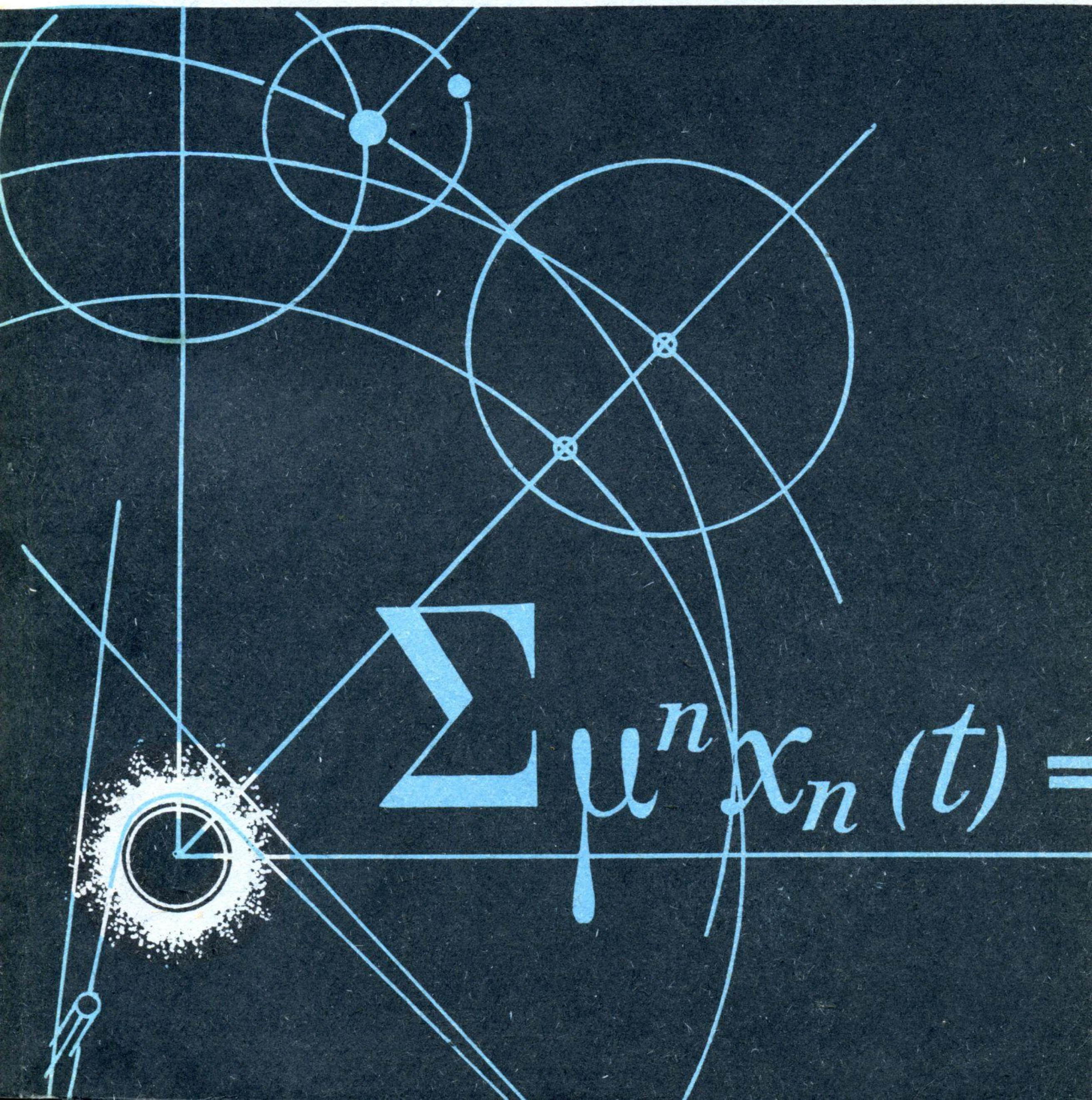


К. В. Холшевников

Асимптотические методы небесной механики



Σ

$\mu^n x_n(t) =$

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

К. В. ХОЛШЕВНИКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ



ЛЕНИНГРАД
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1985

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

УДК 521.1:531.011(075.8)

Х о л ш е в н и к о в К.В. Асимптотические методы небесной механики: Учеб. пособие. - Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1985. 208 с.

В пособии рассматриваются основные классические и современные (метод преобразований Ли, КАМ-теория) асимптотические методы небесной механики. Приводятся явные выражения общего и нескольких первых членов соответствующих рядов. Рассматривается сходимость приближений. Впервые приводятся точные оценки радиуса сходимости рядов метода малого параметра. Названные методы характеризуются как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Книга рассчитана на студентов математико-механических, физических факультетов университетов и втузов. Она может быть полезна также аспирантам и специалистам, использующим методы нелинейной механики.

Библиогр. 18 назв. Ил. 8. Табл. 2.

Р е ц е н з е н т ы: проф. В.С.Новоселов (Ленингр. ун-т),
проф. А.П.Маркеев (Моск. авиац. ин-т)

ИБ № 1884

Константин Владиславович Холшевников

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Редактор З.И.Царькова
Художественный редактор А.Г.Голубев
Технический редактор Е.И.Веселова
Корректоры К.Я.Евнина, Г.Н.Евенок

Подписано в печать 19.06.84. М-11108. Формат 60x84 1/16.
Бумага тип. № 2. Печать офсетная. Усл.печ.л. 12,09
Усл.кр.-отт. 12,26 Уч.-изд.л. 9,36 Заказ 668.
Тираж 1096 экз. Цена 30 коп.

Издательство ЛГУ им. А.А.Жданова, 199164, Ленинград,
Университетская наб., 7/9

Тульская типография Союзполиграфпрома при Государственном Комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г.Тула, пр. Ленина, 106

Х $\frac{1705030000 - 124}{076(02) - 85}$ 106-84

© Издательство Ленинградского университета, 1985 г.

ВВЕДЕНИЕ

Небесная механика длительное время была одним из основных „поставщиков“ трудных задач, постоянно требовавших разработки новых математических методов для их решения. Для решения проблем небесной механики были изобретены многие асимптотические методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих колебательные процессы. В тридцатые годы нашего века эта роль перешла к другим бурно растущим отделам физики – в частности к электрорадиофизике. Именно здесь получили дальнейшее развитие метод осреднения и тот тип математического обоснования асимптотических методов, который не привязан жестко к обязательной сходимости соответствующих разложений. В шестидесятые годы небесная механика снова выходит на авансцену. Возникает новый асимптотический метод – метод преобразований Ли. Чуть раньше создается КАМ-теория – мощный и строго обоснованный метод исследования небесно-механических систем на бесконечном промежутке времени.

В настоящее время применяются десятки различных модификаций асимптотических методов. В то же время систематического их изложения, включающего в себя описание методов, их математическое обоснование и сравнение их достоинств и недостатков, до сих пор в учебной литературе не было. Мы попытаемся в какой-то степени восполнить этот пробел. От читателя требуется знание математического анализа, теории дифференциальных уравнений, теоретической механики в объеме стандартного университетского курса. Для понимания сути многих из разбираемых примеров желательно знание небесной механики, хотя в принципе без этого можно обойтись, рассматривая примеры как чисто математические упражнения. Для понимания главы 7 о малых знаменателях нужны еще минимальные сведения из теории чисел.

В термин „асимптотические методы“ разные исследователи вкладывают не совсем одинаковый смысл. Мы будем понимать асимптотику достаточно широко, как совокупность методов, формально приводящих к точному решению задачи. Формально – значит, воз-

можно и без доказательства законности предельных переходов, почленного дифференцирования и т.п. Разумеется, такая незаконность порождает у исследователя чувство зыбкости фундамента. Поэтому много внимания уделялось и уделяется обоснованию асимптотических методов. Пусть, например, движение описывается вектор-функцией $x(t, \xi, \mu)$ от времени t , начальных данных ξ и параметра μ , и пусть асимптотическое представление решения есть

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k(t, \xi, \mu). \quad (0.1)$$

Чаще всего в (1) фигурирует ряд, для которого \tilde{x}_k - частичные суммы. В простейшем случае разложение ведется по степеням малого параметра, так что

$$\tilde{x}_k = x_0(t, \xi) + \mu x_1(t, \xi) + \dots + \mu^k x_k(t, \xi)$$

и (1) принимает форму

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t, \xi). \quad (0.2)$$

Асимптотическая формула (2) считается обоснованной, если ряд (2) равномерно сходится к x в области $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$. Здесь Δ_1 - интересующая нас область начальных данных, Δ_2 - цилиндр: $-\infty < t < \infty$, $|\mu| < \gamma$. К сожалению, такое обоснование экстракласса редко выполнимо - обычно просто потому, что в Δ при сколь угодно малом γ присутствуют точки расходимости. Сходимость удается иногда гарантировать, существенно суживая Δ_1 или Δ_2 . В первом случае из Δ_1 выбрасываем некоторое всюду плотное множество и приходим к неравномерной сходимости на бесконечном интервале времени. Во втором случае цилиндр Δ_2 заменяем воронкой $\Delta_3: |\mu| < \gamma$, $-T(\mu) < t < T(\mu)$, где $\lim_{\mu \rightarrow 0} T(\mu) = \infty$.

Приходим к равномерной сходимости на асимптотически больших временах $T(\mu)$.

Обоснование третьего вида - установление факта быстрого стремления к нулю разности $x - \tilde{x}_k$ вместе с μ при фиксированном k . Например,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} (\|x - \tilde{x}_k\| / \mu^{\sigma(k)}) = 0, \quad (0.3)$$

где $\|\cdot\| = \sup_{-T(\mu) < t < T(\mu)} |\cdot|$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(k) = \infty$. Очевидно, что

второй тип обоснования влечет третий, но не наоборот. Формулу вида (3) удается доказать во многих типичных ситуациях. Иногда под "асимптотическими методами" подразумевают формальные методы вместе с обоснованием типа (3).

Книга состоит из восьми глав и четырех приложений. Первые шесть глав посвящены формальной стороне методов. Изложены эвристические соображения, лежащие в их основе. Как правило, приводятся рекуррентные соотношения и формулы для общего члена соответствующих разложений. Применение методов иллюстрируется многочисленными примерами. Методы тщательно сравниваются между собой, и даются практические рекомендации по их оптимальному использованию. Седьмая глава посвящена малым знаменателям, сопутствующим всем асимптотическим методам нелинейной механики. В восьмой — дается сжатое изложение математического обоснования методов. Ограниченный объем книги не позволил подробнее остановиться на этих вопросах. За бортом оказалась также проблема резонансов. Мы отсылаем читателей к монографиям, список которых дан в конце книги. В приложения вынесены доказательства вспомогательных математических утверждений.

А теперь несколько замечаний по истории изложенного.

Разложения по степеням времени (глава 1) применяются по крайней мере со времени И.Ньютона и Г.Лейбница. Алгоритмизация с использованием неопределенных коэффициентов принадлежит О.Коши. Алгоритмизация с использованием дифференциальных операторов принадлежит С.Ли.

Разложения по степеням малого параметра в небесной механике (глава 2) также восходят к И.Ньютону. Алгоритмизация принадлежит А.Пуанкаре и А.М.Ляпунову. Строение общих членов разложений в задачах небесной механики установлено П.Лапласом, Ж.Лагранжем, С.Пуассоном, А.Пуанкаре.

Осредненные уравнения в небесной механике (глава 3) встречаются уже у П.Лапласа и Ж.Лагранжа. Формализация идеи осреднения оказалась далеко не тривиальной. Ведь понятие среднего

значения зависит от системы отсчета. Вдоль круговой орбиты спутника сила сопротивления F постоянна по модулю и направлена против вектора скорости. В инерциальной системе отсчета ее среднее значение EF равно нулю, тогда как в сопутствующей орбитальной EF равно постоянному ненулевому вектору F . По современным представлениям, выработанным постепенно работами П.Лапласа, Ж.Лагранжа, К.Гаусса, С.Пуассона, Ф.Тиссерана, А.Линдстедта, К.Болина, Ш.Делоне, Дж.Хилла, А.Пуанкаре, Х.Цайпеля, Дж.Биркгофа и др., осреднение равносильно осредняющей замене переменных, удовлетворяющей условию периодичности или почти периодичности по быстрым переменным и приводящей систему к виду, содержащему только медленные (или по крайней мере медленные в окрестности фиксированного резонанса) переменные.

Метод Цайпеля (глава 4) представляет собой вариант метода осреднения для гамильтоновых систем, сохраняющий каноническую форму уравнений. Каноническая замена переменных определяется методом производящих функций. Фактически метод был разработан независимо Х.Цайпелем и А.Пуанкаре.

Метод преобразований Ли (глава 5) был разработан сравнительно недавно, в шестидесятые годы, Г.Хори и независимо А.Депри. Как и в методе Цайпеля, здесь сохраняется гамильтонова форма уравнений. Замена переменных определяется гамильтоновым потоком вспомогательной системы уравнений. Явное выражение общих членов рядов и сравнение методов Цайпеля и Ли выполнено К.В.Холшевниковым в работе [15].

Метод касательных (глава 6) открыт И.Ньютоном для решения алгебраических и трансцендентных уравнений, обобщен Л.В.Канторовичем на уравнения в функциональных пространствах, в частности на дифференциальные уравнения.

Малые знаменатели (глава 7) доставили много забот астрономам и дали богатую пищу математикам; появились в трудах И.Ньютона при интегрировании уравнений возмущенного движения типа

$$\dot{x} = \sum A \cos[(k_1 \omega^1 + \dots + k_N \omega^N)t - \varphi].$$

Свойства знаменателей $k\omega = k_1 \omega^1 + \dots + k_N \omega^N$ изучены Ж.Лувиаллем, К.Брунсом, Х.Гмльденом, Т.Броденом, А.Виманом, А.Я.Хинчиным, В.И.Арнольдом и др. Мы приводим лишь самые ос-

новные результаты, касающиеся распределения значений и оценок снизу знаменателей $k\omega$.

Последняя, восьмая глава книги посвящена математическому обоснованию асимптотических методов. Сходимость разложений по степеням времени установлена О.Коши. Сходимость разложений по степеням малого параметра доказана А.М.Ляпуновым и А.Пуанкаре. Точные оценки радиуса сходимости для линейных систем нашел А.М.Ляпунов. Подобный результат для систем с медленными и быстрыми переменными получен К.В.Холшевниковым в работе [16]. Первое обоснование типа (3) для метода осреднения предложено Н.М.Крыловым и Н.Н.Боголюбовым. К сожалению, позднейшие исследования мы не смогли включить в книгу ввиду недостатка места и сложности математического аппарата. По той же причине исследования А.Н.Колмогорова, В.И.Арнольда, Ю.Мозера и более поздние работы по КАМ-теории, названной так по начальным буквам фамилий только что перечисленных авторов, удалось осветить лишь в самых общих чертах.

Два замечания о форме. В большинстве случаев обозначения едины внутри каждой главы, а по возможности и во всей книге. Формулы отмечаются тремя числами, первые два отвечают главе и параграфу. При ссылке на формулу внутри данного параграфа используется только последнее число. Нумерация формул введения и приложений понятна без дополнительных пояснений.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность А.П.Маркееву, А.Г.Сокольскому, В.С.Новоселову, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний как по существу предмета, так и по форме изложения.

Глава I

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СТЕПЕНЯМ ВРЕМЕНИ

§ 1.1. Постановка задачи

Один из наиболее общих приемов решения дифференциальных уравнений, не интегрирующихся элементарно, — разложение в ряд по известным функциям времени. Большинство асимптотических методов укладывается в эту схему, различаясь выбором и степенью простоты базовой системы функций. Мы начнем с простейшего и хорошо разработанного случая степенных рядов. Последние настолько удобны, что часто используются даже при наличии элементарного решения. Например, в процессе определения орбит новых малых планет обычно прибегают к степенным разложениям общего решения задачи двух тел.

Важность излагаемого в этой главе метода определяется также его фундаментальной ролью: нередко удается получить разложения по какому-либо параметру, вовсе не связанному со временем. Ниже мы увидим это на примере преобразований Ли канонических систем. Здесь же отметим, что из уравнения Кеплера $E - \epsilon \sin E = M$ легко вывести дифференцированием

$$dE/dM = 1/(1 - \epsilon \cos E), \quad (1.1.1)$$

$$dE/d\epsilon = \sin E / (1 - \epsilon \cos E). \quad (1.1.2)$$

Поэтому для получения разложений эксцентрисческой аномалии по степеням средней достаточно найти разложение решения (1) по "времени" M при начальных данных $E = 0$ при $M = 0$. Для получения разложений по степеням эксцентриситета — найти разложение решения (2) по "времени" ϵ при начальных данных $E = M$ при $\epsilon = 0$.

Перейдем к точной постановке задачи. Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений общего вида

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (1.1.3)$$

Здесь $x = (x^1, \dots, x^N)$ - вектор (элемент пространства \mathbb{R}^N), t - скаляр (элемент пространства \mathbb{R}), $f = (f^1, \dots, f^N)$ - вектор-функция, заданная на расширенном фазовом пространстве Δ (области в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$) со значениями в \mathbb{R}^N .

Фиксируем начальные данные $x = X$ при $t = T$, где точка (X, T) , разумеется, должна быть взята из Δ . Попробуем представить соответствующее решение (3) рядом по степеням времени:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(X, T)(t - T)^k, \quad (1.1.4)$$

где $c_k = (c_k^1, \dots, c_k^N)$ - подлежащие определению функции от начальных данных из Δ в \mathbb{R}^N . При фиксированных начальных данных $c_k = \text{const}$. В литературе часто называют c_k постоянными, подразумевая под этим лишь независимость их от времени t . Условие прохождения решения через точку (X, T) сразу определяет свободный член разложения (4):

$$c_0(X, T) = X. \quad (1.1.5)$$

Остальные коэффициенты зависят, вообще говоря, как от X , так и от T . В автономном случае, когда f не зависит от времени, коэффициенты c_k не будут зависеть от T . Противоположный случай независимости f от x приводит к независимости c_k от X . Интуитивно ясные, эти свойства вытекают из нижеприводимых рекуррентных соотношений.

Какие условия мы должны наложить на правую часть уравнения (3), без которых представление (4) заведомо невозможно? Для выяснения этого подставим (4) в (3):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (t - T)^{k-1} = f\left(X + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (t - T)^k, T + (t - T)\right). \quad (1.1.6)$$

Видим, что функция f вдоль исследуемого решения должна разлагаться в степенной ряд. Если нас интересует только одно решение с избранными X, T , то этому ограничению могут подчиняться функции и с весьма плохими дифференциальными свойствами. Например, уравнение

$$\dot{x} = (x - X)g(x, t) \quad (1.1.7)$$

с произвольной непрерывной скалярной** функцией g имеет решение $x = X$ вида (4) с нулевыми коэффициентами c_k ($k \geq 1$). Но решение с точно указанными X, T редко интересует естествоведов хотя бы потому, что начальные данные находятся в результате наблюдений и измерений и всегда известны с некоторой неопределенностью. Поэтому представляет интерес не отдельная траектория, а некоторая трубка траекторий, хотя бы и малого сечения. Считая точку (X, T) произвольной в Δ , находим из (6), что f должна разлагаться в ряд по степеням координат и времени в окрестности каждой точки Δ . Иными словами, f должна быть вещественно-аналитической функцией на Δ . Впрочем, вещественность не играет особой роли: степенные ряды определяют f и при комплексных значениях аргументов. Так что можно с самого начала считать Δ областью в комплексном пространстве, а f — голоморфной в Δ . Примечательно, что этого достаточно для формального определения c_k . Более того, коэффициенты c_k определяются единственным образом, ряд (4) оказывается сходящимся при достаточно малом $t - T$, и решение (4) — единственное, проходящее через точку (X, T) (теорема Коши).

§ 1.2. Метод Коши

Построим фактически ряд (1.1.4), пользуясь методом неопределенных коэффициентов, использованным Коши.

Голоморфная в Δ функция в окрестности каждой точки разлагается в ряд Тейлора (см. приложение 3):

$$f(x, t) = \sum_{|r|, s=0}^{\infty} A_{rs}(X, T)(x-X)^r(t-T)^s. \quad (1.2.1)$$

Здесь $r = (r_1, \dots, r_N)$ — мультииндекс, $|r| = r_1 + \dots + r_N$, $x^r = (x^1)^{r_1} (x^2)^{r_2} \dots (x^N)^{r_N}$. Вектор A_{rs} с точностью до факториалов есть частная производная от $f(x, t)$, вычисленная в точке $x = X$, $t = T$. Тот же результат получается дифференцированием непосредственно функции f от аргументов X, T :

* Можно считать g вектор-функцией, понимая умножение в (7) покомпонентно.

$$A_{rs}(X, T) = \frac{1}{r_1! \dots r_N! s!} \cdot \frac{\partial^{|r|+s} f(X, T)}{(\partial X^1)^{r_1} \dots (\partial X^N)^{r_N} (\partial T)^s}. \quad (1.2.2)$$

Из (2) следует голоморфность $A_{rs}(X, T)$ в области Δ .

Подставим разложение (1) в соотношение (1.1.6):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (\bar{t}-T)^{k-1} = \sum_{|r|, s=0}^{\infty} A_{rs} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\bar{t}-T)^k \right\}^r (\bar{t}-T)^s. \quad (1.2.3)$$

Пусть сначала x - скаляр. Следовательно, f, r, A_{rs}, c_k - тоже скаляры. Представив в (3) степень как произведение одинаковых сомножителей, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (\bar{t}-T)^{k-1} = \sum A_{rs} c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_r} (\bar{t}-T)^{k_1+k_2+\dots+k_r+s}. \quad (1.2.4)$$

Справа r, s независимо друг от друга пробегает множество неотрицательных чисел; при $r=0$ пустой множитель $c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_r} (\bar{t}-T)^{k_1+k_2+\dots+k_r}$ считается равным единице; при $r \geq 1$ индексы k_1, \dots, k_r независимо друг от друга пробегает множество положительных чисел. Представим правую часть (4) в виде ряда по степеням $\bar{t}-T$, для чего следует объединить члены с одинаковым показателем, и приравняем соответствующие коэффициенты:

$$(m+1) c_{m+1} = \sum A_{rs} c_{k_1} \dots c_{k_r} \quad (m \geq 0). \quad (1.2.5)$$

Здесь суммирование подчинено дополнительному ограничению $k_1 + \dots + k_r + s = m$. Сумма содержит конечное число слагаемых, и в нее не войдут c_k при $k > m$. Иными словами,

$$c_{m+1} = P_1(A_{rs}, c_1, \dots, c_m) \quad (m \geq 0), \quad (1.2.6)$$

где символом $P(\cdot)$ с различными значками мы будем обозначать многочлен с неотрицательными коэффициентами от указанных аргументов. Читателю предлагается уточнить, каковы максимально возможные значения индексов r, s и наибольшая степень P_1 относительно c_k .

Выражение (6) есть рекуррентное соотношение между c_k , позволяющее последовательно всех их определить. По индукции устанавливается, что c_k будут многочленами от A_{rs} с неотрицательными коэффициентами:

$$c_k = P(A_{rs}). \quad (1.2.7)$$

Читатель легко уточнит, что в (7) входят лишь A_{rs} при $r+s \leq k-1$ и что степень многочлена P равна k . Вот явные выражения первых коэффициентов c_k :

$$\begin{aligned} c_1 &= A_{00}, \\ 2c_2 &= A_{01} + A_{10}A_{00}, \\ 6c_3 &= 2A_{02} + A_{10}A_{01} + A_{10}^2A_{00} + 2A_{11}A_{00} + 2A_{20}A_{00}^2. \end{aligned}$$

В общем случае запишем скалярный множитель $\{\cdot\}^r$ в (3) подробнее и перейдем к компонентам векторов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k^p (t-T)^{k-1} = \sum_{|r|, s=0}^{\infty} A_{rs}^p (t-T)^s \prod_{n=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n (t-T)^k \right\}^{r_n}.$$

Здесь верхний индекс у $(t-T)$ означает степень, у остальных величин — номер компоненты. Теперь представим степень как произведение одинаковых сомножителей и запишем $\{\cdot\}^r$ в виде

$$\prod_{n=1}^N \sum_{k_{n1}, \dots, k_{nr_n}=1}^{\infty} c_{k_{n1}}^n \dots c_{k_{nr_n}}^n (t-T)^{k_{n1} + \dots + k_{nr_n}}.$$

Согласно дистрибутивному закону здесь можно переставить знак суммы и произведения* и получить обобщение (4):

* Такая формулировка дистрибутивности редко встречается в учебниках. Поясним ее при $N=2$, $r_1=1$, $r_2=3$, $t-T=1$:

$$\Pi \Sigma = \left\{ \sum_{k_{11}=1}^{\infty} c_{k_{11}}^1 \right\} \left\{ \sum_{k_{21}, k_{22}, k_{23}=1}^{\infty} c_{k_{21}}^2 c_{k_{22}}^2 c_{k_{23}}^2 \right\},$$

$$\Sigma \Pi = \sum_{k_{11}, k_{21}, k_{22}, k_{23}=1}^{\infty} c_{k_{11}}^1 c_{k_{21}}^2 c_{k_{22}}^2 c_{k_{23}}^2.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k^p (z-T)^{k-1} =$$

$$= \sum_{|r|, s=0}^{\infty} A_{rs}^p (z-T)^s \prod_{n=1}^N c_{k_{n1}}^n \dots c_{k_{Nr_n}}^n (z-T)^{k_{n1} + \dots + k_{Nr_n}}$$

Приравнявая коэффициенты при $(z-T)^m$, получаем аналог (5)

$$(m+1) c_{m+1}^p =$$

$$= \sum A_{rs}^p (c_{k_{11}}^1 \dots c_{k_{1r_1}}^1) \dots (c_{k_{N1}}^N \dots c_{k_{Nr_N}}^N). \quad (1.2.8)$$

Здесь суммирование подчинено дополнительному ограничению

$$s + \sum_{n=1}^N (k_{n1} + \dots + k_{Nr_n}) = m.$$

Поэтому ясно, что сумма содержит лишь конечное число слагаемых и что в нее не войдут c_k при $k > m$, т.е.

$$c_{m+1}^p = P_1^p (A_{rs}^p, c_k^n) \quad (m \geq 0), \quad (1.2.9)$$

где $|r| + s \leq m$, $k \leq m$ и степень P_1^p относительно c равна m . По индукции устанавливается и обобщение (7)

$$c_k^p = P^p (A_{rs}^n). \quad (1.2.10)$$

В (10) входят лишь A_{rs}^n при $|r| + s \leq k-1$, причем лишь A_{rs}^p при $|r| + s = k-1$, и степень многочлена P^p равна k . Вот явное выражение первых коэффициентов c_k при $N = 3$:

$$c_1^p = A_{0000}^p,$$

$$2c_2^p = A_{0001}^p + A_{1000}^p A_{0000}^1 + A_{0100}^p A_{0000}^2 + A_{0010}^p A_{0000}^3,$$

$$6c_3^p = 2A_{0002}^p + A_{1000}^p (A_{0001}^1 + A_{1000}^1 A_{0000}^1 + A_{0100}^1 A_{0000}^2 + A_{0010}^1 \times$$

$$\times A_{0000}^3) + A_{0100}^p (A_{0001}^2 + A_{1000}^2 A_{0000}^1 + A_{0100}^2 A_{0000}^2 + A_{0010}^2 A_{0000}^3) +$$

$$\begin{aligned}
& + A_{0010}^p (A_{0001}^3 + A_{1000}^3 A_{0000}^1 + A_{0100}^3 A_{0000}^2 + A_{0010}^3 A_{0000}^3) + \\
& + 2(A_{1001}^p A_{0000}^1 + A_{0101}^p A_{0000}^2 + A_{0011}^p A_{0000}^3) + 2[A_{2000}^p (A_{0000}^1)^2 + \\
& + A_{0200}^p (A_{0000}^2)^2 + A_{0020}^p (A_{0000}^3)^2 + A_{1100}^p A_{0000}^1 A_{0000}^2 + \\
& + A_{1010}^p A_{0000}^1 A_{0000}^3 + A_{0110}^p A_{0000}^2 A_{0000}^3].
\end{aligned}$$

Очевидно, что в практических вычислениях экономнее пользоваться рекуррентной формулой (8).

Итак, решение вида (I.I.4) задачи Коши (I.I.3) построено конструктивно. Фактически доказана и его единственность, поскольку коэффициенты c_k определяются однозначно в виде многочленов от A_{rs} .

§ I.3. Ряды Софуса Ли

Коэффициенты c_k ряда (I.I.4) можно получить, вычисляя производные от x по времени. Этот метод с равным успехом применим не только для нахождения решения (I.I.4), но и любой функции $g(x, t)$ вдоль решения, т.е. при $x = x(X, T, t)$.

Запишем тейлоровское разложение

$$g(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(X, T) (t-T)^k, \quad (I.3.1)$$

где

$$g_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k g(x(t), t)}{dt^k} \right|_{t=T}. \quad (I.3.2)$$

При $k=0$ имеем очевидно значение g в начальной точке

$$g_0 = g(x(T), T) = g(X, T).$$

При $k=1$ в силу уравнений движения

$$\begin{aligned}
dg/dt &= \partial g / \partial t + \sum_{n=1}^N (\partial g / \partial x^n) (dx^n / dt) = \partial g / \partial t + \\
& + \sum_{n=1}^N f^n (\partial g / \partial x^n).
\end{aligned}$$

Введем дифференциальный оператор

$$\tilde{D} = \frac{\partial}{\partial t} + f^1(x, t) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + f^N(x, t) \frac{\partial}{\partial x^N}, \quad (1.3.3)$$

действующий на функции от x, t . Теперь можно представить полную производную, именуемую также производной в силу уравнений движения (1.1.3), в форме

$$dg/dt = \tilde{D}g(x, t).$$

Поэтому

$$dg/dt \Big|_{t=T} = \tilde{D}g(x, t) \Big|_{t=T, x=X}.$$

Тот же результат можно записать короче:

$$dg/dt \Big|_{t=T} = Dg(X, T),$$

где дифференциальный оператор

$$D = \partial/\partial T + f^1(X, T)(\partial/\partial X^1) + \dots + f^N(X, T)(\partial/\partial X^N) \quad (1.3.4)$$

действует на функции от X, T .

Итак,

$$g_1 = Dg(X, T).$$

Далее $2g_2 = D(Dg(X, T))$ и вообще $k!g_k$ определяется k -кратным применением оператора D к функции $g(X, T)$. Если определить индуктивно

$$D^0 = 1, \quad D^1 = D, \quad \dots, \quad D^k = D(D^{k-1}),$$

то по доказанному

$$g_k = (1/k!) D^k g(X, T). \quad (1.3.5)$$

Мы пришли к ряду Ли, представляющему данную функцию $g(x, t)$ вдоль траектории системы (1.1.3) с начальными данными (X, T) :

$$g(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} ((t-T)^k/k!) D^k g(X, T). \quad (1.3.6)$$

Соотношение (6) допускает компактную запись

$$g(x, t) = e^{(t-T)D} g(X, T), \quad (1.3.7)$$

если ввести дифференциальный оператор Ли:

$$e^{\tau D} = \sum_{k=0}^{\infty} (\tau^k / k!) D^k. \quad (1.3.8)$$

Заметим, что функцию g можно считать как скалярной, так и векторной и даже матричной - операторы D , $e^{\tau D}$ действуют покомпонентно.

Для получения решения системы (1.1.3) следует положить $g(x, t) = x$ в формуле (7):

$$x = e^{(t-T)D} X. \quad (1.3.9)$$

Прямое дифференцирование позволяет определить

$$DX = f(X, T). \quad (1.3.10)$$

Поэтому (9) можно представить в развернутом виде

$$x = X + \sum_{k=1}^{\infty} ((t-T)^k / k!) D^{k-1} f(X, T). \quad (1.3.11)$$

Терминологические замечания. Разложение (6) есть ряд Тейлора функции, определяемой суперпозицией известной функции $g(x, t)$ и решения дифференциального уравнения $x(X, T, t)$. Специальное наименование "ряд Ли" оправдано тем обстоятельством, что коэффициенты g_k вычисляются непосредственно по правым частям дифференциального уравнения (1.1.3). В левых частях (6), (7) g подразумевается выраженной через X, T, t в силу уравнений движения (1.1.3): $g(x(X, T, t), t) = \tilde{g}(X, T, t)$. Говорят, что $\tilde{g}(X, T, t)$ есть преобразование Ли функции $g(X, T)$ дифференциальным оператором Ли $e^{(t-T)D}$.

Если функции f, g не зависят явно от времени, то в определении \tilde{D}, D можно опустить дифференцирование по t, T - результат очевидно не изменится. Формулы (6), (7) несколько упростятся:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} ((t-T)^k/k!) D^k g(X), \quad (1.3.12)$$

$$g(x) = e^{(t-T)D} g(X), \quad (1.3.13)$$

причем результат будет зависеть от t, T только через посредство разности $t - T$.

Предпочтительность рекуррентного метода Коши или дифференциального метода Ли при практических вычислениях зависит от вида правых частей f уравнения (1.1.3) и возможностей используемой ЭВМ и языка программирования.

Сформулируем простейшие свойства оператора D :

$$1) \quad DC = 0 \quad (C = \text{const}), \quad (1.3.14)$$

$$2) \quad D(g_1 + g_2) = Dg_1 + Dg_2, \quad (1.3.15)$$

$$3) \quad D(Cg) = CDg, \quad D(gC) = (Dg)C, \quad (1.3.16)$$

$$4) \quad D(g_1 g_2) = g_1 Dg_2 + (Dg_1) g_2. \quad (1.3.17)$$

Докажем, например, (17). В автономном случае, как уже говорилось, оператор D укорачивается:

$$D = \sum_{n=1}^N f^n(X) (\partial / \partial X^n). \quad (1.3.18)$$

Нестационарный случай можно свести к предыдущему, увеличив размерность системы на единицу, если принять t за новую переменную x^{N+1} . Тогда в (18) верхний предел суммирования будет равен $(N+1)$ и $f^{N+1} = 1$. Имеем для левой части

$$\begin{aligned} \text{л.ч.} &= \sum_{n=1}^N f^n \frac{\partial}{\partial X^n} g_1 g_2 = \sum_{n=1}^N f^n \left(g_1 \frac{\partial g_2}{\partial X^n} + g_2 \frac{\partial g_1}{\partial X^n} \right) = \\ &= g_1 \sum_{n=1}^N f^n \frac{\partial g_2}{\partial X^n} + g_2 \sum_{n=1}^N f^n \frac{\partial g_1}{\partial X^n} = \text{п.ч.} \end{aligned}$$

Свойства 1) - 4) справедливы не только в скалярном случае, но и для матриц произвольных размеров, допускающих соответствующие действия. Распространим, например, (17) для $(r \times s)$ -матрицы g_1 и $(s \times m)$ -матрицы g_2 , вычисляя компоненты левой и правой частей, стоящие на пересечении i -й строки и j -го столбца:

$$\begin{aligned}
 (\text{л. ч.})^{ij} &= (Dg_1 g_2)^{ij} = D(g_1 g_2)^{ij} = D \sum_{k=1}^s g_1^{ik} g_2^{kj} = \\
 &= \sum_{k=1}^s (g_1^{ik} Dg_2^{kj} + g_2^{kj} Dg_1^{ik}) = (\text{п. ч.})^{ij} .
 \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в матричном случае порядок сомножителей в (16), (17) нарушать нельзя.

По индукции доказывается линейность произвольной степени оператора:

$$5) D^k(g_1 + g_2) = D^k g_1 + D^k g_2, \quad (1.3.19)$$

$$6) D^k(Cg) = CD^k g, \quad D^k(gC) = (D^k g)C \quad (1.3.20)$$

и правило Лейбница дифференцирования произведения

$$7) D^k(g_1 g_2) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (D^m g_1)(D^{k-m} g_2). \quad (1.3.21)$$

Из свойств D легко вывести свойства оператора $e^{\tau D}$. Непосредственным следствием линейности D^k будет линейность $e^{\tau D}$:

$$1) e^{\tau D}(g_1 + g_2) = e^{\tau D} g_1 + e^{\tau D} g_2, \quad (1.3.22)$$

$$2) e^{\tau D}(Cg) = Ce^{\tau D} g, \quad e^{\tau D}(gC) = (e^{\tau D} g)C. \quad (1.3.23)$$

Правило типа (22) справедливо и для произведения

$$3) e^{\tau D}(g_1 g_2) = (e^{\tau D} g_1)(e^{\tau D} g_2). \quad (1.3.24)$$

Вывод (24) дословно повторяет доказательство основного свойства экспоненты:

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \quad (1.3.25)$$

По определению $e^{\tau D}$ и свойству (21) имеем в (24)

$$\text{л. ч.} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{k!} D^k(g_1 g_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^k \frac{\tau^k}{m_1!(k-m_1)!} (D^{m_1} g_1)(D^{k-m_1} g_2).$$

Заменяя индекс суммирования k на $m_1 + m_2$, получаем

$$\text{л.ч.} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{\tau^{m_1+m_2}}{m_1! m_2!} (D^{m_1} g_1)(D^{m_2} g_2) = \text{п.ч.}$$

Замечательно, что (24) верно и в матричном случае, когда (25) становится неверным: формула Лейбница (21) сохраняет силу, тогда как бином Ньютона

$$(z_1 + z_2)^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} z_1^m z_2^{k-m}$$

справедлив лишь для коммутирующих z_1, z_2 .

Из (22)–(24) следует, что для любого скалярного или матричного многочлена P от g_1, g_2, \dots

$$4) \quad e^{\tau D} P(g_1, g_2, \dots) = P(e^{\tau D} g_1, e^{\tau D} g_2, \dots). \quad (1.3.26)$$

Формула (26) верна не только для многочленов, но и для произвольных степенных рядов. Поэтому для произвольной аналитической функции g от переменных X, T справедливо

$$5) \quad e^{\tau D} g(X, T) = g(e^{\tau D} X, e^{\tau D} T). \quad (1.3.27)$$

Формула (27) представляет собой иную форму записи (7). Действительно, ее левая часть совпадает с правой частью (7). Но $e^{\tau D} X$ по (9) равно x , а элементарные вычисления дают $e^{\tau D} T = T + \tau = \bar{t}$. Поэтому правая часть (27) равна $g(x, \bar{t})$, т.е. левой части (7). Таким образом, (7) и (27) выражают закон изменения значений функции, когда ее аргумент изменяется вдоль решений уравнения (1.1.3).

Непосредственно проверяется правило дифференцирования

$$6) \quad \left(\partial / \partial \bar{t} \right) \left\{ e^{(\bar{t}-T)D} g \right\} = e^{(\bar{t}-T)D} D g, \quad (1.3.28)$$

еще раз подчеркивающее связь производной по времени с оператором D . В (28) частная производная $\partial / \partial \bar{t}$ вычисляется при постоянных начальных данных X, T , т.е. фактически является производной вдоль решения системы (1.1.3). Отсюда сразу вытекает

Теорема 1.3.1. Для того чтобы функция $g(x, \bar{t})$ была интегралом уравнения (1.1.3), необходимо и достаточно, чтобы

$$Dg = 0. \quad (1.3.29)$$

Впрочем, справедливость теоремы видна и прямо из (6), ибо (29) влечет $D^k g = 0$ при $k \geq 1$.

Получить интегрируемую комбинацию можно и при более слабых условиях на Dg . Достаточно найти явный вид $D^k g$ и тем самым $e^{\tau D} g$.

Пусть $D^k g = 0$ при некотором $k \geq 1$. Тогда

$$g(x, t) = g(X, T) + (t-T) Dg(X, T) + \dots + \frac{(t-T)^{k-1}}{(k-1)!} D^{k-1} g(X, T). \quad (1.3.30)$$

Пусть g - собственная функция оператора D с собственным числом λ

$$Dg = \lambda g. \quad (1.3.31)$$

По индукции устанавливаем $D^k g = \lambda^k g$, откуда

$$e^{\tau D} g = e^{\tau \lambda} g \quad (1.3.32)$$

или
$$g(x, t) = e^{\lambda(t-T)} g(X, T), \quad (1.3.33)$$

так что $e^{-\lambda t} g$ - интеграл (1.1.3).

Если в (31) g - вектор размерности k , λ - квадратная ($k \times k$)-матрица, то (32), (33) по-прежнему справедливы. Умножим обе части (33) слева на $e^{-\lambda t}$. Матрицы λt и $\lambda(t-T)$, очевидно, коммутируют, поэтому для них справедливо равенство типа (25)

$$e^{-\lambda t} e^{\lambda(t-T)} = e^{-\lambda t + \lambda(t-T)} = e^{-\lambda T}.$$

Таким образом, k компонент вектора $e^{-\lambda t} g$ будут интегралами (1.1.3).

Пусть $Dg = \lambda e^{\alpha g}$. По индукции для $k \geq 1$ легко устанавливается $D^k g = (k-1)! \lambda^k \alpha^{k-1} e^{k\alpha g}$, т.е.

$$e^{\tau D} g = g + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda \alpha \tau e^{\alpha g})^k}{k} = g - \frac{1}{\alpha} \ln(1 - \lambda \alpha \tau e^{\alpha g})$$

или
$$g(x, t) = g(X, T) - \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \lambda \alpha (t-T) e^{\alpha g(X, T)} \right]. \quad (1.3.34)$$

Сформулируем теперь важнейшее свойство: обратным к оператору $e^{(t-T)D}$ будет $e^{(T-t)D}$, т.е.

$$7) \quad g(X, T) = e^{(T-t)\tilde{D}} g(x, t). \quad (1.3.35)$$

Действительно, точки (x, t) и (X, T) равноправны - обе лежат на одном и том же решении уравнений (1.1.3), и мы можем прийти к (X, T) , отправляясь от точки (x, t) как от начальной. Формально (7) и (35) иллюстрируют справедливость привычного свойства экспоненты:

$$(e^{\tau D})^{-1} = e^{-\tau D}.$$

Правда, нам пришлось заменить D на \tilde{D} , поскольку в (35) операторы действуют на функции от x, t , а не X, T .

Свойство 7) позволяет, например, получить из (30) интеграл

$$g(x, t) - (t-T)\tilde{D}g(x, t) + \dots + \frac{(-1)^{k-1}(t-T)^{k-1}}{(k-1)!} \tilde{D}^{k-1}g(x, t)$$

системы (1.1.3).

В автономном случае обычно полагают $T = 0$, так что (7) и (35) принимают форму

$$g(x) = e^{tD} g(X), \quad (1.3.36)$$

$$g(X) = e^{-t\tilde{D}} g(x). \quad (1.3.37)$$

Если $e^{\tau D}$ рассматривать как цельный символ - оператор сдвига по траектории уравнения (1.1.3) - то формулы (7), (9), (13), (22)-(24), (26)-(28), (35)-(37) будут верны не только при аналитичности, но и при простой непрерывности или дифференцируемости входящих в них функций.

Мы встретимся с рядами Ли в главах 5 и 6. Желающих подробнее ознакомиться со свойствами рядов и операторов Ли мы отсылаем к монографии [17].

Пример 1.3.1. Рассмотрим уравнение

$$dx/dt = 1. \quad (1.3.38)$$

Его общее решение $x = X + \tau$, $\tau = t - T$. Для произвольной, не зависящей явно от времени функции g , оператор D сводится к дифференцированию по X : $D = d/dX$. Поэтому ряд Ли (12) приобретает форму ряда Тейлора:

$$g(X+\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (\tau^k/k!) (d^k g(X)/dX^k). \quad (1.3.39)$$

Как видим, ряд Тейлора - специальный случай ряда Ли.

Пример 1.3.2. Рассмотрим линейную автономную систему уравнений

$$dx^n/dt = \sum_{k=1}^N a_{nk} x^k. \quad (n=1, \dots, N). \quad (1.3.40)$$

Правые части (40) образуют компоненты f^n вектора f . Если A - матрица с элементами a_{nk} , то $f = Ax$, и (40) можно представить в виде

$$dx/dt = Ax. \quad (1.3.41)$$

На основании (10)

$$DX = AX.$$

Поэтому в согласии с (33) общее решение (40) дается матричной экспонентой

$$x = e^{(t-T)A} X, \quad (1.3.42)$$

тогда как компоненты вектора $e^{-tA} x$ будут интегралами системы (40).

Пример 1.3.3. Рассмотрим каноническую систему с автономной функцией Гамильтона:

$$\dot{x} = -\partial h(x, y)/\partial y, \quad \dot{y} = \partial h(x, y)/\partial x, \quad (1.3.43)$$

где $x = (x^1, \dots, x^N)$, $y = (y^1, \dots, y^N)$. Ей отвечает оператор:

$$D = \sum_{n=1}^N \left(-\frac{\partial h}{\partial y_n} \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial h}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial y_n} \right). \quad (1.3.44)$$

Таким образом, D представляет собой операторную скобку Пуассона:

$$Dg = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial g}{\partial y_n} \frac{\partial h}{\partial x_n} - \frac{\partial g}{\partial x_n} \frac{\partial h}{\partial y_n} \right) = (gh). \quad (1.3.45)$$

В частности, каждый интеграл g канонических уравнений (43) обращает в нуль скобку Пуассона с гамильтонианом $h: Dg = 0$ равносильно $(g, h) = 0$. Сам гамильтониан служит интегралом (43), поскольку скобка Пуассона одинаковых функций исчезает.

Пример 1.3.4. Разложение эксцентрической аномалии по степеням средней аномалии в кеплеровом движении.

Обе аномалии и эксцентриситет связаны между собой уравнением Кеплера и вытекающим из него дифференциальным уравнением (1.1.1). Обозначим здесь эксцентрическую аномалию как искомую функцию через x , среднюю аномалию как независимую переменную через t , эксцентриситет через ϵ . Уравнение Кеплера примет форму

$$x - \epsilon \sin x = t. \quad (1.3.46)$$

В результате дифференцирования получаем

$$dx/dt = 1/(1 - \epsilon \cos x). \quad (1.3.47)$$

Начальные данные связаны соотношением

$$X - \epsilon \sin X = T. \quad (1.3.48)$$

Уравнению (44) отвечает дифференциальный оператор

$$D = (1/(1 - \epsilon \cos X))(\partial/\partial X).$$

По индукции легко устанавливается, что при $k \geq 1$

$$D^k X = (1/(1 - \epsilon \cos X)^{2k-1}) P_{k-1}(X, \epsilon), \quad (1.3.49)$$

где P - многочлены от $\cos X$, $\sin X$, ϵ , связанные рекуррентным соотношением

$$P_k = -(2k-1)\epsilon \sin X P_{k-1} + (1 - \epsilon \cos X) P'_{k-1}. \quad (1.3.50)$$

Штрих означает производную по X . В частности,

$$P_0 = 1,$$

$$P_1 = -\epsilon \sin X,$$

$$P_2 = 2\epsilon^2 - \epsilon \cos X - \epsilon^2 \cos 2X,$$

$$P_3 = (\varepsilon - \frac{27}{2} \varepsilon^3) \sin X + 4\varepsilon^2 \sin 2X + \frac{3}{2} \varepsilon^3 \sin 3X,$$

$$P_4 = -2\varepsilon^2(2 - 27\varepsilon^2) + (\varepsilon - \frac{63}{2} \varepsilon^3) \cos X + (11\varepsilon^2 - 48\varepsilon^4) \cos 2X + \frac{29}{2} \varepsilon^3 \cos 3X + 3\varepsilon^4 \cos 4X.$$

Приведем разложение решения (47) в окрестности перицентра ($X = T = 0$)

$$x = \frac{1}{1-\varepsilon} \dot{t} - \frac{\varepsilon}{6(1-\varepsilon)^4} \dot{t}^3 + \frac{\varepsilon(1+9\varepsilon)}{120(1-\varepsilon)^7} \dot{t}^5 - \dots \quad (1.3.51)$$

и апоцентра ($X = T = \pi$)

$$x = \pi + \frac{\dot{t} - \pi}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon(\dot{t} - \pi)^3}{6(1+\varepsilon)^4} - \frac{\varepsilon(1-9\varepsilon)(\dot{t} - \pi)^5}{120(1+\varepsilon)^7} + \dots \quad (1.3.52)$$

Пример 1.3.5. Разложения по степеням эксцентриситета в кеплеровом движении.

Обозначим эксцентрическую аномалию как искомую функцию через x , эксцентриситет как независимую переменную через \dot{t} , среднюю аномалию как параметр через μ . Уравнение Кеплера примет вид

$$x - \dot{t} \sin x = \mu. \quad (1.3.53)$$

Рассмотрим более общее уравнение

$$x - \dot{t} \varphi(x) = \mu, \quad (1.3.54)$$

переходящее в (53) при $\varphi(x) = \sin x$. Дифференцированием получим

$$\dot{x} = \varphi(x) / (1 - \dot{t} \varphi'(x)). \quad (1.3.55)$$

С (55) связан дифференциальный оператор

$$D = \partial / \partial T + (\varphi(X) / (1 - T \varphi'(X))) (\partial / \partial X). \quad (1.3.56)$$

Вычисляя DX, D^2X, \dots при $\varphi(X) = \sin X$, получаем разложение эксцентрической аномалии по степеням отклонений эксцентриситета от фиксированного значения:

$$x = X + \frac{\sin X}{1 - T \cos X} (t - T) + \frac{2 \sin X \cos X - T \sin X (1 + \cos^2 X)}{2(1 - T \cos X)^3} (t - T)^2 + \dots \quad (1.3.57)$$

В учебниках по небесной механике вместо ряда Ли обычно приводится ряд Лагранжа, использующий лишь дифференцирование по X . Правда, n -я степень соответствующего оператора действует на функцию, зависящую от номера n , что несколько снижает ценность ряда Лагранжа. Покажем, как последний можно получить из ряда Ли. Введем оператор

$$D_0 = (1 / (1 - T \varphi'(X))) (\partial / \partial X). \quad (1.3.58)$$

Докажем, что

$$DD_0 g(X, T) = D_0 Dg(X, T), \quad (1.3.59)$$

а для независимой от T функции g

$$D[\varphi^n D_0 g(X)] = D_0 [\varphi^{n+1} D_0 g(X)], \quad (1.3.60)$$

$$D^n g(X) = D_0^{n-1} [\varphi^n D_0 g(X)] \quad (n \geq 1). \quad (1.3.61)$$

Равенства (59), (60) проверяются прямыми вычислениями. При $n = 1$ формула (61) очевидна. Предположим ее справедливость для значка n . Используя последовательно (61), (59), (60), находим

$$\begin{aligned} D^{n+1} g &= D(D^n g) = DD_0^{n-1} (\varphi^n D_0 g) = \\ &= D_0^{n-1} D(\varphi^n D_0 g) = D_0^n (\varphi^{n+1} D_0 g), \end{aligned}$$

что доказывает (61) по принципу полной индукции. Соотношение (61) индуцирует ряд Лагранжа

$$g(x) = g(X) + \sum_{n=1}^{\infty} ((t-T)^n / n!) D_0^{n-1} [\varphi^n D_0 g(X)]. \quad (1.3.62)$$

Особенно простую форму (62) принимает при $T = 0$, $X = \mu$, что отвечает разложению по степеням эксцентриситета:

$$g(x) = g(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} (t^n/n!) (d^{n-1}/d\mu^{n-1}) [\varphi^n(\mu) dg(\mu)/d\mu]. \quad (1.3.63)$$

В частности,

$$x = \mu + \sum_{n=1}^{\infty} (t^n/n!) (d^{n-1}/d\mu^{n-1}) \varphi^n(\mu). \quad (1.3.64)$$

Пример 1.3.6. Разложения по степеням времени в кеплеровом движении.

Обозначим через x_1, x_2, x_3 гелиоцентрические координаты в задаче двух тел; через x_4, x_5, x_6 — компоненты скорости. Мы позволим себе в этом и следующем примере отмечать номер компоненты нижним значком. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+3}, \\ \dot{x}_{i+3} &= -\varkappa^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} x_i \quad (i=1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.3.65)$$

где \varkappa^2 — гравитационный параметр. Введем обозначения $r = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$, $u = X_1 X_4 + X_2 X_5 + X_3 X_6$, $v = X_4^2 + X_5^2 + X_6^2$ для радиуса, скалярного произведения радиус-вектора и скорости, квадрата скорости в начальную эпоху. Оператор D запишется так:

$$\begin{aligned} D &= (X_4 \frac{\partial}{\partial X_1} + X_5 \frac{\partial}{\partial X_2} + X_6 \frac{\partial}{\partial X_3}) - \\ &- \frac{\varkappa^2}{r^3} (X_1 \frac{\partial}{\partial X_4} + X_2 \frac{\partial}{\partial X_5} + X_3 \frac{\partial}{\partial X_6}). \end{aligned} \quad (1.3.66)$$

Докажем, что

$$\begin{aligned} D^k X_i &= A_k(r, u, v) X_i + B_k(r, u, v) X_{i+3}, \\ D^k X_{i+3} &= D^{k+1} X_i \quad (i=1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.3.67)$$

где A_k, B_k — подлежащие определению функции от указанных аргументов. Второе равенство в (67) вытекает из $D X_i = X_{i+3}$. Первое устанавливается индуктивно с учетом

$$DA = (u/r)A_r + (v - \varkappa^2/r)A_u - (2\varkappa^2u/r^3)A_v, \quad (1.3.68)$$

где A - произвольная гладкая функция от r, u, v , индексы указывают на дифференцирование по соответствующим аргументам. Процесс индукции завершается выводом рекуррентных соотношений

$$A_{k+1} = (u/r)A_{kr} + (v - \varkappa^2/r)A_{ku} - (2\varkappa^2u/r^3)A_{kv} - (\varkappa^2/r^3)B_k, \quad (1.3.69)$$

$$B_{k+1} = (u/r)B_{kr} + (v - \varkappa^2/r)B_{ku} - (2\varkappa^2u/r^3)B_{kv} + A_k.$$

Полученный результат обычно выражают в следующей форме. Координаты и скорости представляются с помощью двух скалярных функций $F(r, u, v, t)$, $G(r, u, v, t)$:

$$\begin{aligned} x_i &= FX_i + GX_{i+3}, \\ \dot{x}_i &= \dot{F}X_i + \dot{G}X_{i+3}, \end{aligned} \quad (1.3.70)$$

$$\begin{aligned} \text{где } F &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-T)^k}{k!} A_k, & \dot{F} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-T)^k}{k!} A_{k+1}, \\ G &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-T)^k}{k!} B_k, & \dot{G} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-T)^k}{k!} B_{k+1}, \end{aligned} \quad (1.3.71)$$

а коэффициенты A_k, B_k вычисляются последовательно по (69). Приведем их первые значения

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -\varkappa^2/r^3, \quad A_3 = 3\varkappa^2u/r^5,$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\varkappa^2/r^3,$$

$$A_4 = -2\varkappa^4/r^6 - 15\varkappa^2u^2/r^7 + 3\varkappa^2v/r^5,$$

$$A_5 = 15\varkappa^2u(2\varkappa^2/r^8 + 7u^2/r^9 - 3v/r^7),$$

$$B_4 = 6\varkappa^2u/r^5, \quad B_5 = \varkappa^2(-8\varkappa^2/r^6 - 45u^2/r^7 + 9v/r^5).$$

Обратим внимание, что A_0, A_1, B_0, B_1, B_2 постоянны; A_2 и B_3 зависят лишь от r ; A_3 и B_4 - лишь от r и u , т.е. от r и \dot{r} ; остальные коэффициенты зависят и от модуля скорости в начальную эпоху, т.е. от всех трех аргументов r, u, v .

пример 1.3.7. Разложения по степеням времени в движении низкопогоейного ИСЗ.

