L.R.* The Evolution of Compact Binary Star Systems. — *Living Reviews in Relativity*, 2006, v. 9, №6.
7. *Prialnik D.* An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
8. *Kopal Z.* Close Binary Systems. — London: Chapman and Hall, 1959.
9. *Boyarchuk A.A.* Symbiotic Stars, in *The Realm of Interacting Binaries*, eds J. Sahade, G.E. McCluskey, Jr., Y. Kondo. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 189, 1993.
10. *Plavec M.* Internal Structure and Evolutionary Changes in Binaries, in «On the Evolution of Double Stars», ed. J. Domanget. — *Commun. Obs. Roy. Belgique*, B17, p. 83, 1967.
11. *Paczyński B.* Evolution of Close Binaries // *On the Evolution of Double Stars* / Ed. J. Domanget. — *Commun. Obs. Roy. Belgique*, 1967, B17, p. 111.
12. *Struve O.* The Spectrum of  $\beta$  Lyrae. — *Astrophys. J.*, 1941, v. 93, p. 104.
13. *Batten A.* Binary and Multiple Systems of Stars. — Oxford: Pergamon Press, 1973.
14. *Sahade J., Wood F.B.* Interacting Binary Stars. — New York: Pergamon Press, 1978.
15. *Pringle J.E., Wade R.A.* (eds) *Interacting Binary Systems*. — Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
16. *Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г.* Некорректные задачи астрофизики. — М.: Наука, 1985.
17. *Shore S., Livio M., van den Heuvel E.P.J.* *Interacting Binaries*. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
18. *Warner B.* *Cataclysmic Variable Stars*. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
19. *Warner B.* *Cataclysmic Variable Stars*. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
20. *Boyarchuk A.A., Bisikalo D.V., Kuznetsov O.A., Chechetkin V.M.* Mass transfer in close binary stars. — London: Taylor & Francis, 2002.
21. *Kuiper G.P.* On the Interpretation of  $\beta$  Lyrae and Other Close Binaries. — *Astrophys. J.*, 1941, v. 93, p. 133.
22. *Crawford J.A.* On the Subgiant Components of Eclipsing Binary Systems. — *Astrophys. J.*, 1955, v. 121, p. 71.

23. Фридман А.М., Бисикало Д.В. Природа аккреционных дисков тесных двойных звезд: неустойчивость сверхотражения и развитая турбулентность. — Усп. физ. наук, 2008, т. 178, с. 577.
24. Жилкин А.Г., Бисикало Д.В., Боярчук А.А. Структура течения в тесных двойных звездах с учетом магнитного поля. — Усп. физ. наук, 2012, т. 182, с. 121.
25. Тассуль Ж.-Л. Теория вращающихся звезд. — М.: Мир, 1982.
26. Бисноватый-Коган Г.С., Физические процессы теории звездной эволюции. — Москва: Наука, 1989 (Berlin: Springer Verlag, 2001).
27. Zahn J.P. Les Marées dans une Étoile Double Serrée. — Ann. d'Astrophys., 1966, v. 29, p. 313.
28. Zahn J.P. The Dynamical Tide in Close Binary Stars. — Astron. and Astrophys., 1975, v. 41, p. 329.
29. Zahn J.P. Tidal Friction in Close Binary Stars. — Astron. and Astrophys., 1977, v.57, p. 383.
30. Pringle J.E. in Interacting Binary Systems (Chapter 1), eds J.E. Pringle, R.A. Wade. — Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
31. Plavec M., Kratochvíl P. Tables for the Roche Model of Close Binaries. — Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia, 1964, v. 15, p. 165.
32. Silber A.D. Studies of an XRay Selected Sample of Cataclysmic Variables. — Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1992.
33. Paczyński B. Evolutionary Processes in Close Binary Systems. — Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 1971, v. 9, p. 183.
34. Eggleton P.P. Approximations to the radii of Roche lobes. — Astrophys. J., 1983, v. 268, p. 368.
35. Plavec M.J. From Algol to Beta Lyrae. — in «Interacting Binaries», eds P.P. Eggleton and J.E. Pringle, Dordrecht: Reidel, p. 155, 1985.
36. Кузнецов О.А. Расчет политропных и выродившихся равновесных конфигураций звезд в двойных системах. — Астрон. журн., 1995, т. 72, с. 508.
37. Кузнецов О.А., Прохоров М.Е., Сажин М.В., Четкин В.М. Эволюция орбиты двойной нейтронной звезды и гравитационное излучение. — Астрон. журн., 1998, т. 75, с. 725.
38. Chandrasekhar S. An Introduction to the Study of Stellar Structure. — Oxford: Oxford University Press, 1939.
39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1. — М.: Физматлит, 2005.
40. Habets G.M.H.J., Zwaan C. Asynchronous Rotation in Close Binary Systems with Circular Orbits. — Astron. and Astrophys., 1989, v. 211, p. 56.
41. Schwarzenberg-Czerny A. Precession in Cataclysmic and XRay Binaries: Star or Disc?. — Astron. and Astrophys., 1992, v. 260, p. 268.
42. Głęboccki R., Stawikowski A. Are Rotational Axes Perpendicular to Orbital Planes in Binary Systems? III. Main Sequence and ShortPeriod RS CVn Stars. — Acta Astron., 1995, v. 45, p. 725.
43. Kruszewski A. Exchange of Matter in Close Binary Systems. I. Equilibrium Configurations in the Case of Deviations From Synchronism. — Acta Astron., 1963, v. 13, p. 106.
44. Lubow S.H. Equilibrium States of Nonsynchronous Stars in Detached Binaries. — Astrophys. J., 1979, v. 229, p. 1008.

45. *Scharlemann E.T.* Tides in Differentially Rotating Convective Envelopes. I. The Inviscid Tidal Velocity. — *Astrophys. J.*, 1981, v.246, p. 292.
46. *Scharlemann E.T.* Tides in Differentially Rotating Convective Envelopes. II. The Tidal Coupling. — *Astrophys. J.*, 1982, v. 253, p. 298.
47. *Campbell C.G., Papaloizou J.* The Possibility of NonSynchronism of Convective Secondaries in Close Binary Stars. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1983, v. 204, p. 433.
48. *Bonazzola S., Gourgoulhon E., Haensel P., Marck J.A.* Astrophysical Sources of Gravitational Waves and Neutrinos. — in «Approaches to Numerical Relativity», ed. R. d'Inverno, Cambridge: Cambridge University Press, p. 230, 1991.
49. *Uryū K., Eriguchi Y.* 1996 Existence of NonAxisymmetric Polytropes Sustained by Internal Motions. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1996, v. 282, p. 653.
50. *Uryū K. and Eriguchi Y.* Stationary States of Irrotational Binary Neutron Star Systems and their Evolution due to Gravitational Wave Emission. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1997, v. 296, p. L1.
51. *Avni Y., Schiller N.* Generalized Roche Potential for Misaligned Binary Systems: Properties of the Critical Lobe. — *Astrophys. J.*, 1982, v. 257, p. 703.
52. *Avni Y.* The Eclipse Duration of the XRay Pulsar 3U 0900–40. — *Astrophys. J.*, 1976, V.209, p. 574.
53. *Avni Y., Goldman I.* A Discussion of the Eccentric Binary Hypothesis for Transient XRay Sources. II. Gradual Acceleration Stellar Wind Model. — *Astron. and Astrophys.*, 1980, v. 90, p. 44.
54. *Layton J.T., Blondin J.M., Owen M.P., Stevens I.R.* Tidal Mass Transfer in EllipticalOrbit Binary Stars. — *New Astron.*, 1998, v. 3, p. 111.
55. *Shirey R.E.* Mass Transfer and Accretion in the Eccentric NeutronStar Binary Circinus X1. — Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1998.
56. *Savonije G.L.* RocheLobe Overflow in XRay Binaries. — *Astron. and Astrophys.*, 1978, v. 62, p. 317.
57. *Lubow S.H., Shu F.H.* Gas Dynamics of Semidetached Binaries. — *Astrophys. J.*, 1975, V.198, p. 383.
58. *Ritter H.* Turning On and Off Mass Transfer in Cataclysmic Binaries. — *Astron. and Astrophys.*, 1988, v. 202, p. 93.
59. *Имшенник В.С., Попов Д.В.* Аналитическая модель эволюции тесной двойной системы нейтронных (вырожденных) звезд. — *Письма в Астрон. журн.*, 1998, т. 24, с. 251.
60. *Flannery B.* The Location of the Hot Spot in Cataclysmic Variable Stars as Determined from Particle Trajectories. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1975, v. 170, p. 325.
61. *Bath G.T., Pringle J.E.* Cataclysmic Variables: An Theoretical Review. — in «Interacting Binary Systems», eds J.E.Pringle, R.A.Wade, Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
62. *Шакура Н.И.* Дискковая модель аккреции газа релятивистской звездой в тесной двойной системе. — *Астрон. журн.*, 1972, т. 49, с. 921.



63. *Shakura N.I., Sunyaev R.A.* Black Holes in Binary Systems. Observational appearance. — *Astron. and Astrophys.*, 1973, v. 24, p. 337.
64. *Frank J., King A.R., Raine D.J.* Accretion Power in Astrophysics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
65. *Sawada K., Matsuda T., Hachisu I.* Spiral Shocks on a Roche Lobe Overflow in Semidetached Binary System. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1986, v. 219, p. 75.
66. *Pringle J.E.* Accretion Discs in Astrophysics. — *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, 1981, v. 19, p. 135.
67. *Pringle J.E.* Circumstellar Disks. — in «Nonisotropic and Variable Outflows From Stars», eds L. Drissen, C. Leitherer, A. Note, ASP Conf. Series, 1992, v. 22, p. 14.
68. *Popham R., Narayan R.* Does Accretion Cease when a Star Approaches Breakup? — *Astrophys. J.*, 1991, v. 370, p. 604.
69. *Фридман А.М., Хоружий О.В.* Волны малой амплитуды в диске, симметричные относительно его плоскости  $z = 0$ . — в кн. Фридман А.М. и Горькавый Н.Н., «Физика планетных колец», Москва: Наука, с. 282, 1994.
70. *LyndenBell D., Pringle G.E.* The Evolution of Viscous Discs and the Origin of Nebular Variables. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1974, v. 168, p. 603.
71. *Verbunt F.* Accretion Disks in Stellar XRay Sources — a Review of the Basic Theory of Accretion Disks and its Problems. — *Space Sci. Rev.*, 1982, v. 32, p. 379.
72. *MeyerHofmeister E., Ritter H.* Accretion Disks in Close Binaries. — in «The Realm of Interacting Binary Stars», eds J. Sahade, G.E. McCluskey, Jr., Y. Condo, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 143, 1993.
73. *Tout C.* Accretion Disk Viscosity. — in «Cataclysmic Variables and Related Objects», eds A. Evans, J.H. Wood, Dordrecht: Kluwer, p. 97, 1996.
74. *von Weizsäcker C.F.* Die Rotation Kosmischer Gasmassen. — *Z. Naturforsch.*, 3a, p. 524, 1948.
75. *Frisch U., Orszag S.A.* Turbulence — Challenges for Theory and Experiment. — *Phys. Today*, 1990, v. 43, p. 24.
76. *Papaloizou J., Pringle J.E.* Tidal torques on accretion discs in close binary systems. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1977, v. 181, p. 441.
77. *Lin D.N.C., Papaloizou J.C.B., Savonije G.J.* Propagation of tidal disturbance in gaseous accretion disks. — *Astrophys. J.*, 1990, v. 365, p. 748.
78. *Dgani R., Livio M., Regev O.* On the effects of tidal interaction on thin accretion disks: an analytic study. — *Astrophys. J.*, 1994, v. 436, p. 270.
79. *Michel F.C.* Hydraulic jumps in «viscous» accretion disks. — *Astrophys. J.*, 1984, v. 279, p. 807.
80. *Spruit H.C.* Stationary shocks in accretion disks. — *Astron. and Astrophys.*, 1987, v. 184, p. 173.
81. *Spruit H.C.* Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior. — *Astron. and Astrophys.*, 2002, v. 381, p. 923.
82. *Syer D., Narayan R.* Steady flow on to a conveyor belt: causal viscosity and shear shocks. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1993, v. 262, p. 749.

