В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко

Алгебра и геометрия интегрируемых Гамильтоновых дифференциальных уравнений

В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Посвящена интересному и актуальному направлению, бурно развивающемуся в последние годы, в рамках которого открыты важные методы интегрирования гамильтоновых уравнений и получены новые результаты о геометрической структуре интегрируемых уравнений. Большинство результатов впервые изложены в виде, доступном для широкого круга специалистов.

Для научных работников — математиков, физиков, механиков, аспирантов и студентов соответствующих специальностей. Может быть использована как пособие по специальным курсам: симплектическая геометрия, интегрируемые системы и др.

ВВЕДЕНИЕ

Цель данной книги — доступно рассказать о некоторых новых методах интегрирования гамильтоновых дифференциальных уравнений на симплектических многообразиях. Проблема интегрирования дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных является классической. К настоящему времени в математике имеется достаточно мощный арсенал различных средств, используемых при интегрировании уравнений. Выбор средств и методов, которые используются при решении конкретных задач, возникающих, например, в геометрии, механике или математической физике, сильно зависит от того, какой смысл мы вкладываем в выражение «решить уравнение». Например, если искать решение в каком-нибудь функциональном пространстве, то естественно привлекать методы функционального анализа. Выделим три аспекта в изучении дифференциальных уравнений: а) явное интегрирование; б) качественные методы; в) интегрируемость по Лиувиллю.

Традиционный подход к изучению свойств решений дифференциальных уравнений состоит в том, что сначала явно определяют полное множество решений и лишь потом анализируют их свойства. Именно так поступали Лежандр, Лагерр, Бессель, Эрмит при изучении дифференциальных уравнений второго порядка. Однако, помимо уравнений данного типа, в различных приложениях возникают линейные или нелинейные уравнения выше второго порядка. Возникает вопрос о возможности отыскания полного набора решений для качественного описания поведения общих решений уравнений, моделирующих интересующую нас систему.

Главная трудность при интегрировании дифференциальных уравнений, как отмечал еще Якоби, «состоит во введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны идти обратным путем: найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена» [299].

Систематическое изложение метода разделения переменных и его связь с теорией алгебр Ли можно найти в книге [179].

Активно развивавшаяся в прошлом веке теория эллиптических и абелевых функций нашла применение в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Усилия крупнейших математиков были направлены на установление аналитических свойств решений, поиски случаев сведения задачи к квадратурам, доказательствам теорем существования (или несуществования) интегралов в том или ином классе функций. Сильные результаты были получены, например, С. В. Ковалевской и С. А. Чаплыгиным. Работу С. В. Ковалевской отличает эффектная математическая постановка задачи — она ищет условия, при которых зависимость основных переменных от времени (которое полагается комплексной переменной) представляется мероморфными функциями. Получив эти условия, Ковалевская указывает и четвертый интеграл задачи (оказавшийся алгебраическим) и искусными заменами сводит задачу к квадратурам. Такое же высокое аналитическое мастерство присуще и известной работе С. А. Чаплыгина.

В настоящее время происходит возвращение (на новом уровне) к классическим ценностям: мы имеем в виду новые современные методы явного интегрирования уравнений, с которыми можно познакомиться по книге В. Е. Захарова, С. В. Манакова, С. П. Новикова, Л. П. Питаевского [104] или по обзору Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева, С. П. Новикова [100], а также по обзору С. П. Новикова [199].

Выдающийся французский ученый А. Пуанкаре убедительно показал, что во многих случаях необходим лишь ограниченный объем информации качественного характера, которая, собственно, и представляет интерес при изучении конкретных систем уравнений. Основы современного подхода к определению качественных изменений в поведении решений обыкновенных дифференциальных уравнений были заложены почти сто лет назад А. Пуанкаре.

При изучении неинтегрируемых многомерных динамических систем методы качественного исследования являются, по существу, единственной альтернативой численных методов. При этом ряд важных вопросов, в частности, исследование общих свойств поведения решений для всех значений параметров или существование счетного множества решений, обладающих каким-либо исключительным свойством, во многих задачах успешно решаются качественными методами и принципиально не могут быть решены с помощью одних только численных методов.

В середине семидесятых годов были обнаружены глубокие связи между эффектом интегрируемости систем и их скрытыми алгебраическими свойствами. Особо отметим важные идеи В. И. Арнольда (представление геодезических потоков в терминах уравнений Эйлера), Марсдена, Вейнстейна (идея редукции) и С. В. Манакова (сдвиги орбитальных инвариантов на ковектор общего положения). На первое место следует поставить «симметрии систем», понимаемые не просто как группы их инвариантности, а, более общо, как совокупность алгебраических свойств системы дифференциальных уравнений, позволяющих естественно связать с системой некоторую алгебру (группу) Ли, орбиты которой инвариантны относительно данной системы. Оказалось, что такого рода механизмы управляют интегралами многих интересных гамильтоновых систем в геометрии, механике и физике. Этим вопросам посвящены многие работы. Отметим здесь школы С. П. Новикова, В. И. Арнольда, В. П. Маслова, И. М. Гельфанда, Мозера, Марсдена, Вейнстейна, ван Мербеке, Адлера, Костанта.

Структура книги следующая. Она состоит из трех частей, разделенных на главы и параграфы. Все формулы, рисунки и таблицы в тексте пронумерованы, причем используется сквозная нумерация.

Первая часть книги вводная. Отметим, что классическое механическое и физическое происхождение многих важных понятий геометрии часто игнорируется и не сообщается студенту. Мы хотим вернуться к исходному пониманию этих объектов и в связи с этим намеренно ведем изложение на элементарном уровне, достаточном для понимания современных дифференциально-геометрических построений. В частности, именно поэтому все теоремы в первой части книги приведены с полными доказательствами.

В первой главе дано введение в классическую механику в том виде, в котором она нам потребуется в основном тексте. При этом мы специально отказались от современного абстрактного языка, часто используемого во многих книгах по гамильтоновой геометрии, намеренно постарались максимально упростить изложение, ведя его на классическом уровне. От читателя не требуется ничего, кроме знания элементарных понятий классической механики (элементы кинематики, законы Ньютона). Читателя, желающего продолжить знакомство с затронутыми вопросами, мы отсылаем, например, к [8], [12], [76], [79], [80], [129], [145], [243], [299].

Во второй главе собраны классические методы интегрирования систем гамильтоновых дифференциальных уравнений. В этой же главе мы приводим необходимые сведения из теории групп Ли и алгебр Ли; подробности см., например, в [65], [81], [88], [112], [124], [263], [279], [293].

В третьей и четвертой главах приведены основные понятия симплектической геометрии, а также зафиксированы обозначения, используемые в дальнейшем; см. также [8], [10], [102], [279], [286].

Вторая часть посвящена некоторым современным методам интегрирования систем гамильтоновых уравнений. Мы не претендуем на полный обзор. Этот раздел математики в настоящее время бурно развивается, количество публикаций по данной тематике исчисляется сотнями работ, и имеется масса обзоров по этой актуальной области. Читатель, желающий познакомиться с другими методами, может обратиться, например, к обзорам С. П. Новикова, В. И. Арнольда, Д. В. Аносова, Я. Г. Синая, В. В. Козлова в замечательной серии: Фундаментальные направления. Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. ВИНИТИ, т. 1—6, 17. Мы остановимся лишь на некоторых методах, связанных с коммутативной и некоммутативной интегрируемостью по Лиувиллю.

В пятой главе излагаются вопросы, связанные с полной интегрируемостью по Лиувиллю, в частности, рассмотрена схема редукции гамильтоновых систем с симметриями по Марсдену и Вейнстейну.

В шестой главе мы даем обзор различных методов построения функций в инволюции, т. е. строятся большие серии примеров гамильтоновых систем с богатым набором первых интегралов.

Известно, что поиск интегралов конкретной системы уравнений — трудная задача. Более того, дифференциальные уравнения «общего положения» обычно вообще не имеют достаточного числа интегралов (позволяющих проинтегрировать систему). Поэтому задача отыскания редких интегрируемых случаев в безбрежном океане всех гамильтоновых систем («большинство» из которых неинтегрируемы) требует эффективных методов поиска интегралов. Некоторые из общих методов обсуждаются в шестой главе. Здесь, в частности, описаны результаты В. И. Арнольда, А. А. Архангельского, А. В. Беляева, О. И. Богоявленского, А. В. Болсинова, А. В. Браилова, А. П. Веселова, Дао Чонг Тхи, Б. А. Дубровина, М. В. Карасева, С. В. Манакова, В. П. Маслова, М. В. Мещерякова, А. С. Мищенко, С. П. Новикова, М. А. Ольшанецкого, А. А. Ошемкова, Т. А. Певцовой, А. М. Переломова, А. Г. Реймана, М. А. Семенова-Тян-Шанского, В. В. Трофимова, А. Т. Фоменко, М. Адлера, П. ван Мёрбеке, В. Гийемина, Дж. Мозера, Б. Купершмидта, С. Стернберга, Ф. Магри, Дж. Марсдена, А. Вейнстейна, Т. Ратью, Маккина.

В седьмой главе рассмотрены вопросы полноты инволютивных семейств функций. После того как построена гамильтонова система с большим запасом коммутирующих первых интегралов, возникает естественный вопрос о функциональной независимости этого семейства интегралов. Этот вопрос является центральным при исследовании полной интегрируемости и, как правило, очень трудоемким. В частности, в настоящее время обнаружен красивый эффективный критерий полноты интегралов, полученных методом сдвига аргумента (А. В. Болсинов). Он излагается в этой главе.

Восьмая глава посвящена некоторому специальному, важному для приложений в геометрии классу уравнений Эйлера, связанных с так называемыми секционными операторами, введенными А. Т. Фоменко,— это уравнения Гамильтона со специальной квадратичной функцией Гамильтона.

В девятой главе результаты, полученные в шестой и седьмой главах, применяются к конкретным дифференциальным уравнениям. В частности, дан список физически интересных уравнений, полная интегрируемость которых получается изложенными в шестой главе методами теории групп Ли. Здесь же обсуждается связь, обнаруженная Э. Б. Винбергом, между методом построения коммутативных наборов функций по цепочкам подалгебр и методом сдвига аргумента.

Третья часть посвящена топологии гамильтоновых систем. Она представляет интерес не только для математиков, но и для механиков и физиков. Изложены современные топологические аспекты теории гамильтоновых интегрируемых уравнений. В этой части предполагается знакомство читателя с простейшими элементами трехмерной топологии (см. [172], [201]).

В десятой главе излагаются элементы симплектической топологии интегрируемых систем. Традиционно считается, что полная интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы дает более или менее полное качественное описание поведения интегральных траекторий системы. Безусловно, в принципе это так. Однако при этом часто игнорируется то обстоятельство, что для такого описания требуется эффективно найти переменные действие — угол (относительно которых траектории системы превращаются в прямолинейные обмотки торов) в окрестности торов Лиувилля. Вложения торов Лиувилля в объемлющее пространство могут быть весьма сложными. Ясно, что сложность вложения торов растет по мере усложнения интегралов системы. Обычно интегралы являются полиномами (с растущими степенями) или рациональными функциями, поэтому конкретное исследование торов и переменных действие — угол часто затруднено, так как связано с решением нетривиальных алгебраических и аналитических проблем. (На этом пути фундаментальные результаты получены С. П. Новиковым и его школой.)

Поэтому уместно поставить следующий вопрос. Как располагаются торы Лиувилля в фазовом пространстве? Как они примыкают друг к другу? Как они заполняют открытые области? Как они перестраиваются в окрестности критических поверхностей интегралов? Другими словами, как построить качественную теорию топологического расположения и взаимодействия торов

Лиувилля (и тем самым расположения интегральных траекторий системы), например, на поверхности постоянной энергии системы? Как классифицировать интегрируемые системы по их топологическому типу?

В десятой главе на основе теории, построенной А. Т. Фоменко, даются ответы на некоторые из этих вопросов. При этом развивается новая специфическая теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем, отличающаяся от обычной теории Морса и от теории Ботта функций с вырожденными особенностями. В частности, находят свое развитие некоторые важные идеи, высказанные в свое время Д. В. Аносовым [5], С. П. Новиковым [196], [198], В. В. Козловым [131], С. Смейлом [235].

Теория А. Т. Фоменко включает в себя, например, описание изоэнергетических поверхностей боттовских интегрируемых гамильтоновых систем, классификацию бифуркаций торов Лиувилля в таких системах, новые топологические препятствия к интегрируемости и т. д. [281]—[286]. Дальнейшее развитие теории выполнено А. Т. Фоменко совместно с Х. Цишангом, С. В. Матвеевым, В. В. Шарко, А. В. Браиловым, А. В. Болсиновым, А. А. Ошемковым [54], [171]—[173], [207]—[209], [287], [288]. В [509] можно найти нужную информацию.

В одиннадцатой главе излагаются различные конструкции топологических инвариантов гамильтоновых систем и, более общо, лагранжевых слоений. В связи с этим отметим в первую очередь работы В. П. Маслова, В. И. Арнольда, М. В. Карасева. Эти работы были затем развиты В. В. Трофимовым, который обнаружил новые характеристические классы лагранжевых слоений, см. [257], [260]—[262], [510], [511].

В книгу включены не только классические результаты и обзор по современным направлениям интегрирования гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, но и результаты, полученные авторами книги и участниками научно-исследовательского семинара «Современные геометрические методы», действующего на механико-математическом факультете МГУ (под руководством А. Т. Фоменко, В. В. Трофимова), в частности А. В. Беляевым, А. В. Болсиновым, А. В. Браиловым, Дао Чонг Тхи, Ле Нгок Тьеуеном, Ле Хонг Ван, М. В. Мещеряковым, А. А. Ошемковым, Ю. А. Тюриной, К. Шваей. Многие результаты, включенные в книгу, обсуждались на семинаре «Геометрия и механика», работающем на механико-математическом факультете МГУ под руководством В. В. Козлова и А. Т. Фоменко.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся приложениями современной геометрии к гамильтоновой механике, теории интегрирования уравнений на многообразиях. Первая треть книги доступна читателю с минимальной подготовкой. По поводу простейших понятий геометрии, которые не поясняются в основном тексте книги (а это относится в основном к третьей части), см. книги [26], [76], [102], [103], [126], [190], [201], [239], [263], [279], [293].

Различные разделы книги обсуждались авторами с разными специалистами. Авторы выражают благодарность за плодотворные научные дискуссии С. П. Новикову, В. И. Арнольду, В. П. Маслову, В. В. Козлову, Д. В. Аносову, В. В. Румянцеву, О. И. Богоявленскому, Я. В. Татаринову, Б. Костанту, Дж. Марсдену, Т. Ратью.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел;
$\mathbf{C}$ — множество всех комплексных чисел;
$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbf{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbf{H}$ — множество всех кватернионов;
K^n — n-мерное линейное пространство над $K=\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$;
$\omega_1 \wedge \omega_2$ — внешнее произведение дифференциальных форм ω_1, ω_2;
X^t, X^{T} — матрица, транспонированная к X;
ad^* — коприсоединенное представление алгебры Ли;
Ad^* — коприсоединенное представление группы Ли;
$\exp$ — экспоненциальное отображение алгебры Ли в группу Ли;
$v_x = \mathrm{пр}_x v$ — проекция вектора v на ось x;
$D=D(M)$ — алгебра Ли векторных полей на многообразии M;
$e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbf{R}^n$;
$x_1, \ldots, x_n$ — стандартные координаты в $\mathbf{R}^n$;
$e(n)$ — алгебра Ли группы движений пространства $\mathbf{R}^n$;
$E(n)$ — группа движений пространства $\mathbf{R}^n$;
$C^\infty(M)$ — пространство гладких функций на многообразии M;
$\dfrac{\partial f}{\partial r}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ для $f=f(x_1, \ldots, x_n)$ и $r=(x_1, \ldots, x_n)$;
(a, b) — скалярное произведение;
$a\times b=[a, b]$ — векторное произведение;
$c_{[ij]}$ — альтернирование;
$V^\perp$ — ортогональное дополнение;
$\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=t_0} x(t)$ — касательный вектор в точке $x(t_0)$ к кривой $x(t)$;
id — тождественное отображение;
$\mathbf{R}^n(p)$ обозначает пространство с координатами $p=(p_1, \ldots, p_n)$;
$\mathrm{Hom}(G)$ — пространство линейных отображений векторного пространства G;

$\mathrm{GL}(V)$ — множество невырожденных линейных преобразований векторного пространства V;

$M_n(K)$ — матрицы размера $n\times n$ с коэффициентами из поля K;
$\{u_1, \ldots, u_n\}$ — подпространство, порожденное векторами $u_1, \ldots, u_n$;
$\Omega^p(M)$ — пространство p-форм на многообразии M;
S_n — группа перестановок на n символах;
$\|v\|$ — длина вектора v: $\|v\|^2=(v, v)$;
$\|a_{ij}\|$ — матрица с элементами a_{ij};
$\wedge^k(V)$ — k-я внешняя степень пространства V;
d — внешняя производная;
$\hat{g}(x)=\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}(\exp tg)x$ — векторное поле на многообразии M, отвечающее элементу g алгебры Ли G при действии группы Ли P (соответствующей алгебре Ли G) на многообразии M.

Группы Ли, как правило, обозначаются буквами P, Q, R, S, T, а соответствующие алгебры Ли — буквами G, H, J, K, L.

ЧАСТЬ 1

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава 1

КРАТКИЙ ЭКСКУРС В КЛАССИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ

§ 1. Принцип Даламбера — Лагранжа

1. Напомним, что в основу построения классической механики можно положить принцип Даламбера — Лагранжа. Для того чтобы его сформулировать, приведем нужные нам определения понятий, связанных с различными типами связей.

Рассмотрим систему k материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_k$. Выберем инерциальную систему координат. Положения материальных точек определим радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k$. На точки действуют силы $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_k$. Предположим, что наложены а) удерживающие связи, которые задаются уравнениями $f_j(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_k, t)=0$ $(j=1, 2, \ldots, l, l<k)$; б) неголономные связи $f_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_k, t)=0$ $(i=1, 2, \ldots, s, s<k)$. Связи первого типа называются также *голономными*. Перемещения делятся на два типа: а) *действительные*, происходящие под действием заданных систем сил; б) *возможные*, происходящие при «замораживании» связей (см. рис. 1).

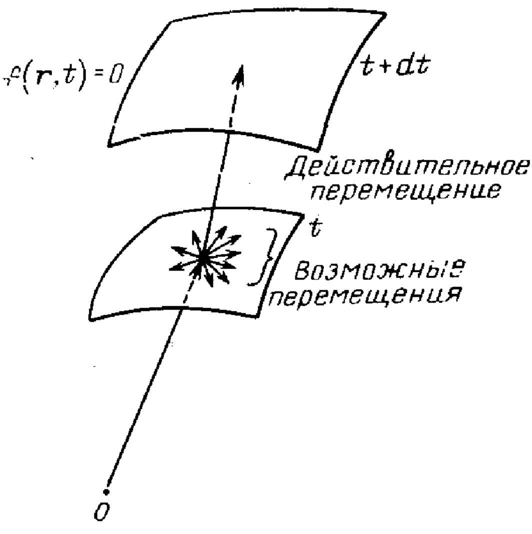


Рис. 1

В окрестности изучаемой точки рассмотрим семейство траекторий $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t, \alpha)$, зависящих от параметра α, причем считаем, что при $\alpha=0$ получаем действительную траекторию $\boldsymbol{r}(t, 0)\equiv\boldsymbol{r}(t)$. Кроме того, предполагаем, что $\boldsymbol{r}(t, \alpha)$ удовлетворяет уравнениям связей. Определим вариацию $\delta\boldsymbol{r}=\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0}\delta\alpha$.

Если имеем голономные связи $f_j(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k, t)=0$, то действительные перемещения должны удовлетворять уравнению

$$df_j=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i}d\boldsymbol{r}_i+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0, \tag{1}$$

а возможные — уравнению $\delta f_j=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{r}_i}\delta\boldsymbol{r}_i=0$, т. е. действительные перемещения не обязательно находятся среди возможных (см. рис. 1). Если связь стационарная, то, как следует из предыдущих выкладок, действительные перемещения лежат среди возможных.

2. Определение. Пусть $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_k$ — силы реакций, т. е. равнодействующие сил реакций, приложенных к точкам, в которых находятся массы $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Связь, наложенная на систему, называется *идеальной*, если

$$\sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{R}_i, \delta\boldsymbol{r}_i)=0 \tag{2}$$

для любого возможного перемещения.

3. Принцип Даламбера — Лагранжа. Для того чтобы перемещение механической системы, подчиненной удерживающим идеальным связям, было действительным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i, \delta\boldsymbol{r}_i)=0. \tag{3}$$

Этот принцип верен также и для неудерживающих связей, в этом случае он постулируется. В случае удерживающих идеальных связей его можно доказать, исходя из второго закона Ньютона. Мы примем принцип Даламбера — Лагранжа как постулат, подтвержденный экспериментом.

4. Определение. Величина $\boldsymbol{G}=\sum\limits_{i=1}^{k}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$ называется *количеством движения* рассматриваемой механической системы. Символом G_l будем обозначать проекцию $\text{пр}_l\boldsymbol{G}$ вектора $\boldsymbol{G}$ на ось l. Символом $\boldsymbol{e}^0$ обозначим единичный вектор оси l. Тогда $G_l=(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{e}^0)$.

5. Теорема (об изменении количества движения). *Если связи, наложенные на систему, идеальны и допускают в качестве возможных перемещений группу поступательных движений вдоль некоторого направления, то производная количества движения системы по времени вдоль этого направления равна сумме проекций на это направление сил, приложенных к системе.*

Доказательство. Пусть $G_l = \text{пр}_l \boldsymbol{G} = \sum_{i=1}^{k} m_i v_{li}$, где $v_{li} = \text{пр}_l \dot{\boldsymbol{r}}_i$. Надо проверить равенство $\frac{dG_l}{dt} = \sum_{i=1}^{k} F_{li}$, где $F_{li} = \text{пр}_l \boldsymbol{F}_i$. Группа поступательных перемещений имеет вид $\delta \boldsymbol{r} = \delta r \boldsymbol{e}^0$. Из принципа Даламбера—Лагранжа следует равенство

$$\sum_{i=1}^{k} (m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{F}_i) \boldsymbol{e}^0 \delta r = 0. \tag{4}$$

Поскольку $\delta r \neq 0$, то $\boldsymbol{e}^0 \sum_{i=1}^{k} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{e}^0$, т. е.

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{k} m_i v_{li} = \sum_{i=1}^{k} F_{li} \tag{5}$$

и, следовательно,

$$\frac{dG_l}{dt} = \sum_{i=1}^{k} F_{li}. \tag{6}$$

6. Замечание. Если $\sum_{i=1}^{k} F_{li} = 0$, то имеем закон сохранения $G_l = \text{const}$. Условие $\sum_{i=1}^{k} F_{li} = 0$ всегда выполняется для замкнутых систем, т. е. для систем, на которые не действуют внешние силы.

7. Определение. Точка C, радиус-вектор $\boldsymbol{r}_C$ которой равен $\boldsymbol{r}_C = \sum_{i=1}^{k} m_i \boldsymbol{r}_i / \sum_{i=1}^{k} m_i$, называется *центром масс*.

8. Следствие (теорема о движении центра масс). *Предположим, что выполнены условия теоремы 5; и пусть связи допускают поступательное движение вдоль оси x_1. Тогда $\frac{dG_1}{dt} = m\ddot{x}_{1C}$, где*

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i, \tag{7}$$

$$x_{1C} = \sum_{i=1}^{k} m_i x_{1i} / m, \tag{8}$$

$$G_1 = \text{пр}_{x_1} \boldsymbol{G} = \sum_{i=1}^{k} m_i \dot{x}_{1i}. \tag{9}$$

Если система изолирована $\left(\sum_{i=1}^{k} F_{1i}=0\right)$, то $\ddot{x}_{1C}=0$, т. е. $x_{1C}=C_1t+C_2$, C_1, $C_2=\text{const}$.

9. Определение. Вектор $\boldsymbol{K}_0=\sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)$ называется *моментом количества движения* относительно центра O. Моментом количества движения относительно оси a называется проекция $K_a=\text{пр}_a\boldsymbol{K}_0$ момента количества движения $\boldsymbol{K}_0$ относительно произвольной точки $O\in a$ на ось a.

Момент $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра O равен $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$. Момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси a — это проекция $\text{пр}_a\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра $O\in a$.

10. Лемма. *Момент количества движения твердого тела, вращающегося вокруг оси Ox_3 с постоянной угловой скоростью ω, равен $K_3=\omega J_3$, где $J_3=\sum_{i=1}^{k} m_i(x_{1i}^2+x_{2i}^2)$ — момент инерции тела относительно оси Ox_3.*

Доказательство. Если радиус-вектор $\boldsymbol{r}_i$ имеет координаты (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}), то $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i=(-\omega x_{2i}, \omega x_{1i}, 0)$. Поэтому

$$K_3=\sum_{i=1}^{k} m_i(x_{1i}^2\omega+x_{2i}^2\omega)=\omega\sum_{i=1}^{k} m_i(x_{1i}^2+x_{2i}^2)=\omega J_3. \tag{10}$$

11. Теорема (о моменте количества движения системы). *Если связи, наложенные на систему, идеальны и среди возможных перемещений есть бесконечно малый поворот системы как целого вокруг неподвижной оси, то производная момента количества движения системы по времени относительно этой оси равна сумме моментов относительно той же оси всех внешних сил, приложенных к системе.*

Доказательство. Поскольку система допускает поворот как целое, то

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{e}_3\omega\times\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{e}_3\frac{d\varphi}{dt}\times\boldsymbol{r}_i=\frac{d\varphi}{dt}(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_i)=\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}, \tag{11}$$

где $\omega=d\varphi/dt$, φ — угол поворота. Следовательно, $\delta\boldsymbol{r}_i=\delta\varphi(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_i)$. Поэтому из принципа Даламбера — Лагранжа следует равенство

$$\sum_{i=1}^{k}((m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i), \delta\varphi(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_i))=\delta\varphi\sum_{i=1}^{k}((m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i), (\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_i))=0. \tag{12}$$

Отсюда $\sum_{i=1}^{k}((m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-F_i), \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{r}_i)=0$, и, следовательно,

$$\left(\boldsymbol{e}_3, \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{r}_i\times(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i)\right)=\left(\boldsymbol{e}_3, \sum_{i=1}^{k}m_i\boldsymbol{r}_i\times\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\right)=0. \tag{13}$$

Поскольку $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{r}_i\times\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{r}_i\times\ddot{\boldsymbol{r}}_i$, то

$$\sum_{i=1}^{k} m_i\boldsymbol{r}_i\times\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k} m_i(\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i)=\frac{d\boldsymbol{K}_0}{dt}. \tag{14}$$

Итак, $e_3\left[\frac{d\boldsymbol{K}_0}{dt}-\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F}_i)\right]=0$. Из этого следует равенство $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{K}_0)=\boldsymbol{e}_3\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{k}M_{x_3}(\boldsymbol{F}_i^{ea})$, $\boldsymbol{F}^{ea}$—внешние силы. Внутренние силы дают равные по величине, но противоположные по направлению моменты. Действительно, по третьему закону Ньютона $\boldsymbol{F}_i=-\boldsymbol{F}_j$ (рис. 2). Тогда

$$\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_j=\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i-\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_i=$$
$$=(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_i=\overline{BA}\times\boldsymbol{F}_i=0, \tag{15}$$

т. е. сумма моментов всех внутренних сил равна нулю.

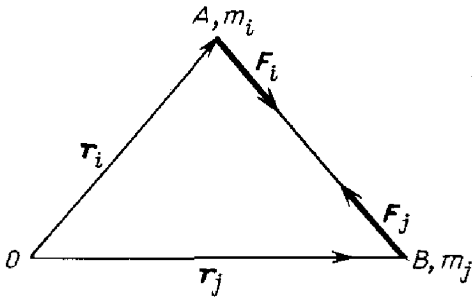


Рис. 2

12. Определение. Величина $M_3=\sum_{i=1}^{k}M_{x_3}(\overline{F}_i^{ea})$ называется *главным моментом внешних сил.*

13. Следствие. *В предположениях теоремы* 11 *имеют место следующие утверждения.* а) *Если* $M_3\equiv 0$ (*тождественно по времени*), *то* $K_3=\mathrm{const}$. б) *Если среди возможных перемещений системы есть бесконечно малые повороты вокруг осей* x_1, x_2, x_3, *то*

$$\frac{dK_1}{dt}=M_1,\quad \frac{dK_2}{dt}=M_2,\quad \frac{dK_3}{dt}=M_3 \tag{16}$$

и, следовательно, $\frac{d\boldsymbol{K}_0}{dt}=\boldsymbol{M}_0$. в) Если $\boldsymbol{M}_0\equiv\boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{K}_0=\mathrm{const}$.

14. Определение. Величина $T=2^{-1}\sum_{i=1}^{k}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2$ называется *кинетической энергией системы.*

15. Теорема (о кинетической энергии системы). *Если на систему наложены идеальные связи, причем действительные перемещения входят в число возможных, то дифференциал кинетической энергии равен сумме элементарных работ всех внешних сил на действительных перемещениях.*

Доказательство. Из принципа Лагранжа—Даламбера следует равенство $\left(\sum_{i=1}^{k}(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i),\, d\boldsymbol{r}_i\right)=0$, и $\sum_{i=1}^{k}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i d\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{F}_i d\boldsymbol{r}_i$. Из соотношения $\ddot{\boldsymbol{r}}_i d\boldsymbol{r}_i = \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_i}{dt} d\boldsymbol{r}_i = d\dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}_i d\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_i d\boldsymbol{v}_i = 2^{-1} d(\boldsymbol{v}_i)^2 = d(v_i^2/2)$ следует равенство

$$\sum_{i=1}^{k} m_i d\frac{v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{F}_i d\boldsymbol{r}_i, \tag{17}$$

т. е. $d\left(\sum_{i=1}^{k} m_i \frac{v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{F}_i d\boldsymbol{r}_i$ и $dT = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{F}_i d\boldsymbol{r}_i$.

16. Определение. Силы, действующие на систему, называются *потенциальными*, если существует силовая функция $U(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ такая, что $\boldsymbol{F}_i = \operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}_i} U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x_{1i}}, \frac{\partial U}{\partial x_{2i}}, \frac{\partial U}{\partial x_{3i}}\right\}$.

17. Следствие. *Предположим, что:* а) *связи идеальные*; б) *связи не зависят от времени*; в) *существует силовая функция* U, *не зависящая от времени. Тогда имеется интеграл энергии* $T - U = \text{const}$.

Доказательство вытекает из равенства

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{F}_i d\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial U}{\partial x_{1i}} dx_{1i} + \frac{\partial U}{\partial x_{2i}} dx_{2i} + \frac{\partial U}{\partial x_{3i}} dx_{3i}\right) = dU. \tag{18}$$

§ 2. Уравнения Лагранжа второго рода

1. Пусть O, x_1, x_2, x_3 — инерциальная система координат. Предположим, что движение системы описывается соотношениями

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; t), \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{19}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — независимые параметры. Параметры $q_1, \ldots, q_n$ называются *лагранжевыми координатами*, производные $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ — *лагранжевыми скоростями*, n — *число степеней свободы*. Для возможных перемещений имеем

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{20}$$

2. Теорема. *В лагранжевых координатах уравнения движения механической системы имеют вид*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

где $T = 2^{-1} \sum_{i=1}^{k} m_i v_i^2$ — *кинетическая энергия*, $Q_j = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ — *обобщенные силы*.

Доказательство. Из принципа Даламбера — Лагранжа следует равенство

$$\sum_{i=1}^{k}(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i-\boldsymbol{F}_i)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j=0, \tag{22}$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{k}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j=0. \tag{23}$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{k}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=0, \tag{24}$$

где $j=1, 2, \ldots, n$, так как q_j — независимые параметры. Введем обозначения

$$P_j=\sum_{i=1}^{k}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j},\quad Q_j=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j},\quad j=1, \ldots, n. \tag{25}$$

Тогда имеем равенство $P_j=Q_j$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Из равенства

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{26}$$

следует соотношение $\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i/\partial\dot{q}_j=\partial\boldsymbol{r}_i/\partial q_j$.

Продифференцируем (26) по переменной q_j:

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s\partial q_j}\dot{q}_s+\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial t\partial q_j}. \tag{27}$$

Из того, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2\boldsymbol{r}_i}{\partial t\partial q_j}, \tag{28}$$

получим $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\dfrac{\partial}{\partial q_j}\dfrac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$.

Преобразуем теперь выражение

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}. \tag{29}$$

Имеем

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2}\right). \tag{30}$$

Подставим (30) в формулу для P_j:

$$P_j=\sum_{i=1}^{k} m_i\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot q_j}\left(\frac{\dot{\boldsymbol r}_i^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\boldsymbol r_i^2}{2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot q_j}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i v_i^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i v_i^2}{2}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}, \qquad (31)$$

где $T=2^{-1}\sum\limits_{i=1}^{k} m_i v_i^2$, $\dot{\boldsymbol r}_i=\boldsymbol v_i$, $\dot{\boldsymbol r}_i^2=\boldsymbol v_i^2=v_i^2$. Итак, $P_j=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}$. Подставляя это выражение в $P_i=Q_i$, получим требуемое соотношение.

3. Определение. Уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (32)$$

полученное в теореме 2, называется *уравнением Лагранжа второго рода*.

4. Предложение. *Если силы, действующие на систему, потенциальны (т. е. существует потенциальная функция $U(\boldsymbol r_1,\ \ldots,\ \boldsymbol r_k,\ t)$), то уравнения Лагранжа второго рода имеют вид*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (33)$$

где $L=T+U$.

Доказательство. Поскольку $Q_j=\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol F_i\frac{\partial\boldsymbol r_i}{\partial q_j}$ и

$$\boldsymbol F_i=\operatorname{grad}_{\boldsymbol r_i}U=\left\{\frac{\partial U}{\partial x_{1i}},\ \frac{\partial U}{\partial x_{2i}},\ \frac{\partial U}{\partial x_{3i}}\right\}, \qquad (34)$$

то обобщенные силы равны

$$Q_j=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol F_i\frac{\partial\boldsymbol r_i}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial U}{\partial x_{1i}}\frac{\partial x_{1i}}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial x_{2i}}\frac{\partial x_{2i}}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial x_{3i}}\frac{\partial x_{3i}}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial U}{\partial q_j}. \qquad (35)$$

Итак, уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (36)$$

5. Определение. Функция $L=T+U$ из предложения 4 называется *функцией Лагранжа*. Она полностью описывает поведение механической системы.

6. Замечание. Кинетическая энергия системы допускает представление в виде $T=T_2+T_1+T_0$, где T_i — форма степени i. Действительно,

$$T=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{2}\left[\frac{\partial r_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot q_j\right]^2=$$

$$=\sum_{i,\,j=1}^{k}a_{ij}(q,\,t)\,\dot q_i\,\dot q_j+\sum_{i=1}^{k}b_i(q)\,\dot q_i+T_0; \qquad (37)$$

здесь $q_1,\ \ldots,\ q_n$ — лагранжевы координаты.

7. Предложение. *Если* $\dfrac{\partial L}{\partial q_j}+Q_j\equiv 0$, *то уравнения Лагранжа допускают первый интеграл* $\partial L/\partial\dot q_j=\beta_j=\mathrm{const}$, *который называется циклическим интегралом.*

8. Предложение. *Предположим, что*: а) $\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i\dot q_i=0$, *т. е. силы гироскопические*; б) $\partial L/\partial t=0$. *Тогда уравнения Лагранжа допускают первый интеграл* $T_2-T_0=U+h$, $h=\mathrm{const}$, *который называется интегралом Якоби. Если дополнительно* $T=T_2$, *то интеграл Якоби имеет вид* $T-U=h=\mathrm{const}$.

Доказательство. Имеет место равенство

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\ddot q_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot q_i=$$

$$=\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\ddot q_i+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial U}{\partial q_i}-Q_i\right]\dot q_i=$$

$$=\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot q_i\right)-\left(\frac{dU}{dt}-\frac{\partial U}{\partial t}\right)-\sum_{i=1}^{n}Q_i\dot q_i, \qquad (38)$$

так как $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_i}=\dfrac{\partial U}{\partial q_i}+Q_i$. Далее,

$$\frac{d}{dt}(T_2+T_1+T_0)=\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{d}{dt}(2T_2+T_1)-\left(\frac{dU}{dt}-\frac{\partial U}{\partial t}\right)-\sum_{i=1}^{n}Q_i\dot q_i, \qquad (39)$$

так как $\dfrac{\partial T}{\partial\dot q}\dot q=\dfrac{\partial T_2}{\partial\dot q}\dot q+\dfrac{\partial T_1}{\partial\dot q}\dot q=2T_2+T_1$. Итак,

$$\frac{d}{dt}(T_2-T_0)=-\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}Q_i\dot q_i, \qquad (40)$$

откуда следует наше утверждение.

9. Теорема. *Если движение механической системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода* $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_i}=\dfrac{\partial U}{\partial q_i}+Q_i$

и кинетическая энергия T инвариантна относительно группы преобразований $\xi_i=\xi_i(t,\alpha)$, причем $\xi_i(t,0)=q_i(t)$, то

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i+\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0}. \tag{41}$$

Доказательство. Из соотношения $T(q,\dot{q},t)=T(\xi,\dot{\xi},t)$ вытекает равенство

$$\delta T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}+\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i}\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\delta\alpha=0. \tag{42}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial T}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\right]=0. \tag{43}$$

Из уравнений Лагранжа получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial U}{\partial q_i}-Q_i\right]\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\right\}=0, \tag{44}$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}+Q_i\right)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}. \tag{45}$$

10. Замечания. а) Если $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_j}+Q_j\right)\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}=0$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}=\text{const}, \tag{46}$$

т. е. получили циклические интегралы.

б) Если $Q_i\equiv 0$, то вместо T можно взять L и получим первый интеграл

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0}=\text{const}. \tag{47}$$

Это утверждение носит название теоремы Э. Нётер.

§ 3. Уравнения Гамильтона

1. Напомним, что механическая система полностью характеризуется функцией Лагранжа $L=T-U(q_1,\ldots,q_n)$. В общем случае на функцию $L=L(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t)$ мы будем накладывать условие невырожденности, состоящее в том, что ее гессиан относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ не равен тождественно нулю, т. е.

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0. \tag{48}$$

2. Определение. *Импульсом* p_r, канонически сопряженным с координатой q_r, называется производная $p_r = \partial L / \partial \dot{q}_r$ функции Лагранжа L по соответствующей скорости $\dot{q}_r$.

Сила F_r находится дифференцированием функции L по соответствующей координате q_r, т. е. $F_r = \partial L / \partial q_r$.

Уравнения движения системы (*уравнения Лагранжа*) имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial L}{\partial q_r}. \tag{49}$$

3. Замечание. Уравнения движения в развернутом виде можно переписать так:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + F_i = 0, \tag{50}$$

где F_i — сумма членов, не содержащих обобщенных ускорений $\ddot{q}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. В силу предположения о невырожденности гессиана эту систему можно разрешить относительно обобщенных ускорений и записать ее в виде $\ddot{q}_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k)$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда можно сделать вывод об однозначном определении движения системы путем задания начальных данных q_i^0, $\dot{q}_i^0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

4. Определение. Величина $H = -L + \sum_{r=1}^{n} p_r \dot{q}_r$ называется *энергией системы*.

5. Предложение. *Если* $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, *т. е. если функция Лагранжа не зависит от времени явно, то* $dH/dt = 0$, *т. е. энергия системы сохраняется.*

Доказательство вытекает из следующей выкладки:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}\dot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\frac{d\dot{q}_r}{dt}\right) =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{dp_r}{dt}\dot{q}_r + p_r\frac{d\dot{q}_r}{dt}\right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}(H + L). \tag{51}$$

6. Теорема. *Пусть дана некоторая функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *гессиан которой отличен от нуля, т. е.* $\det(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j) \neq 0$. *Предположим, что имеется преобразование переменных, «порождаемое» функцией* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *которое имеет вид*

$$y_i = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{52}$$

Тогда существует преобразование, обратное к преобразованию (52), также порождаемое некоторой функцией $g(y_1, \ldots, y_n)$, т. е.

$$x_i = \frac{\partial g(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{53}$$

Порождающая функция g обратного преобразования связана с порождающей функцией f прямого преобразования формулой

$$g = -f + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{54}$$

(здесь предполагается, что все переменные x_i выражены через y_i). Если функция f содержит параметры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, то функция g также зависит от этих параметров и выполняется равенство

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{55}$$

Доказательство. Якобиан системы $y_i = \dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$ совпадает с гессианом $\det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ функции f, и по теореме о неявных функциях переменные x_i можно выразить через y_j, т. е. $x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Определим функцию $g = -f(x_1, \ldots, x_n) + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, переменные x_i заменены их выражениями $x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - f\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} y_k + x_i - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}. \tag{56}$$

Справедливо равенство

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial x_k} + x_i - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = x_i, \tag{57}$$

так как $y_i = \partial f/\partial x_i$.

Пусть теперь функция f зависит дополнительно от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Тогда эти параметры фигурируют как в прямом преобразовании, так и в обратном. Имеем по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} x_i(y_1, \ldots, y_n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m) y_i -$$

$$-f(x_1(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, x_m(y_1, \ldots, y_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m), \alpha_1, \ldots, \alpha_m)\Bigg) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}. \tag{58}$$

Итак, $\partial g/\partial \alpha_j = -\partial f/\partial \alpha_j$.

7. Определение. Переход от переменных x_i к переменным y_j, $i, j=1, \ldots, n$, описанный в предыдущей теореме 6, называется *преобразованием Лежандра.*

8. Теорема. *Преобразование Лежандра с порождающей функцией* $f=L(\dot q_1, \ldots, \dot q_n, q_1, \ldots, q_n, t)$ *переводит уравнения Лагранжа* $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ *в уравнения*

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial q_1},\\ &\ldots\ldots\\ \frac{dp_n}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial q_n},\\ \frac{dq_1}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p_1},\\ &\ldots\ldots\\ \frac{dq_n}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p_n}, \end{aligned} \tag{59}$$

которые называются уравнениями Гамильтона или каноническими уравнениями.

Доказательство. Применим предыдущую теорему 6 к функции $f=L(\dot q_1, \ldots, \dot q_n, q_1, \ldots, q_n, t)$, считая $(\dot q_1, \ldots, \dot q_n)=(x_1, \ldots, x_n)$ и $(q_1, \ldots, q_n, t)=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$. По теореме 6 надо составить функцию $H=\sum_{i=1}^{n}\dot q_i p_i-L(\dot q_1, \ldots, \dot q_n, q_1, \ldots, q_n, t)$, т. е. взять энергию системы. Тогда

$$\dot q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i=1, \ldots, n, \tag{60}$$

и $\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial t}$. Уравнения Лагранжа с учетом замены $p_i=\partial L(\dot q_1, \ldots, \dot q_n, q_1, \ldots, q_n, t)/\partial \dot q_i$ имеют вид $\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial q_i}$. Эти уравнения совместно с равенствами (60) приводят к каноническим уравнениям Гамильтона $\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\frac{dx_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial p_j}$, $i, j=1, \ldots, n$.

§ 4. Первые интегралы дифференциальных уравнений

1. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=f_1(t, x_1, \ldots, x_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt}&=f_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{61}$$

Первым интегралом (или просто *интегралом*) этой системы называют такую функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$ аргументов $x_1, \ldots, x_n, t$, полный дифференциал которой

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt \tag{62}$$

обращается тождественно в нуль в силу уравнений, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}f_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}f_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}f_n = 0. \tag{63}$$

По-другому можно сказать так: функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$ постоянная вдоль решений уравнений (61), т. е. $\varphi(x_1(t), \ldots, x_n(t), t) = \mathrm{const}$.