При движении близкого к Земле спутника главным возмущающим фактором служит несферичность гравитационного поля Земли. Пертурбационная функция с точностью до первой степени сжатия в обозначениях предыдущего примера имеет вид

$$(-\vartheta/r^3)(3x_3^2/r^2 - 1), \quad (1.3.72)$$

где $\vartheta = J\varpi^2 R^2/2$, R - экваториальный радиус Земли, J - коэффициент при второй зональной гармонике. Дифференцируя (72) по X_1, X_2, X_3 , находим выражение оператора D нашей задачи:

$$D = D_0 + \vartheta(15X_3^2/r^7 - 3/r^5)(X_1 \frac{\partial}{\partial X_4} + X_2 \frac{\partial}{\partial X_5}) + \\ + \vartheta(15X_3^2/r^7 - 9/r^5)X_3 \frac{\partial}{\partial X_6}, \quad (1.3.73)$$

где через D_0 обозначен оператор (66).

Представление (70) больше не имеет места хотя бы потому, что орбита ИСЗ в общем случае не плоская. Теперь величины F, G, A_k, B_k будут зависеть от индекса i , а также от X_3 и X_6 . Выпишем A_k^i, B_k^i для первых значений нижнего индекса:

$$A_0^i = B_1^i = 1, \quad A_1^i = B_0^i = B_2^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$A_2^i = B_3^i = -\varpi^2/r^3 + \vartheta(15X_3^2/r^7 - 3/r^5),$$

$$A_3^i = 3\varpi^2 u/r^5 + \vartheta(-105X_3^2/r^9 + 15/r^7)(X_1 X_4 + X_2 X_5) + \\ + \vartheta(-105X_3^2/r^9 + 45/r^7)X_3 X_6 \quad (i = 1, 2),$$

$$A_2^3 = B_3^3 = -\varpi^2/r^3 + \vartheta(15X_3^2/r^7 - 9/r^5),$$

$$A_3^3 = 3\varpi^2 u/r^5 + \vartheta(-105X_3^2/r^9 + 45/r^7)(X_1 X_4 + X_2 X_5) + \\ + \vartheta(-105X_3^2/r^9 + 75/r^7)X_3 X_6.$$

§ 2.1. Метод возмущений

Нужные для приложений уравнения за редким исключением не решаются конечным числом простых операций типа квадратур и вычислений неявных функций. В предыдущей главе был описан универсальный метод решения с помощью рядов по степеням времени. Но соответствующие разложения, как мы увидим в главе 8, пригодны лишь на коротких отрезках времени, редко удовлетворяющих практиков.

Другое общее средство решения сложных систем - метод возмущений. Собственно говоря, это не метод, а скорее общая идея, конкретизируемая дальше в дощине различных методов. Предлагается решить сначала упрощенную систему, после чего искать малые поправки - возмущения. Квадраты и произведения поправок значительно меньше их самих и в первом приближении могут быть отброшены. Таким путем приходим к линейной системе в возмущениях. Ее решение (а решать линейные системы сравнительно несложно) даст аппроксимацию лучше исходной. Процесс можно продолжать. Последовательное отыскание малых поправок приближает нас к истинному решению. Хотелось бы добавить "сколько угодно близко", но различные методы теории возмущений не всегда гарантируют совпадение решений даже в пределе и тем не менее могут оказаться полезными.

Мы опишем в этой и следующих главах несколько конкретных методов решения возмущенных систем. А сейчас остановимся на существенном вопросе, не поддающемся формализации и требующем искусства исследователя, - на выборе начального приближения. Как правило, выбор осуществляется одним из трех способов.

1. За невозмущенное принимаем некоторое частное решение $x_0(t)$ системы (1.1.3), так что $\dot{x}_0 = f(x_0, t)$. Обозначая $z = x - x_0$, приходим к уравнениям возмущенного движения в форме

$$\dot{z} = f(x_0 + z, t) - f(x_0, t). \quad (2.1.1)$$

В переменных z порождающее решение сводится к тривиальному $z = 0$. Разложим правую часть (1) в ряд Тейлора по z :

$$\dot{z} = (\partial f(x_0) / \partial x_0) z + \dots \quad (2.1.2)$$

Пренебрегая членами второго порядка, получаем

$$\dot{z} = (\partial f(x_0) / \partial x_0) z. \quad (2.1.3)$$

Уравнения (3) называют уравнениями в вариациях для (1.1.3), ибо им удовлетворяет бесконечно малая вариация z решения x_0 . Зависимость x_0 от времени нам известна, и (3) представляет собой систему линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Если исходная система автономна, а x_0 - положение равновесия, то уравнение (1) также автономно, а коэффициенты уравнения (3) постоянны. Если исходная система периодична по времени и тем же периодом T обладает решение x_0 , то (1) также обладает периодом T , а линейная система (3) имеет периодические коэффициенты.

Применение первого способа предполагает наличие набора частных решений. В задаче трех тел, например, известны решения Эйлера - Лагранжа, когда все три тела описывают конические сечения. В частности, это могут быть круговые орбиты, сводящиеся к положению равновесия во вращающихся осях. В задаче о движении спутника осесимметричной планеты известны круговые близэкваториальные орбиты. Использование ЭМ позволяет выбрать x_0 из многочисленного семейства периодических орбит. Но только небольшому числу тел Солнечной системы можно сопоставить какое-либо достаточно близкое точное решение уравнений движения.

2. За невозмущенное выбираем общее решение x_0 системы уравнений

$$\dot{x} = f_0(x, \bar{t}), \quad (2.1.4)$$

которая в каком-либо смысле аппроксимирует систему (1.1.3). Это значит, что $f(x, \bar{t}) - f_0(x, \bar{t})$ значительно меньше f . Одновременно уравнения (4), описывающие невозмущенное движение, должны быть проще исходных - желательно интегрироваться в квадратурах.

Для возмущений z имеем теперь

$$\dot{z} = f(x_0 + z, \bar{t}) - f_0(x_0, \bar{t}), \quad (2.1.5)$$

$$\text{или } \dot{z} = (\partial f(x_0, \dot{t}) / \partial x_0) z + [f(x_0, \dot{t}) - f_0(x_0, \dot{t})] + \dots \quad (2.1.6)$$

Если опустить малые порядка выше первого, придем к уравнениям в вариациях (3) с добавочным слагаемым $[f(x_0, \dot{t}) - f_0(x_0, \dot{t})]$, т.е. по-прежнему к линейной, но уже неоднородной системе.

Второй способ является уже достаточно общим, поскольку очень широкому кругу задач можно сопоставить близкую интегрируемую задачу. В астрономии это — задача двух тел, двух неподвижных центров и некоторые другие. К задаче двух тел приходим, полагая массы планет равными нулю. К задаче двух центров — полагая массы и положения центров определенными функциями от массы Земли и ее динамического сжатия. В этих примерах невозмущенная система получается подстановкой некоторых избранных значений входящих в исходную систему параметров, т.е. величин, постоянных в данной конкретной задаче, но меняющихся при переходе от одной задачи к другой в рамках заданного класса. Можно считать подобный способ образования невозмущенной системы общим, вводя параметр искусственно, — прием, широко использовавшийся еще А.М.Лягуновым и П.Пенлеве. Например, уравнение

$$\dot{x} = f_0(x, \dot{t}) + \mu [f(x, \dot{t}) - f_0(x, \dot{t})] \quad (2.1.7)$$

совпадает с первоначальным (1.1.3) при $\mu = 1$ и с невозмущенным (4) при $\mu = 0$. Впрочем, в прикладных исследованиях редко возникает необходимость в искусственном введении параметра. Каждое уравнение, описывающее реальный процесс, содержит параметры — хотя бы потому, что x и \dot{x} измеряются в разных единицах. Так, уравнение экспоненциального роста или распада $\dot{x} = ax$ не может не содержать параметра a : если x измеряется в килограммах, а \dot{x} — в секундах, то условие пропорциональности \dot{x} и x подразумевает наличие множителя a , измеряемого в килограммах в секунду. При переходе к другим единицам числовое значение a естественно меняется.

3. Наконец, возможна и комбинация, когда за невозмущенное выбирается частное решение упрощенной системы (4).

Между рассмотренными способами нет непроходимой границы. Мы можем, например, общее решение системы (4) трактовать как частное решение системы

$$\dot{x} = f_0(x, \dot{t}) + \mu [f(x, \dot{t}) - f_0(x, \dot{t})], \quad \dot{\mu} = 0, \quad (2.1.8)$$

отвечающее нулевым начальным данным для μ . Система же (8) равносильна исходной при $\mu = 1$.

Перечислим основные виды движений, принимаемых за невозмущенные.

1. Задача двух тел. Уравнения относительного и барицентрического движения сводятся к уравнениям задачи одного притягивающего центра (1.3.39), содержащим лишь один параметр ε . В N -планетной задаче, полагая массы всех планет m_k равными нулю, приходим к уравнениям (1.3.39) для каждой планеты с одной и той же постоянной $\varepsilon^2 = Gm_0$, где G - постоянная тяготения, m_0 - масса Солнца. Но можно изменить ε^2 на величину порядка массы наибольшей планеты μ (или меньшую) - в любом случае будет $\|f - f_0\| \sim \mu \|f_0\|$. В гелиоцентрических координатах, например, чаще полагают вслед за Ньютоном $\varepsilon^2 = G(m_0 + m_k)$ для k -й планеты, хотя употребляется и общее значение $\varepsilon^2 = Gm_0$. Значения оскулирующих элементов, разумеется, зависят от выбора ε^2 , как, впрочем, и от выбора системы отсчета (гелиоцентрической, барицентрической и т.д.).

Общее решение задачи двух тел приводится в каждом учебнике небесной механики и в большинстве учебников теоретической механики.

2. Задача двух неподвижных центров. В подходящей системе отсчета эта задача описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= x^{i+3}, \\ \ddot{x}^{i+3} &= -G \sum_{j=1}^2 (m_j / r_j^3) (x^i - a_j^i), \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

где $r_j = \sqrt{(x^1 - a_j^1)^2 + (x^2 - a_j^2)^2 + (x^3 - a_j^3)^2}$. Допускаются комплексные значения масс m_j и координат a_j^i притягивающих центров, лишь бы правые части (9) были вещественны.

Общее решение уравнений (9) в эллиптических функциях приведено в [1].

3. Предельные случаи задачи одного и двух притягивающих центров.

Уравнения задачи одного притягивающего центра, расположенного в точке $(0, 0, c)$, имеют вид

$$\ddot{x}^i = -(\alpha^2/r^2)(x^i/r) \quad (i=1,2),$$

$$\ddot{x}^3 = -(\alpha^2/r^2)((x^3-c)/r),$$

где $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3-c)^2$. Устремим $(-c)$ и α^2 к бесконечности так, чтобы $g = \alpha^2/c^2$ оставалось постоянным. Тогда $r \rightarrow \infty$, $\alpha^2/r^2 \rightarrow g$, $x^1/r \rightarrow 0$, $x^2/r \rightarrow 0$, $(x^3-c)/r \rightarrow 1$. Уравнения движения перейдут в

$$\ddot{x}^1 = \ddot{x}^2 = 0, \quad \ddot{x}^3 = -g. \quad (2.1.10)$$

Мы пришли к движению в однородном гравитационном поле, обладающем потенциалом $V_0 = -gx^3$. Последний можно получить предельным переходом из потенциала $V = \alpha^2/r + \alpha^2/c$, но нельзя получить из потенциала в стандартной нормировке $V = \alpha^2/r$.

Точно так же можно удалить на бесконечность один из двух притягивающих центров, полагая $a_1^1 = a_2^2 = 0$, $a_2^3 \rightarrow -\infty$, $m_2 \rightarrow \infty$, $Gm_2/(a_2^3)^2 = g = \text{const}$. Придем к движению в поле одного центра с добавочным постоянным ускорением.

Устремление обоих центров на бесконечность не дает ничего нового - наложение двух однородных полей представляет опять однородное поле.

К новому предельному случаю придем, конструируя из двух центров диполь. Положим $a_1^1 = a_2^2 = 0$, $-a_1^3 = a_2^3 = c \rightarrow 0$, $-m_1 = m_2 \rightarrow \infty$, $m_2 c = M = \text{const}$. С точностью до малых первого порядка

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3x^3 c}{r^2} \right), \quad \frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3x^3 c}{r^2} \right),$$

где $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. В пределе уравнения (9) перейдут в

$$\ddot{x}^i = -(6GM/r^5) x^i x^3 \quad (i=1,2),$$

$$\ddot{x}^3 = (2GM/r^5)(r^2 - 3(x^3)^2), \quad (2.1.11)$$

Система (11) отвечает движению в консервативном поле потенциала

$$V = 2GMx^3/r^3, \quad (2.1.12)$$

что можно проверить простым дифференцированием V по x^i . В данном случае функция (12) получается также предельным переходом из стандартного потенциала задачи двух центров.

С математической точки зрения предельные случаи проще основных — хотя бы потому, что содержат меньше независимых параметров. Соответствующие уравнения интегрируются без труда. Но можно получить общее решение уравнений типа (11) предельным переходом из общего решения уравнений типа (9).

Предельным переходом можно сконструировать и комбинацию совмещенных притягивающего центра и диполя. Достаточно положить в (9) $a_j^1 = a_j^2 = 0$, $-a_1^3 = a_2^3 = c$, $m_1 = m - Mc^{-1}$, $m_2 = Mc^{-1}$ и затем устремить c к нулю. Уравнения (9) перейдут в

$$\ddot{x}^i + Gmx^i/r^3 = -(6GM/r^5)x^i x^3 \quad (i=1,2), \quad (2.1.13)$$

$$\ddot{x}^3 + Gmx^3/r^3 = (2GM/r^5)(r^2 - 3(x^3)^2).$$

Система (13) отвечает движению в консервативном поле потенциала

$$V = Gm/r + 2GMx^3/r^3. \quad (2.1.14)$$

4. Движение в поле, задаваемом потенциалом

$$V = A(r) + B(x^3/r)/r^2, \quad (2.1.15)$$

где A, B — произвольные функции от указанных аргументов. Соответствующие уравнения движения интегрируются в квадратурах методом разделения переменных в сферических координатах. Для задачи двух центров разделение переменных достигается лишь в эллипсоидальных координатах. Отметим, что функции (12), (14) представляют собой частные случаи потенциала (15).

Перечисленные случаи исчерпывают скудный набор интегрируемых полностью орбит, аппроксимирующих реальное движение небесных тел.* Однако в процессе решения сложной задачи часто

* Мы не касаемся здесь вращательного движения, для которого следует добавить несколько случаев движения твердого тела с неподвижной точкой — прежде всего движение Эйлера-Пуансо.

появляются вспомогательные уравнения, для которых можно указать еще несколько интегрируемых модельных задач.

5. Линейная система с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax + b. \quad (2.1.16)$$

Решение однородной системы ($b = 0$) дается формулой (1.3.42). Для решения неоднородной системы достаточно сделать сдвиг $x \rightarrow x + A^{-1}b$ и получить

$$x = e^{(t-T)A} X + (e^{(t-T)A} - I) A^{-1} b, \quad (2.1.17)$$

где I - единичная $N \times N$ -матрица.

Для вычисления матричной экспоненты следует использовать или ряды

$$e^{(t-T)A} = I + \frac{(t-T)}{1!} A + \frac{(t-T)^2}{2!} A^2 + \dots, \quad (2.1.18)$$

$$(e^{(t-T)A} - I) A^{-1} = \frac{(t-T)}{1!} I + \frac{(t-T)^2}{2!} A + \dots,$$

или предварительно привести A к канонической форме. В случае простых элементарных делителей каноническая запись A диагональна, и на диагонали стоят собственные числа λ_n ($n=1, 2, \dots, N$). Входящие в (17) матрицы также диагональны, причем

$$\left[e^{(t-T)A} \right]^{nn} = e^{(t-T)\lambda_n}, \quad (2.1.19)$$

$$\left[(e^{(t-T)A} - I) A^{-1} \right]^{nn} = \frac{e^{(t-T)\lambda_n} - 1}{\lambda_n}.$$

Обратим внимание, что в случае $\det A = 0$ обратной матрицы A^{-1} не существует. Тем не менее можно рассматривать $(e^{(t-T)A} - I) A^{-1}$ как цельный символ, определенный рядом (18). В каноническом представлении (19) нулевым собственным значениям $\lambda_n = 0$ отвечает элемент $\left[(e^{(t-T)A} - I) A^{-1} \right]^{nn} = t - T$, что легко получить из (19) предельным переходом $\lambda_n \rightarrow 0$.

6. Математический маятник

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0, \quad (2.1.20)$$

где ω^2 равно отношению ускорения силы тяжести к длине маятника. Общее решение (20), как известно, выражается через эллиптические функции. Интеграл энергии запишем в виде

$$\dot{x}^2/(2\omega^2) = h + \cos x. \quad (2.1.21)$$

Тогда

$$\sin \frac{x}{2} = \begin{cases} \alpha k \operatorname{sn}(\omega(t-T), k), & \text{если } -1 < h < 1, \\ \alpha \operatorname{th} \omega(t-T), & \text{если } h = 1, \\ \alpha \operatorname{sn}(k\omega(t-T), 1/k), & \text{если } h > 1, \end{cases} \quad (2.1.22)$$

где $k = \sqrt{(1+h)/2}$, $\alpha = \operatorname{sign} \dot{x} \big|_{t=T}$, причем за начальный выбран момент прохождения T через положение устойчивого равновесия $x = 0$.

§ 2.2. Уравнения метода малого параметра

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, t, \mu), \quad (2.2.1)$$

где $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^m)$ — вектор параметров, функция f задана на области Δ из $R^N \times R \times R^m$ со значениями в R^N . Не умаляя общности, избранные значения параметров можно принять равными нулю, после чего эпитет "малый" становится вполне уместным.

Функция f предполагается разложимой по степеням μ :

$$f(x, t, \mu) = \sum_{|s|=0}^{\infty} f_s(x, t) \mu^s, \quad (2.2.2)$$

где мы пользуемся прежними обозначениями для мультииндекса $s = (s_1, \dots, s_m)$ и степени $\mu^s = (\mu^1)^{s_1} \dots (\mu^m)^{s_m}$.

Метод малого параметра состоит в представлении решения также разложенным по степеням малых параметров:

$$x = \sum_{|k|=0}^{\infty} x_k(t) \mu^k, \quad (2.2.3)$$

где в отличие от главы I коэффициенты x_k зависят не только от начальных данных, указание на что мы опускаем, но и от времени. Выкладки упрощаются и не загромождают сути дела при скалярном параметре μ . К этому можно свести и общий случай, заменив компоненты μ^σ постоянными c^σ , помноженными на подходящие степени единого параметра μ . Например, в задаче о движении планет Солнечной системы с массами μ^σ ($\sigma = 1, \dots, 9$) можно положить $\mu^5 = \mu$, $\mu^\sigma = c^\sigma (\mu)^2$ ($\sigma = 1, 2, 3, 4, 9$), $\mu^\sigma = c^\sigma \mu$ ($\sigma = 6, 7, 8$), взяв за скалярный малый параметр массу Юпитера и обеспечив близость c^σ к единице.

В дальнейшем считаем μ скаляром, так что (2), (3) переписутся в форме

$$f(x, \bar{t}, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} f_s(x, \bar{t}) \mu^s, \quad (2.2.4)$$

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\bar{t}) \mu^k. \quad (2.2.5)$$

Подставив (5) в (1) с учетом (4), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot{x}_k \mu^k = \sum_{s=0}^{\infty} f_s \left(x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mu^k, \bar{t} \right) \mu^s. \quad (2.2.6)$$

Если раньше нужно было, чтобы f раскладывалась по x , \bar{t} в ряд Тейлора в окрестности начальных данных X, T , то теперь картина существенно иная. Разложения по степеням времени нигде не понадобятся. Зато разложение по x требуется не в окрестности фиксированной точки X , а в окрестности функции $x_0(\bar{t}, X, T)$. Мы увидим дальше, что x_0 есть решение дифференциального уравнения (1) при $\mu = 0$. Поэтому существует интервал $\bar{t}_1 < \bar{t} - T < \bar{t}_2$, на котором решение $x_0(\bar{t}, X, T)$ не выходит из области Δ при всех X, T , взятых из некоторой подобласти $\tilde{\Delta}$, принадлежащей сечению Δ плоскостью $\mu = 0$ (рис.1). Поэтому достаточно потребовать аналитичности f_s по x или, что то же самое, аналитичности f по x, μ в области Δ . Введем обозначения

$$A_{sr}(x_0, \bar{t}) = \frac{1}{r_1! \dots r_N!} \frac{\partial^{|r|} f_s(x_0, \bar{t})}{(\partial x^1)^{r_1} \dots (\partial x^N)^{r_N}} =$$

$$= \frac{1}{s! r_1! \dots r_N!} \frac{\partial^{|r|+s} f(x_0, \bar{t}, 0)}{(\partial x^1)^{r_1} \dots (\partial x^N)^{r_N} (\partial \mu)^s}, \quad (2.2.7)$$

с помощью которых перепишем (6) в форме (см. приложение 3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot{x}_k \mu^k = \sum_{s, |r|=0}^{\infty} A_{sr} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mu^k \right\}^r \mu^s. \quad (2.2.8)$$

Пусть сначала x - скаляр. Следовательно, f , r , A_{sr} , x_k - тоже скаляры. Представив в (8) степень как произведение одинаковых сомножителей, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot{x}_k \mu^k = \sum A_{sr} x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_r} \mu^{k_1+k_2+\dots+k_r+s}. \quad (2.2.9)$$

Справа s, r независимо друг от друга пробегает множество целых неотрицательных чисел; при $r=0$ пустой множитель $x_{k_1} \dots$

$\dots x_{k_r} \mu^{k_1+\dots+k_r}$ считается равным единице; при $r \geq 1$ индексы k_1, \dots, k_r независимо друг от друга пробегает множество целых положительных чисел. Представим правую часть (9) в виде ряда по степеням μ , для чего следует объединить члены с одинаковым показателем, и приравняем соответствующие коэффициенты

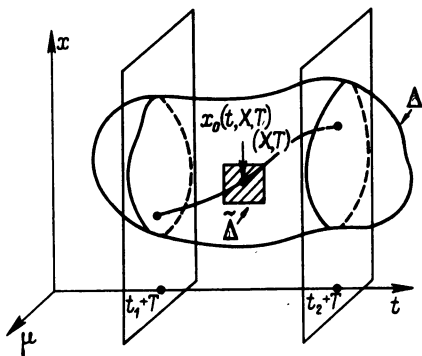


Рис.1. Область определения и одно из решений уравнения (2.2.1).

$$\dot{x}_m =$$

$$= \sum A_{sr} x_{k_1} \dots x_{k_r}. \quad (2.2.10)$$

Здесь суммирование подчинено дополнительному ограничению

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + s = m. \quad (2.2.11)$$

Ясно поэтому, что сумма содержит конечное число слагаемых и что в нее не войдут x_k при $k > m$.

При $m = 0$ равенство (11) возможно лишь при $s = r = 0$. Поскольку $A_{00} = f_0(x_0, \bar{t}) = f(x_0, \bar{t}, 0)$, то для x_0 получаем, как и следовало ожидать, уравнение (1) при $\mu = 0$:

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0, \bar{t}). \quad (2.2.12)$$

При $m \geq 1$ коэффициент x_m входит в сумму (10) только при $s = 0, r = 1, k_1 = m$ с коэффициентом $A_{01} = \frac{\partial f_0(x_0, \bar{t})}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, \bar{t}, 0)}{\partial x}$. Иными словами

$$\dot{x}_m = (\partial f_0(x_0, \bar{t}) / \partial x) x_m + P_m(A_{sr}, x_1, \dots, x_{m-1}). \quad (2.2.13)$$

Здесь P_m - многочлен с неотрицательными коэффициентами от указанных аргументов, линейный по A и степени m по x_1, \dots, x_{m-1} . Вот явные выражения первых многочленов:

$$P_1 = A_{10},$$

$$P_2 = A_{20} + A_{11} x_1 + A_{02} (x_1)^2,$$

$$P_3 = A_{30} + A_{11} x_2 + A_{21} x_1 + 2A_{02} x_1 x_2 + A_{12} (x_1)^2 + A_{03} (x_1)^3.$$

В общем случае запишем скалярный множитель $\{\cdot\}^r$ в (8) подробнее и перейдем к компонентам векторов

$$\sum x_k^p \mu^k = \sum_{s, |r|=0}^{\infty} A_{sr}^p \mu^s \prod_{n=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^n \mu^k \right\}^{r_n}.$$

Представим теперь степень как произведение одинаковых сомножителей и запишем $\{\cdot\}^r$ в виде

$$\prod_{n=1}^N \sum_{k_{n1}, \dots, k_{nr_n}=1}^{\infty} x_{k_{n1}}^n \dots x_{k_{nr_n}}^n \mu^{k_{n1} + \dots + k_{nr_n}}.$$

Согласно дистрибутивному закону здесь можно переставить знак суммы и произведения и получить обобщение (9)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot{x}_k^p \mu^k = \sum A_{sr}^p \mu^s \prod_{n=1}^N x_{k_{nr_n}}^n \mu^{k_{n1} + \dots + k_{nr_n}}.$$

Приравнявая коэффициенты при μ^m , получаем аналог (10):

$$\dot{x}_m^p = \sum A_{sr}^p (x_{k_{1r_1}}^1 \dots x_{k_{1r_1}}^1) \dots (x_{k_{Nr_N}}^N \dots x_{k_{Nr_N}}^N). \quad (2.2.14)$$

Здесь суммирование подчинено дополнительному ограничению:

$$s + \sum_{n=1}^N (k_{n1} + \dots + k_{nr_n}) = m. \quad (2.2.15)$$

Отсюда следует, что сумма содержит лишь конечное число слагаемых и что в нее не войдут x_k при $k > m$.

При $m = 0$ равенство (15) возможно лишь при $s = r_1 = \dots = r_N = 0$. Поскольку $A_{00}^p = f_0^p(x_0, \dot{t}) = f^p(x_0, \dot{t}, 0)$, то для x_0^p получаем опять уравнение (1) при $\mu = 0$:

$$\dot{x}_0^p = f_0^p(x_0, \dot{t}),$$

или в векторной форме

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0, \dot{t}). \quad (2.2.16)$$

При $m \geq 1$ коэффициент x_m входит в сумму (14) только при $s = 0$ и мультииндексе r , содержащем одну единичную и остальные нулевые компоненты. Иными словами

$$\begin{aligned} \dot{x}_m^p = & A_{010\dots 0}^p x_m^1 + A_{0010\dots 0}^p x_m^2 + \dots + A_{00\dots 01}^p x_m^N + \\ & + P_m(A_{sr}^p, x_1^1, \dots, x_{m-1}^N), \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

где P — многочлен с неотрицательными коэффициентами от указанных аргументов, линейный по A и степени m по x . Коэффициент при x_m^n справа есть частная производная $\partial f_0^p(x_0, \dot{t}) / \partial x^n$. Обозначив, как обычно, через $\partial f_0 / \partial x$ матрицу Якоби, перепишем (17) в векторно-матричной форме:

$$\dot{x}_m = (\partial f_0(x_0, \dot{x}) / \partial x) x_m + P_m(A_{sr}, x_1, \dots, x_{m-1}). \quad (2.2.18)$$

Выражение (13) есть частный случай (18) при $N=1$. Вот явные выражения первых многочленов (18) при $N=3$:

$$\begin{aligned} P_1 &= A_{1000}, \\ P_2 &= A_{2000} + A_{1100} x_1^1 + A_{1010} x_1^2 + A_{1001} x_1^3 + \\ &\quad + A_{0200} (x_1^1)^2 + A_{0020} (x_1^2)^2 + A_{0002} (x_1^3)^2 + \\ &\quad + A_{0110} x_1^1 x_1^2 + A_{0101} x_1^1 x_1^3 + A_{0010} x_1^2 x_1^3, \\ P_3 &= A_{3000} + A_{1100} x_2^1 + A_{1010} x_2^2 + A_{1001} x_2^3 + \\ &\quad + A_{2100} x_1^1 + A_{2010} x_1^2 + A_{2001} x_1^3 + \\ &\quad + 2A_{0200} x_1^1 x_2^1 + 2A_{0020} x_1^2 x_2^2 + 2A_{0002} x_1^3 x_2^3 + \\ &\quad + A_{1200} (x_1^1)^2 + A_{1020} (x_1^2)^2 + A_{1002} (x_1^3)^2 + \\ &\quad + A_{0110} (x_1^1 x_2^2 + x_2^1 x_1^2) + A_{0101} (x_1^1 x_2^3 + x_2^1 x_1^3) + \\ &\quad + A_{0011} (x_1^2 x_2^3 + x_2^2 x_1^3) + \quad (2.2.19) \\ &\quad + A_{1110} x_1^1 x_1^2 + A_{1101} x_1^1 x_1^3 + A_{1011} x_1^2 x_1^3 + \\ &\quad + A_{0300} (x_1^1)^3 + A_{0030} (x_1^2)^3 + A_{0003} (x_1^3)^3 + \\ &\quad + A_{0210} (x_1^1)^2 x_1^2 + A_{0201} (x_1^1)^2 x_1^3 + A_{0120} x_1^1 (x_1^2)^2 + \\ &\quad + A_{0102} x_1^1 (x_1^3)^2 + A_{0021} (x_1^2)^2 x_1^3 + A_{0012} x_1^2 (x_1^3)^2 + \\ &\quad + A_{0111} x_1^1 x_1^2 x_1^3. \end{aligned}$$

Чтобы получить здесь p -компоненту вектора P_m , надо A_{sr} заменить везде на A_{sr}^p .

§ 2.3. Исследование уравнений

Мы свели решение уравнения (2.2.1) к решению бесконечной системы (2.2.16), (2.2.18). Уравнение (2.2.16), т.е.

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0, \dot{t}), \quad (2.3.1)$$

называется уравнением нулевого приближения, или невозмущенным, или порождающим. Для эффективности метода малого параметра нужно, чтобы (1) было значительно проще, чем исходное (2.2.1). Желательна интегрируемость (1) в простых функциях.

Подчеркнем еще раз важность выбора невозмущенного движения. Фактически речь идет о разбиении правой части f на два куса $f = f_0 + (f - f_0)$. Легко добиться простоты (1), полагая f_0 равной хотя бы константе. Но тогда $f - f_0$ не будет малой. Напротив, можно сделать поправочный член сколь угодно малым, даже нулем, полагая $f_0 = f$. Но тогда метод вырождается в тавтологию: чтобы решить (2.2.1), нам надо будет решить (2.2.1). Выбор f_0 иногда бывает очевиден (задача двух тел для движения планет), чаще же является своего рода искусством (задача Хилла для движения Луны, задача двух центров для движения ИСЗ), когда удается $\|f - f_0\|$ сделать в сотни и тысячи раз меньше $\|f_0\|$ при относительно простой функции f_0 .

Обратимся теперь к бесконечной системе (2.2.18). Ясно, что ее надо решать последовательно, сверху вниз. На m -шаге функции $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ можно считать известными (определенными на предыдущих шагах). Тогда (2.2.18) представится в форме

$$\dot{x}_m = B(\dot{t})x_m + P_m(\dot{t}), \quad (2.3.2)$$

где $B = \partial f_0(x_0) / \partial x$ - матрица Якоби функции f_0 по переменным x , вычисленная вдоль порождающего решения x_0 ; $P_m(\dot{t})$ - известный вектор. Итак, на каждом шаге приходится решать линейное неоднородное уравнение (2). Матрица коэффициентов уравнения одна и та же для всех m , различны между собой лишь свободные члены P_m . Таким образом, задача свелась к интегрированию одного линейного однородного уравнения

$$\dot{z} = B(\dot{t})z, \quad (2.3.3)$$

после чего, как известно, общее решение (2) находится в квадратурах.

Уравнение (3) есть уравнение в вариациях для (1). Опуская индекс 0, запишем их как

$$\dot{x} = f(x, \bar{t}), \quad (2.3.4)$$

$$\dot{z} = B(\bar{t})z, \quad (2.3.5)$$

где матрица Якоби

$$B = \partial f(x, \bar{t}) / \partial x \quad (2.3.6)$$

вычисляется вдоль какого-либо решения (4).

Теорема 2.3.1. Пусть f имеет в Δ непрерывные производные первого порядка по всем аргументам. Если $\varphi(\bar{t}, C)$ - решение (4), зависящее от произвольной скалярной постоянной C , то $\partial \varphi(\bar{t}, C) / \partial C$ - решение (5), если B вычислять вдоль решения φ .

Нам дано, что

$$\partial \varphi(\bar{t}, C) / \partial \bar{t} = f(\varphi(\bar{t}, C), \bar{t}). \quad (2.3.7)$$

Требуется доказать, что

$$\partial \varphi(\bar{t}, C) / \partial \bar{t} = (\partial f(\varphi(\bar{t}, C), \bar{t}) / \partial x) \varphi(\bar{t}, C), \quad (2.3.8)$$

где введено обозначение

$$\varphi(\bar{t}, C) = \partial \varphi(\bar{t}, C) / \partial C. \quad (2.3.9)$$

Дифференцируем (9) по \bar{t} :

$$\partial \varphi / \partial \bar{t} = \partial^2 \varphi / \partial \bar{t} \partial C = \partial^2 \varphi / \partial C \partial \bar{t}, \quad (2.3.10)$$

поскольку смешанные производные при наших предположениях гладкости f непрерывны. Для вычисления последней производной (10) надо продифференцировать (7):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial C} f(\varphi(\bar{t}, C), \bar{t}) = \frac{\partial f(\varphi(\bar{t}, C), \bar{t})}{\partial x} \frac{\partial \varphi(\bar{t}, C)}{\partial C},$$

что совпадает с (8). Теорема доказана.

Полезно провести менее строгое, но более наглядное доказательство. Положим

$$\xi = \varphi(\bar{t}, C + \alpha) - \varphi(\bar{t}, C) = \frac{\partial \varphi(\bar{t}, C + \theta \alpha)}{\partial C} \alpha.$$

где для каждой компоненты вектора $\partial \varphi / \partial C$ надо брать свою правильную дробь θ , зависящую от \bar{t}, C, α . Подставим это ξ в (2.1.2) и разделим на α :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\partial \varphi(\bar{t}, C + \theta \alpha)}{\partial C} \right) = \frac{\partial f(\varphi(\bar{t}, C), \bar{t})}{\partial x} \frac{\partial \varphi(\bar{t}, C + \theta \alpha)}{\partial C} + \frac{o(\alpha)}{\alpha}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ получим (8).

Каждому решению φ основного уравнения (4), содержащему произвольную постоянную, отвечает в силу теоремы решение ψ уравнений в вариациях (5). Если φ содержит две константы C_1, C_2 , то дифференцирование φ по ним дает два решения ψ_1, ψ_2 . Наконец, общему решению $\varphi(\bar{t}, C_1, \dots, C_N)$ отвечает набор ψ_1, \dots, ψ_N решений уравнения (5). Обратим внимание на то, что набор постоянных C_1, \dots, C_N должен иметь всюду одно и то же фиксированное значение, чтобы все ψ_n отвечали одной и той же матрице $B(\bar{t})$. Ясно, что функции ψ_n линейно-независимы, ибо в противном случае якобиан $\det(\partial \varphi^n / \partial C_m)$ обратился бы в нуль, что противоречит условию общности решения $\varphi(\bar{t}, C_1, \dots, C_N)$.

Итак, общее решение (4) позволяет написать общее решение (5):

$$z = \tilde{C}_1 \psi_1 + \dots + \tilde{C}_N \psi_N. \quad (2.3.11)$$

Здесь \tilde{C}_n — произвольные постоянные, тогда как входящие в ψ_n константы C_n должны быть заменены числовыми значениями.

§ 2.4. Постоянные интегрирования

Вопрос о произвольных постоянных возникает в связи с увеличением их числа с N до бесконечности, поскольку при каждом m решение уравнений (2.2.18) вводит N постоянных интегрирования. Возможны различные постановки задачи.

1) Начальные данные X, T не зависят от μ . Подставим $\bar{t} = T$ в (2.2.5):

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \mu^k, \quad (2.4.1)$$

где, как обычно, через X_k обозначено значение функции x_k при $t = T$. Приравнявая коэффициенты при степенях μ , находим

$$X_0 = X, \quad X_k = 0 \quad (k \geq 1). \quad (2.4.2)$$

Итак, начальные значения выбирает в себя невозмущенное движение, все же возмущения в начальный момент равны нулю.

2) Начальная эпоха T не зависит от μ , но начальное состояние есть функция от μ : $X = X(\mu)$. Разложим X по степеням малого параметра

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \mu^k \quad (2.4.3)$$

и сравним с (1). Мы видим, что для (2.2.16) начальными данными будут (X_0, T) , для (2.2.18) — (X_m, T) .

3) Начальные данные — функции от μ :

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} T_k \mu^k, \quad X = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \mu^k. \quad (2.4.4)$$

На основании (2.2.5) получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k \mu^k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \left(T_0 + \sum_{m=1}^{\infty} T_m \mu^m \right) \mu^k. \quad (2.4.5)$$

Разложение функции скалярного аргумента $x_k(T_0 + \dots)$ по степеням μ не представляет труда:

$$\begin{aligned} x_k \left(T_0 + \sum_{m=1}^{\infty} T_m \mu^m \right) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{d^r x_k(T_0)}{r! d\dot{t}^r} \left(\sum_{m=1}^{\infty} T_m \mu^m \right)^r = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m_1, \dots, m_r=1}^{\infty} \frac{d^r x_k(T_0)}{r! d\dot{t}^r} T_{m_1} \dots T_{m_r} \mu^{m_1 + \dots + m_r}. \end{aligned}$$

Теперь достаточно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ , чтобы получить искомое рекуррентное соотношение

$$x_m(T_0) = X_m - \sum \frac{d^r x_k(T_0)}{r! d\dot{t}^r} T_{m_1} \dots T_{m_r}. \quad (2.4.6)$$

Сумма распространяется на индексы k, r, m_1, \dots, m_r , удовлетворяющие ограничениям $0 \leq k \leq m-1, 1 \leq r \leq m, 1 \leq m_g \leq m, k + m_1 + \dots + m_r = m$. Вот запись (6) для первых m (мы опускаем аргумент T_0):

$$x_0 = X_0,$$

$$x_1 = X_1 - \dot{x}_0 T_1,$$

$$x_2 = X_2 - (\dot{x}_0 T_2 + \ddot{x}_0 T_1^2/2 + \dot{x}_1 T_1),$$

$$x_3 = X_3 - (\dot{x}_0 T_3 + \ddot{x}_0 T_1 T_2 + \ddot{\ddot{x}}_0 T_1^3/6 + \dot{x}_1 T_2 + \ddot{x}_1 T_1^2/2 + \dot{x}_2 T_1).$$

Производные $d^r x_k / d\dot{t}^r$ могут быть вычислены дифференцированием (2.2.16), (2.2.18) и последующей подстановкой вместо \dot{t} , x_0, \dots, x_{m-1} значений $T_0, x_0(T_0), \dots, x_{m-1}(T_0)$. Вот окончательные выражения для первых m :

$$x_0 = X_0,$$

$$x_1 = X_1 - f_0 T_1, \quad (2.4.7)$$

$$x_2 = X_2 - \left\{ f_0 T_2 + f_1 T_1 + (\partial f_0 / \partial x_0)(X_1 - f_0 T_1 / 2) T_1 + (\partial f_0 / \partial \dot{t}) T_1^2 / 2 \right\}.$$

4) На практике, однако, далеко не всегда пользуются рекомендациями 1)-2), а применение способа 3) мне вообще не встречалось. Чаще всего обращаются с постоянными интегрирования как с произвольными, руководствуясь простотой получаемых формул. Например, интеграл от $\sin \dot{t}$ записывают как $(-\cos \dot{t})$, не выписывая лишнего постоянного слагаемого. Справедливо ли это? Безусловно, нет, если мы рассматриваем μ как переменную величину. Тогда разложение (3) единственно, и распорядиться величинами X_k по своему усмотрению нельзя.

Но обычно мы имеем дело с фиксированным значением параметра $\mu = \mu_0$ (массой планеты, сжатием и т.п.). И тогда действительно коэффициенты X_1, X_2, \dots можно взять произвольными, обеспечивающими сходимость (3) при $\mu = \mu_0$. Начальные же данные истинного x и порождающего x_0 решения будут связаны соотношением

$$X_0 = X(\mu_0) - \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mu_0^k.$$

На практике нолик у μ_0 опускают, что не приводит к недоразумениям, хотя и не совсем корректно (ведь решение x_0 и, следовательно, его начальные данные не должны зависеть от μ).

§ 2.5. Движение в окрестности равновесия

Как было показано в § 2.1, изучение окрестности любого частного решения сводится к исследованию системы

$$\dot{x} = A(\bar{t})x + \mu f(x, \bar{t}) \quad (2.5.1)$$

вблизи положения равновесия $x = 0$. Здесь A - матрица размером $N \times N$, f - вектор, разложение Тейлора которого по степеням x не содержит членов нулевой и первой степени.

Уравнения (2.2.16), (2.2.18) принимают форму

$$\dot{x}_0 = A(\bar{t})x_0, \quad (2.5.2)$$

$$\dot{x}_m = A(\bar{t})x_m + P_m, \quad (2.5.3)$$

так как теперь $f_0(x, \bar{t}) = Ax$, $\partial f_0 / \partial x = A$. Согласно (2.2.14), (2.2.15)

$$P_m = \sum B_r (x_{k_{11}}^1 \dots x_{k_{1r_1}}^1) \dots (x_{k_{N1}}^N \dots x_{k_{Nr_N}}^N). \quad (2.5.4)$$

Здесь

$$B_r = \frac{1}{r_1! \dots r_N!} \frac{\partial^{|r|} f(x_0, \bar{t})}{(\partial x^1)^{r_1} \dots (\partial x^N)^{r_N}},$$

где суммирование подчинено ограничениям $r_1 \geq 0, \dots, r_N \geq 0$.

$$\sum_{n=1}^N (k_{n1} + \dots + k_{nr_n}) = m - 1.$$

В частности, $P_1 = f(x_0, \bar{t})$.

Невозмущенная система в рассматриваемом случае совпадает с однородной частью (3). Обозначим через Φ фундаментальную матрицу решений невозмущенной системы, т.е. $N \times N$ -матрицу, столбцы которой образуют линейно-независимую систему решений (2). Тогда

$$x_0(\bar{t}) = \Phi(\bar{t})C, \quad (2.5.5)$$

где C - столбец произвольных постоянных, который легко можно выразить через начальные данные $C = \Phi^{-1}(T)X_0$.

Решение неоднородной системы, как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, дается квадратурой

$$x_m = \Phi(\bar{t}) \left\{ C_m + \int \Phi^{-1}(\bar{t}) P_m(\bar{t}) d\bar{t} \right\}. \quad (2.5.6)$$

Если интеграл брать в пределах от T от \bar{t} , то $C_m = \Phi^{-1}(T)X_m$. Ключевым моментом служит определение фундаментальной матрицы Φ . Аналитически ее удается найти лишь в редких случаях. Один из таких - случай постоянной матрицы A . На основании примера 1.3.2 можно принять

$$\Phi = e^{A\bar{t}}, \quad (2.5.7)$$

и тогда при $T = 0$ матрица $\Phi^{-1}(T)$ обратится в единичную. При простых элементарных делителях в главных осях матрица A диагональна с элементами $A^{nn} = \lambda_n$. Матрицы Φ , Φ^{-1} также диагональны с соответствующими элементами $e^{\lambda_n \bar{t}}$, $e^{-\lambda_n \bar{t}}$. В координатной форме соотношения (5), (6) примут вид

$$x_0^n = X_0^n e^{\lambda_n \bar{t}}, \quad (2.5.8)$$

$$x_m^n = e^{\lambda_n \bar{t}} \left\{ C_m^n + \int e^{-\lambda_n \bar{t}} P_m^n(\bar{t}) d\bar{t} \right\}. \quad (2.5.9)$$

Пример 2.5.1. Пусть A - постоянная диагональная матрица, f - квадратичная форма с постоянными коэффициентами

$$A = \text{diag} \{ \lambda_n \}, \quad f^n = b_{ij}^n x^i x^j \quad (b_{ij} = b_{ji}), (2.5.10)$$

где подразумевается суммирование от 1 до N по повторяющимся индексам.

Свободные члены P_m можно вычислить по формуле (4) или непосредственной подстановкой ряда $\sum \mu^k x_k$ в (1) с учетом (10):

$$P_m^n = \sum_{k=0}^{m-1} b_{ij}^n x_k^i x_{m-k-1}^j. \quad (2.5.11)$$

Пользуясь симметрией b_{ij} , можно уменьшить число слагаемых в сумме (11):

$$P_m^n = 2 \sum_{k=0}^{(m-3)/2} b_{ij}^n x_k^i x_{m-k-1}^j + b_{ij}^n x_{(m-1)/2}^i x_{(m-1)/2}^j \quad (m - \text{нечетное}),$$

$$P_m^n = 2 \sum_{k=0}^{(m-2)/2} b_{ij}^n x_k^i x_{m-k-1}^j \quad (m - \text{четное}). \quad (2.5.12)$$

В частности $P_1^n = b_{ij}^n x_0^i x_0^j$, поэтому из (9) следует для возмущений первого порядка

$$x_1^n = e^{\lambda_n t} \left\{ c_1^n + b_{ij}^n c^i c^j \int e^{(\lambda_i + \lambda_j - \lambda_n) t} dt \right\}.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$x_1^n = c_1^n e^{\lambda_n t} + \sum_{I_1^n} b_{ij}^n c^i c^j / (\lambda_i + \lambda_j - \lambda_n) e^{(\lambda_i + \lambda_j) t} + \\ + \sum_{I_0^n} b_{ij}^n c^i c^j t e^{\lambda_n t}. \quad (2.5.13)$$

Здесь множество I_0^n состоит из тех индексов i, j , для которых $\lambda_i + \lambda_j - \lambda_n = 0$, I_1^n - для которых, $\lambda_i + \lambda_j - \lambda_n \neq 0$.

Во втором приближении появятся экспоненты с показателями $(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k) t$ и, возможно, многочлены второй степени от t . Структура членов любого приближения очевидна.

Если все собственные числа имеют отрицательные вещественные части, то, несмотря на возможное присутствие многочленов от t , все x_k^n ограничены и стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Если все собственные числа - чисто мнимые, то x_k^n состоит из линейной комбинации тригонометрических функций с коэффициентами, имеющими форму многочленов от t . Последние могут появиться даже в нерезонансном случае, когда частоты линейно-независимы, и даже в случае одной единственной частоты, как показывает следующий пример.

Пример 2.5.2. Пусть в условиях предыдущего примера $N = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$, $f^1 = 0$, $f^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2$, т.е.

$$\dot{y}^1 = \omega y^2, \quad \dot{y}^2 = -\omega y^1 + \mu [(y^1)^2 + (y^2)^2]. \quad (2.5.14)$$

Невозмущенная часть эквивалентна гармоническому осциллятору $\ddot{y}^1 + \omega^2 y^1 = \ddot{y}^2 + \omega^2 y^2 = 0$ с частотой ω . Для приведения матрицы A к главным осям совершим преобразование

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 - iy^2, & 2y^1 &= x^1 + x^2, \\ x^2 &= y^1 + iy^2, & 2iy^2 &= -x^1 + x^2, \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

после чего (14) примет форму

$$\dot{x}^1 = i\omega x^1 - i\mu x^1 x^2, \quad \dot{x}^2 = -i\omega x^2 + \mu i x^1 x^2. \quad (2.5.16)$$

Общее решение невозмущенной части (16) согласно (8) с учетом вещественности y^n дается формулами

$$x_0^1 = C_0 e^{i\omega(t-T)}, \quad x_0^2 = C_0 e^{-i\omega(t-T)},$$

где C_0 , T - вещественные произвольные постоянные. Отсчитывая время от эпохи T , можем записать

$$x_0^1 = C_0 e^{i\omega t}, \quad x_0^2 = C_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.5.17)$$

Отсюда

$$P_1^1 = -i C_0^2, \quad P_1^2 = i C_0^2.$$

Согласно (9) получаем возмущения первого порядка

$$x_1^1 = x_1^2 = C_0^2 / \omega, \quad (2.5.18)$$

где мы опустили слагаемые $C_1 e^{\pm i\omega t}$, влияющие лишь на смысл постоянной C_0 .

Теперь второе из соотношений (12) дает

$$P_2^1 = -\frac{iC_0^3}{\omega} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}); \quad P_2^2 = \frac{iC_0^3}{\omega} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),$$

откуда с помощью (9) найдем возмущения второго порядка

$$\begin{aligned} x_2^1 &= C_0^3 (-2i\omega t e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) / (2\omega^2), \\ x_2^2 &= C_0^3 (e^{i\omega t} + 2i\omega t e^{-i\omega t}) / (2\omega^2), \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

содержащие t вне знака экспоненты.

§ 2.6. Уравнения с медленными и быстрыми переменными

Для планет Солнечной системы в качестве невозмущенного движения берется решение задачи двух тел. Последнее крайне просто выглядит в оскулирующих элементах. Для каждой планеты пять из них описывают положение орбиты, шестой — положение на орбите. Таким образом, элементы естественным образом разбиваются на две группы. В первую группу включают большие полуоси, эксцентриситеты, долготы узлов и им подобные, постоянные в невозмущенном движении. Другую группу образуют переменные типа средней или истинной аномалии, изменяющиеся и в невозмущенном движении. Обозначим через $x = (x^1, \dots, x^{N_1})$ вектор элементов первой группы, через $y = (y^1, \dots, y^{N_2})$ — второй группы, $N_1 + N_2 = N$. Уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu f(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \omega(x, y) + \mu g(x, y, \mu). \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Очевидно, что при $\mu = 0$ скорость изменения x равна нулю, тогда как скорость изменения y в нуль не обращается. Поэтому переменные x именуется медленными, y — быстрыми.

Если правые части (1) зависят от времени, то считаем t одной из компонент вектора y . Функция ω совпадает со скоростью изменения y в невозмущенном движении, а $\mu f = \sum \mu^k f_k$,

$\mu g = \sum \mu^k g_k$ описывают действие возмущений. При выборе в качестве y средних долгот или аномалий, линейных в невозмущенном движении, вектор ω получается не зависящим от y , что существенно облегчает интегрирование. Примем поэтому в дальнейшем

$$\dot{x} = \mu f(x, y, \mu), \quad (2.6.2)$$

$$\dot{y} = \omega(x) + \mu g(x, y, \mu).$$

В старых руководствах по небесной механике рекомендовалось вместо средней долготы вводить среднюю долготу эпохи по одной из формул

$$y = z + \omega(x)(t - T), \quad (2.6.3)$$

$$y = \tilde{z} + \int_T^t \omega(x) dt, \quad (2.6.4)$$

где интеграл должен вычисляться вдоль траектории системы (2). Второе из уравнений (2) переходит соответственно в

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mu g(x, z + \omega(x)(t - T), \mu) - \\ &- \mu \frac{\partial \omega}{\partial x} f(x, z + \omega(x)(t - T), \mu)(t - T), \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

или

$$\dot{\tilde{z}} = \mu g(x, \tilde{z} + \int_T^t \omega(x) dt, \mu). \quad (2.6.6)$$

Преимущество средней долготы в эпоху — постоянство в невозмущенном движении, т.е. наличие множителя μ в правых частях (5) и (6). Однако плата за это слишком высока. В (5), во-первых, появляется зависимость от \tilde{t} . Во-вторых, множитель $(\tilde{t} - T)$ во втором слагаемом приводит к тому, что на временах порядка $1/\mu$ возмущения перестают быть малыми. В (6) правая часть не содержит растущего множителя. Но система, состоящая из (6) и первого уравнения (2), не является системой дифференциальных уравнений. Действительно, зная x, \tilde{z} на эпоху \tilde{t} , мы не можем вычислить правой части (6): для этого надо знать поведение x на всем промежутке $[T, \tilde{t}]$.

В силу сказанного теперь предпочитают иметь дело непосредственно с системой (2), не пытаясь ликвидировать член $\omega(x)$ в

правой части и тем самым различие между переменными x и y . Различие между медленными и быстрыми переменными связано с существом дела и не является чем-то чисто внешним.

Система (2) имеет достаточно общий характер. Например, она встречается во многих задачах, описывающих колебательные процессы.

Перейдем к интегрированию (2) методом малого параметра. Уравнение нулевого приближения (2.2.16) принимает форму

$$\dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = \omega(x_0). \quad (2.6.7)$$

Первое из соотношений (7) показывает, что $x_0 = \text{const}$, а это значит, что и $\omega(x_0) = \text{const}$. Поэтому y_0 — линейная функция времени:

$$y_0 = \omega(x_0)(t - T) + \eta \quad (\eta = \text{const}). \quad (2.6.8)$$

Система уравнений для m -приближения (2.2.18) записывается так:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= P_m(x_0, y_0, \dots, x_{m-1}, y_{m-1}), \\ \dot{y}_m &= \frac{\partial \omega(x_0)}{\partial x_0} x_m + \tilde{P}_m(x_0, y_0, \dots, x_{m-1}, y_{m-1}), \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

где P_m, \tilde{P}_m образуют вектор P_m из (2.2.18). Первое из уравнений (9) интегрируется сразу, поскольку справа стоит уже известная функция времени. Теперь и \dot{y}_m становится известной функцией времени, так что

$$\begin{aligned} x_m &= c_m + \int P_m(x_0, y_0, \dots, x_{m-1}, y_{m-1}) dt, \\ y_m &= \tilde{c}_m + \frac{\partial \omega(x_0)}{\partial x_0} \int x_m dt + \int \tilde{P}_m(x_0, y_0, \dots, x_{m-1}, y_{m-1}) dt. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Относительно определения постоянных интегрирования см. § 2.4.

В частности, для первого приближения

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + \int f_1(x_0, y_0) dt, \\ y_1 &= \tilde{c}_1 + \frac{\partial \omega(x_0)}{\partial x} \int x_1 dt + \int g_1(x_0, y_0) dt. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Обратим внимание на то, что быстрые переменные определяются двойной квадратурой, так как

$$\int x_1 d\tilde{t} = C_1(\tilde{t}-T) + \int \left[\int f_1(x_0, y_0) d\tilde{t} \right] d\tilde{t} + \text{const},$$

что лишний раз подчеркивает качественное различие медленных и быстрых переменных.

Для второго приближения

$$x_2 = C_2 + \int \left\{ f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y} y_1 \right\} d\tilde{t},$$

$$y_2 = \tilde{C}_2 + \frac{\partial \omega}{\partial x} \int x_2 d\tilde{t} + \quad (2.6.12)$$

$$+ \int \left\{ g_2 + \frac{\partial g_1}{\partial x} x_1 + \frac{\partial g_1}{\partial y} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial x} \circ x_1 \circ x_1 \right\} d\tilde{t}.$$

Здесь p - компонента последнего вектора определяется как

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_1} \frac{\partial^2 \omega^p}{\partial x^i \partial x^j} x_1^i x_1^j. \quad (2.6.13)$$

Для третьего приближения мы выпишем аналог (11), (12) в менее громоздкой дифференциальной форме:

$$\dot{x}_3 = f_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y} y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x} x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y} y_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial x} \circ x_1 \circ x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial y} \circ y_1 \circ y_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \circ x_1 \circ y_1, \quad (2.6.14)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{\partial \omega}{\partial x} x_3 + g_3 + \frac{\partial g_2}{\partial x} x_1 + \frac{\partial g_2}{\partial y} y_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x} x_2 + \frac{\partial g_1}{\partial y} y_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial x} \circ x_1 \circ x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial y} \circ y_1 \circ y_1 + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y} \circ x_1 \circ y_1 +$$

$$+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial x} \circ x_1 \circ x_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial x \partial x} \circ x_1 \circ x_1 \circ x_1.$$

Здесь аргументами f_i , $\frac{\partial g_i}{\partial y}$, $\frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial x \partial x}$, ... служат x_0, y_0 . Формулы (11), (12), (14) представляют собой фактически векторно-матричную запись (2.2.18), (2.2.19).