83. Бисноватый-Коган Г.С., Блинников С.И. Горячая корона вокруг диска, аккрецирующего на черную дыру и модель источника Лебедь X-1. — Письма в Астрон. журн., 1976, т. 2, с. 489.
84. Paczyński B. Close Binaries. — Comments on Astrophysics, 1976, v. 6, p. 95.
85. Shakura N.I., Sunyaev R.A., Zilitinkevich S.S. On the turbulent energy transport in accretion discs. — Astron. and Astrophys., 1978, v. 62, p. 179.
86. Lin D.N.C., Papaloizou J. On the structure and evolution of the primordial solar nebula. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1980, v. 191, p. 37.
87. Blandford R.D., Payne D.G. Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1982, v. 199, p. 883.
88. Lubow S., Papaloizou J.C.B., Pringle J.E. On the Stability of Magnetic Wind-Driven Accretion Discs. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1994, v. 268, p. 1010.
89. Cao X., Spruit H.C. Instability of an accretion disk with a magnetically driven wind. — Astron. and Astrophys., 2002, v. 385, p. 289.
90. Lynden-Bell D. On why discs generate magnetic towers and collimate jets. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2003, v. 341, p. 1360.
91. Lin D.N.C., Papaloizou J.C.B. Tidal torques on accretion discs in binary systems with extreme mass ratios. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1979, v. 186, p. 799.
92. Lubow S.H. Vertically driven resonances in accretion disks. — Astrophys. J., 1981, v. 245, p. 274.
93. Vishniac E.T., Diamond P. A self-consistent model of mass and angular momentum transport in accretion disks. — Astrophys. J., 1989, v. 347, p. 435.
94. Велухов Е.П. Устойчивость течения идеально проводящей жидкости между вращающимися цилиндрами в магнитном поле. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1959, т. 36, с. 1398.
95. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. — New York: Dover, 1981.
96. Balbus S.A., Hawley G.F. A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks: I. Linear Analysis. — Astrophys. J., 1991, v. 376, p. 214.
97. Winters W.F., Balbus S.A., Hawley J.F. Chaos in turbulence driven by the magnetorotational instability. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2003, v. 340, p. 519.
98. Goodman J. A local instability of tidally distorted accretion disks. — Astrophys. J., 1993, v. 406, p. 596.
99. Lubow S.H., Pringle J.E., Kerswell R.R. Tidal Instability of Accretion Disks. — Astrophys. J., 1993, v. 419, p. 758.
100. Cabot W. The nonaxisymmetric baroclinic instability in thin accretion disks. — Astrophys. J., 1984, v. 277, p. 806.
101. Li H., Finn J.M., Lovelace R.V.E., Colgate S.A. Rossby Wave Instability of Thin Accretion Disks. II. Detailed Linear Theory. — Astrophys. J., 2000, v. 533, p. 1023.

102. *Klahr H.H., Bodenheimer P.* Turbulence in Accretion Disks: Vorticity Generation and Angular Momentum Transport via the Global Baroclinic Instability. — *Astrophys. J.*, 2003, v. 582, p. 869.
103. *Papaloizou J.C.B., Lin D.N.C.* Theory Of Accretion Disks I: Angular Momentum Transport Processes. — *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, 1995, v. 33, p. 505.
104. *Balbus S.A.* Enhanced Angular Momentum Transport in Accretion Disks. — *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, 2003, v. 41, p. 555.
105. *Shtemler Yu.M., Mond M., Liverts E.* Spectral and algebraic instabilities in thin Keplerian discs under poloidal and toroidal magnetic fields. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2011, v. 413, p. 2957.
106. *Norton A.J., Wynn J.A., Somerscales R.V.* The Spin Periods and Magnetic Moments of White Dwarfs in Magnetic Cataclysmic Variables. — *Astrophys. J.*, 2004, v. 614, p. 349.
107. *Липунов В.М.*, *Астрофизика нейтронных звезд.* — М.: Наука, 1987.
108. *Campbell C.G.* *Magnetohydrodynamics in binary stars.* — Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1997.
109. *Долгинов А.З.* О происхождении магнитных полей Земли и небесных тел. — *Усп. физ. наук*, 1987, т. 152, с. 231.
110. *Herzenberg A.* Geomagnetic Dynamos. — *Phil. Trans. Ser. A.*, 1958, v. 250, p. 543.
111. *Brandenburg A., Moss D., Soward A.M.* New results for the Herzenberg dynamo: steady and oscillatory solutions. — *Royal Society of London Proceedings Series A*, 1998, v. 454, p. 1283.
112. *King A.R.* The accretion of diamagnetic blobs by a rotating magnetosphere. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1993, v. 261, p. 144.
113. *Wynn G.A., King A.R.* Diamagnetic accretion in intermediate polars. I. Blob orbits and spin evolution. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1995, v. 275, p. 9.
114. *Wynn G.A., King A.R., Horne K.* A magnetic propeller in the cataclysmic variable AE Aquarii. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1997, v. 286, p. 436.
115. *King A.R., Wynn G.A.* The spin period of EX Hydrae. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1999, v. 310, p. 203.
116. *Ikhsanov N.R., Neustroev V.V., Beskrovnaya N.G.* On the mass transfer in AE Aquarii. — *Astron. and Astrophys.*, 2004, v. 421, p. 1131.
117. *Norton A.J., Butters O.W., Parker T.L., Wynn G.A.* The Accretion Flows and Evolution of Magnetic Cataclysmic Variables. — *Astrophys. J.*, 2008, v. 672, p. 524.
118. *Koldoba A.V., Romanova M.M., Ustyugova G.V., Lovelace R.V.E.* Three-Dimensional Magnetohydrodynamic simulations of accretion to an inclined rotator: The «Cubed Sphere» Method. — *Astrophys. J.*, 2002, v. 576, p. L53.
119. *Romanova M.M., Ustyugova G.V., Koldoba A.V., Wick J.V., Lovelace R.V.E.* Three-dimensional Simulations of Disk Accretion to an Inclined Dipole. I. Magnetospheric Flows at Different  $\Theta$ . — *Astrophys. J.*, 2003, v. 595, p. 1009.

120. *Romanova M.M., Ustyugova G.V., Koldoba A.V., Lovelace R.V.E.* Three-dimensional Simulations of Disk Accretion to an Inclined Dipole. II. Hot Spots and Variability. — *Astrophys. J.*, 2004, v. 610, p. 920.
121. *Romanova M.M., Ustyugova G.V., Koldoba A.V., Lovelace R.V.E.* The Propeller Regime of Disk Accretion to a Rapidly Rotating Magnetized Star. — *Astrophys. J.*, 2004, v. 616, p. L151.
122. *Жилкин А.Г., Бисикало Д.В.* Влияние магнитного поля на структуру аккреционных дисков в полуразделенных двойных системах. — *Астрон. журн.*, 2009, т. 86, с. 475.
123. *Zhilkin A.G., Bisikalo D.V.* The effect of turbulent dissipation of magnetic field on flow structure in close binaries. — *Advances in Space Research*, 2010, v. 45, p. 437.
124. *Жилкин А.Г., Бисикало Д.В.* Структура магнитного поля в аккреционных дисках полуразделенных двойных систем. — *Астрон. журн.*, 2010, т. 87, с. 913.
125. *Жилкин А.Г., Бисикало Д.В.* Формирование аккреционных дисков в тесных двойных системах с магнитным полем. — *Астрон. журн.*, 2010, т. 87, с. 1155.
126. *Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кайгородов П.В., Кузнецов О.А.* Морфология взаимодействия струи и холодного аккреционного диска в полуразделенных двойных системах. — *Астрон. журн.*, 2003, т. 80, с. 879.
127. *Bell K.R., Lin D.N.C.* Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models. — *Astrophys. J.*, 1994, v. 427, p. 987.
128. *Alexander D.R., Augason G.C., Johnson H.R.* An opacity-sampled treatment of water vapor. — *Astrophys. J.*, 1989, v. 345, p. 1014.
129. *Cannizzo J.K., Kenyon S.J.* The accretion disk limit cycle mechanism in GK Persei. — *Astrophys. J.*, v. 309, p. L43, 1986.
130. *Cox D.P., Daltabuit E.* Radiative cooling of a low-density plasma. — *Astrophys. J.*, 1971, v. 167, p. 113.
131. *Dalgarno A., McCray R.A.* Heating and ionization of HI regions. — *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, 1972, p. 375.
132. *Raymond J.C., Cox D.P., Smith B.W.* Radiative cooling of a low-density plasma. — *Astrophys. J.*, 1976, v. 204, p. 290.
133. *Спитцер Л.* Физические процессы в межзвездной среде. — М.: Мир, 1981.
134. *Шварцшильд М.* Строение и эволюция звезд. — М.: ИЛ, 1961 (Princeton: Princeton Univ. Press, 1958).
135. *Боголюбов Н.Н.* Журн. эксперим. и теор. физ., 1946, т. 16, №8, с. 681.
136. *Kirkwood J.G.* *J. Chem. Phys.*, 1947, v. 14, p. 180.
137. *Born M., Green H.S.* *Proc. Roy. Soc.*, 1946, A188, p. 10.
138. *Green H.S.* *Proc. Roy. Soc.*, 1947, A189, p. 103.
139. *Yvon J.* *La Theorie Statistique des Fenids et l'Equation d'Etat.* — Paris, 1935.
140. *Boltzmann L.* *Sber. Akad. Wiss. Wien Abt. II*, 1872, v. 66, p. 275.
141. *Chapman S., Cowling T.G.* *The mathematical theory of non-uniform gases* (3rd ed.). — Cambridge University Press, 1970.
142. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967.

143. *Harris S.* An introduction to the theory of the Boltzmann equation. — New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1971.
144. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды (в двух томах). — М.: Наука, 1970.
145. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. — М.: Физматлит, 2006.
146. *Maxwell J.C.* Phil. Mag. (1860) (4) v. 19, 22.
147. *Chapman S., Cowling T.G.* The mathematical theory of non-uniform gases (2nd ed.). — Cambridge University Press, 1952.
148. *Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B.* The molecular theory of gases and liquids. — New York: Wiley, 1954.
149. *Schaaf S.A., Chambre P.L.* Flow of rarefied gases. — Princeton University Press, 1961.
150. *Grad H.* Commun. Pure and Appl. Math., 1949, v. 2, p. 331.
151. *Франк-Каменецкий Д.А.* Лекции по физике плазмы. — М.: Атомиздат, 1968.
152. *Чен Ф.* Введение в физику плазмы. — М.: Мир, 1987.
153. *Трубников Б.А.* Теория плазмы. — М.: Энергоатомиздат, 1996.
154. *Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З.* Физика плазмы для физиков. — М.: Атомиздат, 1979.
155. *Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я.* Волновые явления в ионосфере и космической плазме. — М.: Наука, 1984.
156. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа. — Журн. эксперим. и теор. физ., т. 8, №3, С.291, 1938.
157. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978.
158. *Смирнов Б.М.* Физика слабоионизованного газа в задачах с решениями. — М.: Наука, 1985.
159. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. — М.: Физматлит, 2007.
160. *Брагинский С.И.* Вопросы теории плазмы / под ред. Леонтовича М.А. — М.: Атомиздат, 1963.
161. *Баранов В.Б., Краснобаев К.В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. — М.: Наука, 1977.
162. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматлит, 2003.
163. *Tassis K., Mouschovias T.Ch.* Astrophys. J., 2007, v. 660, p. 370–387.
164. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика. — М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
165. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1962.
166. *Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г.* Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967.
167. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988.
168. *Von Neumann J., Richtmyer R.D.* A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks. — J. Appl. Phys., 1950, v. 21, p. 232.
169. *Lax P.D.* Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations. — Commun. Pure Appl. Math., 1954, v. 7, p. 159.