2. Определение. Пусть дана система m функций

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{64}$$

аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C^\infty(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — некоторое открытое подмножество. Функции $\{\varphi_i\}$ называются *функционально зависимыми* на подмножестве $S \subset \Omega$, если существует открытое множество $\Omega' \supset f(S)$ (здесь $f = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$: $\Omega \to \mathbf{R}^m$) и функция $g \in C^\infty(\Omega')$ такая, что $g^{-1}(0)$ нигде не плотно в Ω' и $g(f(x)) = 0$ для всех $x \in S$.

Якобианом системы функций $h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_n)$ называется определитель вида

$$\frac{D(h_1, h_2, \ldots, h_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \tag{65}$$

3. Теорема. *Если $f: \Omega \to \mathbf{R}^m$ есть C^∞-отображение $f = (f_1, \ldots, f_m)$, то набор $\{f_j\}$ функционально зависим на каждом* *компактном подмножестве* $K \subset \Omega \subset \mathbf{R}^n$ *в том и только том случае, когда на* Ω *выполняется неравенство*

$$\operatorname{rk} \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| < m. \tag{66}$$

4. Теорема. *Если между функциями* $h_1, \ldots, h_n$ *существует зависимость* $F(h_1, h_2, \ldots, h_n) = 0$, *то их якобиан* (65) *тождественно равен нулю. Если по крайней мере один из миноров* 1-*го порядка определителя* $\frac{D(h_1, h_2, \ldots, h_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ *не равен нулю, а сам определитель*

$$\frac{D(h_1, h_2, \ldots, h_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{67}$$

тождественно равен нулю, то между функциями $h_1, \ldots, h_n$ *существует зависимость вида* $F(h_1, h_2, \ldots, h_n) = 0$.

5. Лемма. *Число функционально независимых интегралов системы* (61) *не превышает* n.

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — функционально независимые интегралы системы (61); тогда $\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$ в силу п. 4. Предположим, что имеется еще один интеграл φ_{n+1}. Покажем, что φ_{n+1} есть функция интегралов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. По определению интегралов имеем тождества

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} f_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_n} f_n = 0. \end{gathered} \tag{68}$$

Рассматривая полученную систему тождеств как систему однородных линейных уравнений, видим, что она имеет нетривиальное решение $1, f_1, \ldots, f_n$. Поэтому ее определитель

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1})}{D(t, x_1, \ldots, x_n)} \equiv 0 \tag{69}$$

тождественно равен нулю. Следовательно, функция φ_{n+1} является функцией остальных интегралов.

6. Замечание. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — функционально независимые интегралы системы (61). Поскольку

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0, \tag{70}$$

то систему

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, t) = c_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, t) = c_n \end{gathered} \tag{71}$$

можно решить относительно $x_1, \ldots, x_n$, здесь $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные константы. Итак, получим выражение для неизвестных функций $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{gathered} x_1 = \psi_1(c_1, c_2, \ldots, c_n, t), \\ x_2 = \psi_2(c_1, c_2, \ldots, c_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = \psi_n(c_1, c_2, \ldots, c_n, t), \end{gathered} \tag{72}$$

т. е., зная полный набор первых интегралов системы (61), можем найти общее решение (72) системы (61).

7. Знание первого интеграла f системы (61) позволяет понизить порядок системы. Рассмотрим фиксированную гиперповерхность $\{f = c\}$. Из определения интеграла следует, что если траектория $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ имеет общую точку с $\{f = c\}$, то вся траектория лежит в $\{f = c\}$. Поэтому вся поверхность $\{f = c\}$ расслоена на траектории. Это позволяет понизить порядок исходной системы уравнений на единицу, ограничив ее на поверхность $S = \{f = c\}$ (рис. 3). Если нам даны два функционально независимых интеграла f_1, f_2, то порядок системы уже понижается на две единицы (рис. 4) и т. д.

8. Предложение. *Пусть дана система дифференциальных уравнений* $\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, $i = 1, \ldots, n$. *Рассмотрим преобразование* $x_i = \varphi(y_1, \ldots, y_n, t)$ *к новым переменным* $y_1, \ldots, y_n$.

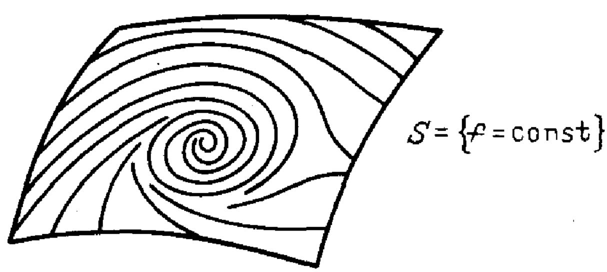


Рис. 3

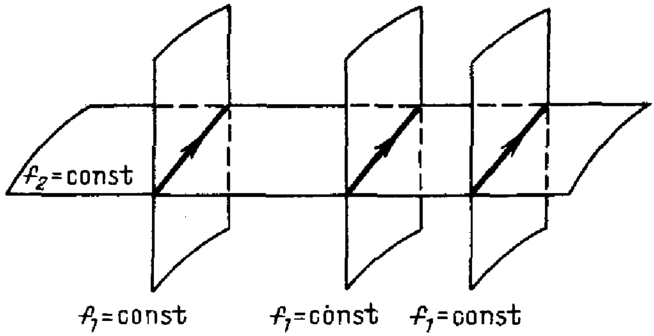


Рис. 4

Предположим, что в новых переменных система запишется в виде $\frac{dy_j}{dt}=Y_j(y_1\ ..., y_n, t)$, $j=1, ..., n$. *Введем обозначение* $D=\det(\partial x_i/\partial y_j)$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(DY_i)}{\partial y_i}. \tag{73}$$

Доказательство. Имеют место следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial y_k}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial y_s}Y_s\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s\partial y_k}Y_s+\frac{\partial x_i}{\partial y_s}\frac{\partial Y_s}{\partial y_k}\right]. \tag{74}$$

В силу того, что

$$\frac{\partial y_k}{\partial y_s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_s}=\begin{cases}0, \text{ если } k\neq s,\\ 1, \text{ если } k=s,\end{cases} \tag{75}$$

и $\frac{\partial y_k}{\partial x_i}=A_{ki}/D$ (правило вычисления обратной матрицы), где A_{ki} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ki} в якобиане D, предыдущее равенство для суммы $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ можно продолжить:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=\sum_{s=1}^{n}Y_s\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{k}\frac{A_{ki}}{D}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s\partial y_k}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_s}\frac{\partial Y_s}{\partial y_k}=$$
$$=\frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}Y_s\frac{\partial D}{\partial y_s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial Y_s}{\partial y_s} \tag{76}$$

(здесь использовали правило дифференцирования определителя D). Далее

$$\frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial(DY_s)}{\partial y_s}=\frac{1}{D}\left[\sum_{s=1}^{n}Y_s\frac{\partial D}{\partial y_s}+\sum_{s=1}^{n}D\frac{\partial Y_s}{\partial y_s}\right]. \tag{77}$$

Из полученных соотношений вытекает утверждение теоремы.

9. Теорема. *Пусть система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_1}{X_1}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dx}{X}, \tag{78}$$

где $X_i=X_i(x_1, \ldots, x_n, x)$, $X=X(x_1, \ldots, x_n, x)$, *имеет первые интегралы* $f_i(x_1, \ldots, x_n, x)=c_i$, $i=1, \ldots, n-1$. *Потребуем, чтобы* $\Delta=D(f_1, \ldots, f_{n-1})/D(x_1, \ldots, x_{n-1})\neq 0$, *т. е. интегралы независимы. Ограничим нашу систему на поверхность* $S=\{f_i(x_1, \ldots, x_n, x)=c_i$, $i=1, 2, \ldots, n-1\}$ *и предположим, что на S система имеет вид*

$$\frac{dx_n}{X_n^*}=\frac{dx}{X^*}. \tag{79}$$

Если известно какое-либо решение M уравнения

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(MX_i)}{\partial x_i}=0, \tag{80}$$

то последнее уравнение (79) интегрируется «в квадратурах»; точнее, для уравнения (79) в явном виде можно указать интегрирующий множитель μ.

Доказательство. Из (80) следует равенство

$$M\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right)+X\frac{\partial M}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial M}{\partial x_i}=0. \tag{81}$$

Поскольку $\frac{dx_i}{dx}=\frac{X_i}{x}$, то (81) эквивалентно

$$\frac{M}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right)+\frac{dM}{dx}=0. \tag{82}$$

Сделаем замену переменных $y_i=f_i$, $i=1, \ldots, n-1$, $y_n=x_n$, $y_{n+1}=x$. При такой замене $Y_1=\ldots=Y_{n-1}=0$ (в обозначениях п.8) и

$$D=\left|\begin{array}{c|c} \frac{1}{\Delta} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\end{array}\right|=\frac{1}{\Delta}. \tag{83}$$

Сделаем в уравнении (82) указанную замену переменных, используя предложение 8, получим

$$\frac{M^*}{X^*}\Delta^*\left[\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{X_n^*}{\Delta^*}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X^*}{\Delta^*}\right)\right]+\frac{dM^*}{dx}=0 \tag{84}$$

или

$$M^*\left[\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{X_n^*}{\Delta^*}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X^*}{\Delta^*}\right)\right]+\frac{X^*}{\Delta^*}\,\frac{\partial M^*}{\partial x}+\frac{X_n^*}{\Delta^*}\,\frac{\partial M^*}{\partial x_n}=0. \tag{85}$$

Напомним, что μ — интегрирующий множитель уравнения $X^*dx_n-X_n^*dx=0$, если $\frac{\partial(\mu X^*)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x_n}(-\mu X_n^*)$, т. е. $\mu\left(\frac{\partial X^*}{\partial x}+\frac{\partial X_n^*}{\partial x}\right)+$ $+\frac{d\mu}{dx}=0$. Если положить $\mu=M^*/\Delta^*$, то в силу (85) мы имеем интегрирующий множитель для $\frac{dx_n}{X_n^*}=\frac{dx}{X^*}$, что доказывает нашу теорему.

10. Определение. Решение M уравнения (80) из теоремы 9 называется *последним множителем Якоби.*

11. Теорема. *Каноническая система уравнений Гамильтона всегда имеет последний множитель Якоби* $M\equiv 1$.

Доказательство. Канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{86}$$

можно переписать в виде $\frac{dq_i}{\partial H/\partial p_i}=\frac{dp_i}{-\partial H/\partial q_i}=\frac{dt}{1}$. Уравнение (80) для последнего множителя Якоби имеет вид

$$\frac{\partial(M\cdot 1)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\left(M\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)}{\partial q_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\left(-M\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)}{\partial p_i}=0, \tag{87}$$

и, следовательно, $M\equiv 1$ является его решением, что и утверждалось.

§ 5. Динамика твердого тела

1. Определения. Пусть Ω — твердое тело, (O, x, y, z) — инерциальная система координат (рис. 5). Интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} x^i y^j z^k dm,\qquad i+y+k=n, \tag{88}$$

называется *моментом инерции* n-го порядка. Величины

$$J_{xx}=A=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\,dm, \tag{89}$$

$$J_{yy}=B=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\,dm, \tag{90}$$

$$J_{zz}=C=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dm \tag{91}$$

называются *осевыми моментами*, а $J_0=\iiint\limits_{\Omega} r^2\,dm$ — *полярным моментом. Центробежные моменты инерции* D, E, F определяются равенствами

$$J_{xy}=D=\iiint\limits_{\Omega} xy\,dm, \tag{92}$$

$$J_{xz}=E=\iiint\limits_{\Omega} xz\,dm, \tag{93}$$

$$J_{yz}=F=\iiint\limits_{\Omega} yz\,dm. \tag{94}$$

2. Предложение. *Рассмотрим систему координат, начало которой находится в центре масс C, а оси параллельны осям*

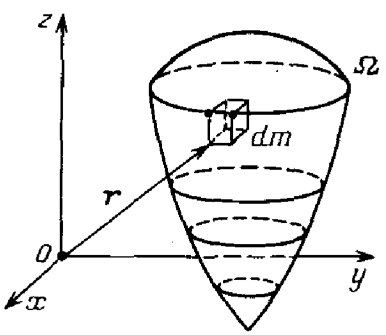


Рис. 5

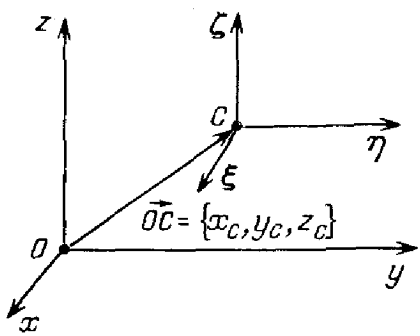


Рис. 6

исходной инерциальной системы координат. Обозначим координаты в исходной системе буквами x, y, z, а в новой — буквами ξ, η, ζ. Тогда

$$\begin{aligned} J_{\xi\xi}&=J_{xx}+m\left(y_C^2+z_C^2\right),\\ J_{\eta\eta}&=J_{yy}+m\left(x_C^2+z_C^2\right),\\ J_{\zeta\zeta}&=J_{zz}+m\left(x_C^2+y_C^2\right) \end{aligned} \tag{95}$$

и

$$J_{\xi\eta}=J_{xy}+mx_Cy_C,\quad J_{\xi\zeta}=J_{xz}+mx_Cz_C,\quad J_{\eta\xi}=J_{yz}+my_Cz_C, \tag{96}$$

где $\overline{OC}=\{x_C,\ y_C,\ z_C\}$, *а* m — *масса тела* (рис. 6).

3. Определение. Моменты инерции, вычисленные относительно системы координат, начало которой находится в центре масс, называются *центральными*.

4. Определение. Пусть l — некоторая прямая в пространстве. Интеграл

$$J_l=\iiint\limits_{\Omega} P^2\,dm \tag{97}$$

называется *моментом инерции* тела Ω *относительно оси* l, где $P(x,\ y,\ z)$ — расстояние от точки $(x,\ y,\ z)$ до оси l.

5. Предложение. *Пусть* $e^0=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ — *направляющий вектор оси* l, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. *Тогда момент инерции* J_l *относительно оси* l *равен*

$$J_l=J_{xx}\alpha^2+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2-2J_{xy}\alpha\beta-2J_{xz}\alpha\gamma-2J_{yz}\beta\gamma. \tag{98}$$

Доказательство вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
J_l&=\iiint\limits_{\Omega} P^2\,dm=\iiint\limits_{\Omega}\left(r^2-(r,\ e^0)^2\right)dm=\\
&=\iiint\limits_{\Omega}\left[(x^2+y^2+z^2)-(x\alpha+y\beta+z\gamma)^2\right]dm=\\
&=\iiint\limits_{\Omega}\left[x^2(1-\alpha^2)+y^2(1-\beta^2)+z^2(1-\gamma^2)-\right.\\
&\qquad\left.-2xy\alpha\beta-2yz\beta\gamma-2xz\alpha\gamma\right]dm=\\
&=\iiint\limits_{\Omega}\left[x^2(\beta^2+\gamma^2)+y^2(\alpha^2+\gamma^2)+z^2(\alpha^2+\beta^2)-\right.\\
&\qquad\left.-2xy\alpha\beta-2yz\beta\gamma-2xz\alpha\gamma\right]dm=J_{xx}\alpha^2+\\
&\qquad+J_{yy}\beta^2+J_{zz}\gamma^2-2\alpha\beta J_{xy}-2\alpha\gamma J_{xz}-2\beta\gamma J_{yz}.
\end{aligned} \tag{99}$$

6. Определение. На каждой оси l, проходящей через фиксированную точку O, отложим отрезок OA, равный $1/\sqrt{J_l}$. Тогда точка A опишет поверхность, являющуюся эллипсоидом. Существуют такие оси X, Y, Z, что уравнение эллипсоида имеет вид $J_{XX}X^2+J_{YY}Y^2+J_{ZZ}Z^2=1$, т. е. для этих осей $J_{XY}=J_{YZ}=J_{XZ}=0$. Построенный эллипсоид называется *эллипсоидом инерции*, оси X, Y, Z называются *главными осями инер-*

ции. Если эллипсоид инерции построен для центра масс, то главные оси инерции называются *главными центральными осями*. Аналогичные названия используются для моментов инерции.

7. Теорема. *Пусть тело закреплено в начале координат O, оси x, y, z направлены по главным осям. Тогда кинетическая энергия T твердого тела Ω, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}=\{p,\ q,\ r\}$, равна $T=2^{-1}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)$.*

Доказательство. По определению кинетическая энергия T твердого тела Ω равна интегралу

$$2T=\iiint\limits_{\Omega} v^2\,dm, \tag{100}$$

где $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}=\{qz-ry,\ rx-pz,\ py-qx\}$.

Имеем

$$2T=\iiint\limits_{\Omega}\left[(qz-ry)^2+(rx-pz)^2+(py-qx)\right]^2 dm=$$

$$=p^2\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\,dm+q^2\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\,dm+r^2\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dm-$$

$$-2pq\iiint\limits_{\Omega}xy\,dm-2pr\iiint\limits_{\Omega}xz\,dm-2qr\iiint\limits_{\Omega}yz\,dm=$$

$$=J_{xx}p^2+J_{yy}q^2+J_{zz}r^2-2J_{xy}pq-2J_{xz}pr-2J_{yz}qr. \tag{101}$$

Поскольку оси x, y, z главные, то $J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$ и, следовательно, $2T=J_{xx}p^2+J_{yy}q^2+J_{zz}r^2=Ap^2+Bq^2+Cr^2$.

8. Теорема. *Пусть твердое тело Ω закреплено в начале координат O. Тогда момент количества движения $\boldsymbol{K}=\{K_x,\ K_y,\ K_z\}$ относительно точки O (кинетический момент) твердого тела Ω, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}=\{p,\ q,\ r\}$, равен*

$$\begin{aligned} K_x&=J_{xx}p-J_{xy}q-J_{xz}r,\\ K_y&=-J_{xx}p+J_{yy}q-J_{yz}r,\\ K_z&=-J_{zx}p-J_{zy}q+J_{zz}r. \end{aligned} \tag{102}$$

Если x, y, z — главные оси инерции, то $\boldsymbol{K}=\{Ap,\ Bq,\ Cr\}$ и $\boldsymbol{K}=\operatorname{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T$.

Доказательство. По определению кинетический момент $\boldsymbol{K}$ твердого тела Ω равен интегралу

$$\boldsymbol{K}=\iiint\limits_{\Omega}[\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{v}]\,dm, \tag{103}$$

где $\boldsymbol{\rho}=\{x,\ y,\ z\}$ — радиус-вектор текущей точки. Поскольку $\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\rho}\times[\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\rho}]=\boldsymbol{\omega}\rho^2-\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\omega})$, то

$$\boldsymbol{K}=\iiint\limits_{\Omega}[\rho^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho}]\,dm. \tag{104}$$

Далее, если $\boldsymbol{K}=\{K_x,\ K_y,\ K_z\}$ и $\boldsymbol{\omega}=\{p,\ q,\ r\}$, то

$$K_x=\iiint\limits_{\Omega}[(x^2+y^2+z^2)p-(px+qy+rz)x]\,dm=$$
$$=p\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dm-q\iiint\limits_{\Omega}xy\,dm-r\iiint\limits_{\Omega}xz\,dm=J_{xx}p-J_{xy}q-J_{xz}r. \tag{105}$$

Аналогично проверяются остальные равенства.

9. Определение. Пусть $\xi,\ \eta,\ \zeta$ — неподвижная система координат, $x,\ y,\ z$ — система координат, жестко связанная с телом (подвижная). Линия $0N$ пересечения плоскости $0\xi\eta$ с плоскостью $0xy$ называется *линией узлов*. Угол ψ между осью 0ξ и линией узлов называется *углом прецессии*, угол φ между линией узлов $0N$ и осью $0x$ называется *углом собственного вращения*, угол ϑ между осями 0ζ и $0z$ называется *углом нутации*. Углы $\psi,\ \varphi,\ \vartheta$ дают координаты в группе вращений, которые называются *углами Эйлера* (рис. 7).

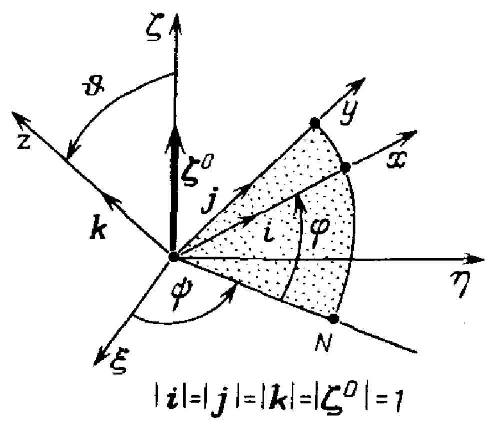


Рис. 7

10. Углам Эйлера $\varphi,\ \psi,\ \vartheta$ отвечают три скорости $\dot\varphi,\ \dot\psi,\ \dot\vartheta$. В силу правила сложения скоростей, если угловая скорость в подвижной системе координат равна $\boldsymbol{\omega}=\{p,\ q,\ r\}$, то

$$\begin{aligned} p&=\dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi+\dot\vartheta\cos\varphi,\\ q&=\dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi-\dot\vartheta\sin\varphi,\\ r&=\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi. \end{aligned} \tag{106}$$

Эти соотношения называются *кинематическими уравнениями Эйлера*.

11. Пусть $\boldsymbol{\xi}^0=\gamma_1\boldsymbol{e}_1+\gamma_2\boldsymbol{e}_2+\gamma_3\boldsymbol{e}_3$ — единичный вектор, $\gamma_1=\sin\vartheta\sin\varphi$, $\gamma_2=\sin\vartheta\cos\varphi$, $\gamma_3=\cos\vartheta$. Тогда $d\boldsymbol{\xi}^0/dt=0$. Напомним следующее правило дифференцирования: для любого вектора $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ имеет место равенство $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi}^0$, где

$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{a}}{dt}=\dot{a}_1\boldsymbol{e}_1+\dot{a}_2\boldsymbol{e}_2+\dot{a}_3\boldsymbol{e}_3$. Применим это правило к вектору $\boldsymbol{\xi}^0$. Получим следующую систему равенств:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_1}{dt}&=r\gamma_2-q\gamma_3,\\ \frac{d\gamma_2}{dt}&=p\gamma_3-r\gamma_1,\\ \frac{d\gamma_3}{dt}&=q\gamma_1-p\gamma_2.\end{aligned}\tag{107}$$

Эти соотношения называются *кинематическими уравнениями Пуассона.*

12. Динамические уравнения Эйлера. Направим координатные оси по главным направлениям. По теореме о моменте количества движения имеет место равенство $\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\boldsymbol{M}$, здесь оба момента $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{M}$ вычислены относительно точки O. Пусть $\boldsymbol{\omega}=\{p, q, r\}$ — вектор угловой скорости в подвижной системе координат; поскольку рассматриваются главные направления, то в силу теоремы 8, используя правило дифференцирования $\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{K}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}=\boldsymbol{M}$, получим уравнения

$$\begin{aligned}A\frac{dp}{dt}-(B-C)qr&=M_x,\\ B\frac{dq}{dt}-(C-A)pr&=M_y,\\ C\frac{dr}{dt}-(A-B)pq&=M_z,\end{aligned}\tag{108}$$

которые называются *динамическими уравнениями Эйлера.* Если к этим уравнениям добавить кинематические уравнения Эйлера, то получим замкнутую систему дифференциальных уравнений. *Интегрируя полученную систему из шести дифференциальных уравнений, найдем закон движения твердого тела.*

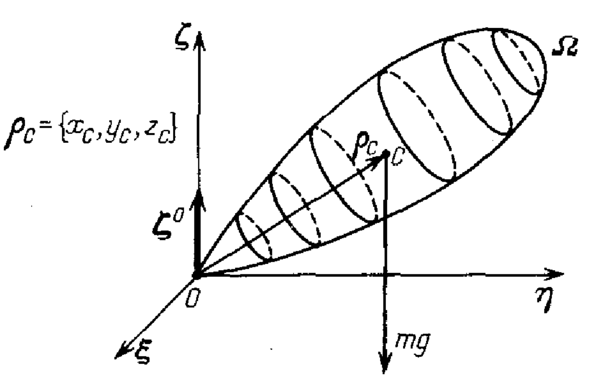


Рис. 8

13. Случай тяжелого твердого тела. Пусть c — центр масс твердого тела, а $\boldsymbol{\rho}_c=\{x_c, y_c, z_c\}$ — его радиус-вектор в подвижной системе координат. Тогда $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{\rho}_c\times m\boldsymbol{g}$,

$g = -g\zeta^0$ (рис. 8). В этом случае имеем следующую полную систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt} - (B-C)qr = mg(z_c\gamma_2 - y_c\gamma_3),\\
&B\frac{dq}{dt} - (C-A)pr = mg(x_c\gamma_3 - z_c\gamma_1),\\
&C\frac{dr}{dt} - (A-B)pq = mg(y_c\gamma_1 - x_c\gamma_2),\\
&\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3,\\
&\frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1,\\
&\frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_1.
\end{aligned}
\tag{109}
$$

14. Интегралы уравнений Эйлера. Время t явно в уравнения (109) не входит, поэтому порядок можно понизить на единицу, приняв за новую переменную одну из неизвестных величин.

Считаем, что в точке крепления нет трения, силы, приложенные к телу, описываются силовой функцией $U = -mg(x_c\gamma_1 + y_c\gamma_2 + z_c\gamma_3)$. Следовательно, можно ввести функцию Гамильтона, и поэтому имеется последний множитель Якоби, см. п. 11 § 4.

Уравнения (109) имеют *интеграл энергии* $T - U = \text{const}$ или $\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - U = h$, см. п. 7.

Уравнения (109) имеют *интеграл момента количества движения* $Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const}$, так как сила mg параллельна оси 0ζ.

Наконец, система (109) имеет *тривиальный геометрический интеграл* $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$.

Для того чтобы проинтегрировать систему (109), надо найти дополнительный интеграл. Он существует, например, в следующих трех случаях:

а) *случай Эйлера — Пуансо*, когда $x_c = y_c = z_c = 0$;

б) *случай Лагранжа — Пуассона*, когда $A = B$, $x_c = y_c = 0$;

в) *случай Ковалевской*, когда $A = B = 2C$, $z_c = 0$.

15. Интегрирование уравнений в случае Эйлера — Пуансо. Умножая первое из уравнений

$$
\begin{aligned}
A\dot{p} &= (B-C)qr,\\
B\dot{q} &= (C-A)pr,\\
C\dot{r} &= (A-B)pq
\end{aligned}
\tag{110}
$$

на p, второе на q и третье на r, получим

$$\frac{Ap\,dp}{B-C}=\frac{Bq\,dq}{C-A}=\frac{Cr\,dr}{A-B}=pqr\,dt. \tag{111}$$

Перейдем от времени t к времени τ: $d\tau=pqr\,dt$. Тогда $p^2=b'_1(\tau+b_1)$, $q^2=b'_2(\tau+b_2)$, $r^2=b'_3(\tau+b_3)$, где b_i, b'_j — константы. Величину τ находим, обращая интеграл

$$t=\lambda\int\frac{d\tau}{\sqrt{(\tau+b_1)(\tau+b_2)(\tau+b_3)}}, \tag{112}$$

где $\lambda=(b'_1b'_2b'_3)^{-1/2}$, что приводит к эллиптическим функциям. Приведем окончательный ответ. Пусть для определенности $A<B<C$ и $\boldsymbol{K}^2>2EB$ (E — константа энергии) (в случае $\boldsymbol{K}^2<2EB$ надо поменять местами p и r). Начало отсчета времени можно выбрать так, что $q=0$ при $t=0$. Выполняя интегрирование, получим $p=p_0\,\mathrm{cn}(s,\ \varkappa)$, $q=q_0\,\mathrm{sn}(s,\ \varkappa)$, $r=r_0\,dn(s,\ \varkappa)$, где

$$p_0=\sqrt{\frac{2EC-\boldsymbol{K}^2}{A(C-A)}},\quad q_0=\sqrt{\frac{2EC-\boldsymbol{K}^2}{B(C-B)}},\quad r_0=\sqrt{\frac{\boldsymbol{K}^2-2EA}{C(C-A)}}, \tag{113}$$

$$s=\sqrt{\frac{(C-B)(\boldsymbol{K}^2-2EA)}{ABC}}\,t,\quad \varkappa=\frac{(B-A)(2EC-\boldsymbol{K}^2)}{(C-B)(\boldsymbol{K}^2-2EA)}, \tag{114}$$

а $\mathrm{sn}(s,\ \varkappa)$, $\mathrm{cn}(s,\ \varkappa)$, $\mathrm{dn}(s,\ \varkappa)$ — стандартные эллиптические функции, см., например, [83].

Направим ось аппликат неподвижной системы координат вдоль вектора $\boldsymbol{K}=\{K_x,\ K_y,\ K_z\}$. Тогда $\boldsymbol{K}=K\gamma_1\boldsymbol{e}_1+K\gamma_2\boldsymbol{e}_2+K\gamma_3\boldsymbol{e}_3$, и поскольку $\boldsymbol{K}=Ap\boldsymbol{e}_1+Bq\boldsymbol{e}_2+Cr\boldsymbol{e}_3$, то

$$Ap=K\gamma_1=K\sin\vartheta\sin\varphi, \tag{115}$$

$$Bq=K\gamma_2=K\sin\vartheta\cos\varphi, \tag{116}$$

$$Cr=K\gamma_3=K\cos\vartheta. \tag{117}$$

Из третьего уравнения следует $\cos\vartheta=\frac{Cr}{K}=\mathrm{const}$, т. е. $\vartheta=\vartheta_0=\mathrm{const}$. Из второго уравнения и из соотношения $q=\dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi$ (п. 10) вытекает равенство $\frac{K}{A}\sin\vartheta\sin\varphi=\dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi$, т. е. $\dot\psi=K/A$ и $\psi=\frac{K}{A}t+\psi_0$. Далее, $\dot\varphi=r_0-\frac{K}{A}\cos\vartheta_0$ и, следовательно, $\varphi=\left(r_0-\frac{K}{A}\cos\vartheta_0\right)t+p_0$.

16. *Интегрирование уравнений в случае Лагранжа — Пуассона.* Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered} A\dot p-(A-C)qr=mgz_c\gamma_2,\\ A\dot q+(A-C)pr=-mgz_c\gamma_1,\\ C\dot r=0. \end{gathered} \tag{118}$$

В качестве недостающего последнего интеграла можно взять $r=\dot\psi\cos\vartheta+\dot\varphi$. Интеграл энергии имеет вид $A(p^2+q^2)+Cr^2+$ $+2mgz_c\gamma_3=\mathrm{const}$, т. е. $A(\dot\psi^2\sin^2\vartheta+\dot\vartheta^2)+2mgz_c\cos\vartheta=h$. Интеграл момента количества движения имеет вид $A(p\gamma_1+q\gamma_2)+$ $+Cr\gamma_3=k$, т. е. $A\dot\psi\sin^2\vartheta+Cr\cos\vartheta=k$. Из интеграла момента количества движения следует равенство $\dot\psi=\dfrac{k-Cr\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}$, подставляя которое в интеграл энергии, получим

$$A\dot\vartheta^2=-2mgz_c\cos\vartheta+h-\frac{(k-Cr\cos\vartheta)^2}{A\sin^2\vartheta}. \tag{119}$$

Положим $u=\cos\vartheta$. Тогда для нахождения u имеем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\frac{1}{A^2}\left[A(1-u^2)(h-2mgz_cu)-(k-Cru)^2\right], \tag{120}$$

т. е. $\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2=P_3(u)$, где $P_3(u)$ — кубический многочлен, следовательно, $t-t_0=\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{P_3(u)}}$ — эллиптическая функция. Из интеграла $A\dot\psi\sin^2\vartheta+Cr\cos\vartheta=k$ найдем $\psi-\psi_0=\displaystyle\int\frac{k-Cr\cos\vartheta(t)}{A\sin^2\vartheta(t)}dt$, а из $\dot\varphi=r-\dot\psi\cos\vartheta$ найдем $\varphi-\varphi_0=\int(r-\dot\psi\cos\vartheta)\,dt$.

17. Интегрирование уравнений в случае Ковалевской. Если $A=B=2C$, $z_c=0$, $y_c=0$, то уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 2C\dot p-Cqr&=0,\\ 2C\dot q+Cpr&=mgx_c\gamma_2,\\ C\dot r&=-mgx_c\gamma_1. \end{aligned} \tag{121}$$

Положим $mgx_c/C=n$. Тогда имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} 2\dot p&=qr,\\ 2\dot q&=-pr+n\gamma_3,\\ \dot r&=-n\gamma_2,\\ \dot\gamma_1&=r\gamma_2-q\gamma_3,\\ \dot\gamma_2&=p\gamma_3-r\gamma_1,\\ \dot\gamma_3&=q\gamma_1-p\gamma_2. \end{aligned} \tag{122}$$

Отсюда

$$2\frac{d}{dt}(p+iq)=-ir(p+iq)+n\gamma_3 i, \tag{123}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1+i\gamma_2)=-ir(\gamma_1+i\gamma_2)+i\gamma_3(p+iq). \tag{124}$$

Если первое равенство умножить на $p+iq$, а второе на $(-n)$ и сложить, то получим

$$\frac{d}{dt}\left[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)\right]=-ir\left[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)\right]. \qquad (125)$$

Аналогично получается равенство

$$\frac{d}{dt}\left[(p-iq)^2-n(\gamma_1-i\gamma_2)\right]=ir\left[(p-iq)^2-n(\gamma_1-i\gamma_2)\right]. \qquad (126)$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\ln\left[(p+iq)^2-n(\gamma_1+i\gamma_2)\right]=-ir, \qquad (127)$$

$$\frac{d}{dt}\ln\left[(p-iq)^2-n(\gamma_1-i\gamma_2)\right]=ir. \qquad (128)$$

Складывая и интегрируя, получим соотношение

$$\left[(p^2-q^2-n\gamma_1)+i(2pq-n\gamma_2)\right]\left[(p^2-q^2-n\gamma_1)-\right.$$
$$\left.-i(2pq-n\gamma_2)\right]=\text{const}, \qquad (129)$$

из которого следует последний недостающий интеграл

$$(p^2-q^2-n\gamma_1)^2+(2pq-n\gamma_2)^2=\text{const}. \qquad (130)$$

§ 6. Вариационные принципы в механике

1. Принцип Гамильтона. Рассматривается голономная механическая система, на которую действуют потенциальные силы; таким образом, система характеризуется функцией Лагранжа $L=L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$. Движение системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$. Интеграл

$$W=\int_{t_0}^{t_1} L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)\,dt \qquad (131)$$

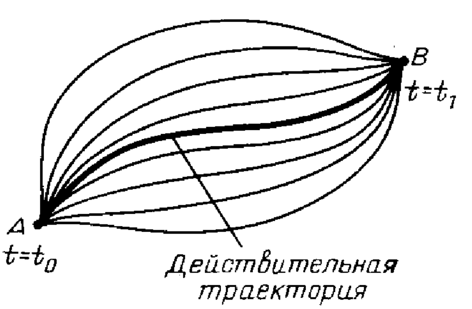


Рис. 9

называется *действием по Гамильтону*, здесь t_0, t_1 фиксированы. В пространстве с координатами (q, t) рассматриваются возможные движения $q=q(t, \alpha)$ (α—параметр), причем $q(t)=q(t, 0)$—действительная траектория (рис. 9). Здесь не варьируются A, B и t_0, t_1.

Принцип Гамильтона утверждает, что на действительных траекториях $\delta W=0$. Действительно, вычислим вариацию δW. Имеем

$$\delta W=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i+\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right)dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\right)dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)dt=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Big|_{t_0}^{t_1}=0,\qquad(132)$$

так как $\delta q|_{t=t_0}=\delta q|_{t=t_1}=0$.

Равенство $\delta W=0$ означает, что действие W минимально, если точки A, B близки. Действительно, вторая вариация $\delta^2 W$ имеет вид

$$\delta^2 W=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i,\,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\delta\dot q_i\delta\dot q_j+2\,\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial q_j}\delta\dot q_i\delta q_j+\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\partial q_j}\delta q_i\delta q_j\right)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i,\,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\delta\dot q_i\delta\dot q_j\right)dt+o\left((t+t_1)^2\right)>0,\qquad(133)$$

так как форма $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\delta\dot q_i\delta\dot q_j$ положительно определена.

2. Предложение. *Если выполняется принцип Гамильтона, то траектории описываются уравнениями Гамильтона.*

Доказательство. На действительной траектории выполняется равенство $\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=0$ и, следовательно,

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i-\sum_{i=1}^{n}p_i q_i+L\right)dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i-H\right)dt=0,\qquad(134)$$

так как $H=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\dot q_i-L$. Отсюда

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\dot q_i\delta p_i-\dot p_i\delta q_i)-\delta H\right]dt=0,\qquad(135)$$

так как

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(p_i\delta\dot{q}_i+\dot{q}_i\delta p_i)\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}p_i\,d\delta q_i+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\delta p_i\,dt=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i\delta q_i\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\delta p_i\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(\dot{q}_i\delta p_i-\dot{p}_i\delta q_i)\,dt,\qquad(136)$$

и $\delta q_i(t_0)=\delta q_i(t_1)=0$. Итак,

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i-\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right]dt=0,\qquad(137)$$

следовательно, $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$, т. е. получили *канонические уравнения Гамильтона.*

3. Принцип Якоби. Рассматривается механическая система, на которую наложены идеальные связи, предполагается, что активные силы потенциальны и $T=T_2$ (см. п. 6 § 2), $T-U=h$. В пространстве лагранжевых координат (q^i) рассматриваются траектории, проходящие через фиксированные точки A, B, но момент времени прохождения A и B может быть различным, $\delta h=0$ на всех траекториях. Получили так называемую *вариационную задачу с подвижными концами.*

Рассмотрим такую вариацию времени $\tau=\tau(t,\alpha)$, что при $\alpha=0$ получим время на действительной траектории, т. е. $\tau(t, 0)\equiv t$; если $\tau_0=\tau(t_0,\alpha)$, $\tau_1=\tau(t_1,\alpha)$, то τ_0 и τ_1 будут общими для всех траекторий, т. е. $\delta\tau_0=\delta\tau_1=0$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=\int_{\tau_0}^{\tau_1}L_1t'\,d\tau,\qquad(138)$$

где $L=L(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)$ и $L_1=L\left(q_1,\ldots,q_n,\frac{q'_1}{t'},\ldots,\frac{q'_n}{t'}\right)t'$, так как $\dot{q}_i=\frac{dq_i}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=q'_i/t'$. Итак, переходим к $n+1$ переменной $q_1,\ldots,q_n,t$.

Поскольку лагранжиан L_1 от t явно не зависит, то t — циклическая переменная и имеется первый интеграл $\frac{\partial L_1}{\partial t'}=\text{const}$, который имеет вид

$$L+t'\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left(-\frac{q_i'}{t'^2}\right)=$$

$$=T+U-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i=T+U-2T=U-T=-h, \tag{139}$$

так как $L=T+U$, т. е. циклический интеграл совпадает с интегралом энергии. Рассмотрим *функцию Рауса* $R=L_1-\frac{\partial L_1}{\partial t'}t'=Lt'-t'(U-T)=(T+U-U+T)t'=2Tt'$. Тогда принцип Гамильтона можно записать в виде

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} R\,d\tau=0,\quad\text{или}\quad \delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} 2Tt'\,d\tau=0, \tag{140}$$

где $T=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}\dot q_i\dot q_j$. Введем метрику

$$ds^2=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}dq_idq_j=2T\,dt^2. \tag{141}$$

Тогда вариационный принцип можно переписать в виде равенства

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2\frac{d\tau}{t'}=0. \tag{142}$$

Поскольку $T=U+h$, то $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=U+h$ и, следовательно, $\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2=(t')^2(U+h)$, т. е. $t'=\frac{1}{\sqrt{2(U+h)}}\frac{ds}{d\tau}$. Итак, вариационный принцип имеет вид

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{ds}{d\tau}\sqrt{2(U+h)}\,d\tau=0. \tag{143}$$

Окончательно получаем принцип Якоби, который утверждает, что на действительных траекториях имеет место равенство

$$\delta\int_{AB}\sqrt{2(U+h)}\,ds=0. \tag{144}$$

4. Уравнение Якоби. Примем переменную q_1 за независимую. Тогда вариационный принцип Якоби перепишется в виде

$$\delta\int\sqrt{2(U+h)}\,\frac{ds}{dq_1}\,dq_1=0. \tag{145}$$

Обозначим квадратный корень $\sqrt{2(U+h)\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}\frac{dq_i}{dq_1}\frac{dq_j}{dq_1}}$ буквой S. Тогда соответствующее уравнение Лагранжа $\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial S}{\partial q_i}=0$, $i=2, \ldots, n$, называется *уравнением Якоби*. Отметим, что для понижения порядка уравнения использовали интеграл энергии.

5. Пример. Рассмотрим движение материальной точки в однородном поле тяжести. Пусть ось $0x$ направлена по горизонтали, а ось $0y$ — вертикально вниз. Кинетическая энергия T имеет вид $T=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2)$ и $U+h=h-mg$. Поэтому $S=\sqrt{(h-mgy)m\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$. Уравнение Якоби имеет вид $\frac{d}{dx}\left(\frac{dS}{dy'}\right)-\frac{dS}{dy}=0$, где $y'=\frac{dy}{dx}$, т. е.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{(h-mgy)m}}{\sqrt{1+(y')^2}}\,y'\right)+\frac{\sqrt{m(1+(y')^2)}}{\sqrt{h-mgy}}\,mg=0, \tag{146}$$

следовательно, $2(h-mgy)y''+mg(1+(y')^2)=0$. Продифференцируем это равенство по x, получим $y'''=0$.

6. Замечание. Вывод уравнений Лагранжа из вариационного принципа $\delta W=0$ можно найти в [275].

§ 7. Интегральные инварианты

1. Определение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\frac{dx_i}{dt}=X_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ с начальными условиями $x_i(t_0)=x_i^0$. Решение этой задачи обозначим $x_i=x_i(t, x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Для заданной области $\Omega_0\subset\mathbf{R}^p$ рассмотрим ее отображение $x_i^0=x_i^0(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)\in\Omega_0$, в пространство $\mathbf{R}^n$, т. е. в $\mathbf{R}^n$ дана p-мерная поверхность, заданная параметрически. Определим однопараметрическое семейство поверхностей Ω_t, которое задается в виде $x_i(t,\ x_1^0(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_p),\ \ldots$ $\ldots,\ x_n^0(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_p))$. Выражение

$$J=\overbrace{\int\ldots\int_{\Omega_t}}^{p}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}F_{i_1\ldots i_p}(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\delta x_{i_1}\ldots\delta x_{i_p} \qquad (147)$$

называется *интегральным инвариантом* p-го порядка, если $J(t)=\text{const}$; если $p=n$, то J называется интегральным инвариантом *полного порядка*. Если равенство $J(t)=\text{const}$ выполняется для любой поверхности, то J называется *абсолютным интегральным инвариантом*. Если же это верно для компактных ориентируемых подмногообразий без края, то J — *относительный интегральный инвариант*. В формуле (147) $\delta x_{i_1}\ldots\delta x_{i_p}$ обозначает дифференциальную форму, индуцированную из формы $dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$.