В небесной механике и вообще в теории колебаний переменные второй группы имеют смысл углов. Поэтому f, g 2π -периодичны по каждой компоненте вектора y . Наложим поэтому на f, g дополнительное условие разложимости в ряд вида

$$f_k^p = \sum_{|n| \geq 0} F \cos(ny + \varphi), \quad (2.6.15)$$

$$g_k^p = \sum_{|n| \geq 0} G \cos(ny + \psi).$$

Здесь $ny = n_1 y^1 + \dots + n_{N_2} y^{N_2}$ — скалярное произведение целочисленного вектора n на y ; $F = F_{kn}^p(x)$, $G = G_{kn}^p(x)$ — функции от x ; $\varphi = \varphi_{kn}^p$, $\psi = \psi_{kn}^p$ — постоянные. На практике в (15) суммируют по всем целым n_2, \dots, n_{N_2} и неотрицательным n_1 . В теоретических рассуждениях удобнее суммировать по всем значкам от $-\infty$ до ∞ , налагая на F, φ и G, ψ связь

$$F_{k,-n}^p = F_{k,n}^p, \quad \varphi_{k,-n}^p = -\varphi_{k,n}^p; \quad G_{k,-n}^p = G_{k,n}^p, \quad \psi_{k,-n}^p = -\psi_{k,n}^p.$$

Будем считать все функции f_k^p, g_k^p аналитическими на множестве, являющемся прямым произведением некоторой области изменения x и полиполосы $|\operatorname{Im} y^r| \leq \rho$. Тогда коэффициенты рядов (15) убывают в геометрической прогрессии знаменателя $e^{-\rho}$.

Согласно первой из формул (II)

$$x_1 = C_1 + \sum_{|n| \geq 0} F_{1n}(x_0) \int_T^t \cos[ny_0 + \varphi_{1n}] dt, \quad (2.6.16)$$

где почленное интегрирование допустимо в силу только что принятого допущения. Запись (16) не вполне корректна. Для каждой компоненты вектора x_1 мы должны выполнить под знаком косинуса сложение с соответствующей компонентой вектора φ_{1n} . Поэтому строгая запись требует перехода к компонентам или скалярного умножения φ_{1n} на вектор $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ с единицей на месте номера компоненты. Но мы надеемся, что запись (16) не может привести к недоразумениям.

Фиксируем константу x_0 и разбиваем множество индексов на два подмножества:

$$I_0 = \{n: n\omega(x_0) = 0\}, \quad I_1 = \{n: n\omega(x_0) \neq 0\}.$$

Под знаком косинуса стоит величина $n\omega(x_0)(t-T) + n\eta + \varphi_{1n}$, постоянная при $n \in I_0$, так что

$$x_1 = C_1 + (t-T) \sum_{n \in I_0} F_{1n}(x_0) \cos(ny_0 + \varphi_{1n}) + \\ + \sum_{n \in I_1} \frac{F_{1n}(x_0)}{n\omega(x_0)} [\cos(ny_0 + \varphi_{1n} - \pi/2) - \cos(n\eta + \varphi_{1n} - \pi/2)]. \quad (2.6.17)$$

Теперь выпишем вторую из формул (11):

$$y_1 = \tilde{C}_1 + \frac{\partial\omega(x_0)}{\partial x} \int_T^t \left\{ C_1 + (t-T) \sum_{n \in I_0} F_{1n}(x_0) \cos(ny_0 + \varphi_{1n}) + \right. \\ \left. + \sum_{n \in I_1} \frac{F_{1n}(x_0)}{n\omega(x_0)} [\cos(ny_0 + \varphi_{1n} - \pi/2) - \cos(n\eta + \varphi_{1n} - \pi/2)] \right\} dt + \\ + \sum_{n \in I_0 \cup I_1} G_{1n}(x_0) \int_T^t \cos(ny_0 + \varphi_{1n}) dt.$$

Выполним интегрирование

$$y_1 = \tilde{C}_1 + (t-T) \frac{\partial\omega(x_0)}{\partial x} C_1 + \\ + \frac{(t-T)^2}{2} \frac{\partial\omega(x_0)}{\partial x} \sum_{n \in I_0} F_{1n}(x_0) \cos(ny_0 + \varphi_{1n}) + \\ + (t-T) \sum_{n \in I_0} G_{1n}(x_0) \cos(ny_0 + \varphi_{1n}) + \\ + \sum_{n \in I_1} \left\{ \frac{\partial\omega(x_0)}{\partial x} \frac{F_{1n}(x_0)}{n\omega(x_0)} \left[\frac{1}{n\omega(x_0)} (\cos(ny_0 + \varphi_{1n} - \pi) - \cos(n\eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \varphi_{1n} - \pi)) - (t-T) \cos(n\eta + \varphi_{1n} - \pi/2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{G_{1n}}{n\omega(x_0)} (\cos(ny_0 + \varphi_{1n} - \pi/2) - \cos(n\eta + \varphi_{1n} - \pi/2)) \right\}.$$

(2.6.18)

Итак, в первом приближении решение представлено в виде суммы членов вида

$$A(\dot{t} - T)^p \cos^r(ny_0 + \beta). \quad (2.6.19)$$

Здесь $r = 0, 1$; $p = 0, 1$ для x_1 , $p = 0, 1, 2$ для y_1 ; $p = 1, 2$ только при $r = 0$.

Теорема 2.6.1. В k -приближении решение представляется в виде суммы членов (19), где $r = 0, 1$; $p = 0, 1, \dots, 2k - 1$ для x_k , $p = 0, 1, \dots, 2k$ для y_k ; $p = 2k, 2k - 1$ только при $r = 0$.

Для $k=1$ утверждение доказано. Пусть оно верно до индекса k включительно. В силу (2.2.14), (2.2.15) \dot{x}_{k+1} будет содержать линейные комбинации с периодическими коэффициентами произведений $x_\alpha^i x_\beta^j \dots y_\gamma^{N_1} y_\delta^{N_1}$, сумма нижних значков которых не превосходит k . Но показатель p , с которым входит $(\dot{t} - T)^p$ в x_α^i, \dots , равен самое большее удвоенному нижнему индексу по индуктивному предположению. Поэтому максимально возможное p для \dot{x}_{k+1} равно $2k$. Произведение косинусов есть снова косинус подходящего аргумента, так что для \dot{x}_{k+1} имеются только члены (19) при $p \leq 2k$. Интегрирование может добавить в показатель p единицу только при $r = 0$, или, что то же самое, $ny_0 = n\eta$.

Производная \dot{y}_{k+1} , по (9) имеет тот же вид, что и для \dot{x}_{k+1} с добавлением слагаемого $(\partial\omega(x_0)/\partial x_0)x_{k+1}$. При $r=1$, $ny_0 \neq \text{const}$ интегрирование последнего не повышает степени векового члена. В противном случае она повышается на единицу. Теорема доказана полностью.

Законность почленного интегрирования доказана нами на первом шаге. Интегрирование не нарушает равномерной сходимости рядов на любом конечном промежутке времени, поскольку

$$\int_T^{\dot{t}} h_n(\dot{t}) d\dot{t} \leq (\dot{t} - T) \max_{\xi \in [\dot{t}, T]} |h_n(\xi)|,$$

а h_n по предположению убывает со скоростью геометрической прогрессии. Предостережем читателя, что не всегда ряд разностей можно представлять как разность рядов. Например, в (17) на-
прашивается преобразование

$$\sum \frac{F_{1n}(x_0)}{n\omega(x_0)} [\sin(ny_0 + \varphi_{1n}) - \sin(n\eta + \varphi_{1n})] =$$

$$= \sum \frac{F_{1n}(x_0)}{n\omega(x_0)} \sin(ny_0 + \varphi_{1n}) - \sum \frac{F_{1n}(x_0)}{n\omega(x_0)} \sin(n\eta + \varphi_{1n}). \quad (2.6.20)$$

Последняя сумма постоянна и может быть включена в C_1 , в результате происходит значительное сокращение числа слагаемых. Однако формула (20) в общем случае не верна: справа могут стоять расходящиеся ряды, как это имеет место, например, для ряда $\sum (a_n - b_n)$ при $a_n = b_n = 1$. Здесь $\sum a_n = \infty$, $\sum b_n = \infty$. Тем не менее выгода от сокращения числа слагаемых и упрощения их вида столь велика, что на практике почти всегда интегрируют косинусы не почленно (т.е. в одних и тех же пределах от T до \bar{t} для каждого слагаемого), а так, чтобы среднее значение результата обращалось в нуль:

$$\int \cos(ny_0 + \varphi) d\bar{t} = (1/(n\omega(x_0)) \cos(ny_0 + \varphi - \pi/2) \quad (n \in I_1).$$

Более общо:

$$\int (\bar{t} - T)^p \cos(ny_0 + \varphi) d\bar{t} = \sum_{r=0}^p \frac{(-1)^r p! (\bar{t} - T)^{p-r}}{(p-r)! (n\omega)^{r+1}} \cos(ny_0 + \varphi - (r+1)\frac{\pi}{2})$$

$$(n \in I_1), \quad (2.6.21)$$

$$\int (\bar{t} - T)^p d\bar{t} = \frac{1}{p+1} (\bar{t} - T)^{p+1}.$$

Такой прием кажется незаконным только на первый взгляд. Ведь вычисления мы проводим лишь с конечным числом членов, для которых, разумеется, порядок группировки слагаемых не играет роли. И всегда можно считать, что отброшенные члены были бы получены законным приемом почленного интегрирования. Вычислительные трудности возникают только при очень малом значении $n\omega(x_0)$. Соответствующее слагаемое в (20) слева на ограниченном промежутке времени невелико (не превосходит \bar{t}):

$$\frac{1}{n\omega} [\sin(ny_0 + \varphi_{1n}) - \sin(n\eta + \varphi_{1n})] =$$

$$= \frac{2}{n\omega(x_0)} \sin \frac{n\omega(x_0)\bar{t}}{2} \cos \left(\frac{n\omega(x_0)\bar{t}}{2} + n\eta + \varphi_{1n} \right),$$

тогда как каждый член в отдельности

$$\frac{1}{n\omega(x_0)} \sin(ny_0 + \varphi_{1n}) \quad \text{и} \quad \frac{1}{n\omega(x_0)} \sin(n\eta + \varphi_{1n})$$

может быть сколь угодно велик при малых $n\omega(x_0)$.

Предположим теперь, что f_1 не содержит слагаемых, приводящих к вековым членам, т.е. $F_{1n}(x_0) = 0$ при $n \in I_0$. Например, это имеет место, если f_1 разлагается в ряд по синусам кратных y , а частоты $\omega^1(x_0), \dots, \omega^{N_1}(x_0)$ линейно-независимы над полем рациональных чисел, т.е. $n\omega(x_0) = 0$ только при $n = 0$. Интегрируем по формулам (21). В этих условиях максимальная степень p , с которой время входит вне знака тригонометрической функции, существенно уменьшается.

Теорема 2.6.2. При вышеприведенных предположениях в формуле (19) для возмущений порядка k показатель p принимает значения $p = 0, 1, \dots, k-1$ для x_k ; $p = 0, 1, \dots, k$ для y_k , причем $p = k$ только при $r = 0$.

Действительно, вместо (17), (18) имеем теперь

$$x_1 = C_1 + \sum_{n \in I_1} \frac{F_{1n}(x_0)}{n\omega(x_0)} \cos(ny_0 + \varphi_{1n} - \frac{\pi}{2}),$$

$$y_1 = \tilde{c}_1 + (\tilde{t} - T) \left\{ \frac{\partial \omega(x_0)}{\partial x} C_1 + \sum_{n \in I_0} G_{1n}(x_0) \cos(ny_0 + \varphi_{1n}) \right\} +$$

$$+ \sum_{n \in I_1} \left\{ \frac{\partial \omega(x_0)}{\partial x} \frac{F_{1n}(x_0)}{(n\omega(x_0))^2} \cos(ny_0 + \varphi_{1n} - \pi) + \right. \quad (2.6.22)$$

$$\left. + \frac{G_{1n}(x_0)}{n\omega(x_0)} \cos(ny_0 + \varphi_{1n} - \frac{\pi}{2}) \right\},$$

что доказывает наше утверждение при $k = 1$. Далее действуем по индукции. В силу (2.2.14), (2.2.15) \dot{x}_{k+1} будет содержать линейные комбинации произведений $x_\alpha^1 \dots y_\beta^{N_1}$, сумма нижних индексов которых не превосходит k . Но показатель p , с которым входит $(\tilde{t} - T)^p$ в x_α^1, \dots , равен самое большое нижнему индексу по индуктивному предположению. Поэтому максимально возможное p для \dot{x}_{k+1} равно k . Оно может равняться k только тогда, когда в произведении $x_\alpha^1 \dots y_\beta^{N_1}$ отсутствуют иксы, а игреки входят с максимально возможным показателем. По предположению индукции при этом $r = 0$, т.е. произведение имеет вид

$A(\dot{t} - T)^k$ + члены с меньшими степенями $(\dot{t} - T)$. (2.6.23)

Согласно (2.2.14) наше произведение должно еще получить множителем частную производную по y от f_1 . Поскольку $F_{1n}(x_0) = 0$ при $n \in I_0$, то индексы всех отличных от нуля коэффициентов Фурье этой частной производной принадлежат множеству I_1 . В результате \dot{x}_{k+1} содержат члены (19) при $p = k$, $r = 1$ плюс члены с $p < k$. Интегрируя, находим, что и x_{k+1} содержит члены с $p \leq k$.

Теперь рассмотрим \dot{y}_{k+1} . Члены типа (23) умножаются теперь на частную производную по y от g_1 . Поскольку $G_{1n}(x_0)$ не обязательно равно нулю при $n \in I_0$, интегрирование может повысить степень p до $(k + 1)$, при этом окажется $r = 0$. Остались еще члены типа

$$\frac{\partial^s \omega}{\partial x^s} \circ x_{\alpha_1} \circ x_{\alpha_2} \circ \dots \circ x_{\alpha_s}$$

при $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = k + 1$. Наивысшая степень $p = k$ по доказанному получается при $s = 1$, $\alpha_1 = k + 1$. При интегрировании степень повышается до $p = k + 1$ лишь для чисто векового члена $r = 0$. Утверждение доказано. Оно представляет собой так называемую "теорему Пуанкаре о ранге" [12] и включает в себя теорему Лапласа - Лагранжа о неизменяемости больших полуосей планетных орбит в первом приближении [12]. Отметим теперь, что наши условия несколько отличаются от условий Пуанкаре. С одной стороны, они менее ограничительны: не требуется каноничности, а несоизмеримость частот заменена условием обращения в нуль соответствующих коэффициентов лишь у функции f_1 . С другой стороны, здесь рассмотрен лишь невырожденный случай, когда медленные переменные ведут себя как большие полуоси и нет медленных переменных типа эксцентриситетов и узлов, имеющих вековой уход в первом порядке (для них отличен от нуля даже коэффициент F_{10} при нулевом векторе n).

Вырождения почти всегда присутствуют в задачах небесной механики, и обычно это учитывают с самого начала. Но нам кажется, что прежде следует рассматривать более простой невырожденный случай и лишь затем переходить к более сложному, которым мы сейчас займемся. Пусть вектор частот зависит лишь от части медленных переменных. Оставим для них обозначение x .

Остальные обозначим через z . Система (2) заменится, таким образом, на

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu f(x, z, y, \mu), \\ \dot{z} &= \mu h(x, z, y, \mu), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \mu g(x, y, z, \mu).\end{aligned}\tag{2.6.24}$$

Периодичность мы требуем по-прежнему лишь по быстрым переменным, поэтому (15) переходит в

$$\begin{aligned}f_k^p &= \sum_{|n| \geq 0} F(x, z) \cos(ny + \varphi), \\ h_k^p &= \sum_{|n| \geq 0} H(x, z) \cos(ny + \varphi'), \\ g_k^p &= \sum_{|n| \geq 0} G(x, z) \cos(ny + \varphi).\end{aligned}\tag{2.6.25}$$

Теорема 2.6.3. Если $F_{1n}(x_0, z) = 0$ при $n \in I_0$, то в формуле (19) для возмущений порядка k показатель p принимает значения $p = 0, 1, \dots, k-1$ для x_k ; $p = 0, 1, \dots, k$ для z_k, y_k , причем $p=k$ только при $r=0$.

Формула (22) для x_1, y_1 остается в силе, только F_{1n}, G_{1n} будет зависеть, кроме x_0 , еще и от z_0 . Аналогичная формула верна и для z_1 , что доказывает теорему при $k=1$. Далее действуем по индукции. Для \dot{x}_{k+1} максимально возможное p , как и ранее равно k . Оно порождается членами $x_\alpha^q \dots z_\beta^r \dots y_\gamma^s$, в которых отсутствуют икссы, а игреки и зеты входят с максимально возможным показателем, что приводит к (23). Согласно (2.2.14) сюда следует добавить множителем еще частную производную от f_1 , не содержащую дифференцирований по x . Поскольку $F_{1n}(x_0, z) = 0$ при $n \in I_0$, то индексы всех отличных от нуля коэффициентов Фурье этой частной производной принадлежат множеству I_1 . В результате \dot{x}_{k+1} содержит члены (19) при $p=k, r=1$ плюс члены с $p < k$. Интегрируя, находим, что и x_{k+1} содержит члены с $p < k$.

Дальше можно дословно повторить завершающую часть доказательства теоремы 2.

Пример 2.6.1. Уравнение маятника.

$$\ddot{y} = \mu \sin y. \quad (2.6.26)$$

Полагая $\dot{y} = x$, приведем (26) к виду (2)

$$\dot{x} = \mu \sin y, \quad \dot{y} = x. \quad (2.6.27)$$

Здесь x, y - скаляры, $f(x, y) = f_1(x, y) = \sin y$, $\omega(x) = x$, $g(x, y) = 0$. Уравнения невозмущенного движения

$$\dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = x_0$$

имеют решением

$$x_0 = X, \quad y_0 = Y + X(t - T) \quad (2.6.28)$$

(для простоты считаем начальные данные T, X, Y не зависящими от μ).

Составим уравнения следующих приближений согласно (11), (12):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin y_0, & \dot{x}_2 &= y_1 \cos y_0, \\ \dot{y}_1 &= x_1, & \dot{y}_2 &= x_2. \end{aligned} \quad (2.6.29)$$

Форма решения (29) зависит от того, обращается или не обращается в нуль начальное значение X . Пусть $X \neq 0$. Тогда нулевое приближение для быстрой переменной можно представить в виде $y_0 = X(t - \tilde{T})$, где $\tilde{T} = T - Y/X$. Сдвинув начало отсчета времени на \tilde{T} , запишем вместо (28)

$$\begin{aligned} x_0 &= X \quad (X \neq 0), \\ y_0 &= Xt. \end{aligned} \quad (2.6.30)$$

Теперь интегрирование (29) (с нулевыми начальными данными при $t = Y/X$) дает

$$\begin{aligned} Xx_1 &= \cos Y - \cos Xt, \\ X^2y_1 &= Xt \cos Y + \sin Y - \sin Xt, \\ X^3x_2 &= (X \cos Y)t \sin Xt + \cos(Xt - Y) + \frac{1}{4} \cos 2Xt - \\ &- \left(1 + \frac{Y}{2} \sin 2Y + \frac{1}{4} \cos 2Y\right), \end{aligned} \quad (2.6.31)$$

$$X^4 y_2 = -X \dot{z} (\cos Y \cos X \dot{z} + 1 + \frac{Y}{2} \sin 2Y + \frac{1}{4} \cos 2Y) + \\ + 2 \cos Y \sin X \dot{z} - \sin Y \cos X \dot{z} + \frac{1}{8} \sin 2X \dot{z} + \\ + Y (\frac{Y}{2} \sin 2Y + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \cos 2Y) - \frac{5}{8} \sin 2Y$$

Если же $X = 0$, то вместо (31) следует писать

$$x_1 = \dot{z} \sin Y, \quad x_2 = (\dot{z}^3/12) \sin 2Y, \\ y_1 = (\dot{z}^2/2) \sin Y, \quad y_2 = (\dot{z}^4/48) \sin 2Y. \quad (2.6.32)$$

Пример 2.6.2. Уравнение

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \mu \omega^2 (z - \sin z) \quad (\omega = \text{const}) \quad (2.6.33)$$

при $\mu = 1$ также описывает маятник предыдущего примера. Однако порождающие решения существенно различны. В первом примере — движение в бессиловом поле (бесконечно длинный маятник). Во втором — движение с постоянным периодом (изохронный маятник).

Замена $\dot{z} = x$ на этот раз не приводит уравнение к виду (2). Предварительно надо проинтегрировать уравнение (33) при $\mu = 0$ и взять за новые переменные амплитуду и фазу колебаний, т.е. замену переменных нужно взять в виде

$$z = x \cos y, \quad \dot{z} = -x \omega \sin y. \quad (2.6.34)$$

Ясно, что уравнения для новых переменных x, y примут нужную форму, поскольку при $\mu = 0$ амплитуда x постоянна, а фаза линейна. Получение возмущенных уравнений может быть сделано двумя способами.

1-й способ. Дифференцируем оба соотношения (34) и приравниваем результат соответственно правой части второго соотношения (34) и правой части (33) минус $\omega^2 z$:

$$\dot{x} \cos y - x \sin y \dot{y} = -\omega x \sin y, \\ -\dot{x} \sin y - x \cos y \dot{y} = -\omega x \cos y + (\mu/\omega) \varphi,$$

где через $\mu \varphi$ обозначена правая часть (33). Найденные соотношения рассматриваем как систему линейных алгебраических уравнений относительно \dot{x}, \dot{y} . Решая ее, получаем

$$\dot{x} = -(\mu/\omega) \varphi \sin y = -\mu x \omega \sin y [\cos y - (1/x) \sin(x \cos y)],$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \omega - (\mu/(\omega x)) \varphi \cos y = \\ &= \omega - \mu \omega \cos y [\cos y - (1/x) \sin(x \cos y)]. \end{aligned} \quad (2.6.35)$$

2-й способ. Разрешим (34) относительно новых переменных

$$x^2 = z^2 + \dot{z}^2/\omega^2, \quad \operatorname{tg} y = -\dot{z}/(z\omega). \quad (2.6.36)$$

Теперь дифференцируем (36)

$$x\dot{x} = z\dot{z} + \dot{z}\dot{z}/\omega^2, \quad \dot{y}/(\cos^2 y) = (\dot{z}^2 - z\ddot{z})/(z^2\omega).$$

Подставим вместо \ddot{z} его выражение по (33) и заменим в нем z и \dot{z} согласно (34), что опять приведет к (35).

Говоря обычным языком небесной механики, в первом способе дифференцируются формулы (34), дающие эфемериду z, \dot{z} через оскулирующие элементы x, y , а затем решением линейной алгебраической системы получаются уравнения Эйлера для оскулирующих элементов. Во втором способе сначала получаются формулы (36) определения орбиты x, y по положению и скорости z, \dot{z} . Дифференцирование их приводит с использованием уравнений движения к искомым уравнениям Эйлера для оскулирующих элементов.

Соответствующие (35) уравнения невозмущенного движения

$$\dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = \omega$$

имеют решением

$$x_0 = \xi, \quad y_0 = \eta + \omega t, \quad (2.6.37)$$

где ξ, η — произвольные постоянные.

Составим согласно (II) уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega \xi \sin y_0 [\cos y_0 - (1/\xi) \sin(\xi \cos y_0)], \\ \dot{y}_1 &= -\omega \cos y_0 [\cos y_0 - (1/\xi) \sin(\xi \cos y_0)]. \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

Поскольку $-\omega \xi \sin y_0 dt = d(\xi \cos y_0)$ первое из уравнений (38) интегрируется в элементарных функциях. Квадратура для второго уравнения неэлементарна. Ее следует брать либо численно, либо с помощью разложения в ряд Фурье:

$$\sin(\xi \cos y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k J_{2k+1}(\xi) \cos(2k+1)y_0,$$

где $J_k(\xi)$ - функции Бесселя. Вот явное выражение решения первого приближения:

$$x_1 = \frac{\xi}{4} \cos 2y_0 + \frac{1}{\xi} \cos(\xi \cos y_0) + C_1, \quad (2.6.39)$$

$$y_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\xi} J_1(\xi)\right)t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{J_1(\xi) - J_3(\xi)}{\xi}\right) \sin 2y_0 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k\xi} (J_{2k+1}(\xi) - J_{2k-1}(\xi)) \sin 2ky_0 + \tilde{C}_1.$$

Постоянными C_1, \tilde{C}_1 , как показано в § 2.4, мы можем распорядиться по своему усмотрению. Есть два разумных способа определения постоянных. Во-первых, их можно выбрать из условия $x_1 = y_1 = 0$ в начальную эпоху. Во-вторых, - из условия обращения в нуль средних значений периодической части x_1, y_1 :

$$\tilde{C}_1 = 0, \quad C_1 = -\frac{1}{2\pi\xi} \int_0^{2\pi} \cos(\xi \cos y) dy = -\frac{1}{\xi} J_0(\xi).$$

Пример 2.6.3. Уравнение Дuffинга

$$\ddot{z} + (\omega^1)^2 z = \mu(-Az^3 + B \cos \omega^2 t) \quad (2.6.40)$$

заменой переменных

$$z = x \cos y^1, \quad \dot{z} = -x\omega^1 \sin y^1, \quad \omega^2 t = y^2 \quad (2.6.41)$$

приводится к виду

$$\dot{x} = (\mu/\omega^1) \sin y^1 (Ax^3 \cos^3 y^1 - B \cos y^2),$$

$$\dot{y}^1 = \omega^1 + \frac{\mu}{\omega^1 x} \cos y^1 (Ax^3 \cos^3 y^1 - B \cos y^2),$$

$$\dot{y}^2 = \omega^2$$

или

$$\dot{x} = \frac{\mu}{8\omega^1} \left[2Ax^3 \sin 2y^1 + Ax^3 \sin 4y^1 - \right.$$

$$\left. - 4B \sin(y^1 - y^2) - 4B \sin(y^1 + y^2) \right],$$

$$\dot{y}^1 = \omega^1 + \frac{\mu}{8\omega^1} \left[3Ax^2 + 4Ax^2 \cos 2y^1 + Ax^2 \cos 4y^1 - \right. \\ \left. - \frac{4B}{x} \cos(y^1 - y^2) - \frac{4B}{x} \cos(y^1 + y^2) \right], \quad (2.6.42)$$

$$\dot{y}^2 = \omega^2.$$

Невозмущенное движение определяется формулами

$$x_0 = \xi, \quad y_0^1 = \omega^1 t + \eta, \quad y_0^2 = \omega^2 t. \quad (2.6.43)$$

Поскольку $y^2 = y_0^2$, то $y_1^2 = y_2^2 = \dots = 0$ и можно не выписывать уравнений для y_k^2 . Уравнения первого приближения

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{8\omega^1} \left[2A\xi^3 \sin 2y_0^1 + A\xi^3 \sin 4y_0^1 - \right. \\ \left. - 4B \sin(y_0^1 - y_0^2) - 4B \sin(y_0^1 + y_0^2) \right],$$

$$\dot{y}_1^1 = \frac{1}{8\omega^1} \left[3A\xi^2 + 4A\xi^2 \cos 2y_0^1 + A\xi^2 \cos 4y_0^1 - \right. \\ \left. - \frac{4B}{\xi} \cos(y_0^1 - y_0^2) - \frac{4B}{\xi} \cos(y_0^1 + y_0^2) \right]$$

имеют решением

$$x_1 = \frac{1}{8\omega^1} \left[-\frac{A\xi^3}{\omega^1} \cos 2y_0^1 - \frac{A\xi^3}{4\omega^1} \cos 4y_0^1 + \right. \\ \left. + \frac{4B}{\omega^1 - \omega^2} \cos(y_0^1 - y_0^2) + \frac{4B}{\omega^1 + \omega^2} \cos(y_0^1 + y_0^2) \right] + C_1, \quad (2.6.44)$$

$$y_1^1 = \frac{1}{8\omega^1} \left[3A\xi^2 t + \frac{2A\xi^2}{\omega^1} \sin 2y_0 + \frac{A\xi^2}{4\omega^1} \sin 4y_0^1 - \right. \\ \left. - \frac{4B}{\xi(\omega^1 - \omega^2)} \sin(y_0^1 - y_0^2) - \frac{4B}{\xi(\omega^1 + \omega^2)} \sin(y_0^1 + y_0^2) \right] + \tilde{C}_1.$$

Уравнения второго приближения имеют вид

$$\dot{x}_2 = \frac{3A\xi^2 t}{16(\omega^1)^2} \left[A\xi^3 \cos 2y_0^1 + A\xi^3 \cos 4y_0^1 - \right. \\ \left. - B \cos(y_0^1 - y_0^2) - B \cos(y_0^1 + y_0^2) \right] + \dots,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2^1 = & \frac{3A\xi\dot{t}}{16(\omega^1)^2} \left[-2A\xi^3 \sin 2y_0^1 - A\xi^3 \sin 4y_0^1 + \right. \\ & \left. + B \sin (y_0^1 - y_0^2) + B \sin (y_0^1 + y_0^2) \right] - \\ & - \frac{51A^2\xi^4}{256(\omega^1)^3} + \frac{3A\xi}{4\omega^1} C_1 + \dots, \end{aligned}$$

где точками обозначена сумма периодических членов с нулевым средним. Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} x_2 = & \frac{3A\xi^2\dot{t}}{16(\omega^1)^2} \left[\frac{A\xi^3}{2\omega^1} \sin 2y_0^1 + \frac{A\xi^3}{4\omega^1} \sin 4y_0^1 - \right. \\ & \left. - \frac{B}{\omega^1 - \omega^2} \sin (y_0^1 - y_0^2) - \frac{B}{\omega^1 + \omega^2} \sin (y_0^1 + y_0^2) \right] + \dots, \\ y_2^1 = & \frac{3A\xi\dot{t}}{16(\omega^1)^2} \left[\frac{A\xi^3}{\omega^1} \cos 2y_0^1 + \frac{A\xi^3}{4\omega^1} \cos 4y_0^1 - \right. \\ & \left. - \frac{B}{\omega^1 - \omega^2} \cos (y_0^1 - y_0^2) - \frac{B}{\omega^1 + \omega^2} \cos (y_0^1 + y_0^2) \right] + \\ & + \left[-\frac{51A^2\xi^4}{256(\omega^1)^3} + \frac{3A\xi}{4\omega^1} C_1 \right] \dot{t} + \dots, \end{aligned} \quad (2.6.45)$$

где точками обозначена совокупность периодических слагаемых.

Пример 2.6.4. Уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \mu (R^2 - z^2) \dot{z} \quad (2.6.46)$$

заменой переменных (34) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (\mu x/8) \{ (4R^2 - x^2) - 4R^2 \cos 2y + x^2 \cos 4y \}, \\ \dot{y} = & \omega + (\mu/8) \{ (4R^2 - 2x^2) \sin 2y - x^2 \sin 4y \}. \end{aligned} \quad (2.6.47)$$

Нулевое приближение по-прежнему дается формулами (37). Уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & (\xi/8) \{ (4R^2 - \xi^2) - 4R^2 \cos 2y_0 + \xi^2 \cos 4y_0 \}, \\ \dot{y}_1 = & (1/8) \{ (4R^2 - 2\xi^2) \sin 2y_0 - \xi^2 \sin 4y_0 \} \end{aligned}$$

имеют решением

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (\xi/(8\omega)) \left\{ (4R^2 - \xi^2)\omega\bar{t} - 2R^2 \sin 2y_0 + (\xi^2/4)\sin 4y_0 \right\} + C_1, \\
 y_1 &= (1/(8\omega)) \left\{ -(2R^2 - \xi^2)\cos 2y_0 + (\xi^2/4)\cos 4y_0 \right\} + \tilde{C}_1.
 \end{aligned}
 \tag{2.6.48}$$

Уравнения второго приближения имеют вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= \frac{\xi(4R^2 - \xi^2)\bar{t}}{64} \left\{ (4R^2 - 3\xi^2) - 4R^2 \cos 2y_0 + 3\xi^2 \cos 4y_0 \right\} + \\
 &\quad + \frac{C_1}{8} (4R^2 - 3\xi^2) + \dots, \\
 \dot{y}_2 &= -\frac{\xi^2(4R^2 - \xi^2)\bar{t}}{32} (2 \sin 2y_0 + \sin 4y_0) - \\
 &\quad - \frac{1}{256\omega} (32R^4 - 48\xi^2 R^2 + 11\xi^4) + \dots,
 \end{aligned}$$

где точками обозначена сумма периодических членов с нулевым средним. Интегрируя, находим

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{\xi(4R^2 - \xi^2)(4R^2 - 3\xi^2)}{128} \bar{t}^2 + \frac{C_1(4R^2 - 3\xi^2)}{8} \bar{t} + \\
 &\quad + \frac{\xi(4R^2 - \xi^2)\bar{t}}{256\omega} (-8R^2 \sin 2y_0 + 3\xi^2 \sin 4y_0) + \dots, \\
 y_2 &= -\frac{\bar{t}}{256\omega} (32R^4 - 48R^2\xi^2 + 11\xi^4) + \\
 &\quad + \frac{\xi^2(4R^2 - \xi^2)\bar{t}}{128\omega} (4 \cos 2y_0 + \cos 4y_0) + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{2.6.49}$$

где точками обозначена совокупность периодических слагаемых.

Мы видим, что неконсервативность уравнения Ван-дер-Поля (наличие \dot{z} в правой части (46)) приводит к поведению последовательных приближений x_k , y_k , отличному от обычного в небесной механике и встретившемуся в предыдущих примерах. Здесь x_k уже обладает вековым членом с $p = k$, так что утверждение теоремы 3 не выполняется.

Приведем теперь два примера, показывающие неулучшаемость утверждений теорем 1, 2, 3 относительно максимальной степени вековых членов.

Пример 2.6.5:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= \mu, & \dot{x}^2 &= \mu \cos y^2 + \mu \cos(y^2 - y^1), \\ \dot{y}^1 &= 1, & \dot{y}^2 &= 1 + 2x^1, & \dot{y}^3 &= x^2. \end{aligned} \quad (2.6.50)$$

Уравнения для x^1, y^1, y^2 легко решаются независимо от остальных

$$x^1 = \mu t + \xi^1, \quad y^1 = t + \eta^1, \quad y^2 = (1 + 2\xi^1)t + \mu t^2 + \eta^2. \quad (2.6.51)$$

Считаем ξ^n, η^n - не зависящими от μ , что равносильно требованию $x_k = y_k = 0$ при $t = 0$. Подставим (51) в уравнение для x^2 и разложим правую часть по степеням μ :

$$\dot{x}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \frac{t^{2(k-1)}}{(k-1)!} \left\{ \cos(y_0^2 + (k-1)\pi/2) + \cos(y_0^2 - y_0^1 + (k-1)\pi/2) \right\}.$$

При $\xi^1 = 0$ интегрирование по (21) приводит к

$$\begin{aligned} x_k^2 &= \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!} \cos(\eta^2 - \eta^1 + (k-1)\pi/2) + C_k^2 + \\ &+ \frac{(2k-2)!}{(k-1)!} \sum_{r=0}^{2k-2} \frac{(-1)^r t^{2k-2-r}}{(2k-2-r)!} \cos(y_0^2 + (k-r)\pi/2). \end{aligned} \quad (2.6.52)$$

Для полного решения осталось только проинтегрировать (52):

$$\begin{aligned} y_k^3 &= \frac{t^{2k}}{2k(2k-1)(k-1)!} \cos(\eta^2 - \eta^1 + (k-1)\pi/2) + \tilde{C}_k^3 + C_k^2 t + \\ &+ \frac{(2k-2)!}{(k-1)!} \sum_{r=0}^{2k-2} \sum_{s=0}^{2k-2-r} \frac{(-1)^{r+s} t^{2k-2-r-s}}{(2k-2-r-s)!} \cos(y_0^2 + (k-r-s-1)\pi/2). \end{aligned} \quad (2.6.53)$$

Мы видим, что максимально возможные по теореме I степени $p = 2k$ и $p = 2k - 1$ достигаются для чисто вековых членов в y_k^3 и x_k^2 .

Пример 2.6.6:

$$\dot{x} = -\mu(1 + \mu) \sin y, \quad \dot{y} = 1 + \mu. \quad (2.6.54)$$

Общее решение находится здесь совсем элементарно:

$$x = \xi + \mu \cos(t + \mu t + \eta), \quad y = t + \mu t + \eta. \quad (2.6.55)$$

Определяя постоянные интегрирования из условия нулевого среднего периодических членов, находим

$$x_k = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cos(y_0 + (k-1)\pi/2) \quad (k \geq 1),$$

$$y_1 = t, \quad y_k = 0 \quad (k \geq 2).$$
(2.6.56)

Итак, максимально возможная по теореме 2 степень $p = k-1$ для вековых членов в x_k достигается, чего нельзя сказать о быстрых переменных y . В следующей главе мы покажем, что это не случайно и теорему 2 можно несколько усилить.

Пример 2.6.7:

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= \mu, \\ \dot{z}^2 &= \mu \cos z^1, \\ \dot{y} &= 1 + \mu \cos z^1. \end{aligned}$$
(2.6.57)

Общее решение есть:

$$\begin{aligned} z^1 &= \xi^1 + \mu t, \quad z^2 = \xi^2 + \sin(\xi^1 + \mu t), \\ y &= t + \eta + \sin(\xi^1 + \mu t). \end{aligned}$$
(2.6.58)

Считая ξ^n, η не зависящими от μ , получаем

$$z_k^2 = y_k = (t^k/k!) \sin(\xi^1 + k\pi/2).$$
(2.6.59)

Это доказывает точность теоремы 3.

В заключение рассмотрим тривиальный случай уравнения только с медленными переменными:

$$\dot{x} = \mu f(x, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k f_k(x).$$
(2.6.60)

Здесь $\dot{x}_0 = 0$, поэтому $x_0 = \text{const}$. В первом приближении $\dot{x}_1 = f_1(x_0) \Rightarrow x_1 = f_1(x_0)t + C_1$. Действуя по индукции, приходим к теореме.

Теорема 2.6.4. Для уравнения (60) k -приближение x_k есть многочлен по времени t степени k .

Глава 3
МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ

§ 3.1. Наводящие соображения

На последних примерах мы не могли не заметить, что метод малого параметра в чистом виде для колебательных систем не обладает достаточной гибкостью. Действительно, если период невозмущенной быстрой переменной y_0 в примере 2.6.6 был равен 2π , то уже в первом приближении он становится равным $2\pi(1+\mu)$. Мы же как будто не замечаем этого и продолжаем представлять x_1, x_2, \dots функциями с неизменной несущей частотой, равной единице. Естественно, что при этом возникают вековые члены (2.6.56), которые сильно затрудняют исследование поведения решения. На практике берут лишь конечное число членов ряда. Ясно, что уже на временах порядка μ^{-1} отклонение приближенного решения от точного есть величина порядка единицы, и метод малого параметра не позволяет сделать никаких выводов о поведении решения (ограниченность, периодичность, почти периодичность и т.д.) на больших временах.

Та же ситуация встречается при описании колебаний в окрестности равновесия, как показано в примере 2.5.2. Сейчас мы займемся более важными для небесной механики системами с медленными и быстрыми переменными и лишь в конце главы коснемся движения в окрестности равновесия.

Чтобы исправить положение, нужно в y_0 включить вековые члены высших приближений. В первом приближении они возникают от свободного члена разложения Фурье (2.6.15). Поэтому промежуточное решение можно получать, опуская все непостоянные гармоники (2.6.15):

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \mu F_{10}(x_0) \cos \varphi_{10}, \\ \dot{y}_0 &= \omega(x_0) + \mu G_{10}(x_0) \cos \varphi_{10}. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Но это равносильно осреднению правой части (2.6.2) по y при закреплённом x (откуда и термин "метод осреднения").

Те же соотношения (1) можно получить из других соображений. Периодические слагаемые $\mu F_{1n} \cos(ny + \varphi_{1n})$ вызывают осцилляции решения, среднее значение которых при линейной зависимо-

сти y от t было бы равно нулю. Вдоль истинного решения влияние периодического слагаемого может дать и вековой уход, но уже второго порядка малости. В первом приближении им можно пренебречь и получить систему (1). Заметим, что наши рассуждения подразумевают, что $n \in I_1$. При $n \in I_0$ (в частности при резонансе, о чем еще пойдет речь ниже) слагаемое $\mu F_{1n} \cos(ny + \varphi_{1n})$ вызывает длительное однонаправленное изменение x и не может быть отброшено.

Переход от точных уравнений (2.6.2) к приближенным (1) встречался еще у П.Лапласа, Ж.Лагранжа и К.Гаусса. В их трудах "метод осреднения" носил характер приближенного: точное решение заменялось приближенным x_0, y_0 и путь повышения точности не указывался. В дальнейшем в трудах Ш.Делоне, А.Линдштедта, А.Пуанкаре, Ф.Тиссерана, Х.Цайпеля выкристаллизовалась идея перехода к системе (1) от (2.6.2) подходящей заменой переменных — переход от оскулирующих к средним элементам. Метод стал формально точным. Слово "формально" указывает на то, что сходимость соответствующих рядов сначала оставалась невыясненной, а затем А.Пуанкаре получил ряд отрицательных результатов об отсутствии равномерной сходимости рядов в общем случае. Обоснование асимптотического характера рядов было сделано Н.М.Крыловым, Н.Н.Боголюбовым и другими математиками и механиками. Позднее А.Н.Колмогоров, В.И.Арнольд, Ю.Мозер установили сходимость рядов при достаточно малом μ для большинства (по мере) начальных данных. Эти вопросы мы рассмотрим в главе 8, а в этой главе займемся фактическим построением осредняющего преобразования.

§ 3.2. Замена переменных

Выведем общие формулы замены переменных в уравнении типа (2.6.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n f_n(x, y), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n g_n(x, y). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Перейдем от x, y к новым переменным X, Y по формулам

$$\begin{aligned} x &= X + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n u_n(X, Y), \\ y &= Y + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n v_n(X, Y), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

в результате чего (1) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n F_n(X, Y), \\ \dot{Y} &= \omega(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n G_n(X, Y). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Обратим внимание на то, что здесь X, Y означают не начальные значения x, y , а новые переменные. Поскольку при $\mu = 0$ в замене переменных нет нужды, свободный член в (2) выбран таким тождественное преобразование. Поэтому системы (3) и (1) совпадают при $\mu = 0$, что и позволило нам сразу выписать начальный член $\omega(X)$ в уравнении для \dot{Y} .

Установим связь между данными правыми частями (функции ω, f, g), заменой переменных (функции u, v) и новыми правыми частями (функции F, G). Для этого продифференцируем (2) и заменим \dot{X}, \dot{Y} согласно (3):

$$\dot{x} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \frac{\partial u_n}{\partial X}\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k F_k\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \frac{\partial u_n}{\partial Y}\right) \left(\omega + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k G_k\right), \quad (3.2.4)$$

$$\dot{y} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \frac{\partial v_n}{\partial X}\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k F_k\right) + \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \frac{\partial v_n}{\partial Y}\right) \left(\omega + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k G_k\right).$$

Здесь аргументами всех функций служат новые переменные. Левые части (1), (4) совпадают; но прежде чем приравнять правые, следует выразить их через одну систему переменных. Подставим (2) в первое из уравнений (1):

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n f_n \left(X + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k, Y + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m v_m \right).$$

Обозначим $\alpha = (n, r, s, i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s)$,

$$\alpha = n + k_1 + \dots + k_r + m_1 + \dots + m_s, \quad (3.2.5)$$

$$f_\alpha = \frac{1}{r! s!} \frac{\partial^{r+s} f_n(X, Y)}{\partial X^{i_1} \dots \partial X^{i_r} \partial Y^{j_1} \dots \partial Y^{j_s}} \quad (3.2.6)$$

и воспользуемся тејлоровским разложением f_n в форме (П.3.10):

$$\dot{x} = \sum \mu^\nu f_\alpha u_{k_1}^{i_1} \dots u_{k_r}^{i_r} v_{m_1}^{j_1} \dots v_{m_s}^{j_s} \quad (3.2.7)$$

Здесь сумма распространена на все целые значения индексов из множества

$$\begin{aligned} n \geq 1; \quad r, s \geq 0; \\ 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq N_1; \quad 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq N_2; \\ k_1, \dots, k_r, m_1, \dots, m_s \geq 1 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

при обычном соглашении, что пустое произведение $u_{k_1}^{i_1} \dots u_{k_r}^{i_r}$ или $v_{m_1}^{j_1} \dots v_{m_s}^{j_s}$ равно единице при $r = 0$ или $s = 0$. Сравнение (4) и (7) приводит к соотношению

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial Y} \omega + F_\nu = \Phi_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (3.2.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_\nu = - \sum_{n=1}^{\nu-1} \left(\frac{\partial u_n}{\partial X} F_{\nu-n} + \frac{\partial u_n}{\partial Y} G_{\nu-n} \right) + \\ + \sum f_\alpha u_{k_1}^{i_1} \dots u_{k_r}^{i_r} v_{m_1}^{j_1} \dots v_{m_s}^{j_s}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где вторая сумма распространена на все значения индексов, удовлетворяющие (5), (8). Подобным образом получаем

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial Y} \omega + G_\nu = \frac{\partial \omega}{\partial X} u_\nu + \Psi_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (3.2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Psi_\nu = - \sum_{n=1}^{\nu-1} \left(\frac{\partial v_n}{\partial X} F_{\nu-n} + \frac{\partial v_n}{\partial Y} G_{\nu-n} \right) + \\ + \sum g_\alpha u_{k_1}^{i_1} \dots u_{k_r}^{i_r} v_{m_1}^{j_1} \dots v_{m_s}^{j_s} + \sum \frac{1}{r!} \frac{\partial^r \omega}{\partial X^{i_1} \dots \partial X^{i_r}} u_{k_1}^{i_1} \dots u_{k_r}^{i_r}, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

где вторые суммы в (12) и (10) аналогичны; в третьей сумме $r \geq 2$; $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq N_1$; $k_1, \dots, k_r \geq 1$; $k_1 + \dots + k_r = \varrho$.

Приведем явные выражения Φ_ϱ , Ψ_ϱ для первых ϱ :

$$\Phi_1 = f_1, \quad \Psi_1 = g_1,$$

$$\Phi_2 = -\frac{\partial u_1}{\partial X} F_1 - \frac{\partial u_1}{\partial Y} G_1 + f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial X} u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial Y} v_1,$$

$$\Psi_2 = -\frac{\partial v_1}{\partial X} F_1 - \frac{\partial v_1}{\partial Y} G_1 + g_2 + \frac{\partial g_1}{\partial X} u_1 + \frac{\partial g_1}{\partial Y} v_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} \cdot u_1 \cdot u_1,$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & -\frac{\partial u_1}{\partial X} F_2 - \frac{\partial u_1}{\partial Y} G_2 - \frac{\partial u_2}{\partial X} F_1 - \frac{\partial u_2}{\partial Y} G_1 + f_3 + \frac{\partial f_2}{\partial X} u_1 + \frac{\partial f_2}{\partial Y} v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial X} u_2 + \\ & + \frac{\partial f_1}{\partial Y} v_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial X^2} \cdot u_1 \cdot u_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial Y^2} \cdot v_1 \cdot v_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial X \partial Y} \cdot u_1 \cdot v_1, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 = & -\frac{\partial v_1}{\partial X} F_2 - \frac{\partial v_1}{\partial Y} G_2 - \frac{\partial v_2}{\partial X} F_1 - \frac{\partial v_2}{\partial Y} G_1 + g_3 + \frac{\partial g_2}{\partial X} u_1 + \frac{\partial g_2}{\partial Y} v_1 + \\ & + \frac{\partial g_1}{\partial X} u_2 + \frac{\partial g_1}{\partial Y} v_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial X^2} \cdot u_1 \cdot u_1 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_1}{\partial Y^2} \cdot v_1 \cdot v_1 + \frac{\partial^2 g_1}{\partial X \partial Y} \cdot u_1 \cdot v_1 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} \cdot u_1 \cdot u_2 + \\ & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \omega}{\partial X^3} \cdot u_1 \cdot u_1 \cdot u_1. \end{aligned}$$

Соотношения (9), (11) представляют собой систему бесконечного числа уравнений относительно бесконечного числа неизвестных u_ϱ , F_ϱ , v_ϱ , G_ϱ . Однако она треугольна в том смысле, что ϱ -я пара уравнений не содержит неизвестных с индексами, большими ϱ . Поэтому систему следует решать сверху вниз. Зависимость от неизвестных с наибольшим индексом выписана явно, поэтому на каждом шаге Φ_ϱ , Ψ_ϱ можно считать известными. Далее, (9) не содержит v_ϱ , G_ϱ , и его можно решать независимо от (11), после чего подставить туда u_ϱ .

Таким образом, задача свелась к последовательному решению уравнения типа

$$\frac{\partial u}{\partial Y} \omega + F = \Phi, \quad (3.2.14)$$

где u определяет замену переменных, а F — правая часть уравнений движения в новых переменных. В зависимости от номера шага и от того, ищется ли u_{ν}, F_{ν} или u_{ν}, G_{ν} , меняется только правая часть Φ , тогда как левая часть полностью сохраняет свой вид. Поскольку (9) справедливо как для векторов $u_{\nu}, F_{\nu}, \Phi_{\nu}$, так и для их компонент, в (14) можно считать u, F, Φ скалярами. В скалярной форме (14) переписывается так:

$$\omega^1(X) \frac{\partial u}{\partial Y^1} + \dots + \omega^{N_2}(X) \frac{\partial u}{\partial Y^{N_2}} + F(X, Y) = \Phi(X, Y). \quad (3.2.15)$$

§ 3.3. Решение уравнений замены переменных

Соотношение (3.2.14), или в более подробной записи (3.2.15), оказалось универсальной связью между заменой переменных и новыми частями уравнений; единой по форме вне зависимости от номера переменной и номера приближения. И далее мы будем встречать (3.2.15) практически во всех асимптотических методах, так что имеет смысл тщательно изучить это соотношение. Оно связывает две неизвестные функции, что вызывает разнообразие методов его решения. Начнем с крайних вариантов.

Если считать заданной замену переменных (т.е. фиксировать u), то (3.2.15) приводит, как и следовало ожидать, к явному выражению для F . К сожалению, за редкими исключениями таким путем не удастся получить F существенно более простой по сравнению с f . Вообще подыскивать специальные замены переменных, подходящих для решения конкретной задачи, — искусство, требующее большого таланта. За всю историю небесной механики их найдено всего около десятка. Поэтому, не исключая принципиальной возможности идти таким путем, мы здесь им пользоваться не будем.

Если считать заданными новые уравнения движения (т.е. фиксировать F), то (3.2.15) даст линейное неоднородное уравнение в частных производных относительно u . Дифференцирование по X отсутствует. Поэтому медленные переменные можно считать параметрами и опустить указание на зависимость от них:

$$\omega^1 \frac{\partial u}{\partial Y^1} + \dots + \omega^{N_2} \frac{\partial u}{\partial Y^{N_2}} = \Psi(Y), \quad (3.3.1)$$

где $\Psi = \Phi - F$ по предположению известна, а ω^m постоянны. Общее решение хорошо известно [8]. Если ни одна из частот ω^m не обращается у нуля, а функция Ψ непрерывна при всех вещественных Y , то

$$u = \int_0^{Y^1/\omega^1} \Psi(\omega^1 t, Y^2 - \frac{\omega^2}{\omega^1} Y^1 + \omega^2 t, Y^3 - \frac{\omega^3}{\omega^1} Y^1 + \omega^3 t, \dots) dt + \\ + \tilde{u}(Y^2 - \frac{\omega^2}{\omega^1} Y^1, Y^3 - \frac{\omega^3}{\omega^1} Y^1, \dots). \quad (3.3.2)$$

Здесь \tilde{u} - произвольная функция указанных аргументов; в качестве нижнего предела можно выбрать любую постоянную.

В случае одной быстрой переменной, т.е. скалярной Y , в (2) можно просто оставить неопределенный интеграл:

$$u = (1/\omega) \int \Psi(Y) dY + \text{const} \cdot t. \quad (3.3.3)$$

Если Ψ периодична, то необходимым и достаточным условием периодичности u является равенство нулю среднего значения Ψ по Y , т.е. свободного члена ряда Фурье.

При $N_2 \geq 2$ ситуация много сложнее. Поясним ее на примерах для $N_2 = 2$. При $N_2 > 2$ новых существенных осложнений не появляется.

Пример 3.3.1. Рассмотрим уравнение (1) при $N_2 = 2$, $\Psi = C = \text{const}$. Согласно (2) общее решение есть

$$u(Y^1, Y^2) = \frac{C}{\omega^1} Y^1 + \tilde{u}(Y^2 - \frac{\omega^2}{\omega^1} Y^1). \quad (3.3.4)$$

Напомним, что \tilde{u} - произвольная функция одной переменной. Поскольку величины Y^m имеют смысл углов, попытаемся выбрать \tilde{u} так, чтобы u обладала периодом 2π по обоим аргументам. Периодичность $u(0, Y^2)$ влечет периодичность \tilde{u} . Приравнявая $u(0, Y^2)$ и $u(2\pi, Y^2)$, получаем

$$\tilde{u}(Y^2 + \alpha) = \tilde{u}(Y^2) + \beta, \quad (3.3.5)$$

где $\alpha = -2\pi\omega^2/\omega^1$, $\beta = -2\pi C/\omega^1$.

Пусть $C = 0$ (т.е. уравнение (1) однородное). Тогда существуют периоды 2π и α , что возможно лишь при $\tilde{u} = \text{const}$, или соизмеримости частот ω^2 , ω^1 .

Пусть $C \neq 0$. Тогда $\beta \neq 0$ и условие (5) несовместно с периодичностью \tilde{u} .

Итак, если $C = 0$, то уравнение (1) имеет периодическое решение (4) при $\tilde{u} = \text{const}$, а в случае соизмеримости частот — при произвольной функции \tilde{u} с периодом, укладывающимся целое число раз в 2π и $2\pi\omega^2/\omega^1$ (при $N_2 > 2$ возможна периодическая зависимость лишь от части аргументов). Если $C \neq 0$, то уравнение (1) не имеет периодических решений.

Пример 3.3.2. Рассмотрим уравнение (1) при $N_2 = 2$, $\Psi = Ce^{i(n_1 Y^1 + n_2 Y^2)}$, $C \neq 0$.

Формула (2) приводит к интегралу от $e^{i(n_1 \omega^1 + n_2 \omega^2)t}$. Если $n\omega = n_1 \omega^1 + n_2 \omega^2 = 0$, то

$$u = \frac{C}{\omega^1} Y^1 e^{in_2(Y^2 - \omega^2 Y^1/\omega^1)} + \tilde{u}. \quad (3.3.6)$$

Заметим, что при $n_1 = n_2 = 0$ мы возвращаемся к предыдущему примеру.

Если $n\omega \neq 0$, то

$$u = \frac{C}{in\omega} \left\{ e^{i(n_1 Y^1 + n_2 Y^2)} - e^{in_2(Y^2 - \omega^2 Y^1/\omega^1)} \right\} + \tilde{u}. \quad (3.3.7)$$

Очевидно, что второе слагаемое в круглых скобках можно включить в \tilde{u} и записать решение в форме

$$u = \frac{C}{in\omega} e^{i(n_1 Y^1 + n_2 Y^2)} + \tilde{u}. \quad (3.3.8)$$

Функцию (6) не удастся сделать периодической никаким выбором \tilde{u} , тогда как (8) периодична хотя бы при $\tilde{u} = \text{const}$.