170. *Friedrichs R.O.* Symmetric hyperbolic linear differential equations. — *Commun. Pure Appl. Math.*, 1954, v. 7, p. 345.
171. *Lax P.D., Wendroff B.* Systems of conservation laws. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960, v. 13, p. 217.
172. *Courant R., Isaacson E., Rees M.* On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1952, v. 5, №3, p. 243.
173. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. — *Мат. сборник*, 1959, т. 47, с. 271.
174. *Федоренко Р.П.* Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений. — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1962, т. 2, с. 1122.
175. *Гольдин В.Я.* Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений. — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1965, т. 5 с. 938.
176. *Harten A., Zwas G.* Self-adjusting hybrid schemes for shock computations. — *J. Comp. Phys.*, 1972, v. 6, p. 568.
177. *Boris J.P., Book D.L.* Flux corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. — *J. Comp. Phys.*, 1973, v. 11, p. 38.
178. *Zalesak S.T.* Fully multidimensional flux-corrected transport algorithm for fluid. — *J. Comp. Phys.*, 1979, v. 31, p. 335.
179. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики. — *Уч. записки ЦАГИ*, 1972, т. 3, с. 68.
180. *Van Leer B.* Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order-Scheme. — *J. Comp. Phys.*, 1974, v. 14, p. 361.
181. *Van Leer B.* Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection. — *J. Comp. Phys.*, 1977, v. 23, p. 276.
182. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. — *J. Comp. Phys.*, 1983, v. 49, p. 357.
183. *Sweby P.K.* High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. — *SIAM J. Numer. Anal.*, 1984, v. 21, p. 995.
184. *Chakravarthy S.R., Osher S.* A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. — *AIAA Pap.*, 1985, №85-0363.
185. *Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П.* Квазимонотонные разностные схемы для уравнений газодинамики. — *Препринт ИПМ РАН*, 1987, №69.
186. *Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П.* Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа. — *Матем. моделир.*, 1989, т. 1, №5, с. 95.
187. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов. — *Докл. АН СССР*, 1959, т. 124, с. 529.
188. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. — *М.: Наука*, 1992.
189. *LeVeque R.J.* *Numerical Methods for Conservation Laws.* — *Basel: Birkhäuser-Verlag*, 1990.

190. *Kimoto P.A., Chernoff D.F.* Convergence Properties of FiniteDifference Hydrodynamics Schemes in the Presence of Shocks. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1995, v. 96, p. 627.
191. *Годунов С.К., Забродин А.В., Прокопов Г.П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1961, т. 1, с. 1020.
192. *Osher S., Solomon F.* Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws. — *Math. Comp.*, 1982, v. 38, p. 339.
193. *Harten A., Lax P.D., van Leer B.* On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. — *SIAM Review*, 1983, v. 25, №1, p. 35.
194. *Roe P.L.* Characteristic Based Schemes For the Euler Equations. — *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1986, v. 18, p. 337.
195. *Colella P., Woodward P.R.* The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations. — *J. Comp. Phys.*, 1984, v. 54, p. 175.
196. *Lucy L.B.* A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis. — *Astron. J.*, 1977, v. 82, p. 1013.
197. *Gingold R.A., Monaghan J.J.* Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1977, v. 181, p. 375.
198. *Препарата Ф., Шаймос М.* Вычислительная геометрия. Введение. — М.: Мир, 1989.
199. *Thompson J.F., Soni B.K., Weatherill N.P.* (eds.) Handbook of Grid generation. — Boca Raton: CRC Press, 1999.
200. *Круглякова Л.В., Неледова А.В., Тишкин В.Ф., Филатов А.Ю.* Матем. моделир., 1998, т. 10, №3, 93.
201. *Годунов С.К., Рябенкий В.С.* Разностные схемы. — М.: Наука, 1977.
202. *Strang G.* On the construction and comparison of difference schemes. — *SIAM J. Num. Anal.*, 1968, v. 5, p. 506.
203. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
204. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука, 1981.
205. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.
206. *Thom A., Appelt C.J.* Field computations in engineering and physics. — C Van Nostrand Company, Ltd, 1961.
207. *Thoman D.C., Szewczyk A.A.* Numerical solutions of time dependent two dimensional flow of a viscous, incompressible fluid over stationary and rotating cylinders, Tech. Rept. 66 14, Heat Transfer and Fluid Mech. Lab., Dept. Mech. Eng., Univ. of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, 1966.
208. *Courant R., Friedrichs K., Levy H.* (1928), Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики. — *Усп. матем. наук*, 1940, т. 8, с. 125.
209. *Hirt C.W.* Heuristic stability theory for finite-difference equations. — *J. Comp. Phys.*, 1968, v. 2, p. 339.
210. *Яненко Н.Н., Шокин Ю.И.* О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем. — *ДАН СССР*, 1968, т. 182, №4, с. 776.

211. Давыдов Ю.М., Скотников В.П. Дифференциальные приближения разностных схем. — М.: ВЦ АН СССР, 1978.
212. Бахвалов Н.С. Численные методы. — М.: Наука, 1975.
213. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975.
214. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.
215. Dwyer H.A. Grid adaptation for problems in fluid dynamics. — AIAA J., 1984, v. 22, №12, p. 1705.
216. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. — М.: Мир, 1990.
217. Гильманов А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. — М.: Физматлит, 2000.
218. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
219. Berger M.J., Olinger J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. — J. Comp. Phys., 1984, v. 53, p. 484.
220. Berger M.J., Colella P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. — J. Comp. Phys., 1989, v. 82, p. 64.
221. Лисейкин В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1996, т. 36, №1, с. 3.
222. Brackbill J.U., Saltzman J.S. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions. — J. Comp. Phys., 1982, v. 46, p. 342.
223. Сидоров А.Ф., Ушакова О.В. Об одном алгоритме построения оптимальных разностных сеток и его приложениях. — Числ. методы механ. сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1985, т. 18, №5, с. 101.
224. Руденко Д.В., Утюжникова С.В. Применение динамически адаптивных к решению сеток для моделирования пространственных нестационарных течений газа с большими градиентами. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002, т. 42, №3, с. 395.
225. Гильманов Н.А. Применение динамически адаптивных сеток к исследованию течений с многомасштабной структурой потока. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001, т. 41, №2, с. 311.
226. Мажукин В.И., Такоева Л.Ю. Принципы построения динамически адаптирующихся к решению сеток в одномерных краевых задачах. — Матем. моделир., 1990, т. 2, №3, с. 101.
227. Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А. Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с использованием адаптивных сеток, динамически связанных с решением. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1988, т. 28, №8, с. 1210.
228. Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Математическое моделирование нестационарных двумерных краевых задач на сетках с динамической адаптацией. — Матем. моделир., 1989, т. 1, №3, с. 29.
229. Мажукин В.И., Самарский А.А., Шапранов А.В. Метод динамической адаптации в проблеме Бюргерса. — Докл. РАН, 1993, т. 333, №2, с. 165.



230. *Бреславский П.В., Мажукин В.И.* Метод динамической адаптации в задачах газовой динамики. — Матем. моделир., 1995, т. 7, №12, с. 48.
231. *Мажукин В.И., Самарский А.А., Чуйко М.М.* Метод динамической адаптации для численного решения нестационарных многомерных задач Стефана. — Докл. РАН, 1999, т. 368, №3, с. 307.
232. *Демин М.М., Мажукин В.И., Шапранов А.А.* Метод динамической адаптации в проблеме ламинарного горения. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001, т. 41, №4, с. 609.
233. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
234. *Hui W.H., Li P.Y., Li Z.W.* A unified coordinate system for solving the two-dimensional Euler equations. — J. Comp. Phys., 1999, v. 153, p. 596.
235. *Hui W.H., Kudriakov S.* A unified coordinate system for solving the three-dimensional Euler equations. — J. Comp. Phys., 2001, v. 172, p. 235.
236. *Wu Z.N.* A note on the unified coordinate system for computing shock waves. — J. Comp. Phys., 2002, v. 180, p. 110.
237. *Mazeran C., Despres B.* Lagrangian gas dynamics in dimension two and Lagrangian systems. — Archive of Rational Mechanics and Analysis, 2005, v. 178, №3, p. 327.
238. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.
239. *Панов Д.Ю.* Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Гостехиздат, 1957.
240. *Жуков А.И.* Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики. — Труды Матем. ин-та АН СССР, 1960, т. 7.
241. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.
242. *Leith C.E.* Numerical simulation of the Earth's atmosphere. — Univ. of California, Livermore, UCRL 7986 T, 1964.
243. *Richtmyer R.D.* A survey of difference methods for non-steady fluid dynamics. — NCAR Technical note 63-2, Nat'l Center for Atmos. Res., Boulder, Colo., 1962.
244. *Lerat A., Peyret R.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 1973, 276, p. 759.
245. *MacCormack R.W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. — AIAA Paper №69-354, 1969.
246. *Пейре Р., Тейлор Т.Д.* Вычислительные методы в задачах механики жидкостей. — Л.: Гидрометеиздат, 1989.
247. *Alder B.J., Waingwright T.E.* — J. Chem. Phys., 1957, v. 27, p. 1208.
248. *Allen M.P., Tildesley A.K.* — Computer Simulation of Liquids. Oxford: Clarendon Press, 1987.
249. *Товбин Ю.К.* (ред.) Метод молекулярной динамики в физической химии. — М.: Наука, 1996.
250. *Evans M.W., Halrow F.H.* The Particle-in-Cell method for hydrodynamic calculations. — Los Alamos Sci. Lab., Rept. №LA-2139, Los Alamos, New Mexico, 1957.

251. *Gentry R.A., Martin R.E., Daly B.J.* An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems. — *J. Comp. Phys.*, 1966, v. 1, p. 87.
252. *Harlow F.H., Welch J.E.* Numerical calculations of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. — *Phys. of Fluids*, 1965, v. 8, №12, p. 2182.
253. *Welch J.E., Harlow F.H., Shannon J.P., Daly B.J.* The MAC method. — Los Alamos Sci. Lab., Rept. №LA-3425, Los Alamos, New Mexico, 1966.
254. *Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П.* Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. М.: изд. СО РАН, 2004.
255. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Расчет транзвуковых течений методом «крупных частиц». — Численные методы механики сплошной среды, 1970, т. 1, №3.
256. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1971, т. 11, с. 182.
257. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. — М.: Наука, 1982.
258. *Gingold R.A., Monaghan J.J.* Kernel Estimates as a Basis for General Particle Methods in Hydrodynamics. — *J. Comp. Phys.*, 1982, v. 46, p. 429.
259. *Monaghan J.J., Gingold R.A.* Shock Simulation by the Particle Method SPH. — *J. Comp. Phys.*, 1983, v. 52, p. 374.
260. *Monaghan J.J.* An Introduction to SPH. — *Comp. Phys. Comm.*, 1988, v. 48, p. 89.
261. *Balsara D.S.* Von Neumann Stability Analysis of Smooth Particle Hydrodynamics — Suggestions for Optimal Algorithms. — *J. Comp. Phys.*, 1995, v. 121, p. 357.
262. *Whitworth A.P., Bhattal A.S., Turner J.A., Watkins S.J.* Estimating Density in Smoothed Particle Hydrodynamics. — *Astron. and Astrophys.*, 1995, v. 301, p. 929.
263. *Couchman H.M.P., Thomas P.A., Pearce F.R.* Hydra: an Adaptive Mesh Implementation of P<sup>3</sup>M-SPH. — *Astrophys. J.*, 1995, v. 452, p. 797.
264. *Laguna P.* Smoothed Particle Interpolation. — *Astrophys. J.*, 1995, v. 439, p. 814.
265. *Nelson R.P., Papaloizou J.C.B.* Variable Smoothing Lengths and Energy Conservation in Smoothed Particle Hydrodynamics. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1994, v. 270, p. 1.
266. *Simpson J.C., Wood M.A.* A Comparison of Standard SPH Artificial Viscosities in Accretion Disks Simulations. — *American Astron. Soc. Meeting*, 1995, v. 187, №79.17.
267. *Fulbright M.S., Benz W., Davies M.B.* A Method of Smoothed Particle Hydrodynamics using Spheroidal Kernels. — *Astrophys. J.*, 1995, v. 440, p. 254.
268. *Lee H.M., Kim S.S.* Evolution of Debris of a Tidally Disrupted Star by a Massive Black Hole: Development of a Hybrid Scheme of the SPH and TVD Methods. — *J. Korean Astron. Soc.*, 1996, v. 29, p. 195.
269. *Morris J.P.* A Study of the Stability Properties of Smooth Particle Hydrodynamics. — *Publ. Astron. Soc. Australia*, 1996, v. 13, p. 97.