Теория относительных интегральных инвариантов сводится к теории абсолютных интегральных инвариантов. Пусть, например,

$$J=\int_{\partial\Omega}F_1\delta x_1+\ldots+F_n\delta x_n \qquad (148)$$

— относительный интегральный инвариант. Тогда в силу теоремы Стокса его можно записать в виде

$$J=\iint_{\Omega}\sum_{i,\,j}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}-\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i\delta x_j, \qquad (149)$$

т. е. получили абсолютный интегральный инвариант второго порядка. Аналогично, каждому относительному интегральному инварианту p-го порядка отвечает абсолютный интегральный инвариант $(p+1)$-го порядка.

Отметим связь интегральных инвариантов с первыми интегралами.

2. Теорема. *Пусть система дифференциальных уравнений* $\dot{x}_i=X_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $i=1,\ \ldots,\ n$, *имеет интегральный инвариант* (148). *Тогда величина*

$$F_1(x_1,\ \ldots,\ x_n)y_1+\ldots+F_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)y_n \qquad (150)$$

является первым интегралом расширенной системы

$$\dot{x}_i=X_i(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \dot{y}_k=\frac{\partial X_k}{\partial x_1}y_1+\ldots+\frac{\partial X_k}{\partial x_n}y_n,\ i,\ k=1,\ \ldots,\ n. \qquad (151)$$

3. Пример. Рассмотрим систему $\ddot{x}=-xf(r)/r$, $\ddot{y}=-yf(r)/r$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Пусть $\dot{x}=u$, $\dot{y}=v$. Тогда величина

$$J=\int(v\delta x-u\delta y-y\delta u+x\delta v) \tag{152}$$

является интегральным инвариантом. Действительно, поскольку $x\dot{y}-y\dot{x}=xv-yu=\mathrm{const}=c$ — интеграл площадей, то

$$J=\int(v\delta x-u\delta y-y\delta u+x\delta v)=\int\delta(vx-uy)=\int\delta c=\mathrm{const} \tag{153}$$

для любой области.

4. Теорема Лиувилля. *Величина*

$$J=\overbrace{\int_{\Omega}\cdots\int}^{2n}\delta q_1\ldots\delta q_n\,\delta p_1\ldots\delta p_n \tag{154}$$

является интегральным инвариантом для канонической системы Гамильтона от n переменных: $\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$, $i=1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $\Delta J=J(t+dt)-J(t)$ и $q'_i=q_i+\dot{q}_i\,dt$, $p'_i=p_i+\dot{p}_i\,dt$. Тогда

$$\Delta J=\int_{\Omega'}\!\!\ldots\int\delta q'_1\ldots\delta q'_n\,\delta p'_1\ldots\delta p'_n-\int_{\Omega}\!\!\ldots\int\delta q_1\ldots\delta q_n\,\delta p_1\ldots\delta p_n=$$

$$=\int_{\Omega}\!\!\ldots\int(D-1)\,\delta q_1\ldots\delta q_n\,\delta p_1\ldots\delta p_n, \tag{155}$$

где

$$D=\frac{D(q'_1,\ldots,q'_n,p'_1,\ldots,p'_n)}{D(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_1}dt+\ldots & \frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_2}dt+\ldots & \ldots & \frac{\partial\dot{q}_1}{\partial p_n}dt+\ldots \\ \frac{\partial\dot{q}_2}{\partial q_1}dt+\ldots & 1+\frac{\partial\dot{q}_2}{\partial q_2}dt+\ldots & \ldots & \frac{\partial\dot{q}_2}{\partial p_n}dt+\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\dot{p}_n}{\partial q_1}dt+\ldots & \frac{\partial\dot{p}_n}{\partial q_2}dt+\ldots & \ldots & 1+\frac{\partial\dot{p}_n}{\partial p_n}dt+\ldots \end{vmatrix}=$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial q_i}\right)dt+\text{члены высшего порядка.} \tag{156}$$

Итак, $dJ=0$, так как $D=1+\ldots$ в силу того, что $\dot q_i=\partial H/\partial p_i$, $\dot p_i=-\partial H/\partial q_i$. Следовательно, $J=\mathrm{const}$ и J — интегральный инвариант.

5. Определение. Величина

$$J=\oint\limits_C\left(-H\delta t+\sum_{i=1}^n p_i\delta q_i\right) \tag{157}$$

называется *интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана.*

6. Теорема. *Величина J является интегральным инвариантом.*

Доказательство. Рассмотрим функционал $W=\int\limits_{t_0}^{t_1}L\,dt$; вычислим его вариацию, причем t_0, t_1 также будем варьировать, т. е. $t_0=t_0(\alpha)$, $t_1=t_1(\alpha)$, $q_i=q_i(t,\alpha)$, $\dot q_i=\dot q_i(t,\alpha)$ (при $\alpha=0$ получим значения лагранжевых координат и скоростей соответствующей действительной траектории). Полная вариация δq имеет вид $\delta q=\frac{\partial q}{\partial\alpha}\delta\alpha+\dot q\,\delta t$. Символом $[\delta q]$ обозначим изохронную вариацию, т. е. $[\delta q_i]\big|_{t=t_i}=\frac{\partial q_i}{\partial\alpha}\delta\alpha\big|_{t=t_i}$, $i=0,1$. Положим также $\delta q_i^0=\delta q_i(t_0)$ и $\delta q_i^1=\delta q(t_1)$. Тогда имеет место равенство

$$\delta W=L_1\delta t_1-L_0\delta t_0+\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\delta\dot q_i\right)dt=$$

$$=L_1\delta t_1-L_0\delta t_0+\sum_{i=1}^n\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}[\delta q_i]\Bigg|_{t_0}^{t_1}+\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)\delta q_i\,dt=$$

$$=L_1\delta t_1-L_0\delta t_0+\sum_{i=1}^n\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}[\delta q_i]\Bigg|_{t_0}^{t_1}, \tag{158}$$

так как на действительной траектории $\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}=0$. Поскольку $\partial L/\partial\dot q_i=p_i$ и $H=-L+\sum\limits_{i=1}^n p_i\dot q_i$, то

$$\delta W=L_1\delta t_1-L_0\delta t_0+\sum_{i=1}^n(\delta q_i^1-\dot q_i^1\delta t_1)-$$

$$-\sum_{i=1}^n p_i^0(\delta q_i^0-\dot q_i^0\delta t_0)=-H_1\delta t_1+H_0\delta t_0+$$

$$+\sum_{i=1}^n p_i^1\delta q_i^1-\sum_{i=1}^n p_i^0\delta q_i^0=\left(-H\delta t+\sum_{i=1}^n p_i\delta q_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}. \tag{159}$$

Рассмотрим теперь в пространстве $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$ две замкнутые кривые: кривая C_0 задается уравнениями $q_i=q_i^0(\alpha)$, $p_i=p_i^0(\alpha)$, $t=t_0(\alpha)$, $0\leqslant\alpha\leqslant l$, и $q_i^0(0)=q_i^0(l)$, $p_i^0(0)=p_i^0(l)$; кривая C, являющаяся образом кривой C_0 при действии гамильтонова потока $\dot{q}_i=\partial H/\partial p_i$, $\dot{p}_i=-\partial H/\partial q_i$, задается уравнениями $p_i=p_i(t, \alpha)$, $q_i=q_i(t, \alpha)$ и $p_i(t, 0)\equiv p_i(t, l)$, $q_i(t, 0)\equiv q_i(t, l)$. Из равенства $\int\limits_0^l \delta W=W(l)-W(0)=0$ вытекает соотношение

$$\int\limits_0^l\left(-H\,\delta t+\sum_{i=1}^n p_i\delta q_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}=\int\limits_0^l\left(-H_1\delta t_1+\sum_{i=1}^n p_i^1\delta q_i^1\right)-$$

$$-\int\limits_0^l\left(-H_0\delta t_0+\sum_{i=1}^n p_i^0\delta q_i^0\right)=0, \quad (160)$$

и поэтому $\oint\limits_C\left(-H\,\delta t+\sum\limits_{i=1}^n p_i\delta q_i\right)=\oint\limits_{C_0}\left(-H\,\delta t+\sum\limits_{i=1}^n p_i\delta q_i\right)$, т. е. $J=\oint\limits_C\left(-H\,\delta t+\sum\limits_{i=1}^n p_i\delta q_i\right)$ — интегральный инвариант.

7. Теорема Ли Хуачжуна. *Любой относительный интегральный инвариант вида*

$$J^*=\int\limits_C\sum_{i=1}^n A_i(p, q, t)\,\delta q_i+B_i(p, q, t)\,\delta p_i \quad (161)$$

для гамильтоновой системы пропорционален инварианту Картана — Пуанкаре.

Доказательство этой теоремы приведем только для случая системы с одной степенью свободы. Вычислим производную dJ^*/dt:

$$\frac{dJ^*}{dt}=\oint\limits_C\left[\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial A}{\partial p}\dot{p}\right)\delta q+A\frac{d\delta q}{dt}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial B}{\partial p}\dot{p}\right)\delta q+B\frac{d\delta p}{dt}\right]=\oint\limits_C\left[\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial A}{\partial p}\dot{p}\right)\delta q+\right.$$

$$\left.+\delta(A\dot{q})-\dot{q}\,\delta A+\left(\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial B}{\partial p}\dot{p}\right)\delta p+\delta(B\dot{p})-\dot{p}\,\delta B\right]. \quad (162)$$

Поскольку $\oint\limits_C \delta(A\dot{q})=0$, $\oint\limits_C \delta(B\dot{p})=0$, то для любого контура C выполняется равенство

$$\frac{dJ^*}{dt}=\oint\limits_C\left[\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial A}{\partial p}\dot{p}\right)\delta q-\dot{q}\left(\frac{\partial A}{\partial q}\delta q+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial A}{\partial p}\delta p\right)+\left(\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial B}{\partial p}\dot{p}\right)\delta q-\dot{p}\left(\frac{\partial B}{\partial q}\delta q+\frac{\partial B}{\partial p}\delta p\right)\right]=$$

$$=\oint\limits_C\left[\frac{\partial A}{\partial t}+\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)\dot{p}\right]\delta q+\left[\frac{\partial B}{\partial t}-\left(\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)\dot{q}\right]\delta p=$$

$$=\oint\limits_C\left[\frac{\partial A}{\partial t}-Z\frac{\partial H}{\partial q}\right]\delta q+\left[\frac{\partial B}{\partial t}-Z\frac{\partial H}{\partial p}\right]\delta q\equiv 0, \qquad (163)$$

где $Z=\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}$. Интеграл от дифференциальной формы вдоль замкнутого пути (любого) обращается в нуль тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом, а это, в свою очередь, эквивалентно тому, что выполняется соотношение $\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial A}{\partial t}-Z\frac{\partial H}{\partial q}\right]=\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial B}{\partial t}-Z\frac{\partial H}{\partial p}\right]$, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}Z-\frac{\partial Z}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}-Z\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}+\frac{\partial Z}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}+Z\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}\equiv 0 \qquad (164)$$

(для любой функции H). Поэтому $\frac{\partial Z}{\partial t}=0$, $\frac{\partial Z}{\partial q}=0$, $\frac{\partial Z}{\partial p}=0$, т. е. $Z=\text{const}$ и $\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}=\text{const}$ или $\partial(A-cp)/\partial p=\partial B/\partial q$, а это означает, что $(A-cp)\,\delta q+B\,\delta p=\delta V$. Следовательно, $A\,\delta q+B\,\delta p=$ $=cp\,\delta q+\delta V$, и поэтому

$$\oint\limits_C A\,dq+B\,dp=c\oint\limits_C p\,dq+\oint\limits_C\delta V=c\oint\limits_C p\,\delta q, \qquad (165)$$

так как $\oint\limits_C \delta V=0$ (рис. 10).

Отметим без доказательства следующий интересный результат.

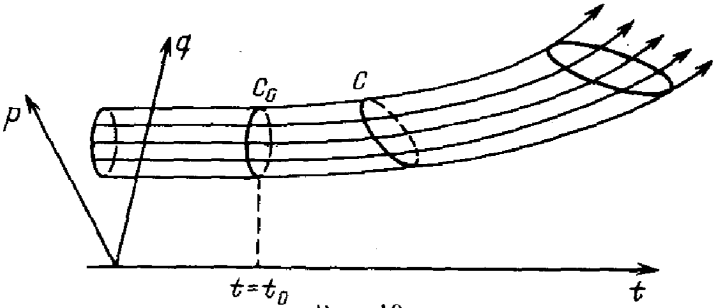


Рис. 10

8. Теорема. *Если система дифференциальных уравнений допускает интегральный инвариант вида* $J=\oint\limits_C \sum\limits_{i=1}^n p_i\,\delta q_i - H\,\delta t$, *то она может быть приведена к гамильтонову виду.*

§ 8. Канонические преобразования

1. Определение. Преобразование $f:\mathbf{R}^{2n}(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\to\mathbf{R}^{2n}(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ называется *каноническим*, если оно сохраняет каноническую форму уравнений для любой функции Гамильтона, см. также п. 1 § 24.

Если $\xi_i=\xi_i(q, p)$ и $\eta_i=\eta_i(q, p)$, то предполагаем, что $D(\xi, \eta)/D(p, q)\neq 0$. При этом отображении система уравнений $\dot q_i=\partial H/\partial p_i$, $\dot p_i=-\partial H/\partial q_i$ переходит в систему $\dot\xi_i=\partial K/\partial\eta_i$, $\dot\eta_i=-\partial K/\partial\xi_i$.

2. Теорема. *Пусть задана функция* $V=V(t, q_1, \ldots, q_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, *называемая производящей, и константа* $c=\mathrm{const}$, *называемая валентностью преобразования. Тогда преобразование*

$$cp_i=\frac{\partial V}{\partial q_i},\quad \eta_i=-\frac{\partial V}{\partial \xi_i} \tag{166}$$

является каноническим. Будем предполагать, что

$$\det\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial q_j\partial\xi_i}\right\|\neq 0, \tag{167}$$

т. е. преобразование обратимо.

Доказательство. Используя равенства

$$\frac{\partial p_s}{\partial\eta_i}=\frac{1}{c}\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 V}{\partial q_s\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial\eta_i}, \tag{168}$$

$$\dot p_s=\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial q_s\partial t}+\sum_{j=1}^n\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_s\partial q_j}\dot q_j+\frac{\partial^2 V}{\partial q_s\partial\xi_j}\dot\xi_j\right]\right\}, \tag{169}$$

получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial \eta_i}+\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \eta_i}\right)=\sum_{s=1}^{n}\left(-\dot{p}_s\frac{\partial q_s}{\partial \eta_i}+\dot{q}_s\frac{\partial p_s}{\partial \eta_i}\right)=$$

$$=-\frac{1}{c}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial q_s}{\partial \eta_i}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t}+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_j}\dot{q}_j+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial \xi_j}\dot{\xi}_j\right]\right\}+\frac{1}{c}\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \eta_i}=$$

$$=-\frac{1}{c}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial t}\frac{\partial q_s}{\partial \eta_i}-\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_s}\dot{q}_s\frac{\partial q_j}{\partial \eta_i}+$$

$$+\frac{1}{c}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_s\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \eta_i}-\frac{1}{c}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dot{\xi}_j\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial \xi_j}\frac{\partial q_s}{\partial \eta_i}. \qquad (170)$$

Поскольку

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial \xi_j}\frac{\partial q_s}{\partial \eta_i}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\partial V}{\partial \xi_j}\right)\frac{\partial q_s}{\partial \eta_i}=-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \eta_j}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial \eta_i}=-\delta_i^j, \qquad (171)$$

то $\dfrac{\partial H}{\partial \eta_i}=-\dfrac{1}{c}\displaystyle\sum_{s=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial q_s}\left(\dfrac{\partial V}{\partial t}\right)\dfrac{\partial q_s}{\partial \eta_i}+\dfrac{1}{c}\dfrac{d\xi_i}{dt}$ и $\dfrac{d\xi_i}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial \eta_i}\left(cH+\dfrac{\partial V}{\partial t}\right)$. Аналогично получается, что $\dfrac{d\eta_i}{dt}=-\dfrac{\partial}{\partial \xi_i}\left(cH+\dfrac{\partial V}{\partial t}\right)$.

3. Следствие. *Преобразование* $cp_i=\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$, $\eta_i=-\dfrac{\partial V}{\partial \xi_i}$ *переводит каноническую систему* $\dot{q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$ *с гамильтонианом* H *в каноническую систему с гамильтонианом* $K=cH+\dfrac{\partial V}{\partial t}$.

4. Определение. Если $c=1$, то соответствующее преобразование называется *унивалентным*.

5. **Уравнение Гамильтона—Якоби.** С помощью канонического преобразования из п. 2 можно попытаться привести каноническую систему к простейшему виду $\dot{\xi}_i=0$, $\dot{\eta}_i=0$. Этого можно добиться, если выбрать такую производящую функцию V, что $K=cH+\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$. Для этого надо решить уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t}+cH\left(t,\ \frac{\partial V}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial q_n},\ q_1,\ \ldots,\ q_n\right)=0, \qquad (172)$$

которое называется *уравнением Гамильтона—Якоби*. С этим уравнением подробнее ознакомимся в следующей главе.

6. Структура канонических преобразований. Пусть C_0 — такой контур в пространстве (q, p, t), который лежит в гиперплоскости $t=t_0$, а C_0^* — его образ при каноническом преобразовании $\xi_i=\xi_i(q, p)$, $\eta_i=\eta_i(q, p)$. Обозначим через C и C^* образы контуров C_0 и C_0^* относительно соответствующих гамиль-

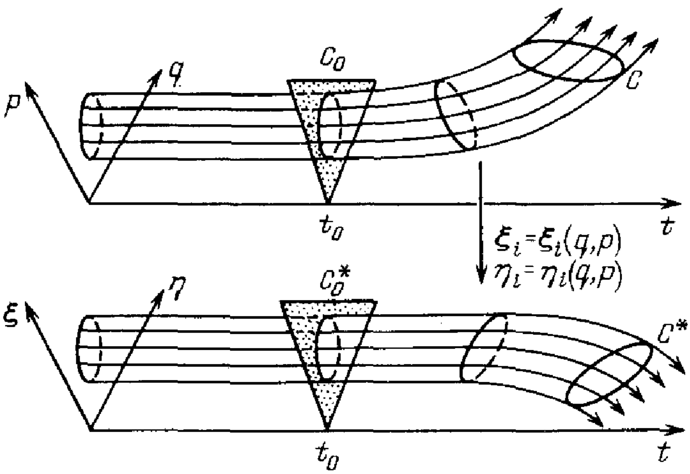


Рис. 11

тоновых потоков (т. е. сдвиг на время t в силу соответствующей динамической системы для некоторого фиксированного значения t) $\dot q_i=\partial H/\partial p_i$, $\dot p_i=-\partial H/\partial q_i$ и $\dot\xi_i=\partial K/\partial\eta_i$, $\dot\eta_i=-\partial K/\partial\xi_i$ (рис. 11). Интегральный инвариант Картана — Пуанкаре дает равенства $\oint\limits_{C_0}\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\delta q_i=\oint\limits_{C}\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\delta q_i-H\delta t$, так как $\delta t|_{C_0}=0$ и $\oint\limits_{C_0^*}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\delta\xi_i=\oint\limits_{C^*}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\delta\xi_i-K\delta t$, так как $\delta t|_{C_0^*}=0$. В силу теоремы Ли Хуачжуна $\oint\limits_{C^*}\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\delta\xi_i-K\delta t=c\oint\limits_{C}\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\delta q_i-H\delta t$ и, следовательно,

$$\oint\limits_{C}\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i\delta\xi_i-K\delta t-c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i-H\delta t\right)\right]=0 \qquad (173)$$

для любого контура C, а следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i d\xi_i-K\delta t-c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i-H\delta t\right)=-\delta V(t, q, p)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial V}{\partial p_i}\delta p_i\right)+\frac{\partial V}{\partial t}\delta t. \qquad (174)$$

Рассмотрим четыре случая.

а) Пусть $D(\xi_1, ..., \xi_n)/D(p_1, ..., p_n) \neq 0$. Тогда $p_i = p_i(\xi, q)$ и $V = V(t, q, \xi)$. Из равенства $\sum_{i=1}^{n} \eta_i d\xi_i - K\delta t - c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial V}{\partial \xi_i}\delta\xi_i\right) - \frac{\partial V}{\partial t}\delta t$ вытекает, что $\eta_i = -\frac{\partial V}{\partial \xi_i}$, $cp_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$ и $K = cH + \frac{\partial V}{\partial t}$.

б) Аналогично, если $D(\xi_1, ..., \xi_n)/D(q_1, ..., q_n) \neq 0$, то $V = V(t, p, \xi)$ и $\eta_i = \partial V/\partial p_i$, $cq_i = -\partial V/\partial p_i$, $K = cH + \partial V/\partial t$.

в) Аналогично, если $D(\eta_1, ..., \eta_n)/D(p_1, ..., p_n) \neq 0$, то $V = V(t, q, \eta)$ и $\xi_i = \partial V/\partial \eta_i$, $cp_i = -\partial V/\partial q_i$, $K = cH + \partial V/\partial t$.

г) Аналогично, если $D(\eta_1, ..., \eta_n)/D(q_1, ..., q_n) \neq 0$, то $V = V(t, q, \eta)$ и $\xi_i = \partial V/\partial \eta_i$, $cq_i = -\partial V/\partial p_i$, $K = cH + \partial V/\partial t$.

§ 9. Скобки Пуассона

1. Определение. Пусть на пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ с координатами $q_1, ..., q_n$, $p_1, ..., p_n$ заданы две функции $f(t, q, p)$ и $g(t, q, p)$. Функция $\{f, g\}$, определенная равенством

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{D(f, g)}{D(q_i, p_i)}, \tag{175}$$

называется *скобкой Пуассона функций* f *и* g.

2. Лемма. *Пусть* $q(t)$ *и* $p(t)$ — *решение канонической системы* $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$, $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$. *Тогда полная производная* $\frac{dF}{dt}$ *равна* $\frac{dF(t, q, p)}{dt} = \frac{\partial F(t, q, p)}{\partial t} + \{F, H\}$. *В частности, уравнения Гамильтона имеют вид* $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$, $\dot{p}_i = \{p_i, H\}$.

Доказательство вытекает из равенства

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}. \tag{176}$$

3. Определение. Скобки Пуассона $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$ называются *фундаментальными*.

4. Теорема. *Скобки Пуассона не меняются при канонических преобразованиях.*

Для доказательства теоремы потребуется следующая

5. Лемма. *Фундаментальные скобки Пуассона не меняются при канонических преобразованиях.*

Доказательство. Пусть $x=x(q, p)$ и $y=y(q, p)$ — каноническое преобразование. Если $\dot{x}_i=\partial H/\partial y_i$, $\dot{y}_i=-\partial H/\partial x_i$, то

$$\dot{x}_i=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial x_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial p_k}+\frac{\partial H}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial p_k}\right)-\frac{\partial x_i}{\partial p_k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}+\frac{\partial H}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial q_k}\right)\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial p_k}-\frac{\partial x_i}{\partial p_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_j}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_j}{\partial p_k}-\frac{\partial x_i}{\partial p_k}\frac{\partial y_j}{\partial q_k}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\{x_i, x_j\}+\frac{\partial H}{\partial y_j}\{x_i, y_j\}\right)=\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad (177)$$

здесь H — произвольная функция. Отсюда, если $H=x_j$, то $\{x_i, x_j\}=0$, если $H=y_i$, то $\{x_i, y_i\}=1$, и, наконец, если $H=y_j$, то $\{x_i, y_j\}=0 \quad (i\neq j)$.

Равенство $\{y_i, y_j\}=0$ проверяем аналогично, вычислив производную $\dot{y}_i$.

Доказательство теоремы 4. Для каждого $j=1, \ldots$ ..., n имеет место равенство

$$\frac{D(f, g)}{D(q_j, p_j)}=\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n}\left(\frac{D(f, g)}{D(x_i, x_k)}\frac{D(x_i, x_k)}{D(q_j, p_j)}+\right.$$

$$\left.+\frac{D(f, g)}{D(y_i, y_k)}\frac{D(y_i, y_k)}{D(q_j, p_j)}\right)+\sum_{i,k=1}^{n}\frac{D(f, g)}{D(x_i, y_k)}\frac{D(x_i, y_k)}{D(q_j, p_j)}. \quad (178)$$

Просуммировав эти равенства и воспользовавшись леммой 5, получим

$$\{f, g\}_{q, p}=\sum_{\substack{i,k=1\\ i<k}}^{n}\left[\frac{D(f, g)}{D(x_i, x_k)}\{x_i, x_k\}+\frac{D(f, g)}{D(y_i, y_k)}\{y_i, y_k\}\right]+$$

$$+\sum_{i,k=1}^{n}\frac{D(f, g)}{D(x_i, y_k)}\{x_i, y_k\}=\{f, g\}_{x, y}. \quad (179)$$

6. Теорема. *Скобка Пуассона обладает следующими свойствами:* а) *Для произвольной константы c имеет место равенство* $\{\varphi, c\}=\{c, \varphi\}=0$. б) *Для произвольной константы c имеет место равенство* $\{\varphi, c\psi\}=c\{\varphi, \psi\}$. в) *Если обе функции φ и ψ не зависят от аргументов одного какого-нибудь класса $q_1, \ldots, q_n$ или $p_1, \ldots, p_n$, то* $\{\varphi, \psi\}=0$. г) *Выполняется соотношение* $\{\varphi, \psi\}=-\{\psi, \varphi\}$. д) *Имеем* $\{\varphi, -\psi\}=-\{\varphi, \psi\}$. е) *Если $\varphi=f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — функции аргументов обоих* *классов* $q_1, \ldots, q_n$ *и* $p_1, \ldots, p_n$, *то* $\{\varphi, \psi\} = \sum_{j=1}^{n} \{\varphi_j, \psi\} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varphi_j}$. ж) *Если* φ *и* ψ *зависят от какого угодно параметра* t (*в частности,* t *может быть одним из аргументов* $q_1, \ldots, q_n$ *или* $p_1, \ldots, p_n$), *то* $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial t} = \left\{\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi\right\} + \left\{\varphi, \dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right\}$. з) *Выполняется тождество Якоби* $\{\{\varphi_1, \varphi_2\}, \varphi_3\} + \{\{\varphi_2, \varphi_3\}, \varphi_1\} + \{\{\varphi_3, \varphi_1\}, \varphi_2\} = 0$.

Доказательство. Докажем тождество Якоби, остальные свойства легко вытекают из определения 1. Пусть φ_1, φ_2, φ_3 — функции аргументов (q_i) и (p_i) каждая. Введем обозначения $\{\varphi_1, \varphi_2\} = \psi_3$, $\{\varphi_2, \varphi_3\} = \psi_1$, $\{\varphi_3, \varphi_1\} = \psi_2$. Тогда тождество Якоби принимает вид $\{\psi_1, \varphi_1\} + \{\psi_2, \varphi_2\} + \{\psi_3, \varphi_3\} = 0$. Заметим, что $\dfrac{\partial \psi_1}{\partial p_i} = \dfrac{\partial}{\partial p_i}\{\varphi_2, \varphi_3\} = \left\{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial p_i}, \varphi_3\right\} + \left\{\varphi_2, \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial p_i}\right\}$ и $\dfrac{\partial \psi_1}{\partial q_i} = \left\{\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}, \varphi_3\right\} + \left\{\varphi_2, \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right\}$. Вычислим первое слагаемое в тождестве Якоби:

$$\{\psi_1, \varphi_1\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi_1}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_i}, \varphi_3\right\} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\left\{\varphi_2, \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_i}\right\} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}, \varphi_3\right\} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i}\left\{\varphi_2, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\right\}\right]. \quad (180)$$

Далее,

$$\{\psi_2, \varphi_2\} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial \varphi_3}{\partial p_i}, \varphi_1\right\} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\left\{\varphi_3, \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i}\right\} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}, \varphi_2\right\} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_i}\left\{\varphi_3, \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\right\}\right], \quad (181)$$

$$\{\psi_3, \varphi_3\} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i}, \varphi_2\right\} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\left\{\varphi_1, \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_i}\right\} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}, \varphi_2\right\} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_i}\left\{\varphi_1, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\right\}\right]. \quad (182)$$

Вычислим скобку $\{\psi_1, \varphi_1\}$ при помощи свойства е), рассматривая

$$\psi_1 = \{\varphi_2, \varphi_3\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_3}{\partial p_i}\right) \quad (183)$$

как сложную функцию q_i и p_i, зависящую от них посредством переменных $\partial\varphi_2/\partial p_i$, $\partial\varphi_2/\partial q_i$, $\partial\varphi_3/\partial p_i$, $\partial\varphi_3/\partial q_i$, где $i=1, \ldots, n$. Тогда по формуле в утверждении е) теоремы имеем

$$\left\{\psi_1, \varphi_1\right\}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}, \varphi_1\right\}\frac{\partial\psi_1}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}\right)}+\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}, \varphi_1\right\}\frac{\partial\psi_1}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\right)}+\right.$$
$$\left.+\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_i}, \varphi_1\right\}\frac{\partial\psi_1}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial p_i}\right)}+\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}, \varphi_1\right\}\frac{\partial\psi_1}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\right)}\right]. \tag{184}$$

Из равенства (183) находим

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}\right)}=\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\right)}=-\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_i}, \tag{185}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial p_i}\right)}=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\right)}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}, \tag{186}$$

и поэтому

$$\{\psi_1, \varphi_1\}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}, \varphi_1\right\}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}, \varphi_1\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_i}, \varphi_1\right\}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}, \varphi_1\right\}\right]. \tag{187}$$

Аналогично,

$$\{\psi_2, \varphi_2\}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_i}, \varphi_2\right\}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}, \varphi_2\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_i}, \varphi_2\right\}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}, \varphi_2\right\}\right], \tag{188}$$

$$\{\psi_3, \varphi_3\}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_i}, \varphi_3\right\}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}, \varphi_3\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}, \varphi_3\right\}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}, \varphi_3\right\}\right]. \tag{189}$$

Сложив равенства (180), (181), (187)—(189), получим после приведения подобных членов равенство

$$2\{\psi_1, \varphi_1\}+2\{\psi_2, \varphi_2\}+2\{\psi_3, \varphi_3\}=0. \tag{190}$$

Действительно, рассмотрев, например, сумму членов, содержащих множитель $\partial\varphi_2/\partial p_i$, видим, что

$$-\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i},\ \varphi_1\right\}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}\left\{\varphi_3,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\right\}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i},\ \varphi_1\right\}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i},\ \varphi_3\right\}=0 \quad (191)$$

в силу свойства г) из теоремы.

7. Теорема Пуассона. *Пусть $f(t, q, p)$ и $g(t, q, p)$ — первые интегралы системы канонических уравнений $\dot{q}_i=\partial H/\partial p_i$, $\dot{p}_i=-\partial H/\partial q_i$. Тогда $\{f, g\}$ также первый интеграл этих же уравнений.*

Доказательство. Из теоремы 6 вытекает равенство

$$\frac{d}{dt}\{f, g\}=\frac{\partial\{f, g\}}{\partial t}+\{\{f, g\}, H\}=$$
$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},\ g\right\}+\left\{f,\ \frac{\partial g}{\partial t}\right\}-\{\{g, H\}, f\}-\{\{H, f\}, g\}=$$
$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\{f, H\},\ g\right\}+\left\{\frac{\partial g}{\partial t}+\{g, H\},\ f\right\}=0, \quad (192)$$

так как $\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f, H\}=0$ и $\dot{g}=\frac{\partial g}{\partial t}+\{g, H\}=0$.

Глава 2

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 10. Алгебра Ли векторных полей

1. Определение. Векторное пространство G называется *алгеброй Ли*, если в G задана операция $[x, y]$, $x, y\in G$, которая удовлетворяет следующим свойствам: а) $[x, y]$ — билинейная функция; б) $[x, y]=-[y, x]$; в) выполнено тождество Якоби $[[x, y], z]+[[y, z], x]+[[z, x], y]=0$.

2. Определение. Пусть G — конечномерная алгебра Ли, а $e_1, \ldots, e_n$ — ее базис. Тогда $[e_i, e_j]=C^k_{ij}e_k$. Набор C^k_{ij} является тензором, который называется *структурным*.

На языке структурного тензора свойство б) из п. 1 перепишется в виде $C^k_{ij}=-C^k_{ji}$, а в) — в виде

$$C^b_{p[i}C^p_{jk]}=\frac{1}{3}(C^b_{pk}C^p_{ij}+C^b_{pi}C^p_{jk}+C^b_{pj}C^p_{ki})=0. \quad (193)$$

Пусть G — алгебра Ли. Не все подпространства в G равноценны, выделяются специальные подпространства.

3. Определение. Подпространство H в алгебре Ли G называется *подалгеброй*, если $[x, y]\in H$ для любых $x, y\in H$.

Подалгебра K в алгебре Ли G называется *идеалом*, если $[x, y] \in K$ для любых $x \in K$, $y \in G$.

4. Определение. Алгебра Ли G называется *коммутативной* (или *абелевой*), если $[x, y]=0$ для любых ее элементов $x, y \in G$. Если G — коммутативная алгебра Ли, то любое ее подпространство является подалгеброй и идеалом. В любой алгебре Ли произвольная прямая является подалгеброй.

5. Конструкция. Если K — идеал в алгебре Ли G, то в факторпространстве G/K определена структура алгебры Ли: $\alpha(x+K)+\beta(y+K)=\alpha x+\beta y+K$ и $[x+K, y+K]=[x, y]+K$.

6. Определение. *Гомоморфизм* алгебры Ли G_1 в алгебру Ли G_2 — это такое линейное отображение $f\colon G_1 \to G_2$, что $f[x, y]=[f(x), f(y)]$. Подпространство $\operatorname{Ker} f=\{x \in G_1 \mid f(x)=0\}$ называется *ядром гомоморфизма* f. Ядро любого гомоморфизма является идеалом, и так получается любой идеал.

7. Определение. Пусть G — произвольная алгебра Ли. Определим линейное отображение $\mathrm{ad}_x\colon G \to G$ формулой $\mathrm{ad}_x(y)=[x, y]$. Пространство $Z(G)=\{x \in G \mid \mathrm{ad}_x=0\}$ называется *центром* алгебры Ли G; $Z(G)$ — идеал в G.

8. Пусть G — произвольная алгебра Ли. Определим цепочку идеалов $G \supset G^{(1)} \supset \ldots \supset G^{(i)} \supset \ldots$ формулой $G^{(i)}=\left(G^{(i-1)}\right)^{(1)}$, где $G^{(1)}$ — производная подалгебра, которая является линейной оболочкой коммутаторов $[x, y]$, $x, y \in G$. Для конечномерной алгебры Ли G эта цепочка стабилизируется, т. е. найдется такой номер i, что $G^{(i)}=G^{(i+1)}=\ldots$

9. Определение. Если цепочка производных алгебр Ли $G \supset G^{(1)} \supset \ldots \supset G^{(i)} \supset \ldots$ стабилизируется на нуле, то G называется *разрешимой* алгеброй Ли.

10. Замечание. Если G — разрешимая алгебра Ли и H — подалгебра в G, то H — разрешимая алгебра Ли, так как $G^{(i)} \supset H^{(i)}$.

11. Рассмотрим максимальный по размерности разрешимый идеал в G — он называется *радикалом* алгебры Ли G. Возможно, что радикал J равен нулю. Радикал определен единственным образом, так как если бы существовал разрешимый идеал K, не содержащийся в радикале J, то $K+J$ было бы разрешимым идеалом, строго содержащим J.

12. Определение. Если радикал J алгебры Ли G равен нулю, то G называется *полупростой* алгеброй Ли. Алгебра Ли G называется *редуктивной*, если $G=H \oplus G_1$, где H — абелева алгебра Ли, а G_1 — полупростая алгебра Ли и $[x, y]=0$ для $x \in H$, $y \in G_1$.

13. Определение. Пусть в алгебре Ли G задано скалярное произведение $\langle x, y\rangle$, $x, y \in G$. Говорят, что алгебра Ли G *сохраняет скалярное произведение*, если $\langle \mathrm{ad}_z x, y\rangle+\langle x, \mathrm{ad}_z y\rangle=0$ для всех $x, y, z \in G$.

14. Теорема. *Пусть конечномерная алгебра Ли G сохраняет скалярное произведение. Тогда G редуктивная.*

Доказательство вытекает из следующих четырех лемм.

15. Лемма. *Пусть алгебра Ли G сохраняет скалярное произведение. Тогда если H — идеал в G, то его центр $Z(H)$ содержится в центре $Z(G)$ алгебры Ли G. В частности, всякий абелев идеал содержится в $Z(G)$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in G$, $z \in Z(H)$. Тогда

$$\langle [z, x], [z, x] \rangle + \langle x, [z, [z, x]] \rangle = 0, \tag{194}$$

но $[z, x] = a \in H$, так как $z \in Z(H) \subset H$ и $x \in G$, следовательно, $[z, a] = 0$, поскольку $z \in Z(H)$, $a \in H$. Итак, $\langle [z, x], [z, x] \rangle = 0$. Отсюда $[z, x] = 0$ для любого $x \in G$, т. е. $z \in Z(G)$.

16. Лемма. *Алгебра, сохраняющая скалярное произведение, полупроста тогда и только тогда, когда ее центр $Z(G)$ нулевой.*

Доказательство. Алгебра G полупроста тогда и только тогда, когда G не содержит разрешимых идеалов, что эквивалентно тому, что G не содержит коммутативных идеалов. Поэтому необходимость условия $Z(G) = 0$ очевидна.

Достаточность. Если $Z(G) = 0$ и $H \subset G$ — разрешимый идеал, то существует коммутативный идеал $K \subset G$, $K \neq 0$. В силу леммы 15 имеем включение $K \subset Z(G) = 0$, поэтому $K = 0$, полученное противоречие доказывает лемму.

17. Лемма. *Если G — конечномерная алгебра Ли, сохраняющая скалярное произведение, то производная алгебра Ли $G^{(1)}$ полупроста.*

Доказательство. Алгебра $G^{(1)}$ сохраняет скалярное произведение, поэтому достаточно доказать, что $Z(G^{(1)}) = 0$. Пусть $h \in Z(G^{(1)})$. Тогда $h \in Z(G)$ в силу леммы 15. Для любых $x, y \in G$ имеем $\langle [x, y], h \rangle + \langle y, [x, h] \rangle = 0$, следовательно, $\langle [x, y], h \rangle = 0$, так как $x \in G$, $h \in Z(G)$ и $[x, h] = 0$. Итак, $h \perp G^{(1)}$ и $h \in G^{(1)}$, следовательно, $\langle h, h \rangle = 0$, поэтому $h = 0$.

18. Лемма. *Пусть конечномерная алгебра Ли G сохраняет скалярное произведение. Тогда справедливо утверждение теоремы* 14.

Доказательство. Пусть H — ортогональное дополнение к $G^{(1)}$ в G. Тогда H — идеал в G. Действительно, для $h \in H$ имеем $\langle [v, h], [x, y] \rangle + \langle h, [v, [x, y]] \rangle = 0$, так как $\langle h, [v, [x, y]] \rangle = 0$, $x, y \in G$. Итак, $[v, h] \in H = (G^{(1)})^{\perp}$. Поскольку H — идеал, то $[H, H] \subset H \cap G^{(1)} = 0$, т. е. H — абелев идеал. Пусть $v \in H$, $y \in G^{(1)}$. Тогда $\langle [v, y], [v, y] \rangle + \langle y, [v, [v, y]] \rangle = 0$, следовательно, $[v, y] = 0$. По предыдущей лемме (17) $G^{(1)}$ — полупростая алгебра Ли и, следовательно, G — редуктивная алгебра Ли.

19. Замечание. Теперь после напоминания нужных нам понятий из теории алгебр Ли приведем основные понятия, связанные с геометрией векторных полей на многообразиях.

20. Определение. Пусть X — векторное поле на многообразии M. Кривая $x(t)$ называется *интегральной кривой* поля X, если для любого t_0 вектор $X_{x(t_0)}$ касается кривой $x(t)$ в точке $x(t_0)$, т. е. $X_{x(t_0)}=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} x(t)$.

Из основных теорем для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, что для любой точки $p_0 \in M$ найдется такое $\varepsilon>0$, что для $|t|<\varepsilon$ определена единственная интегральная кривая $x(t)$ поля X такая, что $x(0)=p_0$.

21. Определение. *Однопараметрическая группа диффеоморфизмов* многообразия M — это такое гладкое отображение $F\colon \mathbf{R}\times M \to M$, что: а) $\varphi_0(x)=x$, $x\in M$; б) $\varphi_{t_1+t_2}=\varphi_{t_1}\circ\varphi_{t_2}$, где $\varphi_t(x)=F(t, x)$.

Из определения вытекает, что φ_t — диффеоморфизм многообразия M.

Отображение φ_t определяет гладкое векторное поле X на M по формуле $X_p=\varphi_* \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(0,\,p)}=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\varphi_t(p)$ — это касательный вектор к кривой $x(t)=\varphi_t(p)$, называемой *орбитой точки* p (рис. 12).

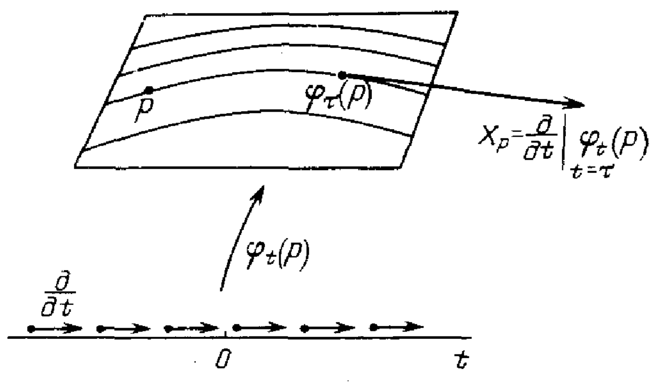


Рис. 12

22. Лемма. *Орбита $\varphi_t(p)$ есть интегральная кривая поля X.*

23. Определение. Гладкое отображение F: $(-\varepsilon, \varepsilon)\times U \to M$, где U — открытое множество в многообразии M, называется *локальной однопараметрической группой* преобразований, если отображение F удовлетворяет следующим условиям: а) для любого $|t|<\varepsilon$ отображение $\varphi_t(p)=F(t, p)$ является диффеоморфизмом множества U на открытое множество $\varphi_t(U)$, причем $\varphi_0=\mathrm{id}$; б) для любых t, s, p таких, что t, s, $t+s\in(-\varepsilon, \varepsilon)$, p, $\varphi_s(p)\in U$, выполняется следующее равенство: $\varphi_{t+s}(p)=\varphi_t(\varphi_s(p))$.

Так же, как в п. 21, локальная однопараметрическая группа преобразований (диффеоморфизмов) индуцирует векторное поле X, определенное на U.

Справедливо обратное утверждение.

24. Предложение. *Пусть X — векторное поле на многообразии M. Для произвольной точки $p \in M$ существуют окрестность U точки p, положительное число ε и локальная однопараметрическая группа преобразований φ_t: $U \to M$, $t \in \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, которая индуцирует заданное поле X.*

Доказательство. Пусть $x^1, \ldots x^n$ — локальная система координат в окрестности W точки p. Пусть $X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$ в W. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{df^i}{dt} = \xi^i(f^1(t), \ldots, f^n(t))$, $i = 1, \ldots, n$, с неизвестными функциями $f^1, \ldots, f^n$. Пусть $f^i(t, u)$ — такое решение этой системы, определенное для $|x^j(q) - x^j(p)| < \delta$ и $|t| < \varepsilon$, что $f^i(0, x) = x^i$. Положим $\varphi_t(u) = (f^1(t, u), \ldots, f^n(t, u))$ для $|t| < \varepsilon$ в $U = \{q \mid |x^j(q) - x^j(p)| < \varepsilon\}$. Это искомая локальная однопараметрическая группа.