Пример 3.3.3. Пусть теперь Ψ — периодическая функция, разлагающаяся в абсолютно и равномерно сходящийся ряд:

$$\Psi = \sum A_n e^{i(n_1 Y^1 + n_2 Y^2)}. \quad (3.3.9)$$

Группируем слагаемые в зависимости от принадлежности l к множествам I_0 или I_1 и воспользуемся результатами предыдущих примеров:

$$u = \frac{Y^1}{\omega^1} \sum_{n \in I_0} A_n e^{in_2(Y^2 - \omega^2 Y^1 / \omega^1)} + \\ + \sum_{n \in I_1} \frac{A_n}{in\omega} \left\{ e^{i(n_1 Y^1 + n_2 Y^2)} - e^{in_2(Y^2 - \omega^2 Y^1 / \omega^1)} \right\} + \tilde{u}. \quad (3.3.10)$$

Обратим внимание читателя, что все операции над рядами были законны, так что ряды (10) сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте плоскости Y . Однако о равномерности сходимости относительно переменных X говорить не приходится, поскольку от X зависит, и притом всюду разрывно, само разбиение целочисленной решетки индексов n на множества I_0 , I_1 .

Второе слагаемое в каждом члене второй суммы (10) может быть включено в \tilde{u} . На практике поэтому его почти всегда опускают во всех членах, чем достигается периодичность второй суммы. В рамках формальных рядов это допустимо, но сходимостью уже не может быть гарантирована, как это видно на примере упомянувшегося в § 2.6 ряда:

$$\sum (a_n - b_n) \sim \sum a_n - \sum b_n \quad (3.3.11)$$

при $a_n = b_n = 1$.

Обратимся опять к системе (3.2.9), (3.2.11), на каждом шаге сводящейся к соотношению (3.2.14). Мы получим простейшую систему дифференциальных уравнений в новых переменных

$$\dot{X} = 0, \quad \dot{Y} = \omega(X), \quad (3.3.12)$$

если положим $F_{\varphi} = G_{\varphi} = 0$. Тогда u_{φ} , v_{φ} находим по формулам типа (10), не имея возможности воспрепятствовать появлению в них вековых членов. Поскольку решение (12) известно (линейные функции времени), то формулы замены переменных (3.2.2) представят собой явное решение уравнений (3.2.1). Это решение идентично с полученным по методу малого параметра - здесь просто предложен иной способ нахождения общего члена разложения (2.2.3).

Метод осреднения накладывает на F_{φ} , G_{φ} менее жесткие условия, но зато требует периодичности u_{φ} , v_{φ} : в этом случае величины $x - X$, $y - Y$ не будут зависеть от "числа оборотов" переменных Y и, главное, будут малы при малом μ независимо от Y . Условие на F_{φ} , G_{φ} заключается в том, чтобы исключить из

их разложений Фурье как можно больше периодических членов.* Именно, при фиксированном X должны остаться лишь члены с индексами из множества I_0 , исключение которых невозможно, как было только что показано на примерах. Тут мы сталкиваемся с серьезной трудностью: в общем случае X переменна, и мы не знаем

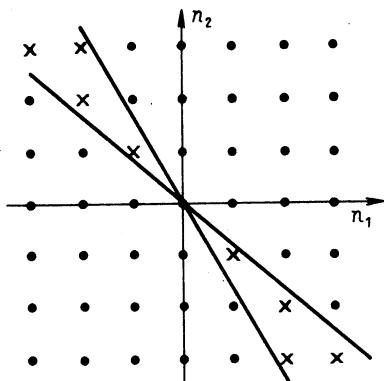


Рис.2. Множество I_1 (точки) и множество I_0 (крестики).

зависимости X от времени до интегрирования (3.2.3). В то же время разбиение на I_0, I_1 зависит от X всюду разрывно. Поэтому на нижеследующие операции следует смотреть как на формальные. К их обоснованию мы еще вернемся. А пока отметим, что непрерывность разбиения можно восстановить, расширяя множество I_0 . В самом деле, уравнение

$$n_1 \omega^1(X) + n_2 \omega^2(X) = 0 \quad (3.3.13)$$

определяет при каждом X прямую в плоскости n_1, n_2 . Изменяя X в малом шаре, получаем узкий пучок прямых, проходящих через начало. Ничто не мешает нам отнести к I_0 все точки целочисленной решетки, оказавшиеся внутри пучка (рис.2). Это разбиение уже не зависит от X . При $N_2 \geq 3$ вместо множества прямых, зачерчивающих I_0 , будет множество плоскостей, каждая из которых ортогональна некоторому вектору $\omega(X)$, при изменении X образующих узкий конус. При $N_2 = 3$, если $\omega(X)$ замечают внутренность кругового конуса полураствора α , ортогональные им плоскости замечают внешность кругового конуса полураствора $90^\circ - \alpha$ й же осью.

Пусть все f_k, g_k периодичны по Y и представляются рядами Фурье, хотя бы формальными. Тогда такова и функция $\Phi_1 = f_1$ в уравнении (3.2.9), и можно записать

* Поэтому иногда термин "осреднение" заменяют на "исключение периодических членов".

$$\Phi_1(X, Y) = \sum A_n(X) e^{inY}. \quad (3.3.14)$$

Положим
$$F_1 = \sum_{n \in I_0} A_n(X) e^{inY}. \quad (3.3.15)$$

В таком случае для u_1 существует по крайней мере формально решение

$$u_1 = \sum_{n \in I_1} \frac{A_n(X)}{in\omega(X)} e^{inY}. \quad (3.3.16)$$

Подставляя (16) в (3.2.11), мы находим G_1 как сумму по $n \in I_0$ типа (15) и v_1 как сумму по $n \in I_1$ типа (16). Продолжая этот процесс при $\nu = 2, 3, \dots$, мы приходим к замене переменных, определяемой формулами типа (16), и к правым частям новых уравнений, определяемых формулами типа (15).

§ 3.4. Исследование уравнений в осредненных переменных

Мы показали, что существует формальная осредняющая замена переменных: в уравнениях движения для \dot{X} , \dot{Y} в правых частях исключены все гармоники при $n \in I_1$. Фиксируем X так, чтобы I_0 состояло из одной точки — начала координат (в случае невырожденности $\omega(X)$ таковы почти все X — см. главу 7). Тогда функция (3.3.15) и ей подобные содержит лишь свободный член разложения и не зависит от Y . Уравнения (3.2.3) приобретают форму

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \mu F(X, \mu), \\ \dot{Y} &= \omega(X) + \mu G(X, \mu). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Первое из уравнений (1) не зависит от второго: мы добились разделения медленных и быстрых движений. После решения первого уравнения быстрые переменные находятся квадратурой. В простейшем случае может оказаться $F = 0$, и тогда X постоянно, Y — линейная функция времени. В общем случае следует ввести медленное время $\bar{t}' = \mu \bar{t}$ и получить

$$dX/d\bar{t}' = F(X, \mu). \quad (3.4.2)$$

Может оказаться, что в (2) переменные снова разделятся на медленные и быстрые, и тогда можно повторить процедуру осреднения.

Пусть теперь I_0 состоит из целых кратных фиксированного вектора $m = (m_1, \dots, m_{N_2})$. Введем резонансную переменную

$$Z = mY = m_1 Y^1 + \dots + m_{N_2} Y^{N_2}, \quad (3.4.3)$$

называемую еще критическим аргументом. По предположению F и G будут зависеть от Y только через посредство Z . Уравнение для последней легко получается дифференцированием (3):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \mu F(X, Z, \mu), \\ \dot{Z} &= m\omega(X) + \mu mG(X, Z, \mu), \\ \dot{Y} &= \omega(X) + \mu G(X, Z, \mu). \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

В системе (4) к уравнению для X добавлено уравнение для одной резонансной переменной. После решения быстрые переменные по-прежнему находятся квадратурой.

Мы видим, что резонансный случай сложнее рассмотренного вначале нерезонансного. Быстрые переменные исключаются не полностью. Остается их комбинация Z , медленная в окрестности резонанса. Действительно, множество I_0 отвечает соотношению $m \times \omega(X_0) = 0$ для некоторого фиксированного X_0 . В μ -окрестности X_0 будет $m\omega(X) \sim \mu$, что и означает медленность изменения Z . С течением времени X может изменяться так, что $m\omega(X)$ останется малым (система застревает в резонансе) или так, что $m\omega(X)$ становится в некоторый момент конечной величиной (система проскакивает резонанс).

В общем случае I_0 может состоять из целочисленных комбинаций нескольких векторов m^1, m^2, \dots . В этом случае в системе (4) резонансная переменная будет вектором $Z = (Z^1, Z^2, \dots)$, где $Z^1 = m^1 Y$, $Z^2 = m^2 Y, \dots$

Пример 3.4.1. Уравнение Дуффинга (2.6.42) согласно (3.2.13) приводит в первом приближении к системе (3.2.9), (3.2.11) при

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \frac{1}{8\omega^1} [& 2AX^3 \sin 2Y^1 + AX^3 \sin 4Y^1 - \\ & - 4B \sin(Y^1 - Y^2) - 4B \sin(Y^1 + Y^2)], \end{aligned}$$

$$\Psi_1^1 = \frac{1}{8\omega^1} \left[3AX^2 + 4AX^2 \cos 2Y^1 + AX^2 \cos 4Y^1 - \right. \\ \left. - \frac{4B}{X} \cos(Y^1 - Y^2) - \frac{4B}{X} \cos(Y^1 + Y^2) \right]. \quad (3.4.5)$$

Мы не выписываем Ψ_1^2 , поскольку $y^2 = \omega^2 t$, так что можно считать $y^2 = Y^2$.

В нерезонансном случае F_1, G_1 равны средним значениям функций Φ_1, Ψ_1 :

$$F_1 = 0, \quad G_1^1 = \frac{3A}{8\omega^1} X^2. \quad (3.4.6)$$

Согласно (3.3.16)

$$u_1 = \frac{1}{8\omega^1} \left[-\frac{AX^3}{\omega^1} \cos 2Y^1 - \frac{AX^3}{4\omega^1} \cos 4Y^1 + \right. \\ \left. + \frac{4B}{\omega^1 - \omega^2} \cos(Y^1 - Y^2) + \frac{4B}{\omega^1 + \omega^2} \cos(Y^1 + Y^2) \right], \quad (3.4.7)$$

$$v_1^1 = \frac{1}{8\omega^1} \left[\frac{2AX^2}{\omega^1} \sin 2Y^1 + \frac{AX^2}{4} \sin 4Y^1 - \right. \\ \left. - \frac{4B}{X(\omega^1 - \omega^2)} \sin(Y^1 - Y^2) - \frac{4B}{X(\omega^1 + \omega^2)} \sin(Y^1 + Y^2) \right].$$

Переходим ко второму приближению. Вычисляя Φ_2, Ψ_2 согласно (3.2.13) и беря средние значения, получаем

$$F_2 = 0, \quad G_2^1 = -51A^2X^4 / (256(\omega^1)^3). \quad (3.4.8)$$

Затем можно вычислить u_2, v_2^1 и т.д., что мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Обратим внимание, что в каждом приближении сначала вычисляются F, G , а уже затем u, v . Этот несколько парадоксальный факт означает, что сначала мы определяем, как изменяются новые переменные X, Y , а уже затем находим связь новых и старых переменных. В нашем примере $F = 0$, поэтому средние переменные линейны:

$$X = \text{const},$$

$$Y^1 = \left(\omega^1 + \frac{3AX^2}{8\omega^1} \mu - \frac{51A^2X^4}{256(\omega^1)^3} \mu^2 + \dots \right) t + \eta, \quad (3.4.9)$$

$$Y^2 = \omega^2 t.$$

Пример 3.4.2. Уравнение Ван-дер-Поля (2.6.47) согласно (3.2.13) приводит к

$$\Phi_1 = (X/8) \left[(4R^2 - X^2) - 4R^2 \cos 2Y + X^2 \cos 4Y \right], \quad (3.4.10)$$

$$\Psi_1 = (1/8) \left[(4R^2 - 2X^2) \sin 2Y - X^2 \sin 4Y \right].$$

Здесь только одна быстрая переменная, и резонанс возникнуть не может. Вычисляя средние значения Φ_1 , Ψ_1 , получаем

$$F_1 = (1/8) X (4R^2 - X^2), \quad G_1 = 0. \quad (3.4.11)$$

Согласно (3.3.3)

$$u_1 = (X/(8\omega)) \left[-2R^2 \sin 2Y + (X^2/4) \sin 4Y \right], \quad (3.4.12)$$

$$v_1 = (1/(8\omega)) \left[-(2R^2 - X^2) \cos 2Y + (X^2/4) \cos 4Y \right].$$

Вычисляя Φ_2 , Ψ_2 по (3.2.13) и беря средние, находим

$$F_2 = 0, \quad (3.4.13)$$

$$G_2 = (1/(256\omega)) (-32R^4 + 48R^2X^2 - 11X^4).$$

Уравнения движения в новых переменных в отличие от предыдущего примера уже не тривиальны:

$$\dot{X} = (1/8) X (4R^2 - X^2) \mu + \dots, \quad (3.4.14)$$

$$\dot{Y} = \omega + (1/(256\omega)) (-32R^4 + 48R^2X^2 - 11X^4) \mu^2 + \dots,$$

где точками обозначены слагаемые порядка μ^3 и выше. Первое из соотношений (14) есть уравнение с разделяющимися переменными и легко решается

$$X = 2R \left[1 + e^{-\mu R^2(t-T)} \right]^{-1/2}, \quad (3.4.15)$$

если в начальную эпоху $0 < X < 2R$;

$$X = 2R \left[1 - e^{-\mu R^2 (t-T)} \right]^{-1/2}, \quad (3.4.16)$$

если в начальную эпоху $X > 2R$. Наконец, $X = 2R$ есть также решение (14). Мы встретились с так называемым предельным циклом: поскольку X, Y играют роль полярных координат, то из формул (15), (16) следует, что решение при $t \rightarrow \infty$ с обеих сторон наматывается на окружность $X = 2R$. Если начальное значение X больше $2R$, то при движении назад траектория за конечное время уходит на бесконечность. Квадратура для Y элементарна, хотя и громоздка. Поскольку асимптотически $X \rightarrow 2R$, то Y стремится к линейной функции времени с частотой $\dot{Y} \approx \omega - R^4 \mu^2 / (16\omega)$.

3.5. Связь метода малого параметра и метода осреднения

В примерах 2.6.3 и 3.4.1, 2.6.4 и 3.4.2 одни и те же уравнения решались методом малого параметра и методом осреднения. Очевидны преимущества метода осреднения: мы правильно оцениваем частоты колебаний в возмущенном движении и улавливаем вековой ход изменения переменных.

Если решение найдено методом осреднения, то довольно просто получить из него ряды, отвечающие методу малого параметра: достаточно разложить X, Y , а затем u, v по степеням μ .

Обратная процедура в общем случае вряд ли осуществима. Тем замечательнее, что в задачах небесной механики такой переход, известный как "прием Тиссерана", не представляет принципиальных затруднений. Прежде чем излагать его, установим несколько свойств функций F, G, u, v в задачах небесной механики.

Теорема 3.5.1. Пусть правые части f_k уравнений для медленных переменных разлагаются в ряд по синусам кратных y , а правые части g_k уравнений для быстрых переменных - по косинусам. Тогда в нерезонансном случае ($n\omega(X) \neq 0$ при $n \neq 0$) функции Φ_k, ψ_k разлагаются по синусам; Ψ_k, u_k - по косинусам; F_k равны нулю, если определять F_k, G_k, u_k, v_k по формулам типа (3.3.15), (3.3.16).

Докажем теорему сначала для $k = 1$. По условию $\Phi_1 = f_1 \sim \sum \sin$ в понятных обозначениях. Но тогда $F_1 = 0$ и после интегрирования $u_1 \sim \sum \cos$. По условию же $\Psi_1 = g_1 \sim \sum \cos$ и по доказанному правая часть (3.2.11) разлагается по косинусам при $k = 1$. Интегрирование дает $v_1 \sim \sum \sin$. Предположим теперь справедливость теоремы для индексов $1, \dots, k$. Рассмотрим выражение (3.2.10) для Φ_{k+1} . По индуктивному предположению $F_{k+1-n} = 0$, $\partial u_n | \partial y \sim \sum \sin$. Далее, $f_s \sim \sum \sin$ при четном s и $f_s \sim \sum \cos$ при нечетном s . Произведение $u_{k_1}^{i_1} \dots u_{k_r}^{i_r} v_{m_1}^{j_1} \dots v_{m_s}^{j_s}$ напротив разлагается по синусам при нечетном s и по косинусам - при четном. В результате $\Phi_{k+1} \sim \sum \sin \Rightarrow F_{k+1} = 0$, $u_{k+1} \sim \sum \cos$. Точно так же доказывается, что $\Psi_{k+1} \sim \sum \cos$ и правая часть (3.2.11) разлагается по косинусам при $\nu = k + 1$, откуда $v_{k+1} \sim \sum \sin$. Теорема доказана.

В условиях теоремы X постоянны и, следовательно, $Y = \tilde{\omega}(X)t + \eta$ - линейные функции времени с частотами

$$\tilde{\omega}(X) = \omega(X) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k G_k(X) \quad (3.5.1)$$

и фазами

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \eta_k. \quad (3.5.2)$$

Формулы замены переменных (3.2.2) представят поэтому решение

$$\begin{aligned} x &= X + \sum_{k,n} \mu^k u_{kn}(X) \cos nY, \\ y &= Y + \sum_{k,n} \mu^k v_{kn}(X) \sin nY. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Каждый член (3) можно разложить по степеням μ при фиксированных X , η_k . Например,

$$\begin{aligned} \cos nY &= \cos ny_0 - \mu (\eta_1 + nG_1 t) \sin ny_0 - \\ &- \frac{\mu^2}{2} [(\eta_1 + nG_1 t)^2 \cos ny_0 + 2(\eta_2 + nG_2 t) \sin ny_0] + \dots \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Мы приходим к разложению метода малого параметра с вековыми и смешанными членами. Подстановка (4) в (3) приводит нас другим путем к усиленному варианту теоремы 2.6.2.

Теорема 3.5.2. В условиях теоремы 3.5.1 метод малого параметра приводит к представлению решения рядом членов типа (2.6.19). Чисто вековые возмущения ($r = 0$) имеют только быстрые переменные и только при $p = 1$. Смешанные возмущения ($r = 1$) как для x , так и для y удовлетворяют условию $p \leq k - 1$, где k - порядок возмущения.

Все останется по-прежнему, если мы представим X рядом по степеням μ (с постоянными коэффициентами).

Теперь ясно, как можно решение, полученное методом малого параметра, преобразовать к виду, отвечающему методу осреднения. Достаточно сгруппировать члены по формулам типа

$$\cos ny_0 + \mu A t \sin ny_0 \approx \cos(ny_0 - \mu A t).$$

У нас есть гарантия, что после подобной процедуры все смешанные члены будут ликвидированы.

К сожалению, теорема 1 применима только к невырожденным системам. В задаче нескольких тел вектор ω зависит лишь от части медленных переменных (от больших полуосей), и условия теоремы не выполняются. Если в методе малого параметра мы преодолели трудности, связанные с вырождением (теорема 2.6.3), то здесь мы не нашли соответствующего обобщения теоремы 1, не использующего канонического вида уравнений. Возможно, это удастся читателю.

§ 3.6. Понятие о нормальной форме

Связь рассмотренных в этой и предыдущей главах методов выявится еще отчетливее, если ввести понятие о нормальной форме.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(x, \bar{t}, \mu), \quad (3.6.1)$$

правая часть которого зависит в общем случае от фазовых переменных x , времени \bar{t} и параметра μ . Обратимая замена переменных

$$x = u(X, \bar{t}, \mu) \quad (3.6.2)$$

переводит (1) в

$$\dot{X} = F(X, \bar{t}, \mu). \quad (3.6.3)$$

Фиксируем множество допустимых замен переменных, т.е. множество U , которому должны принадлежать функции u . Назовем (3) нормальной формой уравнения (1) в классе допустимых преобразований U , если F — наиболее простая функция из всех возможных, в которые f переводится преобразованием $u \in U$. Понятие "простоты" в конкретных ситуациях должно быть, разумеется, четко определено. Обычно f и F задаются рядами определенного вида, и от F требуется, чтобы как можно большее число коэффициентов ряда обращалось в нуль.

Нормальная форма тем проще, чем шире класс допустимых замен U . Если на u не накладывать никаких ограничений, кроме естественных требований гладкости, то за X можно взять начальные данные (1), так что нормальная форма примет простейший мыслимый вид

$$\dot{X} = 0. \quad (3.6.4)$$

Напротив, если сузить U до одной-единственной тождественной замены переменных, то нормальная форма (3) совпадет с исходным уравнением (1). Поэтому интерес представляют только промежуточные случаи достаточно богатого, но не всеобъемлющего множества U .

Обратимость преобразования (2) позволяет взглянуть на изложенное еще с одной точки зрения. Переменные $x = (x^1, \dots, x^N)$ служат координатами в фазовом пространстве исследуемой динамической системы. Преобразование (2) можно истолковать как переход к новым криволинейным координатам $X = (X^1, \dots, X^N)$ в том же самом фазовом пространстве, причем набор координат X в общем случае зависит от \bar{t} и μ .

Рассмотрим уравнения с медленными и быстрыми переменными (3.2.1). Пусть U состоит из преобразований типа (3.2.2), т.е. из представимых формальными степенными рядами по малому параметру стационарных преобразований, сводящихся к тождественному при $\mu = 0$. Нормальная форма имеет вид (3.3.12)

$$\dot{X} = 0, \quad \dot{Y} = \omega(X). \quad (3.6.5)$$

Переход к ней и составляет метод малого параметра.

Сузим теперь класс U , допуская лишь периодические по быстрым переменным функции u_k, v_k . Нормальная форма имеет теперь

разный вид в разных точках фазового пространства. Каждому X отвечает система (3.2.3), где F_k, G_k - ряды Фурье по Y , содержащие лишь резонансные переменные. В частности, при линейно-независимых частотах $\omega^1, \dots, \omega^{N_2}$ функции F_k, G_k будут зависеть только от X , и нормальная форма примет вид (3.4.1):

$$\dot{X} = \mu F(X, \mu), \quad \dot{Y} = \omega(X) + \mu G(X, \mu). \quad (3.6.6)$$

Переход к ней и составляет метод осреднения. В § 3.4 были выяснены также условия, которые обеспечивают тождество $F(X, \mu) = 0$ в (6) и тем самым приводят к нормальной форме

$$\dot{X} = 0, \quad \dot{Y} = \omega(X) + \mu G(X, \mu), \quad (3.6.7)$$

которая немедленно интегрируется, как и (5). Обратим внимание, что разница между (5) и (7) остается: в (5) правые части известны априори, тогда как в (7) функция G еще подлежит определению. Эта большая свобода в (7) и позволяет избежать вековых членов в формулах замены переменных.

Рассмотрим теперь уравнения движения в окрестности равновесия. Следуя традиции, явно вводить малого параметра не будем. Нужно только помнить, что рассматривается малая окрестность равновесия с диаметром порядка μ . Тогда $x = \mu \tilde{x}$, $x \cdot x = \mu^2 \tilde{x} \cdot \tilde{x}$ и т.д., где \tilde{x} уже конечны. Переходя в уравнении $\dot{x} = Ax + Bx \cdot x + \dots$ к переменным \tilde{x} и сокращая на μ , можно привести его к виду (2.5.1).

Ограничиваясь автономным случаем, исследуем уравнение

$$\dot{x} = Ax + \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x). \quad (3.6.8)$$

Здесь f_k - однородный многочлен степени k :

$$f_k(x) = b_{i_1 i_2 \dots i_k} x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_k}. \quad (3.6.9)$$

Пусть матрице A отвечают простые элементарные делители. В классе линейных преобразований нормальная форма имеет тот же вид (8) с матрицей

$$A = \text{diag} \{ \lambda_n \}. \quad (3.6.10)$$

Ниже считаем, что A уже диагональна. Линейная часть (8) не нуждается в изменениях, так что за U разумно взять множество преобразований вида

$$x = X + \sum_{k=2}^{\infty} u_k(X), \quad (3.6.11)$$

где
$$u_k = c_{i_1 \dots i_k} X^{i_1} \dots X^{i_k} . \quad (3.6.12)$$

Уравнение (8) переходит в

$$\dot{X} = AX + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(X) \quad (3.6.13)$$

при
$$F_k(X) = B_{i_1 \dots i_k} X^{i_1} \dots X^{i_k} . \quad (3.6.14)$$

Напомним, что запись (9), (12), (14) подразумевает суммирование от 1 до N по повторяющимся индексам и инвариантность коэффициентов b , c , B относительно любых перестановок индексов.

Продифференцируем (11) по времени с учетом (13) и приравняем полученное правой части (8):

$$\left\{ I + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial X} \right\} \left\{ AX + \sum_{m=2}^{\infty} F_m(X) \right\} = Ax + \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x). \quad (3.6.15)$$

Остается только подставить в правую часть (15) выражение старых переменных через новые (11) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях X . Линейные члены справа и слева равны AX и совпадают тождественно. Для вычисления членов высших степеней подсчитаем прежде всего матрицу $\partial u_k / \partial X$ с элементами:

$$\frac{\partial u_k^r}{\partial X^s} = c_{i_1 \dots i_k}^r \frac{\partial}{\partial X^s} (X^{i_1} \dots X^{i_k}) .$$

Частная производная справа есть сумма k однотипных слагаемых вида

$$X^{i_1} \dots X^{i_{m-1}} X^{i_{m+1}} \dots X^{i_k} \partial X^{i_m} / \partial X^s .$$

Последнее отлично от нуля лишь при $i_m = s$, когда последний множитель обращается в единицу, так что

$$(\partial u_k^r / \partial X^s) = \sum_{m=1}^k c_{i_1 \dots i_{m-1} s i_{m+1} \dots i_k}^r X^{i_1} \dots X^{i_{m-1}} X^{i_{m+1}} \dots X^{i_k}.$$

Поскольку $(AX)^s = \lambda_s X^s$, то

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial X} AX \right)^r = \sum_{m=1}^k c_{i_1 \dots i_{m-1} s i_{m+1} \dots i_k}^r \lambda_s X^{i_1} \dots X^{i_{m-1}} X^s X^{i_{m+1}} \dots X^{i_k}.$$

Обозначим в каждом слагаемом $s = i_m$. Тогда

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial X} AX \right)^r = (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k}) c_{i_1 \dots i_k}^r X^{i_1} \dots X^{i_k}.$$

Теперь уже нетрудно получить для члена порядка k у r -й компоненты вектора левой части (15) коэффициент при $X^{i_1} \dots X^{i_k}$ в форме

$$(\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}) c_{i_1 \dots i_k}^r + B_{i_1 \dots i_k}^r + \sum_{p=2}^{k-1} p c_{s_1 \dots i_{p-1} i_p}^r B_{i_p \dots i_k}^s.$$

Член порядка k для r -й компоненты правой части (15) можно представить в виде

$$\lambda_r c_{i_1 \dots i_k}^r X^{i_1} \dots X^{i_k} + \sum_{j_1 \dots j_p} b_{j_1 \dots j_p}^r u_{s_1}^{j_1} \dots u_{s_p}^{j_p}.$$

Здесь суммирование проводится по множеству

$$2 \leq p \leq k, \quad 1 \leq s_1, \dots, s_p \leq k-1, \quad s_1 + \dots + s_p = k$$

и введено обозначение $u_1(X) = X$. Окончательно связь между c и B дается соотношением

$$(\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k} - \lambda_r) c_{i_1 \dots i_k}^r = [\Phi] - B_{i_1 \dots i_k}^r, \quad (3.6.16)$$

где через Φ обозначена комбинация коэффициентов форм $u_2, \dots, u_{k-1}, F_2, \dots, F_{k-1}$ порядка, меньшего k . Квадратные скобки означают, что следует брать среднее арифметическое по всем перестановкам индексов i_1, \dots, i_k . В частности, для $k=2$ будет $\Phi = [\Phi] = b_{i_1 i_2}^r$. Для $k=3$

$$\Phi = -2 c_{s_1 i_2 i_3}^r B_{i_2 i_3}^s + 2 c_{i_1 i_2}^s b_{s_1 i_3}^r + b_{i_1 i_2 i_3}^r,$$

$$[\Phi] = -\frac{2}{3} (c_{s_{i_1}^r}^r B_{i_2 i_3}^s + c_{s_{i_2}^r}^r B_{i_1 i_3}^s + c_{s_{i_3}^r}^r B_{i_1 i_2}^s) + \\ + \frac{2}{3} (c_{i_1 i_2}^s b_{s_{i_3}^r}^r + c_{i_1 i_3}^s b_{s_{i_2}^r}^r + c_{i_2 i_3}^s b_{s_{i_1}^r}^r) + b_{i_1 i_2 i_3}^r .$$

Система (16) треугольна, и решать ее надо сверху вниз. На каждом шаге Φ можно считать известной величиной, определенной на предыдущем шаге.

$$\text{Если } \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k} - \lambda_r \neq 0, \quad (3.6.17)$$

то можно положить

$$B_{i_1 \dots i_k}^r = 0, \quad c_{i_1 \dots i_k}^r = (\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} - \lambda_r)^{-1} \Phi. \quad (3.6.18)$$

В противном случае коэффициент c остается произвольным (например, его можно положить равным нулю), тогда как B уже не в нашей власти, а именно

$$B_{i_1 \dots i_k}^r = \Phi. \quad (3.6.19)$$

В нормальной форме (13) равны нулю все коэффициенты B , для которых справедливо неравенство (17). Она может содержать лишь коэффициенты B с такими индексами, для которых выполнено

$$\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k} - \lambda_r = 0. \quad (3.6.20)$$

Соотношение (20) обычно записывают в форме

$$(n_1 \lambda_1 + \dots + n_N \lambda_N) - \lambda_r = 0, \quad (3.6.21)$$

где n_j - показатель степени, с которой X^j входит в моном $X^{i_1} \dots X^{i_k}$, так что

$$n_1 + \dots + n_N = k. \quad (3.6.22)$$

Вид решений (21) в целых n_1, \dots существенно зависит от свойств собственных чисел λ_j . Пусть все они вещественны и линейно-независимы над кольцом целых чисел. Тогда (21) имеет единственное решение

$$n_r = 1, \quad n_j = 0 \quad (j \neq r),$$

не удовлетворяющее условию (22) при $k > 2$. Итак, в рассматриваемом случае (21) решений не имеет, все F_k тождественно равны нулю, нормальная форма

$$\dot{X} = AX \quad (3.6.23)$$

совпадает с линейной частью (8) и интегрируется элементарно.

Пусть все собственные числа — чисто мнимые, отличные от нуля. Тогда они попарно сопряжены, что возможно лишь при четном $N = 2\tilde{N}$. Положим

$$\lambda_j = i\omega_j, \quad \lambda_{\tilde{N}+j} = -i\omega_j \quad (j=1, \dots, \tilde{N}). \quad (3.6.24)$$

Соотношение (21) принимает вид

$$\begin{aligned} (n_1 - n_{\tilde{N}+1})\omega_1 + \dots + (n_{\tilde{N}} - n_N)\omega_{\tilde{N}} - \omega_m &= 0 \quad (r=m), \\ (n_1 - n_{\tilde{N}+1})\omega_1 + \dots + (n_{\tilde{N}} - n_N)\omega_{\tilde{N}} + \omega_m &= 0 \quad (r=\tilde{N}+m) \\ (m=1, \dots, \tilde{N}). \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

Допустим, что все частоты ω_j линейно-независимы над кольцом целых чисел. Тогда (25) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} n_m &= 1 + n_{\tilde{N}+m} \quad (r=m), \quad n_j = n_{\tilde{N}+j} \quad (j \neq m), \\ n_{\tilde{N}+m} &= 1 + n_m \quad (r=\tilde{N}+m), \quad n_j = n_{\tilde{N}+j} \quad (j \neq m). \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

Обозначим через \tilde{j} сопряженный к j индекс — такой, для которого справедливо $|j - \tilde{j}| = \tilde{N}$. Тогда (3.6.26) можно записать в единой форме

$$n_r = 1 + n_{\tilde{r}}, \quad n_j = n_{\tilde{j}} \quad (j \neq r, \tilde{r}), \quad (3.6.27)$$

что совместимо с (22) лишь при нечетном k . Формулы (27) означают, что моном $X^{i_1} \dots X^{i_k}$ состоит из X^r и произведений $(X^1 X^{\tilde{N}+1})^{\alpha_1}, (X^2 X^{\tilde{N}+2})^{\alpha_2}, \dots, (X^{\tilde{N}} X^N)^{\alpha_{\tilde{N}}}$. Нормальную форму можно записать в виде

$$\dot{X}^r = \Lambda^r X^r \quad (r=1, \dots, N), \quad (3.6.28)$$

где функции Λ^r зависят лишь от произведений $Z^m = X^m X^{\tilde{N}+m}$ ($m = 1, \dots, \tilde{N}$), разлагаются в ряд Тейлора относительно Z^m , причем свободный член разложения совпадает с $\lambda_r = \pm i\omega_r$.

Для произведений Z^m из (28) получаем независимую систему уравнений

$$\dot{Z}^m = (\Lambda^m + \Lambda^{\tilde{N}+m}) Z^m \quad (m = 1, \dots, \tilde{N}), \quad (3.6.29)$$

число которых вдвое меньше N . Более того, поскольку свободный член у функции $\Lambda^m + \Lambda^{\tilde{N}+m}$ отсутствует, величины Z^m медленно меняются с течением времени. При $N = 2$, $\tilde{N} = 1$ единственное уравнение (29) решается в квадратурах. В пространстве большей размерности интегрирование (29) неэлементарно, хотя и существенно проще (8). После нахождения решения (29) коэффициенты Λ^r становятся известными функциями времени. Уравнения (28) распадутся на независимые линейные однородные уравнения первого порядка, которые немедленно интегрируются:

$$X^r = C^r e^{\int \Lambda^r dt} \quad (r = 1, \dots, N). \quad (3.6.30)$$

В частном случае

$$\Lambda^{\tilde{N}+m} = -\Lambda^m \quad (3.6.31)$$

произведения Z^m на основании (29) постоянны, решение (28) записывается совсем просто

$$\begin{aligned} X^r &= C^r e^{\Lambda^r t}, \\ X^{\tilde{N}+r} &= C^{\tilde{N}+r} e^{-\Lambda^r t} \quad (r = 1, \dots, \tilde{N}) \end{aligned} \quad (3.6.32)$$

и представляет собой колебания с возмущенными частотами $\Lambda^r = i\omega^r + \dots$. Равенство (31) всегда имеет место для гамильтоновых систем. Преобразование к нормальной форме можно выполнить прямо над функцией Гамильтона так, чтобы уравнения (28) сохранили канонический вид. В этом случае

$$\dot{X}^r = -\frac{\partial H}{\partial Z^r} X^r, \quad \dot{X}^{\tilde{N}+r} = \frac{\partial H}{\partial Z^r} X^{\tilde{N}+r},$$

что автоматически влечет (31).

Пример 3.6.1. Рассмотрим систему (2.5.16) примера (2.5.2) при $\mu = 1$:

$$\dot{x}^1 = i\omega x^1 - ix^1 x^2, \quad \dot{x}^2 = -i\omega x^2 + ix^1 x^2. \quad (3.6.33)$$

В обозначениях этого параграфа здесь $b_{12}^1 = b_{21}^1 = -i/2$, $b_{12}^2 = b_{21}^2 = i/2$, остальные $b_{i_1 i_2}^r$ равны нулю. Согласно вышеизложенному коэффициенты $B_{i_1 i_2}^r$ можно считать нулями, и при $k = 2$ нетривиальные уравнения (16) примут форму

$$-i\omega c_{12}^1 = b_{12}^1 = -i/2, \quad i\omega c_{12}^2 = b_{12}^2 = i/2,$$

откуда
$$c_{12}^1 = c_{12}^2 = 1/(2\omega).$$

При $k = 3$ получим систему (16) в виде

$$2i\omega c_{111}^1 = 2c_{11}^s b_{s1}^1 - B_{111}^1 = -B_{111}^1,$$

$$0c_{112}^1 = (2/3)(c_{11}^s b_{s2}^1 + c_{12}^s b_{s1}^1 + c_{12}^s b_{s1}^1) - B_{112}^1 = -i/(3\omega) - B_{112}^1,$$

$$-2i\omega c_{122}^1 = (2/3)(c_{12}^s b_{s2}^1 + c_{12}^s b_{s2}^1 + c_{22}^s b_{s1}^1) - B_{122}^1 = -i/(3\omega) - B_{122}^1,$$

$$-4i\omega c_{222}^1 = 2c_{22}^s b_{s2}^1 - B_{222}^1 = -B_{222}^1,$$

$$4i\omega c_{111}^2 = 2c_{11}^s b_{s1}^2 - B_{111}^2 = -B_{111}^2,$$

$$2i\omega c_{112}^2 = (2/3)(c_{11}^s b_{s2}^2 + c_{12}^s b_{s1}^2 + c_{12}^s b_{s1}^2) - B_{112}^2 = i/(3\omega) - B_{112}^2,$$

$$0c_{122}^2 = (2/3)(c_{12}^s b_{s2}^2 + c_{12}^s b_{s2}^2 + c_{22}^s b_{s1}^2) - B_{122}^2 = i/(3\omega) - B_{122}^2.$$

$$-2i\omega c_{222}^2 = 2c_{22}^s b_{s2}^2 - B_{222}^2 = -B_{222}^2.$$

Определяем ненулевые B, c :

$$-B_{112}^1 = B_{122}^2 = i/(3\omega), \quad c_{122}^1 = c_{112}^2 = 1/(6\omega^2).$$

Итак, с принятой точностью замена переменных дается соотношениями

$$\begin{aligned}x^1 &= X^1 + (1/\omega) X^1 X^2 + (1/(2\omega^2)) X^1 (X^2)^2, \\x^2 &= X^2 + (1/\omega) X^1 X^2 + (1/(2\omega^2)) (X^1)^2 X^2.\end{aligned}\tag{3.6.34}$$

Уравнения в новых переменных таковы:

$$\begin{aligned}\dot{X}^1 &= i\omega (1 - (1/\omega^2) X^1 X^2) X^1, \\ \dot{X}^2 &= -i\omega (1 - (1/\omega^2) X^1 X^2) X^2.\end{aligned}\tag{3.6.35}$$

Как видим, $\Lambda^2 = -\Lambda^1$, поэтому $X^1 X^2$ равно вещественной постоянной. Если принять за начальный момент обращения в нуль мнимой части X^1 и X^2 , то $X^1 = X^2 = C$ при $\tilde{t} = 0$, и в этих обозначениях $X^1 X^2 = C^2$.

В соответствии с (32)

$$X^1 = C e^{i\tilde{\omega}\tilde{t}}, \quad X^2 = C e^{-i\tilde{\omega}\tilde{t}},\tag{3.6.36}$$

где
$$\tilde{\omega} = \omega - C^2/\omega.\tag{3.6.37}$$

Общее решение (33) получается подстановкой (36) в (34). Для перехода к вещественным переменным y^1, y^2 по (2.5.15) достаточно выделить вещественную и мнимую части x^1, x^2 или, что то же, X^1, X^2 .

Найденное методом малого параметра решение (2.5.19) содержит \tilde{t} вне знака экспоненты. Представление (36) не имеет вековых членов за счет модификации частоты — замены ω на $\tilde{\omega}$.

Для более подробного знакомства с теорией нормальных форм мы отсылаем читателя к работам [3, 4].

§ 4.1. Замена переменных

Уравнения небесной механики, как правило, имеют каноническую форму. Между тем прямое применение рассмотренных методов в общем случае ее разрушает. Необходима их модификация, оставляющая инвариантным канонический вид уравнений. Это приведет к экономии труда: все операции надо будет проводить с одной функцией Гамильтона вместо многих функций, служащих правыми частями уравнений. Кроме того, многие свойства решений удастся вывести, только анализируя свойства гамильтониана.

Пусть уравнения (2.6.2) имеют каноническую форму

$$\dot{x} = -\frac{\partial h(x, y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \quad (4.1.1)$$

с функцией Гамильтона

$$h = h_0(x) + \mu \tilde{h}_1(x, y, \mu). \quad (4.1.2)$$

Здесь $x = (x^1, \dots, x^N)$, $y = (y^1, \dots, y^N)$, так что число уравнений обозначено через $2N$. Функция $\mu \tilde{h}_1$ разлагается в ряд по степеням μ

$$\mu \tilde{h}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k h_k(x, y) \quad (4.1.3)$$

и имеет период 2π по каждой компоненте вектора y . Таким образом, (1) есть частный случай (2.6.2) при $f = -\partial \tilde{h}_1 / \partial y$, $\omega = \partial h_0 / \partial x$, $g = \partial \tilde{h}_1 / \partial x$.

Действуя, как в § 3.2, мы должны получить общие формулы для произвольной канонической замены переменных, обращающейся в тождественную при $\mu = 0$. Классический путь — использование производящей функции. Пусть

$$\mu S = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k S_k(X, y) \quad (4.1.4)$$

— произвольная достаточно гладкая скалярная функция от смеси старых y и новых X переменных. Тогда формулы

$$x = X + \mu \frac{\partial S}{\partial y}, \quad Y = y + \mu \frac{\partial S}{\partial X} \quad (4.1.5)$$

по известной теореме механики определяют каноническое преобразование, не меняющее функцию Гамильтона. Для получения явного вида преобразования надо разрешить уравнения (5) относительно x, y . Затем следует подставить полученное решение в (2) и выразить h через новые переменные.

Запишем (5) в форме

$$\begin{aligned} x &= X + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \frac{\partial S_k(X, y)}{\partial y}, \\ y &= Y - \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \frac{\partial S_k(X, y)}{\partial X}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Представим решение (6) относительно старых переменных в форме (3.2.2). Подставим второе из соотношений (3.2.2) во второе из соотношений (6), разложим по степеням μ и приравняем соответствующие коэффициенты. Полученное решение подставим в первое из соотношений (6). В результате придем к рекуррентным равенствам

$$\begin{aligned} u_k^r &= \frac{\partial S_k}{\partial Y^r} + \sum \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m+1} S_{j_0}}{\partial Y^r \partial Y^{i_1} \dots \partial Y^{i_m}} v_{j_1}^{i_1} \dots v_{j_m}^{i_m}, \\ v_k^r &= -\frac{\partial S_k}{\partial X^r} - \sum \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m+1} S_{j_0}}{\partial X^r \partial Y^{i_1} \dots \partial Y^{i_m}} v_{j_1}^{i_1} \dots v_{j_m}^{i_m}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Здесь суммирование производится по множеству $1 \leq m \leq k-1; j_0 \geq 1; \dots; j_m \geq 1; j_0 + j_1 + \dots + j_m = k; 1 \leq i_1 \leq N, \dots, 1 \leq i_m \leq N$. Все аргументы в (7) – новые переменные. Например, если $S_2(X, y) = (X^1)^2 \sin y^2$, то в (7) $\partial^2 S_2 / \partial X^1 \partial Y^2 = 2X^1 \cos Y^2$. В дальнейшем нам понадобятся также выражения новых переменных через старые:

$$\begin{aligned} X &= x + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \tilde{u}_k(x, y), \\ Y &= y + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \tilde{v}_k(x, y). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Формулы для \tilde{u}, \tilde{v} можно получить без дополнительной работы, если обратить внимание на инвариантность (5), (6) относительно замены $x \leftrightarrow Y, y \leftrightarrow X$. В результате из (7) следует

$$\tilde{u}_k^r = -\frac{\partial S_k}{\partial y^r} - \sum \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m+1} S_{j_0}}{\partial y^r \partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}} \tilde{u}_{j_1}^{i_1} \dots \tilde{u}_{j_m}^{i_m},$$

$$\tilde{v}_k^r = \frac{\partial S_k}{\partial x^r} + \sum \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m+1} S_{j_0}}{\partial x^r \partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}} \tilde{u}_{j_1}^{i_1} \dots \tilde{u}_{j_m}^{i_m}. \quad (4.1.9)$$

Аргументами в (9) служат переменные x, y .

Итак, формулы замены переменных получены в виде рекуррентных соотношений. Вот подробная запись (7) для первых значений нижнего индекса:

$$\begin{aligned} u_1^r &= \frac{\partial S_1}{\partial Y^r}, & v_1^r &= -\frac{\partial S_1}{\partial X^r}, \\ u_2^r &= \frac{\partial S_2}{\partial Y^r} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y^r \partial Y^i} v_1^i, \\ v_2^r &= -\frac{\partial S_2}{\partial X^r} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^r \partial Y^i} v_1^i, \\ u_3^r &= \frac{\partial S_3}{\partial Y^r} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y^r \partial Y^i} v_2^i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 S_2}{\partial Y^r \partial Y^i} v_1^i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^N \frac{\partial^3 S_1}{\partial Y^r \partial Y^{i_1} \partial Y^{i_2}} v_1^{i_1} v_1^{i_2}, \\ v_3^r &= -\frac{\partial S_3}{\partial X^r} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^r \partial Y^i} v_2^i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 S_2}{\partial X^r \partial Y^i} v_1^i - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^N \frac{\partial^3 S_1}{\partial X^r \partial Y^{i_1} \partial Y^{i_2}} v_1^{i_1} v_1^{i_2}. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Подставляя последовательно значения v_1^i, v_2^i в формулы для v_2^r, v_3^r , получаем окончательно

$$\begin{aligned} u_1^r &= \frac{\partial S_1}{\partial Y^r}, & v_1^r &= -\frac{\partial S_1}{\partial X^r}, \\ u_2^r &= \frac{\partial S_2}{\partial Y^r} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y^r \partial Y^i} \frac{\partial S_1}{\partial X^i}, \\ v_2^r &= -\frac{\partial S_2}{\partial X^r} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^r \partial Y^i} \frac{\partial S_1}{\partial X^i}, \end{aligned}$$

$$u_3^r = \frac{\partial S_3}{\partial Y^r} - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial S_2}{\partial X^i} \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y^r \partial Y^i} + \frac{\partial S_1}{\partial X^i} \frac{\partial^2 S_2}{\partial Y^r \partial Y^i} \right) + \quad (4.1.11)$$

$$+ \sum_{i_1, i_2=1}^N \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial Y^r \partial Y^{i_1}} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^{i_1} \partial Y^{i_2}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 S_1}{\partial Y^r \partial Y^{i_1} \partial Y^{i_2}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_1}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_2}} \right),$$

$$v_3^r = -\frac{\partial S_3}{\partial X^r} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial S_2}{\partial X^i} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^r \partial Y^i} + \frac{\partial S_1}{\partial X^i} \frac{\partial^2 S_2}{\partial X^r \partial Y^i} \right) -$$

$$- \sum_{i_1, i_2=1}^N \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial X^r \partial Y^{i_1}} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^{i_1} \partial Y^{i_2}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 S_1}{\partial X^r \partial Y^{i_1} \partial Y^{i_2}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_1}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_2}} \right).$$

В первом приближении замена переменных имеет вид канонических уравнений

$$\Delta x = -\frac{\partial(-\mu S_1)}{\partial Y}, \quad \Delta y = \frac{\partial(-\mu S_1)}{\partial X}, \quad (4.1.12)$$

где $\Delta x = x - X$, $\Delta y = y - Y$. Это важное свойство позволяет на практике оперировать не только с каноническими элементами в небесной механике, но, скажем, и с кеплеровыми. Тогда формулы замены переменных примут вид уравнений Лагранжа. К сожалению, свойство (12) утрачивается уже во втором порядке. Если это не так, то должна существовать функция $\tilde{S}(X, Y)$, для которой

$$\sum_i \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y^r \partial Y^i} \frac{\partial S_1}{\partial X^i} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial Y^r}, \quad \sum_i \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^r \partial Y^i} \frac{\partial S_1}{\partial X^i} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial X^r}.$$

Для $N = 1$, $S_1 = XY$ получим

$$0 = \partial \tilde{S} / \partial Y, \quad Y = \partial \tilde{S} / \partial X,$$

что невозможно.

§ 4.2. Преобразование гамильтониана

После вывода общих формул канонической замены переменных следующий шаг состоит в определении нового гамильтониана:

$$H(X, Y, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H_k(X, Y). \quad (4.2.1)$$

Из теоретической механики известно, что замена (4.1.5) не меняет гамильтониана как физической величины. В консервативном случае, например, это — энергия, только выраженная в зависимости от разных переменных. Для получения (1) достаточно поэтому просто подставить (3.2.2) в (4.1.2) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях μ . Получим

$$H_k = h_k + \sum \frac{1}{r!(m-r)!} \frac{\partial^m h_{j_0}}{\partial X^{i_1} \dots \partial X^{i_r} \partial Y^{i_{r+1}} \dots \partial Y^{i_m}} u_{j_1}^{i_1} \dots u_{j_r}^{i_r} v_{j_{r+1}}^{i_{r+1}} \dots v_{j_m}^{i_m}. \quad (4.2.2)$$

Здесь суммирование ведется по индексам m, r, j_0, \dots, j_m ($1 \leq m \leq k; 0 \leq j_0 \leq k-1; 0 \leq r \leq m; j_0 \geq 0; j_1, \dots, j_m \geq 1; j_0 + j_1 + \dots + j_m = k$), связанным с разложением по степеням μ , и по повторяющимся индексам i_1, \dots, i_m (от 1 до N), связанным с многомерностью X, Y . Выпишем явно первые члены (2) с учетом (4.1.11):

$$\begin{aligned} H_0 &= h_0, \\ H_1 &= -(h_0 S_1) + h_1, \\ H_2 &= -(h_0 S_2) - (h_1 S_1) + \sum_{i_1, i_2=1}^N \left\{ \frac{\partial h_0}{\partial Y^{i_1}} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^{i_1} \partial Y^{i_2}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial h_0}{\partial X^{i_1}} \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y^{i_1} \partial Y^{i_2}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_0}{\partial Y^{i_1} \partial Y^{i_2}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_1}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 h_0}{\partial X^{i_1} \partial Y^{i_2}} \frac{\partial S_1}{\partial Y^{i_1}} \frac{\partial S_1}{\partial X^{i_2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_0}{\partial X^{i_1} \partial X^{i_2}} \frac{\partial S_1}{\partial Y^{i_1}} \frac{\partial S_1}{\partial Y^{i_2}} \right\} + h_2. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Здесь скобками обозначена скобка Пуассона:

$$(fg) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial Y^i} \frac{\partial g}{\partial X^i} - \frac{\partial f}{\partial X^i} \frac{\partial g}{\partial Y^i} \right). \quad (4.2.4)$$

Аргументы всех функций - новые переменные X, Y . Формулы (2)-(4) верны в самом общем случае произвольных функций h_i, S_k, f, g . Для гамильтониана же (4.1.2) невозмущенная часть не зависит от быстрых переменных Y , поэтому можно исключить в (2), (3) все дифференцирования h_0 по Y ; скобка Пуассона также упрощается:

$$-(h_0 S_k) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial h_0}{\partial X^i} \frac{\partial S_k}{\partial Y^i} = \sum_{i=1}^N \omega^i(X) \frac{\partial S_k}{\partial Y^i}. \quad (4.2.5)$$

Мы вывели соотношения (2), (3), связывающие замену переменных (S_k) и новый гамильтониан (H_k). Система оказалась треугольной. На каждом шаге она имеет вид

$$H_k = -(h_0 S_k) - \Phi_k,$$

где Φ_k определена на предыдущем шаге. С учетом (5)

$$\omega^i(\partial S_k / \partial Y^i) - H_k = \Phi_k. \quad (4.2.6)$$

Уравнение (6) имеет вид (3.2.14) при $u = S_k, F = -H_k, \Phi = \Phi_k$. Способы его решения изложены в главе 3.

Глава 5

МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛИ

§ 5.1. Замена переменных

Метод преобразований Ли является блестящим синтезом двух простых идей.

1. Каждый гамильтонов поток задает каноническое преобразование между начальными и текущими значениями фазовых переменных. Обратно, любое достаточно близкое к тождественному ка-

ноническое преобразование может быть описано подходящим гамильтоновым потоком за единичное время.

Отвлекаясь от основного содержания книги, подчеркнем следующую сторону только что сформулированного утверждения. Каждая интегрируемая система уравнений Гамильтона дает строку в еще не собранной таблице канонических преобразований. В учебниках и статьях их разбросана масса, но не хватает систематизации в отличие, скажем, от таблиц конформных преобразований и тем более от таблиц интегралов. Канонические преобразования, индуцируемые гамильтоновым потоком, зависят от параметра τ (времени действия потока, которое, разумеется, никак не связано с реальным временем), обращаются в тождественное при $\tau = 0$ и сохраняют функцию Гамильтона. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5.1.1. Пусть гамильтониан зависит лишь от одной пары переменных x^1, y^1 : $h = h(x^1, y^1)$. Уравнения движения

$$\dot{x}^1 = -\partial h / \partial y^1, \quad \dot{y}^1 = \partial h / \partial x^1, \quad \dot{x}^2 = \dot{y}^2 = \dots = 0$$

имеют решением $x^1 = \varphi(X^1, Y^1, \tau)$, $y^1 = \psi(X^1, Y^1, \tau)$, $x^2 = X^2$, $y^2 = Y^2, \dots$, $y^N = Y^N$, где φ, ψ — решение первой пары уравнений, X, Y — начальные данные. Таким образом, каноническое преобразование одной пары переменных, дополненное тождественным преобразованием других пар, будет каноническим преобразованием всей системы.

Пример 5.1.2. Пусть $N = 1$, $h = \beta x - \alpha y$, так что

$$\dot{x} = \alpha, \quad \dot{y} = \beta. \quad (5.1.1)$$

Общее решение (1) есть

$$x = X + \alpha \tau, \quad y = Y + \beta \tau. \quad (5.1.2)$$

Таким образом, сдвиг — каноническое преобразование. Вывод справедлив при любом N .

Пример 5.1.3. Пусть $N = 1$, $h = \alpha x^2 / 2 + bxy + cy^2 / 2$,

$$\dot{x} = -bx - cy, \quad \dot{y} = \alpha x + by. \quad (5.1.3)$$

Характеристические числа суть $\lambda_1 = \lambda = \sqrt{b^2 - ac}$, $\lambda_2 = -\lambda$. Если $b^2 - ac = 0$, общее решение (3) дается линейными функциями времени

$$x = (1 - b\tau)X - c\tau Y, \quad y = a\tau X + (1 + b\tau)Y. \quad (5.1.4)$$

Если $b^2 - ac \neq 0$, общее решение содержит экспоненциальные функции времени

$$x = \left(\frac{-b+\lambda}{2\lambda} e^{\lambda\tau} + \frac{b+\lambda}{2\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) X + \left(-\frac{c}{2\lambda} e^{\lambda\tau} + \frac{c}{2\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) Y, \quad (5.1.5)$$

$$y = \left(\frac{a}{2\lambda} e^{\lambda\tau} - \frac{a}{2\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) X + \left(\frac{b+\lambda}{2\lambda} e^{\lambda\tau} + \frac{-b+\lambda}{2\lambda} e^{-\lambda\tau} \right) Y.$$

Легко показать, что коэффициенты (5) вещественны как при вещественном, так и чисто мнимом λ .

Сравним (5) с общим линейным преобразованием:

$$x = \alpha X + \beta Y, \quad y = \gamma X + \delta Y. \quad (5.1.6)$$

Как известно, для каноничности (6) необходимо и достаточно сохранения площади при отображении $(x, y) \rightarrow (X, Y)$, т.е. равенства единице определителя

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (5.1.7)$$

Найдем собственные числа μ_1, μ_2 матрицы коэффициентов (6) при условии (7)

$$\mu = (\alpha + \delta)/2 \pm \sqrt{((\alpha + \delta)/2)^2 - 1} \quad (5.1.8)$$

и собственные числа $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ матрицы коэффициентов (5)

$$\tilde{\mu} = e^{\pm\lambda\tau} = e^{\pm\tau\sqrt{b^2 - ac}}. \quad (5.1.9)$$

При $\lambda = 0$ получаем двойное собственное число 1 системы (4). Сравнение (8) и (9) показывает, что для совпадения μ и $\tilde{\mu}$ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\operatorname{ch} \lambda\tau = (\alpha + \delta)/2. \quad (5.1.10)$$

Если $\alpha + \delta > 2$, то (10) имеет положительное решение для $\lambda\tau$, после чего из

$$\begin{aligned} (b/\lambda) \operatorname{sh} \lambda\tau &= (\delta - \alpha)/2, & (-c/\lambda) \operatorname{sh} \lambda\tau &= \beta, \\ (\alpha/\lambda) \operatorname{sh} \lambda\tau &= \gamma \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

найдем отношения a/λ , b/λ , c/λ , удовлетворяющие равенству

$$(b^2 - ac)/\lambda^2 = 1.$$

Возьмем, например, $\lambda = 1$, и тогда (10) даст τ , а (11) — a, b, c .