270. *Serna A., Alimi J.M., Chieze J.P.* Adaptive Smooth Particle Hydrodynamics and Particle-Particle Coupled Codes: Energy and Entropy Conservation. — *Astrophys. J.*, 1996, v. 461, p. 884.
271. *Watkins S.J., Bhattal A.S., Francis N., Turner J.A., Whitworth A.P.* A New Prescription for Viscosity in Smoothed Particle Hydrodynamics. — *Astron. and Astrophys. Suppl.*, 1996, v. 119, p. 177.
272. *Davé R., Dubinski J., Hernquist L.* Parallel Tree SPH. — *New Astron.*, 1997, v. 2, p. 277.
273. *Nakasato N., Mori M., Nomoto K.* Smoothed Particle Hydrodynamics with GRAPE and Parallel Virtual Machine. — *Astrophys. J.*, 1997, v. 484, p. 608.
274. *Whitworth A.P.* The Jeans Instability in Smoothed Particle Hydrodynamics. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1998, v. 296, p. 442.
275. *Owen J.M., Villumsen J.V., Shapiro P.R., Martel H.* Adaptive Smoothed Particle Hydrodynamics: Methodology. II. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1998, v. 116, p. 155.
276. *Sommer-Larsen J., Vedel H., Hellsten U.* On the Global Structure of Self-Gravitating Discs for Softened Gravity. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1998, v. 294, p. 485.
277. *Lombardi J.C., Sills A., Rasio F.A., Shapiro S.L.* Tests of Spurious Transport in Smoothed Particle Hydrodynamics. — *J. Comp. Phys.*, 1999, v. 152, p. 687.
278. *Cummins S.J., Rudman M.* An SPH Projection Method. — *J. Comp. Phys.*, 1999, v. 152, p. 584.
279. *Monaghan J.J., Lattanzio J.C.* A Refined Particle Method for Astrophysical Problems. — *Astron. and Astrophys.*, 1985, v. 149, p. 135.
280. *Monaghan J.J.* Smoothed Particle Hydrodynamics. — *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, 1992, v. 30, p. 543.
281. *Hernquist L., Katz N.* TreeSPH: a Unification of SPH with the Hierarchical Tree Method. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1989, v. 70, p. 419.
282. *Schüssler I., Schmitt D.* Comments on Smoothed Particle Hydrodynamics. — *Astron. and Astrophys.*, 1981, v. 97, p. 373.
283. *Thomas P.A., Couchman H.M.P.* Simulating the Formation of a Cluster of Galaxies. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1992, v. 257, p. 11.
284. *Steinmetz M.* GRAPESPH: Cosmological Smoothed Particle Hydrodynamics Simulations with the SpecialPurpose Hardware GRAPE. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1996, v. 278, p. 1005.
285. *Thacker R.J., Tittley E.R., Pearce F.R., Couchman H.M.P., Thomas P.A.* Smoothed Particle Hydrodynamics in Cosmology: a Comparative Study of Implementations. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2000, v. 319, p. 619.
286. *Monaghan J.J.* On the Problem of Penetration in Particle Methods. — *J. Comp. Phys.*, 1989, v. 82, p. 1.
287. *Latter R.* Similarity solution for a spherical shock wave. — *J. Appl. Phys.*, 1955, v. 26, p. 955.
288. *Loewenstein M., Mathews W.G.* Adiabatic Particle Hydrodynamics in 3 Dimensions. — *J. Comp. Phys.*, 1986, v. 62, p. 414.
289. *Lattanzio J.C., Monaghan J.J., Pongracic H., Schwarz M.P.* Controlling Penetration. — *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 1986, v. 7, p. 591.

290. *Bate M.R.* The Role of Accretion in Binary Star Formation. — Ph.D. Thesis, Cambridge University, 1995.
291. *Rasio F.A., Lombardi J.C., Jr.* Smoothed Particle Hydrodynamics Calculations of Stellar Interactions. — J. Comput. Appl. Math., 1999, v. 109, №1–2, p. 213.
292. *Miyama S.M., Hayashi C., Narita S.* Criteria for Collapse and Fragmentation of Rotating Isothermal Clouds. — *Astrophys. J.*, 1984, v. 279, p. 621.
293. *Evrard A.E.* Beyond N-Body: 3D Cosmological Gas Dynamics. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1988, v. 235, p. 911.
294. *Benz W.* Smooth Particle Hydrodynamics — a Review, in *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on The Numerical Modelling of Nonlinear Stellar Pulsations Problems and Prospects*, ed. J.R. Buchler, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 269, 1990.
295. *Steinmetz M. and Müller E.* On the Capabilities and Limits of Smoothed Particle Hydrodynamics. — *Astron. and Astrophys.*, 1993, v. 263, p. 391.
296. *Nelson R.P., Papaloizou J.C.B.* Three-Dimensional Hydrodynamic Simulations of Collapsing Prolate Clouds. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1993, v. 265, p. 905.
297. *Rasio F.A., Shapiro S.L.* Collisions of Giant Stars with Compact Object — Hydrodynamical Calculations. — *Astrophys. J.*, 1991, v. 377, p. 559.
298. *Понов Ю.П., Самарский А.А.* Полностью консервативные разностные схемы. — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1969, т. 9, №4, с. 953.
299. *Toro E.F.* *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction.* — Berlin: Springer, 1999.
300. *LeVeque R.J.* Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm. — *J. Comp. Phys.*, 1998, v. 146, p. 346.
301. *Toro E.F.* A weighted average flux method for hyperbolic conservation laws. — *Proc. Royal Soc. London Ser. A*, 1989, v. 423, №1865, p. 401.
302. *Roe P.L.* Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. — *J. Comp. Phys.*, 1981, v. 43, p. 357.
303. *Colella P., Glaz H.M.* Efficient Solution Algorithms for the Riemann Problem for Real Gases. — *J. Comp. Phys.*, 1985, v. 59, p. 264.
304. *Dai N., Woodward P.* Extension of the Piecewise Parabolic Method to Multidimensional Ideal Magnetohydrodynamics. — *J. Comp. Phys.*, 1994, v. 115, p. 485.
305. *Ryu D., Jones T.W.* Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics: Algorithm and tests for one-dimensional flow. — *Astrophys. J.*, 1995, v. 442, p. 228.
306. *Martí J.M., Müller E.* Analytical solution of the Riemann problem in relativistic hydrodynamics. — *J. Fluid Mech.*, 1994, v. 258, p. 317.
307. *Balsara D.* Total Variation Diminishing Scheme for Relativistic Magnetohydrodynamics. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2001, v. 132, p. 83.
308. *Koldoba A.V., Kuznetsov O.A., Ustyugova G.V.* An approximate Riemann solver for relativistic magnetohydrodynamics. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2002, v. 333, p. 932.
309. *Русанов В.В.* Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями. — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1961, т. 1, №2, с. 267.

310. *Toro E.F., Chakroborty A.* The development of a Riemann solver for the steady supersonic Euler equations. — *Aeronaut. J.*, 1994, v. 98, №979, p. 325–332.
311. *Toro E.F., Spruce M., Speares W.* Restoration of the contact surface in the HLL–Riemann solver. — *Shock Waves*, 1994, v. 4, p. 25–34.
312. *Osher S.* Numerical solution of singular perturbation problems and hyperbolic systems of conservation laws, in *North Holland Mathematical Studies*, 1981, v. 47, p. 179–205.
313. *Roe P.L.* The Use of the Riemann Problem in Finite-Difference Schemes. — *Lect. Notes Phys.*, 1980, v. 141, p. 354.
314. *Einfieldt B.* On Godunov Type Methods for Gas Dynamics. — *SIAM J. Numer. Anal.*, 1988, v. 25, p. 294.
315. *Colella P.* Glimm's Method for Gas Dynamics. — *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 1982, v. 3, p. 76.
316. *Harten A., Hyman J.M.* Self-Adjusting Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws. — *J. Comp. Phys.*, 1983, v. 50, p. 235.
317. *Yee H.C.* Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes. — *NASA Ames Technical Memorandum*, 89464, 1987.
318. *Надежин Д.К.* Асимптотические формулы для уравнения состояния электронно-позитронного газа, 1974, *Научн. Информ. Астросовета АН СССР*, т. 32, с. 3.
319. *Clarke D.A.* A Consistent Method of Characteristics for Multidimensional Magnetohydrodynamics. — *Astrophys. J.*, 1996, v. 457, p. 291.
320. *Stone J.M., Norman M.L.* ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I. The hydrodynamic algorithms and tests. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1992, v. 80, p. 753.
321. *Stone J.M., Norman M.L.* ZEUS-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. II. The Magnetohydrodynamic Algorithms and Tests. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1992, v. 80, p. 791.
322. *Stone J.M., Mihalas D., Norman M.L.* ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. III. The radiation hydrodynamic algorithms and tests. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1992, v. 80, p. 819.
323. *Turner N.J., Stone J.M.* A Module for Radiation Hydrodynamic Calculations with ZEUS-2D Using Flux-limited Diffusion. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2001, v. 135, p. 95.
324. *De Villiers J.-P., Hawley J.F.* A Numerical Method for General Relativistic Magnetohydrodynamics. — *Astrophys. J.*, 2003, v. 589, p. 458.
325. *Hayes J.C., Norman M.L.* Beyond Flux-limited Diffusion: Parallel Algorithms for Multidimensional Radiation Hydrodynamics. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2003, v. 147, p. 197.
326. *Kunz M.W., Mouschovias T.Ch.* The Nonisothermal Stage of Magnetic Star Formation. I. Formulation of the Problem and Method of Solution. — *Astrophys. J.*, 2009, v. 693, p. 1895.
327. *Balsara D.S.* The RIEMANN Framework and Higher Order Godunov Schemes for Parallel, Self-Adaptive Computational Astrophysics. — *Rev. Mex. Astro. Astrof.*, 2000, v. 9, p. 72.

328. *Powell K.G., Roe P.L., Linde T.J., Gombosi T.I., de Zeeuw D.L.* A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics. — *J. Comp. Phys.*, 1999, v. 154, p. 284.
329. *Tóth G.* A General Code for Modeling MHD Flows on Parallel Computers: Versatile Advection Code. — *Astrophys. Lett. Comm.*, 1996, v. 34, p. 245.
330. *Nool M., Keppens R.* AMRVAC: a multidimensional grid-adaptive magnetofluid dynamics code. — *Comp. Meth. Appl. Math.*, 2002, v. 2, p. 92.
331. *Ziegler U.* Self-gravitational adaptive mesh magnetohydrodynamics with the NIRVANA code. — *Astron. and Astrophys.*, 2005, v. 435, p. 385.
332. *Fromang S., Hennebelle P., Teyssier R.* A high order Godunov scheme with constrained transport and adaptive mesh refinement for astrophysical magnetohydrodynamics. — *Astron. and Astrophys.*, 2006, v. 457, p. 371.
333. *Mignone A., Bodo G., Massaglia S., Matsakos T., Tesileanu O., Zanni C., Ferrari A.* PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2007, v. 170, p. 228.
334. *Cunningham A.J., Frank A., Varniere P., Mitran S., Jones T.W.* Simulating Magnetohydrodynamical Flow with Constrained Transport and Adaptive Mesh Refinement: Algorithms and Tests of the AstroBEAR Code. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2009, v. 182, p. 519.
335. *Fryxell B., Olson K., Ricker P., Timmes F.X., Zingale M., Lamb D.Q., MacNeice P., Rosner R., Truran J.W., Tufo H.* FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermonuclear Flashes. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2000, v. 131, p. 273.
336. *Stone J.M., Gardiner T.A., Teuben P., Hawley J.F., Simon J.B.* Athena: A New Code for Astrophysical MHD. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2008, v. 178, p. 137.
337. *Дудоров А.Е., Жилкин А.Г., Кузнецов О.А.* Квазимонотонная разностная схема повышенного порядка точности для уравнений магнитной гидродинамики. — *Матем. моделир.*, 1999, т. 11, №1, с. 101.
338. *Brio M., Wu C.C.* An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. — *J. Comp. Phys.*, 1988, v. 75, p. 400.
339. *Miyoshi T., Kusano K.* A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. — *J. Comp. Phys.*, 2006, v. 208, p. 315.
340. *Batten P., Clarke N., Lambert C., Causon D.M.* On the choice of wave speeds for the HLLC Riemann solver. — *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 1997, v. 18, p. 1553.
341. *Gurski K.F.* An HLLC-type approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. — *SIAM J. Sci. Comput.*, 2004, v. 25, p. 2165.
342. *Cargo P., Gallice G.* Roe matrices for ideal MHD and systematic construction of Roe matrices for systems of conservation laws. — *J. Comp. Phys.*, 1997, v. 136, p. 446.
343. *Balsara D.S.* Linearized formulation of the Riemann problem for adiabatic and isothermal magnetohydrodynamics. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1998, v. 116, p. 119.
344. *Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Устюгова Г.В.* Квазимонотонные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для уравнений МГД. — *Препринт ИПМ РАН, №69, 1992.*