25. Определение. В условиях предложения 24 будем говорить, что поле X *порождает локальную однопараметрическую группу* преобразований φ_t в окрестности точки p. Если существует глобальная однопараметрическая группа преобразований многообразия M, которая порождает X, то поле X называется *полным*.

26. Предложение. *На компактном многообразии каждое векторное поле полное.*

27. Предложение. *Пусть φ: $M \to M$ — диффеоморфизм многообразия M. Если векторное поле X порождает лакальную однопараметрическую группу преобразований φ_t, то векторное поле $\varphi_* X$ порождает группу $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$.*

Доказательство. Ясно, что $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$ — локальная однопараметрическая группа преобразований. Покажем, что она индуцирует векторное поле $\varphi_* X$. Поскольку φ_t порождает X, то $X_{\varphi^{-1}(p)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(\varphi^{-1}(p))$, поэтому в силу определения $\varphi_* X$ имеем

$$(\varphi_* X)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(\varphi_t(\varphi^{-1}(p))), \tag{195}$$

т. е. $\varphi(\varphi_t(\varphi^{-1}(p)))$ порождает $\varphi_* X$.

28. Следствие. *Векторное поле X инвариантно относительно диффеоморфизма φ (т. е. $\varphi_* X = X$) тогда и только тогда, когда диффеоморфизм φ перестановочен с группой φ_t, т. е. $\varphi\varphi_t = \varphi_t\varphi$.*

Доказательство. В силу п. 27 имеем $(\varphi_* X)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi \circ \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}(p)$. Поэтому если поле инвариантно, то

$(\varphi_* X)_p = X_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(p)$, так как φ_t порождает X, т. е. векторное поле $\varphi_* X = X$ порождается двумя однопараметрическими группами $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}$ и φ_t и в силу теоремы единственности решений дифференциальных уравнений они совпадают, т. е. $\varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1} = \varphi_t$. Обратно, пусть это равенство имеет место. Тогда

$$(\varphi_* X)_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi \circ \varphi_t \circ \varphi^{-1}(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(p) = X_p, \tag{196}$$

так как X порождает φ_t.

29. Определение. Напомним определение *коммутатора* векторных полей. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — локальная система координат на многообразии M, а $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ — два векторных поля. Тогда формула $Z = [X, Y] = XY - YX$,

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \tag{197}$$

определяет некоторое векторное поле на M, которое называется коммутатором полей X, Y.

30. Лемма. *Пусть* $\varphi\colon M \to N$ — *диффеоморфизм. Тогда* $\varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$.

31. Теорема. *Пусть X, Y — векторные поля на M. Если X порождает локальную однопараметрическую группу преобразований φ_t, то*

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[Y - (\varphi_t)_* Y\right]. \tag{198}$$

Доказательство. Пусть f — произвольная гладкая функция на M. Очевидно, что

$$f(\varphi_t(a)) = f(a) + \int_0^1 \frac{d(f(\varphi_{ts}(a) - f(a)))}{ds}\, ds. \tag{199}$$

Вычисляя производную под знаком интеграла, получим равенство $f(\varphi_t(a)) = f(a) + t\alpha_t(a)$, где

$$\alpha_t(a) = \int_0^1 \left.\frac{df(\varphi_\tau(a))}{d\tau}\right|_{\tau = ts} ds. \tag{200}$$

Ясно, что

$$\alpha_0(a)=\int_0^1 \frac{df(\varphi_\tau(a))}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} ds=\frac{df(\varphi_\tau(a))}{d\tau}\bigg|_{\tau=0}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_a \frac{dx^i(\varphi_\tau(a))}{d\tau}\bigg|_{\tau=0}=X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_a=$$

$$=X_a f. \quad (201)$$

Имеем равенство

$$((\varphi_t)_* Y)_a f=Y_{\varphi_t^{-1}(a)}(f\circ\varphi_t)=(Yf)_{\varphi_t^{-1}(a)}+tY(\alpha_t)_{\varphi_t^{-1}(a)} \quad (202)$$

и, следовательно,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y-(\varphi_t)_* Y]_a f=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(Yf)_a-(Yf)_{\varphi_t^{-1}(a)}]=\lim_{t\to 0}(Y\alpha_t)_{\varphi_t^{-1}(a)}=$$

$$=X_a(Yf)-Y_a(\alpha_0)=X_a(Yf)-Y_a(Xf)=[X,\ Y]_a f, \quad (203)$$

так как $\alpha_0=Xf$ и

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(a)-f(\varphi_t^{-1}(a))]=X_a(f). \quad (204)$$

32. Следствие. *В обозначениях предыдущей теоремы имеем*

$$(\varphi_s)_*[X,\ Y]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\varphi_s)_* Y-(\varphi_{s+t})_* Y] \quad (205)$$

для любого s.

Доказательство. В силу леммы 30 имеем $(\varphi_s)_*[X,\ Y]=[(\varphi_s)_* X, (\varphi_s)_* Y]$. Далее $[(\varphi_s)_* X, (\varphi_s)_* Y]=[X, (\varphi_s)_* Y]$, так как $(\varphi_s)_* X=X$ в силу следствия 28. Теперь, применив предыдущую теорему 31 к векторному полю $(\varphi_s)_* Y$, получим

$$[X, (\varphi_s)_* Y]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\varphi_s)_* Y-(\varphi_t)_*\circ(\varphi_s)_* Y]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\varphi_s)_* Y-(\varphi_{s+t})_* Y]. \quad (206)$$

33. Замечание. Предыдущее следствие 32 можно записать в виде равенства

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=s}(\varphi_t)_* Y=-(\varphi_s)_*[X,\ Y], \quad (207)$$

так как $-\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}(\varphi_t)_* Y=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\varphi_s)_* Y-(\varphi_{s+t})_* Y]$.

34. Предложение. *Пусть векторные поля X и Y порождают локальные однопараметрические группы φ_t и ψ_s соответственно. Тогда $\varphi_t\psi_s=\psi_s\varphi_t$ для всех t, s тогда и только тогда, когда $[X, Y]=0$.*

Доказательство. Если $\varphi_t\psi_s=\psi_s\varphi_t$, то $Y=(\varphi_t)_*Y$ в силу п. 28. Тогда по теореме 31 имеем

$$[X, Y]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y-(\varphi_t)_*Y]=0. \tag{208}$$

Пусть теперь $[X, Y]=0$. Тогда в силу п. 33 имеем $\frac{d}{dt}(\varphi_t)_*Y=0$ для всех t. Поэтому $(\varphi_t)_*Y$ есть постоянный вектор в каждой точке a, и, следовательно, он совпадает с $(\varphi_t)_*Y|_{t=0}=(\varphi_0)_*Y=Y$. Итак, поле Y инвариантно относительно каждого диффеоморфизма φ_t. Поэтому ψ_s коммутирует с каждым отображением φ_t, см. п. 28.

35. Предложение. *Коммутатор векторных полей превращает линейное пространство всех гладких векторных полей на многообразии M в алгебру Ли, которую будем обозначать $D(M)$. Каждый диффеоморфизм f: $M\to N$ индуцирует гомоморфизм f_*: $D(M)\to D(N)$ алгебры Ли $D(M)$ в алгебру Ли $D(N)$.*

Доказательство. Единственное, что надо проверить,— это тождество Якоби, которое получается прямым вычислением.

§ 11. Теорема Якоби

1. Определение. Пусть дано нелинейное уравнение первого порядка в частных производных

$$F\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0. \tag{209}$$

Функция $z=\varphi(x_1, \ldots, x_n, C_1, \ldots, C_n)$, зависящая от постоянных $C_1, \ldots, C_n$, называется *полным интегралом* уравнения (209), если эта функция является решением уравнения (209) и

$$\frac{D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_n)}\neq 0. \tag{210}$$

2. Замечание. Общее решение уравнения в частных производных зависит от нескольких произвольных функций. Поэтому полный интеграл уравнения (209) отнюдь не является общим решением. Полный интеграл по сравнению с общим решением охватывает только небольшую «горстку» решений уравнения (209).

3. Теорема Якоби. *Пусть* $z=\varphi(x_1, ..., x_n, h, C_1, ..., C_{n-1})+C_n$ — *полный интеграл уравнения в частных производных*

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ ..., \ \frac{\partial z}{\partial x_n}, \ x_1, \ ..., \ x_n\right)=h. \tag{211}$$

Тогда уравнения движения канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F(p_1, ..., p_n, x_1, ..., x_n)}{\partial p_i},\\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial F(p_1, ..., p_n, x_1, ..., x_n)}{\partial x_i},\end{gathered} \tag{212}$$

$i=1, 2, ..., n$, *можно записать в виде*

$$p_i=\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial C_s}=b_s, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial h}=t+\tau, \tag{213}$$

$i=1, 2, ..., n$, $s=1, 2, ..., n-1$, *и* b_s, τ — *произвольные константы*.

Доказательство. Покажем сначала, что уравнения (213) разрешимы как относительно $x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n$, так и относительно $2n$ постоянных $C_1, C_2, ..., C_{n-1}, b_1, b_2, ..., b_{n-1}, h, \tau$. Действительно, уравнения $\partial\varphi/\partial C_s=b_s$, $s=1, 2, ..., n-1$, разрешимы относительно $x_1, ..., x_{n-1}$, так как определитель

$$\frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial C_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial C_2}, ..., \frac{\partial \varphi}{\partial C_{n-1}}\right)}{D(x_1, x_2, ..., x_{n-1})}=\frac{D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}\right)}{D(C_1, C_2, ..., C_{n-1})} \tag{214}$$

отличен от нуля в силу определения полного интеграла, см. п. 1. Итак, $x_s=\varphi_s(x_n, C_s, b_s, h)$, $s=1, ..., n-1$. Подставив найденные значения в уравнение $\partial\varphi/\partial h=t+\tau$, получим соотношение $\Pi(x_n, C_s, b_s, h)=t+\tau$, $s=1, ..., n-1$. Разрешив это уравнение относительно x_n, подставив полученное значение в выражение $x_s=\varphi_s(x_n, C_1, ..., C_{n-1}, b_1, ..., b_{n-1}, h)$, а затем подставив эти соотношения в уравнения $p_i=\partial\varphi/\partial x_i$, получим решение системы (213) относительно x_i и p_i:

$$\begin{gathered}x_i=X_i(t+\tau, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, b_1, ..., b_{n-1}, h),\\ p_i=P_i(t+\tau, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, b_1, ..., b_{n-1}, h).\end{gathered} \tag{215}$$

Уравнения (213) разрешимы относительно $2n$ постоянных. Для этого достаточно показать, что уравнения $p_i=\partial\varphi/\partial x_i$,

$i=1, 2, ..., n$, разрешимы относительно $C_1, C_2, ..., C_{n-1}, h$. Это имеет место в силу того, что определитель

$$\frac{D(p_1, p_2, ..., p_n)}{D(C_1, C_2, ..., C_{n-1}, h)} \tag{216}$$

отличен от нуля. Таким образом, решив систему (213) относительно $2n$ постоянных, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} C_s &= A_s(x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n), \\ b_s &= B_s(x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n), \\ h &= F(x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n), \\ \tau &= T(x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n) - t. \end{aligned} \tag{217}$$

Покажем, что (215) дает общий интеграл, а уравнение (217) — совокупность $2n$ различных интегралов канонической системы (212). Подставив выражения (215) в уравнение (213), получим тождества, дифференцируя которые, найдем новые соотношения

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \tag{218}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial C_s \partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = 0, \tag{219}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial h \partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = 1, \tag{220}$$

$i=1, ..., n$, $s=1, ..., n-1$. Функция $z=\varphi$ является полным интегралом уравнения (211) с частными производными, следовательно, заменив в нем p_i на $p_i = \partial\varphi/\partial x_i$, получим тождество $F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, x_1, x_2, ..., x_n\right) = h$. Дифференцируя это тождество по x_i, C_s, h, получим новые тождества

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \tag{221}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial C_s} = 0, \tag{222}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial h} = 1, \tag{223}$$

$i=1, ..., n$, $s=1, ..., n-1$. Вычитая (219) и (220) из (222) и (223), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{dx_k}{dt}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial C_s} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{dx_k}{dt}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial h} = 0. \tag{224}$$

Получили систему n линейных однородных уравнений, ее определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial C_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial C_1} & \dots & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial C_1} \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial C_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial C_2} & \dots & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial C_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial h} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial h} & \dots & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial h} \end{vmatrix} = \frac{D\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{D(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, h)} \tag{225}$$

отличен от нуля, и, следовательно, $\dfrac{\partial F}{\partial p_k} - \dfrac{dx_k}{dt} \equiv 0$, $k=1, \dots, n$. Складывая (218) и (221) и принимая во внимание последние тождества, получим, что $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} + \dfrac{dp_i}{dt}$ тождественно обращается в нуль ($i=1, \dots, n$).

4. Замечание. В п. 5 § 8 мы получили уравнение Гамильтона — Якоби. Теперь мы видим, что, найдя полный интеграл этого уравнения, мы можем проинтегрировать систему канонических уравнений.

Отметим, что если $S(t, q_i, \alpha_i)$ — полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, то уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial q_i}(t, q_i, \alpha_i) = p_i, \\ &\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}(t, q_i, \alpha_i) = \beta_i \end{aligned} \tag{226}$$

в пространстве $V = \mathbf{R}^n(p) \times \mathbf{R}^n(q) \times \mathbf{R}^n(t)$ задают одномерное подмногообразие, поскольку матрица Якоби этой системы имеет вид

$$J = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial q_j} \\ \hline 0 & \dfrac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial \alpha_j} \end{array} \right\| \tag{227}$$

и $\det J = \det(\partial^2 S/\partial q_i \partial\alpha_j) \neq 0$ и $\operatorname{rk} J = 2n$, и по теореме о неявных функциях M — гладкое одномерное подмногообразие в V (рис. 13).

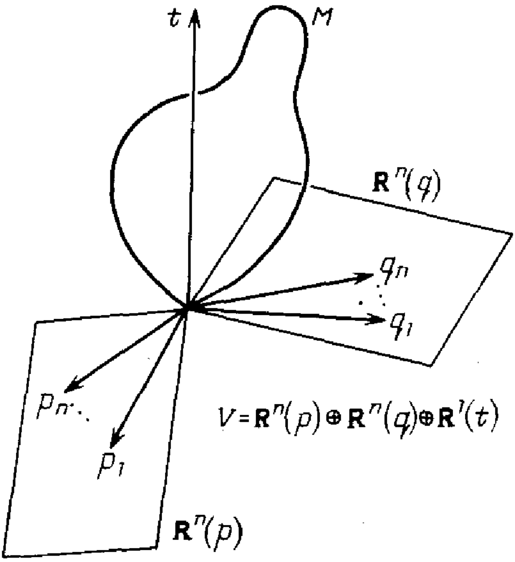


Рис. 13

Имеются три важных случая, когда можно найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, см. пп. 5—7.

5. Пусть функция H не зависит явно от t, т. е. $\partial H/\partial t\equiv 0$. Тогда задача отыскания полного интеграла уравнения $\dfrac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, \dfrac{\partial S}{\partial q}, \alpha\right)=0$ эквивалентна задаче отыскания полного интеграла уравнения $H\left(\dfrac{\partial W}{\partial q}, q\right)=h$, если искать S в виде $S=-ht+W(q)$, $q=(q_1, \ldots, q_n)$.

6. Пусть $\partial H/\partial q_n=0$. Тогда полный интеграл S уравнения Гамильтона — Якоби ищем в виде $S=\alpha_n q_n+W(t, q_1, \ldots, q_n)$.

7. Разделение переменных. Пусть

$$H=G\left(f_1(q_1, p_1), \ldots, f_n(q_n, p_n)\right), \tag{228}$$

и предположим, что $\dfrac{\partial f_i}{\partial p_i}\neq 0$, т. е. в этом случае в выражении для функции H переменные разделились, в каждую функцию входит только одна пара сопряженных переменных q_i, p_i. Уравнение Гамильтона — Якоби перепишется в следующем виде:

$$G\left(f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), \ldots, f_n\left(q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right)=h. \tag{229}$$

Положим $f_i\left(q_i, \dfrac{\partial V}{\partial q_i}\right)=\alpha_i$, $i=1, \ldots, n$, где α_i — произвольные постоянные. Тогда постоянную h можно выразить через постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, т. е. $h=G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Из предположения $\partial f_i/\partial p_i\neq 0$ следует, что соотношение $f_i\left(q_i, \dfrac{\partial V}{\partial q_i}\right)=\alpha_i$ можно разрешить и получить $\dfrac{\partial V}{\partial q_i}=F_i(q_i, \alpha_i)$, $i=1, \ldots, n$. Тогда $V=\sum\limits_{i=1}^{n}\int F_i(q_i, \alpha_i)\,dq_i$, и поэтому для действия S получим

$$S=-G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,t+\sum_{i=1}^{n}\int F_i(q_i, \alpha_i)\,dq_i. \tag{230}$$

Покажем, что формула (230) определяет полный интеграл. Имеем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} = \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} = 0 \tag{231}$$

при $i \neq k$ и $\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \, \partial \alpha_k} \right\| = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_i} \neq 0$, так как по правилу дифференцирования обратной функции имеем $\partial F_i / \partial \alpha_i = (\partial f_i / \partial p_i)^{-1} \neq 0$.

§ 12. Теорема Лиувилля

1. Теорема Лиувилля. *Предположим, что канонические уравнения*

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{232}$$

обладают n независимыми первыми интегралами $F_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, $j = 1, \ldots, n$, которые находятся в инволюции и которые можно разрешить относительно переменных $p_1, \ldots, p_n$. Тогда уравнения (232) *интегрируются в квадратурах.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая

2. Лемма. *Пусть задана каноническая система уравнений* (232), *которая обладает n функционально независимыми первыми интегралами $F_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, находящимися попарно в инволюции, т. е. $\{F_i, F_j\} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предположим, что*

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(p_1, \ldots, p_n)} \neq 0. \tag{233}$$

Тогда система уравнений $F_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \alpha_j$ может быть разрешена относительно $p_j = f_j(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Утверждается, что $\{p_k - f_k, \ p_l - f_l\} \equiv 0$.

Доказательство. Имеем тождество

$$F_k(q_1, \ldots, q_n, \ p_1(q_1, \ldots, q_n, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ \ldots \\ \ldots, \ p_n(q_1, \ldots, q_n, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \equiv \alpha_k. \tag{234}$$

Вычислив производную по q_s, получим $\frac{\partial F_k}{\partial q_s} + \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\gamma} \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_s} \equiv 0$ или $\frac{\partial F_k}{\partial q_s} = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\gamma} \frac{\partial (p_\gamma - f_\gamma)}{\partial q_s}$, так как $\partial p_\gamma / \partial q_s \equiv 0$. Принимая во внимание, что $\partial f_\gamma/\partial p_s \equiv 0$, тождество $\partial F_k/\partial p_s \equiv \partial F_k/\partial p_s$ можно переписать в виде

$$\frac{\partial F_k}{\partial p_s} = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\gamma} \frac{\partial (p_\gamma - f_\gamma)}{\partial p_s}. \tag{235}$$

В результате имеем равенство

$$\frac{\partial F_k}{\partial q_s} \frac{\partial F_l}{\partial p_s} = \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\gamma} \frac{\partial F_l}{\partial p_\delta} \frac{\partial (p_\gamma - f_\gamma)}{\partial q_s} \frac{\partial (p_\delta - f_\delta)}{\partial p_s}. \tag{236}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial F_s}{\partial q_s} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} = \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\gamma} \frac{\partial F_l}{\partial p_\delta} \frac{\partial (p_\gamma - f_\gamma)}{\partial p_s} \frac{\partial (p_\delta - f_\delta)}{\partial q_s}. \tag{237}$$

Отсюда

$$\{F_k, F_l\} = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial F_k}{\partial q_s} \frac{\partial F_l}{\partial p_s} - \frac{\partial F_l}{\partial q_s} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} \right) =$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\gamma} \frac{\partial F_l}{\partial p_\delta} \{ p_\gamma - f_\gamma, \ p_\delta - f_\delta \}. \tag{238}$$

Введем обозначение $z_\gamma^{(l)} = \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial p_\delta} \{ p_l - f_l, \ p_\delta - f_\delta \}$. Тогда

$$\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\gamma} z_\gamma^{(l)} = 0, \tag{239}$$

$k, l = 1, \ldots, n$. Соотношения (239) представляют собой n^2 тождеств, которые можно разбить на n систем однородных линейных уравнений порядка n относительно переменных $z_\gamma^{(l)}$ (с фиксированным значением l) и с отличным от нуля определителем (233). Следовательно, каждая такая система имеет только тривиальное решение

$$z_\gamma^{(l)} = \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial p_\delta} \{ p_\gamma - f_\gamma, \ p_\delta - f_\delta \} = 0, \tag{240}$$

$\gamma, l = 1, \ldots, n$. Эти n^2 тождеств снова распадаются на n систем однородных линейных уравнений порядка n относительно переменных $\{ p_\gamma - f_\gamma, \ p_\delta - f_\delta \}$ (с фиксированным индексом δ) с отличным от нуля определителем (233). Поэтому $\{ p_\gamma - f_\gamma, \ p_\delta - f_\delta \} \equiv 0$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Пусть $p_j = f_j(q, \alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_n)$, $j = 1, \ldots, n$,— решения системы

$$\begin{aligned} F_1(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) &= \alpha_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) &= \alpha_n. \end{aligned} \tag{241}$$

Тогда по лемме $\{p_k - f_k,\ p_l - f_l\} \equiv 0$ и, следовательно, $\partial f_k / \partial q_l = \partial f_l / \partial q_k$, $k = 1, \ldots, n$, так как $\{f_k, f_l\} \equiv 0$, $\{p_k, p_l\} \equiv 0$ и $\{p_k, f\} = \partial f / \partial q_k$. Поэтому дифференциальная форма $\omega = f_1 dq_1 + \ldots + f_n dq_n$ является точной, т. е. $\sum_{j=1}^{n} f_j dq_j = dW$. Поэтому $p_j = f_j = \partial W / \partial q_j$. Подставляя это выражение в первый интеграл $F_1 = H = \alpha_1$, получим уравнение

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1. \tag{242}$$

Итак, W удовлетворяет уравнению (242) первого порядка в частных производных. Покажем теперь, что W будет полным интегралом уравнения (242), т. е. выполняется неравенство $\det \| \partial^2 W / \partial q_k \partial \alpha_l \| \neq 0$, которое в силу равенства $f_k = \partial W / \partial q_k$ можно переписать в виде

$$J = \det \left\| \frac{\partial f_k}{\partial \alpha_l} \right\| = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \neq 0. \tag{243}$$

Для доказательства неравенства (243) рассмотрим тождество

$$F_j(q_1, \ldots, q_n, f_1, \ldots, f_n) \equiv \alpha_j \tag{244}$$

и очевидное соотношение $\dfrac{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = 1$. Подставляя в это соотношение вместо $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ левые части тождеств (244), получим

$$1 = \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(p_1, \ldots, p_n)} \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}. \tag{245}$$

Отсюда $J \neq 0$. Таким образом, функция

$$W(p) = \int_{\gamma = \gamma(x_0, p)} f_1 dq_1 + \ldots + f_n dq_n, \tag{246}$$

где γ — любой путь, соединяющий начальную точку x_0 с текущей точкой p, является полным интегралом уравнения (242). Поэтому по теореме Якоби остальные n первых интегралов системы (232) можно найти из соотношений

$$-t + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ \ldots, \ \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \beta_n, \tag{247}$$

заменяя в их левых частях все постоянные α_j на соответствующие выражения $\alpha_j = F_j(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, здесь β_j — произвольные постоянные.

4. Замечание. Теорема Лиувилля в настоящее время является одной из общих теорем, постоянно используемых в гамильтоновой геометрии, математической физике. Она лежит в основе исследования интегрируемых систем.

§ 13. Теорема Ли

1. Замечание. Пусть в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ канонической системы $\dot{p}=-\partial H/\partial q$, $\dot{q}=\partial H/\partial p$ заданы n независимых функций: $H=F_1(p, q), \ldots, F_n(p, q)$ таких, что $\{F_i, F_j\}=C^k_{ij}F_k$, $C^k_{ij}=\mathrm{const}$. Тогда линейное пространство C, натянутое на функции $F_1, \ldots, F_n$, будет конечномерной алгеброй Ли, а числа C^k_{ij} будут ее структурным тензором в базисе $F_1, \ldots, F_n$.

2. Теорема. *Предположим, что*: а) *на множестве* $M_a=\{(p, q)\,|\,F_1=a_1, \ldots, F_n=a_n\}$ *функции* $F_1, \ldots, F_n$ *функционально независимы*; б) $\sum\limits_{k=1}^{n} C^k_{ij}a_k=0$ *для всех* $i, j=1, \ldots, n$; в) *алгебра Ли* G *разрешима, причем* $\{F_1, F_i\}=C^1_{1i}F_1$. *Тогда решения системы*

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \tag{248}$$

лежащие на M_a, *можно найти в квадратурах.*

3. Замечание. Множество Π наборов $a=(a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющих условию б) теоремы 2, является линейным подпространством $\Pi\subset\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, размерность которого не меньше $\dim G-\dim G^{(1)}$, где $G^{(1)}$ — производная алгебры Ли G. Поскольку G разрешима, то $\dim\Pi\geqslant 1$.

4. Теорема Ли. *Пусть в области* $\Omega\subset\mathbf{R}^n(x^1, \ldots, x^n)$ *задана система дифференциальных уравнений*

$$\dot{x}^i=f_i(x), \qquad x=(x^1, \ldots, x^n)\in\Omega\subset\mathbf{R}^n \tag{249}$$

и n *линейно независимых векторных полей* $X_1, \ldots, X_n$ *таких, что*: а) $X_1=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$; б) $[X_1, X_i]=\lambda_i X_1$, $\lambda_i=\mathrm{const}$; в) *пространство линейных комбинаций полей* $X_1, \ldots, X_n$ *является разрешимой алгеброй Ли относительно коммутатора* $[X, Y]$ *векторных полей. Тогда уравнение* (249) *интегрируется в квадратурах.*

5. Теорема. *В условиях теоремы* 4 *уравнение* $X_1F=0$ *интегрируется в квадратурах.*

6. Замечание. Доказательство теоремы 2 базируется на теореме 4, а теорема 4 будет получена из теоремы 5. При доказательстве последней будем пользоваться некоторыми фактами из теории систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (линейных).

7. Определение. Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных

$$A_1 f=\sum_{i=1}^{n} a_1^i \frac{\partial f}{\partial x^i}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots \tag{250}$$
$$A_s f=\sum_{i=1}^{n} a_s^i \frac{\partial f}{\partial x^i}=0.$$

Она называется *полной*, если $[A_i, A_j]=\sum_{k=1}^{s} b_{ij}^k A_k$, где b_{ij}^k — некоторые константы.

8. Теорема. *Полная система дифференциальных уравнений (250), где $A_1, \ldots, A_s$ — линейно независимые векторные поля, имеет $n-s$ функционально независимых решений.*

9. Лемма. *Полная система дифференциальных уравнений (250), где $A_1, \ldots, A_s$ — линейно независимые векторные поля, эквивалентна такой полной системе дифференциальных уравнений $X_1 f=0, \ldots, X_s f=0$, что векторные поля $X_1, \ldots, X_s$ линейно независимы, линейно выражаются через $A_1, \ldots, A_s$ и $[X_i, X_j]=0$.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — произвольная система координат в области Ω. Тогда

$$A_i(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x, \qquad a_{ij}\in C^\infty(\Omega). \tag{251}$$

В силу линейной независимости полей $A_1, \ldots, A_s$ матрица $A(x)=\| a_{ij}(x)\|$, $1\leqslant i\leqslant s$, $1\leqslant j\leqslant n$, имеет ранг s. Не теряя общности, предположим, что $\det\| a_{ij}(x)\|\neq 0$, $1\leqslant i\leqslant s$, $1\leqslant j\leqslant s$. Пусть $B(x)=\| b_{ij}(x)\|=A(x)^{-1}$ в некоторой меньшей окрестности и $b_{ij}\in C^\infty(U)$, $U\subset\Omega$, $1\leqslant i$, $j\leqslant s$. Положим $X_i=\sum_{j=1}^{s} b_{ij}A_j$.

Тогда поле X_i имеет вид $X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{j>s} C_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$, где $C_{ij}\in C^\infty(U)$.

Поскольку $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]=0$, то отсюда следует, что поля $X_1, \ldots, X_s$ искомые. Лемма доказана.

10. Лемма. *Пусть $X_1, \ldots, X_s$ — векторные поля на V, линейно независимые в каждой точке $x\in V$ и такие, что $[X_i, X_j]=0$. Тогда для любой точки $a\in V$ в окрестности $U\subset V$ найдется локальная система координат $x^1, \ldots, x^n$, определенная в меньшей окрестности U и такая, что $X_i=\partial/\partial x^i$, $i=1, \ldots, s$.*

Доказательство. Пусть $z^1, \ldots, z^n$ — такая система координат, что векторы $X_1(a), \ldots, X_s(a)$, $\left.\frac{\partial}{\partial z^{s+1}}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial z^n}\right|_a$ линейно независимы. Такая система координат существует: для ее построения достаточно подвергнуть пространство $\mathbf{R}^n$ линейному преобразованию. Обозначим $\varphi^{(i)}$ локальные однопараметрические группы преобразований, порожденные полями X_i, см. п. 23 § 10.

Пусть $t_1, \ldots, t_s, z^{s+1}, \ldots, z^n$ — достаточно малые числа. Определим отображение $h\colon \Omega\to V$, $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n \mid |x|<\delta\}$, равенством

$$h(t_1, \ldots, t_s, z^{s+1}, \ldots, z^n)= \\ =\varphi^{(1)}_{t_1}\circ\ldots\circ\varphi^{(s)}_{t_s}\circ\psi^{-1}(0, \ldots, 0, z^{s+1}, \ldots, z^n), \qquad (252)$$

где ψ — координатный гомеоморфизм, отвечающий координатам $z^1, \ldots, z^n$ ($\psi(a)=0$). По определению имеем равенство $\dfrac{\partial}{\partial t_1}(f\circ h)(0)=X_1(a)f$, так как $\varphi^{(1)}$ индуцирует поле X_1. Поскольку $[X_i, X_j]=0$, то в силу утверждения п. 37 § 10 отображения $\varphi^{(i)}_{t_i}$ коммутируют и, следовательно, $\dfrac{\partial}{\partial t_i}(f\circ h)(0)=X_i(a)f$, $i=1, \ldots, s$, т. е. $h_{*,a}((\partial/\partial t_i)_a)=X_i(a)$. Далее, $h_{*,a}\left(\dfrac{\partial}{\partial z^j}\bigg|_0\right)=\dfrac{\partial}{\partial z^j}\bigg|_a$ при $s<j\leqslant n$. Поэтому отображение $h_{*,0}$ имеет ранг n, и, значит, по теореме об обратной функции отображение h является диффеоморфизмом Ω на открытое множество $U\subset V$, если δ достаточно мало. Система координат (U, h^{-1}) искомая. Лемма доказана.

11. Доказательство теоремы 8 вытекает из леммы 10, так как исходная система после подходящей замены переменных превращается в простейшую $\dfrac{\partial f}{\partial z^1}=0, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial z^s}=0$, для которой утверждение теоремы очевидно.

12. Доказательство теоремы 5. С помощью линейных преобразований заменим систему $X_1, \ldots, X_n$ на систему $Y_1, \ldots, Y_n$ так, чтобы $X_1=Y_1$ и $0\subset\{Y_1\}\subset\{Y_1, Y_2\}\subset\ldots\subset\{Y_1, \ldots, Y_n\}=\{X_1, \ldots, X_n\}=G$, где $\{Y_1, \ldots, Y_i\}$ — подалгебра, порожденная $Y_1, \ldots, Y_i$, причем эта последовательность подалгебр удовлетворяет требованию, что $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ — идеал коразмерности один в $\{Y_1, \ldots, Y_{k+1}\}$. Это всегда можно сделать. Действительно, из разрешимости алгебры G вытекает, что существует ряд $0\subset G_1\subset G_2\subset\ldots\subset G_n\subset G$, обладающий вышеуказанным свойством. Пусть теперь J — идеал алгебры Ли G. Образуем ряд подалгебр

$$0\subset G_1\cap J\subset\ldots\subset G_n\cap J=J\subset J\oplus G_1\subset\ldots\subset J\oplus G_n=G. \qquad (253)$$

Для соседних членов K_i, K_{i+1} этого ряда выполнено одно из двух утверждений: а) либо $K_i=K_{i+1}$; б) либо K_i — идеал коразмерности один в K_{i+1}. Теперь, убирая лишние члены из ряда (253), получим ряд $0\subset L_1\subset\ldots\subset L_n\subset G$, где каждый член имеет либо вид $L_i=G_i\cap J$, либо вид $L_i=G_i\oplus J$. Заметим, что если

$\dim J = 1$, то $L_1 = J$. Поле X_1 порождает идеал алгебры Ли G, применяя к нему приведенную выше конструкцию, получим требуемый ряд.

В этом случае система дифференциальных уравнений $Y_1 f = 0, \ldots, Y_{n-1} f = 0$ является полной и, следовательно, имеется нетривиальное решение $u \neq \mathrm{const}$. Пусть $\varphi(u) = Y_n(u)$. Докажем, что $\varphi(u)$ — решение системы $Y_1 f = 0, \ldots, Y_{n-1} f = 0$. Пусть $i = 1, \ldots, n-1$. Имеем равенства

$$Y_i(Y_n(u)) = [Y_i, Y_n] u + Y_n(Y_i(u)) = \sum_{k=1}^{n-1} C_{in}^k Y_k(u) = 0. \tag{254}$$

В силу линейной независимости векторных полей $Y_1, \ldots, Y_n$ функция $Y_n(u) = \varphi(u)$ отлична от нуля. Положим $u^1 = \int du/\varphi(u)$. Легко проверяется, что u^1 — решение системы $Y_1 f = 0, \ldots$ $\ldots, Y_{n-1} f = 0$, $Y_n f = 1$. Но решение этой системы находится в квадратурах, так как из нее можно найти выражения для производных $\partial f / \partial x^i$, что позволяет найти f по полному дифференциалу $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$. С другой стороны, решения этой системы действительно существуют.

Сделаем замену переменных (в случае необходимости координаты $x^1, \ldots, x^n$ можно перенумеровать): $(x^1, \ldots, x^n) \to (u^1, x^2, \ldots, x^n)$. Тогда $\partial / \partial x^1 = \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial x^1}$, $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^i}$, где $i = 2, \ldots, n$. В переменных $u^1, x^2, \ldots, x^n$ имеем $Y_k(f) = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} b_k^i(u^1, x^2, \ldots$ $\ldots, x^n)$, $k = 1, \ldots, n-1$. Поэтому u^1 можно считать параметром. Решая систему $Y_1 f = 0, \ldots, Y_{n-2}(f) = 0$, $Y_{n-1}(f) = 1$ и продолжая процесс, мы получим все решения уравнения $X_1 f = 0$ в квадратурах. Теорема доказана.

13. Доказательство теоремы 4. Пусть $u_1, \ldots, u_{n-1}$ представляют собой $n-1$ независимое решение уравнения $X_1 F = 0$, полученное методом, описанным при доказательстве теоремы 5. В координатах $u_1, \ldots, u_{n-1}, x^n$ уравнение $X_1 F = 0$ имеет простой вид $X_1 F = \frac{\partial F}{\partial x^n} b_1^n(u_1, \ldots, u_{n-1}, x^n)$. Соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид $\dot u_1 = 0$, $\dot u_2 = 0, \ldots, \dot u_{n-1} = 0$, $\dot x_n = b_1^n(u_1, \ldots, u_{n-1}, x_n)$. Найдем решение, проходящее через точку $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Тогда

$$\begin{gathered} u_1 = u_1(x_0^1, \ldots, x_0^n) = u_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1} = u_{n-1}(x_0^1, \ldots, x_0^n) = u_{n-1}^0, \\ \int \frac{dx^n}{b_1^n(u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0, x^n)} = t. \end{gathered} \tag{255}$$

Подбирая соответствующую константу, получим требуемое решение. С другой стороны, имеем отображение

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x^1, \ldots, x^n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1} &= u_{n-1}(x^1, \ldots, x^n), \\ t &= u_n(x^1, \ldots, x^n) \end{aligned} \tag{256}$$

такое, что $u_n(x_0^1, \ldots, x_0^n)=0$. Отображение (256) является локальным диффеоморфизмом ν: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Обратное отображение задается функциями $x^1=\nu_1^{-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}, t), \ldots, x^n=\nu_n^{-1}(u_1, \ldots$ $\ldots, u_{n-1}, t)$. Решение, проходящее через точку $(x_1^0, \ldots, x_0^n)$, имеет вид $x^1=\nu_1^{-1}(u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0, t), \ldots, x^n=\nu_n^{-1}(u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0, t)$. Теорема доказана.

14. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим n линейно независимых векторных полей $X_1, \ldots, X_n$, определяемых канонической системой уравнений (248). Естественное отображение алгебры Ли G функций $\{F_1, \ldots, F_n\}$ на алгебру Ли D полей $\{X_1, \ldots, X_n\}$ является изоморфизмом, так как линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i$ является константой только при $\lambda_i=0$ в силу функциональной независимости функций $\{F_i\}$.

Векторные поля X_i касаются многообразия M_a, так как $\{F_i, F_j\}\equiv 0$ на M_a по условию. В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ на M_a уравнения (248) будут иметь вид $\dot{x}^k=f^k(x)$, $k=1, \ldots, n$. При этом, очевидно, поле $X_k=\sum_{i=1}^{n} f_i^k \frac{\partial}{\partial x^i}$ удовлетворяет теореме 4. Теорема доказана.

15. Пример. Рассмотрим движение на одной прямой трех точек, взаимодействующих между собой с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними. Эту задачу рассматривали Якоби и Пуанкаре. Пусть m_1, m_2, m_3 — массы точек, а x, y, z — их координаты. Потенциальная энергия этой системы имеет вид

$$U(x, y, z)=\frac{a}{(x-y)^2}+\frac{b}{(x-z)^2}+\frac{c}{(y-z)^2}, \qquad a, b, c=\mathrm{const}. \tag{257}$$

Рассмотрим три функции

$$H=F_1=\frac{p_x^2}{2m_1}+\frac{p_y^2}{2m_2}+\frac{p_z^2}{2m_3}+U(x, y, z), \tag{258}$$

$$F_2=xp_x+yp_y+zp_z, \qquad F_3=p_x+p_y+p_z. \tag{259}$$

Здесь p_x, p_y, p_z — координаты, канонически сопряженные с x, y, z. Ясно, что F_1 — полная энергия системы, $F_2=2^{-1}\frac{d}{dt}(m_1x^2+$

$+m_2y^2+m_3z^2)$, а F_3 — импульс всей системы. Функции F_1, F_2, F_3 функционально независимы, и $\{F_1, F_3\}=0$, $\{F_2, F_3\}=-F_3$, $\{F_1, F_2\}=2F_1$. Соответствующая алгебра Ли G разрешима, так как $G\supset H\supset L\supset\{0\}$, где одномерная подалгебра L порождается функцией F_1, а двумерная подалгебра H порождается функциями F_1, F_3. Подалгебры H и L являются идеалами в G и H соответственно.

Применяя теорему 2, заключаем, что решения этой задачи, лежащие на нулевой поверхности уровня энергии и импульса, можно найти с помощью квадратур. Полученный результат справедлив и для более общего случая, когда потенциальная энергия U зависит только от разностей $x-y$, $x-z$, $y-z$ и является однородной функцией переменных x, y, z степени -2.

§ 14. Дополнительные сведения из теории групп Ли и алгебр Ли

1. Определение. Гладкое многообразие P, на котором введена структура группы, называется *группой Ли*, если отображение $f\colon P\times P\to P$, задаваемое формулой $f(g, h)=g^{-1}h$, является гладким.

Для каждого элемента $g\in P$ группы Ли P определены два диффеоморфизма $R_g\colon P\to P$, $L_g\colon P\to P$, называемые соответственно *правым* и *левым сдвигом* и определяемые равенствами $R_g(x)=xg$ и $L_g(x)=gx$ соответственно, где $x\in P$.

2. Определение. Векторное поле X на группе Ли P называется *левоинвариантным* (соответственно *правоинвариантным*), если $(L_a)_*X=X$ для любого $a\in P$ (соответственно $(R_a)_*X=X$).

Каждое левоинвариантное векторное поле однозначно определяется своим значением в единице $e\in P$ группы Ли P.

3. Лемма. *Пространство левоинвариантных векторных полей на группе Ли является конечномерным линейным подпространством в пространстве всех векторных полей. Его размерность равна размерности группы Ли.* Если X, Y — *левоинвариантные векторные поля, то их коммутатор* $[X, Y]$ — *левоинвариантное векторное поле.*

4. Определение. Алгебра Ли G левоинвариантных векторных полей на группе Ли P называется *алгеброй Ли группы Ли* P.

5. Определение. Гладкое отображение $f\colon \mathbf{R}^1\to P$ называется *однопараметрической подгруппой* в группе Ли P, если: а) $f(a+b)=f(a)f(b)$ для всех $a, b\in\mathbf{R}^1$; б) $f(0)=e$, где e — единица группы Ли P.

6. Лемма. *Каждое левоинвариантное векторное поле на группе Ли* P *является полным. Если* φ_t — *однопараметрическая* *группа диффеоморфизмов, порожденная левоинвариантным полем X, то $\varphi_t(e)$ — однопараметрическая подгруппа. Из этой конструкции получаются все однопараметрические подгруппы.*

7. Определение. Говорят, что группа Ли P *действует на многообразии* M, если задано такое гладкое отображение h: $P\times M\to M$, что: а) $\widehat{g_1g_2}=\hat{g}_1\hat{g}_2$, $g_1, g_2\in P$; б) $\hat{e}=\mathrm{id}$, где $\hat{g}(x)=h(g, x)$ и $\mathrm{id}(x)=x$ — тождественное отображение.

8. Замечание. Имеются естественные биекции между следующими объектами: а) однопараметрические подгруппы в группе Ли P; б) касательные векторы $X\in T_eP$ в единице e группы Ли P; в) левоинвариантные векторные поля на группе Ли P; г) левоинвариантные действия группы $\mathbf{R}^1$ на P.

9. Определение. Все однопараметрические подгруппы группы Ли P можно собрать в одно универсальное отображение $\exp$: $G\to P$, при котором $\exp tX$: $\mathbf{R}^1\to G\to P$ задает однопараметрическую подгруппу с вектором скорости X в единице $e\in P$. Отображение $\exp$ называется *экспоненциальным отображением* группы Ли P (G — алгебра Ли группы Ли P).

10. Определение. Действие группы Ли P на многообразии $\mathbf{R}^n$ называется n-мерным линейным *представлением группы Ли* P, если все диффеоморфизмы $\hat{g}$, определенные в п. 7, являются линейными отображениями $\hat{g}$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$. В этом определении вместо $\mathbf{R}^n$ можно взять любое линейное пространство V.

11. Конструкция. Пусть группа Ли P действует на многообразии M. Тогда определен *касательный гомоморфизм* φ: $G\to D(M)$ алгебры Ли G группы Ли P в алгебру Ли $D(M)$ векторных полей на многообразии M. Он определяется равенством

$$\varphi(X)_a=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\widehat{\exp}\, tX(a). \tag{260}$$

12. Конструкция. Группа Ли P действует на P посредством сопряжения $\hat{g}(x)=gxg^{-1}$, $x\in P$. Это действие называется *присоединенным* и обозначается $i_g(x)=\hat{g}(x)$. Оно индуцирует уже линейное действие группы Ли P на алгебре Ли G, обозначаемое Ad, т. е. $\mathrm{Ad}_g(X)=(d_ei_g)(X)$. Это представление называется *присоединенным представлением группы Ли* P. Дифференциал $\mathrm{ad}=d_e(\mathrm{Ad})$: $G\to\mathrm{Hom}(G)$ называется *присоединенным представлением алгебры Ли* G.