Если $\alpha + \delta = 2$, то (6) имеет вид (4) при $\tau = 1$, $a = \gamma$, $b = (\delta - \alpha)/2$, $c = -\beta$.

Если $-2 < \alpha + \delta < 2$, то (10) дает для $\lambda\tau$ чисто мнимое значение, и можно взять $\lambda\tau$ между нулем и πi . Возьмем $\lambda = i$, после чего (10) даст τ , а (11) — a, b, c .

Если $\alpha + \delta < -2$, то для $\lambda\tau$ получаем комплексное число с неравными нулю вещественной и мнимой частью. Это невозможно поскольку $\lambda = \sqrt{b^2 - ac}$ вещественно или чисто мнимо, а τ вещественно. При $\alpha + \delta = -2$ имеем $\lambda\tau = \pi i$, что делает возможным решение (11) лишь при $\beta = \gamma = \delta - \alpha = 0$, т.е. $\alpha = \delta = -1$, $\beta = \gamma = 0$.

Итак, чтобы каноническое преобразование (6) могло быть записано в виде гамильтонова потока (4) или (5), необходимо и достаточно выполнения условия

$$\alpha = \delta = -1, \quad \beta = \gamma = 0 \quad \text{или} \quad \alpha + \delta > -2. \quad (5.1.12)$$

Пример 5.1.4. Пусть $N = 1$, $h = -e^{\lambda x} y$. Уравнения движения

$$\dot{x} = e^{\lambda x}, \quad \dot{y} = \lambda e^{\lambda x} y \quad (5.1.13)$$

легко решаются

$$\begin{aligned} x &= X - (1/\lambda) \ln(1 - \lambda \tau e^{\lambda X}), \\ y &= Y / (1 - \lambda \tau e^{\lambda X}) \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

и задают каноническое преобразование при $\lambda\tau < e^{-\lambda X}$.

Примеры можно множить до бесконечности, но пора уже вернуться к основной теме.

2. Общее решение произвольной системы дифференциальных уравнений с достаточно малой правой частью может быть записано в виде ряда Ли (§ 1.3).

Удивительно, что для объединения этих идей понадобился век. Вероятно, психологическим препятствием было то обстоятельство, что независимая переменная в системе Гамильтона, определяющей

преобразование, должна была играть роль не времени, а скорее малого параметра.

Перейдем к изложению метода. Рассмотрим вспомогательную систему автономных уравнений Гамильтона

$$\dot{x} = - \frac{\partial T(x, y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial T(x, y)}{\partial x}, \quad (5.1.15)$$

где T — произвольная достаточно малая аналитическая функция в некоторой области фазового пространства. Обозначим общее решение (15) через

$$x = \alpha(X, Y, \tau, T), \quad y = \beta(X, Y, \tau, T), \quad (5.1.16)$$

где X, Y — начальные значения фазовых переменных при $t = 0$; x, y — текущие значения при $t = \tau$; T может считаться элементом подходящего функционального пространства. При фиксированных τ, T соотношения (16) задают некоторое преобразование $(x, y) \rightarrow (X, Y)$, которое мы будем обозначать коротко (τ, T) . По теореме Гамильтона преобразование это каноническое и не меняет гамильтониан. Не умаляя общности, можно ограничиться случаем $\tau = 1$, поскольку преобразование (τ, T) совпадает с $(1, \tau T)$ (докажите!).

Мы пришли к заданию контактного преобразования не системой неявных функций (4.1.5), а системой дифференциальных уравнений (15). На первый взгляд здесь порочный круг: чтобы только упростить данную нам систему (4.1.1), мы должны решить аналогичную систему (15). Однако это не совсем так. Мы ищем замену, близкую к тождественной. Поэтому T в отличие от \hbar мала, и решение (15) можно найти с помощью ряда Ли (1.3.9):

$$x = e^D X, \quad y = e^D Y, \quad (5.1.17)$$

где оператор D согласно (1.3.4) равен

$$D = \frac{\partial T}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X}. \quad (5.1.18)$$

Сравнение с (4.2.4) показывает, что D — операторная скобка Пуассона (см. также пример 1.3.3):

$$Df = (f T). \quad (5.1.19)$$

Аргументы функций считаются новыми переменными X, Y .

Представим производящую функцию T , как и S в предыдущей главе, рядом по степеням малого параметра:

$$T(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k T_k(X, Y). \quad (5.1.20)$$

Равенство (20) индуцирует разложение оператора $D = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k D_k$, где D_k представляется формулами (18), (19) при замене T на T_k .

§ 5.2. Преобразование гамильтониана

Как подробно разобрано в § 1.3, оператор e^D преобразует не только фазовые переменные, но и любые функции от них. В частности, гамильтониан $h(x, y)$, в котором вместо x, y подставлены их выражения (5.1.17) и который мы условились в предыдущей главе обозначать через $H(X, Y)$, выразится так:

$$H(X, Y) = e^D h(X, Y). \quad (5.2.1)$$

Пусть производящая функция T , оператор D и гамильтониан h разлагаются по степеням малого параметра μ . Тогда (1) соответствует

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu^j D_j \right)^m \sum_{j_0=0}^{\infty} \mu^{j_0} h_{j_0}.$$

Обратим внимание, что операторы D_j в общем случае между собой не коммутируют. Поэтому при возведении D в степень $m \geq 2$ нельзя пользоваться формулами типа бинома Ньютона. Запишем D^m как произведение одинаковых сомножителей:

$$D^m = \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^{\infty} \mu^{j_1 + \dots + j_m} D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_m}.$$

$$\text{Отсюда} \quad H_k = h_k + \sum \frac{1}{m!} D_{j_1} \dots D_{j_m} h_{j_0}, \quad (5.2.2)$$

где суммирование осуществляется на области

$$1 \leq m \leq k; \quad 0 \leq j_0 \leq k-1; \quad j_1, j_2, \dots, j_m \geq 1; \quad j_0 + j_1 + \dots + j_m = k.$$

Подсчитаем количество слагаемых в правой части (2). При фиксированном m оно равно числу решений уравнения

$$j_0 + j_1 + \dots + j_m = k \quad (5.2.3)$$

при указанных ограничениях.

Число решений (3) приведено в Приложении 2:

$$W_1(m+1, k) = \binom{k}{m}. \quad (5.2.4)$$

Формула (4) с очевидностью верна и при $m=0$, так что правая часть (2) содержит $\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} = 2^k$ слагаемых.

Действие каждого оператора D_{j_s} сводится к вычислению скобки Пуассона. Запишем (2) в окончательной форме:

$$H_k = h_k + \sum (1/m!) (h_{j_0} T_{j_1} \dots T_{j_m}). \quad (5.2.5)$$

Здесь суммирование проводится по той же области, что и в (2); скобками обозначены кратные скобки Пуассона (неассоциативные и антикоммутативные!):

$$(f_1 f_2 f_3 f_4) = (((f_1 f_2) f_3) f_4). \quad (5.2.6)$$

Выпишем первые члены (5):

$$\begin{aligned} H_0 &= h_0, \\ H_1 &= (h_0 T_1) + h_1, \\ H_2 &= (h_0 T_2) + (h_1 T_1) + (1/2)(h_0 T_1 T_1) + h_2, \\ H_3 &= (h_0 T_3) + (h_1 T_2) + (h_2 T_1) + \\ &+ (1/2)[(h_0 T_1 T_2) + (h_0 T_2 T_1) + (h_1 T_1 T_1)] + \\ &+ (1/6)(h_0 T_1 T_1 T_1) + h_3. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

§ 5.3. Исследование основных соотношений метода

На каждом шаге соотношение (5.2.5) можно записать в виде

$$H_k = (h_0 T_k) + \Phi_k, \quad (5.3.1)$$

где Φ_k определена на предыдущем шаге. С учетом (4.2.5) формула (1) равносильна:

$$\omega^i \frac{\partial T_k}{\partial Y^i} + H_k = \Phi_k. \quad (5.3.2)$$

Уравнение (2) имеет вид (3.2.14) при $u = T_k$, $F = H_k$, $\Phi = \Phi_k$. Способы решения изложены в главе 3.

Покажем теперь, что всё, что нужно для применения метода Ли, содержится в крайне простой и универсальной формуле (5.2.5). Простота эта связана с прозрачностью идеи преобразования Ли: переменные переходят от их начальных значений к конечным вдоль траекторий, определяемых гамильтоновым потоком. Формула (5.2.5) описывает преобразование к новым переменным произвольной функции от x, y, μ . Если некоторая функция $g(x, y)$ не зависит от μ , то (5.2.5) несколько упрощается:

$$G_k = \sum (1/m!) (g T_{j_1} \dots T_{j_m}), \quad (5.3.3)$$

где индексы суммирования пробегает значения $1 \leq m \leq k$; $j_1, \dots, j_m \geq 1$; $j_1 + \dots + j_m = k$. Легко показать, что сумма (3) содержит 2^{k-1} слагаемых. В частности, само преобразование координат описывается формулами (3.2.2) и (5.2.5) или (3). Следует положить в (5.2.5) $h_0 = X^i$ или Y^i , $h_1 = h_2 = \dots = 0$, $H_k = u_k^i$ или v_k^i ; в (3) $g = X^i$ или Y^i , $G_k = u_k^i$ или v_k^i . Можно еще упростить формулы, вычисляя первую скобку Пуассона:

$$u_k^i = - \sum \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial T_{j_1}}{\partial Y^i} T_{j_2} \dots T_{j_m} \right), \quad (5.3.4)$$

$$v_k^i = \sum \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial T_{j_1}}{\partial X^i} T_{j_2} \dots T_{j_m} \right),$$

где множество суммирования такое же, как и в (3). При $k=1$ мы получаем аналог уравнений Гамильтона

$$u_1^i = - \partial T_1 / \partial Y^i, \quad v_1^i = \partial T_1 / \partial X^i. \quad (5.3.5)$$

Обратное преобразование функции от X, Y, μ к функции от x, y, μ не требует новых вычислений. Действительно, нам нужно двигаться теперь по тем же самым траекториям системы (5.1.1), но в обратном направлении. Достаточно поэтому поменять знак у T . Иными словами, обратное преобразование описывается теми же формулами (5.2.5), (3), (4), в которых нужно только под знаком суммы добавить множитель $(-1)^m$.

Если сравнить выведенные в этой и предыдущей главах формулы и соответствующие свойства, нельзя не прийти к выводу: метод преобразований Ли лучше метода Цайпеля во всех отношениях — случай прямо гоголевский, редко встречающийся к науке. Перечислим наиболее важные преимущества.

1) Соотношения (5.2.5) дают явные выражения нового гамильтониана, несравненно более простые, нежели (4.2.2), в которых добавок S входит неявно.

2) Выражения x, y через X, Y можно получить по явным и уже использовавшимся формулам (5.2.5), тогда как в методе Цайпеля используются неявные (рекуррентные) сложные и новые формулы (4.1.7).

3) Выражение X, Y через x, y не требует ни вычислений, ни места в памяти ЭВМ, тогда как в методе Цайпеля нужны дополнительные вычисления по формулам (4.1.9) или согласно процедуре обращения степенного ряда.

4) При желании любую функцию от x, y, μ можно преобразовать в функцию от X, Y, μ и обратно по формуле (5.2.5). В методе Цайпеля необходима подстановка рядов в ряды.

5) Соотношения (5.2.5) инвариантны относительно выбора канонических элементов, так как содержат только скобки Пуассона. Классическая же методика с использованием производящей функции S обладает по терминологии В.И. Арнольда [2] удручающей неинвариантностью.

В связи с этим продолжающееся использование метода Цайпеля можно объяснить лишь данью традиции, подкрепленной наличием уже готовых программ, а также тем обстоятельством, что в первом порядке возмущений методы идентичны.

Пример 5.3.1. Уравнение Дuffинга (2.6.40) эквивалентно канонической системе с гамильтонианом

$$\tilde{h} = \dot{z}^2/2 + (\omega^1)^2 z^2/2 + A\mu z^4/4 - B\mu z \cos \omega^2 \tilde{t}. \quad (5.3.6)$$

Каноническое преобразование

$$\dot{z} = -\sqrt{2\omega^1 x^1} \sin y^1, \quad z = \sqrt{2x^1/\omega^1} \cos y^1 \quad (5.3.7)$$

приводит к гамильтониану

$$\tilde{h} = \omega^1 x^1 + \mu \left[A(x^1/\omega^1)^2 \cos^4 y^1 - B\sqrt{2x^1/\omega^1} \cos y^1 \cos \omega^2 \tilde{t} \right].$$

Последний зависит явно от времени. Введем поэтому две дополнительные переменные: $x^2 = -\tilde{h} / \omega^2$, $y^2 = \omega^2 \tilde{t}$. Гамильтониан задачи h получает дополнительное слагаемое $\omega^2 x^2$:

$$h = \tilde{h} + \omega^2 x^2 = (\omega^1 x^1 + \omega^2 x^2) + \mu \left\{ A(x^1/\omega^1)^2 \left[3/8 - (\cos 2y^1)/2 + (\cos 4y^1)/8 \right] - B\sqrt{x^1/(2\omega^1)} \left[\cos(y^1 - y^2) + \cos(y^1 + y^2) \right] \right\}. \quad (5.3.8)$$

Переменная $y^2 = \omega^2 \tilde{t}$ не нуждается в преобразовании. Поэтому производящая функция T не должна зависеть от x^2 . Это легко выполнимо, поскольку h_1 не зависит от x^2 . Итак, x^2 не будет встречаться в формулах для возмущений, и мы опустим индекс у x^1 .

В первом приближении функции H_1 и T_1 связаны согласно (5.2.7) соотношением

$$-(h_0 T_1) = \omega^1 \frac{\partial T_1}{\partial Y^1} + \omega^2 \frac{\partial T_1}{\partial Y^2} = h_1 - H_1, \quad (5.3.9)$$

где h_1 равна функции в фигурной скобке (8). В нерезонансном случае отсюда H_1 равна среднему значению h_1 :

$$H_1 = 3AX^2/(8(\omega^1)^2), \quad (5.3.10)$$

а T_1 находится по (3.3.16):

$$T_1 = \frac{AX^2}{(\omega^1)^3} \left(-\frac{1}{4} \sin 2Y^1 + \frac{1}{32} \sin 4Y^1 \right) - B\sqrt{\frac{X}{2\omega^1}} \left[\frac{\sin(Y^1 - Y^2)}{\omega^1 - \omega^2} + \frac{\sin(Y^1 + Y^2)}{\omega^1 + \omega^2} \right]. \quad (5.3.11)$$

Во втором приближении по (5.2.7)

$$\sum \omega^i \frac{\partial T_2}{\partial Y^i} = \frac{1}{2} (h_0 T_1 T_1) + (h_1 T_1) - H_2. \quad (5.3.12)$$

Но $(h_0 T_1)$ мы уже знаем. Подставляя (9), (10) в (12), получаем для правой части выражение

$$(H_1 - h_1, T_1)/2 + (h_1 T_1) - H_2 = (h_1 + H_1, T_1)/2 - H_2.$$

Вычисляя скобки Пуассона и представляя произведения тригонометрических функций суммой Фурье, находим

$$(h_1 + H_1, T_1)/2 = \sum A_{nm} \cos(n Y^1 + m Y^2),$$

где

$$A_{00} = -17A^2 X^3 / (64(\omega^1)^5) - B^2 / (4((\omega^1)^2 - (\omega^2)^2)),$$

$$A_{20} = 33A^2 X^3 / (64(\omega^1)^5), \quad A_{02} = -B^2 / (4((\omega^1)^2 - (\omega^2)^2)),$$

$$A_{40} = A_{60} = -3A^2 X^3 / (32(\omega^1)^5),$$

$$A_{1,\pm 1} = \frac{3ABX^{3/2}}{16(\omega^1)^3 \sqrt{2\omega^1}} \frac{(\omega^1)^2 \mp 6\omega^1 \omega^2 + (\omega^2)^2}{(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2}$$

$$A_{3,\pm 1} = 3ABX^{3/2} / (32(\omega^1)^3 \sqrt{2\omega^1}).$$

Остальные коэффициенты A_{nm} равны нулю.

Теперь по общей методике

$$H_2 = A_{00},$$

$$T_2 = \sum (A_{nm} / (n\omega^1 + m\omega^2)) \sin(n Y^1 + m Y^2). \quad (5.3.13)$$

Преобразованная функция Гамильтона H не зависит от быстрых переменных. Поэтому

$$X = \text{const}, \quad Y^2 = \omega^2 t,$$

$$Y^1 = \left\{ \omega^1 + 3AX\mu / (4(\omega^1)^2) - 51A^2X^2\mu^2 / (64(\omega^1)^5) + \dots \right\} t + \eta, \quad (5.3.14)$$

что совпадает с (3.4.9) с учетом разного смысла величин x (амплитуда и корень из амплитуды колебаний z , ср. (2.6.41) и (7)).

Выражение старых переменных через новые (5) выпишем за недостатком места только в первом приближении:

$$x = X + \left\{ (AX^2 / (8(\omega^1)^3)) (4 \cos 2Y^1 - \cos 4Y^1) + \right. \\ \left. + B \sqrt{\frac{X}{2\omega^1}} \left(\frac{\cos(Y^1 - Y^2)}{\omega^1 - \omega^2} + \frac{\cos(Y^1 + Y^2)}{\omega^1 + \omega^2} \right) \right\} \mu + \dots, \quad (5.3.15)$$

$$y^1 = Y^1 + \left\{ (AX / (16(\omega^1)^3)) (-8 \sin 2Y^1 + \sin 4Y^1) - \right. \\ \left. - \frac{B}{2\sqrt{2X}\omega^1} \left(\frac{\sin(Y^1 - Y^2)}{\omega^1 - \omega^2} + \frac{\sin(Y^1 + Y^2)}{\omega^1 + \omega^2} \right) \right\} \mu + \dots,$$

$$y^2 = Y^2.$$

Выражение новых переменных через старые получается вышеуказанной тривиальной подстановкой $T \rightarrow -T$, т.е.

$$X = x - \left\{ \frac{Ax^2}{8(\omega^1)^3} (4 \cos 2y^1 - \cos 4y^1) + B \sqrt{\frac{x}{2\omega^1}} \left(\frac{\cos(y^1 - y^2)}{\omega^1 - \omega^2} + \frac{\cos(y^1 + y^2)}{\omega^1 + \omega^2} \right) \right\} \mu + \dots, \quad (5.3.16)$$

$$Y^1 = y^1 - \left\{ \frac{Ax}{16(\omega^1)^3} (-8 \sin 2y^1 + \sin 4y^1) - \frac{B}{2\sqrt{2x}\omega^1} \left(\frac{\sin(y^1 - y^2)}{\omega^1 - \omega^2} + \frac{\sin(y^1 + y^2)}{\omega^1 + \omega^2} \right) \right\} \mu + \dots$$

Отметим, что (15) можно рассматривать как решение, (16) — как интегралы уравнения Дурффинга. При этом первый из интегралов (16) не содержит времени в отличие от второго, зависящего линейно от времени посредством Y^1 .

Пример 5.3.2. Движение близкого к планете спутника. В этой задаче с тремя степенями свободы функция Гамильтона с точностью до первой степени сжатия планеты равна

$$h = -\frac{\alpha^2}{2a} + \mu \frac{\alpha^2 R^2 P_2(\sin \delta)}{r^3}. \quad (5.3.17)$$

Здесь α^2 - произведение постоянной тяготения на массу планеты, R - экваториальный радиус планеты, μ - коэффициент при второй зональной гармонике, r - расстояние от центра планеты до спутника, δ - склонение, P_2 - многочлен Лежандра второго порядка, a - большая полуось орбиты спутника. Оскулирующие элементы и координаты a, r, \dots считаются функциями канонических элементов Делоне x, y ($y^1 = l$ - средняя аномалия, $y^2 = g$ - аргумент перигентра, y^3 - долгота восходящего узла).

Если разложить h в ряд Фурье по y^n , то придем к задаче, с формальной точки зрения немногим более сложной, чем задача предыдущего примера. Получим решение по возможности в замкнутой форме, ограничиваясь членами второго порядка. Прежде всего выразим $P_2(\sin \delta)$ через эксцентриситет ε , наклон I и истинную аномалию θ :

$$h = -\frac{\alpha^2}{2a} - \frac{\alpha^2 R^2 (2 - 3 \sin^2 I)}{4a^3} \frac{a^3}{r^3} \mu - \frac{3}{4} \mu \frac{\alpha^2 R^2 \sin^2 I}{a^3} \frac{a^3 \cos(2\theta + 2g)}{r^3}. \quad (5.3.18)$$

Первый член (18) зависит лишь от одной переменной x^1 . Чтобы избежать вырождения, добавим к нему среднее значение следующих. Непосредственным интегрированием легко получить

$$E_1(\alpha^3 r^{-3}) = (1 - \varepsilon^2)^{-3/2}, \quad (5.3.19)$$

$$E_1[\alpha^3 r^{-3} \cos(2\theta + 2g)] = 0.$$

Здесь E_n означает оператор осреднения по переменной y^n . Формулы (19) показывают, что среднее по $l = y^1$ не зависит от $g = y^2$, что делает задачу о движении спутника "близкой к интегрируемой". Представим h в форме

$$h = h_0 + \mu h_1 \quad (5.3.20)$$

$$\text{при } h_0 = -\frac{\alpha^2}{2a} - \mu_0 \frac{\alpha^2 R^2 (2 - 3 \sin^2 I)}{4a^3 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}},$$

$$h_1 = \frac{\varkappa^2 R^2 (2 - 3 \sin^2 I)}{4 a^3} \left[(1 - \varepsilon^2)^{-3/2} - \frac{a^3}{r^3} \right] - \frac{3 \varkappa^2 R^2 \sin^2 I}{4 a^3} \frac{a^3 \cos(2\theta + 2g)}{r^3} \quad (5.3.21)$$

После проведения всех выкладок следует положить $\mu_0 = \mu$.

Решим задачу с гамильтонианом (20) методом преобразований Ли. В небесной механике старые и новые переменные принято обозначать одинаково. Обычно это не вызывает недоразумений: ясно, что H , $\partial H / \partial a$, ω , ... выражены через новые (средние) элементы; h , $\partial h / \partial l$, ... - через старые (оскулирующие). Вычислим невозмущенные частоты (средние движения):

$$\omega^n = \partial H_0 / \partial X^n. \quad (5.3.22)$$

Правая часть (22) совпадает с правой частью уравнений Гамильтона, а следовательно, и уравнений Лагранжа для Y^n при $H = H_0$. Поэтому нет надобности на самом деле переходить к каноническим элементам. Это замечание кажется нам весьма существенным. В кеплеровых элементах пертурбационная функция всегда намного проще, чем в канонических, тогда как теоретические построения, напротив, намного проще в канонических элементах. Но всегда можно теоретические построения с каноническими элементами реализовать практически в кеплеровых элементах. Пользуясь уравнениями Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \frac{2\sqrt{a}}{\varkappa} \frac{\partial H_0}{\partial a} + \frac{1 - \varepsilon^2}{\varkappa \varepsilon \sqrt{a}} \frac{\partial H_0}{\partial \varepsilon} = \\ &= \varkappa a^{-3/2} \left\{ 1 + \frac{3\mu_0 R^2 (2 - 3 \sin^2 I)}{4 a^2 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \right\}, \\ \omega^2 &= - \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varkappa \varepsilon \sqrt{a}} \frac{\partial H_0}{\partial \varepsilon} + \frac{\operatorname{ctg} I}{\varkappa \sqrt{a(1 - \varepsilon^2)}} \frac{\partial H_0}{\partial I} = \\ &= \frac{3}{4} \varkappa \mu_0 R^2 \frac{4 - 5 \sin^2 I}{a^{7/2} (1 - \varepsilon^2)^2}, \\ \omega^3 &= \frac{-1}{\varkappa \sin I \sqrt{a(1 - \varepsilon^2)}} \frac{\partial H_0}{\partial I} = - \frac{3}{2} \varkappa \mu_0 \frac{R^2 \cos I}{a^{7/2} (1 - \varepsilon^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

Согласно (9) связь между H_1 и T_1 дается формулой

$$\sum_{n=1}^3 \omega^n \frac{\partial T_1}{\partial Y^n} = h_1 - H_1. \quad (5.3.24)$$

Мы выбрали h_1 так, чтобы $E_1 h_1 = 0$. Поэтому, как и следовало ожидать,

$$H_1 = 0. \quad (5.3.25)$$

Правая часть (24) не зависит от Y^3 . Поэтому можно считать $\partial T_1 / \partial Y^3 = 0$, и переписать (24) в форме

$$\omega^1 \frac{\partial T_1}{\partial l} + \omega^2 \frac{\partial T_1}{\partial g} = h_1(l, g). \quad (5.3.26)$$

Функция h_1 определяется второй из формул (21), где элементы считаются средними. Это значит, в частности, что g, θ выражаются теперь через средние элементы по формулам кеплерова движения.

Общее решение (26) определяется квадратурой (3.3.2):

$$T_1 = \int_0^{l/\omega^1} h_1(\tilde{l}, \tilde{g}) dt + \tilde{T}_1(g - \frac{\omega^2}{\omega^1} l), \quad (5.3.27)$$

где \tilde{T}_1 - произвольная функция одной переменной; под знаком интеграла считается $\tilde{l} = \omega^1 t$, $\tilde{g} = g - (\omega^2/\omega^1)l + \omega^2 t$. Интеграл от первого слагаемого для h_1 (21) вычисляется элементарно, как неопределенный, поскольку зависимости от \tilde{g} нет. Нужно только перейти к истинной аномалии:

$$\int [a^3/r^3 - (1-\varepsilon^2)^{-3/2}] dt = (1/\omega^1)(1-\varepsilon^2)^{-3/2}(\theta - l + \varepsilon \sin \theta). \quad (5.3.28)$$

Здесь использовано

$$\frac{a^3}{r^3} = \frac{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3}{(1 - \varepsilon^2)^3}, \quad dt = \frac{dl}{\omega^1} = \frac{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}{\omega^1(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} d\theta.$$

Интеграл от второго слагаемого

$$\int ((a^3/\tilde{r}^3) e^{2i\tilde{\theta}}) e^{2i\tilde{g}} d\tilde{t} \quad (5.3.29)$$

неэлементарен. Здесь $\tilde{\theta}, \tilde{r}$ зависят от \tilde{l} так же, как θ, r от l . Мы разложим (29) по степеням $\omega^2/\omega^1 \sim \mu_0$. Для этого вычислим сначала

$$\begin{aligned}
\alpha(\tilde{t}) &= 2i\omega^1 \int (a^3/\tilde{r}^3) e^{2i\tilde{\theta}} d\tilde{t} = \\
&= 2i(1-\varepsilon^2)^{-3/2} \int \left\{ e^{2i\tilde{\theta}} + (\varepsilon/2)e^{i\tilde{\theta}} + (\varepsilon/2)e^{3i\tilde{\theta}} \right\} d\tilde{\theta} = \\
&= (1-\varepsilon^2)^{-3/2} \left\{ \varepsilon e^{2i\tilde{\theta}} + \varepsilon e^{i\tilde{\theta}} + (\varepsilon/3)e^{3i\tilde{\theta}} \right\} + \text{const}.
\end{aligned}$$

Постоянную определим из условия обращения в нуль среднего значения $E_1 \alpha = 0$. Среднее значение экспоненты равно среднему значению косинуса, вычисленному И.Козан [18].

$$E_1 \cos k\theta = \frac{(-\varepsilon)^k}{(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^k} (1+k\sqrt{1-\varepsilon^2}). \quad (5.3.30)$$

Поэтому

$$\alpha(\tilde{t}) = (1-\varepsilon^2)^{-3/2} \left\{ \varepsilon e^{2i\tilde{\theta}} + \varepsilon e^{i\tilde{\theta}} + \frac{\varepsilon}{3} e^{3i\tilde{\theta}} + \frac{\varepsilon^2(1+2\sqrt{1-\varepsilon^2})}{3(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^2} \right\}.$$

Интегрируя (2) по частям, получаем

$$\begin{aligned}
&\int \left(\frac{\alpha^3}{\tilde{r}^3} e^{2i\tilde{\theta}} \right) e^{2i\tilde{g}} d\tilde{t} = \\
&= \frac{1}{2i\omega^1} \int e^{2i\tilde{g}} d\alpha = \frac{\alpha}{2i\omega^1} e^{2i\tilde{g}} - \frac{\omega^2}{\omega^1} \int \alpha e^{2i\tilde{g}} d\tilde{t}.
\end{aligned}$$

В последнем интеграле можно считать $\tilde{g} = \text{const}$, так как ошибка скажется лишь на возмущениях третьего порядка. После громоздких выкладок найдем

$$\begin{aligned}
\beta &= \omega^1 \int \alpha d\tilde{t} = -\frac{2}{3\varepsilon^2} [\tilde{\theta} - \tilde{l} - 2\varepsilon \sin \tilde{\theta}] + \\
&+ \frac{i}{3\varepsilon^2} \left\{ 2 \left[-\ln \frac{2(1-\varepsilon^2)}{(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})(1+\varepsilon \cos \tilde{\theta})} + \frac{\varepsilon^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right] - \right. \\
&\left. - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon \cos \tilde{\theta}} [\varepsilon + (2+3\varepsilon^2) \cos \tilde{\theta} + 4\varepsilon \cos^2 \tilde{\theta}] \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь также интеграл взят при условии нулевого среднего $E_1 \beta = 0$. Заметим, что α, β регулярны при $\varepsilon = 0$, а в разложении этих функций в ряд Фурье $\sum c_k e^{ik\tilde{t}}$ по средней аномалии коэффициент c_k имеет множитель $\varepsilon^{|k-2|}$.

Нам осталось только подставить в полученные формулы $\tilde{t} = l/\omega^1$, т.е. $\tilde{l} = l$, $\tilde{g}_\omega = g$, поскольку слагаемое на нижнем пределе можно включить в T_1 . Вот окончательное выражение для T_1 , вычисленной при условии $E_1 T_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
 T_1 = & -\frac{\varkappa^2 R^2 (2-3\sin^2 I)}{4a^3 (1-\varepsilon^2)^{3/2} \omega^1} (\theta - l + \varepsilon \sin \theta) - \\
 & -\frac{3\varkappa^2 R^2 \sin^2 I}{8a^3 (1-\varepsilon^2)^{3/2} \omega^1} \left[\sin(2\theta + 2g) + \varepsilon \sin(\theta + 2g) + \right. \\
 & + \frac{\varepsilon}{3} \sin(3\theta + 2g) + \frac{\varepsilon^2 (1 + 2\sqrt{1-\varepsilon^2})}{3(1 + \sqrt{1-\varepsilon^2})^2} \sin 2g \left. \right] + \\
 & + \frac{\varkappa^2 R^2 \sin^2 I \omega^2}{4a^3 (\omega^1)^2 \varepsilon^2} \left\{ -2(\theta - l - 2\varepsilon \sin \theta) \cos 2g + \right. \\
 & + 2 \left[\ln \frac{2(1-\varepsilon^2)}{(1 + \sqrt{1-\varepsilon^2})(1 + \varepsilon \cos \theta)} - \frac{\varepsilon^2}{1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}} \right] \sin 2g + \\
 & + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \theta} \left[\varepsilon + (2 + 3\varepsilon^2) \cos \theta + 4\varepsilon \cos^2 \theta \right] \sin 2g \left. \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{5.3.3I}$$

Связь между H_2 и T_2 согласно (12) с учетом (25) дается соотношением

$$\omega^1 \frac{\partial T_2}{\partial l} + \omega^2 \frac{\partial T_2}{\partial g} = \frac{1}{2} (h_1 T_1) - H_2.$$

Вычисление скобки Пуассона, определение H_2 , T_2 , нахождение возмущенных частот и связи старых и новых переменных не представляет ничего поучительного и не приводится здесь ввиду громоздкости.

Методом преобразований Ли теоремы типа теоремы Пуассона доказываются совсем легко.

Теорема 5.3.1. Пусть h - периодическая функция от компонент вектора y , причем h_0 зависит лишь от импульсов. Если частоты $\omega^i(x) = \partial h_0(x) / \partial x^i$ линейно-независимы над кольцом целых чисел, то всегда можно определить формально H_K как среднее значение Φ_K в (2), а T_K найти по формуле типа (3.3.16).

Преобразованная функция Гамильтона H зависит только от X . Поэтому X постоянны, Y - линейные функции времени.

Эта теорема нами фактически уже доказана. Она утверждает то же самое, что и теорема 3.5.1, но при разных условиях. В теореме 3.5.1 требовалась разложимость f по синусам, g - по косинусам; в теореме 1 требуется каноничность системы. Ясно, что ни одна из теорем не покрывает другой, хотя легко указать важный общий случай, когда h раскладывается по косинусам.

Очевидно, что теорема 3.5.2 будет верна в условиях теоремы 1.

В заключение рассмотрим обычный для небесной механики выродившийся случай, когда лишь часть координат являются быстрыми переменными. Именно, пусть вектор y разбивается на две части: $\tilde{y} = (y^1, \dots, y^{N_1})$, $\tilde{y} = (y^{N_1+1}, \dots, y^N)$, $1 \leq N_1 < N$; аналогично разбивается и вектор импульсов x ; в невозмущенном движении \tilde{x} , \tilde{x} , \tilde{y} постоянны, \tilde{y} - линейная функция времени.

Теорема 5.3.2. Пусть гамильтониан (4.1.2) имеет период 2π по каждой компоненте вектора y ; невозмущенная часть h_0 зависит только от \tilde{x} ; частоты $\omega^i(\tilde{X}) = \partial h_0(\tilde{X}) / \partial X_i$ ($i = 1, \dots, N_1$) линейно-независимы над кольцом целых чисел. Тогда вышеописанными процедурами можно преобразовать h периодической по быстрым переменным \tilde{Y} заменой переменных к функции H , не зависящей от \tilde{Y} .

Теорема 2 также фактически уже доказана. Переменные \tilde{X} будут постоянны, остальные медленные переменные определятся каноническими уравнениями, зависящими от \tilde{X} как от параметра и не содержащими быстрых переменных:

$$\dot{\tilde{X}} = - \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \tilde{Y}}, \quad \dot{\tilde{Y}} = \frac{\partial (H - H_0)}{\partial \tilde{X}}. \quad (5.3.32)$$

Мы вычли из H функцию $H_0(\tilde{X})$ как пропадающую при дифференцировании, теперь $H - H_0$ имеет множителем μ . После решения (32) быстрые переменные находятся простой квадратурой, поскольку в уравнении

$$\dot{\tilde{Y}} = \partial H(\tilde{X}, \tilde{X}, \tilde{Y}) / \partial \tilde{X} \quad (5.3.33)$$

правая часть уже известна.

Из теоремы 2 сразу вытекает теорема Пуанкаре о ранге.

Теорема 5.3.3. Пусть решение описанной в теореме 2 системы уравнений найдено методом малого параметра. Тогда это решение есть сумма членов вида

$$A \mu^k t^p \cos^r(ny_0 + \beta), \quad (5.3.34)$$

где $r = 0$ или 1 , целочисленный вектор n считаем отличным от нуля. При этом для всех переменных $p \leq k$, причем $p = k$ только для чисто вековых членов (для которых $r = 0$); для переменных \tilde{x} всегда $p \leq k - 1$, причем для чисто вековых членов $p \leq k - 2$.

Доказательство. Прежде всего найдем решение (32) методом малого параметра, считая \tilde{X} независимым параметром. Согласно теореме 2.6.4

$$\tilde{X} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tilde{X}_k(\tilde{t}), \quad \tilde{Y} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tilde{Y}_k(\tilde{t}), \quad (5.3.35)$$

где \tilde{X}_k, \tilde{Y}_k - многочлены степени k от \tilde{t} . Подставив (35) в $\partial(H - H_0)/\partial\tilde{X}$, представим производную как сумму членов вида (34) при $r = 0$, $p \leq k - 1$. Интегрирование (33) приводит к выражению

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \tilde{Y}_k(\tilde{t}), \quad (5.3.36)$$

где $\tilde{Y}_0 = \omega \tilde{t} + \eta$, \tilde{Y}_k - многочлены степени k от \tilde{t} .

Теперь подставим найденные X, Y в формулы замены переменных (4). Поскольку T_j периодичны по \tilde{Y} , все u_s, v_s представимы суммой членов вида

$$L(\tilde{X}, \tilde{X}, \tilde{Y}) e^{in\tilde{Y}}, \quad (5.3.37)$$

что согласно (35), (36) дает сумму членов вида (34) при $p \leq k$. Вспомним, что u_s, v_s умножаются на μ^s ($s \geq 1$). Поэтому для $x-X, y-Y$ всегда $p \leq k - 1$. Таким образом, p может равняться k только для членов разложения X, Y по степеням μ . Но это - чисто вековые члены. Первое утверждение доказано.

Обратимся к \tilde{x} . Поскольку $\tilde{X} = \text{const}$, по доказанному $p \ll k - 1$. Поскольку $\tilde{u}_1 = -\partial T_1 / \partial \tilde{Y}$, то \tilde{u}_1 представляется суммой членов вида (37) при не равном нулю векторе n . Чисто вековые члены возникают поэтому лишь от \tilde{u}_s при $s \geq 2$. Для них $p \ll k - 2$, и теорема доказана полностью.

В небесной механике \tilde{x} — большие полуоси, \tilde{x} — наклоны и эксцентриситеты, \tilde{y} — средние аномалии, \tilde{y} — долготы узлов и перигентов. Из теоремы 3 вытекает отсутствие вековых возмущений больших полуосей первого порядка (теорема Лапласа — Лагранжа) и отсутствие чисто вековых возмущений больших полуосей второго порядка (теорема Пуассона). В настоящее время этим теоремам уже не придают столь большого значения для устойчивости Солнечной системы, как в прежние эпохи. Причина — осознание того факта, что сами ряды метода малого параметра бесполезны на временах порядка μ^{-1} и больше.

§ 5.4. Движение в окрестности равновесия

При движении в окрестности точки покоя мы, как и в § 3.6, не будем вводить малого параметра, а сгруппируем разложение функции Гамильтона по однородным многочленам h_k степени k :

$$h(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} h_k(x, y). \quad (5.4.1)$$

Суммирование начинается с квадратичных слагаемых, чтобы разложения \dot{x}, \dot{y} по степеням x, y не содержали свободных членов и точке $x = y = 0$ соответствовало равновесие системы с гамильтонианом (1). Квадратичную часть (1) считаем уже приведенной к главным осям и рассматриваем только невырожденный случай, когда

$$h_2 = \sum_{n=1}^N \lambda_n x^n y^n \quad (\lambda_n \neq 0). \quad (5.4.2)$$

Функцию Гамильтона T вспомогательной системы (5.1.15) также считаем разложенной по однородным многочленам T_k . Скобка Пуассона (h_k, T_m) есть или нуль, или форма степени $k + m - 2$. Для неизменности h_2 нужно разложение T начинать с членов третьего порядка:

$$T(x, y) = \sum_{k=3}^{\infty} T_k(x, y). \quad (5.4.3)$$

Под действием преобразования Ли произвольная функция f , представленная рядом однородных многочленов

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x, y), \quad (5.4.4)$$

преобразуется по формуле типа (5.2.5)

$$f(x, y) = F(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(X, Y), \quad (5.4.5)$$

$$\text{где } F_k = f_k + \sum \frac{1}{m!} (f_{j_0} T_{j_1} \dots T_{j_m}). \quad (5.4.6)$$

Скобка Пуассона $(f_0 T_j)$ с постоянной f_0 обращается в нуль. Не умаляя общности, считаем ниже $f_0 = 0$. Тогда суммирование в (6) осуществляется по области $1 \leq m \leq k-1$, $1 \leq j_0 \leq k-1$, $j_1, \dots, j_m \geq 3$, $j_0 + j_1 + \dots + j_m = k + 2m$. Число слагаемых в (6) при фиксированном m , как показано в Приложении 2, равно $W(m+1, k-m-1) = \binom{k-1}{m}$, всего правая часть (6) содержит 2^{k-1} слагаемых. Для h в (6) суммирование по j_0 начинается с двух. Поэтому при фиксированном m получаем $W(m+1, k-m-2) = \binom{k-2}{m}$ слагаемых, а всего в правой части (6) 2^{k-2} слагаемых. Для замены переменных следует положить $f = f_1$ ($f_1 = X$ или $f_1 = Y$). Тогда $j_0 = 1$; при фиксированном m получаем $W(m, k-m-1) = \binom{k-2}{m-1}$ слагаемых, а всего в правой части (6) при $k > 1$ будет 2^{k-2} слагаемых. Выпишем явно соотношения (6) для первых значений k для гамильтониана:

$$\begin{aligned} H_2 &= h_2, \\ H_3 &= h_3 + (h_2 T_3), \\ H_4 &= h_4 + (h_2 T_4) + (h_3 T_3) + (h_2 T_3 T_3)/2 \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

и для формы f_1

$$F_1 = f_1,$$

$$F_2 = (f_1 T_3),$$

$$F_3 = (f_1 T_4) + (f_1 T_3 T_3)/2, \quad (5.4.8)$$

$$F_4 = (f_1 T_5) + (f_1 T_3 T_4)/2 + (f_1 T_4 T_3)/2 + (f_1 T_3 T_3 T_3)/6.$$

В частности, для замены переменных $f_1 = X$ или $f_1 = Y$ внутренние скобки Пуассона вычисляются сразу:

$$\begin{aligned} x = X - \frac{\partial T_3}{\partial Y} - \left[\frac{\partial T_4}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_3}{\partial Y} T_3 \right) \right] - \\ - \left[\frac{\partial T_5}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_3}{\partial Y} T_4 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_4}{\partial Y} T_3 \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial T_3}{\partial Y} T_3 T_3 \right) \right] + \dots, \\ y = Y + \frac{\partial T_3}{\partial X} + \left[\frac{\partial T_4}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_3}{\partial X} T_3 \right) \right] + \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

$$+ \left[\frac{\partial T_5}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_3}{\partial X} T_4 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_4}{\partial X} T_3 \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial T_3}{\partial X} T_3 T_3 \right) \right] + \dots$$

Соотношение (6) для функции Гамильтона имеет вид (5.3.1), где роль h_0 выполняет h_2 :

$$H_k = (h_2 T_k) + \Phi_k \quad (k \geq 3) \quad (5.4.10)$$

с функцией Φ_k , определенной на предыдущем шаге.

С учетом (2) представим (10) в форме

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \left(-X^n \frac{\partial T_k}{\partial X^n} + Y^n \frac{\partial T_k}{\partial Y^n} \right) = \Phi_k - H_k. \quad (5.4.11)$$

Обозначим $\Phi_k = \sum b_k^{\alpha, \beta} X^\alpha Y^\beta$, $H_k = \sum B_k^{\alpha, \beta} X^\alpha Y^\beta$,
 $T_k = \sum c_k^{\alpha, \beta} X^\alpha Y^\beta$,

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ - мультииндексы и суммирование подчинено условию $|\alpha| + |\beta| = k$. Тождество (11) сводится к равенству коэффициентов

$$c_k^{\alpha, \beta} \sum_{n=1}^N \lambda_n (\beta_n - \alpha_n) = b_k^{\alpha, \beta} - B_k^{\alpha, \beta}. \quad (5.4.12)$$

Для упрощения H нужно уничтожить как можно больше коэффициентов $B_k^{\alpha, \beta}$. Полагаем

$$B_k^{\alpha, \beta} = 0, \quad c_k^{\alpha, \beta} = b_k^{\alpha, \beta} / \left(\sum \lambda_n (\beta_n - \alpha_n) \right), \quad (5.4.13)$$

если
$$\sum_{n=1}^N \lambda_n (\beta_n - \alpha_n) \neq 0. \quad (5.4.14)$$

В противном случае $c_k^{\alpha, \beta}$ произвольно,

$$B_k^{\alpha, \beta} = b_k^{\alpha, \beta}. \quad (5.4.15)$$

Обычно в (15) принимают для простоты $c_k^{\alpha, \beta} = 0$.

Если частоты λ_n линейно-независимы над кольцом целых чисел, то (14) нарушается лишь для случая $\alpha_n = \beta_n$, что возможно только при четном k . В новых переменных X, Y гамильтониан F зависит лишь от произведений $Z^n = X^n Y^n$:

$$H = H(Z^1, \dots, Z^N). \quad (5.4.16)$$

В силу уравнений движения

$$\begin{aligned} \dot{z}^n &= X^n \dot{Y}^n + Y^n \dot{X}^n = X^n \frac{\partial H}{\partial X^n} - Y^n \frac{\partial H}{\partial Y^n} = \\ &= X^n \frac{\partial H}{\partial Z^n} Y^n - Y^n \frac{\partial H}{\partial Z^n} X^n = 0, \end{aligned}$$

поэтому $Z^n = \text{const}$. Обозначим $\partial H / \partial Z^n = \tilde{\lambda}_n(Z)$. Уравнения движения

$$\dot{X}^n = -\tilde{\lambda}_n X^n, \quad \dot{Y}^n = \tilde{\lambda}_n Y^n \quad (5.4.17)$$

немедленно интегрируются:

$$X^n = A^n e^{-\tilde{\lambda}_n t}, \quad Y^n = B^n e^{\tilde{\lambda}_n t}, \quad (5.4.18)$$

где характеристические показатели $\tilde{\lambda}_n$ в отличие от линейной системы зависят от начальных данных посредством $Z^n = A^n B^n$.

Пример 5.4.1. Пусть $N = 1$,

$$\tilde{h} = (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)\omega/2 + \alpha(\tilde{x}^3 - 3\tilde{x}\tilde{y}^2) + 2\beta(\tilde{x}^3\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{y}^3). \quad (5.4.19)$$

Преобразование (2.5.15), записанное в форме

$$\begin{aligned}x &= \tilde{x} - i\tilde{y}, & 2\tilde{x} &= x + y, \\y &= \tilde{x} + i\tilde{y}, & 2i\tilde{y} &= -x + y,\end{aligned}\tag{5.4.20}$$

является каноническим, правда, меняющим функцию Гамильтона

$$h = 2i\tilde{h} = i\omega xy + i\alpha(x^3 + y^3) + \beta(-x^3y + xy^3).\tag{5.4.21}$$

Выпишем нетривиальные соотношения (12) для $k = 3$, когда $\Phi_3 = h_3 = i\alpha(X^3 + Y^3)$, $\lambda = i\omega$:

$$-3i\omega c_3^{3,0} = i\alpha - B_3^{3,0}, \quad 3i\omega c_3^{0,3} = i\alpha - B_3^{0,3},$$

откуда $B_3^{3,0} = B_3^{0,3} = 0$, $c_3^{3,0} = -\alpha/(3\omega)$, $c_3^{0,3} = \alpha/(3\omega)$.

Мы нашли функции H, T в третьем порядке:

$$H_3 = 0, \quad T_3 = (-X^3 + Y^3)\alpha/(3\omega),\tag{5.4.22}$$

после чего сравнение (7) и (10) позволяет определить Φ :

$$\Phi_4 = h_4 + (h_3 T_3) + (h_2 T_3 T_3)/2 = h_4 + (h_3 T_3)/2.$$

Здесь использовано вытекающее из (7), (22) равенство

$$(h_2 T_3) = H_3 - h_3 = -h_3.$$

Вычислим скобку Пуассона

$$\Phi_4 = \beta(-X^3 Y + X Y^3) - 3i\alpha X^2 Y^2/(2\omega)$$

и выпишем нетривиальные соотношения (12) для $k = 4$:

$$-2i\omega c_4^{3,1} = -\beta - B_4^{3,1},$$

$$0 c_4^{2,2} = -3i\alpha/(2\omega) - B_4^{2,2},$$

$$2i\omega c_4^{1,3} = \beta - B_4^{1,3},$$

откуда $B_4^{3,1} = B_4^{1,3} = 0$, $B_4^{2,2} = -3i\alpha/(2\omega)$, $c_4^{2,2}$ произвольно, $c_4^{3,1} = c_4^{1,3} = -i\beta/(2\omega)$.

Считая $c_4^{2,2} = 0$, определим T и H с точностью до четвертого порядка включительно:

$$\begin{aligned} T &= \alpha(-X^3 + Y^3)/(3\omega) - i\beta(X^3Y + XY^3)/(2\omega), \\ H &= i\omega Z - 3i\alpha Z^2/(2\omega), \quad Z = XY. \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Зависимость X, Y от времени найдем согласно (18), (23):

$$X = Ae^{-i\tilde{\omega}t}, \quad Y = Be^{i\tilde{\omega}t}, \quad (5.4.24)$$

где $\tilde{\omega} = \omega - 3\alpha AB/\omega$.

Вещественность \tilde{x}, \tilde{y} требует комплексной сопряженности x, y , а следовательно, X, Y и A, B . Сдвинув начало отсчета времени, можно добиться выполнения условия $A = B \geq 0$.

С точностью до третьего порядка замена переменных согласно (9) выполняется по формулам

$$\begin{aligned} x &= X - \frac{\alpha}{\omega} Y^2 + \left[\frac{i\beta}{2\omega} X^3 + \frac{\alpha^2}{\omega^2} X^2 Y + \frac{3i\beta}{2\omega} XY^2 \right], \\ y &= Y - \frac{\alpha}{\omega} X^2 + \left[-\frac{3i\beta}{2\omega} X^2 Y + \frac{\alpha^2}{\omega^2} XY^2 - \frac{i\beta}{2\omega} Y^3 \right]. \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

Хорошим контролем служит инвариантность (25) относительно замены $x \rightarrow y, y \rightarrow x, X \rightarrow Y, Y \rightarrow X, i \rightarrow -i$, вытекающей из инвариантности $i\hbar, iT, iH$ относительно замены $X \rightarrow Y, Y \rightarrow X, i \rightarrow -i$. Последняя в свою очередь есть очевидное следствие вещественности \tilde{h} и комплексной сопряженности x, y .

Отделяя вещественную и мнимую части, находим

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{X} + \frac{\alpha}{\omega} (\tilde{X}^2 - \tilde{Y}^2) + \left(\frac{\alpha^2}{\omega^2} \tilde{X}^3 + \frac{\alpha^2}{\omega^2} \tilde{X}\tilde{Y}^2 - \frac{2\beta}{\omega} \tilde{Y}^3 \right), \\ \tilde{y} &= \tilde{Y} + \frac{2\alpha}{\omega} \tilde{X}\tilde{Y} + \left(-\frac{2\beta}{\omega} \tilde{X}^3 + \frac{\alpha^2}{\omega^2} \tilde{X}^2\tilde{Y} + \frac{\alpha^2}{\omega^2} \tilde{Y}^3 \right), \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

где $\tilde{X} = A \cos \tilde{\omega}t, \tilde{Y} = A \sin \tilde{\omega}t, \tilde{\omega} = \omega - 3\alpha A^2/\omega$. (5.4.27)

КВАДРАТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

§ 6.1. Наводящие соображения

В главах 2-5 мы систематически пользовались разложениями искомых функций в ряды по степеням μ . В настоящее время все чаще применяют с этой целью различного вида итерационные процессы. Один из наиболее употребительных - метод касательных Ньютона. Пусть требуется решить уравнение $f(x) = 0$, приближенный корень которого x_0 известен. Обозначим поправку через $\Delta x_0 = x - x_0$ и перепишем уравнение в виде

$$f(x_0 + \Delta x_0) = 0. \quad (6.1.1)$$

Разлагая в ряд Тейлора, находим

$$f(x_0) + f'(x_0)\Delta x_0 + \dots = 0$$

с ошибкой порядка Δx_0^2 :

$$\Delta x_0 = -[f'(x_0)]^{-1}f(x_0). \quad (6.1.2)$$

Естественно считать, что поправка (2) приближает нас к искомому корню. Обозначим $x_0 + \Delta x_0$ через x_1 и повторим операцию, приняв x_1 за новое исходное приближение. Приходим к уравнению такого же вида, как и (1):

$$f(x_1 + \Delta x_1) = 0. \quad (6.1.3)$$

Продолжая процесс, получаем последовательность

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}f(x_n) \quad (n=0,1,\dots). \quad (6.1.4)$$

При определенных условиях, наложенных на функцию f , последовательность x_n сходится к искомому решению $x = \lim x_n$, причем ошибка каждого приближения пропорциональна квадрату ошибки предыдущего, откуда термины "квадратичные приближения" и "квадратичная сходимость".

Пример 6.1.1. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = \mu, \quad (6.1.5)$$

где $f(0) = 0$. При малом μ естественно принять $x_0 = 0$. Согласно (2) $x_1 = \Delta x_0 = [f'(0)]^{-1} \mu$. Обозначим Δx_1 через y и положим $x = x_1 + y$. Придем к уравнению $f(x_1 + y) = \mu$, которому придадим форму

$$\tilde{f}(y) = \tilde{\mu} \quad (6.1.6)$$

при $\tilde{f}(y) = f(x_1 + y) - f(x_1)$, $\tilde{\mu} = \mu - f(x_1)$. Очевидно, что $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{\mu} \sim \mu^2$, поскольку $f(x_1) = f([f'(0)]^{-1} \mu) = \mu + O(\mu^2)$. Таким образом, метод Ньютона на каждом шаге сводится к преобразованию (5) в уравнение того же вида (6), но с правой частью порядка квадрата μ . Если решать (5) методом малого параметра, то ошибки будут убывать, как $\mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \dots$. Метод касательных приводит к убыванию ошибок, как $\mu, \mu^2, \mu^4, \mu^8, \dots$. Имеем явный выигрыш в скорости сходимости, в легкости алгоритмизации итерационного типа, хотя проигрыш при аналитическом построении общего члена x_n .

Ниже мы покажем, что метод Ньютона как преобразование уравнения с квадратичным уменьшением малого параметра применим и для дифференциальных уравнений небесной механики.

§ 6.2. Использование квадратичных приближений в методах малого параметра, осреднения, Цайпеля, Ли

1. Метод малого параметра. Рассмотрим уравнения с медленными и быстрыми переменными

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu f(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \mu g(x, y, \mu). \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

В § 3.3 показано, что решение системы методом малого параметра может быть получено заменой переменных (3.2.2), преобразующей исходные уравнения к виду (3.2.3) при $F_k = G_k = 0$. Согласно методу касательных в формулах замены переменных (3.2.2) надо оставить только члены первой степени

$$\begin{aligned} x &= X + \mu u(X, Y, \mu), \\ y &= Y + \mu v(X, Y, \mu). \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Таким путем можно достичь обращения в нуль лишь F_1, G_1 , но этого и достаточно для квадратичной сходимости. Действительно, в результате замены (2) система (1) перейдет в

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \mu^2 F(X, Y, \mu), \\ \dot{Y} &= \omega(X) + \mu^2 G(X, Y, \mu). \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Чтобы получить явные выражения для F, G , продифференцируем (2), заменим \dot{X}, \dot{Y} согласно (3) и приравняем полученное правой части (1):

$$\begin{aligned} (I + \mu \frac{\partial u}{\partial X}) \mu^2 F + \mu \frac{\partial u}{\partial Y} (\omega + \mu^2 G) &= \\ = \mu f(X + \mu u, Y + \mu v, \mu), & \\ \mu^3 \frac{\partial v}{\partial X} F + (I + \mu \frac{\partial v}{\partial Y}) (\omega + \mu^2 G) &= \\ = \omega(X + \mu u) + \mu g(X + \mu u, Y + \mu v, \mu). & \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Здесь и в (6), не считая явно указанных, аргументами функций ω, u, v, F, G служат X, Y, μ ; функций $f, g - X, Y, 0$; символом I обозначены единичные матрицы размерностей N_1 в первой строке и N_2 - во второй.