345. *Toth G.* The  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes. — *J. Comp. Phys.*, 2000, v. 161, p. 605.
346. *Evans C.R., Hawley J.F.* Simulation of magnetohydrodynamic flows: A constrained transport method. — *Astrophys. J.*, 1988, v. 332, p. 659.
347. *Dai W., Woodward P.R.* On the divergence-free condition and conservation laws in numerical simulations for supersonic magnetohydrodynamic flows. — *Astrophys. J.*, 1998, v. 494, p. 317.
348. *Dai W., Woodward P.R.* A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamic equations. — *J. Comp. Phys.*, 1998, v. 142, p. 331.
349. *Ryu D., Miniati F., Jones T.W., Frank A.* A divergence-free upwind code for multi-dimensional magnetohydrodynamic flows. — *Astrophys. J.*, 1998, v. 509, p. 244.
350. *Balsara D.S., Spicer D.S.* A staggered mesh algorithm using high order Godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations. — *J. Comp. Phys.*, 1999, v. 149, p. 270.
351. *Pen U.-L., Arras P., Wong S.* A Free, Fast, Simple, and Efficient Total Variation Diminishing Magnetohydrodynamic Code. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2003, v. 149, p. 447.
352. *Londrillo P., Del Zanna L.* On the divergence-free condition in Godunov-type schemes for ideal magnetohydrodynamics: the upwind constrained transport method. — *J. Comp. Phys.*, 2004, v. 195, p. 17.
353. *Ziegler U.* A central-constrained transport scheme for ideal magnetohydrodynamics. — *J. Comp. Phys.*, 2004, v. 196, p. 393.
354. *Gardiner T.A., Stone J.M.* An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport. — *J. Comp. Phys.*, 2005, v. 205, p. 509.
355. *Gardiner T.A., Stone J.M.* An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport in three dimensions. — *J. Comp. Phys.*, 2008, v. 227, p. 4123.
356. *Brackbill J.U., Barnes D.C.* The effect of nonzero  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations. — *J. Comp. Phys.*, 1980, v. 35, p. 426.
357. *Zachary A.L., Malagoli A., Colella P.* A higher-order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics. — *SIAM J. Sci. Comput.*, 1994, v. 15, p. 263.
358. *Ryu D., Jones T.M., Frank A.* Numerical magnetohydrodynamics in astrophysics: Algorithm and tests for multi-dimensional flow. — *Astrophys. J.*, 1995, v. 452, p. 785.
359. *Balsara D.S.* Total variation diminishing scheme for adiabatic and isothermal magnetohydrodynamics. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1998, v. 116, p. 133.
360. *Дудоров А.Е., Жилкин А.Г., Кузнецов О.А.* Двумерный численный код для осесимметричных самогравитирующих течений. — *Матем. моделир.*, 1999, т. 101, №11, с. 109.
361. *Crockett R.K., Colella P., Fisher R.T., Klein R.I., McKee C.F.* An unsplit, cell-centered Godunov method for ideal MHD. — *J. Comp. Phys.*, 2005, v. 203, p. 255.

362. Годунов С.К. Симметрическая форма уравнений магнитной гидродинамики. — Числ. методы мех. сплошн. среды, 1972, т. 3, №1, с. 26.
363. Dellar P.J. A Note on Magnetic Monopoles and the One-Dimensional MHD Riemann Problem. — J. Comp. Phys., 2001, v. 172, p. 392.
364. Dedner A., Kemm F., Kröner D., Munz C.-D., Schnitzer T., Wesenberg M. Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations. — J. Comp. Phys., 2002, v. 175, p. 645.
365. Борис Дж., Бук Д.Л. Решение уравнений непрерывности методом коррекции потоков. — В кн. Управляемый термоядерный синтез, ред. Дж. Киллина, М.: Мир, 1980, с. 92–141.
366. DeVore C.R. Flux-corrected transport techniques for multidimensional compressible magnetohydrodynamics. — J. Comp. Phys., 1992, v. 92, p. 142.
367. Dai N., Woodward P. An approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. — J. Comp. Phys., 1994, v. 111, p. 354.
368. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. — SIAM J. Numer. Anal., 1984, v. 21, p. 1.
369. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. — SIAM J. Numer. Anal., 1987, v. 24, p. 279.
370. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. — J. Comp. Phys., 1987, v. 71, p. 231.
371. Jiang G.S., Wu C.C. A high order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. — J. Comp. Phys., 1999, v. 150, p. 561.
372. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
373. Shu C.-W. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws. — Math. Comp., 1987, v. 49, p. 105.
374. Beam R.M., Warming R.F. An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation Law Form. — J. Comp. Phys., 1976, v. 22, p. 87.
375. Warming R.F., Beam R.M. Upwind second order difference schemes and application in aerodynamic flows. — AIAA J., 1976, v. 14, p. 1241.
376. Fromm J.E. A Method for Reducing Dispersion in Convective Difference Schemes. — J. Comp. Phys., v. 3, p. 176, 1968.
377. Roe P.L. Some Contribution to the Modelling of Discontinuous Flows. — Lectures in Applied Math., 1983, v. 22, p. 163.
378. Emery A.E. An Evaluation of Several Differencing Methods for Inviscid Fluid Flow Problems. — J. Comp. Phys., 1968, v. 2, p. 306.
379. Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method. — J. Comp. Phys., 1979, v. 32, p. 101.
380. Woodward P., Colella P. The Numerical Simulations of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks. — J. Comp. Phys., 1984, v. 54, p. 115.
381. Shu C.-W. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. — ICASE Report №97-65, NASA/CR-97-206253, 1997.



382. *Fryxell B., Müller E., Arnett D.* Hydrodynamics and Nuclear Burning. — МРА preprint №449, Max Planck Institut für Astrophysik, Garching, 1989.
383. *Romero J.V., Ibáñez J.M., Martí J.M., Miralles J.A.* A New Spherically Symmetric General Relativistic Hydrodynamical Code. — *Astrophys. J.*, 1996, v. 462, p. 839.
384. *Martí J.M., Müller E.* Extension of the Piecewise Parabolic Method to One-Dimensional Relativistic Hydrodynamics. — *J. Comp. Phys.*, 1996, v. 123, p. 1.
385. *Устюгов С.Д., Попов М.В.* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. I. Уравнение переноса и уравнение Бюргерса. — Препринт ИПМ РАН, №65, 2006.
386. *Устюгов С.Д., Попов М.В.* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. II. Уравнения газодинамики. — Препринт ИПМ РАН, №71, 2006.
387. *Устюгов С.Д., Попов М.В.* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. III. Одномерная идеальная МГД. — Препринт ИПМ РАН, №78, 2006.
388. *Устюгов С.Д., Попов М.В.* Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. IV. Многомерная идеальная МГД. — Препринт ИПМ РАН, №11, 2007.
389. *Ustyugov S.D., Popov M.V., Kritsuk A.G., Norman M.L.* Piecewise parabolic method on a local stencil for magnetized supersonic turbulence simulation. — *J. Comp. Phys.*, v. 228, p. 7614.
390. *Kritsuk A.G., Nordlund A., Collins D., et al* Comparing numerical methods for isothermal magnetized supersonic turbulence. — *Astrophys. J.*, v. 737, 13.
391. *Prendergast K.H.* The Motion of Gas Stream in Close Binary System. — *Astrophys. J.*, 1960, v. 132, p. 162.
392. *Горбатский В.Г.* Дискподобные оболочки в тесных двойных системах и их влияние на звездные спектры. — *Астрон. журн.*, 1964, т. 41, с. 849.
393. *Горбатский В.Г.* Космическая газодинамика. — М.: Наука, 1977.
394. *Warner B., Peters W.L.* The Location and Size of the Hot Spot in Cataclysmic Variable Star. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1972, v. 160, p. 15.
395. *Sawada K., Matsuda T., Inoue M., Hachisu I.* Is the Standard Accretion Disc Model Invulnerable? — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1987, v. 224, p. 307.
396. *Taam R.E., Fu A., Fryxell B.A.* Accretion in WindDriven XRay Sources. — *Astrophys. J.*, 1991, v. 371, p. 696.
397. *Blondin J.M., Richards M.T., Malinowski M.L.* Hydrodynamic Simulations of the Mass Transfer in Algol. — *Astrophys. J.*, 1995, v. 445, p. 939.
398. *Murray J.R.* SPH Simulations of Tidally Unstable Accretion Discs in Cataclysmic Variables. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1996, v. 279, p. 402.
399. *Nagasawa M., Matsuda T., Kuwahara K.* Smoothed Particle Rendering of Fluid Visualization. ThreeDimensional Accretion Disk and Jet Formation. — *Numer. Astrophys. in Japan*, 1991, v. 2, p. 27.

400. *Hirose M., Osaki Y., Mineshige S.* ThreeDimensional Structure of Accretion Disks in Close Binary Systems. — Publ. Astron. Soc. Japan, 1991, v. 43, p. 809.
401. *Molteni D., Belvedere G., Lanzafame G.* ThreeDimensional Simulation of Polytropic Accretion Discs. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1991, v. 249, p. 748.
402. *Sawada K., Matsuda T.* ThreeDimensional Hydrodynamic Simulation of an Accretion Flow in a Close Binary System. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1992, v. 255, p. 17.
403. *Yukawa H., Boffin H.M.J., Matsuda T.* Spiral Shocks in ThreeDimensional Accretion Discs. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1997, v. 292, p. 321.
404. *Makita M., Miyawaki K., Matsuda T.* Two- and three-dimensional numerical simulations of accretion discs in a close binary system. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 2000, v. 316, p. 906.
405. *Armitage P.J., Livio M.* Accretion Disks in Interacting Binaries: Simulation of the Stream–Disk Impact. — Astrophys. J., 1996, v. 470, p. 1024.
406. *Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Чететкин В.М.* Трехмерное моделирование структуры течения вещества в полуразделенных двойных системах. — Астрон. журн., 1997, т. 74, с. 880.
407. *Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Чететкин В.М.* Влияние общей оболочки двойной системы на перенос вещества через внутреннюю точку Лагранжа. — Астрон. журн., 1997, т. 74, с. 889.
408. *Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Kuznetsov O.A., Chechetkin V.M.* Mass Transfer in Binary Stars. — Journal of Journals, 1997, №1, p. 12.
409. *Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Хрузина Т.С., Черепашук А.М., Чететкин В.М.* Свидетельства отсутствия ударного взаимодействия струи и диска («горячего пятна») в полуразделенных двойных системах. Сравнение результатов математического моделирования и наблюдательных данных. — Астрон. журн., 1998, т. 75, с. 40.
410. *Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Чететкин В.М.* The Влияние параметров задачи на структуру течения вещества в полуразделенных двойных системах. Результаты трехмерного численного моделирования. — Астрон. журн., 1998, т. 75, с. 706.
411. *Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Chechetkin V.M., Kuznetsov O.A., Molteni D.* 3D Numerical Simulation of Gaseous Flows Structure in Semidetached Binaries. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1998, v. 300, p. 39.
412. *Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Чететкин В.М.* Трехмерное моделирование обмена веществом в тесных двойных системах с несинхронным вращением компонентов. — Астрон. журн., 1999, т. 76, с. 270.
413. *Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Чететкин В.М.* Driven-Disk Модель ведомого диска в двойных системах с прецессирующей звездой-донором. Результаты трехмерного численных расчетов. — Астрон. журн., 1999, т. 76, с. 672.
414. *Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Чететкин В.М., Кузнецов О.А., Молтени Д.* Сравнение результатов двумерного и трехмерного моделирования массообмена в полуразделенных двойных системах. — Астрон. журн., 1999, т. 76, с. 905.

415. Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Чететкин В.М. Влияние вязкости на морфологию течения вещества в полуразделенных двойных системах. Результаты трехмерного численного моделирования. — *Астрон. журн.*, 2000, т. 77, с. 31.
416. Bisikalo D.V., Harmanec P., Boyarchuk A.A., Kuznetsov O.A., Hadrava P. Circumstellar Structures in the Eclipsing Binary  $\beta$  Lyr A. Gasdynamical modelling confronted with observations. — *Astron. and Astrophys.*, 2000, v. 353, p. 1009.
417. Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кильпнио А.А., Кузнецов О.А., Чететкин В.М. Структура течения вещества в полуразделенных двойных системах после прекращения массообмена. — *Астрон. журн.*, 2001, т. 78, с. 707.
418. Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кильпнио А.А., Кузнецов О.А. О возможном наблюдательном проявлении спиральных ударных волн в аккреционных дисках катаклизмических переменных. — *Астрон. журн.*, 2001, т. 78, с. 780.
419. Molteni D., Kuznetsov O.A., Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A. On the angular momentum transfer on to compact stars in binary systems. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2001, v. 327, p. 1103.
420. Molteni D., Acharya K., Kuznetsov O.A., Bisikalo D.V., Chakrabarti S.K. Bending Instability of an Accretion Disk around a Black Hole. — *Astrophys. J.*, 2001, v. 563, p. L57.
421. Кузнецов О.А., Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Хрузина Т. С., Черепашук А.М. Синтетические доплеровские томограммы течения газа в двойной системе IP Peg. — *Астрон. журн.*, 2001, т. 78, с. 997.
422. Harmanec P., Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Kuznetsov O.A. On the role of duplicity in the Be phenomenon. I. General considerations and the first attempt at a 3-D gas-dynamical modelling of gas outflow from hot and rapidly rotating OB stars in binaries. — *Astron. and Astrophys.*, 2002, v. 396, p. 937.
423. Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кайгородов П.В., Кузнецов О.А., Матсуда Т. Структура холодного аккреционного диска в полуразделенных двойных системах. — *Астрон. журн.*, 2004, т. 81, с. 494.
424. Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кайгородов П.В., Кузнецов О.А., Матсуда Т. Модель супервспышки в звездах типа SU UMa. — *Астрон. журн.*, 2004, т. 81, с. 648.
425. Bisikalo D.V. Numerical Modeling of Mass Transfer in Close Binaries. — *Astrophys. and Space Sci.*, 2005, v. 296, p. 391.
426. Бисикало Д.В., Кайгородов П.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А. О возможной природе провалов на кривых блеска полуразделенных двойных систем со стационарными дисками. — *Астрон. журн.*, 2005, т. 82, с. 788.
427. Bisikalo D.V., Kaygorodov P.V., Boyarchuk A.A., Kuznetsov O.A. On Possible Nature of Pre-eclipse Dips in Light Curves of Semi-detached Systems with Steady-state Disks. — *Astrophys. and Space Sci.*, 2006, v. 304, p. 275.
428. Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Kaigorodov P.V., Kuznetsov O.A., Matsuda T. The Formation of Precessional Spiral Density Wave in Accretion Disks and a New Model for Superoutbursts in SU UMa-type Binaries. — *Chin. J. Astron. Astrophys.*, 2006, v. 6, p. 159.

429. *Кайгородов П.В., Бисикало Д.В., Кузнецов О.А., Боярчук А.А.* Сверхгорбы в двойных системах и их связь с прецессионной волной плотности. — *Астрон. журн.*, 2006, т. 83, с. 601.
430. *Bisikalo D.V.* Numerical modelling of cold accretion discs in cataclysmic variables: the superhump phenomenon. — *Astron. and Astrophys. Trans.*, 2007, v. 26, p. 47.
431. *Bisikalo D.V., Matsuda T.* Testing and Improving the Dynamical Theory of Mass Exchange Binary Stars as Critical Tools and Tests in Contemporary Astrophysics. — *Proceedings of IAU Symposium №240*, eds. W.I. Hartkopf, E.F. Guinan, P. Harmanec, Cambridge: Cambridge Univ. Press, p. 356, 2007.
432. *Сытов А.Ю., Кайгородов П.В., Бисикало Д.В., Кузнецов О.А., Боярчук А.А.* Механизм образования общей оболочки в тесных двойных системах. — *Астрон. журн.*, 2007, т. 84, с. 926.
433. *Бисикало Д.В., Кононов Д.А., Кайгородов П.В., Жилкин А.Г., Боярчук А.А.* Структура течения вещества в системе SS Cyg в спокойном состоянии по результатам сравнения наблюдаемых и синтетических доплеровских томограмм. — *Астрон. журн.*, 2008, т. 85, с. 356.
434. *Сытов А.Ю., Бисикало Д.В., Кайгородов П.В., Боярчук А.А.* Структура общей оболочки тесной двойной системы. — *Астрон. журн.*, 2009, т. 86, с. 250.
435. *Сытов А.Ю., Бисикало Д.В., Кайгородов П.В., Боярчук А.А.* Наблюдательные проявления общей оболочки тесной двойной системы. — *Астрон. журн.*, 2009, т. 86, с. 468.
436. *Hack M., La Dous C.* Cataclysmic Variables and Related Objects. — Washington: US Gov. Printing Office, 1993.
437. *Горбацкий В.Г.* The Effects of Gaseous Jets in Close Binary Systems. — *Астрофизика*, 1967, т. 3, с. 245.
438. *Smak J.* Eruptive Binaries. I. Hot Spots and Distortions of the Radial Velocity Curves. — *Acta Astron.*, 1970, v. 20, p. 312.
439. *Хрузина Т.С., Черепашук А.М., Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А.* Интерпретация кривых блеска IP Peg в модели безударного взаимодействия газовой струи и диска. — *Астрон. журн.*, 2001, т. 78, с. 625.
440. *Хрузина Т.С., Черепашук А.М., Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А.* Интерпретация кривых блеска «спокойных» рентгеновских новых в модели безударного взаимодействия струи и диска. Система GU Mus = GRS 1124-68. — *Астрон. журн.*, 2003, т. 80, с. 621.
441. *Хрузина Т.С., Черепашук А.М., Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А.* Интерпретация орбитальных кривых блеска U Geminorum. — *Астрон. журн.*, 2003, т. 80, с. 919.
442. *Хрузина Т.С., Черепашук А.М., Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А.* Интерпретация кривой блеска «спокойной» рентгеновской новой в модели безударного взаимодействия струи и диска. Система XTE J118+480. — *Астрон. журн.*, 2005, т. 82, с. 99.
443. *Mason K.O., Drew J.E., Knigge C.* Pre-eclipse dips in the ultraviolet light curves of two eclipsing nova-like cataclysmic variables. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1997, v. 290, p. L23.

444. *Froning C.S., Long K.S., Knigge C.* Accretion and Outflow in Interacting Binary Systems: Far Ultraviolet Spectroscopic Explorer Observations of the Nova-like Cataclysmic Variable UX Ursae Majoris. — *Astrophys. J.*, 2003, v. 584, p. 433.
445. *Morales-Rueda L., Marsh T.R., Billington I.* Spiral Structure in IP Pegasi: How Persistent it? — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2000, v. 313, p. 454.
446. *Marsh T.R., Horne K.* Images of Accretion Discs. II. Doppler Tomography. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1988, v. 235, p. 269.
447. *Marsh T.R.* Doppler Tomography. — *Astrotomography, Indirect Imaging Methods in Observational Astronomy*, eds. H. Boffin, D. Steeghs, J. Cuypers, *Lecture Notes in Physics*, 2001, v. 573, p. 1.
448. *Steeghs D.* Spiral Waves in Accretion Discs — *Astrotomography, Indirect Imaging Methods in Observational Astronomy*, eds. H. Boffin, D. Steeghs, J. Cuypers, *Lecture Notes in Physics*, 2001, v. 573, p. 45.
449. *Storey P.J., Hummer D.G.* Recombination line intensities for hydrogenic ions-IV. Total recombination coefficients and machine-readable tables for  $Z=1$  to 8. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1995, v. 272, p. 41.
450. *Narayan R., Nityananda R.* Maximum entropy image restoration in astronomy. — *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, 1986, v. 24, p. 127.
451. *Kaitchuck R.H., Schlegel E.M., Honeycutt R.K., Horne K., Marsh T.R., White J.C.II, Mansperger C.S.* An atlas of Doppler emission-line tomography of cataclysmic variable stars. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 1994, v. 93, p. 519.
452. *Martinez-Pais I.G., Giovannelli F., Rossi C., Gaudenzi S.* An optical time-resolved spectroscopic study of SS Cygni. I: Quiescence. — *Astron. and Astrophys.*, 1994, v. 291, p. 455.
453. *Fridman A.M., Boyarchuk A.A., Bisikalo D.V., Kuznetsov O.A., Khoruzhii O.V., Torgashin Yu.M., Kilpio A.A.* The collective mode and turbulent viscosity in accretion discs. — *Physics Letters A*, 2003, v. 317, p. 181.
454. *Fridman A.M., Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Pustil'nik L.A., Torgashin Yu.M.* Fully developed turbulence in accretion discs of binary stars: turbulent viscosity coefficient and power spectrum. — in «Chaos in Astronomy», *Astrophys. Space Sci. Proc.*, Ed. by G. Contopoulos and P.A. Patsis, Berlin: Springer, 2009, p. 403.
455. *Fridman A.M., Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Torgashin Yu.M., Pustil'nik L.A.* Super-Reflection Instability and the Development of Turbulence in Accretion Disks in Close Binary Stars. — *Astron. Rep.*, 2009, v. 53, №8, p. 750.
456. *Lyubarskij Yu.E., Postnov K.A., Prokhorov M.E.* Eccentric Accretion Discs. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1994, v. 266, p. 583.
457. *Ogilvie G.I.* Non-linear fluid dynamics of eccentric discs. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2001, v. 325, p. 231.
458. *Фридман А.М.* Предсказание и открытие новых структур в спиральных галактиках. — *Усп. физ. наук*, 2007, т. 50, с. 121.
459. *Paczynski B.* A model of accretion disks in close binaries. — *Astrophys. J.*, 1977, v. 216, p. 822.
460. *Кадо́мцев Б.Б.* *Вопросы теории плазмы.* Сб. статей. Вып. 4. Под ред. М. Л. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1964.

461. Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О. А., Попов Ю.П., Четветкин В.М. Влияние граничных параметров звездного ветра на структуру течения вещества в двойных системах с компонентами, не заполняющими полость Роша. — *Астрон. журн.*, 1994, т. 71, с. 560.
462. Artymowicz P., Lubow S.H. Dynamics of binary-disk interaction. I: Resonances and disk gap sizes. — *Astrophys. J.*, 1994, v. 421, p. 651.
463. Rappaport S., Joss P.C., Webbink R.F. The Evolution of Highly Compact Binary Stellar Systems. — *Astrophys. J.*, 1982, v. 254, p. 616.
464. Rappaport S., Verbunt F., Joss P.C. A New Technique for Calculations of Binary Stellar Evolution, with Application to Magnetic Braking. — *Astrophys. J.*, 1983, v. 275, p. 713.
465. Iben I., Jr., Tutukov A.V. The Evolution of LowMass Close Binaries Influenced by the Radiation of Gravitational Waves and by a Magnetic Stellar Wind. — *Astrophys. J.*, 1984, v. 284, p. 719.
466. Kolb U. A Model for the Intrinsic Population of Cataclysmic Variables. — *Astron. and Astrophys.*, 1993, v. 271, p. 149.
467. Ritter H. Principles of SemiDetached Binary Evolution. — in «Evolution Processes in Binary Stars», eds. R.A.M.J. Wijers, M.B. Davies, C.A. Tout, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 223, 1996.
468. Kraft R.P., Mathews J., Greenstein J.L. Binary Stars among Cataclysmic Variables. II. Nova WZ Sagittae: a Possible Radiator of Gravitational Waves. — *Astrophys. J.*, 1962, v. 136, p. 312.
469. Schatzman E. A Theory of the Role of Magnetic Activity during Star Formation. — *Ann. d'Astrophys*, 1962, v. 25, p. 18.
470. Verbunt F., Zwaan C. Magnetic Braking in LowMass XRay Binaries. — *Astron. and Astrophys.*, 1981, v. 100, p. L7.
471. Юнгельсон Л.П. Эволюция тесных двойных с потерей массы из системы. III. Системы с белыми карликами. — *Научн. Информ. Астросовета АН СССР*, 1973, т. 26, с. 71.
472. Kieboom K.H., Verbunt F. Some Aspects of LowMass Close Binary Models for Bright Galactic Bulge XRay Sources and 4U162667. — *Astron. and Astrophys.*, 1981, v. 95, p. L11.
473. King A., Kolb U. Consequential Angular Momentum Loss and the Period Gap of Cataclysmic Variables. — *Astrophys. J.*, 1995, v. 439, p. 330.
474. Fedorova A.V., Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Kuznetsov O.A., Tutukov A.V., Yungelson L.R. NonConservative Evolution of Cataclysmic Binaries. — in «Modern Problems of Stellar Evolution», ed. D.S. Wiebe, Moscow: Geos, p. 134, 1998.
475. Федорова А.В., Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Кузнецов О.А., Тутуков А.В., Юнгельсон Л.П. Неконсервативная эволюция катаклизмических двойных звезд. — *Астрон. журн.*, 2000, т. 77, с. 357.
476. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. — М.: Физматлит, 2006.
477. Mestel L. Magnetic Braking by a Stellar Wind. I. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1968, v. 138, p. 359.
478. Hachisu I., Kato M., Nomoto K. A New Model for Progenitor of Type Ia Supernovae. — *Astrophys. J.*, 1996, v. 470, p. L97.

479. *Yungelson L., Livio M.* Type IA Supernovae: an Examination of Potential Progenitors and the Redshift Distribution. — *Astrophys. J.*, 1998, v. 497, p. 168.
480. *Kato M., Hachisu I.* Optically Thick Winds in Nova Outbursts. — *Astrophys. J.*, 1994, v. 437, p. 802.
481. *Livio M., Govarie A., Ritter H.* Changes in Binary System Parameters Resulting from Nova Explosions. — *Astron. and Astrophys.*, 1991, v. 246, p. 84.
482. *Yungelson L.R., Livio M., Truran J., Tutukov A.V., Fedorova A.V.* A Model for the Galactic Population of Binary Supersoft XRay Sources. — *Astrophys. J.*, 1996, v. 466, p. 890.
483. *Schenker K., Kolb U., Ritter H.* Properties of Discontinuities and Nova-Amplified Mass Transfer in Cataclysmic Variables. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1998, v. 297, p. 633.
484. *Sawada K., Hachisu I., Matsuda T.* Mass and Angular Momentum Loss from Contact Binary Systems. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1984, v. 206, p. 673.
485. *Zahn J.P.* Tidal Evolution of Close Binary Stars. I. Revisiting the Theory of Equilibrium Tide. — *Astron. and Astrophys.*, 1989, v. 220, p. 112.
486. *Hut P.* Tidal Evolution in Close Binary Systems. — *Astron. and Astrophys.*, 1981, v. 99, p. 126.
487. *Tassoul J.L.* On Synchronization in EarlyType Binaries. — *Astrophys. J.*, 1987, v. 322, p. 856.
488. *Tassoul J.L.* On Orbital Circularization in Detached Close Binaries. — *Astrophys. J.*, 1988, v. 324, p. L71.
489. *Zahn J.P., Bouchet L.* Tidal Evolution of Close Binary Stars. II. Orbital Evolution of LateType Binaries. — *Astron. and Astrophys.*, 1989, v. 223, p. 112.
490. *Kruszewski A.* Exchange of Matter in Close Binary Systems. II. Particle Trajectories. — *Acta Astron.*, 1964, v. 14, p. 231.
491. *Kruszewski A.* Close Binary Systems. — *Adv. Astron. Astrophys.*, 1966, v. 4, p. 233.
492. *Katsova M.M.* Surface Inhomogeneties in Capella. — *Lect. Notes Phys.*, 1992, v. 397, p. 220.
493. *Belvedere G., Lanzafame G., Molteni D.* The Role of the Secondary's Rotation in Disc Formation and Structure: an SPH ThreeDimensional Analysis. — *Astron. and Astrophys.*, 1993, v. 280, p. 525.
494. *Lanzafame G., Belvedere G., Molteni D.* The 35-d Modulation of Xray Emission of Her X1 in the Framework of SOD Model: Results of a Three-Dimensional SPH Simulation. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1994, v. 267, p. 312.
495. *White N.E., Holt S.S.* Accretion Disk Coronae. — *Astrophys. J.*, 1982, v. 257, p. 318.
496. *Hellier C., Mason K.O., Smale A.P., Kilkenney D.* The Ephemeris of X1822–371. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1990, v. 244, p. 39P.
497. *Roberts W.J.* A Slaved Disk Model for Hercules X1. — *Astrophys. J.*, 1974, v. 187, p. 575.
498. *Narita, Kiguchi, Hayashi* 1994.

499. *Bisikalo et al.*, 2006.
500. *Кайгородов П.В., Бисикало Д.В.* О возможном механизме рентгеновского излучения Be/X звезд. — *Астрон. журн.*, 2013, т. 90.
501. *Raguzova N.V., Popov S.B.* Be/X-ray binaries and candidates: catalogue. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2005.
502. *Hughes J.P., Smith R.C.* Discovery of Be/x-ray stars in two supernova remnants in the Small Magellanic Cloud. — *Astron. J.*, 1994, v. 107, p. 1363.
503. *Cowley A.P., Schmidtke P.C., McGrath T.K., et al.* Magellanic Cloud X-ray sources observed with ROSAT. — *Publs Astron. Soc. Pacif.*, 1997, v. 109, p. 21.
504. *Schmidtke P.C., Cowley A.P., Crane J.D., et al.* Magellanic Cloud X-Ray Sources. III. Completion of a ROSAT Survey. — *Astron. J.*, 1999, v. 117, p. 927.
505. *Imanishi K., Yokogawa J., Tsujimoto M., Koyama K., et al.* ASCA Discovery of a Be X-Ray Pulsar in the SMC: AX J0051-733. — *Publ. Astron. Soc. of Japan*, 1999, v. 51, p. L15.
506. *Harmanec P.* Stellar masses and radii based on modern binary data. — *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, 1988, v. 39, p. 329.
507. *Liu Q.-Z., Hang H.-R.* New Emission Phase of the Be/X-Ray Binary X Persei/4U0352+30: Nearly Simultaneous Spectroscopic and Near-Infrared Observations. — *Astrophys. and Space Sci.*, 2001, v. 275, p. 401.
508. *Жилкин А.Г.* Трехмерное численное моделирование МГД течений в полуразделенных двойных системах. — *Матем. моделир.*, 2010, т. 22, №1, с. 110.
509. *Брагинский С.И.*, Теория гидромагнитного динамо. — *Журн. эксперим. и теор. физ.*, 1964, т. 47, с. 2178.
510. *Паркер Е.* Космические магнитные поля. — М.: Мир 1982.
511. *Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Шукуров А.М.* Магнитные поля галактик. — М.: Наука, 1988.
512. *Drell S.D., Foley H.M., Ruderman M.A.* Drag and Propulsion of Large Satellites in the Ionosphere: An Alfvén Propulsion Engine in Space. — *J. Geophys. Res.*, 1965, v. 70, p. 3131.
513. *Bondi H.* On spherically symmetrical accretion. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 195, v. 112, p. 1952.
514. *Жилкин А.Г.* Об одном способе динамической адаптации расчетных сеток к задачам магнитной гидродинамики. — *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007, т. 47, с. 1898.
515. *Tanaka T.* Finite volume TVD scheme on an unstructured grid system for three-dimensional MHD simulations of inhomogeneous systems including strong background potential field. — *J. Comp. Phys.*, 1994, v. 111, p. 381.
516. *Жилкин А.Г., Бисикало Д.В.* Численное моделирование МГД течений в промежуточных полярах. — *Материалы докладов Международной научной конференции «X Забобахинские научные чтения»*, Снежинск, 2010, [[www.vniitf.ru/images/zst/2010/sec6/6-7.pdf](http://www.vniitf.ru/images/zst/2010/sec6/6-7.pdf)].
517. *Giovannelli F., Gaudenzi S., Rossi C., Piccioni A.* Orbital parameters of SS Cygni. — *Acta Astronomica*, 1983, v. 33, p. 319.
518. *Fabbiano G., Hartmann L., Raymond J., Steiner J., Branduardi-Raymont G., Matilsky T.* Coordinated X-ray, ultraviolet and optical observations of



- AM Herculis, U Geminorum and SS Cygni. — *Astrophys. J.*, 1981, v. 243, p. 911.
519. *Kjurkchieva D., Marchev D., Ogloza W.* High-speed BVRI photometry of SS Cyg at quiescence and at outburst. — *Astrophys. and Space Sci.*, 1999, v. 262, p. 53.
520. *Sion E.M.* White Dwarfs in Cataclysmic Variables. — *Publs. Astron. Soc. Pacif.*, 1999, v. 111, p. 532.
521. *Ghosh P., Lamb F.K.* Disk accretion by magnetic neutron stars. — *Astrophys. J.*, 1978, v. 223, p. L83.
522. *Taylor R.J.* The adiabatic stability of stars containing magnetic fields. I. Toroidal fields. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1973, v. 161, p. 365.
523. *Ardeljan N.V., Bisnovatyi-Kogan G.S., Moiseenko S.G.* Magnetorotational supernovae. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, v. 359, p. 333, 2005.
524. *Giovanelli F., Sabau-Graziati L.* SS Cygni: A frontier system between intermediate polars and non-magnetic cataclysmic variables. — *Mem. S. A. It.*, 1999, v. 70, p. 987.
525. *Romanova M.M., Ustyugova G.V., Koldoba A.V., Lovelace R.V.E.* Propeller-driven Outflows and Disk Oscillations. — *Astrophys. J.*, 2005, v. 635, p. L165.
526. *Ustyugova G.V., Koldoba A.V., Romanova M.M., Lovelace R.V.E.* «Propeller» Regime of Disk Accretion to Rapidly Rotating Stars. — *Astrophys. J.*, 2006, v. 646, p. 304.
527. *Кононов Д.А., Кайгородов П.В., Бисикало Д.В., Боярчук А.А., Агафонов М.И., Шарова О.И., Сытов А.Ю., Бонева Д.* Спектральные наблюдения и доплеровское картирование системы SS Cyg во время вспышки. — *Астрон. журн.*, 2008, т. 85, с. 927.
528. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Ruzmaikin A.A.* The Accretion of Matter by a Collapsing Star in the Presence of a Magnetic Field. — *Astrophys. and Space Sci.*, 1974, v. 28, p. 45.
529. *Bisnovatyi-Kogan G.S., Lovelace R.V.E.* Large-Scale B-Field in Stationary Accretion Disks. — *Astrophys. J.*, 2007, v. 667, p. L167.
530. *Rothstein D.M., Lovelace R.V.E.* Advection of Magnetic Fields in Accretion Disks: Not So Difficult After All. — *Astrophys. J.*, 2008, v. 677, p. 1221.
531. *Moffatt H.K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids. — *Cambridge: Cambridge Univ. Press*, 1978.
532. *Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А.* Турбулентное динамо в астрофизике. — *М.: Наука*, 1980.
533. *Parker E.N.* The Generation of Magnetic Fields in Astrophysical Bodies. II. The Galactic Field. — *Astrophys. J.*, 1971, v. 163, p. 255.
534. *Pudritz R.E.* Dynamo Action in Turbulent Accretion Discs around Black Holes. Part Two: the Mean Magnetic Field. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1981, v. 195, p. 897.
535. *Stepinski T.F., Levy E.H.* Generation of dynamo magnetic fields in thin Keplerian disks. — *Astrophys. J.*, 1990, v. 362, p. 318.
536. *Rudiger G., Elstner D., Stepinski T.F.* The standard-accretion disk dynamo. — *Astron. and Astrophys.*, 1995, v. 298, p. 934.