Пусть G^* — пространство, дуальное к G, т. е. пространство всех линейных отображений α: $G\to\mathbf{R}$. Определим *коприсоединенное представление* Ad^* *группы Ли* P равенством $(\mathrm{Ad}^*_g f)(x)=f(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}x)$, где $g\in P$, $x\in G$, $f\in G^*$. Коприсоединенное представление задает отображение Ad^*: $P\to\mathrm{GL}(G^*)$, дифференциал которого в единице $e\in P$ называется *коприсоединенным представлением алгебры Ли* G, т. е. имеем отображение ad^*: $G\to\mathrm{Hom}(G^*)$.

13. Предложение. *Для* $X, Y \in G$ *и* $f \in G^*$ *имеют место следующие равенства*: а) $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$; б) $(\mathrm{ad}_X^* f)(Y) = -f([X, Y])$.

14. Определение. Пусть группа Ли P действует на многообразии M. Множество $O(x_0) = \{\hat{g} x_0 \mid g \in P\}$ называется *орбитой* точки $x_0 \in M$, а $P_{x_0} = \{g \in P \mid \hat{g} x_0 = x_0\}$ — ее *стационарной подгруппой* или *подгруппой изотропии*.

15. Определение. Каждое линейное n-мерное представление (т. е. представление в n-мерном линейном пространстве V) группы Ли P можно рассматривать как отображение ρ: $P \to \mathrm{GL}(V)$, $\rho(g) = \hat{g}$. Пусть имеются два представления ρ_1: $P \to \mathrm{GL}(V_1)$ и ρ_2: $P \to \mathrm{GL}(V_2)$ группы Ли P. Они называются *эквивалентными*, если существует такое невырожденное линейное отображение f: $V_1 \to V_2$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow[\rho_1(g)]{} & V_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_2(g)]{} & V_2 \end{array} \tag{261}$$

коммутативна для всех $g \in P$, т. е. $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$.

16. Предложение. *Если на алгебре Ли G существует такое невырожденное скалярное произведение (x, y), $x, y \in G$, что $(\mathrm{Ad}_g x, \mathrm{Ad}_g y) = (x, y)$, $g \in P$, т. е. все операторы Ad_g являются ортогональными преобразованиями, то присоединенное и коприсоединенное представления группы Ли P эквивалентны, в частности они имеют одинаковые орбиты.*

Доказательство. Скалярное произведение задает изоморфизм f: $G \to G^*$, каждому элементу $x \in G$ отвечает линейный функционал $f_x(y) = (x, y)$. Поскольку

$$f_{\mathrm{Ad}_g x}(y) = (\mathrm{Ad}_g x, y) = (\mathrm{Ad}_g x, \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_{g^{-1}} y) = \\ = (x, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} y) = f_x(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} y) = (\mathrm{Ad}_g^* f_x)(y), \tag{262}$$

то $f_{\mathrm{Ad}_g x} = \mathrm{Ad}_g^* f_x$, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow[\mathrm{Ad}_g]{} & G \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G^* & \xrightarrow[\mathrm{Ad}_g^*]{} & G^* \end{array} \tag{263}$$

коммутативна, что и требовалось доказать.

17. Замечание. Для любой алгебры Ли компактной группы Ли выполнены условия предыдущего предложения 16. Следовательно, для компактных групп Ли представления Ad и Ad* эквивалентны, и поэтому орбиты этих представлений совпадают.

18. Пример. Простейший пример группы Ли, для которой орбиты присоединенного и коприсоединенного представлений различны, дает группа $P=\{x\to ax+b \mid a\neq 0,\ a,\ b,\ x\in \mathbf{R}\}$ аффинных преобразований прямой $\mathbf{R}^1$. Эта группа допускает матричную реализацию

$$P=\left\{\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \;\middle|\; a\neq 0\right\}. \tag{264}$$

Легко проверить, что алгебра Ли G группы Ли P изоморфна следующему пространству матриц

$$G=\left\{\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \;\middle|\; \xi_1,\ \xi_2\in \mathbf{R}\right\} \tag{265}$$

с обычным матричным коммутатором $[A,\ B]=AB-BA$. В G выберем базис $e_1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $e_2=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, а в G^* — сопряженный базис, f_1, f_2, т. е. $f_i(e_j)=\delta_{ij}$. В базисе f_1, f_2 координаты обозначим x_1, x_2. Тогда простые вычисления показывают, что

$$\mathrm{Ad}_a\xi=\begin{Vmatrix} \xi_1 & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{266}$$

$$\mathrm{Ad}_a^*(x_1,\ x_2)=(x_1-x_2a_2,\ x_2a_1), \tag{267}$$

где $a=\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и $\xi=\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. Из этих вычислений легко получить, что орбиты присоединенного представления имеют

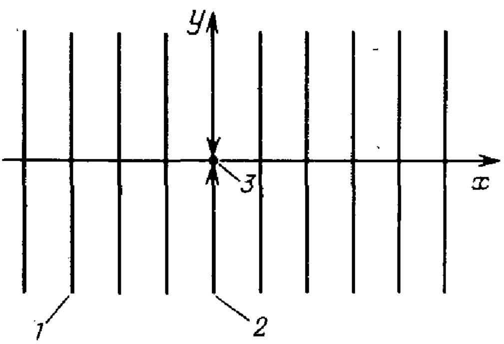


Рис. 14. Орбиты:
1. прямые $\{x=\mathrm{const}\neq 0\}$,
2. $\{x=0,\ y\neq 0\}$,
3. $\{x=0,\ y=0\}$

вид, приведенный на рис. 14, а орбиты коприсоединенного представления — вид, указанный на рис. 15.

19. Определение. Пусть P — группа Ли, отвечающая алгебре Ли G. Функция $f\in C^\infty(G^*)$ называется *инвариантом* (коприсоединенного представления группы Ли P), если для любых $g \in P$, $x \in G^*$ выполняется равенство $f(\mathrm{Ad}^*_g x) = f(x)$, и *полуинвариантом*, если $f(\mathrm{Ad}^*_g x) = \chi(g) f(x)$, где χ — некоторое одномерное представление группы Ли P.

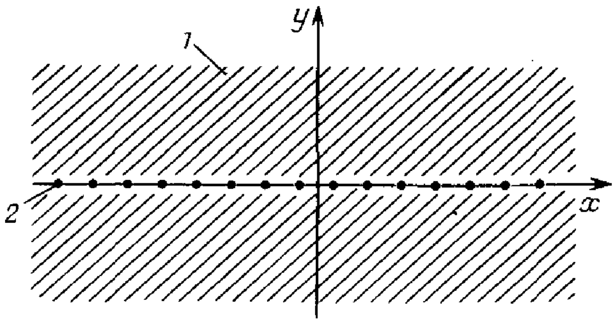


Рис. 15. Орбиты:
1. $\{y \neq 0\}$,
2. отдельные точки на прямой $\{y = 0\}$

20. Конструкция. Коприсоединенное представление Ad^* группы Ли P индуцирует гомоморфизм алгебры Ли G в алгебру Ли $D(G^*)$ векторных полей на G^*, см. п. 11. Опишем его подробнее. Итак, пусть U — открытое подмножество в G^*, а $D(U)$ — пространство векторных полей на U, $D(U)$ — алгебра Ли относительно коммутатора векторных полей, см. п. 35 § 10. Представление φ: $G \to D(U)$ на базисных векторах $e_1, \ldots, e_n$ алгебры Ли G определяется равенством $\varphi(e_i) = X_i = X(e_i) = C^j_{ik} x_j \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $i = 1, \ldots, n$, здесь C^j_{ik} — структурный тензор алгебры Ли G в базисе (e_i), (x_j) — координаты в G^*, соответствующие базису e^j, сопряженному e_i, т. е. $e^j(e_i) = \delta^j_i$. Поскольку используемые здесь операции имеют тензорный характер, то полученное представление не зависит от выбора базиса в G. Векторные поля X_i, как следует из тождества Якоби в G, удовлетворяют соотношению $[X_i, X_j] = C^k_{ij} e_k$. Отсюда вытекает, что φ — гомоморфизм алгебр Ли. Будем говорить, что *оператор X_i отвечает базисному вектору $e_i \in G$.*

21. Лемма. *Для любой функции F на пространстве G^* выполняется равенство*

$$\left.\frac{d^n}{dt^n}\right|_{t=0} F(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f) = [(-\varphi(v))^n F](f). \tag{268}$$

Доказательство. Имеем соотношения

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(f) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} x_i(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f) =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x^i}(f) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\mathrm{Ad}^*_{\exp(-tv)} e_i), \tag{269}$$

так как $x_i(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f) = (\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f)(e_i) = f(\mathrm{Ad}_{\exp(-tv)} e_i)$. В силу того, что f — линейная функция, а дифференциал от Ad есть ad, имеем $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\left(\mathrm{Ad}_{\exp(-tv)} e_i\right) = f\left(-[v, e_i]\right) = -f\left(C^k_{ji} v^j e_k\right) = -C^k_{ji} v^j f_k$.

Итак,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right) = -C^j_{ki} v^k f_j \frac{\partial F}{\partial x^i}(f) = (-\varphi(v) F)(f), \quad (270)$$

т. е. при $n=1$ лемма доказана. В предположении, что лемма при $n<m$ справедлива, получим

$$[(-\varphi(v))^m F](f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [(-\varphi(v))^{m-1} F]\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right) =$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d^{m-1}}{d\tau^{m-1}}\right|_{\tau=0} F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp \tau v} \mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right) =$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d^{m-1}}{d\tau^{m-1}}\right|_{\tau=0} F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp(\tau+t)v} f\right) = \left.\frac{d^m}{ds^m}\right|_{s=0} F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp sv} f\right), \quad s=t+\tau. \quad (271)$$

22. Лемма. *Для любой аналитической функции F на G^* выполняется равенство*

$$F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right) = F(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varphi(v))^n F}{n!}(f)\, t^n. \quad (272)$$

Доказательство вытекает из разложения $F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right)$ в ряд Тейлора с использованием леммы 21.

23. Теорема. *Пусть F — аналитическая функция на G^*. Тогда:* а) *F — инвариант коприсоединенного представления связной группы Ли P (отвечающей алгебре Ли G) в том и только том случае, когда $X_i F = 0$, $i=1, \ldots, n=\dim G$;* б) *F — полуинвариант коприсоединенного представления группы Ли P, отвечающей характеру χ, в том и только том случае, когда $X_i F = -\lambda_i F$, $i=1, \ldots, n=\dim G$, $\lambda_i = d\chi(e_i)$, $d\chi$ — производная χ в единице группы Ли P.*

Доказательство. а) Поскольку $F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right) = F(f)$, то $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right) = 0$, и поэтому в силу леммы 21 при $n=1$ получаем $X_i F = 0$, $i=1, \ldots, n$. Обратно, если $X_i F = 0$, то $\varphi(v) F = 0$, поэтому $[-\varphi(v)]^n F = 0$, и тогда по лемме 22 $F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right) = F(f)$. Поскольку P — связная группа Ли, то $F\left(\mathrm{Ad}^*_g f\right) = F(f)$ для любого $g \in P$.

б) Из равенства $F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right) = \chi(\exp tv) F(f)$ вытекает $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F\left(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \chi(\exp tv) F(f)$, и $[(-\varphi(v)) F](f) =$

$=\chi_*(v)\,F(f)$. Обратно, $[(-\varphi(v))^n]F=[\chi_*(v)]^n F$, следовательно, в силу леммы 22

$$F(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv} f)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\chi_*(v)]^n}{n!}\,t^n\right]F(f), \tag{273}$$

и так как $\chi(\exp tv)=\exp(t\chi_*(v))$, то мы получаем наше утверждение.

24. Итог. Окончательно, для того чтобы найти инварианты, надо решить систему дифференциальных уравнений

$$C^k_{ij}x_k\frac{\partial F}{\partial x_j}=0, \qquad i=1, \ldots, n, \tag{274}$$

а для нахождения полуинвариантов — систему

$$C^k_{ij}x_k\frac{\partial F}{\partial x_j}=\lambda_i F, \qquad i=1, \ldots, n. \tag{275}$$

Методы решения этих систем см., например, в [227], [338].

25. Предложение. *Пусть W — конечномерное подпространство в пространстве аналитических функций на пространстве G^*, дуальном к алгебре Ли G связной группы Ли P. Если $f\in W$, то $\mathrm{Ad}^*_g f\in W((\mathrm{Ad}^*_g f)(x)=f(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}x))$ для любого $g\in P$ тогда и только тогда, когда $X_i f\in W$, $i=1, \ldots, n$.*

Доказательство. Если $f\in W$, то из того, что $f(\mathrm{Ad}^*_g x)\in W$ для любого $g\in P$, следует, что $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv}x)\in W$, так как любое конечномерное подпространство замкнуто и тогда по лемме 21 $X_i f\in W$. Обратно, достаточно проверить, что $f(\mathrm{Ad}^*_g x)\in W$ для $g=\exp tv$, $v\in G$, так как связная группа Ли порождается любой своей окрестностью единицы, а достаточно малая окрестность единицы порождается однопараметрическими подгруппами. Имеем равенство

$$f(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv}x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\varphi(v))^n}{n!}f(x)\,t^n, \tag{276}$$

и так как W замкнуто, то $f(\mathrm{Ad}^*_{\exp tv}x)\in W$.

26. Замечание. Пусть ρ: $P\to GL(V)$ — произвольное конечномерное представление группы Ли P в линейном пространстве V. Функция F называется *инвариантом*, если $F(\rho(g)x)=F(x)$ для всех $g\in P$, $x\in V$. Пусть $d\rho(e_i)f_j=a^k_{ij}f_k$, где f_i — базис V, а e_i — базис алгебры Ли G группы Ли P. Функция F является инвариантом тогда и только тогда, когда

$$a^k_{ij}x_k\frac{\partial F}{\partial x_j}=0, \tag{277}$$

что доказывается так же, как это было сделано в случае $\rho=\mathrm{Ad}^*$.

Отметим более общее утверждение. Если φ_t — локальная однопараметрическая группа на многообразии M, а X — соответствующее векторное поле, то функция $F\in C^\infty(M)$ инвариантна относительно φ_t тогда и только тогда, когда $XF=0$ (см., например, [263]).

27. Определение. Пусть G — алгебра Ли. Билинейная форма $B(x, y)=\operatorname{tr}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y$ называется *формой Киллинга* алгебры Ли G.

28. Теорема. *Алгебра Ли G полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга не вырождена.*

В следующих пунктах мы дадим обзор теории полупростых алгебр Ли над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, доказательства и более подробное изложение можно найти в книгах [65], [81], [263], [279], [293].

29. Подалгебры Картана. Максимальная абелева подалгебра $H\subset G$ в полупростой алгебре Ли G называется *подалгеброй Картана*, если операторы ad_h полупросты для всех $h\in H$, т. е. существует такой базис, в котором ad_h записывается диагональной матрицей. Если $x\in G$ — произвольный элемент, то обозначим $G(x, 0)$ подпространство коммутирующих с x элементов в G. Элемент x называется *регулярным*, если размерность $\dim G(x, 0)$ минимальная. Если $x\in G$ — регулярный элемент, то $G(x, 0)$ — подалгебра Картана в G; эту подалгебру обозначим $H(x)$. Регулярные элементы образуют в G открытое всюду плотное подмножество. Любая подалгебра Картана по определению коммутативна.

30. Корни. Пусть G — полупростая алгебра Ли над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Фиксируем некоторую подалгебру Картана H. Линейная форма $\alpha(h)$ на H называется *корнем*, если существует такой элемент $E_\alpha\in G$, $E_\alpha\neq 0$, что $[h, E_\alpha]=\alpha(h)E_\alpha$ для любого $h\in H$. Пусть G^α — собственное подпространство, отвечающее α. Тогда

$$G=H\oplus\sum_{\alpha\neq 0} G^\alpha, \tag{278}$$

знак $\oplus$ означает прямую сумму линейных пространств. В полупростой алгебре Ли G все подпространства G^α одномерны при $\alpha\neq 0$ (над полем $\mathbf{C}$). Разложение (278) называется *корневым разложением* полупростой алгебры Ли G относительно подалгебры Картана H.

31. Свойства корней. Имеет место включение $[G^\alpha, G^\beta]\subset G^{\alpha+\beta}$, т. е. $[E_\alpha, E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$. Если $\alpha+\beta\neq 0$, то E_α и E_β ортогональны относительно формы Киллинга $B(x, y)$. Векторы E_α и $E_{-\alpha}$, напротив, неортогональны. Ограничение формы $B(x, y)$ на H не вырождено. Если $r=\dim_{\mathbf{C}} H$, то существует r линейно независимых корней алгебры Ли G относительно H. Число r называется *рангом* G. Полное семейство корней, вообще говоря, линейно зависимо. Если α, β, $\alpha+\beta$ — корни, не равные нулю, то $[G^{\alpha}, G^{\beta}]=G^{\alpha+\beta}$; единственные корни, пропорциональные корню α,— это 0, $\pm\alpha$. Корень α можно представить вектором $h'_{\alpha}\in H$; поскольку $B(x, y)$ не вырождена на H, то для каждого $\alpha\in H^*$ существует единственный элемент $h'_{\alpha}\in H$ такой, что $\alpha(h)=B(h, h'_{\alpha})$ для всех $h\in H$. Тогда если $\alpha\neq 0$, то $[x, E_{\alpha}]=B(E_{\alpha}, x)E_{\alpha}$ для $x\in H$ и $B(\alpha, \alpha)\neq 0$. Обозначим H_0 подпространство в H, порожденное всеми векторами h'_{α} с рациональными коэффициентами, H_0 является «вещественной» частью H. Оказывается, что $\dim_{\mathbf{Q}} H_0=\dim_{\mathbf{C}} H=\frac{1}{2}\dim_{\mathbf{R}} H$ (здесь $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел). Далее, ограничение на H_0 формы $B(h, h')$ положительно определено и принимает рациональные значения, $h, h'\in H_0$. Далее, $\alpha(h')\in\mathbf{Q}$ при любом $\alpha\neq 0$. В частности, $\alpha(h')$ — вещественное число, если $h'\in H_0$. В дальнейшем обозначаем Δ множество ненулевых корней алгебры Ли G.

32. Простые корни. Пусть $h_1, \ldots, h_r$ — какой-нибудь фиксированный базис в H_0. Если λ, μ — две линейные формы на H_0, то говорят, что $\lambda>\mu$, если $\lambda(h_i)=\mu(h_i)$ при $i=1, \ldots, k$ и $\lambda(h_{k+1})>\mu(h_{k+1})$. Напомним, что если λ, μ — корни, то $\lambda(h')$, $\mu(h')$ — вещественные числа. Таким образом, в множестве Δ возникает линейное упорядочение. Корень $\alpha\in\Delta$ называется *положительным*, если $\alpha>0$, т. е. $\alpha(h_i)=0$ при $i=1, \ldots, k$ и $\alpha(h_{k+1})>0$. Линейная упорядоченность вводится неоднозначно: для дальнейшего предполагаем, что базис $h_1, \ldots, h_r$ ($r=\operatorname{rg} G$ — ранг G) фиксирован. Обозначим множество положительных корней Δ^+. Тогда $\Delta=\Delta^+\bigcup\Delta^-$, где $\Delta^+\bigcap\Delta^-=\varnothing$, причем существует взаимно однозначное соответствие между Δ^+ и Δ^-, устанавливаемое инволюцией $\alpha\to-\alpha$. Ясно, что если $\alpha\in\Delta^+$, то $(-\alpha)\in\Delta^-$. Положительный корень α называется *простым*, если его нельзя представить в виде суммы двух положительных корней. Если $r=\operatorname{rg} G=\dim_{\mathbf{C}} H$ — ранг алгебры Ли G, то существует ровно r простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, которые образуют базис в H над $\mathbf{C}$ и базис в H_0 над $\mathbf{Q}$. Кроме того, каждый корень $\beta\in\Delta$ представляется в виде $\beta=\sum_{i=1}^{r} m_i\alpha_i$, где $m_i\in\mathbf{Z}$ — целые числа одного знака; если $m_i\geqslant 0$, то $\beta\in\Delta^+$, а если $m_i\leqslant 0$, то $\beta\in\Delta^-$. Система простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ обычно обозначается буквой П. Система Δ^+ однозначно восстанавливается по системе П. Положим $V^+=\sum_{\alpha>0} G^{\alpha}$, $V^-=\sum_{\alpha<0} G^{\alpha}$. Тогда корневое разложение (278) принимает вид $G=V^-\oplus H\oplus V^+$.

33. Базис Вейля. Для дальнейшего в полупростой алгебре Ли G фиксируем базис специального вида. Произвольный базис

$h_1, \ldots, h_r$ в H (над $\mathbf{C}$) порождает базис $\{h'_\alpha\}$ в H_0 (над $\mathbf{Q}$) и в H (над $\mathbf{Q}$). Этот базис дополним векторами $E_\alpha \in G^\alpha$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \Delta$. Векторы E_α можно выбрать так, что $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = -1$. Тогда операция коммутирования в G задается следующим образом: $[h, E_\alpha] = \alpha(h) E_\alpha$, $h \in H$ $(\alpha(h) \in \mathbf{Q}$, если $h \in H_0)$; $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = -h'_\alpha$; $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}$, если $\alpha + \beta \neq 0$ — корень, и $[E_\alpha, E_\beta] = 0$, если $\alpha + \beta \neq 0$ не корень; $B(h, h'_\alpha) = \alpha(h)$, $h \in H$. Векторы $E_\alpha \in G^\alpha$ можно выбрать так, что $N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha-\beta}$. Константы $N_{\alpha\beta}$ можно считать вещественными (после соответствующей нормировки векторов E_α). Имеется алгоритм для определения $N_{\alpha\beta}$ по системе корней (см. [504]). В дальнейшем все обозначения, связанные с полупростыми алгебрами и их системами корней, мы будем использовать из [55]. Построенный базис называется *базисом Вейля*.

34. Определение. Для данного ковектора $f \in G^*$, где G^* — пространство, дуальное к алгебре Ли G, определим подпространство $\mathrm{Ann}(f) = \{x \in G \mid \mathrm{ad}_x^* f = 0\}$. Это подпространство называется *аннулятором элемента* f. Число

$$r = \min_{f \in G^*} \dim \mathrm{Ann}(f) \tag{279}$$

называется *индексом* алгебры Ли G и обозначается $r = \mathrm{ind}(G)$.

35. Предложение. *Если G — полупростая алгебра Ли, то ее индекс совпадает с ее рангом, равным размерности подалгебры Картана.*

Глава 3

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 15. Симплектические пространства

1. Определение. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Билинейная форма ω на $V \times V$ называется *симплектической*, если она не вырождена, т. е. если $\omega(x, y) = 0$ для всех $y \in V$ при некотором $x \in V$, то $x = 0$; $\omega(x, y)$ кососимметрична, т. е. $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$ для всех $x, y \in V$ или, что эквивалентно, $\omega(x, x) = 0$, $x \in V$.

Пара (V, ω) называется в этом случае *симплектическим пространством*.

Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства, то ω определяется своей матрицей Грама $\Gamma = \|\omega(e_i, e_j)\| = \|\omega_{ij}\|$, которая кососимметрична и не вырождена. Поскольку невырожденная кососимметричная матрица имеет четный порядок, то размерность симплектического пространства четна.

Пусть $b(x, y)$ — ненулевая кососимметрическая билинейная форма в n-мерном линейном пространстве V.

2. Определение. Если W — подпространство пространства V, то ортогональное дополнение к W относительно b обозначается $W^{\perp}$ и называется *косоортогональным дополнением*, по определению $W^{\perp}=\{x\in V \mid b(x, y)=0$ для всех $y\in W\}$.

Заметим, что $W\cap W^{\perp}$ может содержать ненулевые векторы.

3. Определение. Векторное подпространство $W\subset V$ называется: а) *изотропным*, если $W\subset W^{\perp}$; б) *коизотропным*, если $W^{\perp}\subset W$; в) *лагранжевым*, если $W=W^{\perp}$; г) *симплектическим*, если $W\cap W^{\perp}=\{0\}$. Пространство $V^{\perp}$ называется *ядром* формы b. Для любого подпространства $W\subset V$ имеем

$$\dim W+\dim W^{\perp}=\dim V+\dim(W\cap V^{\perp}). \tag{280}$$

4. Лемма. *Для изотропного подпространства $W\subset V$ эквивалентны следующие условия:* а) *W является максимальным изотропным подпространством;* б) $\dim W=\frac{1}{2}(\dim V+\dim V^{\perp})$; в) $W\supset W^{\perp}$; г) $W=W^{\perp}$. *Если эти условия выполнены, то $W\supset V^{\perp}$.*

5. Теорема. *Найдется такой базис пространства V, в котором форма $b(x, y)$ запишется в следующем каноническом виде*:

$$b(x, y)=x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3+\ldots+x_{2k-1}y_{2k}-x_{2k}y_{2k-1},$$
$$1\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}. \tag{281}$$

Доказательство. Пусть в некотором базисе имеем $b(x, y)=\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$. Изменив нумерацию неизвестных, можно считать $a_{12}\neq 0$. Запишем форму в виде

$$b(x, y)=x_1(a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n)-y_1(a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)+b_1(x, y), \tag{282}$$

и произведем невырожденное преобразование неизвестных

$$x'_1=x_1,\quad x'_2=a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\quad x'_3=x_3,\ \ldots,\ x'_n=x_n \tag{283}$$

и такое же преобразование для y_i. Получим $b(x, y)=x'_1y'_2-x'_2y'_1+b_2(x, y)$. Если форма $b_2(x, y)$ не содержит x'_2, y'_2, то поступаем с ней аналогично. Иначе $b_2(x, y)=\sum_{i, j=2}^{n} a'_{ij}x'_iy'_j$, где $a'_{2k}\neq 0$ для некоторого k, $2\leqslant k\leqslant n$. Произведя невырожденное преобразование

$$x''_1=x'_1-a'_{23}x'_3-\ldots-a'_{2n}x'_n,\quad x''_2=x'_2,\ \ldots,\ x''_n=x'_n \tag{284}$$

и такое же преобразование над y'_i, получим $b(x, y)=x''_1y''_2-x''_2y''_1+b_3(x, y)$, где $b_3(x, y)$ не содержит x''_1, x''_2, y''_1, y''_2. Если $b_3(x, y)\neq 0$, то поступаем с ней аналогично.

6. Определение. *Симплектическим базисом в* (V, ω) называется такой базис $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$, что

$$\omega(e_j, e_k)=\omega(f_j, f_k)=0, \quad \omega(e_j, f_k)=\delta_{jk}. \tag{285}$$

7. Следствие. *Каждое симплектическое пространство имеет симплектический базис.*

8. Теорема. *Каждое изотропное подпространство содержится в лагранжевом подпространстве. В частности, нулевое подпространство содержится в лагранжевом подпространстве, т. е. лагранжевы подпространства существуют для формы* b.

Доказательство. Пусть W — изотропное подпространство, которое не является лагранжевым, т. е. $W\subset W^{\perp}$ и $W\neq W^{\perp}$. Выберем вектор $u\in W^{\perp}\setminus W$. Тогда $u\in u^{\perp}$. С другой стороны, $u\in W^{\perp}$, так что $W\subset u^{\perp}$. Пространство $W+u\mathbf{R}$ изотропно. Продолжая этот процесс, получим искомое лагранжево подпространство.

§ 16. Группы симплектических преобразований линейного пространства

1. Определение. Линейное преобразование $g\colon V\to V$ симплектического пространства (V, ω) в себя называется *симплектическим*, если оно сохраняет симплектическую структуру, т. е. сохраняет кососимметрическое скалярное произведение: $\omega(ga, gb)=\omega(a, b)$ для любых $a, b\in V$. Совокупность всех симплектических преобразований пространства V образует группу, которая называется *вещественной симплектической* (некомпактной) группой и обозначается $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, если $\dim V=2n$.

2. Лемма. *Симплектическое преобразование переводит любое изотропное подпространство в изотропное. В частности, образ лагранжева подпространства при симплектическом преобразовании снова является лагранжевым подпространством.*

Доказательство. Согласно определению симплектического преобразования оно сохраняет кососкалярное произведение любой пары векторов. Следовательно, подпространство, в котором произведение любой пары векторов равно нулю, переходит в подпространство с тем же свойством. Лемма доказана.

3. Замечание. Рассмотрим группу P всех диффеоморфизмов $f\colon V\to V$ симплектического пространства (V, ω), сохраняющих ω. Тогда группа P не исчерпывается линейными преобразованиями, сохраняющими ω (см. п. 2 § 24). Этим свойством группа P отличается от группы изометрий евклидова пространства.

4. Лемма. *Группа* $\mathrm{Sp}(1, \mathbf{R})$ *изоморфна группе вещественных матриц порядка два с определителем* 1, *т. е. группе* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$.

С топологической точки зрения эта группа матриц некомпактна, имеет размерность 3 *и гомеоморфна прямому произведению окружности на двумерную плоскость* (рис. 16). *В частности, группа* $\mathrm{Sp}(1, \mathbf{R})$ *неодносвязна и ее фундаментальная группа изоморфна группе целых чисел* $\pi_1(\mathrm{Sp}(1, \mathbf{R}))\cong\mathbf{Z}$.

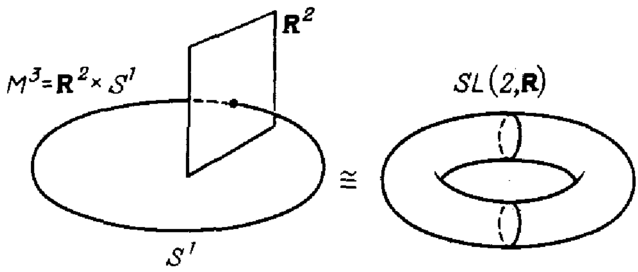


Рис. 16

Доказательство. Ясно, что кососкалярное произведение пары векторов a, b равно площади параллелограмма, натянутого на a, b. С другой стороны, если $g=\begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix}$ — произвольное линейное преобразование плоскости, то площадь параллелограмма, натянутого на векторы $g(a)$ и $g(b)$, получается из первоначальной площади умножением на определитель преобразования g. Следовательно, преобразование g сохраняет кососкалярное произведение векторов тогда и только тогда, когда оно унимодулярно, т. е. $\det g=ps-rq=1$. Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})=\left\{\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \middle| ad-bc=1\right\}$ является поверхностью S в пространстве $\mathbf{R}^4$, задаваемой уравнением $ad-bc=1$. Перейдем к новым координатам u_1, v_1, u_2, v_2: $a=u_1+v_1$, $d=u_1-v_1$, $b=u_2+v_2$, $c=u_2-v_2$. Тогда группа $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ будет задаваться уравнением $u_1^2+v_2^2-v_1^2-u_2^2=1$, т. е. это квадрика в четырехмерном пространстве. Рассмотрим цилиндр W с уравнением $u_1^2+v_2^2=1$. Он, очевидно, гомеоморфен произведению $S^1\times\mathbf{R}^2\cong S^1\times D^2$. Отобразим поверхность S на цилиндр W: через точку $a\in S$ проведем прямую l, перпендикулярную к плоскости (v_1, u_2) и параллельную плоскости (u_1, v_2), получим отображение f: $S\to W$, $f(a)=l\cap W$, являющееся гомеоморфизмом. Действительно, f в координатах имеет вид $f(u_1, v_2, u_2, v_1)=\left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{u_1^2+v_2^2}}, u_2, v_1\right)$, и оно имеет обратное, которое в координатах записывается в виде $f^{-1}(u_1, v_2, u_2, v_1)=(u_1\sqrt{1+v_1^2+u_2^2}, v_2\sqrt{1+v_1^2+u_2^2}, u_2, v_1)$ (рис. 17). Итак, f и f^{-1} непрерывны, т. е. f — гомеоморфизм.

5. Определение. В пространстве $\mathbf{C}^2$ рассмотрим эрмитову форму $|z_1|^2-|z_2|^2$. Преобразования $A=\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, сохраняющие эту форму и имеющие определитель, равный единице, образуют группу, которая обозначается $\mathrm{SU}(1, 1)$. Преобразования из этой группы имеют вид $A=\begin{Vmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{Vmatrix}$, a, $b\in\mathbf{C}$, $|a|^2-|b|^2=1$.

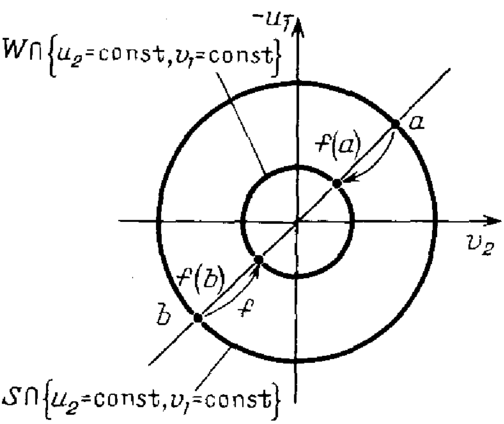


Рис. 17. Сечение плоскостью $\{u_2=\mathrm{const},\ v_1=\mathrm{const}\}$

6. Лемма. *Если матрица оператора в вещественном базисе пространства* $\mathbf{C}^2$ *вещественная унимодулярная, то матрица этого оператора в комплексно сопряженном базисе* $f_1=e_1+ie_2$, $f_2=e_1-ie_2$ *принадлежит группе* $\mathrm{SU}(1, 1)$. *Итак, три группы* $\mathrm{Sp}(1, \mathbf{R})$, $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, $\mathrm{SU}(1, 1)$ *изоморфны.*

7. Замечание. Укажем еще на связь групп $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, $\mathrm{SU}(1, 1)$ с геометрией Лобачевского. Рассмотрим две модели плоскости Лобачевского: модель на верхней полуплоскости H^2 имеет метрику $ds^2=R^2y^{-2}(dx^2+dy^2)$, $R=\mathrm{const}$; модель в единичном круге D^2 имеет метрику $ds^2=4R^2(1-(x^2+y^2))^{-2}(dx^2+dy^2)$. Группа изометрий плоскости Лобачевского в модели H^2 состоит из преобразований $w=(az+b)/(cz+d)$ таких, что $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}\in\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, а в модели D^2 — из преобразований $w=(pz+q)/(rz+t)$ таких, что $\begin{Vmatrix} p & q \\ r & t \end{Vmatrix}\in\mathrm{SU}(1, 1)$, см. [190].

8. Определение. Невырожденное комплексное линейное преобразование $g\colon \mathbf{C}^{2n}\to\mathbf{C}^{2n}$ называется *симплектическим*, если оно сохраняет симплектическую структуру в $\mathbf{C}^{2n}$, т. е. сохраняет внешнюю 2-форму $dz_1\wedge dz_{n+1}+\ldots+dz_n\wedge dz_{2n}$ ($z_1, \ldots, z_{2n}$ — координаты в $\mathbf{C}^{2n}$). Совокупность всех симплектических преобразований пространства $\mathbf{C}^{2n}$ образует группу, которая называется *комплексной симплектической группой* и обозначается $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$.

9. Предложение. *Группа* $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ *является некомпактной группой Ли вещественной размерности* $2n(2n+1)$. *Алгебра Ли* $\mathrm{sp}(n, \mathbf{C})$ *этой группы Ли состоит из комплексных матриц вида*

$$X=\begin{Vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -Z_1^t \end{Vmatrix}, \tag{286}$$

$X \in M_{2n}(\mathbf{C})$, где Z_1 — произвольная комплексная матрица порядка n, а комплексные матрицы Z_2 и Z_3 симметричны.

Группа $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ является некомпактной группой Ли размерности $n(2n+1)$. Алгебра Ли $\mathrm{sp}(n, \mathbf{R})$ этой группы состоит из вещественных матриц вида (286), где Z_1 — произвольная вещественная матрица порядка n, а матрицы Z_2 и Z_3 имеют порядок n и симметричны.

Доказательство. Рассмотрим случай группы $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$. Для $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ все аналогично. Матрица g является симплектической тогда и только тогда, когда $gIg^t = I$, где I — симплектическая единица, равная

$$I = \begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix}. \tag{287}$$

Итак, группа $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ в пространстве матриц $M_{2n}(\mathbf{R})$ размера $2n \times 2n$ выделяется системой полиномиальных уравнений. Применим к этой системе теорему о неявных функциях.

10. Теорема (геометрическая формулировка теоремы о неявных функциях). *Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^n$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$ множество $X \subset \mathbf{R}^n$, состоящее из точек $P(x^1, \ldots, x^n)$, координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ которых удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{gathered} f_1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_s(x^1, \ldots, x^n) = 0. \end{gathered} \tag{288}$$

Если ранг $\mathrm{rk}\, J_x$ матрицы Якоби

$$J_x = \begin{Vmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x^1}\right|_x & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x^n}\right|_x \\ \left.\dfrac{\partial f_s}{\partial x_1}\right|_x & \cdots & \left.\dfrac{\partial f_s}{\partial x^n}\right|_x \end{Vmatrix} \tag{289}$$

всюду на X равен s, то множество X является гладким многообразием размерности $n-s$. Точнее, в некоторой окрестности точки $x_0 \in X$ в качестве локальных координат можно взять координаты, дополнительные к $(x^{j_1}, \ldots, x^{j_s})$ в $(x^1, \ldots, x^n)$, где

$$\det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_{i_1}}{\partial x^{j_1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{i_1}}{\partial x^{j_s}} \\ \dfrac{\partial f_{i_s}}{\partial x^{j_1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{i_s}}{\partial x^{j_s}} \end{Vmatrix} \neq 0 \tag{290}$$

— минор в J_{x_0}, отличный от нуля.

11. Замечание. С системой уравнений (288) связано отображение F: $\mathbf{R}^n(x^1, \ldots, x^n) \to \mathbf{R}^s(x^1, \ldots, x^n)$, $F(x^1, \ldots, x^n) = (y^1, \ldots, y^s)$, где $y^i = f_i(x^1, \ldots, x^n)$ и $X = F^{-1}(0)$. Ясно, что $\operatorname{rk} J_x = \dim \operatorname{Im} dF_x$.

Продолжим доказательство теоремы 9. Группа $\operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$ вложена в пространство $\mathbf{R}^{4n^2}$, поскольку любую матрицу можно записать в строку длины $4n^2$. Соотношение $gIg^t = I$ дает $4n^2$ уравнений, причем среди них $2n^2 - n$ попарно различных. Определим отображение Φ: $\mathbf{R}^{4n^2} \to \mathbf{R}^{4n^2}$ формулой $\Phi(Y) = YIY^t - I$. Ясно, что $\operatorname{Sp}(n, \mathbf{R}) = \Phi^{-1}(0)$. Вычислим дифференциал $d\Phi_{X_0}$. Для этого рассмотрим такую кривую $F(t) \in \mathbf{R}^{4n^2}$, что $F(0) = X_0$ и $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} F(t) = \dot{X}$ — данная матрица (рис. 18). Имеем

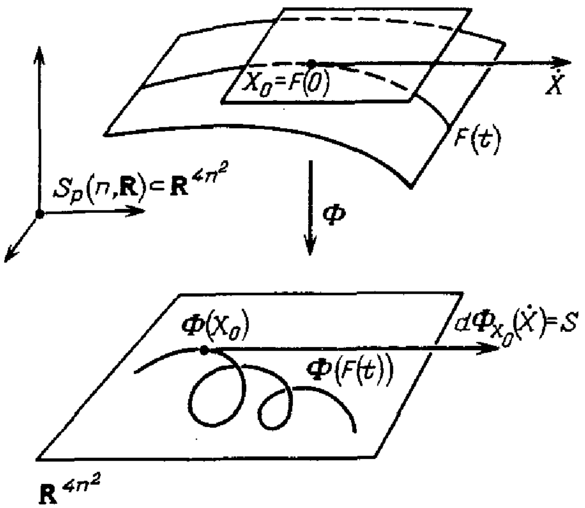


Рис. 18

$$S = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \Phi(F(\tau)) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} (F(\tau)IF(\tau)^t - I) = \dot{X}IX_0^t + X_0I\dot{X}^t, \quad (291)$$

т. е. $S = \dot{X}IX_0^t + X_0I\dot{X}^t$. Очевидно, что S — кососимметрическая матрица, так как I — кососимметрическая матрица. Любая кососимметрическая матрица S представима в виде $S = \dot{X}IX_0^t + X_0I\dot{X}^t$, где $X_0 \in \operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$ для некоторой матрицы $\dot{X}$. Достаточно положить $\dot{X} = -\frac{1}{2}SIX_0I$. Итак, образ $\operatorname{Im} d\Phi_{X_0}$ отображения $d\Phi_{X_0}$ совпадает с пространством кососимметрических матриц, следовательно, ранг матрицы Якоби системы, описывающей группу $\operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$, постоянен, т. е. $\operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$ — гладкое многообразие. Вычислим размерность этого многообразия. Имеем $\operatorname{rk} J_X = \dim \operatorname{Im} d\Phi_X = \dim \{$кососимметрические матрицы$\} = n(2n-1)$. Поэтому $\dim \operatorname{Sp}(n, \mathbf{R}) = 4n^2 - n(2n-1) = 2n^2 + n = n(2n+1)$.

Ясно, что матричные элементы произведения и обратной матрицы гладко зависят от координат на группе $\operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$ в силу теоремы о неявных функциях.

Вычислим теперь алгебру Ли $\operatorname{sp}(n, \mathbf{R})$ группы Ли $\operatorname{Sp}(n, \mathbf{R})$. Для этого продифференцируем тождество $g(\tau)Ig(\tau)^t = I$ по τ при $\tau = 0$ в предположении, что $g(0) = E$, получим $\dot{g}I + I\dot{g}^t = 0$.

Записывая матрицу $\dot{g}$ в виде $\begin{Vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{Vmatrix}$, найдем, что $Z_1^t+Z_4=0$, $Z_2=Z_2^t$, $Z_3=Z_3^t$, и предложение 9 доказано.

12. Замечание. Для доказательства связности симплектических групп воспользуемся следующим утверждением: если подгруппа $Q\subset P$ и факторпространство P/Q связны, то группа P также связна.

13. Замечание. Группа $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ может быть отождествлена с множеством симплектических базисов в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, так как любое преобразование $g\in \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ переводит симплектический базис в симплектический.

14. Теорема. *Для любого* $n\geqslant 1$ *группа* $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ *связна.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ — симплектический базис пространства $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$. Определим в $\mathbf{R}^{2n}$ скалярное произведение, относительно которого выбранный базис ортонормированный, обозначим это скалярное произведение символом (x, y). Множество $L=\{(u, v)\in \mathbf{R}^{2n}\times \mathbf{R}^{2n} | (u, v)=1\}$ связно. Любую пару $(u, v)\in L$ можно соединить с такой парой $(u_0, v_0)\in L$, что $|v_0|=1$, с помощью кривой $\varphi(t)=(tu, t^{-1}v)$, $t\in [1, |v|^{-1}]$. Если $|v|=1$, то с помощью вращения перейдем к северному полюсу v_0 единичной сферы S^{2n-1}. Далее, множество таких векторов u, что $(u, v_0)=1$ связно, представляет собой «горизонтальную» гиперплоскость, проходящую через v_0 (рис. 19).