Определим u, v по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial Y} \omega &= f(X, Y, 0), \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \omega &= \frac{\partial \omega}{\partial X} u + g(X, Y, 0), \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

совпадающим с (3.2.9), (3.2.11) для $\vartheta = 1, \Phi_1 = f, \Psi_1 = g, F_1 = G_1 = 0$. Заметим, что решением (5) можно выбрать функции u, v , не зависящие от μ . С учетом (5) система (4) запишется в окончательной форме:

$$\begin{aligned} (I + \mu \frac{\partial u}{\partial X}) F + \mu \frac{\partial u}{\partial Y} G &= \frac{1}{\mu} [f(X + \mu u, Y + \mu v, \mu) - f], \\ \mu \frac{\partial v}{\partial X} F + (I + \mu \frac{\partial v}{\partial Y}) G &= \\ = \frac{1}{\mu^2} [\omega(X + \mu u) - \omega - \mu \frac{\partial \omega}{\partial X} u] + \frac{1}{\mu} [g(X + \mu u, Y + \mu v, \mu) - g]. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Это - линейная система N уравнений относительно $N_1 + N_2 = N$ компонент векторов F, G . Определитель равен $I + O(\mu)$, а правые части - $O(I)$. Поэтому F, G имеют нулевой порядок относительно μ .

Итак, система (1) преобразована в систему (3) того же вида, но с множителем μ^2 вместо μ в правых частях.

Метод Ньютона для решения конечных уравнений типа $f(x) = 0$ допускает многочисленные модификации [9]. Например, $f'(x_0)$ можно вычислять с ошибкой порядка μ . Еще больше возможностей для модификаций при решении дифференциальных уравнений типа (1) - к функциям u, v можно добавить любые слагаемые порядка μ . Например, в (5), (6) можно $f(X, Y, 0)$ заменить на $f(X, Y, \mu)$. Это обстоятельство всегда надо иметь в виду при сравнении алгоритмов разных авторов, решающих одну и ту же задачу методом касательных. Более существенна модификация, при которой (5) заменяется на

$$\frac{\partial u}{\partial Y} \omega = f, \quad \frac{\partial v}{\partial Y} \omega = \frac{\omega(X + \mu u) - \omega(X)}{\mu} + g. \quad (6.2.7)$$

В этом случае приходим к более симметричным формулам

$$\begin{aligned} & (I + \mu \frac{\partial u}{\partial X}) F + \mu \frac{\partial u}{\partial Y} G = \\ & = \frac{1}{\mu} [f(X + \mu u, Y + \mu v, \mu) - f], \\ & \mu \frac{\partial v}{\partial X} F + (I + \mu \frac{\partial v}{\partial Y}) G = \\ & = \frac{1}{\mu} [g(X + \mu u, Y + \mu v, \mu) - g]. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

2. Метод осреднения. Процедура Ньютона в общем случае неприменима в методе осреднения даже при отсутствии резонансов. В самом деле, уравнение (1) преобразуется к виду (3.2.3) при $F_1(X) = E f_1(X, Y)$, где через $E f$ обозначено среднее значение 2π -периодической функции от Y . При $E f_1 \neq 0$ мы спотыкаемся уже на первом шаге. Но даже если $E f_1 = 0$, то нет гарантии, что мы не споткнемся на следующих шагах.

Для применимости метода касательных достаточно обращения в нуль Ef_1 на каждом шаге, поскольку Eg_1 можно включить в вектор частот ω . Надо только допустить зависимость ω от малого параметра μ . Соотношение $Ef_1 = 0$ выполняется обычно для канонических систем, о чем пойдет речь ниже, и в условиях теоремы 3.5.1, на которых мы здесь остановимся.

Рассмотрим обобщенную систему (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu f(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \omega(x, \mu) + \mu g(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

где f, g периодичны по y и $Ef = 0$. Замена (2) преобразует (9) в

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \mu^2 F(X, Y, \mu), \\ \dot{Y} &= \Omega(X, \mu) + \mu^2 G(X, Y, \mu) \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

с модифицированным вектором частот Ω . Дифференцируя (2) с учетом (10), приходим к (4), где слева ω надо заменить на Ω . Положим

$$\Omega = \omega + \mu Eg \quad (6.2.11)$$

и определим u, v как периодическое по Y решение системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial Y} \omega &= f, \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \omega &= \frac{\partial \omega}{\partial X} u + g - Eg. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Произвольными функциями распорядимся так, чтобы $Eu = 0, Ev = 0$. В результате (4) принимают окончательную форму

$$\begin{aligned} & \left(I + \mu \frac{\partial u}{\partial X} \right) F + \mu \frac{\partial u}{\partial Y} G = \\ & = \frac{1}{\mu} \left[f(X + \mu u, Y + \mu v, \mu) - f \right] - \frac{\partial u}{\partial Y} Eg. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial X} F + \left(I + \mu \frac{\partial v}{\partial Y} \right) G =$$

$$= \frac{1}{\mu^2} \left[\omega(X + \mu u, \mu) - \omega - \mu \frac{\partial \omega}{\partial X} u \right] + \\ + \frac{1}{\mu} \left[g(X + \mu u, Y + \mu v, \mu) - g \right] - \frac{\partial v}{\partial Y} E g .$$

Нам удалось сделать один шаг методом касательных. Для следующего необходимо $E\mathcal{F} = 0$, что при сформулированных выше условиях не обязательно имеет место. Наложим на (9) дополнительное ограничение разложимости f в ряд по синусам кратных y , g - по косинусам. Решая (12), находим $u \sim \sum \cos$, $v \sim \sum \sin$. Далее правая часть первого из уравнений (13) разлагается по синусам, а второго - по косинусам. Решением (13) для F будет ряд по синусам, для G - по косинусам, что и доказывает применимость метода касательных.

Как и выше, возможны многочленные модификации формул. Например, (11), (12) можно заменить на

$$\frac{\partial u}{\partial Y} \omega = f, \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \omega = \frac{\omega(X + \mu u, \mu) - E\omega(X + \mu u, \mu)}{\mu} + g - E g, \quad (6.2.14)$$

$$\Omega = E\omega(X + \mu u, \mu) + \mu E g .$$

В результате вместо (13) придем к

$$(I + \mu \frac{\partial u}{\partial X}) F + \mu \frac{\partial u}{\partial Y} G = \frac{1}{\mu} [f(X + \mu u, Y + \mu v, \mu) - f] + \\ + \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial Y} [\omega - E\omega(X + \mu u, \mu) - \mu E g], \quad (6.2.15)$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial X} F + (I + \mu \frac{\partial v}{\partial Y}) G = \frac{1}{\mu} [g(X + \mu u, Y + \mu v, \mu) - g] + \\ + \frac{1}{\mu} \frac{\partial v}{\partial Y} [\omega - E\omega(X + \mu u, \mu) - \mu E g].$$

3. Метод Цайпеля. Пусть функция Гамильтона имеет вид

$$h = h_0(x, \mu) + \mu h_1(x, y, \mu). \quad (6.2.16)$$

Введем производящую функцию S как решение уравнения

$$\frac{\partial S(X, Y, \mu)}{\partial Y} \omega(X, \mu) = E h_1(X, Y, 0) - h_1(X, Y, 0), \quad (6.2.17)$$

где $\omega = \partial h_0 / \partial X$.

Замена переменных определится как решение трансцендентной системы

$$\begin{aligned} x &= X + \mu \frac{\partial S(X, y, \mu)}{\partial y}, \\ Y &= y + \mu \frac{\partial S(X, y, \mu)}{\partial X}. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Новую функцию Гамильтона на основании сказанного в § 4.1 можно представить в форме

$$H(X, Y, \mu) = H_0(X, \mu) + \mu^2 H_1(X, Y, \mu), \quad (6.2.19)$$

где $H_0 = h_0(X, \mu) + \mu E h_1(X, Y, 0)$,

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\mu^2} \left[h_0(x, \mu) - h_0(X, \mu) - \mu \frac{\partial S(X, Y, \mu)}{\partial Y} \omega(X, \mu) \right] + \\ &+ \frac{1}{\mu} \left[h_1(x, y, \mu) - h_1(X, Y, 0) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Здесь x, y должны быть выражены через X, Y в силу (18). Возможные модификации формул предоставляем читателю.

4. Метод преобразований Ли. В условиях предыдущего пункта определим производящую функцию T соотношением

$$\frac{\partial T(X, Y, \mu)}{\partial Y} \omega(X, \mu) = h_1(X, Y, 0) - E h_1(X, Y, 0). \quad (6.2.21)$$

Замена переменных найдется как решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\mu \frac{\partial T(x, y, \mu)}{\partial y}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \mu \frac{\partial T(x, y, \mu)}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

от точки (X, Y) при $\tau = 0$ до точки (x, y) при $\tau = 1$. Новая функция Гамильтона, как и любая функция, также получается интегрированием производной

$$dh/d\tau = \mu(hT)$$

вдоль траекторий системы (22) между указанными точками. В интегральной форме

$$H = h(X, Y, \mu) + \mu \int_0^1 (hT) \Big|_{\tau} d\tau, \quad (6.2.23)$$

где скобки Пуассона вычисляются вдоль траекторий системы (22). С учетом (21) H запишется в виде (19) при

$$H_0 = h_0(X, \mu) + \mu E h_1(X, Y; 0),$$

$$H_1 = \frac{1}{\mu} \int_0^1 \left\{ \mu (h_1 T) \Big|_{\tau} - (\partial T / \partial y) \omega \Big|_{\tau} + (\partial T / \partial y) \omega \Big|_0 \right\} d\tau. \quad (6.2.24)$$

§ 6.3. Исследование основных соотношений метода касательных

В предыдущем параграфе в результате использования квадратичных приближений в методах малого параметра, осреднения, Цайпеля, Ли мы пришли к уравнениям (5), (7), (12), (14), (17), (21). Замечательно, что все они имеют вид подробно исследованного в третьей главе уравнения (3.3.1). Поэтому с теоретической точки зрения сказанного по поводу метода касательных уже достаточно. Но для практического применения надо еще уметь производить с решениями указанных уравнений сложные операции. Конечно, их сложность исчезает при численном решении с помощью ЭВМ. При аналитическом же решении операции обычно невыполнимы без использования разложений в ряды. Этим значительно снижаются анонсированные преимущества метода касательных, чем и объясняется его сравнительно редкое применение в задачах небесной механики.

Укажем явно, какие операции нужно выполнить после нахождения функций u, v или S, T .

1. Методы малого параметра и осреднения. Во-первых, следует получить функции типа $f(X + \mu u, Y + \mu v, \mu)$. Поскольку обычно f, u, v — тригонометрические ряды, следует подставлять ряды в ряды и представлять полученное снова рядом Фурье. Можно пользоваться для этого формулами типа

$$e^{inY} + A\mu e^{imY} = e^{inY} + A\mu e^{i(m+n)Y} + \frac{A^2}{2}\mu^2 e^{i(n+2m)Y} + \dots$$

Во-вторых, надо решить систему линейных уравнений типа (6.2.6) относительно компонент векторов F, G . Получить тригонометрическое разложение определителя Δ достаточно просто. При $\mu = 0$ очевидно, что $\Delta = I$, так что при малых μ нетрудно получить и ряд Фурье для Δ^{-1} .

2. Метод Цайпеля. Для нахождения явного вида замены переменных нужно решить трансцендентные уравнения (6.2.18). Можно использовать разложение в ряд согласно (4.1.7). Затем нужно найти H подстановкой $H = h(X + \mu u, Y + \mu v, \mu)$. Если прибегать к рядам по μ , можно воспользоваться (4.2.2).

3. Метод преобразований Ли. Для нахождения явного вида замены переменных нужно решить дифференциальные уравнения (6.2.22). С помощью рядов решение дается формулой (5.3.4). Затем нужно вычислить $h(X + \mu u, Y + \mu v, \mu)$. С помощью рядов результат можно явно получить по (5.2.5). Формулы можно несколько упростить, поскольку теперь $S_1 = S, S_2 = \dots = 0; T_1 = T, T_2 = \dots = 0; h_2 = h_3 = \dots = 0$.

§ 6.4. Движение в окрестности равновесия

Подход и трудности здесь аналогичны случаю системы с медленными и быстрыми переменными. Избегая тейлоровских разложений по степеням x , записываем исходную систему в виде (2.5.1), предполагая ее автономной:

$$\dot{x} = Ax + \mu f(x). \quad (6.4.1)$$

Постоянная матрица A , вектор-функция f и вводимые дальше u, F могут зависеть от μ . Замена переменных

$$x = X + \mu u(x) \quad (6.4.2)$$

переводит (1) в

$$\dot{X} = AX + \mu F(X). \quad (6.4.3)$$

Связь между u и F получаем, дифференцируя (2), выражая \dot{X} по (3) и приравнивая полученное правой части (1):

$$\left[\frac{\partial u}{\partial X} AX - Au - f(X) \right] + \left(I + \mu \frac{\partial u}{\partial X} \right) F = f(X + \mu u) - f(X). \quad (6.4.4)$$

Руководствуясь идеями метода малого параметра, приравняем нулю выражение в квадратной скобке (4)

$$\frac{\partial u}{\partial X} AX - Au = f(X), \quad (6.4.5)$$

после чего находим F решением линейной системы алгебраических уравнений:

$$F(X) = \left(I + \mu \frac{\partial u}{\partial X} \right)^{-1} [f(X + \mu u) - f(X)]. \quad (6.4.6)$$

Поскольку $\mu F = O(\mu^2)$, убеждаемся в осуществимости процедуры касательных.

Осталось решить систему (5). Считая в согласии с (3.6.10) $A = \text{diag} \{ \lambda_n \}$, переписываем (5) в скалярной форме

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i X^i \frac{\partial u^n}{\partial X^i} - \lambda_n u^n = f^n(X). \quad (6.4.7)$$

Для каждого n мы получили независимое скалярное линейное уравнение в частных производных первого порядка. Изложенным в [8] методом можно отыскать общее решение (7):

$$u^n = X^n \int_0^{(\ln X^n)/\lambda_n} e^{-\lambda_n t} f^n(e^{\lambda_i t} X^i (X^n)^{-\lambda_i/\lambda_n}) dt + X^n \tilde{u}^n ((X^i)^{\lambda_n} (X^n)^{-\lambda_i}), \quad (6.4.8)$$

где \tilde{u}^n — произвольная функция. Для f^n , \tilde{u}^n явно указан аргумент, стоящий на i -м месте. Фактически \tilde{u}^n зависит от $(N-1)$ аргументов, поскольку на n -ом месте стоит единица.

Если f^n равна одночлену $C (X^1)^{\alpha_1} \dots (X^N)^{\alpha_N}$, то при

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_N \alpha_N - \lambda_n \neq 0 \quad (6.4.9)$$

решение (8) можно представить в виде такого же одночлена лишь с другим коэффициентом. В противном случае возникнет множитель $\ln X^n$, приводящий к вековым возмущениям — см. пример 2.5.2, формула (2.5.19).

Руководствуясь идеями метода осреднения, мы не должны допускать появления вековых возмущений и обязаны соответствующие слагаемые включать в F и потому с самого начала относить их к невозмущенной системе. Вместо (1) следует поэтому рассматривать уравнение

$$\dot{x} = A(x)x + \mu f(x), \quad (6.4.10)$$

где A — матрица, приведенная к нормальной форме. Например, в случае чисто мнимых невырожденных собственных чисел линейной части в нерезонансном случае A зависит лишь от произведений $z^n = x^n \bar{x}^n$ (см. § 3.6). Преобразование (2) переводит (10) в

$$\dot{X} = [A(X) + \mu B(X)]X + \mu^2 F(X). \quad (6.4.11)$$

Связь между u , B , F находим, дифференцируя (2), выражая \dot{X} согласно (11) и сравнивая полученное с (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial X} AX - Au - \frac{A(X + \mu u) - A(X)}{\mu} X + BX - f = [A(X + \mu u) - A(X)]u + \\ + [f(X + \mu u) - f(X)] - \mu \frac{\partial u}{\partial X} BX - \mu \left(1 + \mu \frac{\partial u}{\partial X}\right) F. \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

Приравняем нулю левую часть (12), что свяжет u и B , а затем правую, что даст нам для F величину порядка $O(1)$. Для сохранения линейности заменим предварительно третье слагаемое слева на $-(\partial A / \partial X)uX$ и соответственно добавим в правую часть

$$\left[A(X + \mu u) - A(X) - \mu \frac{\partial A(X)}{\partial X} u \right] \frac{X}{\mu}.$$

Задача свелась к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial X} AX - Au - \frac{\partial A}{\partial X} uX = f - BX. \quad (6.4.13)$$

Запишем его в скалярной форме для случая диагональных матриц:

$$A = \text{diag} \{ A^i \}, \quad B = \text{diag} \{ B^i \},$$

$$\sum_i A^i X^i \frac{\partial u^n}{\partial X^i} - A^n u^n - X^n \sum_i \frac{\partial A^n}{\partial X^i} u^i = f^n - B^n X^n. \quad (6.4.14)$$

Выбором B^n можно убрать все приводящие к вековым членам функции f^n . Но даже однородная часть (14) кажется слишком сложной. В отличие от (7) уравнения для разных компонент u^n не разделяются. Система уравнений для характеристик также значительно усложняется. Столь значительные трудности привели к отказу от практического использования метода касательных в рассмотренной ситуации.

Глава 7

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ

§ 7.1. Распределение значений знаменателей

Все методы, использующие идею осреднения, на каждом шаге приводят к уравнению (3.2.14), в котором правая часть — заданная периодическая функция (3.3.14) от компонент вектора Y . Вид решения (3.3.15), (3.3.16) зависит от разбиения множества индексов на резонансное $I_0 = \{n \in \mathbb{Z}^N, n\omega = 0\}$ и нерезонансное $I_1 = \{n \in \mathbb{Z}^N, n\omega \neq 0\}$ при фиксированном векторе $\omega \in \mathbb{R}^N$. Свойства решения (3.3.16) определяются в значительной мере распределением значений знаменателей $n\omega$. В самом деле, амплитуды A_n в задачах небесной механики убывают в геометрической прогрессии, и ряд (3.3.14) быстро сходится. Поведение же ряда (3.3.16) существенно зависит от того, насколько близко к нулю могут подступать знаменатели $n\omega$ и насколько часто это случается. Совокупность этих вопросов образует так называемую проблему малых знаменателей. Знаменатели эти в подавляющем большинстве вовсе не малы, но именно малые их значения опасны для сходимости, откуда название проблемы. Последняя и сейчас не получила еще окончательного решения. Ее сложность заставляет нас начинать исследование с простейших случаев. В этой главе мы везде будем предполагать вектор $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^N)$ фиксированным.

Компоненты вектора индексов $n = (n_1, \dots, n_N)$ пробегает все целые числа: положительные, отрицательные и нуль. Множество значений функции $n\omega$ от n не изменится, если мы изменим знак любой компоненты ω^j . Таким путем можно ω^j заменить на $|\omega^j|$. Нулевое же значение ω_j фактически просто уменьшает размерность N . Примем в дальнейшем $\omega^j > 0$ и упорядочим их значения по убыванию: $\omega^1 \geq \omega^2 \geq \dots \geq \omega^N$. Если ω^j , например, означают средние движения планет, то нумерация будет стандартной от Меркурия до Плутона.

Пусть $N = 1$. Тогда $n\omega = 0$ только при $n = 0$, и малых знаменателей нет вовсе. Конечно, какое значение $n\omega$ считать "малым", зависит от смысла задачи и характера исследователя; точный смысл последней фразы — знаменатели не подходят к нулю ближе некоторого порога, иначе, отделены от нуля:

$$|n\omega| \geq \omega \quad (n \neq 0). \quad (7.1.1)$$

Знаменатели возрастают с ростом $|n|$ и лишь ускоряют сходимость (3.3.16).

Пусть $N = 2$ и числа ω^j линейно-зависимы над кольцом целых чисел. Это означает существование целых положительных p и q , таких, что

$$p\omega^1 - q\omega^2 = 0. \quad (7.1.2)$$

Не умаляя общности, считаем правильную дробь p/q несократимой. Отношение ω^2 и ω^1 рационально, так что частоты соизмеримы:

$$\vartheta = \omega^2/\omega^1 = p/q. \quad (7.1.3)$$

В этих обозначениях

$$n\omega = \omega^1(n_1 + \vartheta n_2) = \omega^1(n_1 + pn_2/q).$$

Для каждого n_2 функция $|n\omega|$ принимает наименьшее значение при $n_1 = E(\vartheta n_2)$ или $n_1 = E(\vartheta n_2) + 1$, где E — целая часть числа. С точностью до множителя ω^1 оно равно расстоянию от ϑn_2 до ближайшего целого. Для большей наглядности введем функцию $\alpha = e^{2\pi i \vartheta n_2}$, все значения которой лежат на единичной окружности. Искомый минимум по n_1 значений $|n\omega|$ будет равен с точностью до множителя $\omega^1/(2\pi)$ кратчайшей дуге между α и 1

(рис.3). Распределение значений малых знаменателей мы свели к распределению значений функции $\alpha(n) = e^{2\pi i \varphi n}$, где мы опустили индекс у n_2 .

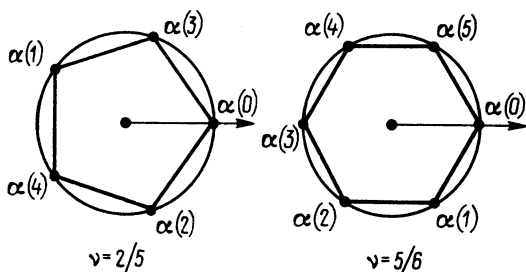


Рис.3. Распределение значений $\alpha(n)$ в случае рационального φ .

Теорема 7.1.1. Значения $\alpha(n)$ равномерно заполняют вершины правильного q -угольника. Здесь "равномерно" означает, что для $n = m, m+1, \dots, m+q-1$ при любом m значения $\alpha(n)$ различны и заполняют вершины правильного q -угольника.

Можно уточнить, что для получения $\alpha(m+1)$ нужно от $\alpha(m)$ отсчитать ровно p вершин против часовой стрелки (см. рис.3).

Это предложение является простым следствием арифметической теоремы о том, что для взаимно простых p, q множество чисел $\{pt, p(m+1), \dots, p(m+q-1)\}$, взятых по модулю q , совпадает с множеством $\{0, 1, \dots, q-1\}$.

Таким образом, здесь малые знаменатели также отсутствуют. Если $n = (mp, -mq)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то $n\omega = 0$. В противном случае

$$|n\omega| \geq \omega^1/q = \omega^2/p. \quad (7.1.4)$$

Существенное отличие от предшествующего случая в том, что нулевое значение принимается здесь счетное число раз, тогда как ранее оно отвечало только одному значению $n = 0$.

Пусть $N = 2$ и числа ω^1, ω^2 линейно-независимы над кольцом целых чисел, т.е. их отношение $\omega^2/\omega^1 = \varphi$ иррационально. Обычно этот случай трактуется совершенно иначе, чем предыдущий. Мы постараемся описать его теми же средствами, чтобы лег-

че представить, как один из них постепенно может перейти в другой.

Теорема 7.1.2. Значения $\alpha(n)$ различны между собой и всюду плотно и равномерно заполняют окружность. Здесь "равномерно" означает следующее. Возьмем любую дугу длиной $l < 2\pi$ на окружности. Пусть при $-r \leq n \leq r$ на эту дугу попало m значений $\alpha(n)$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (m / (2r + 1)) = l / (2\pi). \quad (7.1.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что какие-либо два значения α совпали: $\alpha(n) = \alpha(m)$. Это значит, что φn и φm различаются на некоторое целое $\varphi n = \varphi m + r$, или $\varphi(n - m) = r$. Если $n \neq m$, то слева стоит иррациональное число. Следовательно, $\alpha(n) = \alpha(m)$ только при $n = m$. Первое утверждение доказано.

Построим по данному φ последовательность подходящих дробей $p_1/q_1, p_2/q_2, \dots$ и обозначим

$$\varphi = p_m/q_m + \theta_m/q_m^2. \quad (7.1.6)$$

Знаменатели и числители подходящих дробей [14] растут неограниченно: $p_m \rightarrow \infty, q_m \rightarrow \infty$, а остатки образуют знакопеременный ряд, причем $|\theta_m| < 1$. Фиксируем m и отметим на окружности положения точек $\alpha(n)$ при $n = 0, 1, \dots, q_m - 1$:

$$\alpha(n) = e^{2\pi i(p_m n + \theta_m n/q_m)/q_m}. \quad (7.1.7)$$

Построим правильный q_m -угольник, отвечающий рациональному $\varphi_m = p_m/q_m$. Правая вершина занята значением $\alpha(0)$. Все остальные значения $\alpha(n)$ сдвинуты в одну сторону от вершин $e^{2\pi i p_m n/q_m}$ так, что не достигают соседних вершин и не переходят за них, поскольку $|\theta_m n/q_m| < 1$. Если повернем слегка наш q_m -угольник против часовой стрелки при $\theta_m < 0$ и по часовой стрелке при $\theta_m > 0$, то окажется, что q_m значений $\alpha(n)$ лежат по одному между вершинами (рис.4). Точно так же любая последовательность взятых подряд q_m чисел $\{n\}$ почти равномерно заполнит окружность своими изображениями $\{\alpha(n)\}$: их можно разделить правильным q_m -угольником. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем второе утверждение.

Из теоремы следует, что все значения ωn различны между собой. В частности, $\omega n = 0$ только при $n = 0$. С другой стороны, встречаются сколь угодно малые знаменатели и оценок типа (1), (4) не существует.

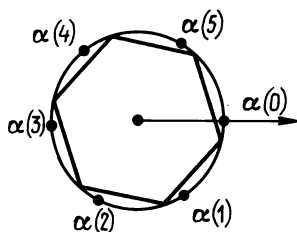


Рис.4. Распределение значений $\alpha(n)$ в случае иррационального φ .

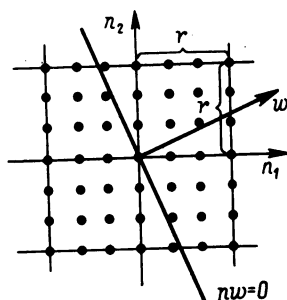


Рис.5. Прямая $n\omega = 0$.

Ясно, что значения $n\omega$ равномерно заполняют прямую. Фиксируем ε, r ($0 < \varepsilon < 1/2, r > 1$) и оценим число знаменателей $n\omega$ при n из полосы $-r \leq n_2 \leq r$, значения которых лежат в интервале $-\varepsilon\omega^1 < n\omega < \varepsilon\omega^1$, иными словами, удовлетворяет неравенству

$$|n_1 + \varphi n_2| < \varepsilon. \quad (7.1.8)$$

Полосу можно заменить квадратом $K: |n_1| \leq r, |n_2| \leq r$. Действительно, малые знаменатели на плоскости n_1, n_2 группируются около прямой $n_1\omega^1 + n_2\omega^2 = 0$ (рис.5), вектор нормали которой ω наклонен к оси n_1 не более чем на 45° , поскольку $\omega^1 \geq \omega^2$.

При данном n_2 лишь одно значение n_1 может удовлетворять (8) при сделанном ограничении на ε . Поэтому \varkappa равно числу решений неравенства

$$|\arg \alpha(n)| < 2\pi\varepsilon \quad (-r \leq n \leq r).$$

По теореме 2

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\varkappa / (2r+1)) = \varepsilon, \quad (7.1.9)$$

т.е. асимптотически $\varkappa \approx 2r\varepsilon$.

ω^N линейной комбинацией остальных с рациональными коэффициентами. В частности, для максимального вырождения $k = N - 1$ все компоненты выражаются через ω^1 :

$$\omega^j = \vartheta_j \omega^1 = (p_j/q_j) \omega^1, \quad (7.1.14)$$

где дробь p_j/q_j можно считать несократимой. Знаменатель $n\omega$ можно представить в форме

$$n\omega = (n_1 + \vartheta_2 n_2 + \dots + \vartheta_N n_N) \omega^1. \quad (7.1.15)$$

Введем аналог функции $\alpha(n_2)$:

$$\alpha(n) = e^{2\pi i (\vartheta_2 n_2 + \dots + \vartheta_N n_N)}. \quad (7.1.16)$$

При фиксированных n_3, \dots, n_N значения $\alpha(n)$ покрывают вершины вышеописанного правильного q_2 -угольника. Изменяя n_3 , мы поворачиваем этот q_2 -угольник на углы, кратные $2\pi/q_3$. Значения $\alpha(n)$ заполняют при этом вершины правильного $\tau(q_2, q_3)$ -угольника. Здесь τ - наименьшее общее кратное q_2, q_3 , т.е. общий знаменатель дробей ϑ_2, ϑ_3 . Продолжая процесс, придем к следующему утверждению.

Теорема 7.1.3. Значения $\alpha(n)$ равномерно заполняют вершины правильного $\tau(q_2, \dots, q_N)$ -угольника.

Таким образом, случай максимального вырождения отвечает дискретному множеству значений ωn и отсутствию малых знаменателей. Если n -комбинация m_1, \dots, m_{N-1} , то $n\omega = 0$. В противном случае

$$|n\omega| \geq \omega^1 / (\tau(q_2, \dots, q_N)). \quad (7.1.17)$$

При вырождении порядка $k \leq N - 2$ хотя бы одно из $\vartheta_2, \dots, \vartheta_N$ иррационально, значения $\alpha(n)$ всюду плотно и равномерно покрывают окружность, а значения ωn - прямую. Каждое значение ωn принимается на решетке векторов n , лежащих в некотором \mathbb{R}^k , но уже не лежащих ни в каком \mathbb{R}^{k-1} , как это легко следует из (13). В частности, при $k = 0$ каждое значение ωn принимается ровно один раз.

§ 7.2. Оценки значений знаменателей снизу

К сожалению, оценка типа (7.1.10) числа малых знаменателей, меньших ϵ , недостаточно информативна. Сто знаменателей, равных $\epsilon/2$, могут меньше испортить ряд (3.3.16), чем десять знаменателей, равных $\epsilon \cdot 10^{-10}$. А при очень малых ϵ асимптотические оценки теряют силу, так как число учитываемых на практике членов ряда будет еще недостаточно велико. Здесь мы выведем оценки знаменателей снизу для невырожденного случая. Последовательность $|\omega n|$ неограниченна снизу, поэтому речь идет о неравенствах вида

$$|\omega n| > \beta(n) \quad (7.2.1)$$

при $\beta(n) \rightarrow 0$. Вид функции β зависит от арифметической природы чисел ϑ_j . Как показал Лиувиль, универсальной функции β не существует [14]. Как бы быстро ни стремилась к нулю заранее заданная функция β , можно подобрать такой вектор ω , что неравенство (1) будет нарушаться счетное число раз. Все же можно получить оценки типа (1) при разумных ограничениях на ω . Начнем с простейшего нетривиального варианта $N = 2$.

Теорема 7.2.1. Пусть $\vartheta = \omega^2 / \omega^1$ - корень неприводимого многочлена степени $r \geq 2$ с целыми коэффициентами:

$$P(x) = a_r x^r + \dots + a_0 = a_r (x - \vartheta)(x - \vartheta_2) \dots (x - \vartheta_r), \quad (7.2.2)$$

все посторонние корни которого лежат в круге радиусом R :

$$|\vartheta_2| \leq R, \dots, |\vartheta_r| \leq R. \quad (7.2.3)$$

Тогда при всех $n \neq 0$

$$|\omega^1 n_1 + \omega^2 n_2| \geq C / (|n_1| + R |n_2|)^{r-1}, \quad (7.2.4)$$

где

$$C = \omega^1 / |a_r|. \quad (7.2.5)$$

Неравенство (4) тривиально при $n_2 = 0$, поскольку $|a_r| \geq 1$. Пусть $n_2 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega n &= \omega^1 n_2 (\vartheta + n_1/n_2) = \\ &= - \frac{\omega^1 n_2 a_r (-n_1/n_2 - \vartheta)(-n_1/n_2 - \vartheta_2) \dots (-n_1/n_2 - \vartheta_r)}{a_r (-n_1/n_2 - \vartheta_2) \dots (-n_1/n_2 - \vartheta_r)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^r \omega^1 n_2}{a_r} \frac{P(-n_1/n_2)}{(n_1/n_2 + \vartheta_2) \dots (n_1/n_2 + \vartheta_r)} \quad (7.2.6)$$

В силу (2)

$$P(-n_1/n_2) = (1/n_2^r) [a_r (-n_1)^r + \dots + a_0 n_2^r].$$

Выражение в квадратных скобках - целое число, не равное нулю, - иначе многочлен P имел бы рациональный корень $(-n_1/n_2)$, что невозможно. Поэтому $|P(-n_1/n_2)| \geq 1/|n_2|^r$. По (3) $|n_1/n_2 + \vartheta_j| \leq |n_1/n_2| + R$ ($j = 2, \dots, r$). Подставляя это в (6), получаем

$$|\omega n| \geq (\omega^1 |n_2| / |a_r|) (1/|n_2|^r) (1/(|n_1/n_2| + R)^{r-1}),$$

откуда следует (4).

Отметим, что теорема верна и при $r = 1$, причем (4), (5) равносильны точному неравенству (7.1.4), если слова "при всех $n \neq 0$ " заменить на "при всех $\omega n \neq 0$ ".

Для применимости теоремы 1 число ϑ нужно знать точно. Если мы получили его в результате измерений, то известен лишь некоторый интервал $\vartheta^- \leq \vartheta \leq \vartheta^+$. В таких условиях вопрос о том, является ли ϑ рациональным, алгебраическим и т.п. лишен смысла. Но тогда правомерен вероятностный подход - какова мера чисел из данного интервала, для которых справедлива оценка (4)?

Теорема 7.2.2. Для любого $\sigma > 1$ и почти каждого вектора $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ найдется некоторое $C(\sigma, \omega) > 0$, такое, что для всех целых n_1, n_2 , не обращающихся одновременно в нуль, будет выполнено неравенство

$$|\omega^1 n_1 + \omega^2 n_2| \geq C / (|n_1| + |n_2|)^\sigma. \quad (7.2.7)$$

Не умаляя общности, можно считать $\omega^1 > \omega^2 > 0$, так что $0 < \langle \vartheta = \omega^2/\omega^1 < 1$. Фиксируем произвольное положительное $\varepsilon < \leq 1/L(\sigma)$, где

$$L(\sigma) = 1 + 2^{-\sigma} + (2(1 - 2^{1-\sigma})/(\sigma - 1)) [\zeta(\sigma) - 1], \quad (7.2.8)$$

$\zeta(\sigma)$ - дзета-функция Римана. Определим семейство интервалов $D_{pq}(\varepsilon)$:

$$D_{01}(\varepsilon) = \{ \vartheta : 0 < \vartheta < \varepsilon \},$$

$$D_{11}(\varepsilon) = \{ \vartheta : 1 - 2^{-\sigma} \varepsilon < \vartheta < 1 \},$$

$$D_{pq}(\varepsilon) = \{ \vartheta : 0 < \vartheta < 1, |\vartheta - p/q| < \varepsilon / (q(p+q)^\sigma) \}$$

$$(q > p > 0).$$

Образуем множества $D_q(\varepsilon)$: $D_1(\varepsilon) = D_{01}(\varepsilon) \cup D_{11}(\varepsilon)$; $D_q(\varepsilon) = \cup_{p=1}^{q-1} D_{pq}(\varepsilon)$ ($q \geq 2$); и, наконец, множества $D(\varepsilon) = \cup_{q=1}^{\infty} D_q(\varepsilon)$, $\bar{D}(\varepsilon) = (0, 1) \setminus D(\varepsilon)$. Наглядно $D_{pq}(\varepsilon)$ есть множество чисел ϑ , слишком хорошо приближающихся данным рациональным числом p/q ; $D_q(\varepsilon)$ — каким-либо рациональным числом с данным знаменателем q ; $D(\varepsilon)$ — каким-либо рациональным числом. То есть $D(\varepsilon)$ — множество чисел ϑ , ненормально близких к рациональным; $\bar{D}(\varepsilon)$ — множество чисел ϑ , далеких от рациональных. Подсчитаем меру этих множеств. Очевидно, что

$$\text{mes } D_{pq}(\varepsilon) \leq 2\varepsilon / (q(q+p)^\sigma) \quad (q \geq 2), \quad (7.2.9)$$

$$\text{mes } D_q(\varepsilon) \leq \sum_{p=1}^{q-1} 2\varepsilon / (q(q+p)^\sigma) \quad (q \geq 2). \quad (7.2.10)$$

В (9) стоит неравенство, так как интервал длины $2\varepsilon / [q(q+p)^\sigma]$ может выйти за пределы основного $(0, 1)$. В (10) неравенство объясняется возможным перекрытием интервалов соответствующей длины. Ниже в (11) неравенство строгое, так как некоторые интервалы обязательно пересекаются, поскольку рациональные числа плотны в $(0, 1)$; кроме того, например, $D_{36} \subset D_{12}$. Сумма в (10) легко оценивается

$$\text{mes } D_q(\varepsilon) \leq \frac{2\varepsilon}{q} \sum_{p=1}^{q-1} \frac{1}{(q+p)^\sigma} < \frac{2\varepsilon}{q} \int_{1/2}^{q-1/2} \frac{dp}{(q+p)^\sigma} =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{q(\sigma-1)} \left[\frac{1}{(q+1/2)^{\sigma-1}} - \frac{1}{(2q-1/2)^{\sigma-1}} \right] < \frac{2(1-2^{1-\sigma})\varepsilon}{(\sigma-1)q(q+1/2)^{\sigma-1}}$$

$$(q \geq 2).$$

Заменяя сумму интегралом, мы воспользовались неравенством (П.1.1). Далее

$$\text{mes } D(\varepsilon) < \sum_{q=1}^{\infty} \text{mes } D_q(\varepsilon) <$$

$$\langle (1 + 2^{-\sigma})\varepsilon + 2\varepsilon(1 - 2^{1-\sigma}) / (\sigma - 1) \sum_{q=2}^{\infty} 1/q^{\sigma} \rangle. \quad (7.2.11)$$

Итак, $\text{mes } D(\varepsilon) < L(\sigma)\varepsilon.$ (7.2.12)

Приведем для ориентировки значения L при нескольких σ :

$$\begin{aligned} L(2) &= 1,895, & L(1,5) &= 3,242, \\ L(1,1) &= 14,30, & L(1,01) &= 139,1. \end{aligned}$$

Из (12) вытекает, что $\bar{D}(\varepsilon)$ не пусто:

$$\text{mes } \bar{D}(\varepsilon) > 1 - L(\sigma)\varepsilon. \quad (7.2.13)$$

Для $\forall \varepsilon \in \bar{D}(\varepsilon)$ справедливо

$$|\varrho - p/q| \geq \varepsilon / (q(p+q)^{\sigma}) \quad (7.2.14)$$

при всех целых $p \geq 0, q \geq 1$. Разумеется, (14) сохранит силу для всех целых $p, q \neq 0$, если справа p, q заменить на $|p|, |q|$. Отсюда следует

$$|n_1\omega^1 + n_2\omega^2| \geq \varepsilon\omega^1 / (|n_1| + |n_2|)^{\sigma} \quad (7.2.15)$$

при всех целых $n_1, n_2 \neq 0$. При $n_2 = 0$ неравенство (15) тривиально. Итак, (15) справедливо для всех n_1, n_2 , не равных одновременно нулю. Таким образом, мера множества тех ω , для которых справедливо (7) при достаточно малом ε , сколь угодно близка к полной. Поэтому мера множества тех ω , для которых не существует такого ε , чтобы выполнялось (7), равна нулю. Теорема доказана.

Показатель σ можно взять сколь угодно близким к единице, но значение $\sigma = 1$ запрещено. Очень интересно оценить меру $\{\omega\}$, для которых в (7) $\sigma = 1$. Может быть, это удастся читателю.

Переходим к общему случаю произвольного $N \geq 2$.

Теорема 7.2.3. Для любого $\sigma > N - 1$ и почти каждого вектора $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^N)$ найдется некоторое $C(\sigma, \omega) > 0$, такое, что для всех целых n_1, \dots, n_N , не обращающихся одновременно в нуль, будет выполнено неравенство

$$|\omega n| = |\omega^1 n_1 + \dots + \omega^N n_N| \geq C/|n|^{\sigma} \quad (7.2.16)$$

при $|n| = |n_1| + \dots + |n_N|.$

Примем, что ω изменяется в шаре $K: (\omega^1)^2 + \dots + (\omega^N)^2 < a^2$ пространства R^N . Фиксируем произвольное положительное $\varepsilon < \sqrt{\pi/[2N^3(N+1)\zeta^2(\sigma+2-N)]}$. Определим семейство полос

$$D_n(\varepsilon) = \{ \omega \in K : |n\omega| < \varepsilon a / |n|^\sigma \},$$

называемых обычно резонансными зонами, и множества

$$D_m(\varepsilon) = \bigcup_{|n|=m} D_n(\varepsilon), \quad D(\varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m(\varepsilon).$$

Полоса $D_n(\varepsilon)$ вырезается из K двумя плоскостями

$$n_1 \omega^1 + \dots + n_N \omega^N = \pm h, \quad (7.2.17)$$

где $h = \varepsilon a |n|^{-\sigma}$. Расстояние d между плоскостями (17) равно $d = 2h/\sqrt{n_1^2 + \dots + n_N^2}$. По индукции легко доказать точное неравенство

$$\sqrt{n_1^2 + \dots + n_N^2} \geq (1/\sqrt{N})(|n_1| + \dots + |n_N|),$$

откуда $d \leq 2h\sqrt{N}/|n| = 2\varepsilon a\sqrt{N}/|n|^{1+\sigma}$.

Объем резонансной зоны $D_n(\varepsilon)$ меньше расстояния d , помноженного на объем $(N-1)$ -мерного шара $\pi_{N-1} a^{N-1}$:

$$\text{mes } D_n(\varepsilon) < 2\pi_{N-1} \varepsilon \sqrt{N} a^N |n|^{1-\sigma}.$$

В безразмерных величинах

$$\text{mes } D_n(\varepsilon) / \text{mes } K < (2\pi_{N-1} \sqrt{N} / \pi_N) \varepsilon |n|^{1-\sigma}.$$

Как легко показать с помощью формулы Валлиса,

$$\pi_{N-1} / \pi_N < \sqrt{(N+1)/(2\pi)}$$

откуда $\frac{\text{mes } D_n(\varepsilon)}{\text{mes } K} < \sqrt{\frac{2N(N+1)}{\pi}} \varepsilon |n|^{-1-\sigma}$. (7.2.18)

Для объединения полос с фиксированным $|n|=m$

$$\text{mes } D_m(\varepsilon) < \frac{1}{2} W_2(N, m) \max_{|n|=m} \text{mes } D_n(\varepsilon).$$

где W_2 - число решений уравнения $|n_1| + \dots + |n_N| = m$ в целых числах. Множитель $1/2$ учитывает, что изменение знака n не меняет зоны. Неравенство строгое из-за пересечения всех зон в окрестности начала. Воспользовавшись оценкой (П.2.13), найдем

$$\frac{\text{mes } D_m(\varepsilon)}{\text{mes } K} < \sqrt{\frac{2N^3(N+1)}{\pi}} \frac{\varepsilon}{m^{\varepsilon+2-N}}. \quad (7.2.19)$$

Остается лишь просуммировать по m от 1 до ∞

$$\frac{\text{mes } D(\varepsilon)}{\text{mes } K} < \sqrt{\frac{2N^3(N+1)}{\pi}} \zeta(\varepsilon+2-N) \varepsilon. \quad (7.2.20)$$

Завершение доказательства такое же, как в теореме 2.

§ 7.3. Роль малых знаменателей в практических задачах

Как мы уже убедились, распределение и скорость стремления к нулю малых знаменателей существенно зависит от принципиально ненаблюдаемой арифметической природы чисел $\omega^1, \dots, \omega^N$. Ситуация обычно еще усложняется тем, что ω изменяется в процессе движения.

В некоторых модельных задачах частоты ω известны точно, например, в плоской круговой ограниченной задаче трех тел при движении в окрестности треугольных центров либрации [10].

Во всех же реальных астрономических задачах частоты ω^i определяются в результате наблюдений и известны приближенно. Степень приближения не играет роли для решения вопроса о рациональности или иррациональности отношения ω^2/ω^1 . Получается, что мы никогда не узнаем распределения малых знаменателей, встречающихся в теориях движения планет, и тем самым не сможем решить вопроса об устойчивости Солнечной системы. Вывод неутешительный и отдающий агностицизмом. Однако тысячелетняя научная практика показывает, что если на естественно-научный вопрос принципиально невозможно получить ответ, то вопрос неверно поставлен. Покажем это на примере малых знаменателей.

Уравнения небесной механики справедливы, притом с некоторой погрешностью, лишь на конечном промежутке времени. Во-первых, потому, что мы всегда отбрасываем множество малых воздей-

ствий – еще ни один безумец не учитывал влияния облаков Магеллана на движение Фобоса. Во-вторых, в далеком прошлом совсем другие силы были определяющими – скажем, 4–5 гигаlet тому назад во время формирования Солнечной системы. Да и в будущем мы будем не только ее изучать, но и изменять – возможно, используем водород Юпитера на энергетические нужды или отодвинем Венеру от Солнца.

Далее, и в предположении безошибочности уравнений решение их, как правило, оказывается приближенным. Даже такого простого, как $3x - 1 = 0$: обычно в ответе вы найдете $0,3\dots3$ – число троек зависит от разрядности вычислительной машины.

На практике решение должно обеспечивать заданную точность на заданном интервале времени. С увеличением интервала прогноза точность падает – во-первых, чем отдаленнее прогноз, тем труднее поддерживать высокую точность; во-вторых, мало кому сейчас интересно положение планет через тысячу лет с метровой точностью.

Фиксировав интервал времени Δt и точность решения, мы сможем отбросить в правых частях уравнений остатки рядов Фурье, дающие в течение Δt пренебрежимый эффект, а также ограничиться первыми членами рядов по степеням μ . Остается конечное число уравнений типа (3.2.14) с полиномиальной правой частью. Появится лишь конечное число знаменателей, и решить вопрос об их малости можно будет без принципиальных затруднений. Сама по себе малость $n\omega$ еще недостаточна, чтобы бить тревогу. Амплитуды A гармоник быстро убывают, так что стоит оценивать $A/(n\omega)$. Поскольку далекие гармоники нами отброшены, важной оказывается не рациональность или иррациональность числа $\varphi = \omega^2/\omega^1$, а его близость к дроби с малыми числителем и знаменателем. Так, поведение знаменателей при $|n_1| + |n_2| \leq 100$ для $\varphi = 2/5 + \pi^{-6}$ почти такое же, как для рационального $\varphi = 2/5$: на рис.3 все точки лягут вблизи вершин пятиугольника, и следует говорить об остром резонансе. Напротив, при $\varphi = 17/115$ поведение знаменателей почти такое же, как для иррационального $\varphi = 12\sqrt{2}/115$: все точки практически равномерно заполняют окружность, причем при $0 < |n_1| + |n_2| \leq 100$ ни одно значение $n\omega$ в нуль не обратится.

§ 8.1. Мажорантные функции

На протяжении всей книги мы обращались с рядами как с многочленами, уделяя пристальное внимание формальной стороне и мало заботясь о законности применяемых операций. Пора приступить к строгому математическому обоснованию. Начнем с установления областей сходимости простейших разложений по степеням времени и малого параметра. Основным аппаратом здесь служат мажорантные функции, свойствам которых посвящен этот вспомогательный параграф.

Пусть f, f^* — голоморфные в окрестности начала функции из $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$, разлагающиеся в ряды *:

$$f(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_N} x_1^{k_1} \dots x_N^{k_N}, \quad (8.1.1)$$

$$f^*(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k^* x^k = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_N}^* x_1^{k_1} \dots x_N^{k_N} \quad (8.1.2)$$

Функция f^* называется мажорантной для f по переменным x , что мы будем обозначать символом

$$f < f^* \pmod{x}, \quad (8.1.3)$$

если для всех k справедливо неравенство

$$|c_k| \leq c_k^*. \quad (8.1.4)$$

Отношение (3) распространим на вектор-функции из $\mathbb{C}^{N_1} \rightarrow \mathbb{C}^{N_2}$, потребовав, чтобы неравенство (4) выполнялось для каждой компоненты. Указание на переменные x , по которым проводится мажоризация, нужно, если функции зависят еще от других аргументов \bar{t} как от параметров. Тогда (4) должно быть выполнено при каждом \bar{t} . Ясно, что если $c_k < c_k^* \pmod{\bar{t}}$, то (4) справедливо

* В данном параграфе будем отмечать номер переменной нижним значком.

для положительных \bar{t} . Обратное неверно. Во-первых, (4) не предполагает обязательной голоморфности. Во-вторых, (4) может обеспечиваться лишь за счет начального коэффициента ряда Маклорена. Так, $|\cos k\bar{t}| \leq 1$, но неверно, что $\cos k\bar{t} < 1 \pmod{\bar{t}}$. Более того, свободные члены разложений $\cos k\bar{t}$ и 1 по степеням \bar{t} совпадают, а модули остальных коэффициентов первой функции больше коэффициентов второй.

Установим важнейшие свойства мажорант.

1) Отношение (3) транзитивно:

$$f_1 < f_2, f_2 < f_3 \Rightarrow f_1 < f_3. \quad (8.1.5)$$

2) Отношение (3) антисимметрично:

$$f_1 < f_2, f_2 < f_1 \Rightarrow f_1 = f_2. \quad (8.1.6)$$

3) Отношение (3) не рефлексивно. Точнее

$$f < f \quad (8.1.7)$$

тогда и только тогда, когда f представима рядом с неотрицательными коэффициентами. Функции со свойством (7) назовем самомажорантными. На множестве самомажорантных функций отношение (3) образует отношение частичного порядка. На множестве голоморфных в окрестности нуля функций это не так, поскольку в большинстве функции оказываются несравнимыми с собой по отношению (3).

4) Отношения (3) можно складывать и умножать:

$$f_1 + f_2 < f_1^* + f_2^*, \quad (8.1.8)$$

$$f_1 f_2 < f_1^* f_2^*. \quad (8.1.9)$$

Мы условимся звездочкой отмечать мажоранту соответствующей функции.

В частности, поскольку $c < |c|$, то

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 < |c_1| f_1^* + |c_2| f_2^*. \quad (8.1.10)$$

Предостережем, что в обратную сторону четвертое свойство не выполняется даже в ослабленном варианте. Пусть $f_1 + g < f_2 + g$. Не обязательно $f_1 < f_2$, даже если f_2 и g самомажоранты. Пример:

$f_1 = -3x$, $f_2 = x$, $g = 5x$. Пусть $f_1 g < f_2 g$. Не обязательно $f_1 < f_2$, даже если все три функции f_1, f_2, g самомажорантны.
 Пример: $f_1 = 1 + x$, $f_2 = 2$, $g = (1-x)^{-1}$.

5) Суперпозиция мажорант - мажоранта:

$$\left. \begin{aligned} f(y) < f^*(y) \pmod{y} \\ g(x) < g^*(x) \pmod{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(g(x)) < f^*(g^*(x)) \pmod{x} \quad (8.1.11)$$

6) Отношение (3) можно дифференцировать и интегрировать от нуля:

$$\partial f / \partial x_i < \partial f^* / \partial x_i, \quad (8.1.12)$$

$$\int_0^{x_i} f(x) dx_i < \int_0^{x_i} f^*(x) dx_i. \quad (8.1.13)$$

7) Отношение (3) можно интегрировать по параметру:

$$\int_a^b f(x, t) dt < \int_a^b f^*(x, t) dt \pmod{x}. \quad (8.1.14)$$

Предостережем, что дифференцировать по параметру нельзя. Например, $\sin(\bar{t} + x) < e^x \pmod{x}$ при всех вещественных \bar{t} . Дифференцирование по \bar{t} привело бы к абсурду $\cos(\bar{t} + x) < 0 \pmod{x}$.

8) Пусть коэффициенты c_k, c_k^* рядов (1), (2) - функции от x, y . Если $c_k < c_k^* \pmod{x, y}$, то $f < f^* \pmod{x, y}$.

Обратно, если $f < f^* \pmod{x, y}$ и функции f, f^* разложены в ряды Тейлора (1), (2) по x , то их коэффициенты связаны соотношением $c_k < c_k^* \pmod{y}$.

9) Область сходимости (1) не уже области сходимости (2).

10) Если $|x_n| < y_n$ и ряд (2) сходится в точке y , то

$$|f(x)| < f^*(y). \quad (8.1.15)$$

Доказательства свойств 1)-10) предоставляются читателю.

Построим несколько стандартных мажорант. Пусть f голоморфна в полукруге

$$|x_n| < a_n \quad (n = 1, \dots, N) \quad (8.1.16)$$

и интегрируема на его границе вместе с квадратом модуля

$$\frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(a_n e^{i\varphi_n})|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_N \leq M^2. \quad (8.1.17)$$

Тогда
$$f < \frac{M}{(1-x_1/a_1) \dots (1-x_N/a_N)}. \quad (8.1.18)$$

Действительно, запишем стандартное разложение (1) при

$$x_n = a_n e^{i\varphi_n},$$

$$f(a_n e^{i\varphi_n}) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k a^k e^{i(k\varphi)}. \quad (8.1.19)$$

Образует комплексно-сопряженное выражение

$$\overline{f(a_n e^{i\varphi_n})} = \sum_{|m|=0}^{\infty} \bar{c}_m a^m e^{-i(m\varphi)},$$

пмножим его на (19) и проинтегрируем почленно

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(a_n e^{i\varphi_n})|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_N = \sum_{|k|, |m|=0}^{\infty} c_k \bar{c}_m a^k a^m \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} e^{i((k-m)\varphi)} d\varphi_1 \dots d\varphi_N.$$

Интеграл справа обращается в нуль при $k \neq m$ и в $(2\pi)^N$ при $k = m$. Мы получили равенство Парсеваля

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |c_k|^2 (a^k)^2 = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(a_n e^{i\varphi_n})|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_N \leq M^2. \quad (8.1.20)$$

В частности, каждый член ряда не превосходит всей суммы, что дает неравенство Коши $|c_k| \leq M/a^k$, или подробнее

$$|c_{k_1 \dots k_N}| \leq M / (a_1^{k_1} \dots a_N^{k_N}). \quad (8.1.21)$$

Отсюда по определению мажоранты

$$f < \sum_{|k|=0}^{\infty} M (x_1/a_1)^{k_1} \dots (x_N/a_N)^{k_N}. \quad (8.1.22)$$

Ряд (22) распадается на N рядов по k_1, \dots, k_N , каждый из которых представляет геометрическую прогрессию. Формула (18) доказана.

В (18) M можно считать максимумом модуля f в замыкании поликруга (16), что только усилит мажоризацию.

Оценка (18) довольно груба: правая часть быстро стремится к бесконечности при $x_n \rightarrow a_n$. Тем не менее без дополнительной информации эту мажоранту трудно заменить лучшей, поскольку неравенство (21) — точное. В (21) достигается равенство при

$$f(x) = M (x_1/a_1)^{k_1} \dots (x_N/a_N)^{k_N},$$

причем $M = \max_{\varphi} |f(a_n e^{i\varphi_n})|$.