537. *Campbell C.G.* Disc-wind field matching in accretion discs with magnetically influenced winds. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2005, v. 361, p. 396.
538. *Brandenburg A., Nordlund A., Stein R.F., Torkelsson Ulf.* Dynamo-generated Turbulence and Large-Scale Magnetic Fields in a Keplerian Shear Flow. — *Astrophys. J.*, 1995, v. 446, p. 741.
539. *Ziegler U., Rudiger G.* Angular momentum transport and dynamo-effect in stratified, weakly magnetic disks. — *Astron. and Astrophys.*, 2000, v. 356, p. 1141.
540. *Brandenburg A., Sokoloff D.* Local and Nonlocal Magnetic Diffusion and Alpha-Effect Tensors in Shear Flow Turbulence. — *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2002, v. 96, p. 319.
541. *von Rekowski B., Brandenburg A., Dobler W., Shukurov A.* Structured outflow from a dynamo active accretion disc. — *Astron. and Astrophys.*, 2003, v. 398, p. 825.
542. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
543. *Schmidt G.D., West S.C., Liebert J., Green R.F., Stockman H.S.* The new magnetic white dwarf PG 1031+234: Polarization and field structure at more than 500 million Gauss. — *Astrophys. J.*, 1986, v. 309, p. 218.
544. *Wu K., Wickramasinghe D. T.* Accretion onto AM Herculis Binaries with a Multipole Magnetic Field. — *ASP Conf. Ser.*, 1992, v. 29, p. 203.
545. *Schwope A.D., Thomas H.-C., Beuermann K., Burwitz V., Jordan S., Haefner R.* Two-pole accretion in the high-field polar RXJ 1938.6-4612. — *Astron. and Astrophys.*, 1995, v. 293, p. 764.
546. *Mason P.A., Andronov I.L., Kolesnikov S.V., Pavlenko E.P., Shakhovskoy M.* Asynchronism and Multipole Accretion in BY Cam. — *ASP Conf. Ser.*, 1995, v. 85, p. 496.
547. *Silber A., Szkody P., Hoard D.W., et al.* The Noah Project: detection of the spin-orbit beat period of BY Camelopardalis. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1997, v. 290, p. 25.
548. *Mason P.A., Ramsay G., Andronov I.L., Kolesnikov S.V., Shakhovskoy N., Pavlenko E.P.* Evidence for pole switching in the magnetic cataclysmic variable BY Camelopardalis. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1998, v. 295, p. 511.
549. *Euchner F., Jordan S., Beuermann K., Gänsicke B.T., Hessman F.V.* Zeeman tomography of magnetic white dwarfs. I. Reconstruction of the field geometry from synthetic spectra. — *Astron. and Astrophys.*, 2002, v. 390, p. 633.
550. *Euchner F., Reinsch K., Jordan S., Beuermann K., Gänsicke B.T.* Zeeman tomography of magnetic white dwarfs. II. The quadrupole-dominated magnetic field of HE 1045-0908. — *Astron. and Astrophys.*, 2005, v. 442, p. 651.
551. *Euchner F., Jordan S., Beuermann K., Reinsch K., Gänsicke B.T.* Zeeman tomography of magnetic white dwarfs. III. The 70-80 Megagauss magnetic field of PG 1015+014. — *Astron. and Astrophys.*, 2006, v. 451, p. 671.
552. *Beuermann K., Euchner F., Reinsch K., Jordan S., Gänsicke B.T.* Zeeman tomography of magnetic white dwarfs. IV. The complex field structure of the

- polars EF Eridani, BL Hydri and CP Tucanae. — *Astron. and Astrophys.*, 2007, v. 463, p. 647.
553. *Patterson J.* The DQ Herculis stars. — *Publs Astron. Soc. Pacif.*, 1994, v. 106, p. 209.
554. *Schwarz R., Schwöpe A.D., Staude A., Remillard R.A.* Doppler tomography of the asynchronous polar BY Camelopardalis. — *Astron. and Astrophys.*, 2005, v. 444, p. 213.
555. *Pavlenko E.P., Andreev M., Babina Ju.V.* Observational Evidence for a Complex Magnetic Field Structure of the Asynchronous Polar BY Cam. — *ASP Conf. Ser.*, 2007, v. 372, p. 537.
556. *Pavlenko E.P., Andreev M., Babina Ju.V., Tkachenko S.* The Asynchronous Polar BY Cam: the Quadrupole Structure of the Magnetic Field and Accretion Modes. — *ASP Conf. Ser.*, 2007, v. 362, p. 183.
557. *Andronov I.L., et al.* Idling magnetic white dwarf in the synchronizing polar BY Cam. The Noah-2 project. — *Central European J. of Phys.*, 2008, v. 6, p. 385.
558. *Long M., Romanova M.M., Lovelace R.V.E.* Accretion to stars with non-dipole magnetic fields. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2007, v. 374, p. 436.
559. *Long M., Romanova M.M., Lovelace R.V.E.* Three-dimensional simulations of accretion to stars with complex magnetic fields. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2008, v. 386, p. 1274.
560. *Romanova M.M., Long M., Lamb F.K., Kulkarni A.K., Donati J.-F.* Global 3D simulations of disc accretion on to the classical T Tauri star V2129 Oph. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2011, v. 411, p. 915.
561. *Жилкин А.Г., Бисикало Д.В., Масон П.А.* Трёхмерное МГД-моделирование структуры аккреционного течения в магнитных катаклизмических переменных с сильным и сложным магнитным полем. — *Астрон. журн.*, 2012, т. 89, с. 291.
562. *Бисноватый-Коган Г.С., Моисеенко С.Г.* Violation of the mirror symmetry of the magnetic field in rotating stars and possible astrophysical manifestations. — *Астрон. журн.*, 1992, т. 69, с. 563.
563. *Osheroich V.A., Fainberg J., Fisher R.R., Gibson S.E., Goldstein M.L., Guhathakurta M., Siregar E.* The north-south coronal asymmetry with inferred magnetic quadrupole. — *AIP Conference Proceedings*, 1999, v. 471, p. 721.
564. *Schwöpe A.D.* PhD. Thesis, Berlin Univ, 1991.
565. *Михалас Д.* Звездные атмосферы (в 2-х частях). — М.: Мир, 1982.
566. *Соболев В.В.* Курс теоретической астрофизики. — М.: Наука, 1985.
567. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
568. *Имшенник В.С., Морозов Ю.И.* Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. — М.: Атомиздат, 1981.
569. *LeVeque R.J., Mihalas D., Dorfi E.A., Müller E.* Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow. — Springer Verlag, 1998.
570. *Сахибуллин Н.А.* Методы моделирования в астрофизике. 1. Звездные атмосферы. — Казань: Фэн, 1997.
571. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. — М.: Мир, 1977.

572. *Spitzer L.* The temperature of interstellar matter. I. — *Astrophys. J.*, 1948, v. 107, p. 6.
573. *Levermore C.D., Pomraning G.C.* A flux-limited diffusion theory. — *Astrophys. J.*, 1981, v. 248, p. 321.
574. *Соболев В.В.* Движущиеся оболочки звезд. — Л.: изд. ЛГУ, 1947.
575. *Черепашук А.М.* Поиск черных дыр. — *Усп. физ. наук*, 2003, т. 173, с. 371.
576. *Penrose R.* Gravitational Collapse: the Role of General Relativity. — *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1, 252, 1969.
577. *Blandford R.D., Znajek R.L.* Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1977, v. 179, p. 433.
578. *Бескин В.С.* Осесимметричные стационарные течения в астрофизике. — М.: Физматлит, 2006.
579. *Бисноватый-Коган Г.С.* Релятивистская астрофизика и физическая космология. — М.: КРАСАНД, 2011.
580. *Font J.A.* Numerical Hydrodynamics in General Relativity. — *Living Reviews in Relativity*, 2003, v. 6, №11.
581. *Martí J.M., Müller E.* Numerical Hydrodynamics in Special Relativity. — *Living Reviews in Relativity*, 2003, v. 6, №7.
582. *Komissarov S.S.* A Godunov-type scheme for relativistic magnetohydrodynamics. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1999, v. 303, p. 343.
583. *Gammie C.F., McKinney J.C., Tóth G.* HARM: A Numerical scheme for general relativistic magnetohydrodynamics. — *Astrophys. J.*, 2003, v. 589, p. 444.
584. *Baumgarte T.W., Shapiro S.L.* General relativistic magnetohydrodynamics for the numerical construction of dynamical spacetimes. — *Astrophys. J.*, 2003, v. 585, p. 921.
585. *Komissarov S.S.* Observations of the Blandford-Znajek process and the magnetohydrodynamic Penrose process in computer simulations of black hole magnetospheres. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2005, v. 359, p. 801.
586. *Mizuno Y., Nishikawa K.-I., Koide S., Hardee P., Fishman G.J.* RAISHIN: A High-Resolution Three-Dimensional General Relativistic Magnetohydrodynamics Code. — arXiv:astro-ph/0609004, 2006.
587. *Anton L., Zanotti O., Miralles J.A., Martí J.M., Ibanez J.M., Font J.A., Pons J.A.* Numerical 3+1 General Relativistic Magnetohydrodynamics: A Local Characteristic Approach. — *Astrophys. J.*, 2006, v. 637, p. 296.
588. *Tchekhovskoy A., McKinney J.C., Narayan R.* WHAM: a WENO-based general relativistic numerical scheme. I. Hydrodynamics. — *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 2007, v. 379, p. 469.
589. *Del Zanna L., Zanotti O., Bucciantini N., Londrillo P.* ECHO: a Eulerian conservative high-order scheme for general relativistic magnetohydrodynamics and magnetodynamics. — *Astron. and Astrophys.*, 2007, v. 473, p. 11.
590. *Anton L., Miralles J.A., Martí J.M., Ibanez J.M., Aloy M.A., Mimica P.* Relativistic Magnetohydrodynamics: Renormalized Eigenvectors and Full Wave Decomposition Riemann Solver. — *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 2010, v. 188, p. 1.
591. *Löffler F., et al.* The Einstein Toolkit: A Community Computational Infrastructure for Relativistic Astrophysics. — arXiv:1111.3344, 2011.

592. *Font J.A.* Numerical Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics in General Relativity. — Living Reviews in Relativity, 2008, v. 11, №7.
593. *Владимиров Ю.С.* Системы отсчета в теории гравитации. — М.: Энергоиздат, 1982.
594. *Arnowitt R., Deser S., Misner C W.* in The Dynamics of General Relativity, ed. L. Witten. — New York: Wiley, p. 227, 1962.
595. *Gourgoulhon E.* 3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity. — eprint arXiv:gr-qc/0703035, 2007.
596. *Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С.* Сборник задач по теории относительности и гравитации. — М.: Мир, 1979.
597. *Абрамовиц М., Стиган И.* (ред.) Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
598. *Sokolov I.V., Zhang H.-M., Sakai J.I.* Simple and Efficient Godunov Scheme for Computational Relativistic Gas Dynamics. — J. Comp. Phys., 2001, v. 172, p. 209.
599. *Pons J.A., Martí J.M., Müller E.* The exact solution of the Riemann problem with non-zero tangential velocities in relativistic hydrodynamics. — J. Fluid Mech., 2000, v. 422, p. 125.
600. *Rezzolla L., Zanotti O.* An improved exact Riemann solver for relativistic hydrodynamics. — J. Fluid Mech., 2001, v. 449, p. 395.
601. *Rezzolla L., Zanotti O., Pons J.A.* An improved exact Riemann solver for multidimensional relativistic flows. — J. Fluid Mech., 2003, v. 479, p. 199.
602. *Anile A.M.* Relativistic Fluids and Magneto-Fluids. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
603. *Lichnerowicz A.* Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics. — New York: Benjamin, 1967.
604. *Лихнерович А.* Теория относительности и математическая физика // В кн. Астрофизика, кванты и теория относительности, с. 129. — М.: Мир, 1982.



**Дмитрий Валерьевич Бисикало**

Доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института астрономии РАН



**Андрей Георгиевич Жилкин**

Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института астрономии РАН



**Александр Алексеевич Боярчук**

Доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, научный руководитель Института астрономии РАН