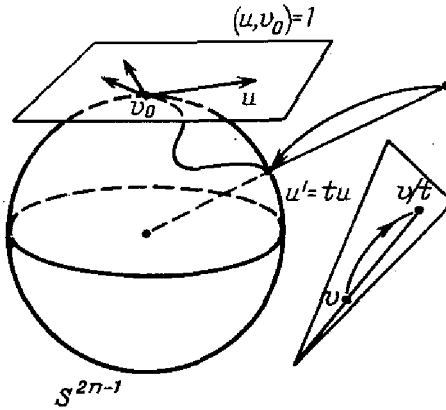


Рис. 19

Пусть J: $\mathbf{R}^{2n}\to \mathbf{R}^{2n}$ — стандартная комплексная структура в $\mathbf{R}^{2n}$, определенная равенствами $Je_k=f_k$, $Jf_k=-e_k$, $k=1, \ldots, n$. Тогда $\omega(u, v)=(Ju, v)$ и, следовательно, множество таких пар $(u, v)\in \mathbf{R}^{2n}\times \mathbf{R}^{2n}$, что $\omega(u, v)=1$, связно. Обозначим это множество M_n.

Группа $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ транзитивно действует на M_n по правилу $g(u, v)=(gu, gv)$, так как если $(u, v)=1$, то $\mathbf{R}^{2n}=V\oplus V^{\perp}$, $V=\{u, v\}$, и, следовательно, стационарная подгруппа пары $(u, v)\in M_n$ изоморфна $\mathrm{Sp}(n-1, \mathbf{R})$. Отсюда $M_n\cong \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})/\mathrm{Sp}(n-1, \mathbf{R})$. Теперь по индукции, учитывая связность гиперповерхности M_n и замечание 12, получим связность группы $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, так как $\mathrm{Sp}(1, \mathbf{R})$ связна в силу п. 4.

15. Следствие. *Если* $A\in \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, *то* $\det A=+1$.

Доказательство. Из равенства $gIg^t=I$ для $g\in \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ вытекает $(\det g)^2=1$, поэтому $\det g=+1$, так как группа $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ связна и $\det E=1$, $E\in \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$.

16. Замечание. В пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ (при доказательстве теоремы 14) введены скалярное произведение (x, y) и комплексная структура, которые полезны при изучении симплектических пространств. Ортогональная группа $O(2n)$ — это группа всех вещественных линейных преобразований пространства $\mathbf{R}^{2n}$, сохраняющих (x, y). Унитарная группа $U(n)$ — это группа всех комплексных линейных преобразований пространства $\mathbf{C}^n=\mathbf{R}^{2n}$, сохраняющих эрмитово скалярное произведение $\langle x, y\rangle=\omega(Jx, y)+i\omega(x, y)$. Имеет место равенство $U(n)=O(2n)\bigcap \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$.

Топологию группы $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ описывает следующая

17. Теорема. *Для каждого элемента $A\in \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ существует единственная такая пара (U, S), где U — унитарное, а S — комплексное линейное симметрическое преобразование пространства $\mathbf{C}^n=\mathbf{R}^{2n}$, что $A=U\exp S$. В частности, группа $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ диффеоморфна произведению $\mathbf{C}^{n(n+1)/2}\times U(n)$. Отсюда $\pi_1(\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R}))=\pi_1(U(n))\cong\mathbf{Z}$.*

Доказательство. Изложим схему доказательства этой теоремы. Преобразование A^tA симметрично и положительно определено, поэтому определен корень квадратный $R=(A^tA)^{1/2}$. Пусть $U=R^{-1}U$. Тогда $U\in O(2n)$. Далее, $R^{2k}IR^{2k}=I$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Выберем такую матрицу $T\in O(2n)$, что $TRT^{-1}=R_0$ диагональна, и положим $G=TIT^{-1}$. Тогда $R_0^{2k}GR_0^{2k}=G$ для всех неотрицательных целых k, что можно переписать в виде равенства

$$\sum_{i, j} C_{rs}^{ij}(a_i a_j)^k=g_{rs}, \tag{292}$$

где C_{rs}^{ij} — соответствующие матричные элементы, а a_j^k — диагональные элементы матрицы R_0^{2k} $(r, s=1, \ldots, 2n)$. Соотношение (292) выполняется при всех значениях $k\in\mathbf{Z}$. Отсюда следует, что (292) справедливо при всех значениях $k\geqslant 0$. Итак, $R^\tau IR^\tau=I$ для любого $\tau\geqslant 0$. Матрицу R, которая является положительно определенной симметричной, единственным образом можно записать в виде $R=\exp S$, S — симметрическая матрица. Подставляя это выражение в $R^\tau IR^\tau=I$ и дифференцируя по τ при $\tau=0$, получим $SI+IS=0$. Отсюда легко получить утверждение теоремы 17.

18. Определение. Пусть V — вещественное векторное пространство. Вещественно линейное преобразование $J\colon V\to V$ такое, что $J^2=-\mathrm{id}$, называется *комплексной структурой* на V. Ясно, что в этом случае размерность $\dim V$ четная. Если в пространстве V задана комплексная структура J, то V — комплексное векторное пространство, для этого достаточно положить $(x+iy)v=xv+yJv$ для $x, y\in\mathbf{R}$ и $v\in V$. Обратно, если V — комплексное векторное пространство, то его можно считать вещественным пространством, в котором определена комплексная структура, задаваемая умножением на $i=\sqrt{-1}$.

При доказательстве теоремы 14 определили комплексную структуру в симплектическом пространстве. Обобщая эту конструкцию, дадим

19. Определение. Симплектическое пространство (V, ω) с комплексной структурой J называется *кэлеровым*, если $J\in \mathrm{Sp}(V)$.

20. Лемма. *Каждое кэлерово векторное пространство имеет псевдоевклидово скалярное произведение* $b(v, w)=\omega(v, Jw)$, *инвариантное относительно комплексной структуры* J.

Доказательство. Произведение $b(v, w)=\omega(v, Jw)$ симметрично, поскольку

$$b(w, v)=\omega(w, Jv)=\omega(Jw, J^2v)=-\omega(Jw, v)= \\ =\omega(v, Jw)=b(v, w), \qquad (293)$$

так как $J\in \mathrm{Sp}(V)$, $J^2=-E$ и $\omega(x, y)=-\omega(y, x)$.

Произведение $b(v, w)$ не вырождено. Действительно, если $\omega(x, Jy)=0$ для всех $x\in V$, то $Jy=0$, так как форма ω не вырождена. Следовательно, $w=-J^2w=0$.

Произведение $b(x, y)$ является J-инвариантным, т. е. $b(Jv, Jw)=b(v, w)$. Действительно, $b(Jv, Jw)=\omega(Jv, J^2w)=$ $=\omega(v, Jw)=b(v, w)$.

Заметим также, что симплектическая структура ω восстанавливается с помощью произведения $b(x, y)$ по формуле $\omega(x, y)=b(Jx, y)$.

21. Определение. Кэлерова структура на пространстве V называется *положительной*, если соответствующая форма $b(x, y)$ положительно определена.

22. Замечание. Наряду с «вещественной формой» $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ группа $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ содержит важную подгруппу $\mathrm{Sp}(n)$, называемую компактной симплектической. Напомним ее определение.

23. Кватернионы. *Алгебра кватернионов* $\mathbf{H}$ — это вещественное четырехмерное пространство с базисом $1, i, j, k$ и законом умножения $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=k$, $ji=-k$, $jk=i$, $kj=-i$, $ki=j$, $ik=-j$.

Модулем кватерниона $q=a+bi+cj+dk$ называется число $|q|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$, *сопряженным кватернионом* — кватернион $\bar{q}=a-bi-cj-dk$. Имеют место соотношения $q\bar{q}=\bar{q}q=|q|^2$ и $\overline{q_1q_2}=\bar{q}_2\bar{q}_1$. Далее $q^{-1}=\bar{q}/|q|^2$ — обратный кватернион к q. Если $q=a+bi+cj+dk$, то $a=\mathrm{Re}\,q$ называется *вещественной* частью кватерниона q, а $bi+cj+dk=\mathrm{Im}\,q$ — *мнимой* частью. При $a=0$ кватернион называется *чисто мнимым*.

24. Кватернионное пространство. Рассмотрим n-мерное линейное кватернионное пространство $\mathbf{H}^n$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Каждый вектор $a\in\mathbf{H}^n$ допускает однозначную запись $a=\sum_{i=1}^{n} a_ie_i$, где $a_i\in\mathbf{H}$. Рассмотрим в $\mathbf{H}^n$ кватернионнозначную форму

$\langle a, b\rangle' = \sum_{i=1}^{n} a_i\bar{b}_i$, где a_i, $b_i \in \mathbf{H}$, и вещественнозначное невырожденное скалярное произведение $\langle a, b\rangle = \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{b}_i$.

25. Определение. *Симплектической компактной группой* $\mathrm{Sp}(n)$ называется множество всех линейных кватернионных преобразований g пространства $\mathbf{H}^n$, оставляющих на месте точку $0 \in \mathbf{H}^n$ и сохраняющих вещественнозначное скалярное произведение $\langle a, b\rangle$ в $\mathbf{H}^n$, т. е. $\langle ga, gb\rangle = \langle a, b\rangle$. Группа $\mathrm{Sp}(n)$ совпадает с группой преобразований, сохраняющих кватернионнозначную форму $\langle a, b\rangle'$.

26. Замечание. Кватернионное пространство $\mathbf{H}^n$ можно канонически отождествлять с комплексным пространством $\mathbf{C}^{2n}$. При $n=1$ это отождествление устроено следующим образом. Очевидно, что кватернион $q = r_0 1 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$ можно переписать в виде $q = (r_0 + r_1 i) + j(r_2 - r_3 i) = z_1 + j\bar{z}_2$, где $z_1 = r_0 + r_1 i$, $z_2 = r_2 + r_3 i$ — комплексные числа. Выполняя эту операцию вдоль каждой кватернионной координаты в $\mathbf{H}^n$, получим отождествление $\mathbf{H}^n$ с $\mathbf{C}^{2n}$.

27. Лемма. *Множество* $\mathrm{Sp}(n)$ *является связной компактной группой Ли вещественной размерности* $n(2n+1)$. *При отождествлении* $\mathbf{H}^n$ с $\mathbf{C}^{2n}$ *группа* $\mathrm{Sp}(n)$ *вкладывается как подгруппа в группу* $\mathrm{U}(2n)$. *При этом вложении алгебра Ли* $\mathrm{sp}(n)$ *группы* $\mathrm{Sp}(n)$ *состоит из комплексных матриц порядка* $2n$ *следующего вида:*

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{Vmatrix}, \tag{294}$$

где A — *комплексная косоэрмитова матрица порядка* n, *а* B — *комплексная симметрическая матрица порядка* n. *Если матрицы из группы* $\mathrm{U}(2n)$ *представить в виде* $\begin{Vmatrix} P & R \\ S & T \end{Vmatrix}$, *где* P, R, S, T — *комплексные матрицы, то подгруппа* $\mathrm{Sp}(n)$ *в* $\mathrm{U}(2n)$ *состоит из унитарных матриц вида* (294). *При этом матрица* $\begin{Vmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{Vmatrix}$ *является унитарной в том и только том случае, когда комплексные матрицы* A *и* B *удовлетворяют уравнениям* $A\bar{A}^t + B\bar{B}^t = E$, $BA^t = AB^t$.

Доказательство. То, что $\mathrm{Sp}(n)$ — гладкое многообразие, доказывается аналогично утверждению п. 9. Доказательство связности группы $\mathrm{Sp}(n)$ следует схеме п. 14, только вместо равенства $M_n \cong \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})/\mathrm{Sp}(n-1, \mathbf{R})$ используется равенство $S^{4n-1} = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-1)$.

Легко проверить, что при отождествлении $\mathbf{H}^n$ с $\mathbf{C}^{2n}$ кватернионнозначная форма $\langle a, b\rangle'$ переходит в сумму

$\langle a, b\rangle' = \langle a, b\rangle'_1 + \langle a, b\rangle'_2$, где $a_i = p_i + j\bar{q}_i$, $b_i = c_i + j\bar{d}_i$,

$$\langle a, b\rangle'_1 = \sum_{k=1}^{n} (p_k\bar{c}_k + q_k\bar{d}_k), \quad \langle a, b\rangle'_2 = \sum_{k=1}^{n} (q_k c_k - p_k d_k). \quad (295)$$

Поэтому кватернионный оператор g: $\mathbf{H}^n \to \mathbf{H}^n$ является унитарным.

28. Предложение. *Группа Ли* $\mathrm{Sp}(1)$ *изоморфна в алгебраическом смысле группе* $\mathrm{SU}(2) = \{g \in \mathrm{U}(2) \mid \det g = 1\}$ *и обе они гомеоморфны сфере* S^3.

Доказательство. Группа $\mathrm{Sp}(1)$ действует в пространстве $\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}$ как умножение на «скаляр» — кватернион, т. е. каждое преобразование g: $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$, где $g \in \mathrm{Sp}(1)$, имеет вид $gq = q\bar{a}$, где $q \in \mathbf{H}$, $a \in \mathbf{H}$. Здесь элемент a фиксирован и полностью задает преобразование g. Поскольку кватернионная форма $\langle q_1, q_2\rangle' = q_1\bar{q}_2$ сохраняется при действии преобразования g, то $q_1\bar{q}_2 = q_1\bar{a}a\bar{q}_2 = |a|^2 q_1\bar{q}_2$, т. е. $|a|^2 = 1$ и $|a| = 1$. Поскольку для любых кватернионов a, b выполнено равенство $|ab| = |a||b|$, то группа $\mathrm{Sp}(1)$ изоморфна группе всех кватернионов a таких, что $|a| = 1$. Все такие кватернионы образуют сферу S^3 в $\mathbf{R}^4$.

Рассмотрим описанное в п. 27 вложение $\mathrm{Sp}(n) \to \mathrm{U}(2n)$. При $n = 1$ это вложение имеет вид $\left\| \begin{matrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{matrix} \right\|$, где $|p|^2 + |q|^2 = 1$, p, q — комплексные числа. Итак, группа $\mathrm{Sp}(1)$ изоморфна группе матриц $\left\| \begin{matrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{matrix} \right\|$, где $|p|^2 + |q|^2 = 1$, а эта группа есть в точности $\mathrm{SU}(2)$.

29. Замечание. Группа $\mathrm{Sp}(2)$ изоморфна группе $\mathrm{Spin}(5)$, являющейся универсальным накрытием над группой $\mathrm{SO}(5)$. Напомним, что при $n \geqslant 3$ односвязная группа $\mathrm{Spin}(n)$, дважды накрывающая группу $\mathrm{SO}(n)$, называется спинорной группой. Ее построение см., например, в [102]. Все остальные группы $\mathrm{Sp}(n)$, $n > 2$, уже не сводятся к унитарным и ортогональным группам.

30. Предложение. *Группа* $\mathrm{Sp}(n)$ *односвязна, т. е.* $\pi_1(\mathrm{Sp}(n)) = 1$. *Группа* $\mathrm{Sp}(n)$ *является максимальной компактной подгруппой в группе* $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$.

Доказательство односвязности получается из точной гомотопической последовательности расслоения $\mathrm{Sp}(n-1) \to \mathrm{Sp}(n) \to S^{4n-1}$, см. [102].

§ 17. Лагранжев грассманиан

1. Замечание. Будем заниматься изучением лагранжевых подпространств V^n симплектического пространства $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$, см. определение 3 § 15. Оказывается, множество всех лагранжевых подпространств можно организовать в некоторое гладкое многообразие, играющее большую роль в симплектической топологии. Это так называемый лагранжев грассманиан $LG_n^{\mathbf{R}}$. Его роль в симплектической топологии обусловлена тем, что любое лагранжево многообразие (см. п. 7 § 24) в $\mathbf{R}^{2n}$ естественно отображается в $LG_n^{\mathbf{R}}$. В самом деле, если L — гладкое лагранжево подмногообразие в $\mathbf{R}^{2n}$, то, сопоставляя каждой точке $x \in L$ касательную плоскость $T_x L$ в точке x и перенося ее в начало координат, получим гладкое отображение $f\colon L \to LG_n^{\mathbf{R}}$, которое позволяет построить характеристические классы Арнольда — Маслова. Кроме того, если рассмотреть тавтологическое расслоение $p\colon E \to LG_n^{\mathbf{R}}$ (векторное) над $LG_n^{\mathbf{R}}$, то пространства Тома этого расслоения играют большую роль в теории лагранжевых и лежандровых кобордизмов в смысле Арнольда, см. [10].

Следующее утверждение дает важный алгоритм для построения лагранжевых подпространств.

2. Предложение. *Пусть (V, ω) — симплектическое пространство, а $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n$ — такая возрастающая цепочка подпространств, что $\dim V_i = i$, $V_n = V$. Пусть $\omega_i = \omega / V_i$ и $U_i = N_1 + N_2 + \ldots + N_i$, где N_i — ядро формы ω_i. Тогда U_n является максимальным изотропным подпространством относительно ω и $U_n \cap V_i = U_i$ для всех i.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Предположим, что $N_n \subset V_{n-1}$. Тогда $N_n \subset N_{n-1}$. Отсюда $U_n = U_{n-1}$. По предположению индукции $U_n \cap V_i = U_{n-1} \cap V_i = U_i$ для всех $i < n$ и $U_n = U_{n-1}$ изотропно относительно ω_{n-1}, а следовательно, относительно ω.

Предположим теперь, что $N_n \not\subset V_{n-1}$. Тогда $N_{n-1} = N_n \cap V_{n-1}$ — гиперплоскость в N_n. Поэтому $U_n \cap V_{n-1} = U_{n-1} + (N_n \cap V_{n-1}) = U_{n-1}$ и, значит, $U_n \cap V_i = U_i$ для всех $i < n$ по предположению индукции. С другой стороны, подпространство $U_n = U_{n-1} + N_n$ изотропно и $\dim U_n = 1 + \dim U_{n-1}$, так что U_n — максимальное изотропное подпространство.

3. Определение. По аналогии с обычным грассмановым многообразием определим *вещественное лагранжево грассманово многообразие* $LG_n^{\mathbf{R}}$ (или, короче, *вещественный лагранжев грассманиан*) как множество всех лагранжевых подпространств в симплектическом пространстве $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$.

Аналогично определяется *комплексное лагранжево грассманово многообразие* $LG_n^{\mathbf{C}}$ как совокупность всех лагранжевых подпространств в комплексном симплектическом пространстве $\mathbf{C}^{2n}$, см. определение 8 § 16.

Изучим сначала комплексный случай.

4. Предложение. *Любые две комплексные лагранжевы плоскости могут быть совмещены друг с другом при помощи подходящего симплектического преобразования.*

Доказательство. В качестве примера лагранжевого подпространства (плоскости) возьмем координатную n-мерную изотропную плоскость $\mathbf{C}^n$, порожденную первыми n координатами $z_1, \ldots, z_n$. Докажем, что для любой лагранжевой плоскости $\Pi \subset \mathbf{C}^{2n}$ существует симплектическое преобразование g такое, что оно переводит $\mathbf{C}^n$ в Π, т. е. $\Pi = g\mathbf{C}^n$. Фиксируем в $\mathbf{C}^{2n}$ стандартный базис $e_1, \ldots, e_{2n}$. Тогда получим, что плоскость $\mathbf{C}^n$ натянута на первые n векторов этого базиса. Поскольку Π является комплексным n-мерным подпространством в $\mathbf{C}^{2n}$, то в Π всегда можно выбрать ортонормированный комплексный базис из векторов $a_1, \ldots, a_n$. Разложим эти векторы по базису $e_1, \ldots, e_{2n}$, т. е.

$$a_k = \sum_{p=1}^{n} a_{kp} e_p + \sum_{p=1}^{n} b_{kp} e_{n+p}. \tag{296}$$

Выписывая координаты векторов $a_1, \ldots, a_n$ относительно базиса $e_1, \ldots, e_{2n}$, мы получаем прямоугольную комплексную матрицу X из n строк и $2n$ столбцов вида $\| A \quad B \|$, где $A = \| a_{kp} \|$, $B = \| b_{kp} \|$ — матрицы порядка n. Построим теперь матрицу g порядка $2n$, положив по определению $g = \begin{Vmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{Vmatrix}$. Оказывается матрицы A и B не могут быть произвольными. Они связаны следующим соотношением.

5. Лемма. *Матрицы A и B, образующие матрицу g, удовлетворяют уравнению $A\bar{A}^t + B\bar{B}^t = E$.*

Доказательство. Векторы $a_1, \ldots, a_n$ образуют ортонормированный базис в комплексной плоскости Π, поэтому скалярный квадрат каждого из них равен единице, а попарные их произведения (относительно эрмитовой формы) равны нулю. Очевидно, эти условия в точности эквивалентны уравнению $A\bar{A}^t + B\bar{B}^t = E$.

6. Лемма. *Матрицы A и B, образующие матрицу g, удовлетворяют уравнению $AB^t = BA^t$.*

Доказательство. Плоскость Π является лагранжевой, что накладывает дополнительные ограничения на матрицы A и B. Лагранжевость плоскости Π означает, что попарные кососкалярные произведения всех векторов базиса $a_1, \ldots, a_n$ тождественно равны нулю. Следовательно, мы должны записать равенство нулю попарных произведений векторов относительно кососимметрической формы, задаваемой матрицей $I = \begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix}$. Ясно, что это условие принимает вид $XIX^t = 0$, где $X = \| A, B \|$. Отсюда

$$\| A \quad B \| \begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A^t \\ B^t \end{Vmatrix} = 0,$$

что эквивалентно уравнению $AB^t = BA^t$. Лемма доказана.

7. Доказательство предложения 4. Из условия ортогональности базиса $a_1, \ldots, a_n$ в плоскости П мы получили соотношение $A\bar{A}^t + B\bar{B}^t = E$, а из условия лагранжевости плоскости П — соотношение $AB^t = BA^t$. Оказывается, отсюда уже вытекает, что матрица $g = \begin{Vmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{Vmatrix}$ является комплексной симплектической. В самом деле, мы должны проверить выполнение тождества $gIg^t = I$. Подставляя сюда явную формулу для g и используя леммы 5, 6, получаем равенство

$$gIg^t = \begin{Vmatrix} BA^t - AB^t & -B\bar{B}^t - A\bar{A}^t \\ AA^t + B\bar{B}^t & BA^t - AB^t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix}, \tag{297}$$

что и требовалось доказать.

В частности, любая лагранжева плоскость может быть представлена в виде $g\mathbf{C}^n$, где $g \in \mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ и $\mathbf{C}^n$ — координатная лагранжева плоскость, натянутая на первую половину базиса.

8. Определение. Из предложения 4 вытекает, что можно определить действие группы $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ на грассманиане $\mathrm{LG}_n^{\mathbf{C}}$, полагая, что подпространство V переходит в gV, это действие транзитивно. Обозначим буквой H стационарную подгруппу симплектической группы $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ в точке $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^n(e_1, \ldots, e_n)$.

9. Предложение. *Лагранжево комплексное грассманово многообразие* $\mathrm{LG}_n^{\mathbf{C}}$ *допускает представление в виде однородного пространства* $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})/H$, *здесь стационарная подгруппа* H *состоит из матриц вида* $g = \begin{Vmatrix} A & B \\ 0 & (A^{-1})^t \end{Vmatrix}$, *где* $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ *и* $AB^t = BA^t$.

Доказательство. Достаточно найти стационарную подгруппу H, т. е. подгруппу симплектических преобразований, переводящих в себя плоскость $\mathbf{C}^n(e_1, \ldots, e_n)$. Симплектическое преобразование можно представить в виде $g = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}$, где $gIg^t = I$. Следовательно, матрицы A, B, C, D удовлетворяют соотношениям $BA^t = AB^t$, $BC^t - AD^t = -E$ и $DC^t = CD^t$. Накладывая на g условие инвариантности плоскости $\mathbf{C}^n(e_1, \ldots, e_n)$, получаем $C = 0$. Отсюда $BA^t = AB^t$ и $AD^t = E$. В качестве матрицы A можно брать произвольную невырожденную комплексную матрицу. Предложение доказано.

10. Предложение. *Лагранжево комплексное грассманово многообразие* $\mathrm{LG}_n^{\mathbf{C}}$ *диффеоморфно однородному пространству* $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$, *где группа* $\mathrm{U}(n)$ *вложена в компактную группу* $\mathrm{Sp}(n)$ *как подгруппа матриц вида* $\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^{-1})^t \end{Vmatrix}$, $A \in \mathrm{U}(n)$.

Доказательство. Пусть П — произвольная комплексная лагранжева плоскость. Выше доказали, что П можно представить в виде $\Pi = g\mathbf{C}^n$, где g — комплексное симплектическое преобразование, $g \in \mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$, см. доказательство предложения 4.

В действительности мы доказали более сильное утверждение, а именно: можно считать, что преобразование g не только симплектическое, но и унитарное, т. е. $g \in U(2n)$. В самом деле, из лемм 5, 6 следует, что преобразование g допускает представление в виде $\begin{Vmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{Vmatrix}$, где $AB^t = BA^t$, $A\bar{A}^t + B\bar{B}^t = E$. Эти два условия эквивалентны унитарности матрицы g, так как унитарность матрицы записывается в виде соотношения

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \bar{A}^t & -B^t \\ \bar{B}^t & A^t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix}. \tag{298}$$

Очевидно, что эти две системы уравнений совпадают. Поскольку $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C}) \cap \mathrm{U}(2n) = \mathrm{Sp}(n)$, то мы тем самым получили компактную симплектическую группу $\mathrm{Sp}(n)$. Таким образом, компактная симплектическая группа транзитивно действует на множестве всех лагранжевых комплексных плоскостей.

Осталось найти стационарную подгруппу, т. е. подгруппу тех преобразований, которые переводят в себя плоскость $\mathbf{C}^n(e_1, \ldots, e_n)$. В силу предложения 9 достаточно вычислить пересечение $H \cap \mathrm{U}(2n)$. Поскольку матрицы из подгруппы H имеют вид $g = \begin{Vmatrix} A & B \\ 0 & (A^{-1})^t \end{Vmatrix}$ и условие унитарности означает $g\bar{g}^t = E$, то отсюда получаем $B = 0$. Предложение доказано.

11. Замечание. Предыдущие рассуждения можно было бы повторить для случая вещественного лагранжева грассманова многообразия. Однако мы будем использовать информацию о структуре многообразия $\mathrm{LG}_n^{\mathbf{R}}$, полученную выше.

12. Предложение. *Лагранжево вещественное грассманово многообразие* $\mathrm{LG}_n^{\mathbf{R}}$ *диффеоморфно однородному пространству* $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$, *где группа* $\mathrm{O}(n)$ *естественно вложена в группу* $\mathrm{U}(n)$ *как подгруппа вещественных матриц.*

13. Замечание. Для доказательства п. 12 нам потребуется установить естественную связь между комплексными и вещественными лагранжевыми плоскостями. Рассмотрим в $\mathbf{C}^{2n}$ вещественное n-мерное подпространство $\mathbf{R}^{2n}$, порожденное линейными комбинациями базисных векторов $e_1, \ldots, e_{2n}$ с вещественными коэффициентами. Ясно, что $\mathbf{R}^{2n}$ является «вещественной частью» $\mathbf{C}^{2n}$. Ограничение формы (x, y) с $\mathbf{C}^{2n}$ на подпространство $\mathbf{R}^{2n}$ задает на нем кососимметрическую вещественнозначную форму, которую обозначим для простоты тем же символом. Ясно, что $\mathbf{R}^{2n}$ является симплектическим пространством с формой (x, y). Рассмотрим в $\mathbf{C}^{2n}$ операцию σ комплексного сопряжения, т. е. переводящую вектор $a = \sum_{i=1}^{2n} a_i e_i$ в вектор $\bar{a} = \sum_{i=1}^{2n} \bar{a}_i e_i$. Ясно, что это отображение $\sigma(a) = \bar{a}$ является *антикомплексной инволюцией*, т. е. $\sigma^2=\mathrm{id}$ и $\sigma(\lambda a)=\bar{\lambda}\sigma(a)$. При этом подпространство $\mathbf{R}^{2n}$ состоит в точности из всех неподвижных точек этой инволюции, т. е. $\sigma(\mathbf{R}^{2n})=\mathbf{R}^{2n}$.

14. Лемма. *Операция комплексного сопряжения* σ: $\mathbf{C}^{2n}\to\mathbf{C}^{2n}$ *переводит любую лагранжеву комплексную плоскость снова в лагранжеву плоскость.*

Доказательство. Пусть Π — произвольная лагранжева плоскость. Тогда для любых двух векторов a, $b\in\Pi$ имеем $(a, b)=0$. В то же время $(\sigma a, \sigma b)=(\bar{a}, \bar{b})=\overline{(a, b)}=0$. Таким образом, плоскость $\sigma\Pi$ также лагранжева.

15. Определение. Лагранжева плоскость Π в комплексном пространстве $\mathbf{C}^{2n}$ называется *вещественной лагранжевой плоскостью*, если она инвариантна относительно операции комплексного сопряжения.

16. Лемма. *Пусть* Π — *произвольная вещественная лагранжева плоскость в* $\mathbf{C}^{2n}$. *Тогда*: 1) $\Pi\cap\mathbf{R}^{2n}=\Pi^\sigma$, *где* Π^σ — *подпространство неподвижных векторов преобразования* σ; 2) *плоскость* $\Pi\cap\mathbf{R}^{2n}$ *является лагранжевой* (*вещественной*) *плоскостью в вещественном симплектическом пространстве* $\mathbf{R}^{2n}=(\mathbf{C}^{2n})^\sigma=\operatorname{Re}\mathbf{C}^{2n}$; 3) $\Pi=(\Pi\cap\mathbf{R}^{2n})\oplus i(\Pi\cap\mathbf{R}^{2n})$, *т. е.* $\Pi=\operatorname{Re}\Pi\oplus\operatorname{Im}\Pi$ (рис. 20).

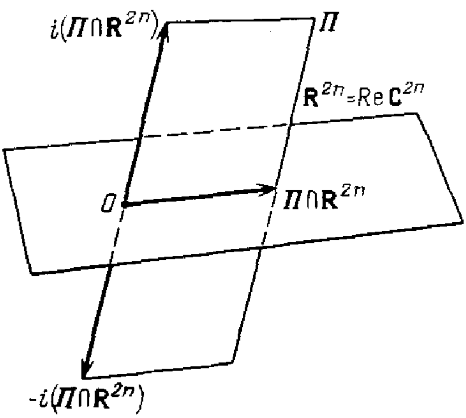


Рис. 20

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что подпространство $\mathbf{R}^{2n}$ в $\mathbf{C}^{2n}$ состоит в точности из неподвижных векторов преобразования σ. Далее, так как плоскость Π изотропна в $\mathbf{C}^{2n}$, то любое его подпространство также изотропно, поэтому для доказательства утверждения 2 (достаточно проверить, что $\dim(\Pi\cap\mathbf{R}^{2n})=n$. Для этого нам потребуется сначала доказать утверждение п. 3).

Рассмотрим более подробно действие антикомплексной инволюции σ: $\mathbf{C}^{2n}\to\mathbf{C}^{2n}$. Если $a\in\Pi^\sigma=\Pi\cap\mathbf{R}^{2n}$, то $ia\notin\Pi^\sigma$, так как $\overline{ia}=\bar{i}\bar{a}=-ia$. Следовательно, $\Pi^\sigma\cap i\Pi^\sigma=0$. В то же время для любого вектора $a\in\Pi$ можно однозначно определить векторы $x=2^{-1}(a+\bar{a})\in\Pi^\sigma$ и $y=2^{-1}(a-\bar{a})\in\Pi^\sigma$. Ясно, что $a=x+iy$, где x, $y\in\Pi^\sigma$. Таким образом, мы представили плоскость Π в виде прямой суммы $\Pi^\sigma\oplus i\Pi^\sigma$, что и доказывает п. 3). Поскольку умножение на число i определяет обратимое линейное преобразование пространства $\mathbf{C}^{2n}$, то $\dim_{\mathbf{R}}\Pi^\sigma=\dim_{\mathbf{R}} i\Pi^\sigma$, откуда $\dim_{\mathbf{R}}\Pi=2\dim_{\mathbf{R}}\Pi^\sigma=2\dim_{\mathbf{C}}\Pi=2n$. Таким образом, $\dim_{\mathbf{C}}\Pi=n$. Лемма доказана.

17. Обсуждение. *Итак, существует взаимно однозначное соответствие между вещественными лагранжевыми плоскостями (комплексной размерности n) в пространстве $\mathbf{C}^{2n}$ и лагранжевыми (вещественными) плоскостями вещественной размерности n в пространстве* $\mathbf{R}^{2n}$.

Следует обратить внимание на несколько различное употребление здесь термина «вещественный». Особенно наглядно это различие видно на рис. 20, где «настоящая вещественная» плоскость Π^σ в $\mathbf{R}^{2n}$ определяет плоскость $\Pi^\sigma+i\Pi^\sigma$, инвариантную относительно сопряжения σ: $\mathbf{C}^{2n}\to\mathbf{C}^{2n}$. Ясно, что вещественная плоскость $\Pi^\sigma\oplus i\Pi^\sigma$ в $\mathbf{C}^{2n}$ отнюдь не содержится в множестве неподвижных точек отображения σ. Другими словами, мы доказали, что каждая вещественная лагранжева плоскость Π в $\mathbf{C}^{2n}$ получается комплексификацией вещественной лагранжевой плоскости Π^σ, лежащей в $\mathbf{R}^{2n}\subset\mathbf{C}^{2n}$.

Лемма 16 важна для установления соответствия между вещественными и комплексными лагранжевыми грассмановыми многообразиями.

18. Доказательство предложения 12. В лемме 16 мы фактически доказали, что вещественное лагранжево грассманово многообразие $\mathrm{LG}_n^{\mathbf{R}}$ диффеоморфно множеству $P_{2n}^{\mathbf{R}}$ всех вещественных лагранжевых плоскостей (комплексной размерности n) в $\mathbf{C}^{2n}$. Ясно, что $P_n^{\mathbf{R}}\subset\mathrm{LG}_n^{\mathbf{C}}$. Рассмотрим в $\mathbf{C}^{2n}$ стандартное действие ортогональной группы $\mathrm{O}(2n)$. Напомним, что эта группа вложена в группу $\mathrm{U}(2n)$ как подгруппа вещественных матриц. Рассмотрим в $\mathbf{C}^{2n}$ стандартную лагранжеву вещественную плоскость $(\mathbf{C}^{2n})^\sigma=\mathbf{R}^{2n}$. Пусть f: $\mathrm{Sp}(n)\to LG_n^{\mathbf{C}}$ естественное отображение, построенное при доказательстве предложения 10 и сопоставляющее каждому симплектическому преобразованию $g\in\mathrm{Sp}(n)$ плоскость $g\mathbf{C}^n$, являющуюся образом стандартной лагранжевой плоскости $\mathbf{C}^n(e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbf{C}^{2n}$. Поскольку f — отображение «на», то $P_{2n}^{\mathbf{R}}$ содержится в образе отображения f. Рассмотрим в $\mathrm{Sp}(n)$ подгруппу ортогональных преобразований в $\mathbf{C}^{2n}$, т. е. пересечение $Q=\mathrm{Sp}(n)\cap\mathrm{O}(2n)$. Здесь $\mathrm{O}(2n)$ — группа ортогональных преобразований в базисе $e_1, \ldots, e_{2n}$. Утверждается, что $f(Q)=P_{2n}^{\mathbf{R}}$. Это следует из того, что группа $\mathrm{O}(2n)$ транзитивна на множестве всех $2n$-мерных (над $\mathbf{R}$) вещественных плоскостей в $\mathbf{C}^{2n}$. Значит, $P_{2n}^{\mathbf{R}}=Q/R$, где R — стационарная подгруппа, т. е. подгруппа преобразований, переводящих в себя какую-то фиксированную вещественную лагранжеву плоскость. Утверждается, что $Q=U(n)$. Пусть g — вещественное симплектическое преобразование из Q, т. е. $g\in\mathrm{Sp}(n)$ и $g\in\mathrm{O}(n)$. Симплектичность g означает, что $gIg^t=I$. Поскольку $g\in\mathrm{O}(n)$, то $g^t=g^{-1}$. Отсюда следует, что $gI=Ig$. Поэтому каждое преобразование $g\in Q$ задает ортогональное преобразование вещественного пространства $\mathbf{R}^{2n}$, коммутирующее с преобразованием I. Как мы знаем, преобразование

I позволяет определить в $\mathbf{R}^{2n}$ комплексную структуру; при этом операторы, коммутирующие с I, оказываются комплексными. Следовательно, каждое преобразование $g \in Q$ оказывается унитарным преобразованием из $\mathrm{U}(n)$. Таким образом, $Q \subset \mathrm{U}(n)$.

Верно и обратное утверждение. Пусть $g \in \mathrm{U}(n)$ — произвольное унитарное преобразование пространства $\mathbf{R}^{2n}$, т. е. оператор, коммутирующий с I. Тогда получаем, что $g \in \mathrm{O}(2n)$ и $gI = Ig$. Отсюда $gIg^t = I$, что и означает симплектичность преобразования. Тем самым $Q = \mathrm{U}(n)$. Осталось найти преобразования из $\mathrm{U}(n)$, переводящие в себя какую-то фиксированную вещественную лагранжеву плоскость. Ясно, что вещественные унитарные преобразования из группы $\mathrm{U}(n)$ образуют группу $\mathrm{O}(n)$. Предложение доказано.

Глава 4

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 18. Симплектические многообразия

1. Определение. Пусть M — гладкое многообразие. *Симплектической структурой* на M называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма $\omega \in \Omega^2(M)$. Пара (M, ω) называется *симплектическим многообразием*, а сама форма ω *симплектической*.

Если $x^1, \ldots, x^n$ — локальная система координат на многообразии M, то $\omega = \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$. Условие невырожденности формы ω эквивалентно тому, что матрица $\|\omega_{ij}\|$ не вырождена в каждой точке $x \in M$. Форма ω замкнута тогда и только тогда, когда $d\omega = 0$, где d — операция внешнего дифференцирования, а это, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\partial\omega_{jk}/\partial x^i - \partial\omega_{ik}/\partial x^j - \partial\omega_{ji}/\partial x^k = 0$.

2. Форма ω определяет в каждом касательном пространстве T_xM невырожденное кососимметрическое скалярное произведение $\omega(a, b) = \omega_{ij}a^ib^j$, где $a = \|a^i\|$, $b = \|b^j\|$, $a, b \in T_xM$. Как показано в части I, в пространстве T_xM существует симплектический базис, в котором $\omega_{ij}(x)$ приводится к каноническому виду (см. п. 5 § 15)

$$\left\|\begin{array}{cccc} \begin{array}{|cc|} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline \end{array} & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \begin{array}{|cc} \hline 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \end{array}\right\| \qquad (299)$$

3. Кососимметрическое скалярное произведение в $T_x M$, индуцированное симплектической структурой, позволяет определить каноническое отождествление касательного пространства $T_x M$ и кокасательного $T_x^* M$. Это отождествление задается классической операцией опускания индексов $\xi^i \to u_j = \omega_{ji} \xi^i$, здесь $\xi \in T_x M$, а $u \in T_x^* M$.

4. На произвольном многообразии, вообще говоря, не существует симплектической структуры. Например, любое симплектическое многообразие четномерно, поскольку кососимметрическая матрица нечетного порядка вырождена, т. е. она имеет определитель, равный нулю.

Более содержательное ограничение на топологию таких многообразий дает следующая

5. Теорема. *Симплектическое многообразие ориентируемо.*

Доказательство. Пусть форма $\omega \in \Omega^2(M)$ задает симплектическую структуру на многообразии M. Если $\dim M = 2k$, то определим форму Ω, как k-кратное внешнее произведение формы ω, т. е. $\Omega = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{k}$. Покажем, что $\Omega \neq 0$. Действительно, как отмечено в п. 2, в каждом касательном пространстве $T_x M$ найдутся такие координаты $x^1, \ldots, x^k$, $y^1, \ldots, y^k$, что $\omega = x^1 \wedge y^1 + \ldots + x^k \wedge y^k$. Тогда очевидно, что

$$\Omega = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} k! \, x^1 \wedge \ldots \wedge x^k \wedge y^1 \wedge \ldots \wedge y^k \neq 0. \qquad (300)$$

6. Не на любом четномерном ориентируемом многообразии существует симплектическая структура. Отметим одно из простейших топологических препятствий к существованию симплектических структур на многообразии.

7. Теорема. *Если на компактном многообразии M^{2k} существует симплектическая структура, то все четномерные группы когомологии $H^{2s}(M^{2k}, \mathbf{R})$ многообразия M^{2k} отличны от нуля, $s = 0, 1, \ldots, k$.*

Доказательство. Пусть $H^{2s}(M^{2k}) = 0$ и на M^{2k} существует симплектическая структура ω, придем к противоречию. Положим $\varphi = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{s}$. Ясно, что $d\varphi = 0$ и $\varphi = d\Psi$, так как $H^{2s}(M^{2k}) = 0$.

Поэтому

$$\Omega = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{k} = \varphi \wedge \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{k-s} = d\Big(\psi \wedge \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{k-s}\Big). \qquad (301)$$

В п. 5 было показано, что форма $\Omega = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ не обращается в нуль ни в одной точке многообразия M, поэтому $\Omega = f \cdot \mathrm{vol}$, где

f — некоторая гладкая функция, отличная от нуля на M^{2k}, а vol — форма объема на M^{2k}. Поэтому по формуле Стокса

$$\int\limits_{M^{2k}} \Omega = \int\limits_{M^{2k}} d(\Psi \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega) = 0, \tag{302}$$

но, с другой стороны,

$$\left| \int\limits_{M^{2k}} f \mathrm{vol} \right| \geqslant m \int\limits_{M^{2k}} \mathrm{vol} = m v(M^{2k}) \neq 0, \tag{303}$$

где $v(M^{2k})$ — объем многообразия M^{2k}, а m — некоторая константа, $m > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

8. В качестве примера многообразий, на которых нет симплектических структур в силу теоремы 7, отметим сферы S^n, $n \geqslant 3$.

В силу предыдущих замечаний ясно, что большую роль играют примеры симплектических многообразий. Остаток этого параграфа посвящен построению трех важных классов симплектических многообразий: а) двумерные многообразия; б) кокасательные расслоения; в) кэлеровы многообразия.

9. Первый источник симплектических многообразий — гладкие двумерные ориентируемые замкнутые римановы многообразия, т. е. сферы с ручками. В качестве симплектической структуры на них можно взять стандартную форму двумерного риманова объема, являющуюся замкнутой невырожденной внешней 2-формой. Если поверхность задана параметрически: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, то форма объема имеет вид

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)^2}\, du \wedge dv. \tag{304}$$

Любая сфера с ручками допускает явное параметрическое задание, например, уравнение

$$z^2 + \left[y^2 + (a_4^2 - x^2) \prod_{i=1}^{3} (x - a_i) \prod_{i=1}^{3} (x + a_i)^2 x^2 \right]^2 = \varepsilon^2, \tag{305}$$

$a_i \neq a_j$, $i \neq j$, при достаточно малом ε описывает сферу с 8 ручками. Аналогичное уравнение можно написать и для сферы с n ручками.

10. Второй источник получения симплектических многообразий — это кокасательные расслоения. Как правило, пространство положений механической системы является гладким многообразием M. Это так называемое конфигурационное пространство механической системы. Гамильтонову механику строят в пространстве импульсов — в фазовом пространстве. Фазовое пространство с математической точки зрения совпадает с кокасательным расслоением T^*M к многообразию. M. Точкой пространства T^*M является пара (x, ξ), где $x \in M$, $\xi \in T_x^*M$, т. е. ξ — ковектор в точке x. Легко проверяется, что T^*M — гладкое $2n$-мерное многообразие, $n = \dim M$. Естественная проекция p: $T^*M \to M$ определяется с помощью равенства $p(x, \xi) = x$. Ясно, что T^*M является расслоенным пространством с базой M, а слоем $p^{-1}(x)$ этого расслоения над точкой x будет кокасательное пространство T_x^*M.