Иногда (18) заменяют еще более грубой мажорантой. Прямым дифференцированием можно найти коэффициент

$$c_k = (k_1 + \dots + k_N)! / (k_1! \dots k_N!)$$

разложения в ряд Маклорена функции $[1 - (x_1 + \dots + x_N)]^{-1}$. Поскольку $c_k \geq 1$, приходим к соотношению

$$\frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_N)} < \frac{1}{1-(x_1+\dots+x_N)}.$$

По свойству 5) можно заменить x_n на x_n/a_n . По свойству 1) при условии (17) получаем

$$f < \frac{M}{1-(x_1/a_1+\dots+x_N/a_N)}. \quad (8.1.23)$$

Если какой-либо коэффициент f равен нулю, то соответствующее слагаемое можно вычесть из f^* . Например, если в начале координат f обращается в нуль, то при условии (17)

$$f < \frac{M}{1-(x_1/a_1+\dots+x_N/a_N)} - M$$

или $f < \frac{M(x_1/a_1+\dots+x_N/a_N)}{1-(x_1/a_1+\dots+x_N/a_N)}.$ (8.1.24)

Аналог (24) для (18) содержит в числителе нежелательные отрицательные коэффициенты. Покажем, что

$$\frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_N)} - 1 < \frac{x_1+\dots+x_N}{(1-x_1)\dots(1-x_N)}. \quad (8.1.25)$$

При $N = 1$ отношение (25) очевидно. Предполагая его справедливость для значка N , находим

$$\frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_{N+1})} - 1 = \frac{1}{(1-x_1)\dots(1-x_N)} - 1 + \frac{x_{N+1}}{(1-x_1)\dots(1-x_{N+1})} <$$

$$\begin{aligned} &< \frac{x_1 + \dots + x_N}{(1-x_1)\dots(1-x_N)} + \frac{x_{N+1}}{(1-x_1)\dots(1-x_{N+1})} < \\ &< \frac{x_1 + \dots + x_N}{(1-x_1)\dots(1-x_{N+1})} + \frac{x_{N+1}}{(1-x_1)\dots(1-x_{N+1})} = \frac{x_1 + \dots + x_{N+1}}{(1-x_1)\dots(1-x_{N+1})}. \end{aligned}$$

Здесь использовано свойство 4), позволившее умножить мажоранту на $(1-x_{N+1})^{-1}$. По принципу полной индукции формула (25) доказана. Поэтому при условии (17) функция без свободного члена обладает мажорантой

$$f < \frac{M(x_1/a_1 + \dots + x_N/a_N)}{(1-x_1/a_1)\dots(1-x_N/a_N)}. \quad (8.1.26)$$

Приведем в заключение несколько простых примеров, оставляя доказательства читателю:

$$\begin{aligned} \sin x &< \operatorname{sh} x < e^x - 1, \quad \cos x < \operatorname{ch} x < e^x, \\ \sin(x+t) &< e^x \quad (\operatorname{mod} x; t \in \mathbb{R}), \\ \cos(x+t) &< e^x \quad (\operatorname{mod} x; t \in \mathbb{R}), \\ \frac{1}{1-t \cos x} &< \frac{1}{1-t \operatorname{ch} x} \quad (\operatorname{mod} x; 0 \leq t < 1). \end{aligned}$$

§ 8.2. Сходимость разложений по степеням времени

Для фактического построения степенных разложений, как показано в § 1.1, нужно потребовать аналитичности правой части уравнения (1.1.3) в некоторой области пространства $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Аналитическая функция допускает расширение на комплексную окрестность Δ , знание которой помогает оценить радиус сходимости решения (1.1.4). Разумно сразу предполагать аналитичность в комплексной области. Более того, можно полностью отказаться от вещественности и все переменные относить к комплексному пространству.

Теорема 8.2.1 (Коши). Пусть в области $\Delta \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$, заданной неравенствами

$$|x^n - X^n| < a^n \quad (n=1, \dots, N), \quad (8.2.1)$$

$$|\bar{t} - T| < b,$$

где X^n, T - данные комплексные, a^n, b - положительные числа, вектор-функция f голоморфна и удовлетворяет неравенству

$$|f^n(x, \bar{t})| \leq M^n \quad (n=1, \dots, N); \quad (8.2.2)$$

где $M^n > 0$. Тогда дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x, \bar{t}) \quad (8.2.3)$$

с начальными данными

$$x \Big|_{\bar{t}=T} = X \quad (8.2.4)$$

имеет единственное решение. Оно представимо в виде ряда

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(X)(\bar{t}-T)^k, \quad (8.2.5)$$

сходящегося по крайней мере при

$$|\bar{t}-T| \leq b \left(1 - e^{-1/((N+1)b\tilde{M})} \right), \quad (8.2.6)$$

где $\tilde{M} = \max_n (M^n/a^n)$.

Единственность решения доказана в § 1.2 конструктивно: указан способ фактического определения компонент c_k^n вектора c_k в виде многочлена

$$c_k^n = P(A_{rs}^m) \quad (8.2.7)$$

с неотрицательными коэффициентами от A_{rs}^m - коэффициентов разложения f в ряд Тейлора. Установим сходимость (5) в круге (6). Не умаляя общности, считаем $X = T = 0$ - в противном случае достаточно сделать сдвиг $\tilde{x} = x - X$, $\tilde{\bar{t}} = \bar{t} - T$. Наряду с (3) рассмотрим мажорантное уравнение

$$\dot{x} = f^*(x, \bar{t}), \quad (8.2.3)^*$$

где $f < f^* \pmod{x, \bar{t}}$. (8.2.8)

Согласно § 8.1 это значит, что f^* разлагается в ряд Тейлора (1.2.1) с коэффициентами A_{rs}^* , причем

$$|A_{rs}^m| \leq A_{rs}^{m*}. \quad (8.2.9)$$

Решение (3)** с нулевыми начальными данными находится по схеме § 1.2:

$$x^* = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^* t^k, \quad (8.2.5)**$$

причем c_k^* точно так же зависит от A_{rs}^* , как c_k от A_{rs} :

$$c_k^{n*} = P(A_{rs}^{m*}). \quad (8.2.7)**$$

Коэффициенты многочлена P неотрицательны, и из (7), (9), (7)** следует

$$|c_k^n| \leq c_k^{n*},$$

или, что то же,

$$x < x^* \pmod{t}. \quad (8.2.10)$$

Поэтому ряд (5) сходится по крайней мере там, где сходится (5)**; а возможно и в большем круге. Достаточно теперь выбрать простую мажоранту f^* , решить уравнение (3)** с нулевыми начальными данными и определить радиус сходимости ряда (5)**. Возьмем стандартную мажоранту (8.1.18). Замена переменных $x^n = a^n y^n$, $t = b\tau$ позволяет записать (3)** в виде

$$\frac{dy^n}{d\tau} = \frac{bM^n}{a^n(1-y^1)\dots(1-y^N)(1-\tau)}.$$

Усилим мажоризацию, заменяя M^n/a^n на $\tilde{M} = \max_n (M^n/a^n)$:

$$\frac{dy^n}{d\tau} = \frac{b\tilde{M}}{(1-y^1)\dots(1-y^N)(1-\tau)}. \quad (8.2.11)$$

Правые части системы N уравнений (11) совпадают при всех n . Так как совпадают при всех n и начальные условия, то по теореме единственности функции $y^1(\tilde{t}), \dots, y^N(\tilde{t})$ тождественны друг другу. Опуская индекс n , заменяем систему (11) равносильным ей скалярным уравнением

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{b\tilde{M}}{(1-y)^N(1-\tau)} \quad (8.2.12)$$

Переменные разделяются, и решение с учетом $y|_{\tau=0} = 0$ находится элементарной квадратурой.

В первоначальных переменных

$$x^{n*} = a^n \left\{ 1 - \sqrt[N+1]{1 + (N+1)b\tilde{M} \ln(1-t/b)} \right\}. \quad (8.2.13)$$

Здесь нужно брать ветви логарифма и корня, обращающиеся при $t = 0$ в нуль и единицу соответственно.

Нет необходимости искать фактическое разложение (5)** функции (13). Достаточно указать ближайшую к началу координат особенность. Все особые точки (13), как известно из теории функций комплексной переменной, удовлетворяют либо уравнению $1 - t/b = 0$, либо уравнению $1 + (N+1)b\tilde{M} \ln(1-t/b) = 0$. Ближайшая к началу есть

$$t^* = b \left\{ 1 - e^{-1/((N+1)b\tilde{M})} \right\}. \quad (8.2.14)$$

Обратим внимание на то, что функция (13) непрерывна при $t = t^*$.

Мы нашли коэффициенты ряда (5) и доказали его сходимость внутри круга (6).

Ряд Маклорена для $\sqrt[N+1]{1+z}$ сходится и при $|z| = 1$, поэтому ряд (5)** сходится и при $|t| = t^*$. В силу (8.1.15)

$$|x^n(t)| < x^{n*}(t^*) = a^n \quad (|t| < t^*),$$

т.е. график (5) не выходит из области Δ . Этим оправданы все операции (подстановка ряда (5) в ряд (1.2.1), перегруппировка членов, почленное дифференцирование), выполненные в § 1.2. Поэтому ряд (5) сходится внутри круга (6) (а по непрерывности и на его границе) именно к решению уравнения (3).

Итак, решение вида (5) существует и единственно. Других решений, непредставимых в форме (5), не существует по теореме единственности Пикара. Теорема доказана.

Круг (6) получен при самых общих предположениях и на практике дает сильно заниженную область сходимости. Это несколько не умаляет значения теоремы Коши, поскольку конструктивный ме-

тод отыскания оценок радиуса сходимости более важен, чем сама оценка (6). При дополнительных сведениях полезно уточнить радиус сходимости, строя более тонкие мажоранты. Приведем здесь четыре модификации теоремы 1.

Теорема 8.2.2. Если в условиях теоремы 1 система (3) автономна, то ряд (5) сходится по крайней мере при

$$|\bar{t} - T| \leq 1/((N+1)\tilde{M}). \quad (8.2.15)$$

Поскольку f не зависит от \bar{t} , условия теоремы 1 выполнены при любом b . Остается устремить b к бесконечности.

Тот же результат получается заменой мажорантного уравнения (12) на

$$dy/d\bar{t} = \tilde{M}/(1-y)^N. \quad (8.2.16)$$

Теорема 8.2.3. Если в условиях теоремы 1 система (3) линейна по x , то ряд (5) сходится при

$$|\bar{t} - T| < b. \quad (8.2.17)$$

Иными словами круг сходимости определяется только особыми точками коэффициентов уравнения (3). Условие ограниченности f при ограниченных x здесь можно опустить. Уравнение (3) можно записать в форме

$$\dot{x} = A(\bar{t})x + B(\bar{t}), \quad (8.2.18)$$

где A - матрица коэффициентов, B - столбец свободных членов. Если каждый элемент матрицы A мажорируется функцией $\alpha(1-\bar{t}/b)^{-1}$, а каждая компонента вектора B - функцией $\beta(1-\bar{t}/b)^{-1}$, то мажорантное уравнение (12) можно заменить на

$$\dot{x} = (\alpha Nx + \beta)/(1-\bar{t}/b), \quad (8.2.19)$$

откуда $x = (\beta/(\alpha N))\{(1-\bar{t}/b)^{-\alpha N b} - 1\}$. (8.2.20)

Единственная особенность функции (20) - точка $\bar{t} = b$.

Теорема 8.2.4. Решения системы - целые функции времени, если таковы ее коэффициенты.

Достаточно заметить, что мы находимся в условиях теоремы 3 при произвольном b . Тот же результат получается заменой мажорантного уравнения (19) на

$$\dot{x} = P(t)(\alpha N x + \beta), \quad (8.2.21)$$

где $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, α^P - общая целая мажорантная функция элементов матрицы A ; β^P - элементов вектора B .

Решение (21) - целая функция

$$x = \frac{\beta}{\alpha N} \left\{ e^{\alpha N \int_0^t P(\tau) d\tau} - 1 \right\}. \quad (8.2.22)$$

Важный класс уравнений представляют системы с автономными полиномиальными правыми частями:

$$\dot{x} = \sum_{|\alpha|=0}^m A_\alpha x^\alpha, \quad (8.2.23)$$

где α - мультииндекс, $x^\alpha = (x^1)^{\alpha_1} \dots (x^N)^{\alpha_N}$. К (23) легко свести все встречающиеся на практике системы, добавляя новые искомые функции. Например,

$$\dot{x} = x - \sin t \cos x$$

сводится к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^1 - x^2 x^5, \\ \dot{x}^2 &= -x^3 (x^1 - x^2 x^5), \\ \dot{x}^3 &= x^2 (x^1 - x^2 x^5), \\ \dot{x}^4 &= -x^5, \\ \dot{x}^5 &= x^4, \end{aligned}$$

где $x^1 = x$, $x^2 = \cos x$, $x^3 = \sin x$, $x^4 = \cos t$, $x^5 = \sin t$

Принимая за новые переменные одночлены x^α , можно степень m снизить до двух.

Теорема 8.2.5. Пусть в системе (23) $m = 2$ и справедливы неравенства

$$|A_0^n| \leq A a^2, \quad |A_\alpha^n| \leq 2A a, \quad |A_\beta^n| \leq A, \quad |A_\gamma^n| \leq 2A, \quad (8.2.24)$$

где $|\alpha| = 1$, $|\beta| = |\gamma| = 2$, причем мультииндекс β отвечает квадратам переменных, а γ - произведениям двух различных

компонент вектора x . Тогда решение (23) с нулевыми начальными данными представимо рядом (5), сходящимся по крайней мере в круге

$$|\bar{t}| \leq 1/(NA\alpha). \quad (8.2.25)$$

В условиях теоремы мажорантной для (23) будет система

$$\dot{x}^n = A \left[\alpha^2 + 2\alpha(x^1 + \dots + x^N) + (x^1 + \dots + x^N)^2 \right]. \quad (8.2.26)$$

Как и выше, устанавливаем, что $x^1 = \dots = x^N$ и (26) эквивалентна скалярному уравнению с разделяющимися переменными

$$\dot{x} = A(\alpha + Nx)^2. \quad (8.2.27)$$

Нужное нам решение находится элементарно:

$$x = A\bar{t}\alpha^2 / (1 - NA\alpha\bar{t}). \quad (8.2.28)$$

Полюс функции (28) приводит к оценке (25).

Предоставляем читателю обобщить теорему 5 на случай произвольного m .

Частные решения отдельных уравнений могут иметь значительно большие области сходимости разложения (5) по сравнению с гарантированным какой-либо из теорем 1-5 кругом радиусом R_0 . Но найти радиусы сходимости всех решений всех встречающихся на практике уравнений - задача непосильная. Ограничимся установлением области сходимости основных разложений небесной механики в задаче двух тел и исследованием точности найденных общих оценок.

Оценку принято называть точной, если ее нельзя улучшить, не накладывая дополнительных ограничений. Простейший вариант точной оценки - достижимая оценка. Для доказательства достижимости достаточно указать одно уравнение, удовлетворяющее всем условиям теоремы, решение которого имеет R_0 своим радиусом сходимости. Но и недостижимая оценка может быть точной. Для доказательства достаточно построить последовательность уравнений, радиусы сходимости решений которых стремятся к R_0 . Сложнее всего установить неточность оценки - нужно доказать теорему, дающую при прежних условиях лучший результат.

При построении примеров мы должны уметь находить радиус сходимости R_0 хотя бы для простых уравнений. Если решение получено в явной форме $x(\bar{t})$, то следует найти ближайшую к началу особенность \bar{t}^* и положить $R = |\bar{t}^*|$.

Рассмотрим более общий случай, когда удается представить интересующее нас решение в неявной форме:

$$\Phi(x, \bar{t}) = 0. \quad (8.2.29)$$

Здесь Φ — отображение некоторой области из \mathbb{C}^{N+1} в \mathbb{C}^N , так что (29) есть система N уравнений. По теореме Коши каждое решение голоморфно в окрестности любой точки голоморфности правой части (3). Поэтому сингулярность может встретиться лишь при подходе решения к особой точке уравнения (3). В простейших ситуациях особенности (3) легко определяются в виде некоторого скалярного уравнения

$$\Psi(x, \bar{t}) = 0. \quad (8.2.30)$$

Теперь достаточно исследовать систему (29), (30) из $N+1$ уравнений с $N+1$ неизвестными, исключить x и найти ближайшее к началу решение \bar{t}^* . Совсем легко это делается для самосопряженных уравнений. Для их решений коэффициенты разложения x по степеням \bar{t} положительны. Ближайшая к началу особенность \bar{t}^* решения также положительна, положительны и все компоненты вектора $x(\bar{t}^*)$. Систему (29), (30) следует решать не при комплексных, как в общем случае, а лишь при положительных значениях аргументов. Более того, из монотонности $x^n(\bar{t})$ следует, что если при каких-либо \bar{t} , x^1, \dots, x^{n-1} , x^{n+1}, \dots, x^N система (29), (30) имеет несколько решений относительно x^n , нужно принимать во внимание лишь наименьшее.

Вообще говоря, найденное \bar{t}^* будет особой точкой решения, так что $R = |\bar{t}^*|$, или просто $R = \bar{t}^*$ в самосопряженном варианте. Но возможны исключительные ситуации, когда решение регулярно в \bar{t}^* , а при наличии более чем одной ближайшей точки — во всех таких \bar{t}^* . Тогда $R > |\bar{t}^*|$, и нужно искать следующие особенности решения.

Перейдем к исследованию точности вышеприведенных теорем.

Теоремы о линейных системах точны. Если в условиях теоремы 3 на окружности $|\bar{t} - T| = b$ имеется особая точка \bar{t}^* коэф-

коэффициентов $A(\bar{t})$ или $B(\bar{t})$, то в общем случае \bar{t}^* будет и особой точкой решения. Очевидно также, что отдельные частные решения могут продолжаться и через точку \bar{t}^* — таково, например, тривиальное решение в однородном случае. Менее очевиден факт существования таких систем, где все решения продолжимы за \bar{t}^* .

Пример 8.2.1. Рассмотрим скалярное уравнение вида (18)

$$\dot{x} = x / (\bar{t} - b) \quad (8.2.31)$$

с неподвижной особой точкой $\bar{t} = b$. Его общее решение

$$x = C (\bar{t} - b) \quad (8.2.32)$$

особых точек не имеет.

Поэтому теорема 3 неумлучшаема (в общем случае ряд (5) расходится вне круга (17)), но необратима (для некоторых систем отдельные или даже все решения представимы рядами, сходящимися и вне круга (17)).

Теорема 4 точна в том смысле, что дает неумлучшаемую мажоранту (22). Это вытекает из того, что уравнение (18) может иметь вид

$$\dot{x}^n = P(\bar{t})(\alpha x^1 + \dots + \alpha x^N + \beta), \quad (8.2.33)$$

приводящийся к скалярной форме (21).

То же можно сказать и о теореме 5, поскольку ее условиям удовлетворяет система (26).

Интуитивно ясно, что оценки радиуса сходимости в теореме 2 и тем более в теореме 1 далеки от точных, ибо модуль мажоранты неограничен в области (1). Для доказательства решим сначала следующий пример.

Пример 8.2.2. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x} = \alpha M + Mx / (1 - x) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (8.2.34)$$

с разделяющимися переменными. Решение с ненулевыми начальными данными находится стандартной процедурой, приводящей при $0 < \alpha < 1$ к уравнению

$$\ln \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} x \right) - (1-\alpha)x = M(1-\alpha)^2 \bar{t}. \quad (8.2.35)$$

При $\alpha = 0$; 1 решения $x = 0$; $2x - x^2 = 2Mt$ могут быть получены из (35) предельным переходом.

Коэффициенты разложения правой части (34) в ряд Маклорена по x положительны. Поэтому достаточно к (35) добавить уравнение ближайшей особенности $1 - x = 0$ правой части (34) и получить

$$2Mt^* = 2(-\ln \alpha - (1-\alpha)) / (1-\alpha)^2. \quad (8.2.36)$$

При $t = t^*$ функция $x(t)$ действительно имеет особенность, поскольку $\lim_{t \rightarrow t^*} \dot{x}(t) = \infty$ согласно (34). Правая часть (36) в промежутке $[0, 1]$ убывает от бесконечности до единицы, что легко устанавливается дифференцированием или разложением в ряд по степеням $(1 - \alpha)$.

Вернемся к теореме 2. При $N = 1$, $\alpha = 1$, $T = X = 0$ голоморфность решения гарантируется в круге (15) радиусом R_0 , где

$$2MR_0 = 1. \quad (8.2.37)$$

Но в процессе доказательства теоремы 2 мы можем выделить свободный член разложения f в ряд Маклорена и получить мажоранту, равную правой части (34) при $\alpha M = |f(0)|$. По принципу максимума модуля $\alpha < 1$, если исключить тривиальный случай $f = \text{const}$. Таким образом, решение голоморфно по крайней мере в круге радиусом t^* , а сравнение (36) и (37) показывает, что всегда $t^* > R_0$.

На практике при решении нелинейных уравнений первого-второго порядка радиус сходимости оказывается заниженным обычно в $2 - 2^4$ раза. Поэтому полезно знать точные оценки для основных функций, чаще всего встречающихся на практике.

Пример 8.2.3. Рассмотрим уравнение

$$dx/dt = e^{-x} \quad (8.2.38)$$

с нулевыми начальными данными. Здесь a может быть взято произвольно, $M = e^a$, $t^*(a) = a e^{-a}/2$, что максимально при $a = 1$. Теорема 2 гарантирует поэтому радиус сходимости $R_0 = t^*(1) = 1/(2e)$, что в пять с лишним раз меньше истинного значения $R = 1$: легко показать, что решение (38) есть $x = \ln(1 + t)$ с единственной особенностью: $t = -1$.

Этот пример поучителен в следующем отношении. В число особенностей уравнения (3) (соотношения (30)) нужно включить и бесконечные значения x , если только f не является там регулярной. Забыв про это, мы сочли бы логарифм целой функцией!

Как замечает А. Уинтнер [13], доказательство голоморфности эксцентрической аномалии по эксцентриситету вплоть до предела Лапласа $\varepsilon^* = 0,6627$ в подавляющем большинстве учебников по небесной механике дефектно, поскольку проводится лишь с учетом особенностей на конечном расстоянии.

Для саможорирующихся уравнений (пример 2) ситуация значительно упрощается, так как нужно учитывать только положительные \dot{t} и наименьшую положительную особенность x . Лишь для целой функции это будет $x = \infty$. Так, замена переменных $x = -y$, $\dot{t} = -\tau$ переводит (38) в

$$dy/d\tau = e^y \quad (8.2.39)$$

и его интеграл $\tau = 1 - e^{-y}$ доставляет при $y = +\infty$ ближайшую к началу особенность $\tau = 1$ функции $y = -\ln(1-\tau)$.

Перейдем к установлению радиусов сходимости стандартных разложений в задаче двух тел.

Пример 8.2.4. Разложения основных функций кеплерова движения по степеням времени.

Основные функции кеплерова движения - целые относительно эксцентрической аномалии. Поэтому достаточно рассмотреть зависимость эксцентрической аномалии $x+X$ от средней $\dot{t}+T$ и эксцентриситета ε ($0 \leq \varepsilon < 1$) - см. пример 1.3.4 в слегка измененных обозначениях:

$$x - \varepsilon \sin(x+X) + X - T = \dot{t}, \quad (8.2.40)$$

$$\dot{x} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos(x+X)}, \quad x \Big|_{\dot{t}=0} = 0. \quad (8.2.41)$$

Поскольку T, X - начальные значения средней и эксцентрической аномалий, они связаны уравнением Кеплера

$$X - \varepsilon \sin X = T. \quad (8.2.42)$$

Рассмотрим сначала простейший случай разложения эксцентрической аномалии по степеням средней, когда $T = X = 0$. Мы

находимся в условиях теоремы 2 для любого $\alpha > 0$, удовлетворяющего неравенству

$$\operatorname{ch} \alpha < 1/\varepsilon \quad (8.2.43)$$

при $M = (1 - \varepsilon \operatorname{ch} \alpha)^{-1}$. Поэтому x разлагается по степеням \bar{t} по крайней мере в круге радиусом

$$\bar{t}^*(\alpha) = \alpha / (2M) = (\alpha/2)(1 - \varepsilon \operatorname{ch} \alpha). \quad (8.2.44)$$

Наибольшее значение $\bar{t}^*(\alpha)$ при ограничении (43) принимает в единственной точке α^* :

$$\operatorname{ch} \alpha^* + \alpha^* \operatorname{sh} \alpha^* = \varepsilon^{-1}. \quad (8.2.45)$$

Значение $\bar{t}^*(\alpha^*)$ в зависимости от ε помещено во втором столбце табл. I. При малых ε

$$\bar{t}^*(\alpha^*) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{2/\varepsilon}{1 + \ln(2/\varepsilon)}. \quad (8.2.46)$$

Т а б л и ц а I

ε	$\bar{t}^*(\alpha^*)$	ρ , рад	ρ^0
0	∞	∞	∞
0,001	2,42	6,60	378
0,01	1,48	4,30	246
0,031803	1,03	π	180
0,1	0,626	2,00	115
0,2	0,399	1,31	75,1
0,3	0,275	0,920	52,7
0,4	0,193	0,650	37,2
0,5	0,133	0,451	25,8
0,6	0,0873	0,299	17,1
0,7	0,0528	0,181	10,4
0,8	0,0270	0,0931	5,33
0,9	0,00904	0,0313	1,79
0,99	0,000273	0,000947	0,0543
0,999	0,000009	0,000030	0,0017
1	0	0	0

Для вычисления точного значения радиуса голоморфности положим $y = ix$, $\tau = i\bar{t}$ и перепишем (40), (41) в виде

$$y - \varepsilon \operatorname{sh} y = \tau, \quad (8.2.47)$$

$$dy/d\tau = 1/(1 - \varepsilon \operatorname{ch} y). \quad (8.2.48)$$

Уравнение (48) при $\varepsilon < 1$ мажорантно по отношению к себе, поскольку правую часть можно представить в виде ряда с положительными коэффициентами перегруппировкой разложения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^{2k}/(2k)! \right)^n.$$

Согласно (29), (30) особая точка τ^* определяется формулой (47) при y , равном наименьшему положительному корню уравнения $1 - \varepsilon \operatorname{ch} y = 0$, т.е. $y = \ln((1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon)$, $\tau^* = \rho(\varepsilon)$, где

$$\rho(\varepsilon) = \ln\left(\left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right)/\varepsilon\right) - \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (8.2.49)$$

При возрастании ε от нуля до единицы ρ убывает от бесконечности до нуля. При малых ε

$$\rho \approx \ln(2/\varepsilon) - 1. \quad (8.2.50)$$

Значения $\rho(\varepsilon)$ приведены в третьем и в четвертом столбцах табл.1. Как видим, $\bar{t}^*(a^*)$ в два-три раза меньше ρ .

Вернемся к общему случаю произвольной эпохи T . Задачу не удается свести к самомажорантному варианту. Поэтому следует выяснить сначала, имеет ли целая функция (40) от x асимптотические значения. Иными словами может ли $\lim \bar{t}(x)$ быть конечным, если x стремится к бесконечности вдоль некоторого пути L комплексной плоскости \mathbb{C} .

Перепишем (40) в вещественной форме, обозначая индексом 1 вещественную, индексом 2 - мнимую части переменных x , \bar{t} :

$$x_1 - \varepsilon \sin(x_1 + X) \operatorname{ch} x_2 = \bar{t}_1 - X + T, \quad (8.2.51)$$

$$x_2 - \varepsilon \cos(x_1 + X) \operatorname{sh} X_2 = \bar{t}_2. \quad (8.2.52)$$

Пусть вышеописанный путь L существует. Тогда при $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$ вдоль L существуют и конечны пределы правых частей (51), (52).

Рассмотрим множество P прямых $x_1 = (2k + 1)(\pi/2) - X$, на которых $\cos(x_1 + X)$ обращается в нуль. Как следует из (52), x_2 в точках S пересечения L с P ограничена. Но тогда из первого уравнения вытекает ограниченность x_1 на S , и L пересекает лишь конечное число прямых из P . Значит, x_1 ограничена и потому $|x_2| \rightarrow \infty$. Перенесем в равенствах (51), (52) x_1 , x_2 вправо, возведем в квадрат и сложим:

$$\varepsilon^2 \operatorname{ch}^2 x_2 - \varepsilon^2 \cos^2(x_1 + X) = (x_1 - \bar{t}_1 + X - T)^2 + (x_2 - \bar{t}_2)^2.$$

Деля на x_2^2 и переходя к пределу при $|x_2| \rightarrow \infty$, получаем абсурдное равенство $\infty = 1$. Следовательно, пути L с асимптотическими свойствами $x \rightarrow \infty$, $\bar{t} \rightarrow \bar{t}^* \neq \infty$ не существует. И так, все особенности $x(\bar{t})$, не считая $\bar{t} = \infty$, алгебраические и удовлетворяют уравнению

$$1 - \varepsilon \cos(x + X) = 0. \quad (8.2.53)$$

Переходя к экспоненте и решая соответствующее квадратное уравнение, находим

$$x = \pm i \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) + 2k\pi - X. \quad (8.2.54)$$

Подставив (54) в (40), получим все особенности $x(\bar{t})$:

$$\bar{t} = \pm i \rho(\varepsilon) + 2k\pi - T, \quad (8.2.55)$$

где $\rho(\varepsilon)$ определяется формулой (49).

Не умаляя общности, можно считать $-\pi < T \leq \pi$. Тогда за \bar{t}^* можно взять $i\rho - T$, так что радиус сходимости определится соотношением

$$R = \sqrt{\rho^2 + T^2}. \quad (8.2.56)$$

Самым неблагоприятным оказалось разложение в окрестности перигея, когда $R = \rho$.

Пример 8.2.5. Разложение основных функций кеплерова движения по степеням эксцентриситета.

Основные функции кеплерова движения — целые относительно эксцентрической аномалии и $(1 \pm \varepsilon) \pm 1/2$. Поэтому достаточно рассмотреть зависимость эксцентрической аномалии x от эксцентри-

сита. Обозначая среднюю аномалию через μ , эксцентриситет — через \bar{t} , запишем уравнение Кеплера в форме

$$\bar{t} = (x - \mu) / \sin x. \quad (8.2.57)$$

Дифференцированием получим

$$\dot{x} = \sin^2 x / (\sin x - (x - \mu) \cos x). \quad (8.2.58)$$

Отличие от предыдущего примера состоит в том, что теперь средняя аномалия — вещественный параметр, эксцентриситет — независимая переменная, значения которой можно заранее ограничить кругом $|\bar{t}| \leq 1$. От обращения в нуль начальных данных мы отказались: $x|_{\bar{t}=0} = \mu$.

Вместо (51), (52) имеем теперь из (57) для определения асимптотических значений

$$\bar{t}_1 \sin x_1 \operatorname{ch} x_2 - \bar{t}_2 \cos x_1 \operatorname{sh} x_2 = x_1 - \mu, \quad (8.2.59)$$

$$\bar{t}_2 \sin x_1 \operatorname{ch} x_2 + \bar{t}_1 \cos x_1 \operatorname{sh} x_2 = x_2. \quad (8.2.60)$$

Случай $\bar{t}_1 \rightarrow 0$, $\bar{t}_2 \rightarrow 0$ следует исключить, так как эксцентрическая аномалия голоморфна при нулевом значении эксцентриситета. Это вытекает из теоремы 1, примененной к уравнению

$$\dot{x} = \sin x / (1 - \bar{t} \cos x), \quad (8.2.61)$$

получаемомуся дифференцированием уравнения Кеплера или комбинированием (57) и (58). То же следует и из теоремы 2, примененной к (58) при $\mu \neq k\pi$, тогда как при $\mu = k\pi$ функция $x(\bar{t}) = k\pi$ вообще свободна от особенностей. Ссылка на уравнение (61) имеет то преимущество, что гарантирует отсутствие особенностей в некотором круге $|\bar{t}| < \rho = \operatorname{const}$, тогда как ссылка на (58) — лишь в круге $|\bar{t}| < \rho(\mu)$ при $\rho(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow k\pi} 0$.

Пусть \bar{t}_2 стремится к отличному от нуля числу (если $\lim \bar{t}_2 = 0$, $\lim \bar{t}_1 \neq 0$, рассуждения аналогичны). Рассмотрим опять множество прямых P , на котором $\cos x_1$ обращается в нуль. Из (60) следует, что на P отношение $(\operatorname{ch} x_2)/x_2$ ограничено, значит ограничено и x_2 , а из (59) вытекает ограниченность x_1 на P . Как и в примере 4, констатируем ограничен-

ность x_1 и $|x_2| \rightarrow \infty$. Не умаляя общности, можно считать $x_2 \rightarrow \infty$, $2 \operatorname{ch} x_2 \sim 2 \operatorname{sh} x_2 \sim e^{x_2}$, так что

$$\bar{t}_1 \sin x_1 - \bar{t}_2 \cos x_1 \rightarrow 0, \quad (8.2.62)$$

$$\bar{t}_2 \sin x_1 + \bar{t}_1 \cos x_1 \rightarrow 0. \quad (8.2.63)$$

Из (63) следует, что $\lim \cos x_1 \neq 0$, а по (62) $\lim \bar{t}_1 \neq 0$. Поэтому (62), (63) влекут $\operatorname{tg} x_1 \rightarrow \lim (\bar{t}_2/\bar{t}_1)$, $\operatorname{tg} x_1 \rightarrow -\lim (\bar{t}_1/\bar{t}_2)$. Получаем невозможное равенство $\lim \bar{t}_2^2 = -\lim \bar{t}_1^2$. Пути L с асимптотическими свойствами $x \rightarrow \infty$, $\bar{t} \rightarrow \bar{t}^* \neq \infty$ не существует.

Итак, все особенности $x(\bar{t})$, не считая $\bar{t} = \infty$, алгебраические и удовлетворяют уравнению

$$\sin x - (x - \mu) \cos x = 0,$$

или
$$\operatorname{tg} x = x - \mu. \quad (8.2.64)$$

Отделим вещественную и мнимую части:

$$\frac{\sin 2x_1}{\cos 2x_1 + \operatorname{ch} 2x_2} = x_1 - \mu, \quad (8.2.65)$$

$$\frac{\operatorname{sh} 2x_2}{\cos 2x_1 + \operatorname{ch} 2x_2} = x_2. \quad (8.2.66)$$

Уравнение (66) определяет на плоскости x множество, состоящее из прямой $x_2 = 0$ и кривой

$$\cos 2x_1 = \frac{\operatorname{sh} 2x_2}{x_2} - \operatorname{ch} 2x_2. \quad (8.2.67)$$

Правая часть с ростом x_2 от нуля до бесконечности убывает от единицы до минус бесконечности, в чем проще всего убедиться с помощью ряда Маклорена, и обращается в -1 при

$$\operatorname{cth} x_2 = x_2. \quad (8.2.68)$$

Уравнение (68) имеет единственный положительный корень

$$\alpha = 1,199679. \quad (8.2.69)$$

Все сказанное позволяет заключить, что кривая (67) имеет вид симметричного овала с острыми вершинами в точках $0, \pi$,

продолженного π -периодически вправо и влево (рис. 6).

Соотношение (65) определяет то значение μ , при котором встречается особенность x . При движении точки вдоль выделенного на рис.6 жирной линией участка кривой (67) будет

$$\mu = x_1 - \frac{x_2 \sin 2x_1}{\operatorname{sh} 2x_2}, \quad (8.2.70)$$

так что μ возрастает от нуля до $\pi/2$.

Отобразим теперь особые точки с плоскости x на плоскость \bar{t} согласно (57). Прямая $x_2 = 0$ перейдет в

$$\bar{t} = 1 / \cos x_1,$$

т.е. в два луча $|\bar{t}_1| \geq 1$, $\bar{t}_2 =$

$= 0$, не представляющие для нас интереса. Кривая (67) перейдет в

$$\bar{t}_1 = \frac{2}{\operatorname{ch} 2x_2 - \cos 2x_1} ((x_1 - \mu) \sin x_1 \operatorname{ch} x_2 + x_2 \cos x_1 \operatorname{sh} x_2),$$

$$\bar{t}_2 = \frac{2}{\operatorname{ch} 2x_2 - \cos 2x_1} (-(x_1 - \mu) \cos x_1 \operatorname{sh} x_2 + x_2 \sin x_1 \operatorname{ch} x_2).$$

Заменим $x_1 - \mu$, x_2 согласно (65), (66):

$$\bar{t}_1 = \frac{2 \cos x_1 \operatorname{ch} x_2}{\cos 2x_1 + \operatorname{ch} 2x_2}, \quad \bar{t}_2 = \frac{2 \sin x_1 \operatorname{sh} x_2}{\cos 2x_1 + \operatorname{ch} 2x_2}.$$

Наконец, с учетом (67)

$$\bar{t}_1 = \frac{x_2 \cos x_1}{\operatorname{sh} x_2}, \quad \bar{t}_2 = \frac{x_2 \sin x_1}{\operatorname{ch} x_2}. \quad (8.2.71)$$

При движении точки на плоскости x вдоль выделенного участка кривой (67) \bar{t}_1 убывает от единицы до нуля, \bar{t}_2 возрастает от нуля до

$$\alpha / \operatorname{ch} \alpha = 1 / \operatorname{sh} \alpha = \varepsilon^* = 0,662743. \quad (8.2.72)$$

Итак, при разложении эксцентрической аномалии x по степеням \bar{t} - T радиус сходимости равен расстоянию от точки T

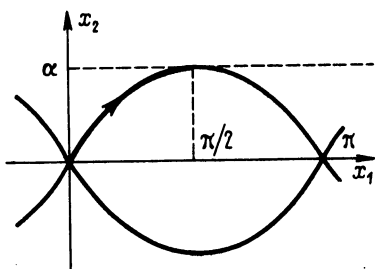


Рис.6. Кривая особых точек на плоскости x .

плоскости \tilde{t} до соответствующей точки кривой (71), изображенной на рис.7. Если нас не интересует конкретное значение средней аномалии μ , то следует определить $R = \min_{\mu} R(\mu)$ как расстояние от T до кривой (71).

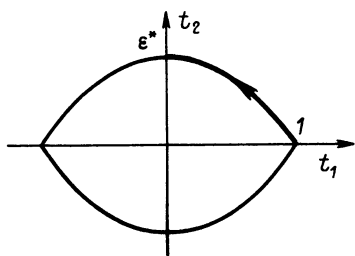


Рис.7. Кривая особых точек на плоскости \tilde{t} .

Рассмотрим подробнее обычный случай разложения по степеням эксцентриситета \tilde{t} , когда $T = 0$. При конкретном μ радиус $R(\mu)$ равен расстоянию от начала координат до соответствующей точки кривой (71).

Вычисляя $\tilde{t}_1^2 + \tilde{t}_2^2$, пользуясь (71), (66), находим

$$R(\mu) = \sqrt{2x_2 / (\text{sh } 2x_2)}, \quad (8.2.73)$$

и потому $R(\mu)$ с ростом μ от 0 до $\pi/2$ убывает от 1 до ϵ^* . Это значит, что для фиксированного μ_0 из промежутка $[0, \pi/2]$ в окрестности перицентра $-\mu_0 \leq \mu \leq \mu_0$ и апоцентра $\pi - \mu_0 \leq \mu \leq \pi + \mu_0$ гарантирована сходимость разложений по степеням эксцентриситета в круге $|\tilde{t}| < R(\mu_0)$. В круге $|\tilde{t}| < R(\pi/2) = 0,662743$ гарантирована сходимость при любом вещественном μ . Зависимость $R(\mu)$ приведена в табл.2.

Т а б л и ц а 2

μ^0	$10^5 R(\mu)$	μ^0	$10^5 R(\mu)$	μ^0	$10^5 R(\mu)$
0	100000	11	85230	22	78708
1	96610	12	84499	23	78242
2	94718	13	83802	24	77791
3	93186	14	83138	25	77356
4	91861	15	82503	26	76935
5	90677	16	81895	27	76527
6	89600	17	81311	28	76133
7	88606	18	80750	29	75751
8	87682	19	80211	30	75381
9	86816	20	79691	31	75022
10	86001	21	79191	32	74674

μ^0	$10^5 R(\mu)$	μ^0	$10^5 R(\mu)$	μ^0	$10^5 R(\mu)$
33	74337	52	69558	71	67058
34	74011	53	69377	72	66977
35	73694	54	69202	73	66900
36	73386	55	69033	74	66828
37	73088	56	68870	75	66760
38	72799	57	68712	76	66697
39	72518	58	68560	77	66639
40	72246	59	68414	78	66584
41	71982	60	68273	79	66535
42	71725	61	68137	80	66489
43	71477	62	68007	81	66448
44	71236	63	67882	82	66412
45	71002	64	67762	83	66379
46	70776	65	67646	84	66352
47	70556	66	67536	85	66328
48	70343	67	67431	86	66309
49	70137	68	67331	87	66294
50	69938	69	67235	88	66283
51	69745	70	67144	89	66276
				90	66274

§ 8.3. Сходимость разложений
по степеням малого параметра

Для получения ряда (2.2.3), представляющего решение уравнения (2.2.1), приходилось пользоваться разложениями по x, μ , но не по \dot{t} . Разумно требовать голоморфности лишь по первым переменным. В небесной механике для достаточно малых μ ряд (2.2.3) сходится, как правило, при сколь угодно больших \dot{t} . Поэтому будем считать f определенной при всех вещественных $\dot{t} \geq 0$ - для удобства рассматриваем лишь решения с нулевыми начальными данными.

Теорема 8.3.1. Пусть в области $\Delta \subset C^N \times R \times C$, заданной неравенствами

$$|x^n| < a^n \quad (n=1, \dots, N), \quad (8.3.1)$$

$$t \geq 0, \quad |\mu| < \gamma,$$

вектор-функция f голоморфна по x, μ , непрерывна по t и ограничена

$$|f^n(x, t, \mu)| \leq M^n.$$

Тогда решение уравнения

$$\dot{x} = f(x, t, \mu) \quad (8.3.2)$$

с нулевыми начальными данными можно представить рядом

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t), \quad (8.3.3)$$

сходящимся по крайней мере в круге

$$|\mu| < \gamma [1 - \tilde{M}(N+1)t], \quad (8.3.4)$$

где $\tilde{M} = \max_n (M^n/a^n)$.

Для доказательства рассмотрим наряду с (2) мажорантное уравнение

$$dx/dt = f^*(x, t, \mu), \quad (8.3.2)^*$$

где мажоризация осуществляется только по x, μ , но не по t :

$$f < f^* \pmod{x, \mu}. \quad (8.3.5)$$

Это значит (см. § 8.1), что f, f^* разлагаются в ряды по степеням x, μ с коэффициентами $B_{rs}(t), B_{rs}^*(t)$, и для каждой компоненты при каждом $t \geq 0$

$$|B_{rs}^n(t)| \leq B_{rs}^{n*}(t).$$

Как показано в § 2.2, уравнение для x_0 получается из (2) подстановкой $\mu = 0$. Точно так же получается уравнение для x_0^* из (2)**:

$$\dot{x}_0 = f(x_0, t, 0), \quad (8.3.6,$$

$$\dot{x}_0^* = f^*(x_0^*, t, 0). \quad (8.3.6)^*$$

Очевидно, что $f(x, t, 0) \prec f^*(x, t, 0) \pmod{x}$. В частности, в силу (8.1.15)

$$|f^n(x, t, 0)| \leq f^{n*}(y, t, 0) \quad (|x^k| \leq y^k \leq a^k). \quad (8.3.7)$$

Примем сначала, что неравенство строгое

$$|f^n(x, t, 0)| < f^{n*}(y, t, 0) \quad (|x^k| \leq y^k \leq a^k). \quad (8.3.8)$$

В начальную эпоху x_0 и x_0^* совпадают, а x_0^* растет быстрее:

$$|\dot{x}_0^n(0)| < \dot{x}_0^{n*}(0).$$

При достаточно малых $t > 0$ функция x_0^* перерастет x_0 :

$$|x_0^n(t)| < x_0^{n*}(t). \quad (8.3.9)$$

Предположим невероятное, что (9) когда-нибудь хоть для одной компоненты нарушится. Обозначим точную нижнюю границу таких t через τ . По доказанному $\tau > 0$. По смыслу τ неравенство (9) справедливо для всех n при $0 < t < \tau$ и обращается в равенство при $t = \tau$ хотя бы для одного n , пусть $n = m$:

$$|x_0^m(\tau)| = x_0^{m*}(\tau). \quad (8.3.10)$$

В силу (8), (10)

$$|\dot{x}_0^m(\tau)| = |f^m(x_0(\tau), \tau, 0)| < f^{m*}(x_0^*(\tau), \tau, 0) = \dot{x}_0^{m*}(\tau),$$

что вместе с (10) дает $|x_0^m(t)| > x_0^{m*}(t)$ для t , достаточно близких к τ слева.

Полученное противоречие показывает, что (9) верно** при всех $t > 0$, для которых существуют решения $x_0(t)$, $x_0^*(t)$. Решения уравнений существуют до тех пор, пока не подойдут к границе Δ . Ясно, что первой подойдет к границе $x_0^*(t)$. Итак, (9) верно при всех $t > 0$, для которых определено $x_0^*(t)$. Случай нестрогого неравенства (7), рассматриваемый как предельный для изученного, приводит к

** Эти довольно длинные рассуждения — формализация того очевидного факта, что график $x_0^{m*}(t)$ растет из нуля круче графика $|x_0^m(t)|$, и потому пересечься они не могут.

$$|x_0^n(t)| \leq x_0^{n*}(t) \quad (8.3.11)$$

при всех $t \geq 0$, для которых определена правая часть.

Мы установили, что из (6), (6)***, (7) следует (11). Предположим, что (11) верно для значений нижнего индекса $0, 1, \dots, k-1$. Тогда уравнения типа (2.2.18)

$$\dot{x}_k = F(x_k, t), \quad \dot{x}_k^* = F^*(x_k^*, t)$$

по доказанному в § 2.2 обладают тем же свойством

$$|F^n(x, t)| \leq F^{n*}(y, t) \quad (|x^k| \leq y^k),$$

откуда
$$|x_k^n(t)| \leq x_k^{n*}(t) \quad (8.3.12)$$

при всех $t \geq 0$, для которых определена правая часть. По принципу полной индукции (12) верно при всех $k = 0, 1, \dots$, что можно записать в виде

$$x(t, \mu) \leq x^*(t, \mu) \quad (\text{mod } \mu). \quad (8.3.13)$$

Осталось лишь подобрать мажорантное уравнение. Положим

$$f^{n*}(x, t, \mu) = \frac{M^n}{(1-x^1/a^1) \dots (1-x^N/a^N)(1-\mu/\gamma)}$$

Замена переменных $x^n = a^n y^n$ позволяет записать (2)** в виде

$$\dot{y}^n = \frac{M^n}{a^n(1-y^1) \dots (1-y^N)(1-\mu/\gamma)}$$

Усиливая мажоранту, как и в § 8.2, приходим к скалярному уравнению

$$\dot{y} = \frac{\tilde{M}}{(1-y)^N(1-\mu/\gamma)}. \quad (8.3.14)$$

Его решение легко находится:

$$y = 1 - \sqrt[N+1]{1 - \frac{\tilde{M}(N+1)}{1-\mu/\gamma} t}. \quad (8.3.15)$$

Сингулярности функции (15) суть

$$\mu = \gamma, \quad \mu = \gamma [1 - \tilde{M}(N+1)t].$$

Внутри области (4) особых точек нет, а ряд для корня сходится и на окружности круга сходимости. Теорема доказана.

На практике обычно значение параметра μ фиксировано и требуется найти интервал времени, на котором гарантируется сходимость. Решая (4) относительно \bar{t} , находим эквивалент (4) в форме

$$\bar{t} \leq 1 / (\tilde{M}(N+1)) (1 - |\mu|/\bar{\gamma}). \quad (8.3.16)$$

Для линейных систем известен гораздо более сильный результат.

Теорема 8.3.2. Пусть матрица $A(\bar{t}, \mu)$ и вектор $B(\bar{t}, \mu)$ голоморфны по μ и непрерывны по \bar{t} в области Δ :

$$\bar{t} \geq 0, \quad |\mu| < \bar{\gamma}. \quad (8.3.17)$$

Тогда решение уравнения

$$\dot{x} = A(\bar{t}, \mu)x + B(\bar{t}, \mu) \quad (8.3.18)$$

представляется рядом (3), сходящимся в той же области Δ .

В случае ограниченности A, B для доказательства достаточно мажорантное уравнение (14) заменить на

$$\dot{y} = (\alpha Ny + \beta) / (1 - \mu/\bar{\gamma}).$$

при подходящих α, β . В общем случае ограниченности можно добиться заменой Δ на область $0 \leq \bar{t} \leq T, |\mu| \leq \tilde{\gamma} \quad (\tilde{\gamma} < \bar{\gamma})$. Остается лишь совершить предельный переход $T \rightarrow \infty, \tilde{\gamma} \rightarrow \bar{\gamma}$.

Теорема I гарантирует весьма узкую область сходимости для нелинейных систем. Даже при $\mu \rightarrow 0$ длина временного интервала сходимости остается ограниченной. Ясно, что гарантировать большую длину в общем случае невозможно - при сколь угодно малом μ решение практически одинаково быстро может достигнуть границы области голоморфности правой части уравнения. Значительно более сильный результат получается для уравнений с медленными и быстрыми переменными. Начнем с простейших случаев систем только с медленными или только с быстрыми переменными.

Теорема 8.3.3. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы I. Тогда решение уравнения

$$\dot{x} = \mu f(x, \bar{t}, \mu) \quad (8.3.19)$$

с нулевыми начальными данными можно представить рядом (3), сходящимся по крайней мере в круге

$$|\mu| \leq \gamma / (1 + \gamma \tilde{M}(N+1)\bar{t}), \quad (8.3.20)$$

или, что то же, при

$$\bar{t} \leq (1 / (\tilde{M}(N+1)|\mu|)) (1 - |\mu|/\gamma). \quad (8.3.21)$$

Для доказательства достаточно добавить множитель μ перед \tilde{M} в (14), (15).

Теорема (8.3.4) Пусть в области $\Delta \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, заданной неравенствами

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} y^n| &< b^n \quad (n=1, \dots, N), \\ \bar{t} &\geq 0, \quad |\mu| < \gamma, \end{aligned} \quad (8.3.22)$$

вектор-функция g голоморфна по y, μ , непрерывна по \bar{t} и ограничена

$$|g^n(y, \bar{t}, \mu)| \leq M^n. \quad (8.3.23)$$

Тогда решение уравнения

$$\dot{y} = \omega + \mu g(y, \bar{t}, \mu), \quad (8.3.24)$$

где ω — вещественный постоянный вектор, представимо рядом типа (3), сходящимся по крайней мере в области (20), или, что то же, (21), где $\tilde{M} = \max (M^n / b^n)$.

Замена переменных $y = \omega \bar{t} + z$ переводит (24) в

$$\dot{z} = \mu g(\omega \bar{t} + z, \bar{t}, \mu). \quad (8.3.25)$$

При $|z| < b^n$ очевидно, что $|\operatorname{Im}(\omega \bar{t} + z)| < b^n$, так что справедлива оценка (23). Мы получаем теорему 4 как следствие теоремы 3, примененной к уравнению (25).

Обратимся к общему случаю системы с медленными и быстрыми переменными:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu f(x, y, \bar{t}, \mu), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \mu g(x, y, \bar{t}, \mu). \end{aligned} \quad (8.3.26)$$

При вещественном ω какая-либо компонента y^n может войти до границы полосы $|\operatorname{Im} y^n| < b^n$ лишь за счет слагаемого μg , так что скорость движения по мнимой оси имеет порядок $|\mu|$. В свою очередь x меняется со скоростью порядка $|\mu|$, так что $\omega(x)$ может двигаться вдоль мнимой оси как $|\mu| \bar{t}$, а y — как $|\mu| \bar{t}^2$. Эти соображения подсказывают замену

$$\mu = \vartheta^2, \quad x = \vartheta X, \quad y = z + \omega(0)\bar{t}, \quad (8.3.27)$$

приводящую (26) к виду

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \vartheta f(\vartheta X, z + \omega(0)\bar{t}, \bar{t}, \vartheta^2), \\ \dot{z} &= \omega(\vartheta X) - \omega(0) + \vartheta^2 g(\vartheta X; z + \omega(0)\bar{t}, \bar{t}, \vartheta^2). \end{aligned} \quad (8.3.28)$$

Теорема 8.3.5. Пусть в области $\Delta \subset \mathbb{C}^{N_1} \times \mathbb{C}^{N_2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, заданной неравенствами

$$\begin{aligned} |x^n| < a^n \quad (n=1, \dots, N_1), \quad |\operatorname{Im} y^m| < b^m \quad (m=1, \dots, N_2), \\ \bar{t} \geq 0, \quad |\mu| < \vartheta \leq 1, \end{aligned} \quad (8.3.29)$$

вектор-функции ω, f, g голоморфны по x, y, μ , непрерывны по \bar{t} , причем ω зависит только от x , $\omega(0)$ вещественно, и удовлетворяют ограничениям

$$\begin{aligned} |f^n(x, y, \bar{t}, \mu)| \leq M^n, \quad |g^m(x, y, \bar{t}, \mu)| \leq M^{N_1+m}, \\ a^k \left| \frac{\partial \omega^m(x)}{\partial x^k} \right| \leq M_k^m. \end{aligned} \quad (8.3.30)$$

Тогда решение (26) представимо в виде рядов

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\bar{t}) \mu^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(\bar{t}) \mu^k, \quad (8.3.31)$$

сходящихся по крайней мере в области

$$|\mu| \leq \vartheta / (1 + \sqrt{\vartheta} \tilde{M} (N+1) \bar{t})^2. \quad (8.3.32)$$

Здесь $N = N_1 + N_2$,

$$\tilde{M} = \max \left\{ \max_n \frac{M^n}{a^n}, \max_m \frac{(M_1^m + \dots + M_{N_1}^m) + \sqrt{\vartheta} M^{N_1+m}}{b^m} \right\}.$$

Доказательство. Неравенства (30) будут выполнены, если мы заставим новые переменные изменяться в области

$$|X^n| < a^n, \quad |z^m| < b^m, \quad t \geq 0, \quad |\varrho| < \sqrt{\delta}. \quad (8.3.33)$$

По формуле конечных приращений

$$\begin{aligned} |\omega^m(\varrho X) - \omega^m(0)| &\leq M_1^m |\varrho X^1/a^1| + \dots + M_{N_1}^m |\varrho X^{N_1}/a^{N_1}| \leq \\ &\leq (M_1^m + \dots + M_{N_1}^m) |\varrho|. \end{aligned}$$

Поэтому можно написать следующие мажорантные (mod X, z, ϱ) для (28) уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{X}^n &= \frac{\varrho M^n}{(1 - X^1/a^1) \dots (1 - z^{N_2}/b^{N_2})(1 - \varrho/\sqrt{\delta})}, \\ \dot{z}^m &= \frac{\varrho (M_1^m + \dots + M_{N_1}^m)}{(1 - X^1/a^1) \dots (1 - X^{N_1}/a^{N_1})(1 - \varrho/\sqrt{\delta})} + \frac{\varrho \sqrt{\delta} M^{N_1+m}}{(1 - X^1/a^1) \dots (1 - z^{N_2}/b^{N_2})(1 - \varrho/\sqrt{\delta})}. \end{aligned}$$

Усиливая мажорацию, добьемся совпадения правых частей. Положив $X^1/a^1 = \dots = z^{N_2}/b^{N_2} = u$, придем к скалярному уравнению

$$\dot{u} = \frac{\varrho \tilde{M}}{(1 - u)^N (1 - \varrho/\sqrt{\delta})}$$

Последнее с точностью до обозначений совпадает с (14), так что достаточно обратиться к формуле (15):

$$u = 1 - \sqrt[N+1]{1 - \frac{\varrho \tilde{M} (N+1)}{1 - \varrho/\sqrt{\delta}} t}. \quad (8.3.34)$$

Ряд Маклорена для u сходится в области

$$|\varrho| \leq \sqrt{\delta} / (1 + \sqrt{\delta} \tilde{M} (N+1) t). \quad (8.3.35)$$

По теореме I в окрестности нуля функции x, y голоморфны по μ , а не только по $\varrho = \sqrt{\mu}$. Следовательно, ряды (31) сходятся по крайней мере в области (32), отвечающей (35) при отображении $\mu = \varrho^2$. Теорема доказана.