11. Теорема. *Для любого гладкого многообразия M на кокасательном расслоении T^*M существует естественная симплектическая структура.*

Доказательство. Пусть U — координатная окрестность на многообразии M, а $q^1, \ldots, q^n$ — координаты в U. Пусть $\hat{U} \subset T^*M$ — множество ковекторов, точка приложения которых находится в U, а $\frac{\partial}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q^n}$ — базисные векторные поля в U. Если $p_1, \ldots, p_n$ — значения ковектора на этих полях, то $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ можно взять за координаты в $\hat{U}$. В этих координатах определим форму $\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \ldots + dp_n \wedge dq^n$. Проверим, что это определение корректно. Предположим, что $U \cap V \neq \varnothing$. Тогда в $\hat{U} \cap \hat{V}$ справедливы следующие формулы перехода:

$$\bar{q}^i = \bar{q}^i(q^1, \ldots, q^n), \tag{306}$$

$$\bar{p}_i = \bar{p}_i(p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n) = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} p_j, \tag{307}$$

и поэтому $d\bar{q}^i = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j} dq^j$, $d\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^j} dq^j$. Следовательно,

$$\bar{\omega} = \sum_{j=1}^{n} d\bar{p}_j \wedge d\bar{q}_j = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq^j + \sum_{j,s=1}^{n} a_{sj} dq^s \wedge dq^j, \tag{308}$$

где $a_{js} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^s} \frac{\partial}{\partial q^j} \frac{\partial q^t}{\partial \bar{q}^i} p_t$. Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^s} \frac{\partial}{\partial q^j} \frac{\partial q^t}{\partial \bar{q}^i} p_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^s} \frac{\partial \bar{q}^l}{\partial q^j} \frac{\partial^2 q^t}{\partial \bar{q}^l \partial \bar{q}^i} p_t, \tag{309}$$

то $a_{js} = a_{sj}$ и, следовательно, $\sum_{j,s=1}^{n} a_{sj} dq^s \wedge dq^j = 0$. Итак, в пересечении карт $\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i = \sum_{i=1}^{n} d\bar{p}_i \wedge d\bar{q}^i$, и поэтому это выражение корректно определяет дифференциальную форму на T^*M. Из координатной записи очевидно, что ω — замкнутая невырожденная форма.

12. Следствие. *Для любого гладкого многообразия M пространство T^*M ориентируемо.*

Изложенная конструкция дает не все симплектические многообразия, как показывает следующее утверждение.

13. Лемма. *Симплектическое многообразие T^*M некомпактно. Каноническая симплектическая структура на T^*M является точной, т. е. найдется такая форма $\alpha\in\Omega^1(T^*M)$, что $\omega=d\alpha$.*

Доказательство. В системе координат, описанной в п. 11, положим $\alpha=\sum_{i=1}^{n} p_i dq^i$. Надо доказать, что эта форма не зависит от выбора системы координат. Для этой цели дадим геометрически инвариантное определение формы $\alpha\in\Omega^1(T^*M)$. Каноническая проекция π: $T^*M\to M$ индуцирует отображение π_*: $T_{(x,\eta)}T^*M\to T_xM$, где $(x,\eta)\in T^*M$, $x\in M$, $\eta\in T_x^*M$. Положим $\alpha(\xi)=\eta(\pi_*(\xi))$, где $\xi\in T_{(x,\eta)}T^*M$.

Если $\xi=\xi_q^i\dfrac{\partial}{\partial q^i}+\xi_p^i\dfrac{\partial}{\partial p_i}$, то $\pi_*(\xi)=\xi_q^i\dfrac{\partial}{\partial q^i}$ и

$$\eta(\pi_*(\xi))=\eta\left(\xi_q^i\frac{\partial}{\partial q^i}\right)=\xi_q^i\eta\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)=\xi_q^i\eta_i. \tag{310}$$

Поэтому $\alpha(\xi)=\eta(\pi_*(\xi))=\eta_i dq^i(\xi)$, что и требовалось проверить.

14. Можно дать другое доказательство теоремы 11. Определим симплектическую структуру ω на T^*M равенством $\omega=d\alpha$. Очевидно, что $d\omega=d^2\omega=0$. Невырожденность формы ω вытекает из ее координатной записи.

15. Любая форма $\varphi\in\Omega^1(M)$ определяет сечение S_φ: $M\to T^*M$ кокасательного расслоения, где $S_\varphi(x)=\varphi_x\in T_x^*M$. Форма $\alpha\in\Omega^1(T^*M)$, построенная в п. 13, однозначно характеризуется следующим свойством универсальности: $S_\varphi^*(\alpha)=\varphi\in\Omega^1(M)$.

16. На практике иногда встречаются ситуации, когда симплектическая структура фазового пространства T^*M отличается от канонической. Оказывается, что возможен единый подход, когда та или иная геометрия фазового пространства объясняется наличием связности в одномерном тривиальном расслоении над пространством конфигураций.

17. Определение. Пусть в одномерном тривиальном расслоении p: $M\times\mathbf{R}\to M$ над многообразием M имеется связность, которая задается формой $\sigma\in\Omega^1(M)$. Дифференциальная форма $\hat\alpha\in\Omega^1(T^*M)$ называется *универсальной формой связности*, если для любой формы $\varphi\in\Omega^1(M)$ выполняется равенство $S_\varphi^*(\hat\alpha)=\varphi-\sigma$.

Универсальная форма связности всегда существует. Положим $\hat\alpha=\alpha-\pi^*(\sigma)$, где α — каноническая универсальная форма на T^*M. Тогда

$$S_\varphi^*(\alpha-\pi^*(\sigma))=S_\varphi^*(\alpha)-S_\varphi^*\pi^*(\sigma)=\omega-(\pi S_\varphi)^*(\sigma)=\omega-\sigma. \tag{311}$$

Единственность формы $\hat\alpha$ вытекает из единственности формы α. Итак, $\hat\alpha$ — универсальная форма связности тогда и только тогда, когда $\hat\alpha=\alpha-\pi^*(\sigma)$.

18. Определение. Пусть в одномерном тривиальном расслоении $p\colon M\times\mathbf{R}\to M$ над многообразием M имеется связность, которая задается формой $\sigma\in\Omega^1(M)$. В этой ситуации определим на T^*M симплектическую структуру ω формулой $\omega=d\hat{\alpha}=d\alpha-d\pi^*(\sigma)=d\alpha-\pi^*(d\sigma)$. Назовем эту структуру *симплектической структурой связности.*

Проверим невырожденность формы ω. Пусть $p_1, \ldots, p_n$, $q^1, \ldots, q^n$ — каноническая система координат на T^*M. Тогда

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x)\,dq^i, \tag{312}$$

$$\hat{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}p_i\,dq^i-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\,dq^i=\sum_{i=1}^{n}(p_i-\sigma_i(q))\,dq^i, \tag{313}$$

$$\omega=d\hat{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}dp_i\wedge dq^i-\sum_{j<k}\gamma_{jk}\,dq^j\wedge dq^k, \tag{314}$$

где $\gamma_{jk}=\frac{\partial\sigma_k}{\partial x_j}-\frac{\partial\sigma_j}{\partial x_k}$, $1\leqslant j,\ k\leqslant n$. Из этой записи следует невырожденность формы $\omega=d\hat{\alpha}$.

Заметим, что универсальная форма локально интегрируемой связности задает ту же симплектическую структуру, что и форма α.

19. Третий источник симплектических многообразий — кэлеровы многообразия. Пусть M^{2n} — комплексное многообразие с эрмитовой метрикой (ξ, η). Рассмотрим $\omega(\xi, \eta)=\operatorname{Im}(\xi, \eta)$. Очевидно, что ω — кососимметрическая невырожденная 2-форма. Для того чтобы получить симплектическую структуру на M^{2n}, необходимо равенство $d\omega=0$. В произвольном комплексном многообразии с эрмитовой метрикой это свойство не выполняется.

20. Определение. Комплексное многообразие, снабженное эрмитовой метрикой, называется *кэлеровым*, если мнимая часть ω скалярного произведения (ξ, η) есть замкнутая дифференциальная форма, т. е. $d\omega=0$.

21. Классический пример кэлерова многообразия дает комплексное проективное пространство $\mathbf{C}P^n$. Для построения канонической симплектической структуры на $\mathbf{C}P^n$ рассмотрим на пространстве $\mathbf{C}^{n+1}\setminus 0$ ковариантный тензор

$$\hat{F}=\left(\sum_{k=0}^{n}z_k\bar{z}_k\right)^{-2}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n}z_k\bar{z}_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}dz_k\otimes d\bar{z}_k\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{k=0}^{n}\bar{z}_k\,dz_k\right)\otimes\left(\sum_{k=0}^{n}z_k\otimes d\bar{z}_k\right)\right\}, \tag{315}$$

где $z_0, \ldots, z_n$ — стандартные координаты в $\mathbf{C}^{n+1}$.

22. Предложение. *На CP^n существует кэлерова метрика F такая, что $\pi^* F = \hat{F}$, где $\hat{F}$ — определенная выше форма, π: $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0 \to CP^n$ — естественная проекция.*

Это утверждение вытекает из следующих четырех очевидных свойств тензора $\hat{F}$: а) сужение тензора $\hat{F}$ на слой отображения π: $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0 \to CP^n$ равно нулю; б) тензор $\hat{F}$ инвариантен относительно естественного действия группы $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus 0$ на $\mathbf{C}^{n+1} \setminus 0$: $z(z_0, \ldots, z_n) = (zz_0, \ldots, zz_n)$, $z \in \mathbf{C}^*$; в) сужение тензора $\hat{F}$ на ортогональное дополнение к слою относительно плоской метрики в $\mathbf{C}^{n+1}$ положительно определено; г) дифференциальная форма $d(\operatorname{Im} F)$ степени три на CP^n инвариантна относительно отображений, индуцированных унитарными преобразованиями A пространства $\mathbf{C}^{n+1}$, $A \in \mathrm{U}(n+1)$.

23. Определение. Построенная метрика F на проективном пространстве CP^n называется *метрикой Фубини — Штуди*, см. подробности в [293].

24. Определение. *Алгебраическим подмножеством* в CP^n называется всякое подмножество вида

$$V(f_1, \ldots, f_N) = \{P = (a_0 : \ldots : a_n) \in CP^n \mid f_1(a_0 : \ldots a_n) = \\ \ldots = f_N(a_0 : \ldots : a_n) = 0\}, \qquad (316)$$

где $\{f_1, \ldots, f_N\}$ — любое множество однородных многочленов в кольце $\mathbf{C}[X_0, \ldots, X_n]$.

25. Если градиенты $\operatorname{grad} f_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ линейно независимы, то алгебраическое множество $V(f_1, \ldots, f_N)$ является комплексным многообразием, лежащим в CP^n, что непосредственно вытекает из теоремы о неявных функциях. Пусть $j: V(f_1, \ldots, f_N) \to CP^n$ — вложение комплексного многообразия $V(f_1, \ldots, f_N)$ в комплексное проективное пространство CP^n и $\Omega = j^* \operatorname{Im} F$, где F — метрика Фубини — Штуди. Дифференциальная форма Ω задает на многообразии $V(f_1, \ldots, f_N)$ симплектическую структуру. Это утверждение вытекает из того, что $V(f_1, \ldots, f_N)$ — комплексное подмногообразие в CP^n. Изложенная конструкция дает примеры компактных кэлеровых многообразий и, в частности, компактных симплектических многообразий.

26. Определение. *Ограниченной областью* D назовем ограниченное открытое связное подмножество в пространстве $\mathbf{C}^N$.

27. Теорема. *Любая ограниченная область является кэлеровым многообразием и, в частности, симплектическим многообразием.*

Приведем схему доказательства этой классической теоремы, см. подробности в [293]. Обозначим $H(D)$ гильбертово пространство голоморфных комплексных функций на D, для которых $\int\limits_D |f|^2 d\mu < \infty$, где $d\mu$ — мера Лебега в $\mathbf{R}^{2N} \cong \mathbf{C}^N$. Скалярное произведение в $H(D)$ имеет вид

$$(f, g) = \int\limits_D f(\zeta)\overline{g(\zeta)}d\mu(\zeta) \tag{317}$$

и $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Функции, совпадающие всюду вне некоторого множества меры 0, рассматриваются как одинаковые элементы пространства $L^2(D)$, $H(D) \subset L^2(D)$ — множество функций, голоморфных в D. Множество $H(D)$ является замкнутым линейным подпространством в $L^2(D)$ и, следовательно, гильбертовым пространством относительно скалярного произведения (f, g). Выберем произвольный ортонормированный базис φ_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ пространства $H(D)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)}$ равномерно сходится на каждом компактном подмножестве в $D \times D$. Его сумма обозначается $K(z, \zeta)$ и не зависит от выбора ортонормированного базиса. Для области D определим комплексное тензорное поле F на D равенством

$$F = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant N} \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \ln K(z, \bar{z})\, dz_i \otimes d\bar{z}_j, \tag{318}$$

где $z_1, \ldots, z_N$ — стандартные координаты в $\mathbf{C}^N$.

Тензорное поле F задает на D структуру кэлерова многообразия и, следовательно, симплектическую структуру.

28. Определение. Функция $K(z, \zeta)$ называется *кернфункцией Бергмана* области D, а метрика $\mathrm{Re}\, F$, индуцированная построенной кэлеровой структурой, называется *метрикой Бергмана* в области D.

29. Имеются компактные симплектические многообразия, не обладающие кэлеровой структурой. Для этой цели рассмотрим *многообразие Тёрстона*, являющееся факторпространством $M^4 = \mathbf{R}^4/\Gamma$, где Γ — дискретная группа преобразований, порожденная единичными сдвигами вдоль осей x_1, x_2, x_3 вместе с преобразованием

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1 + x_2, x_2, x_3, x_4 + 1). \tag{319}$$

Симплектическая форма σ многообразия M^4 поднимается в форму $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ на пространстве $\mathbf{R}^4$. Итак, M^4 является расслоением над двумерным тором T^2 со слоем T^2. Если $\beta_k(W)$ обозначает k-е число Бетти пространства W, то для *многообразия Тёрстона* имеют место равенства $\beta_1(M) = \beta_3(M) = 3$. С другой стороны, известно, что для кэлерова многообразия эти числа четные, см., например, [82].

30. Классическая конструкция раздутия из алгебраической геометрии (см. [82]) переносится в теорию симплектических многообразий. Будем называть ее в этом случае перестройкой симплектического многообразия. Если симплектическое многообразие (M, ω) вложено в симплектическое многообразие (X, σ), то можно определить операцию перестройки многообразия X вдоль M и получить новое симплектическое многообразие $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$. Итак, пусть M — компактное подмногообразие в X коразмерности $2k$ такое, что структурная группа его нормального расслоения $E \to M$ редуцирована к унитарной группе $\mathrm{U}(k)$. Предположим, что $k \geqslant 2$, так как в противном случае будем считать, что при перестройке многообразие X не изменяется. Пусть U — трубчатая окрестность подмногообразия M в X, V — подрасслоение в E на диски, гомеоморфное U, PE — проективизация расслоения E, $\overline{PE}$ — комплексное линейное расслоение над проективизацией PE. Имеем отображение φ: $\overline{PE} \to E$, так как слой L над точкой $x \in M$ можно рассматривать как подпространство в $\mathbf{C}^k$.

31. Определение. *Перестройкой* $\tilde{X}$ *многообразия* X вдоль подмногообразия M называется многообразие

$$\tilde{X} = \overline{X \setminus U} \bigcup_{\partial\varphi^{-1}(V)} \varphi^{-1}(V), \tag{320}$$

где $\partial\varphi^{-1}(V)$ отождествляется с ∂V очевидным образом.

Подробности этой конструкции см. в работе [434]. Там же можно найти построение симплектической структуры на перестройках $\tilde{X}$, описанных выше.

32. Общий метод построения так называемых однородных симплектических многообразий связан с теорией групп Ли и будет подробно обсуждаться ниже. Соответствующие симплектические многообразия играют важную роль не только в теории гамильтоновых систем, но и в теории групп Ли и их представлений, см., например, [124].

33. Теорема. *Каждая орбита коприсоединенного представления группы Ли обладает симплектической структурой.*

Доказательство этой теоремы см. в § 22.

34. Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие. Форма ω определяет следующие топологические данные: класс когомологий $a = [\omega] \in H^2(M, \mathbf{R})$, гомотопический класс редукции структурной группы касательного расслоения многообразия M к группе $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$ и, следовательно, гомотопический класс $[J]$ почти комплексной структуры на M. Громов показал, что если M — открытое многообразие, то любая пара $(a, [J])$ может быть реализована некоторой симплектической формой на многообразии M, см. [376].

35. Замечание. Пусть X, Y — симплектические многообразия с формами ω_X, ω_Y. Тогда произведение $X \times Y$ превращается в симплектическое многообразие, если снабдить его 2-формой

$$\omega_{X \times Y} = \rho_X^* \omega_X + \rho_Y^* \omega_Y, \tag{321}$$

где ρ_X: $X \times Y \to X$ — проекция на X, а ρ_Y — проекция на Y. Используя примеры симплектических многообразий, описанных выше, мы тем самым получим много новых примеров.

36. Конструкция. Пусть A — локальная алгебра (коммутативная, с единицей), $\dim A < \infty$, максимальный идеал которой имеет коразмерность 1. Тогда определено гладкое многообразие *A-значных точек*, которое будем обозначать M^A, см. [518]. Точка $\xi \in M^A$ есть гомоморфизм ξ: $C^\infty(M) \to A$ алгебры $C^\infty(M)$ в A. Имеется каноническое расслоение π: $M^A \to M$: $f(\pi(\xi)) = \operatorname{aug} \xi(f)$, для любой функции $f \in C^\infty(M)$ и любой точки $\xi \in M^A$, aug: $A \to \mathbf{R}$.

Касательное пространство $T_\xi M^A$ описывается следующим образом [463], [464].

37. Лемма. *Для каждой точки $\xi \in M^A$ отображение $W \to (\mathrm{id}_A \otimes W) \circ \gamma$ задает изоморфизм пространства $T_\xi M^A$ на* $\mathrm{Der}(C^\infty(M), A)$, γ: $C^\infty(M) \to A \otimes C^\infty(M^A)$, $f \to f^A(\xi) = \xi(f)$.

38. Лемма. *Отображение $X \to (\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma$ задает изоморфизм $C^\infty(M^A)$-модуля $D(M^A)$ на модуль* $\mathrm{Der}(C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A))$.

39. Замечание. Если A — фробениусова алгебра, то конструкция расширения M^A многообразий переводит симплектические многообразия в симплектические, т. е. если на M имеется симплектическая структура, то и на M^A также имеется естественная симплектическая структура. Это замечание принадлежит А. В. Браилову, и оно получается в рамках тензорных расширений алгебр Ли, см. § 38.

40. Четвертый источник симплектических многообразий возникает из топологии. Имеет место следующая

41. Теорема (С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко). *Пусть M^3 — любое гладкое компактное замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие. Тогда прямое произведение $M^3 \times D^1$ (где D^1 — отрезок) является симплектическим многообразием.*

42. Замечание. В качестве следствия отметим, что любое замкнутое ориентируемое 3-многообразие M^3 является поверхностью постоянной энергии некоторой гладкой гамильтоновой системы дифференциальных уравнений (определение гамильтоновых полей см. в п. 7 § 19).

§ 19. Гамильтоновы векторные поля

1. Определение. Пусть X — векторное поле, ω — дифференциальная форма степени k на многообразии M. Определим операцию *внутреннего произведения* $\iota(X)\omega = X \llcorner \omega$ формулой

$$\iota(X)\omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \omega(Y_1, \ldots, Y_i, X, Y_{i+1}, \ldots, Y_{k-1}) \qquad (322)$$

и $\iota(X)f = 0$ для любой гладкой функции $f \in C^\infty(M)$.

2. Если $f\in C^{\infty}(M)$ — гладкая функция, то $\iota(X)df=df(X)=Xf$ — производная функция f вдоль векторного поля X.

3. Если $\omega\in\Omega^2(M)$ — форма степени два, то

$$[\iota(X)\omega](Y)=\omega(X, Y)-\omega(Y, X)=2\omega(X, Y). \tag{323}$$

4. Лемма. *Операция внутреннего произведения обладает следующими свойствами*: а) $\iota(X+Y)=\iota(X)+\iota(Y)$; б) $\iota(aX)=a\iota(X)$ *для любой гладкой функции* $a\in C^{\infty}(M)$; в) $\iota(X)\iota(Y)=-\iota(Y)\iota(X)$; г) $\iota(X)\iota(X)=0$.

5. В п. 3 § 18 было определено каноническое отождествление f: $TM\to T^*M$ в случае, когда M — симплектическое многообразие с симплектической структурой ω. На языке внутреннего произведения этот изоморфизм задается равенством $f(X)=\iota(X)\omega$.

6. Определение. Векторное поле X на симплектическом многообразии (M, ω) называется *локально гамильтоновым*, если $d(\iota(X)\omega)=0$.

7. Определение. Поле X на симплектическом многообразии (M, ω) называется *гамильтоновым*, если $\frac{1}{2}\iota(X)\omega=df$. Функция $(-f)$ называется *производящей функцией*, или *гамильтонианом* векторного поля X.

8. Введем обозначения: $H(M)$ — гамильтоновы векторные поля на M, а $H_0(M)$ — локально гамильтоновы векторные поля. Имеет место включение $H(M)\subset H_0(M)$, так как $d^2=0$.

9. Для данной функции F можно построить гамильтоново векторное поле X с гамильтонианом F. Оно однозначно определяется из равенства $dF=-\frac{1}{2}\iota(X)\omega$, т. е. для любого векторного поля Y должно выполняться равенство $dF(Y)=-\omega(X, Y)$. Векторное поле X будет называться *косым градиентом* функции F и обозначаться символом $X=\operatorname{sgrad} F$.

10. Предложение. *Пусть* $x^1, \ldots, x^n$ — *локальная система координат на симплектическом многообразии* (M, ω), ω_{ij} — *координаты формы* ω *и* ω^{ij} *определены из равенства* $\omega^{is}\omega_{sj}=\delta^i_j$. *Тогда* $(\operatorname{sgrad} F)^i=\omega^{ij}\frac{\partial F}{\partial x^j}$, *т. е. векторное поле* $X=\operatorname{sgrad} F$ *получается стандартной операцией поднятия индексов у ковекторного поля* $\partial F/\partial x^i$.

Доказательство. Равенство $dF(Y)=-\omega(X, Y)$ в координатах перепишется в виде $\frac{\partial F}{\partial x^i}Y^i=-\omega_{ji}X^jY^i$. Поскольку Y — произвольное векторное поле, то $\partial F/\partial x^i=-\omega_{ji}X^j=\omega_{ij}X^j$, и отсюда вытекает наше утверждение.

11. Определение. *Скобкой Пуассона* $\{f, g\}$ функций f, $g \in C^{\infty}(M)$ на симплектическом многообразии (M, ω) называется функция, определенная равенством

$$\{f, g\} = -\omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}. \tag{324}$$

Второе равенство имеет место в силу соотношения

$$\omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = \omega_{ij} \omega^{ij_1} \frac{\partial f}{\partial x^{j_1}} \omega^{jj_2} \frac{\partial g}{\partial x^{j_2}} =$$

$$= \omega^{ij_1} \frac{\partial f}{\partial x^{j_1}} \delta_i^{j_2} \frac{\partial g}{\partial x^{j_2}} = \omega^{j_2 j_1} \frac{\partial f}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial g}{\partial x^{j_2}} = -\omega^{j_1 j_2} \frac{\partial f}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial g}{\partial x^{j_2}}. \tag{325}$$

12. Из определения скобки Пуассона вытекает цепочка равенств

$$\{f, g\} = -\omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = -dg(\operatorname{sgrad} f) = df(\operatorname{sgrad} g). \tag{326}$$

13. Определение. Если скобка Пуассона $\{f, g\}$ двух функций f и g на симплектическом многообразии (M, ω) обращается в нуль, то говорят, что *функции* f, g *находятся в инволюции*.

14. Предложение. *Функция F является первым интегралом системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ тогда и только тогда, когда $\{F, H\} = 0$.*

Доказательство. Напомним, что функция F является первым интегралом системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = v(x)$, если $v(x) F \equiv 0$. В нашем случае имеет место равенство

$$(\operatorname{sgrad} H) F = dF(\operatorname{sgrad} H) = \{F, H\} = 0. \tag{327}$$

15. Следствие. *Гамильтонова система $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H(x)$ всегда имеет первый интеграл — гамильтониан H.*

Доказательство. Действительно, $\{H, H\} = \omega(\operatorname{sgrad} H, \operatorname{sgrad} H) = 0$ в силу кососимметричности скалярного произведения, ассоциированного с симплектической структурой ω.

16. В терминах скобки Пуассона очень просто описывается геометрия гамильтоновых систем на подмногообразиях симплектических многообразий. Следующие пункты посвящены этому вопросу.

17. Определение. Пусть на гладком многообразии N заданы функции $f_1, \ldots, f_m$, которые функционально независимы на подмногообразии $N_f = \{x \in N \mid f_j(x) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, m\}$, гладко вложенном в N. Набор функций $f_1, \ldots, f_m$ называется *ограничениями*, или *связями*.

18. Лемма (см. [90], [91], [337]). *Предположим, что на симплектическом многообразии M^{2n} заданы связи $f_1, \ldots, f_{2m}$,*

$m<n$. Ограничение ω_f симплектической формы ω на подмногообразие M_f является невырожденной 2-формой тогда и только тогда, когда матрица $\|\{f_i, f_j\}_\omega\|$, составленная из скобок Пуассона $\{f_i, f_j\}$ связей $f_1, \ldots, f_{2m}$, не вырождена в каждой точке $x \in M_f$ подмногообразия M_f.

Доказательство. Если матрица $\|\{f_i, f_j\}_\omega\|$ в точке $x \in M_f$ вырождена, то найдутся такие числа $c_1, \ldots, c_{2m}$, что $\sum_{k=1}^{2m} c_k \{f_j, f_k\} = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, 2m$, причем все c_i одновременно не равны нулю. В силу равенства (326) имеет место соотношение

$$df_j\left(\sum_{k=1}^{2m} c_k \operatorname{sgrad} f_k\right) = \sum_{k=1}^{2m} c_k \{f_j, f_k\} = 0, \tag{328}$$

а это равенство означает, что вектор $v = \sum_{j=1}^{2m} c_j \operatorname{sgrad} f_j$ принадлежит касательному пространству $T_x M_f$. Поскольку функции $f_1, \ldots, f_{2m}$ по определению связей функционально независимы, то градиенты $\operatorname{grad} f_i$ линейно независимы. Операция поднятия индексов с помощью симплектической структуры является изоморфизмом, который переводит $\operatorname{grad} f_i$ в $\operatorname{sgrad} f_i$, следовательно, вектор v отличен от нуля. Итак,

$$(u, v) = \left(\sum_{k=1}^{2m} c'_k \operatorname{sgrad} f_k, \ \sum_{j=1}^{2m} c_j \operatorname{sgrad} f_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2m} c'_k df_k \left(\sum_{j=1}^{2m} c_j \operatorname{sgrad} f_j\right) = 0 \tag{329}$$

для любого касательного к M_f вектора $u \in T_x M_f$, т. е. форма ω_f вырождена на M_f, здесь (ξ, η) — скалярное произведение, ассоциированное с симплектической структурой ω.

Обратно, пусть для некоторого ненулевого вектора $v \in T_x M_f$ выполняется равенство $(u, v) = 0$ для всех $u \in T_x M_f$. Тогда $v = \sum_{j=1}^{2m} a_j \operatorname{sgrad} f_j$, причем не все a_j, $j = 1, 2, \ldots, 2m$, равны нулю, и, следовательно,

$$\left\{f_j, \sum_{k=1}^{2m} a_k f_k\right\}_\omega = df_j\left(\operatorname{sgrad} \sum_{k=1}^{2m} a_k f_k\right) = df_j(v) = 0, \tag{330}$$

так как $v \in T_x M_f$. Итак, если ω вырождена на M_f, то матрица $\|\{f_i, f_j\}\|$ сингулярна.

19. Если матрица $\|\{f_i, f_j\}\|$ не вырождена, то 2-форма $\omega_f \in \Omega^2(M_f)$ определяет на M_f симплектическую структуру, так как $d\omega_f=(d\omega)_f=0$. Пусть H — гладкая функция на M (гамильтониан). Обозначим символом $\operatorname{sgrad}(H|M_f)$ гамильтоново векторное поле на M_f относительно симплектической структуры ω_f, а символом $\operatorname{sgrad} H$ — гамильтоново векторное поле на M относительно данной симплектической структуры ω на M. Вообще говоря, $\operatorname{sgrad}(H|M_f)\neq(\operatorname{sgrad} H)|M_f$. Однако имеет место следующее утверждение.

20. Лемма (см. [192], [337]). *Равенство* $\operatorname{sgrad}(H|M_f)=(\operatorname{sgrad} H)|M_f$ *имеет место тогда и только тогда, когда на* M_f *выполняется соотношение* $\{H, f_j\}=0$, $j=1, 2, \ldots, 2m$. *Введем обозначение* $\|\{f_i, f_j\}_\omega\|^{-1}=\|f_{pq}^{-1}\|$. *Тогда для любой функции* $F\in C^\infty(M)$ *имеет место равенство* $\operatorname{sgrad}(F|M_f)=(\operatorname{sgrad} H)|M_f$, *где*

$$H=F+\sum_{j=1}^{2m} f_j \sum_{k=1}^{2m} f_{jk}^{-1}\{F, f_k\}_\omega. \tag{331}$$

Доказательство. Если $\{H, f_j\}_\omega=dH(\operatorname{sgrad} f_j)=0$ на M_f для $j=1, 2, \ldots, 2m$, то $\operatorname{sgrad} H=\Omega(\operatorname{sgrad}) H\in T_xM_f$ для всех $x\in M_f$, и поэтому $\operatorname{sgrad}(H|M_f)=(\operatorname{sgrad} H)|M_f$, где Ω — невырожденная кососимметрическая матрица. Обратно, если $\operatorname{sgrad}(H|M_f)=(\operatorname{sgrad} H)|M_f\in T_x(M_f)$, $x\in M_f$, то $\{H, f_j\}_\omega=dH(\operatorname{sgrad} f_j)=0$, $j=1, 2, \ldots, 2m$, для всех $x\in M_f$. Последнее утверждение следует из равенства

$$\operatorname{sgrad}(F|M_f)=\operatorname{sgrad}(H|M_f)=(\operatorname{sgrad} H)|M_f. \tag{332}$$

Рассмотрим вопрос о вычислении скобок Пуассона на M_f. Имеет место следующая лемма Дирака (см. [90], [91]).

21. Лемма. *Пусть* $\{h, g\}_{\omega_f}$ — *скобка Пуассона функций* $h, g\in C^\infty(M_f)$ *относительно симплектической структуры* ω_f *на* M_f. *Тогда*

$$\{h, g\}_{\omega_f}=\{h, g\}_\omega-\sum_{k,j=1}^{2m}\{h, f_j\}_\omega f_{jk}^{-1}\{f_k, g\}_\omega, \tag{333}$$

где $\|f_{jk}^{-1}\|=\|\{f_j, f_k\}\|^{-1}$. *Правая часть вычисляется для произвольного гладкого продолжения функций* $h, g\in C^\infty(M_f)$ *до функций* $h, g\in C^\infty(V)$ *на открытой окрестности* V *подмногообразия* M_f *в* M.

Доказательство. Предположим, что $\{h, f_j\}_\omega=\{g, f_j\}_\omega=0$, $j=1, 2, \ldots, 2m$. Тогда по предыдущей лемме

$$\{h, g\}_{\omega_f}=-\omega_f(\operatorname{sgrad}(h|M_f), \operatorname{sgrad}(g|M_f))=$$

$$=-\omega(\operatorname{sgrad} h, \operatorname{sgrad} g)=\{h, g\}_\omega. \tag{334}$$

В общем случае имеем равенства

$$\{h, g\}_{\omega_f} = \left\{h + \sum_{j,k=1}^{2m} f_{jk}^{-1} \{h, f_k\}_\omega f_j,\ g + \sum_{i,l=1}^{2m} f_{il}^{-1} \{g, f_l\}_\omega f_i\right\}_{\omega_f} =$$

$$= \left\{h + \sum_{j,k=1}^{2m} f_{jk}^{-1} \{h, f_k\}_\omega f_j,\ g + \sum_{i,l=1}^{2m} f_{il}^{-1} \{g, f_l\}_\omega f_i\right\}_{\omega} =$$

$$= \{h, g\}_\omega + \sum_{k,j=1}^{2m} f_{jk}^{-1} \{h, f_k\}_\omega \{f_j, g\}_\omega + \sum_{i,l=1}^{2m} f_{il}^{-1} \{h, f_i\}_\omega \{g, f_l\}_\omega +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l=1}^{2m} f_{jk}^{-1} f_{il}^{-1} \{h, f_k\}_\omega \{g, f_l\}_\omega f_{ji} =$$

$$= \{h, g\}_\omega - \sum_{j,k=1}^{2m} \{h, f_j\} f_{jk}^{-1} \{f_j, g\}_\omega, \quad (335)$$

из которых следует наше утверждение.

22. В заключение этого параграфа рассмотрим несколько примеров вычисления гамильтоновых векторных полей и скобок Пуассона.

23. Лемма. *Пусть $T^*\mathbf{R}^n$ — кокасательное расслоение над пространством $\mathbf{R}^n$ с декартовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$. На $T^*\mathbf{R}^n$ имеется каноническая симплектическая структура* $\omega = dp_1 \wedge dx^1 + \ldots + dp_n \wedge dx^n$, см. п. 11 § 18. *Гамильтоново векторное поле* $\operatorname{sgrad} H$ *на $T^*\mathbf{R}^n$ относительно формы ω имеет вид*

$$\operatorname{sgrad} H = \{\dot p_1, \ldots, \dot p_n, \dot x^1, \ldots, \dot x^n\} = \left(-\frac{\partial H}{\partial x^1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial x^n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right).$$

Доказательство. Матрица $\|\omega_{ij}\|$ формы ω равна

$$\|\omega_{ij}\| = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right\|, \quad \|\omega_{ij}\|^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right\|. \quad (336)$$

Поэтому если $(\operatorname{sgrad} H)^i = \omega^{ij} \dfrac{\partial H}{\partial x^j} = a^i$, то

$$\left\|\begin{matrix} a^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a^{2n} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right\| \left\|\begin{matrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \frac{\partial H}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x^n} \end{matrix}\right\|. \quad (337)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{p}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{x}$$

24. Лемма. *В условиях леммы 23 скобка Пуассона $\{F, H\}$ функций F, H на кокасательном расслоении $T^*\mathbf{R}^n$ вычисляется по формуле*

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right). \tag{338}$$

Доказательство вытекает из определения скобки Пуассона и леммы 23.

25. Определение. Система координат $(x^1, \ldots, x^n, p^1, \ldots \ldots, p^n)$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) называется *канонической*, если $\{x^i, x^j\} = \{p^i, p^j\} = 0$ и $\{x^i, p^j\} = \delta^{ij}$.

26. Лемма. *На кокасательном расслоении T^*M^n рассмотрим симплектическую структуру ω связности, задаваемой формой $\sigma \in \Omega^1(M^n)$. Каноническая система координат на T^*M^n для формы ω связана со стандартными координатами $(x^1, \ldots \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ на T^*M^n функциями перехода $x^i = x^i$, $\tilde{p}_j = p_j - \sigma_j(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, где σ_j — координаты формы σ.*

Доказательство. Система функций $x_1, \ldots, x_n$, $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n$ образует систему координат, так как обратной заменой будет $p_i = \tilde{p}_i + \sigma_i(x)$. Эти координаты являются каноническими, так как $\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^{n} (p_i - \sigma_i(x))\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i\, dx_i$ и, следовательно, $d\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^{n} d\tilde{p}_i \wedge dx^i$, см. п. 18 § 18.

27. Лемма. *На кокасательном расслоении T^*M^n к многообразию M^n рассмотрим симплектическую структуру ω связности, задаваемой формой $\sigma \in \Omega^1(M^n)$. Если $H, H_1, H_2 \in C^\infty(T^*M^n)$ — гладкие функции на T^*M^n, то*

$$\operatorname{sgrad} H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \tag{339}$$

и $\{H_1, H_2\} = \{H_1, H_2\}_{cl} + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial H_2}{\partial p_j}$, где $\{H_1, H_2\}_{cl}$ — классическая скобка Пуассона на T^*M^n, описанная в п. 24, $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial x^j} \right)$.

Доказательство вытекает из равенства

$$\{H_1, H_2\} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x^i} \frac{\partial H_2}{\partial x^j} \{x^i, x^j\} + \frac{\partial H_1}{\partial x^i} \frac{\partial H_2}{\partial p_j} \{x^i, p_j\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial H_2}{\partial x^j} \{p_i, x^j\} + \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial H_2}{\partial p_j} \{p_i, p_j\} \right). \tag{340}$$

28. Замечание. На кокасательном расслоении $T^*\mathbf{R}^n$ уравнения Гамильтона

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \frac{dx^j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad i, j=1, \ldots, n, \tag{341}$$

переписываются в терминах скобки Пуассона в следующем виде:

$$\frac{dp_i}{dt}=\{p_i, H\}, \quad \frac{dx^j}{dt}=\{x_j, H\}, \qquad i, j=1, \ldots, n. \tag{342}$$

Действительно, в силу уравнений Гамильтона имеем

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x^s}\frac{dx^s}{dt}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt}=$$
$$=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x^s}\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial x^s}\right)=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F, H\}. \tag{343}$$

§ 20. Геодезические потоки

1. Пусть M — компактное гладкое риманово многообразие, т. е. на M задано такое тензорное поле g_{ij}, что: а) $g_{ij}=g_{ji}$; б) $g_{ij}\xi^i\xi^j>0$ для $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^n)\neq 0$. Определим g^{ij} из условия $g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$. Тензорное поле g^{ij} определяет скалярное произведение в каждом кокасательном пространстве T^*_xM, в частности, для $p\in T^*M$ имеем $\|p\|^2=g^{ij}p_ip_j$. На пространстве T^*M имеется каноническая симплектическая структура ω, см. п. 11 § 18. Рассмотрим на T^*M функцию Гамильтона

$$H(x, p)=2^{-1}g^{ij}(x)p_ip_j=2^{-1}\|p\|^2$$

и отвечающий ей гамильтонов поток $\dot{x}=\operatorname{sgrad} H$ относительно симплектической структуры ω на T^*M. Поскольку H — первый интеграл этого потока, то единичный кокасательный пучок $T^*_1M=\{x\in T^*M \mid \|p\|=1\}$ инвариантен относительно потока $\operatorname{sgrad} H$.

2. Определение. Ограничение потока $\dot{x}=\operatorname{sgrad} H$, где $H=2^{-1}g^{ij}p_ip_j$, на T^*_1M называется *геодезическим потоком* на многообразии M.

Напомним некоторые понятия, связанные с аффинной геометрией, подробности см., например, в [102].

3. Определение. Говорят, что на многообразии M задана *аффинная связность*, если в каждой системе координат на M задан набор функций Γ^i_{jk}, который при переходе от одной системы координат к другой меняется по закону

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{344}$$

4. Определение. Если на многообразии M задана аффинная связность Γ^i_{jk} и тензорное поле $V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, то определен *абсолютный дифференциал* $DV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ поля $V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ формулой

$$DV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=dV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}+\Gamma^{i_1}_{rs}V^{ri_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}dx^s+\ldots+\Gamma^{i_p}_{rs}V^{i_1\ldots i_{p-1}r}_{j_1\ldots j_q}dx^s-$$
$$-\Gamma^r_{j_1s}V^{i_1\ldots i_p}_{rj_2\ldots j_q}dx^s-\ldots-\Gamma^r_{j_qs}V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}r}dx^s, \quad (345)$$

а также *ковариантная производная* $DV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\nabla_k V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}dx^k$. Если тензорное поле $V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ задано вдоль кривой $\{x^s(t)\}$, то определена ковариантная производная $DV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}/dt$ формулой

$$\frac{DV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{dt}=\frac{dV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{dt}+\Gamma^{i_1}_{rs}V^{ri_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{dx^s}{dt}+\ldots-\Gamma^r_{j_qs}V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}r}\frac{dx^s}{dt}. \quad (346)$$

5. Определение. Аффинная связность Γ^i_{jk} называется *согласованной с римановой метрикой* g_{ij}, если $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$ и $Dg_{ij}=0$.

6. Теорема (см. [102]). *Для любой метрики* g_{ij} *на многообразии* M *существует единственная согласованная с ней аффинная связность, причем она вычисляется по формуле*

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right). \quad (347)$$

7. Определение. Тензорное поле $V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ называется *параллельным* вдоль кривой $x(t)$, если $DV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}/dt=0$. Кривая $x(t)$ называется *геодезической*, если ее касательный вектор $dx(t)/dt$ параллелен вдоль кривой $x(t)$.

8. Лемма. *Пусть* $x^1, \ldots, x^n$ — *локальная система координат на многообразии* M^n. *Кривая* $x(t)=(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ *на многообразии* M^n *с аффинной связностью* Γ^i_{jk} *является геодезической тогда и только тогда, когда*

$$\frac{d^2x^i(t)}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0. \quad (348)$$

Эта система имеет однозначно определенное решение, если задать начальные данные $x^i(0)=x^i_0$, $\dot{x}^i(0)=v^i_0$.

9. Лемма. *Кривая* $x(t)$ *на поверхности* $M^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$ *является геодезической относительно аффинной связности, согласованной с метрикой, индуцированной из* $\mathbf{R}^{n+1}$, *тогда и только тогда, когда вектор ускорения* $d^2x(t)/dt^2$ *перпендикулярен касательной плоскости* $T_{x(t)}M^n$.

Доказательство. Из п. 6 следует, что для метрики $g_{ij}=(\partial r/\partial u^i, \partial r/\partial u^j)$ согласованная аффинная связность Γ^i_{jk} равна $\Gamma^i_{jk}=g^{is}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^s}\right)$, где $r=r(u^1, \ldots, u^n)$ — параметрическое задание поверхности M^n, см. [102]. Условие перпендикулярности $\frac{d^2x(t)}{dt^2}\perp M^n$ имеет вид $\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{\partial r}{\partial u^k}\right)=0$. Поскольку

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial u^i}\dot{u}^i\right)=\frac{\partial^2 r}{\partial u^i\partial u^j}\dot{u}^i\dot{u}^j+\frac{\partial r}{\partial u^i}\ddot{u}^i, \tag{349}$$

то

$$\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{\partial r}{\partial u^k}\right)=\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i\partial u^j}, \frac{\partial r}{\partial u^k}\right)\dot{u}^i\dot{u}^j+\left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^k}\right)\ddot{u}^i, \tag{350}$$

т. е. $g_{ik}\ddot{u}^i+g_{ks}\Gamma^s_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j=0$ или $\ddot{u}^k+\Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j=0$, что совпадает с уравнениями геодезических.

10. Метрика g_{ij} устанавливает естественный диффеоморфизм $f\colon TM\to T^*M$, который линеен на каждом слое. Если $v\in TM$, то $f(v)(x)=g_{ij}v^ix^j$. Обратное отображение f^{-1} задается поднятием индексов $f^{-1}(p)^i=g^{ij}p_j$. Следующая теорема проясняет смысл термина «геодезический поток».