Неравенство (32) можно переписать в форме

$$\bar{t} \leq \frac{1 - \sqrt{|\mu/\delta|}}{\bar{M}(N+1)\sqrt{|\mu|}}. \quad (8.3.36)$$

Итак, гарантированная область сходимости разложений по малому параметру решений (26) есть

$$\bar{t} < \text{const} / |\mu|, \quad (8.3.37)$$

если $N_1 = 0$ или $N_2 = 0$. В противном случае $N_1 \geq 1$, $N_2 \geq 1$ и вместо (37) имеем меньшую область

$$\bar{t} < \text{const} / |\mu|^{1/2}. \quad (8.3.38)$$

Покажем на примерах, что оценки (37), (38) являются точными. Показатели 1 и 1/2 в общем случае не могут быть увеличены.

Пример 8.3.1. Рассмотрим уравнение ($N_1 = N_2 = 1$, $N_3 = 0$)

$$\dot{x} = \mu(1+x)^2. \quad (8.3.39)$$

Его решение $x = \mu \bar{t} (1 - \mu \bar{t})^{-1}$ разлагается в ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \bar{t}^k. \quad (8.3.40)$$

Очевидно, что (40) сходится при $\bar{t} < 1/|\mu|$ и расходится при $\bar{t} > 1/|\mu|$. Точность оценки (37) установлена.

Пример 8.3.2. Дана система ($N_1 = 2$, $N_2 = 1$)

$$\dot{x}^1 = \mu, \quad \dot{x}^2 = \mu/(2 - \cos y), \quad \dot{y} = 1 + 2x^1. \quad (8.3.41)$$

Она интегрируется элементарно, если искать сначала x^1 , затем y , а потом x^2 :

$$x^1 = \mu \bar{t}, \quad x^2 = \mu \int_0^{\bar{t}} \frac{d\tau}{2 - \cos(\tau + \mu \tau^2)}; \quad y = \bar{t} + \mu \bar{t}^2. \quad (8.3.42)$$

Особые точки x^2 определяются из условия

$$2 - \cos(\bar{t} + \mu \bar{t}^2) = 0, \quad (8.3.43)$$

где \bar{t} надо рассматривать как положительный параметр. Уравнение (43) легко решается

$$\mu = (2\pi/t^2)(k - t/(2\pi)) \pm i(\ln(2 + \sqrt{3}))/t^2 \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Ближайшая к началу точка отвечает такому выбору $k(t)$, что $\theta(t) \in (-1, 1]$. Здесь введено обозначение

$$k - t/(2\pi) = \theta/2.$$

Расстояние от начала до ближайшей особенности

$$|\mu| = \sqrt{\pi^2 \theta^2(t) + \ln^2(2 + \sqrt{3})}/t^2.$$

Итак, ряд (31) для x^2 сходится при

$$t^2 < (\ln(2 + \sqrt{3}))/|\mu|$$

и расходится при

$$t^2 > \sqrt{\pi^2 + \ln^2(2 + \sqrt{3})}/|\mu|.$$

Точность оценки (38) установлена.

Уравнения небесной механики обычно являются каноническими с периодически зависящим от координат гамильтонианом (4.1.2). К сожалению, это важное свойство не расширяет области сходимости (31), как показывают следующие два примера.

Пример 8.3.3. Каноническая система уравнений с одной степенью свободы, не содержащая быстрых переменных, задана гамильтонианом

$$h = \mu(x + 1/(2 - \cos y)). \quad (8.3.44)$$

Уравнения движения

$$\dot{x} = (\mu \sin y)/(2 - \cos y)^2, \quad \dot{y} = \mu \quad (8.3.45)$$

имеют решением

$$x = (1 - \cos \mu t)/(2 - \cos \mu t), \quad y = \mu t. \quad (8.3.46)$$

Как и в примере 2, устанавливаем, что ряд (31) для x сходится при $t < (\ln(2 + \sqrt{3}))/|\mu|$ и расходится при $t > (\ln(2 + \sqrt{3}))/|\mu|$, что подтверждает точность оценки (37).

Пример 8.3.4. Каноническая система с тремя степенями свободы задана гамильтонианом

$$h = 2x^1x^2 + x^3 + \mu (-\sin y^1 + x^3/(2 - \cos y^2)). \quad (8.3.47)$$

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= \mu \cos y^1, & \dot{y}^1 &= 2x^2, \\ \dot{x}^2 &= (\mu x^3 \sin y^2)/(2 - \cos y^2)^2, & \dot{y}^2 &= 2x^1, \\ \dot{x}^3 &= 0, & \dot{y}^3 &= 1 + \mu/(2 - \cos y^2) \end{aligned} \quad (8.3.48)$$

имеют решением

$$\begin{aligned} x^1 &= \mu t, & x^2 &= x^3 = y^1 = 0, & y^2 &= \mu t^2, \\ y^3 &= t + \mu \int_0^t \frac{d\tau}{2 - \cos \mu \tau^2}. \end{aligned} \quad (8.3.49)$$

Функция y^3 подтверждает точность оценки (38).

Итак, точность оценок (37), (38) установлена во всех рассмотренных случаях. Однако легко заметить, что в условиях теорем 3.5.2, 5.3.1, 5.3.3 члены вида μt^2 , игравшие основную роль в примерах 2 и 4, появиться не могут. Покажем, что для типичных задач небесной механики в нерезонансной ситуации можно гарантировать сходимость в области (37), а не только (38), даже допуская собственное вырождение, т.е. зависимость невозмущенных частот лишь от части медленных переменных. В доказательстве существенно используется теорема Лагранжа-Лапласа о неизменяемости больших полюсов в первом приближении, что не позволяет применить метод мажорант. Построим индуктивное доказательство, к сожалению, достаточно громоздкое. Вначале упростим систему (26). Во-первых, предположим независимость f , g от μ , что равносильно закреплению значения малого параметра в выражениях для f , g и не умаляет общности. Во-вторых, примем частоты $\omega(x)$ за новые переменные, положив

$$\xi^i + \omega^i = \omega^i(x)/L \quad (i = 1, \dots, N_2). \quad (8.3.50)$$

Здесь $\omega_i = \omega_i(0)/L$ - начальное значение $\omega^i(x)$ с точностью до постоянного множителя L , введенного с целью сделать безразмерными величины ξ^i , ω^i .

Если соотношения (50) обратимы, что имеет место в задаче нескольких тел, задаче о движении спутника и т.д., мы можем N_2 компонент вектора x (считаем их первыми по порядку) выразить через ξ^1, \dots, ξ^{N_2} и рассмотреть дифференциальные уравнения для $\xi^1, \dots, \xi^{N_2}, x^{N_2+1}, \dots, x^{N_1}, y^1, \dots, y^{N_2}$. В противном случае ξ^1, \dots, ξ^{N_2} также можно принять за новые переменные, добавляя к ξ вектор размерности большей, чем $N_1 - N_2$. Пусть, например, $N = 6, N_1 = 3, N_2 = 3, \omega^1(x) = x^1 + x^2 + 1, \omega^2(x) = x^3 - 2, \omega^3(x) = (x^1 + x^2 + 1)^2$. Мы вынуждены ввести семь величин $\xi^1 = x^1 + x^2, \xi^2 = x^3, \xi^3 = (x^1 + x^2)^2 + 2(x^1 + x^2), x^1 - x^2, y^1, y^2, y^3$.

В любом случае уравнения (26) можно преобразовать к виду

$$\dot{x} = \mu f(x, y),$$

$$\dot{y} = L\omega + L\xi + \mu g(x, y).$$

Здесь $x = (x^1, \dots, x^q), \xi = (\xi^1, \dots, \xi^p) = (x^1, \dots, x^p),$

$$y = (y^1, \dots, y^p), q \geq p, \omega = (\omega^1, \dots, \omega^p) = \text{const},$$

$$L = \text{const}, \omega^i > 0, L > 0.$$

Мы сохранили символы x, y, f, g за переменными и возмущающими членами уравнений. Порождающая система $\dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = L\omega + L\xi_0$ при нулевых начальных данных имеет решением $x_0 = 0, y_0 = L\omega t$. Примем за новые переменные отклонения $x - x_0, y - y_0$ от невозмущенного движения. Сохраняя для них обозначения x, y , получаем окончательно

$$\dot{x} = \mu f(x, L\omega t + y), \tag{8.3.51}$$

$$\dot{y} = L\xi + \mu g(x, L\omega t + y).$$

Решение (51) с нулевыми начальными данными представимо рядами

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \mu^k, \tag{8.3.52}$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \mu^k,$$

причем $x_k(0) = y_k(0) = 0$.

Теорема 8.3.6. Пусть выполнены следующие условия:

1) в области $\Delta \subset \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^p$, заданной неравенствами

$$|x^\alpha| < a, \quad |\operatorname{Im} y^\beta| < b, \quad (8.3.53)$$

функции f^α, g^β голоморфны, имеют период 2π по каждой компоненте вектора y и ограничены

$$|f^\alpha(x, y)| \leq M, \quad |g^\beta(x, y)| \leq M. \quad (8.3.54)$$

Индекс α здесь и ниже изменяется от 1 до q , β - от 1 до p , $q \geq p$;

2) среднее значение f^β по y равно нулю;

3) постоянная L положительна, частоты ω^β положительны и удовлетворяют ограничению

$$|n\omega| \geq \varepsilon |n|^{-\sigma} \quad (8.3.55)$$

для всех $n \neq 0$ при некоторых фиксированных $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$.

Тогда существуют постоянные $c > 0$, $h > 0$, такие, что общий член ряда (52) при $t \geq 0$ удовлетворяет неравенствам

$$|x_k^\alpha|, |y_k^\beta| \leq (ch^k/k^2) t^{k-1}, \quad (8.3.56)$$

$$|x_k^\alpha|, |y_k^\beta| \leq (ch^k/k^2) t^k, \quad (8.3.57)$$

$$L|\xi_k^\beta| = L|x_k^\beta| \leq (ch^k/k^2) t^{k-1}. \quad (8.3.58)$$

Доказательство. Достаточно доказать (56) и (58), ибо из (56) следует

$$|x_k^\alpha|, |y_k^\beta| \leq (ch^k/k^3) t^k, \quad (8.3.59)$$

и тем более (57).

По условию 1) правые части разлагаются в Δ в ряд Фурье по y с коэффициентами, представимыми рядом Маклорена по x . Приходим в Δ к разложению в так называемый ряд Пуассона:

$$f(x, y) = \sum A_{mn} x^m e^{iny},$$

$$g(x, y) = \sum B_{mn} x^m e^{iny}. \quad (8.3.60)$$

Как и в § 8.1, можно доказать аналогичное (8.1.21) неравенство

$$|A_{mn}^\alpha|, |B_{mn}^\beta| \leq M \alpha^{-|m|} e^{-|n|b}. \quad (8.3.61)$$

Предвидя появление малых знаменателей, с помощью (55) построим оценку

$$\left| \frac{A_{mn}^\alpha}{n\omega} \right|, \left| \frac{B_{mn}^\beta}{n\omega} \right| \leq \frac{M}{\varepsilon} \alpha^{-|m|} |n|^\sigma e^{-|n|b}. \quad (8.3.62)$$

Разобьем b на два произвольных положительных слагаемых: $b = b_0 + b_1$. Элементарные выкладки показывают, что

$$\max_n |n|^\sigma e^{-nb_1} = (\sigma / (eb_1))^\sigma.$$

Отсюда и из (62)

$$\left| \frac{A_{mn}^\alpha}{n\omega} \right|, \left| \frac{B_{mn}^\beta}{n\omega} \right| \leq M_0 \alpha^{-|m|} e^{-|n|b_0}, \quad (8.3.63)$$

где
$$M_0 = \frac{M}{\varepsilon} \left(\frac{\sigma}{eb_1} \right)^\sigma. \quad (8.3.64)$$

В ряде Пуассона (60) заменим y на $L\omega t + y$ и воспользуемся классическим равенством

$$e^{in(L\omega t + y)} = e^{iLn\omega t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^r}{r!} (ny)^r.$$

В результате получим сходящееся в Δ при любом вещественном t разложение

$$f(x, L\omega t + y) = \sum_{n,m,r} \frac{A_{mn} i^r}{r!} e^{iLn\omega t} x^m (ny)^r. \quad (8.3.65)$$

Подставим (52) в первое из уравнений (51) с учетом (65):

$$\begin{aligned} \sum \mu^k \dot{x}_k &= \mu \sum \frac{A_{mn} i^r}{r!} e^{iLn\omega t} \left(\sum \mu^{k_1} x_{k_1}^1 \right)^{m_1} \dots \\ &\dots \left(\sum \mu^{k_q} x_{k_q}^q \right)^{m_q} \left(\sum \mu^s n y_s \right)^r. \end{aligned} \quad (8.3.66)$$

Каждую степень в (66) запишем как произведение и приравняем коэффициенты с одинаковыми показателями μ :

$$\dot{x}_{k+1} = \sum \frac{A_{mn} i^r}{r!} e^{iLn\omega t} (x_{k_{11}}^1 x_{k_{12}}^1 \dots x_{k_{1m_1}}^1) \dots$$

$$\dots (x_{k_{q1}}^q x_{k_{q2}}^q \dots x_{k_{qm_q}}^q) [(ny_{s_1})(ny_{s_2}) \dots (ny_{s_r})]. \quad (8.3.67)$$

Здесь суммирование осуществляется по множеству

$$-\infty < n_1, \dots, n_p < \infty; \quad 0 \leq m_1, \dots, m_q \leq k;$$

$$0 \leq r \leq k;$$

$$1 \leq k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1m_1}, \dots, k_{q1}, k_{q2}, \dots, k_{qm_q} \leq k;$$

$$1 \leq s_1, s_2, \dots, s_r \leq k;$$

$$(k_{11} + k_{12} + \dots + k_{1m_1}) + \dots + (k_{q1} + k_{q2} + \dots + k_{qm_q}) + (s_1 + s_2 + \dots + s_r) = k.$$

Как обычно, пустая сумма считается нулем, пустое произведение — единицей. Выражение для \dot{y}_{k+1} получается из правой части (67) добавлением слагаемого $L\xi_{k+1}$ и заменой A_{mn} на B_{mn} . В частности, при $k=0$

$$\dot{x}_1 = \sum A_{0n} e^{iLn\omega t}, \quad \dot{y}_1 = L\xi_1 + \sum B_{0n} e^{iLn\omega t}. \quad (8.3.68)$$

Докажем (56), (58) при $k=1$. Согласно (54)

$$|\dot{x}_1^\alpha| = |f^\alpha(0, L\omega t)| \leq M. \quad (8.3.69)$$

Интегрируем (68) для ξ_1 с учетом $A_{00}^\beta = 0$:

$$L|\xi_1^\beta| = \left| \sum_{n \neq 0} \frac{A_{0n}^\beta}{in\omega} (e^{iLn\omega t} - 1) \right| \leq 2M_0 \sum_{n \neq 0} e^{-|n|b_0},$$

где в конце использовано (63). Сумма последнего ряда без пропуска свободного члена легко считается как произведение одинаковых рядов:

$$\sum_{|n| \geq 0} e^{-|n|b_0} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|n|b_0} \right)^P = \left(\operatorname{cth} \frac{b_0}{2} \right)^P. \quad (8.3.70)$$

Поэтому
$$L|\xi_1^\beta| \leq 2M_0 \left[\left(\operatorname{cth} \frac{b_0}{2} \right)^P - 1 \right]. \quad (8.3.71)$$

Складывая (71) и (54), находим

$$|\dot{y}_1^\beta| \leq 2M_0 \left[\left(\operatorname{cth} \frac{b_0}{2} \right)^p - 1 \right] + M. \quad (8.3.72)$$

Неравенства (69), (72), (71) влекут (56), (58) для $k = 1$ при условии

$$2M_0 \left[\left(\operatorname{cth} \frac{b_0}{2} \right)^p - 1 \right] + M < ch. \quad (8.3.73)$$

Допустим теперь справедливость оценок (56), (57) до значка k включительно и докажем их для значка $k + 1$. По индуктивному предположению общий член ряда (67) для \dot{x}_{k+1}^α не превосходит

$$\frac{|A_{mn}^\alpha| |n|^r c^{m_1 + \dots + m_q + r} h^{k \bar{t} k}}{r! (k_{11} \dots k_{1m_1})^2 \dots (k_{q1} \dots k_{qm_q})^2 (s_1 \dots s_r)^2}. \quad (8.3.74)$$

Фиксируем m, n, r и просуммируем по $k_{11}, \dots, k_{qm_q}, s_1, \dots, s_r$. Согласно (П.4.1), (П.4.2)

$$\begin{aligned} & \sum (k_{11} \dots k_{1m_1})^{-2} \dots (k_{q1} \dots k_{qm_q})^{-2} (s_1 \dots s_r)^{-2} = \\ & = Q(k, m_1 + \dots + m_q + r) \leq Q^{|m|+r-1} k^{-2}. \end{aligned} \quad (8.3.75)$$

Это верно и при некоторых нулевых индексах m_1, \dots, m_q, r , лишь бы не все они обратились в нуль, что невозможно при $k \geq 1$. С учетом (74), (75), (61)

$$|\dot{x}_{k+1}^\alpha| < \frac{h^{k \bar{t} k} M}{k^2 Q} \sum_{|n| \geq 0} e^{-|n|b} \sum_{r \geq 0} \frac{(|n| Q c)^r}{r!} \sum_{|m| \geq 0} \left(\frac{Qc}{a} \right)^{|m|},$$

где мы расширили множество суммирования, добавив положительные слагаемые. При

$$Qc < a \quad (8.3.76)$$

суммирование по m, r элементарно:

$$|\dot{x}_{k+1}^\alpha| < \frac{h^{k \bar{t} k} M}{k^2 Q (1 - Qc/a)^q} \sum_{|n| \geq 0} e^{-|n|(b - Qc)}. \quad (8.3.77)$$

Последний ряд при

$$Qc < b \quad (8.3.78)$$

сходится к сумме типа (67)

$$\left| \dot{x}_{k+1}^\alpha \right| < \frac{h^k \bar{t}^k M}{k^2 Q (1 - Qc/a) \varphi} \left(\operatorname{cth} \frac{b_0 - Qc}{2} \right)^p. \quad (8.3.79)$$

Переходя к переменным ξ , записываем (67) в форме

$$\sum_{k+1}^\beta = \sum \varphi(\bar{t}) e^{iLn\omega \bar{t}}, \quad (8.3.80)$$

где функция φ зависит также от индексов $m, n, r, k_1, \dots, k_q, m_q, s_1, \dots, s_r$. Интегрируя по частям под знаком суммы, найдем с учетом $n \neq 0, \varphi(0) = 0$

$$L \xi_{k+1}^\beta = \sum \frac{\varphi(\bar{t})}{in\omega} e^{iLn\omega \bar{t}} - \sum \frac{1}{in\omega} \int_0^{\bar{t}} e^{iLn\omega \tau} \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

$$\text{откуда} \quad L \left| \xi_{k+1}^\beta \right| \leq \sum \frac{1}{|n\omega|} \left\{ |\varphi(\bar{t})| + \int_0^{\bar{t}} \left| \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} \right| d\tau \right\}. \quad (8.3.81)$$

Для $\varphi(\bar{t})$ уже найдено неравенство (74). Производная от φ , как показывает формула (67), будет суммой $m_1 + m_2 + \dots + m_q + r$ однотипных слагаемых, каждое из которых согласно (56) оценивается той же величиной (74), если в последней уменьшить показатель степени \bar{t} на единицу. После интегрирования общий член (81) получает оценку (74) с добавочным множителем

$$\frac{1}{|n\omega|} \left\{ 1 + \frac{m_1 + \dots + m_q + r}{k} \right\} \leq \frac{2}{|n\omega|}.$$

С учетом (63) отсюда следует (77) для $L \xi_{k+1}^\beta$ с заменой M на $2M_0$, b на b_0 и пропуском слагаемого при $n = 0$, что вместе с (70) дает

$$L \left| \xi_{k+1}^\beta \right| < \frac{2M_0 h^k \bar{t}^k}{k^2 Q (1 - Qc/a) \varphi} \left[\left(\operatorname{cth} \frac{b_0 - Qc}{2} \right)^p - 1 \right] \quad (8.3.82)$$

$$\text{при условии} \quad Qc < b_0. \quad (8.3.83)$$

Осталось лишь сложить правые части (79), (82):

$$\left| \dot{y}_{k+1}^\beta \right| < \frac{h^k \bar{t}^k}{k^2 Q (1 - Qc/a) \varphi} \left\{ M \left(\operatorname{cth} \frac{b - Qc}{2} \right)^p + 2M_0 \left[\left(\operatorname{cth} \frac{b_0 - Qc}{2} \right)^p - 1 \right] \right\}. \quad (8.3.84)$$

Неравенства (79), (84), (82) влекут (56), (58) для индекса $k+1$ при условии

$$h > \frac{4}{Q_c(1-Q_c/\alpha)^4} \left\{ M \left(\operatorname{cth} \frac{b-Q_c}{2} \right)^p + 2M_0 \left[\left(\operatorname{cth} \frac{b_0-Q_c}{2} \right)^p - 1 \right] \right\}. \quad (8.3.85)$$

Множитель 4 в (85) обязан своим появлением дроби $(k+1)^2/k^2$ и при более тщательном анализе может быть значительно уменьшен. Теорема доказана полностью. Если α, b, M, b_0, M_0 считать заданными, то число c подбирается по условиям (76), (83) - неравенство (78) удовлетворяется автоматически; число h подбирается затем по условиям (73), (85).

Отметим, что функции x_k, y_k существуют, а оценки (56), (58), (59) с заменой \tilde{t} на $|\tilde{t}|$ справедливы при всех вещественных \tilde{t} вне зависимости от сходимости рядов (52): формула (67) в методе Ляпунова - Пуанкаре служит индуктивным определением x_k, y_k .

Теорема 8.3.7. В условиях теоремы 6 ряд (52) и аналогичный ряд для производных сходится к решению системы (51) при

$$|\mu| \leq 1/(ht). \quad (8.3.86)$$

Действительно, соотношения (59), (86) гарантируют сходимость (52) и выполнение неравенств $|x^\alpha(\tilde{t})|, |y^\beta(\tilde{t})| \leq c\zeta(3)$, где ζ - дзета-функция Римана. Из (76), (78) следует $c\zeta(3) < \alpha$, $c\zeta(3) < b$, т.е. $(x, y) \in \Delta$, что оправдывает все операции над рядами, примененные при доказательстве теоремы 6.

Обратим внимание, что величина h , определяющая область сходимости, находится по α, b, M, b_0, M_0 . Первые три величины в каждой конкретной задаче можно оценить без принципиальных затруднений по правым частям уравнений (51) или непосредственно по пертурбационной функции. Для определения последних двух необходимо знать поведение малых знаменателей, что возможно лишь в статистической постановке, если только частоты ω^β не известны точно (см. главу 7).

Укажем два важных частных случая, когда b_0, M_0 определяются конструктивно.

А) Пусть система (5I) содержит лишь одну быструю переменную ($p = 1$). Тогда малые знаменатели отсутствуют, и можно взять

$$b_0 = b, \quad M_0 = M/|\omega|. \quad (8.3.87)$$

Подобное положение встречается, например, в задаче о движении спутника сжатой планеты.

В) Пусть в системе (5I) правые части – тригонометрические многочлены, и индекс n пробегает конечное множество точек W . Принадлежность измеренного значения ω к нерезонансному множеству ($n\omega \neq 0$ при $n \in W$, $n \neq 0$) легко проверяется. Многочлены голоморфны при каждом y , так что b, b_0 можно выбрать произвольно, после чего положить

$$M = \max \left\{ \sup \left\{ |A_{mn}^\alpha| \alpha^{|m|} e^{|n|b} \right\}, \sup \left\{ |B_{mn}^\beta| \alpha^{|m|} e^{|n|b} \right\} \right\}, \quad (8.3.88)$$

$$M_0 = \max \left\{ \sup \left\{ \left| \frac{A_{mn}^\alpha}{n\omega} \right| \alpha^{|m|} e^{|n|b_0} \right\}, \sup \left\{ \left| \frac{B_{mn}^\beta}{n\omega} \right| \alpha^{|m|} e^{|n|b_0} \right\} \right\},$$

где верхняя граница берется по всем $|m| \geq 0$, $n \in W$ (для M_0 добавляется условие $n \neq 0$), $\alpha \leq q$, $\beta \leq p$. Если b, M заданы, можно положить также при произвольном b_0

$$M_0 = \max_{\substack{n \in W \\ n \neq 0}} \left\{ \frac{M}{|n\omega|} e^{-|n|(b-b_0)} \right\}. \quad (8.3.89)$$

Случай В) в отличие от А) кажется совершенно неожиданным. Ведь x_k, y_k содержат хотя и конечное, но быстро растущее вместе с k число гармоник, так что неизбежно появление сколь угодно малых знаменателей. Тем не менее за время $t \sim \mu^{-1}$ их влияние еще не приводит к катастрофе благодаря тому, что интеграл от $\mu e^{i\omega t}$ мы берем в форме $(\mu/(i\omega))(e^{i\omega t} - 1)$, а не $(\mu/(i\omega)) e^{i\omega t}$. Первая из этих величин имеет порядок единицы при сколь угодно малом ω , чего нельзя сказать о второй.

С практической точки зрения случай В) можно считать общим. Имея дело с конечным интервалом $t \sim \mu^{-1}$, мы можем сохранить в тригонометрическом разложении f, g конечное число гармоник, отбрасывая остаток, приводящий к поправкам за порогом принятой точности.

Итак, мы доказали оценку (37) области сходимости классических разложений в типичных задачах небесной механики. Ясно, что большей области можно ожидать лишь в исключительных ситуациях, поскольку (37) достигается даже при отсутствии быстрых переменных, как показано в примерах 1, 3.

§ 8.4. Асимптотический характер метода осреднения

Как было сказано в третьей главе, ряды метода осреднения не являются, как правило, равномерно сходящимися ни в какой области пространства начальных данных, помноженной на ось времени. Поэтому стандартное математическое обоснование метода осреднения носит асимптотический характер. Вместо рядов (3.2.2) рассматриваются лишь их отрезки до μ^k включительно. В результате в новых переменных ряды (3.2.3) имеют нужный нам вид лишь до μ^k , а следующие слагаемые уже не в нашей власти и могут быть объединены в один поправочный член. Требуется установить, насколько решения уравнений с поправочным членом отличаются от решений без такового на временах порядка μ^{-s} . Такая постановка задачи не менее разумна, чем постановка в терминах сходимости. Ведь на практике берется конечное число членов. Не надо только считать асимптотический подход единственно возможным. Во-первых, если удастся гарантировать сходимость, то нетрудно оценить и остаток. Во-вторых, в асимптотических неравенствах нелегко получить хорошие значения констант, и приходится довольствоваться соотношениями типа $|x - X| \sim \mu^2$.

При уменьшении μ в два раза левая часть уменьшается примерно в четыре.

Это — ценная информация при сравнении однотипных систем, отличающихся лишь значениями параметра. Но для конкретной системы μ — число, и вышеприведенная оценка мало информативна без знания соответствующей константы. Для определения констант надо привлекать численные эксперименты, решения модельных задач и интуицию исследователя.

В этом параграфе мы рассмотрим нерезонансный случай в методе осреднения, когда быстрые переменные удается исключить полностью. Перейдем в системе (3.2.1) к новым переменным по укороченным формулам:

$$\begin{aligned}x &= X + \mu u_1(X, Y) + \dots + \mu^k u_k(X, Y), \\y &= Y + \mu v_1(X, Y) + \dots + \mu^k v_k(X, Y),\end{aligned}\tag{8.4.1}$$

где u_1, \dots, u_k определены по формулам § 3.3 так, чтобы скорость изменения новых переменных не зависела от Y . Естественно, теперь это можно сделать лишь с точностью до μ^k . Запишем новые уравнения движения в виде

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \mu F_1(X) + \dots + \mu^k F_k(X) + \mu^{k+1} \Phi(X, Y, \mu), \\ \dot{Y} &= \omega(X) + \mu G_1(X) + \dots + \mu^k G_k(X) + \mu^{k+1} \Psi(X, Y, \mu).\end{aligned}\tag{8.4.2}$$

Пусть в области $\Delta \subset \mathbb{C}^{N_1} \times \mathbb{C}^{N_2} \times \mathbb{C}$, заданной неравенствами $|x^n| < a^n$ ($n=1, \dots, N_1$), $|\operatorname{Im} y^m| < b^m$ ($m=1, \dots, N_2$), $|\mu| < \delta$,

вектор-функции ω, f, g ограничены и голоморфны по x, y, μ , причем ω зависит только от x и вещественна при вещественных x . Мы можем распорядиться так, чтобы $f_1, g_1, \dots, f_k, g_k$ были бы тригонометрическими многочленами от быстрых переменных, относя остаток рядов Фурье к высшим приближениям $f_{k+1}, g_{k+1} \dots$. Тогда Φ, Ψ в (3.2.9), (3.2.11), а вместе с ними согласно (3.3.16) и $u_1, v_1, \dots, u_k, v_k$ будут тригонометрическими многочленами. Поэтому $u_m, v_m, F_m, G_m, \Phi, \Psi$ в области Δ будут голоморфны по X, Y и ограничены. При известном упорстве можно вывести значения констант, ограничивающих модули названных функций, и это совершенно необходимо, если затем переходить к пределу $k \rightarrow \infty$. Но здесь k фиксировано, и поскольку константы получаются завышенными на много десятичных порядков, мы не будем выписывать их значений. Ниже C с различными индексами будут означать постоянные, зависящие лишь от вида области Δ , первоначальных постоянных типа (8.3.30), степени тригонометрических многочленов и нижней границы знаменателей $n\omega(X)$ при $n \neq 0$ (напомним, что их имеется конечное число).

Наряду с точным решением X, Y уравнений (2) будем рассматривать приближенное ξ, η , получаемое после отбрасывания в (2) дополнительных членов Φ, Ψ . Функции ξ, η удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \mu F_1(\xi) + \dots + \mu^k F_k(\xi), \\ \dot{\eta} &= \omega(\xi) + \mu G_1(\xi) + \dots + \mu^k G_k(\xi).\end{aligned}\quad (8.4.3)$$

Обозначая разности решений, отвечающих одинаковым начальным данным, через $\alpha = X - \xi$, $\beta = Y - \eta$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \mu [F_1(X) - F_1(\xi)] + \dots + \mu^{k+1} \Phi(X, Y, \mu), \\ \dot{\beta} &= [\omega(X) - \omega(\xi)] + \dots + \mu^{k+1} \Psi(X, Y, \mu).\end{aligned}\quad (8.4.4)$$

До тех пор, пока ξ , X , Y , μ изменяются в области Δ , из (4) следует

$$\begin{aligned}|\alpha^n| &\leq |\mu| C_1 (|\alpha^1| + \dots + |\alpha^{N_1}|) + |\mu|^{k+1} C_2, \\ |\beta^m| &\leq C_3 (|\alpha^1| + \dots + |\alpha^{N_1}|) + |\mu|^{k+1} C_4.\end{aligned}\quad (8.4.5)$$

Правые части (4) и (5) связаны соотношением типа (8.1.15). Поэтому задача оценки α , β сводится к решению мажорантной системы двух скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \mu C_5 \alpha + \mu^{k+1} C_2, \\ \dot{\beta} &= C_6 \alpha + \mu^{k+1} C_4.\end{aligned}\quad (8.4.6)$$

с начальными условиями $\alpha = \beta = 0$ при $t = 0$. При $C_5 > 0$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{C_2}{C_5} \mu^k (e^{C_5 \mu t} - 1), \\ \beta &= \frac{C_6 C_2}{(C_5)^2} \mu^{k-1} (e^{C_5 \mu t} - 1) + \left(\mu^{k+1} C_4 - \mu^k \frac{C_6 C_2}{C_5} \right) t.\end{aligned}\quad (8.4.7)$$

При $C_5 = 0$

$$\alpha = \mu^{k+1} C_2 t, \quad \beta = \frac{C_6 C_2}{2} \mu^{k+1} t^2 + C_4 \mu^{k+1} t.\quad (8.4.8)$$

Теорема 8.4.1. При выше сформулированных условиях для любого $L > 0$ найдутся постоянные C_7, C_8 такие, что на интервале $0 \leq t \leq L/|\mu|$ будут выполнены оценки

$$|x^n - \tilde{x}^n| \leq C_7 |\mu|^k, \quad |y^m - \tilde{y}^m| \leq C_8 |\mu|^{k-1},\quad (8.4.9)$$

если только на этом интервале \tilde{x}, \tilde{y} лежат в области Δ . Здесь \tilde{x}, \tilde{y} - приближенное решение (3.2.1), полученное подстановкой ξ, η вместо X, Y в формулы (1).

Действительно, при $0 \leq \tilde{t} \leq L/|\mu|$ из (7) и (8) следует

$$\alpha \leq C_9 |\mu|^k, \quad \beta \leq C_{10} |\mu|^{k-1}, \quad (8.4.10)$$

так что вместе с ξ, η и X, Y лежат в области вида Δ . Из (10) и формул

$$\begin{aligned} x - \tilde{x} &= X - \xi + \mu [u_1(X, Y) - u_1(\xi, \eta)] + \dots, \\ y - \tilde{y} &= Y - \eta + \mu [v_1(X, Y) - v_1(\xi, \eta)] + \dots \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

вытекают неравенства (9).

Пример 8.4.1. Рассмотрим систему ($N_1 = N_2 = 1$)

$$\dot{x} = 2\mu/(1-\mu), \quad \dot{y} = 1+x. \quad (8.4.12)$$

Ее решение с нулевыми начальными данными есть

$$x = 2\mu\tilde{t}/(1-\mu), \quad y = \tilde{t} + \mu\tilde{t}^2/(1-\mu). \quad (8.4.13)$$

Уравнения (12) не содержат справа быстрой переменной. Таким образом, осредняющее преобразование сводится к тождественному:

$x = X, y = Y, u_k = v_k = 0, F_k = f_k = 2, G_k = g_k = 0$. Система (3) принимает вид

$$\dot{\xi} = 2(\mu + \mu^2 + \dots + \mu^k), \quad \dot{\eta} = 1 + \xi,$$

$$\text{откуда } \xi = 2(\mu + \dots + \mu^k)\tilde{t}, \quad \eta = \tilde{t} + (\mu + \dots + \mu^k)\tilde{t}^2. \quad (8.4.14)$$

Вычитая (14) из (13) с учетом $\xi = \tilde{x}, \eta = \tilde{y}$, получаем

$$x - \tilde{x} = 2\mu^{k+1}\tilde{t}/(1-\mu), \quad y - \tilde{y} = \mu^{k+1}\tilde{t}^2/(1-\mu). \quad (8.4.15)$$

Подставляя в (15) $\tilde{t} = L/\mu$, находим

$$x - \tilde{x} = 2L\mu^k/(1-\mu), \quad y - \tilde{y} = L^2\mu^{k-1}/(1-\mu). \quad (8.4.16)$$

Равенства (16) показывают точность оценки (9) теоремы 1. Можно сформулировать следующие практические рекомендации.

1) Отбрасывание в осредненных уравнениях членов порядка μ^{k+1} приводит к ошибке представления медленных переменных порядка μ^k . При сохранении той же точности можно в (1) отбросить слагаемое $\mu^k u_k$.

2) Точность быстрых переменных еще на порядок хуже, и можно отбросить слагаемые $\mu^k v_k$ и $\mu^{k-1} v_{k-1}$.

Заметим, что речь идет об асимптотически больших временах $\bar{t} \sim \mu^{-1}$. При ограниченном \bar{t} ошибки X, Y имеют очевидно порядок μ^{k+1} и все слагаемые в (1) нужны для сохранения этой точности.

Увеличивая точность аппроксимации, т.е. увеличивая k в (1), (2), мы по теореме 1 повышаем точность на интервале $\bar{t} \sim \mu^{-1}$. Но удлинить этот интервал хотя бы до $\bar{t} \sim \mu^{-2}$, пусть ценой уменьшения точности, оценки (7) не позволяют. И это — не дефект доказательства. Ясно, что в системе (3) ξ в общем случае достигает границы области задания за время порядка μ^{-1} . Большие возможности открывают оценки (8).

Теорема 8.4.2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, F_1, \dots, F_k не зависят от X . Тогда при $0 \leq \bar{t} \leq L/|\mu|^\sigma$ ($1 \leq \sigma \leq (k+1)/2$) справедливы оценки

$$|x^n - \tilde{x}^n| \leq C_{11} |\mu|^{k+2-2\sigma}, \quad |y^m - \tilde{y}^m| \leq C_{12} |\mu|^{k+1-2\sigma}. \quad (8.4.17)$$

Действительно, из (8) вытекает

$$|X^n - \xi^n| \leq C_{13} |\mu|^{k+1-\sigma}, \quad |Y^n - \eta^n| \leq C_{14} |\mu|^{k+1-2\sigma}. \quad (8.4.18)$$

Из (18), (11) следует вторая из оценок (17). Очевидно

$$\mu [u_1(X, Y) - u_1(\xi, \eta)] \sim \mu^{k+2-2\sigma},$$

что при $\sigma \geq 1$ вносит основной вклад в правую часть первой из формул (11). Теорема доказана.

Напомним, что F_S обращаются в нуль в условиях теорем 3.5.1, 5.3.1, 5.3.2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СУММЫ ЗНАЧЕНИЙ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

Пусть f — непрерывная выпуклая вниз функция на отрезке $[n-1/2, m+1/2]$, где m, n — целые, $n < m$. Тогда

$$\sum_{x=n}^m f(x) \leq \int_{n-1/2}^{m+1/2} f(x) dx. \quad (\text{П.1.1})$$

Не умаляя общности, считаем $f(x) > 0$ на отрезке $[n-1/2, m+1/2]$, ибо в противном случае можно к f прибавить подходящую константу, для которой (1) тривиально выполнено.

Как известно, $f(x)$ равна площади прямоугольника $ABCD$, где $A = x - 1/2, D = x + 1/2$ (рис.8). В свою очередь $\text{mes } ABCD$ равна площади трапеции $AEPD$. Для гладкой в x функции f за EF нужно принять касательную. Но в любом случае существует прямолинейный отрезок EF , целиком лежащий под графиком f . Поэтому

$$f(x) \leq \int_{x-1/2}^{x+1/2} f(t) dt.$$

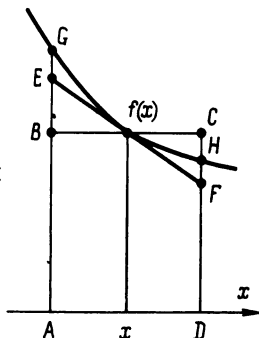


Рис.8. К оценке интеграла от выпуклой функции.

Суммируя по x от n до m , приходим к (1).

Равенство в (1) достигается лишь для кусочно-линейной функции с возможными углами в полуцелых x .

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЧИСЛО РЕШЕНИЙ ПРОСТЕЙШИХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим уравнение

$$n_1 + n_2 + \dots + n_N = m, \quad (\text{П.2.1})$$

где $N \geq 1$, $m \geq 0$ - данные, $n_k \geq 0$ - искомые целые числа. Для подсчета числа решений $W(N, m)$ уравнения (1) применим стандартный прием степенных разложений. В равенстве

$$(1-x)^{-N} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^N$$

представим правую часть как произведение одинаковых рядов:

$$(1-x)^{-N} = \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^{\infty} x^{n_1+n_2+\dots+n_N}.$$

Объединяя члены одинаковой степени m , убеждаемся, что их число равно как раз числу решений уравнения (1):

$$(1-x)^{-N} = \sum_{m=0}^{\infty} W(N, m) x^m. \quad (\text{П.2.2})$$

Общий член биномиального ряда хорошо известен:

$$W(N, m) = \binom{N+m-1}{N-1} = \frac{(N+m-1)!}{(N-1)! m!}. \quad (\text{П.2.3})$$

2. Пусть в уравнении (1) индексы суммирования подчинены ограничениям:

$$n_1 \geq 0; \quad n_2, \dots, n_N \geq 1; \quad m \geq N-1.$$

Для нахождения числа решений (1) надо перемножить ряды

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n_1=0}^{\infty} x^{n_1}, \quad \frac{x}{1-x} = \sum_{n_2=1}^{\infty} x^{n_2}, \dots, \quad \frac{x}{1-x} = \sum_{n_N=1}^{\infty} x^{n_N}.$$

Вместо (2) получаем

$$x^{N-1} (1-x)^{-N} = \sum_{m=N-1}^{\infty} W_1(N, m) x^m, \quad (\text{П.2.4})$$

где W_1 - число решений (1) при указанных ограничениях. Очевидно, что

$$W_1(N, m) = W(N, m-N+1) = \binom{m}{N-1} = \frac{m!}{(N-1)! (m-N+1)!}. \quad (\text{П.2.5})$$

Гораздо проще можно прийти к соотношению $W_1(N, m) = W(N, m - N + 1)$, переписав (1) в виде $n_1 + (n_2 - 1) + \dots + (n_N - 1) = m - N + 1$ и учитывая, что теперь $n_1 \geq 0, n_2 - 1 \geq 0, \dots, n_N - 1 \geq 0$.

3. Рассмотрим более сложное уравнение

$$|n_1| + |n_2| + \dots + |n_N| = m, \quad (\text{П.2.6})$$

где $m \geq 0, N \geq 1$ - данные, n_k - неизвестные целые. За основу примем ряд

$$(1+x)/(1-x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{|n|}.$$

Возводя в степень, получаем

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^N = \sum_{n_1, \dots, n_N=-\infty}^{\infty} x^{|n_1|+|n_2|+\dots+|n_N|}.$$

Отсюда
$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^N = \sum_{m=0}^{\infty} W_2(N, m) x^m, \quad (\text{П.2.7})$$

где W_2 - число решений (6).

Перемножая биномиальные ряды для $(1+x)^N, (1-x)^N$, находим

$$\begin{aligned} W_2(N, m) &= \sum_{k=0}^{\min(N, m)} \binom{N+m-k-1}{N-1} \binom{N}{k} = \\ &= N \sum_{k=0}^{\min(N, m)} \frac{(N+m-k-1)!}{k!(m-k)!(N-k)!}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.8})$$

Из (8) легко получить компактные выражения для первых m :

$$\begin{aligned} W_2(N, 0) &= 1, \quad W_2(N, 1) = 2N, \quad W_2(N, 2) = 2N^2, \\ W_2(N, 3) &= 2N(2N^2+1)/3, \quad W_2(N, 4) = 2N^2(N^2+2)/3, \\ W_2(N, 5) &= 2N(2N^4 + 10N^2 + 3)/15 \end{aligned} \quad (\text{П.2.9})$$

и первых N , если $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 W_2(1, m) &= 2, & W_2(2, m) &= 4m, & W_2(3, m) &= 4m^2 + 2, \\
 W_2(4, m) &= 8m(m^2 + 2)/3, & & & & \\
 W_2(5, m) &= 2(2m^4 + 10m^2 + 3)/3.
 \end{aligned}
 \tag{П.2.10}$$

Для оценки W_2 найдем простую мажоранту (7). Поскольку

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1} x^{2m+1},$$

$$\text{то } N \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) < \ln \left(\frac{1+Nx}{1-Nx} \right).$$

Потенцируя, приходим к

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^N < \frac{1+Nx}{1-Nx}, \tag{П.2.11}$$

$$\text{т.е. } W_2(N, m) \leq 2N^m. \tag{П.2.12}$$

В заключение докажем оценку

$$W_2(N, m) \leq 2Nm^{N-1} \quad (m \geq 1) \tag{П.2.13}$$

с переменной ролей N, m по сравнению с (12). Из (9), (10) следует справедливость (13) при $N \leq 5$ и при $m \leq 5$. Пусть (13) выполнено для некоторого $N \geq 5$.

Тогда

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^N < 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2Nm^{N-1}x^m. \tag{П.2.14}$$

Умножая обе части соотношения (14) на

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2x^m,$$

получаем

$$W_2(N+1, m) \leq 2 + 4N \left[1 + 2^{N-1} + 3^{N-1} + \dots + (m-1)^{N-1} \right] + 2Nm^{N-1},$$

где можно считать $m \geq 5$. Сумму в квадратных скобках оценим интегралом (П.1.1):

$$1 + \dots + (m-1)^{N-1} < \int_{1/2}^{m-1/2} x^{N-1} dx < m^N/N.$$

Отсюда $W_2(N+1, m) < 2Nm^N(1/(Nm^N) + 2/N + 1/m) < 2Nm^N$,

что и требовалось доказать.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

РЯД ТЕЙЛОРА ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Ряд Тейлора функции одной переменной записывается в виде

$$f(x+u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} u^n. \quad (\text{П.3.1})$$

Если $x = (x^1, x^2)$, $u = (u^1, u^2)$, формулу (1) можно применить последовательно:

$$\begin{aligned} f(x^1+u^1, x^2+u^2) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!} \frac{\partial^{n_1} f(x^1, x^2+u^2)}{(\partial x^1)^{n_1}} (u^1)^{n_1} = \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1! n_2!} \frac{\partial^{n_1+n_2} f(x^1, x^2)}{(\partial x^1)^{n_1} (\partial x^2)^{n_2}} (u^1)^{n_1} (u^2)^{n_2}. \end{aligned}$$

Для функции N переменных получаем по индукции:

$$f(x+u) = \sum_{|n|=0}^{\infty} \frac{1}{n_1! \dots n_N!} \frac{\partial^{|n|} f(x)}{(\partial x^1)^{n_1} \dots (\partial x^N)^{n_N}} (u^1)^{n_1} \dots (u^N)^{n_N}. \quad (\text{П.3.2})$$

В обычных обозначениях $n! = n_1! \dots n_N!$, $|n| = n_1 + \dots + n_N$, $x^n = (x^1)^{n_1} \dots (x^N)^{n_N}$ формула (2) принимает вид, почти совпадающий с (1):

$$f(x+u) = \sum_{|n|=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{|n|} f(x)}{\partial x^n} u^n. \quad (\text{П.3.3})$$

2. Упорядочим суммирование в (2), объединяя однородные многочлены по u одинаковой степени $|n| = r$. Результат можно представить в форме

$$f(x+u) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^N \frac{1}{r!} \frac{\partial^r f(x)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} u^{i_1} \dots u^{i_r}. \quad (\text{П.3.4})$$

Действительно, при $r = 0$ в (2) и (4) справа лишь одно слагаемое $f(x)$. При $r \geq 1$ в (2) справа стоит $W(N, r)$ различных слагаемых:

$$\frac{1}{n_1! \dots n_N!} \frac{\partial^r}{(\partial x^1)^{n_1} \dots (\partial x^N)^{n_N}} (u^1)^{n_1} \dots (u^N)^{n_N}, \quad (\text{П.3.5})$$

где $n_1 + n_2 + \dots + n_N = r$, (П.3.6)

а $W(N, r)$ — число решений уравнения (6) относительно целых неотрицательных n_1, \dots, n_N при фиксированных целых $N \geq 1, r \geq 1$. В то же время правая часть (4) содержит N^r слагаемых:

$$\frac{1}{r!} \frac{\partial^r f(x)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} u^{i_1} \dots u^{i_r}, \quad (\text{П.3.7})$$

среди которых присутствуют одинаковые, поскольку любая перестановка индексов i_1, \dots, i_r не меняет (7). Фиксируем степени n_1, \dots, n_N , удовлетворяющие (6), с которыми u^1, \dots, u^N входят в (7). Очевидно, что (7) содержит столько соответствующих слагаемых, сколькими способами можно n_1 одинаковых символов u^1 разместить в r клетках, n_2 одинаковых символов u^2 разместить в оставшихся $r - n_1$ клетках, n_3 одинаковых символов разместить в оставшихся $r - n_1 - n_2$ клетках и т.д. Обозначим соответствующие числа способов через W_1, W_2, \dots, W_N . Ясно, что W_1 равно числу сочетаний из r по n_1 , W_2 — из $r - n_1$ по n_2, \dots , т.е.

$$W_1 = \frac{r!}{n_1! (r - n_1)!}, \quad W_2 = \frac{(r - n_1)!}{n_2! (r - n_1 - n_2)!}, \dots, \quad W_N = \frac{(r - n_1 - \dots - n_{N-1})!}{n_N! (r - n_1 - \dots - n_N)!}.$$

Всего одинаковых слагаемых (7) будет

$$\widetilde{W} = W_1 W_2 \dots W_N = r! / (n_1! n_2! \dots n_N!),$$

что и доказывает тождественность (2) и (4).

Если ввести обозначение

$$\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r} \circ u^r = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^N \frac{\partial^r f(x)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} u^{i_1} \dots u^{i_r}, \quad (\text{П.3.8})$$

то (4) также примет форму, почти совпадающую с (1):

$$f(x+u) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r} \circ u^r. \quad (\text{П.3.9})$$

3. В разложении (2) порядок компонент, по которым дифференцируется f , жестко задан. Напротив, в (4) дифференцирование проводится по всем возможным перестановкам аргументов. Возможен и промежуточный случай, когда вектор аргументов z разлагается на несколько векторных же компонент, и перестановки разрешаются только внутри последних. Пусть, например, $z = (x, y)$,

$$x = (x^1, \dots, x^N), \quad y = (y^1, \dots, y^M).$$

Применим (4) к $f(x, y)$ при неизменном втором аргументе:

$$f(x+u, y+v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{1 \leq i_k \leq N} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(x, y+v)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n}} u^{i_1} \dots u^{i_n}.$$

Еще раз применяя (4), получим окончательно

$$\begin{aligned} & f(x+u, y+v) = \\ & = \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leq i_k \leq N \\ 1 \leq j_s \leq M}} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_n} \partial y^{j_1} \dots \partial y^{j_m}} u^{i_1} \dots u^{i_n} v^{j_1} \dots v^{j_m}. \end{aligned} \quad (\text{П.3.10})$$

Обобщение на случай произвольного числа векторных компонент тривиально. В частности, когда все компоненты скалярны, мы приходим к записи (2), ибо все значки i_k, j_s, \dots равны в этом случае единице. Тем самым мы другим способом доказали равносильность (2) и (4).

В обозначениях (8) формула (10) принимает компактную форму

$$f(x+u, y+v) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} \circ u^n \circ v^m. \quad (\text{П.3.11})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ОЦЕНКА СУММЫ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ

Рассмотрим величину

$$Q(k, r) = \sum \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \dots n_r^2}, \quad (\text{П.4.1})$$

где суммирование осуществляется по множеству $n_1, \dots, n_r \geq 1$; $n_1 + \dots + n_r = k$. По смыслу задачи $r \geq 1$, $k \geq r$.

Очевидно, что $Q(k, 1) = k^{-2}$. Для $r = 2$ сумму (1) найдем, разлагая дробь на простейшие:

$$\begin{aligned} Q(k, 2) &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2(k-n)^2} = \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{k-1} \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(k-n)^2} + \frac{2}{kn} + \frac{2}{k(k-n)} \right\} = \frac{2\varphi(k)}{k^2}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(k) = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n}.$$

Разность

$$\varphi(k+1) - \varphi(k) = \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k(k+1)} - \frac{2}{k(k+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1} \right)$$

положительна при $k = 2$ и $k = 3$ и отрицательна при $k \geq 4$, так что $Q(k, 2) \leq Qk^{-2}$, где $Q = 2\varphi(4) = \frac{41}{9}$. Мы доказали неравенство

$$Q(k, r) \leq Q^{r-1}/k^2 \quad (\text{П.4.2})$$

при $r = 1$, $r = 2$. Действуя по индукции, предположим справедливость (2) для индекса $r \geq 2$ и докажем его для индекса $r + 1$. Запишем (1) в форме

$$Q(k, r+1) = \sum_{n=1}^{k-r} \frac{1}{n^2} \sum \frac{1}{n_1^2 \dots n_r^2},$$

где последняя сумма подчинена ограничению $n_1 + \dots + n_r = k - n$ и равна поэтому $Q(k - n, r)$. Используя индуктивное предположение, получаем

$$Q(k, r+1) = \sum_{n=1}^{k-r} \frac{1}{n^2} Q(k-n, r) < \sum_{n=1}^{k-1} \frac{Q^{r-1}}{n^2(k-n)^2} = Q^{r-1} Q(k, 2) \leq \frac{Q^r}{k^2},$$

что и требовалось. Ясно, что в (2) осуществляется равенство только при $r = 1$ и при $r = 2$, $k = 4$.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М., 1977. 360 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., 1974. 432 с.
3. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.;Л., 1941. 320 с.
4. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М., 1979. 256 с.
5. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы небесной механики. М., 1971. 432 с.
6. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М., 1979. 442 с.
7. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М., 1979. 320 с.
8. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., 1966. 260 с.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977. 742 с.
10. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978. 312 с.
11. Найфе А. Методы возмущений. М., 1976. 456 с.
12. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., 1968. 800 с.
13. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М., 1967. 524 с.
14. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М., 1961. 112 с.
15. Холшевников К.В. Некоторые алгоритмы построения аналитических решений в задачах небесной механики: Астрономия и геодезия. Томск, 1980, вып.8, с.16-26.
16. Холшевников К.В. Сходимость классических разложений небесной механики. - Астрон. журн., 1984, т.61, № 3, с.558-563.
17. Gröbner W. Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. Berlin, 1967, 176 S.
18. Kozai Y. Mean values of cosine functions in elliptic motion. - Astron. J., 1962, vol.67, N 5, p.311-312.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. <u>Разложения по степеням времени</u>	
1.1. Постановка задачи	8
1.2. Метод Коши	10
1.3. Ряды Софуса Ли	14
Глава 2. <u>Метод малого параметра</u> Ляпунова - Пуанкаре	
2.1. Метод возмущений	29
2.2. Уравнения метода малого параметра	36
2.3. Исследование уравнений	42
2.4. Постоянные интегрирования	44
2.5. Движение в окрестности равновесия	47
2.6. Уравнения с медленными и быстрыми переменными	51
Глава 3. <u>Метод осреднения</u>	
3.1. Наводящие соображения	71
3.2. Замена переменных	72
3.3. Решение уравнений замены переменных	76
3.4. Исследование уравнений в осредненных переменных	81
§ 3.5. Связь метода малого параметра и метода осреднения	85
§ 3.6. Понятие о нормальной форме	87
Глава 4. <u>Метод Цайпеля</u>	
4.1. Замена переменных	97
4.2. Преобразование гамильтониана	101
Глава 5. <u>Метод преобразований Ли</u>	
5.1. Замена переменных	102
5.2. Преобразование гамильтониана	107
5.3. Исследование основных соотношений метода	109
5.4. Движение в окрестности равновесия	121
Глава 6. <u>Квадратичные приближения</u>	
6.1. Наводящие соображения	127
6.2. Использование квадратичных приближений в методах малого параметра, осреднения, Цайпеля, Ли	128
§ 6.3. Исследование основных соотношений метода касательных	134
§ 6.4. Движение в окрестности равновесия	135
Глава 7. <u>Малые знаменатели</u>	
7.1. Распределение значений знаменателей	138
7.2. Оценки значений знаменателей снизу	145
7.3. Роль малых знаменателей в практических задачах	150
Глава 8. <u>Математическое обоснование асимптотических методов</u>	
8.1. Мажорантные функции	152
8.2. Сходимость разложений по степеням времени	157
8.3. Сходимость разложений по степеням малого параметра	175
§ 8.4. Асимптотический характер метода осреднения	194
<u>Приложение 1.</u> Интегральная оценка суммы значений выпуклой функции	199
<u>Приложение 2.</u> Число решений простейших диофантовых уравнений	199
<u>Приложение 3.</u> Ряд Тейлора функции многих переменных	203
<u>Приложение 4.</u> Оценка суммы обратных квадратов	206
Указатель литературы	207