11. Теорема. *При естественном изоморфизме $T^*M\to TM$ траектории геодезического потока переходят в кривые, составленные из касательных векторов к геодезическим линиям в M. Отдельное преобразование T^t переводит пару (x_0, p_0) в пару $(x_t, p_t)=T^t(x_0, p_0)$, где для получения x_t следует провести геодезическую через точку $x_0\in M$ в направлении p_0 и тогда x_t отстоит от x_0 на расстояние t вдоль этой геодезической, а вектор p_t касается этой геодезической в x_t и направлен так же, как и p_0.*

Доказательство. Запишем уравнения Гамильтона для функции $H=2^{-1}g^{ij}p_ip_j$:

$$\begin{aligned}\frac{dq^i}{dt}&=g^{ij}p_j,\\ \frac{dp_i}{dt}&=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{kl}}{\partial q^i}p_kp_l.\end{aligned}\tag{351}$$

Перейдем к контравариантным переменным $v^i=g^{ij}p_j$: $dq^i/dt=v^i$ и

$$\frac{dv^i}{dt}=\frac{\partial g^{ij}}{\partial q^k}v^kp_j-\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial q^j}p_kp_l=\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}g_{jl}v^kv^l-\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial q^j}g_{km}g_{lm}v^mv^n. \tag{352}$$

Из равенства $g^{kl}g_{lm}=\delta^k_m$ следует $\frac{\partial g^{kl}}{\partial q^j}g_{lm}=-g^{kl}\partial g_{lm}/\partial q^j$, и поэтому

$$g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial q^j}g_{km}g_{ln}v^mv^n=-g^{ij}g^{kl}g_{km}\frac{\partial g_{ln}}{\partial q^j}v^mv^n=-g^{ij}\frac{\partial g_{ln}}{\partial q^j}v^lv^n. \tag{353}$$

Следовательно,

$$\frac{dv^i}{dt}=\frac{\partial g^{ij}}{\partial q^k}g_{jl}v^kv^l+\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j}v^kv^l=\left(\frac{\partial g^{ij}}{\partial q^k}g_{jl}+\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j}\right)v^kv^l=$$
$$=\left(\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j}-g^{ij}\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k}\right)v^kv^l=-\frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^j}\right)v^kv^l=$$
$$=-\Gamma^i_{kl}v^kv^l, \quad (354)$$

так как $g^{ij}\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k}v^kv^l=g^{ij}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l}v^lv^k$.

12. Замечание. Пусть поверхность $M^2\subset\mathbf{R}^3$ представлена в виде графика $z=f(x, y)$. Тогда простые вычисления показывают, что гамильтониан геодезического потока на M^2 имеет вид

$$H=\frac{(1+f_y^2(x, y))p_x^2-2f_xf_yp_xp_y+(1+f_x^2(x, y))p_y^2}{2(1+f_x^2+f_y^2)}, \quad (355)$$

где x, y, p_x, p_y — координаты в T^*M^2, $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}$ и $f_y=\frac{\partial f}{\partial y}$.

13. Рассмотрим геодезический поток на сфере $S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$. В этом частном случае продемонстрируем конструкцию расширения геодезических потоков, принадлежащую Мозеру. Она превращает геодезический поток на нелинейном многообразии S^n в гамильтонов поток на линейном пространстве. Уравнения геодезического потока на S^n имеют вид $\ddot{x}=\lambda x$, см. п. 9. Множитель Лагранжа λ найдем из условия $|x|=1$. Из равенства $(x, x)=1$ следует $(\ddot{x}, x)+(\dot{x}, \dot{x})=0$, следовательно, $\lambda(x, x)+(\dot{x}, \dot{x})=0$, т. е. $\lambda=-|\dot{x}|^2$. Итак, уравнения, описывающие геодезические на S^n, примут вид $\ddot{x}=-|\dot{x}|^2x$.

14. Предложение. *Геодезический поток на сфере S^n получается ограничением на T^*S^n гамильтонова потока* sgrad H *на* $T^*\mathbf{R}^{n+1}=\mathbf{R}^{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})\oplus\mathbf{R}^{n+1}(y_1, \ldots, y_{n+1})$, где

$$H=\frac{1}{2}|x|^2|y^2|=\frac{1}{2}(x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2)(y_1^2+\ldots+y_{n+1}^2). \quad (356)$$

Доказательство. Возможность ограничения потока sgrad H на T^*S^n вытекает из п. 20 § 19, так как T^*S^n выделяется в $T^*\mathbf{R}^{n+1}$ связями $(x, x)=x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1$ и $(x, y)=x_1y_1+\ldots$ $\ldots+x_{n+1}y_{n+1}=0$. Уравнения Гамильтона с функцией Гамильтона $H=2^{-1}|x|^2|y|^2$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=(x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2)y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_{n+1}&=(x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2)y_{n+1},\\
\dot{y}_1&=-(y_1^2+\ldots+y_{n+1}^2)x_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{y}_{n+1}&=-(y_1^2+\ldots+y_{n+1}^2)x_{n+1},
\end{aligned} \quad (357)$$

которые при ограничении на сферу $x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1$, очевидно, дают уравнения геодезических $\ddot{x}=-|\dot{x}|^2x$.

15. Рассмотрим теперь случай произвольной поверхности M^n в $\mathbf{R}^{n+1}$. Для гладкой строго выпуклой функции $f(x)$ в $\mathbf{R}^{n+1}$ такой, что $f(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$, определим функцию $F(x, y)$, $x, y\in\mathbf{R}^{n+1}$, равенством $F(x, y)=\min_t f(x+ty)$. Гамильтонова система $\dot{x}=\partial F/\partial y$, $\dot{y}=-\partial F/\partial x$ имеет два первых интеграла $I_1=|y|^2$ и $I_2=F(x, y)$, поэтому можно рассмотреть решения, удовлетворяющие дополнительному условию $|y|=1$, $F(x, y)=0$. Каждой точке $(x, y)\in\mathbf{R}^{n+1}\times\mathbf{R}^{n+1}$ поставим в соответствие прямую $l(x, y)$, проходящую через точку $x\in\mathbf{R}^{n+1}$ в направлении $y\in\mathbf{R}^{n+1}$.

16. Теорема (см. [192]). *Предположим, что градиент функции $f(x)$ не обращается в нуль при $f(x)=0$, т. е. $f(x)=0$ задает гладкое многообразие. Если $x=x(t)$, $y=y(t)$ — решение уравнения $\dot{x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dot{y}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}$ при $|y|=1$, $F(x, y)=0$, то прямая $l(x(t), y(t))$ касается поверхности $f(x)=0$, а точка касания $\xi(t)$ прямой $l(x(t), y(t))$ с поверхностью $\{f=0\}$ движется по геодезической этой поверхности.*

Доказательство. Пусть $F(x, y)=f(x+\alpha(x, y)y)$, т. е. функция $f(x+ty)$ имеет минимум при $t=\alpha(x, y)$. Тогда $dF(y)=d_xf(\xi)(y)$, где $\xi=x+\alpha(x, y)y$. Отсюда получим

$$d_xF=d_xf(\xi)+d_xf(\xi)(y)\,d_x\alpha=d_xf(\xi), \tag{358}$$

$$d_yF=\alpha d_xf(\xi)+d_xf(\xi)(y)\,d_y\alpha=d_xf(\xi)\cdot\alpha(x, y). \tag{359}$$

Следовательно, гамильтонова система $\dot{x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dot{y}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}$ принимает вид $\dot{x}=\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi)$, $\dot{y}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi)$. Для точки $\xi=x+\alpha y$ получим $\dot{\xi}=\dot{x}+\alpha\dot{y}+\dot{\alpha}y=\dot{\alpha}y$, $\dot{y}=-\partial f/\partial x$. Если использовать $\alpha=\alpha(x(t), y(t))$ в качестве независимой переменной, то уравнения принимают вид

$$\frac{d\xi}{d\alpha}=y,\quad \frac{dy}{d\alpha}=-(\dot{\alpha})^{-1}\,\frac{\partial f}{\partial x} \tag{360}$$

или $\dfrac{d^2\xi}{d\alpha^2}=-(\dot{\alpha})^{-1}\,\dfrac{\partial f}{\partial x}$, а эти уравнения являются дифференциальными уравнениями для геодезических на поверхности $f=\mathrm{const}$, так как вектор $\ddot{\xi}$ перпендикулярен поверхности.

Если ограничиться рассмотрением случая $F=0$, то $f(\xi)=f(x+\alpha(x, y)y)=0$, где ξ — точка касания прямой $x+ty$ с поверхностью $f=0$.

17. В п. 16 показано, что гамильтонова система $\dot{x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dot{y}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}$ связана с геодезическими на поверхности $f=0$. Докажем утверждение, аналогичное п. 14. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^{2n+2}(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{n+1})$ подмногообразие $M=\{(x, y)\in \mathbf{R}^{2n+2} \mid |y|^2=1,\ d_x f(x)(y)=0\}$. В силу п. 18 § 19 это подмногообразие является симплектическим, так как $\{|y|^2, d_x f(x)(y)\}= -2\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x\,\partial x}\, y, y\right)<0$, так как в п. 15 мы предположили, что функция $f(x)$ строго выпуклая. Ограничим H на M. Из п. 20 § 19 следует, что поток $\operatorname{sgrad}(H|M)$ получается ограничением некоторого потока $\operatorname{sgrad} H_0$ из M. Применим эту конструкцию к связям $F_1=2^{-1}(|y|^2-1)=0$, $F_2=d_x f(x)(y)=0$ и гамильтониану $H=F(x, y)=\min\limits_t f(x+ty)$. Тогда $H_0=H-\lambda_1 F_1-\lambda_2 F_2$. Из равенств

$$\{H_0, F_j\}=\{H, F_j\}-\lambda_1\{F_1, F_j\}-\lambda_2\{F_2, F_j\}=0 \tag{361}$$

находим λ_1 и λ_2. Поскольку $\{H, F_1\}=0$, то $\lambda_2=0$. Далее, $\lambda_1=\{H, F_2\}/\{F_1, F_2\}$. Поток $\dot{x}=\partial H_0/\partial y$, $\dot{y}=-\partial H_0/\partial x$, ограниченный на поверхность $H_0=0$, после введения нового параметра τ такого, что $-d\tau/dt=\lambda_1$, принимает более простой вид

$$\frac{dx}{d\tau}=-\lambda_1^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{d\tau}=\lambda_1^{-1}\frac{\partial H_0}{\partial x}. \tag{362}$$

На M справедливо равенство $\min\limits_t f(x+ty)=f(x)$, поскольку $d_x f(x)(y)=0$, так что на M: $d_y H(x, y)=0$ и $d_x H(x, y)=d_x f(x)$. Итак, на M выполняется равенство $d_y K(x, y)=\partial F_1/\partial y=y$, а дифференциальные уравнения приводятся к виду $dx/d\tau=y$, $dy/d\tau=-\lambda_1^{-1} d_x H=-\lambda_1^{-1} d_x f$ или $d^2x/d\tau^2=-\lambda_1^{-1}\partial_x f$, которые совпадают с дифференциальными уравнениями для геодезических. Итак, доказано следующее утверждение.

18. Предложение. *Геодезический поток на поверхности $f=0$ получается ограничением гамильтоновой системы $\dot{x}=\frac{\partial H_0}{\partial y}$, $\dot{y}=-\frac{\partial H_0}{\partial x}$ на многообразие*

$$M=\{(x, y)\in\mathbf{R}^{2n+2} \mid |y|^2=1,\quad d_x f(x)(y)=0\}. \tag{363}$$

19. В заключение этого параграфа рассмотрим геометрические свойства гамильтонова потока на $\mathbf{R}^6(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)= T^*\mathbf{R}^3=\mathbf{R}^3(x_1, x_2, x_3)\oplus\mathbf{R}^3(y_1, y_2, y_3)$ с гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i x_i^2+\frac{1}{2}(x^2y^2-(x, y)^2), \tag{364}$$

где (ξ, η) обозначает обычное скалярное произведение $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3$ в пространстве $\mathbf{R}^3$.

На пространстве $T^*\mathbf{R}^3$ определим три функции

$$F_k(x, y) = x_k^2 - \sum_{i \neq k} \frac{(x_k y_i - x_i y_k)^2}{a_i - a_k}. \tag{365}$$

20. Лемма. *Гамильтониан H представим в виде*

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} a_i F_i. \tag{366}$$

Доказательство получается непосредственным вычислением.

21. Лемма. *Функции F_1, F_2, F_3 находятся в инволюции относительно стандартной симплектической структуры на $T^*\mathbf{R}^3$.*

Доказательство вытекает из явного вида скобки Пуассона на кокасательном расслоении $T^*\mathbf{R}^3$, см. п. 24 § 19.

22. Лемма. *Функции F_1, F_2, F_3 являются первыми интегралами гамильтонова потока* $\operatorname{sgrad} H$.

Доказательство. Воспользуемся предложением 14 § 19: функция F_k — первый интеграл потока $\operatorname{sgrad} H$ тогда и только тогда, когда $\{F_k, H\} \equiv 0$. Имеем

$$\{H, F_k\} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i F_i, F_k \right\} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} a_i \{F_i, F_k\} \equiv 0. \tag{367}$$

23. Лемма. Функции F_1, F_2, F_3 функционально независимы почти всюду.

Доказательство. Якобиан $J = \frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$ является рациональной функцией x_i и y_i, и поэтому достаточно показать, что $J \neq 0$ в некоторой точке. Положим $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; тогда $J = x_1 x_2 x_3 \not\equiv 0$.

24. Лемма. *Поверхность $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ инвариантна относительно потока* $\operatorname{sgrad} H$, $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} a_i F_i$.

Доказательство вытекает из леммы 20 § 19, так как

$$\{H, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\} = 2\big((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x, y) - \\ -(x, y)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\big) \equiv 0. \tag{368}$$

25. Определение. Задача интегрирования гамильтонова потока $\operatorname{sgrad} H$ с гамильтонианом H из п. 19 на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ называется *задачей Неймана*.

Оказывается, эта задача связана с геодезическими потоками.

26. Предложение. *Гамильтонов поток* $\operatorname{sgrad} H$ *на* $T^*\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3(-y) \oplus \mathbf{R}^3(x)$ *является геодезическим потоком метрики*

$$\|g^{ij}\| = \begin{Vmatrix} a_1 + y_2^2 + y_3^2 & -y_1 y_2 & -y_1 y_3 \\ -y_1 y_2 & a_2 + y_1^2 + y_3^2 & -y_2 y_3 \\ -y_1 y_3 & -y_2 y_3 & a_3 + y_1^2 + y_2^2 \end{Vmatrix}, \tag{369}$$

т. е. указанный поток переходит в геодезический при замене $y \to -y$.

Доказательство вытекает из непосредственного сравнения системы $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ с уравнениями, описывающими геодезический поток указанной метрики $\|g_{ij}\|$.

27. Обозначения. Рассмотрим динамическую систему с n степенями свободы, т. е. систему, описывающуюся обобщенными координатами $q^1, \ldots, q^n$. Пусть $T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ — кинетическая энергия этой системы, a_{ij} — гладкие функции координат q^i, $i = 1, \ldots, n$. Вдоль траектории $q^i = q^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, нашей системы сохраняется энергия $E = T + V$, где V — функция, зависящая только от координат q^i, $i = 1, \ldots, n$ (консервативная система). Движение системы определяется из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \tag{370}$$

$i = 1, \ldots, n$, где $L = T - V$ — функция Лагранжа.

28. Теорема. *Траектории динамической системы (с полной энергией E), конфигурационное пространство которой отнесено к координатам $q^1, \ldots, q^n$, можно отождествить с геодезическими линиями метрики $ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j = 2(E - V) a_{ij} dq^i dq^j$, определенной на конфигурационном пространстве, после подходящей замены параметра вдоль геодезической линии.*

Доказательство. Уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$, $L = T - V = 2^{-1} a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k - V(q^1, \ldots, q^n)$, имеют вид

$$\frac{d}{dt}(a_{ij} \dot{q}^j) - \frac{\partial a_{hk}}{\partial q^i} \dot{q}^h \dot{q}^k + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0. \tag{371}$$

Из равенства $T + V = E = \text{const}$ вытекает $\sqrt{\frac{2(E - V)}{a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k}} = 1$, и, следовательно, уравнение Лагранжа можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{2(E-V)}{a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k}}\, a_{ij} \dot{q}^j\right) + \sqrt{\frac{a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k}{2(E-V)}} \frac{\partial V}{\partial q^i} - \sqrt{\frac{a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k}{2(E-V)}} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q^i} \dot{q}^h \dot{q}^k = 0 \tag{372}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2(E-V) a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k}} \frac{d}{dt}\left(\frac{2(E-V) a_{ij} \dot{q}^j}{\sqrt{2(E-V) a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k}}\right) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial (2(E-V) a_{hk})}{\partial q^i} \frac{\dot{q}^h \dot{q}^k}{2(E-V) a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k} = 0. \tag{373}$$

Введем метрику $ds^2=2(E-V)a_{ij}dq^i dq^j=g_{ij}dq^i dq^j$. Тогда предыдущее соотношение перепишется в виде

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^j}{ds}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{hk}}{\partial q^i}\frac{dq^h}{ds}\frac{dq^k}{ds}=0, \tag{374}$$

так как $g_{ij}=2(E-V)a_{ij}$. Полученное выражение эквивалентно равенству

$$g_{ij}\frac{d^2q^j}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial q^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^h}-\frac{\partial g_{hk}}{\partial q^i}\right)\frac{dq^h}{ds}\frac{dq^k}{ds}=0. \tag{375}$$

После поднятия индекса i получим равенство $\frac{d^2q^k}{ds^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds}=0$, где Γ^i_{jk} — связность, согласованная с метрикой g_{ij}. Итак, уравнения Лагранжа эквивалентны уравнениям геодезических линий для римановой метрики g_{ij}.

§ 21. Алгебра Ли функций Гамильтона

1. Определение. Пусть K — любое тензорное поле на многообразии M, Y — векторное поле на M, φ_t — локальная однопараметрическая группа преобразований, отвечающая полю Y, $\tilde{\varphi}_t$ — индуцированное отображение в тензорах. Определим *оператор Ли* L_Y соотношением

$$(L_Y K)_x=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[K_x-((\tilde{\varphi}_t)K)_x\right]. \tag{376}$$

2. Предложение. *Оператор Ли L_Y обладает следующими свойствами:* а) L_Y — *линейное отображение*; б) $L_Y(K_1\otimes K_2)=(L_YK_1)\otimes K_2+K_1\otimes(L_YK_2)$; в) *отображение L_Y сохраняет тип тензора*; г) *для любой функции f имеет место равенство $L_Yf=Y(f)$*; д) *отображение L_Y перестановочно с операцией свертки.*

Доказательство. Пусть φ_t — локальная однопараметрическая группа преобразований, порожденная полем Y. Тогда

$$L_Y(K_1\otimes K_2)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[K_1\otimes K_2-\tilde{\varphi}_t(K_1\otimes K_2)\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[K_1\otimes K_2-\tilde{\varphi}_1K_1\otimes\tilde{\varphi}_tK_2\right]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[K_1\otimes K_2-\tilde{\varphi}_tK_1\otimes K_2\right]+$$

$$+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\tilde{\varphi}_tK_1\otimes K_2-\tilde{\varphi}_tK_1\otimes\tilde{\varphi}_tK_2\right]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[K_1-\tilde{\varphi}_tK_1\right]\otimes K_2+$$

$$+\lim_{t\to 0}(\tilde{\varphi}_tK_1)\otimes\left(\frac{1}{t}\left[K_2-\tilde{\varphi}_tK_2\right]\right)=L_YK_1\otimes K_2+K_1\otimes L_YK_2. \tag{377}$$

Поскольку $\tilde{\varphi}_t$ сохраняет тип тензора и перестановочно со сверткой, то и отображение L_Y обладает этими же свойствами. Далее,

$$(L_Y f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(x) - f\left(\varphi_t^{-1}(x)\right)\right] =$$

$$= -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f\left(\varphi_t^{-1}(x)\right) - f(x)\right] = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_{-t}(x)) - f(x)}{-t} = Y(f). \quad (378)$$

3. На пространстве $\Omega^k(M)$ дифференциальных форм степени k на многообразии M имеем три операции d: $\Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, $\iota(Y)$: $\Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ и L_Y: $\Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$. Они обладают следующими двумя важными свойствами:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1}\ \omega_1 \wedge d\omega_2, \quad (379)$$

$$L_Y(\omega_1 \wedge \omega_2) = (L_Y\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (L_Y\omega_2). \quad (380)$$

Второе равенство вытекает из обычного правила дифференцирования произведения.

4. П р е д л о ж е н и е. *Для любых дифференциальных форм* $\alpha \in \Omega^k(M)$ *и* $\beta \in \Omega^n(M)$ *имеет место равенство*

$$\iota(Y)(\alpha \wedge \beta) = (\iota(Y)\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota(Y)\beta. \quad (381)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В локальной системе координат $x^1, \ldots, x^s$ на многообразии M имеет место равенство

$$(\iota(Y)\omega)_{i_1 \ldots i_{k-1}} = k\omega_{ii_1 \ldots i_{k-1}} Y^i, \quad (382)$$

так как $(\iota(Y)\omega)(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = k\omega(Y, Y_1, \ldots, Y_{k-1})$. Далее,

$$[\iota(Y)(\alpha \wedge \beta)]_{i_2 \ldots i_k j_1 \ldots j_n} = (n+k)\alpha_{[ii_2 \ldots i_k}\beta_{j_1 \ldots j_n]} Y^i, \quad (383)$$

$$[\iota(Y)\alpha \wedge \beta]_{i_2 \ldots i_k j_1 \ldots j_n} = k\alpha_{i[i_2 \ldots i_k}\beta_{j_1 \ldots j_n]} Y^i, \quad (384)$$

$$[\alpha \wedge \iota(Y)\beta]_{i_2 \ldots i_k j_1 \ldots j_n} = n\alpha_{[i_2 \ldots i_k j_1}\beta_{|i| j_2 \ldots j_n]} Y^i, \quad (385)$$

где $|i|$ означает, что индекс i не участвует в альтернации. Итак, мы должны доказать равенство

$$(n+k)\alpha_{[ii_2 \ldots i_k}\beta_{j_1 \ldots j_n]} Y^i = k\alpha_{i[i_2 \ldots i_k}\beta_{j_1 \ldots j_n]} Y^i +$$
$$+ n(-1)^k \alpha_{[i_2 i_3 \ldots i_k j_1}\beta_{|i| j_2 \ldots j_n]} Y^i. \quad (386)$$

С этой целью рассмотрим подгруппу H в группе S_{n+k} всех перестановок на $n+k$ символах $i, i_2, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_n$, которая состоит из преобразований, оставляющих первый индекс i на месте. Обозначим $\alpha_{ii_2\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_n}$ символом $X_{ii_2\ldots i_k j_1\ldots j_n}$. Тогда по определению альтернации

$$\alpha_{[ii_2\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_n]}=A=\frac{1}{(n+k)!}\sum_{\sigma\in S_{n+k}}(-1)^{\sigma}X_{\sigma(ii_2\ldots i_k j_1\ldots j_n)}=$$

$$=\frac{1}{n+k}\left(\sum_{\alpha H\in S_{n+k}/H}^{(1)}\frac{1}{(n+k-1)!}\sum_{\sigma\in\alpha H}(-1)^{\sigma}X_{\sigma(ii_2\ldots i_k j_1\ldots j_n)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha H\in S_{n+k}/H}^{(2)}\frac{1}{(n+k-1)!}\sum_{\sigma\in\alpha H}(-1)^{\sigma}X_{\sigma(ii_2\ldots i_k j_1\ldots j_n)}\right), \tag{387}$$

где первая сумма $\sum^{(1)}$ берется по всем смежным классам, для которых $\alpha(i)\in[i_2, \ldots, i_k]$, а вторая сумма $\sum^{(2)}$ — по всем смежным классам, для которых $\alpha(i)\in[j_1, \ldots, j_n]$ (каждый смежный класс αH элемента α однозначно определяется значением $\alpha(i)$). Заметим, что все слагаемые как в первой, так и во второй сумме равны между собой. Поэтому альтернация A равна

$$A=\frac{1}{n+k}\left[\frac{k}{(n+k-1)!}\sum_{\alpha\in H}(-1)^{\alpha}X_{\alpha(ii_2\ldots i_k j_1\ldots j_n)}+\right.$$

$$\left.+\frac{n}{(n+k-1)!}\sum_{\alpha\in\sigma_0 H}X_{\alpha(ii_2\ldots i_k j_1\ldots j_n)}\right], \tag{388}$$

где σ_0 — одна из перестановок, для которой $\sigma_0(i)\in[j_1, \ldots, j_n]$. В качестве σ_0 можно взять, например,

$$\sigma_0=\begin{pmatrix} i & i_2\ldots i_k & j_1 & j_2\ldots j_n \\ i_2 & i_3\ldots j_1 & i & j_2\ldots j_n\end{pmatrix}. \tag{389}$$

Действительно, рассмотрим слагаемое, содержащее

$$\alpha_{p\ldots i\ldots}\beta_{s_1\ldots s_n}=\alpha_{\sigma(ii_2\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_n)}, \tag{390}$$

и транспозицию t, которая переставляет p и i, оставляя остальные символы на месте. Тогда

$$\alpha_{p\ldots i\ldots}\beta_{s_1\ldots s_n}=-\alpha_{t(p\ldots i\ldots}\beta_{s_1\ldots s_n)}=-\alpha_{i\tau(i_2\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_n)}. \tag{391}$$

Проконтролируем теперь знаки: $\alpha_{\sigma(ii_2\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_n)}$ входит в рассматриваемое слагаемое со знаком $(-1)^{\sigma}$. Поскольку $\sigma=t\tau$, то $(-1)^{\sigma}=(-1)^{t}(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau}$. Поэтому $(-1)^{\sigma}\alpha_{\sigma(ii_2\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_n)}=$ $=-(-1)^{\tau}(-1)\alpha_{i\tau(i_2\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_n)}=(-1)^{\tau}\alpha_{i\tau(i_2\ldots i_k}\beta_{j_1\ldots j_n)}$, т. е. для каждого слагаемого в сумме $\sum_{\sigma\in\sigma_0 H}(-1)^{\sigma}X_{\sigma(ii_2\ldots j_n)}$ мы найдем равное ему слагаемое в сумме $\sum_{\sigma\in H}(-1)^{\sigma}X_{\sigma(ii_2\dots j_n)}$, и поэтому эти суммы равны. Сумма, отвечающая смежному классу $\sigma_0 H$, очевидно, равна $(-1)^k\alpha_{[i_2 i_3\dots i_{k-1} j_1}\beta_{|i|j_2\dots j_n]}$. Аналогично рассматривается первая сумма.

5. Лемма. *Имеем равенство* $L_Y\circ d=d\circ L_Y$.

Доказательство. Имеет место равенство

$$L_Y d\omega=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t^* d\omega=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} df_t^*\omega=d\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t^*\omega=dL_Y\omega, \tag{392}$$

так как $d\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d$ в силу того, что d—это дифференцирование по аргументам x, а $\frac{d}{dt}$—по аргументу t.

6. Теорема. *Имеет место тождество*

$$L_Y=d\circ\iota(Y)+\iota(Y)\circ d. \tag{393}$$

Доказательство. Из предложения 4 и формул для $d(\omega_1\wedge\omega_2)$, $\iota(Y)(\omega_1\wedge\omega_2)$ вытекает, что если равенство (393) имеет место для ω_1 и ω_2, то оно справедливо и для $\omega_1\wedge\omega_2$. Поскольку любая форма имеет вид $\omega_{i_1\dots i_k}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$, то равенство (393) достаточно доказать для функций f и форм вида df.

Если $\omega=f$, то $L_Y f=Yf$, $\iota(Y)f=0$ и $\iota(Y)df=Yf$; тем самым все доказано.

Если $\omega=df$, то $d\iota(Y)df+\iota(Y)ddf=d(Yf)$, так как $\iota(Y)df=Yf$, $ddf=0$. Далее, $L_Y df=dL_Y f=d(Yf)$, и, следовательно, $L_Y df=[d\iota(Y)+\iota(Y)d]\,df$.

7. Следствие. *Векторное поле Y является локально гамильтоновым тогда и только тогда, когда $L_Y\omega=0$, где ω— симплектическая структура. В частности, $L_{\operatorname{sgrad} f}\omega=0$, так как любое гамильтоново поле является локально гамильтоновым.*

Доказательство. Напомним, что поле Y называется локально гамильтоновым, если $df=-2^{-1}\iota(Y)\omega$. Утверждение вытекает из равенства $L_Y\omega=d\iota(Y)\omega+\iota(Y)d\omega$ и $d\omega=0$.

8. В качестве еще одного следствия теоремы 6 получим бескоординатное выражение внешней производной. Для этой цели вспомним, что

$$[X,\ Y]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y-(\varphi_t)_*Y] \tag{394}$$

и, следовательно, $L_X Y=-L_Y X=[X,\ Y]$, где φ_t—локальная однопараметрическая группа преобразований, порожденная векторным полем X.

9. Теорема. *Пусть* $\omega\in\Omega^r(M)$. *Тогда*

$$d\omega(X_0, X_1, \ldots, X_r)=\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r)+$$

$$+\frac{1}{r+1}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j],\ X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r). \tag{395}$$

Докажем это утверждение индукцией по r. Пусть $r=1$, т. е. $\omega\in\Omega^1(M)$. Из равенства (393) вытекает соотношение $d\omega(X, Y)=2^{-1}(\iota(X)d\omega)(Y)=2^{-1}[L_X\omega](Y)-2^{-1}\{d[\iota(X)\omega]\}(Y)$, так как $[\iota(X)\omega](Y)=2\omega(X, Y)$. Из равенства $(L_X\omega)(Y)=X\omega(Y)-\omega(L_XY)$ и предыдущего соотношения следует

$$d\omega(X, Y)=2^{-1}(X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega(L_XY))=$$
$$=2^{-1}(X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X, Y])), \tag{396}$$

т. е. $d\omega(X, Y)=2^{-1}(X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X, Y]))$, так как $d[\iota(X)\times\omega](Y)=d[\omega(X)](Y)=Y\omega(X)$. Итак, при $r=1$ утверждение доказано. Пусть теперь $r>1$. Имеем равенство

$$(r+1)d\omega(X, X_1, \ldots, X_r)=(\iota(X)d\omega)(X_1, \ldots, X_r)=$$
$$=(L_X\omega)(X_1, \ldots, X_r)-(d\iota(X)\omega)(X_1, \ldots, X_r). \tag{397}$$

Далее,

$$(L_X\omega)(X_1, \ldots, X_r)=X(\omega(X_1, \ldots, X_r))-$$
$$-\sum_{i=1}^{r}\omega(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_r) \tag{398}$$

в силу того, что $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ получается из тензорного произведения сверткой. Поскольку $\iota(X)\omega\in\Omega^{r-1}(M)$, то в силу индуктивного предположения имеем равенства

$$(d\iota(X)\omega)(X_1, \ldots, X_r)=$$
$$=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}X_i(\iota(X)\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r))+$$
$$+\frac{1}{r}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}(\iota(X)\omega)([X_i, X_j],\ X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r)=$$
$$=\sum_{i=1}^{r}(-1)^i X_i\omega((X, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r))-$$
$$-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j],\ X,\ X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r), \tag{399}$$

из которых немедленно следует наше утверждение.

10. Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие $C^{\infty}(M^{2n})$ — пространство гладких функций на M^{2n}, на этом пространстве определена скобка Пуассона $\{F, G\}$, $F, G \in C^{\infty}(M)$, см. п. 11 § 19. Ясно, что скобка Пуассона линейна по каждому аргументу.

11. Предложение. *Для любых функций f, g на симплектическом многообразии выполняется равенство* $\operatorname{sgrad}\{g, f\} = [\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g]$.

Доказательство. Векторное поле X является гамильтоновым с гамильтонианом g тогда и только тогда, когда $-2^{-1}\iota(X)\omega = dg$. Применив к этому равенству оператор L_Y, где $Y = \operatorname{sgrad} f$, получим $-2^{-1}L_Y(\iota(X)\omega) = L_Y dg$. Имеют место равенства $L_Y dg = dL_Y g = d(Yg) = d[(\operatorname{sgrad} f)g] = d\{g, f\}$. Далее

$$L_Y[\iota(X)\omega] = \iota(X)(L_Y\omega) + \iota(L_Y X)\omega = \iota(X)(L_Y\omega) + \iota([Y, X])\omega, \tag{400}$$

так как $(\iota(X)\omega)_j = 2\omega_{ij}X^i$. Поскольку $d\omega = 0$ (ω — симплектическая структура) и $d(\iota(Y)\omega) = 0$, то $L_Y\omega = \iota(Y)d\omega + d\iota(Y)\omega = 0$. Следовательно, $L_Y[\iota(X)\omega] = \iota([Y, X])\omega$ и $-2^{-1}\iota([Y, X])\omega = d\{g, f\}$. Поэтому в силу определения косого градиента имеем равенства

$$\operatorname{sgrad}\{g, f\} = [Y, X] = [\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g]. \tag{401}$$

12. Теорема. *Скобка Пуассона $\{f, g\}$ задает в пространстве гладких функций $C^{\infty}(M)$ на симплектическом многообразии структуру алгебры Ли.*

Доказательство. Равенство $\{f, g\} = -\{g, f\}$ вытекает из соотношения

$$\{f, g\} = -\omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) =$$
$$= -(-\omega(\operatorname{sgrad} g, \operatorname{sgrad} f)) = -\{g, f\}. \tag{402}$$

Проверим далее тождество Якоби. Имеем $\{f, \{g, h\}\} = -(\operatorname{sgrad} f)\{g, h\} = -L_{\operatorname{sgrad} f}\{g, h\}$ и $\{g, h\} = \omega^{ij}\dfrac{\partial g}{\partial x^i}\dfrac{\partial h}{\partial x^j}$. Введем обозначение $Y = \operatorname{sgrad} f$. Тогда

$$L_Y\{g, h\} = (L_Y\omega)^{ij}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j} + \omega^{ij}L_Y\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j} + \omega^{ij}\frac{\partial g}{\partial x^i}L_Y\frac{\partial h}{\partial x^j} =$$
$$= (L_Y\omega)^{ij}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j} + \omega^{ij}\frac{\partial(Yg)}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j} + \omega^{ij}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial(Yh)}{\partial x^j} =$$
$$= (L_Y\omega)^{ij}\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial x^j} + \{Yg, h\} + \{g, Yh\}, \tag{403}$$

так как

$$L_Y\frac{\partial g}{\partial x^i} = L_Y(dg)_i = [d(L_Y g)]_i = d(Yg)_i = \frac{\partial(Yg)}{\partial x^i}. \tag{404}$$

Докажем, что $(L_Y\omega)^{ij} = 0$. Применив оператор L_Y к равенству $\omega^{ij}\omega_{jk} = \delta^i_k$, получим $(L_Y\omega)^{ij}\omega_{jk} + \omega^{ij}(L_Y\omega)_{jk} = 0$, так как $L_Y\delta^i_k = 0$.

Поскольку $L_Y\omega=\iota(Y)d\omega+d\iota(Y)\omega=0-2d^2f=0$, то $(L_Y\omega)^{ij}\omega_{jk}=0$, следовательно, $(L_Y\omega)^{ij}=0$. Итак,

$$L_Y\{g,\ h\}=\{Yg,\ h\}+\{g,\ Yh\}=$$
$$=\{(\operatorname{sgrad} f)g,\ h\}+\{g,(\operatorname{sgrad} f)h\}=\{\{g,f\},h\}+\{g,\{h,f\}\},\qquad(405)$$

что и требовалось доказать.

13. Теорема Пуассона. *Пусть F_1, F_2 — первые интегралы потока $\dot X=\operatorname{sgrad} H(X)$. Тогда $\{F_1,\ F_2\}$ — тоже первый интеграл потока $\dot X=\operatorname{sgrad} H(X)$.*

Доказательство. Функция F является первым интегралом потока $\dot X=\operatorname{sgrad} H$ тогда и только тогда, когда $\{F,\ H\}=0$. Из тождества Якоби $\{H,\{F_1,\ F_2\}\}+\{F_1,\{F_2,\ H\}\}+$ $+\{F_2,\{H,\ F_1\}\}=0$ следует равенство $\{H,\{F_1,\ F_2\}\}=0$, так как $\{F_2,\ H\}=\{H,\ F_1\}=0$.

14. Следствие. *Пусть $F(M)$ — алгебра Ли функций Гамильтона относительно скобки $\{F,G\}'=-\{F,G\}$, а $D(M)$ — алгебра Ли векторных полей относительно коммутатора векторных полей. Отображение* sgrad: $F(M)\to D(M)$ *является гомоморфизмом алгебр Ли, т. е.* $\operatorname{sgrad}\{F,\ G\}'=[\operatorname{sgrad} F,\ \operatorname{sgrad} G]$. *Его ядро состоит из локально постоянных функций; если M связно, то* $\operatorname{Ker}\ \operatorname{sgrad}\cong\mathbf{R}$.

15. Следствие. *Гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру в алгебре Ли векторных полей $D(M)$.*

16. Следствие. *Для того чтобы гамильтоновы потоки* $\operatorname{sgrad} F$ *и* $\operatorname{sgrad} G$ *коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы функция $\{F,\ G\}$ была локально постоянной.*

17. Лемма. *Пусть X — гамильтоново векторное поле, φ_t — отвечающая ему локальная однопараметрическая группа, ω — симплектическая структура. Тогда $(\varphi_t)_*\omega=\omega$ для любого t.*

Доказательство. Мы уже знаем, что $L_X\omega=0$, т. е.

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[\omega-(\varphi_t)_*\omega]=0.\qquad(406)$$

Применим к этому равенству отображение $(\varphi_s)_*$:

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t}((\varphi_s)_*\omega-(\varphi_{t+s})_*\omega)=0,\qquad(407)$$

т. е. $\left.\dfrac{d}{d\tau}\right|_{\tau=s}(\varphi_\tau)_*\omega=0$ и, следовательно, $(\varphi_t)_*\omega=\mathrm{const}$, $(\varphi_t)_*\omega=$ $=(\varphi_0)_*\omega=\omega$.

18. Лемма. *Имеет место формула $\{f,\ uv\}=v\{f,\ u\}+$ $+u\{f,\ v\}$ для любых трех функций f, u, v.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\{f,\ uv\}=-(\operatorname{sgrad} f)(uv)=$$
$$=-[(\operatorname{sgrad} f)u\cdot v+u\cdot(\operatorname{sgrad} f)v]=\{f,\ u\}v+u\{f,\ v\}.\qquad(408)$$

19. Теорема. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли функций на компактном симплектическом многообразии (M^{2n}, ω). Тогда алгебра Ли L редуктивна.*

Доказательство. В пространстве $C^\infty(M)$ гладких функций на многообразии M определим скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \int_M fg\omega^n, \tag{409}$$

где $\omega^n = \omega\wedge\ldots\wedge\omega$ — форма объема на M^{2n}. Проверим, что алгебра Ли $C^\infty(M)$ сохраняет скалярное произведение $\langle f, g\rangle$, т. е. для f, u, $v\in C^\infty(M)$ выполнено равенство $\langle u, \{f, v\}\rangle + \langle\{f, u\}, v\rangle = 0$. Докажем, что если f, $g\in C^\infty(M)$, то $\int_M \{f, g\}\omega^n = 0$. Тогда требуемое утверждение следует из формулы $\{f, uv\} = u\{f, v\} + v\{f, u\}$ после ее интегрирования:

$$\int_M \{f, uv\}\omega^n = \int_M u\{f, v\}\omega^n + \int_M v\{f, u\}\omega^n, \tag{410}$$

так как

$$\int_M u\{f, v\}\omega^n = \langle u, \{f, v\}\rangle, \tag{411}$$

$$\int_M v\{f, u\}\omega^n = \langle v, \{f, u\}\rangle, \tag{412}$$

$$\int_M \{f, uv\}\omega^n = 0. \tag{413}$$

Заметим сначала, что имеет место равенство $\{f, g\}\omega^n = -d\left[nfdg\wedge\omega^{n-1}\right]$. Справа и слева здесь стоят тензоры, поэтому достаточно проверить это равенство в какой-нибудь специальной системе координат. Выберем такую систему координат, что в точке x форма ω имеет канонический вид $\omega_x = \sum_{i=1}^n dx^i\wedge dx^{n+1}$. Тогда, как мы уже знаем,

$$\{f, g\}\omega^n = \sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x^{n+j}}\frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g}{\partial x^{n+j}}\right)n!\bigwedge_{i=1}^n\left(dx^i\wedge dx^{n+i}\right), \tag{414}$$

так как $\underbrace{\omega\wedge\ldots\wedge\omega}_{n} = n!\bigwedge_{i=1}^n dx^i\wedge dx^{n+i}$. Далее,

$$\underbrace{\omega\wedge\ldots\wedge\omega}_{n-1} = (n-1)!\sum_{j=1}^n\bigwedge_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n dx^i\wedge dx^{n+i}. \tag{415}$$

Поэтому

$$d\left(nf\,dg\wedge\omega^{n-1}\right)=n\,df\wedge dg\wedge\omega^{n-1}=$$

$$=n\frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial g}{\partial x^l}dx^k\wedge dx^l\wedge\left((n-1)!\sum_{j=1}^{n}\bigwedge_{i=1}^{n}\left(dx^i\wedge dx^{n+i}\right)\right)=$$

$$=n!\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial g}{\partial x^{n+j}}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^{n+j}}\frac{\partial g}{\partial x^j}\right)\bigwedge_{i=1}^{n}\left(dx^i\wedge dx^{n+i}\right),\qquad(416)$$

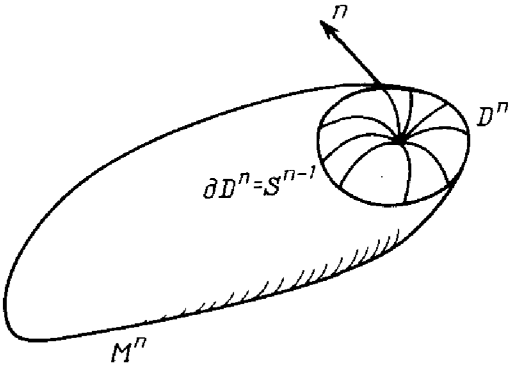


Рис. 21

так как при умножении $dx^k\wedge dx^l$ на $\bigwedge\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(dx^i\wedge dx^{n+i}\right)$ получим, очевидно, не нуль только в одном-единственном случае, когда $k=j$ и $l=n+j$ или $k=n+j$, а $l=j$.

Теперь применим теорему Стокса. Для этой цели вырежем из многообразия M^{2n} маленький $2n$-мерный диск D с границей S^{2n-1} (рис. 21). Тогда

$$\int\limits_M\{f,g\}\,\omega^n=-\int\limits_M d\left(nfdg\wedge\omega^{n-1}\right)=$$

$$=-\left[\int\limits_{M\setminus D}d\left(nfdg\wedge\omega^{n-1}\right)+\int\limits_D d\left(nfdg\wedge\omega^{n-1}\right)\right]=$$

$$=-\left[\int\limits_{\partial(M\setminus D)}nfdg\wedge\omega^{n-1}+\int\limits_{\partial D}nfdg\wedge\omega^{n-1}\right]=$$

$$=-\left[\int\limits_{S^{n-1}}nfdg\wedge\omega^{n-1}+\int\limits_{-S^{n-1}}nfdg\wedge\omega^{n-1}\right]=0,\qquad(417)$$

так как ориентации на $\partial(M\setminus D)$ и на ∂D противоположны, см. рис. 21. Тем самым теорема полностью доказана, если вспомнить утверждение теоремы 14 § 10.

§ 22. Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления группы Ли

1. Предложение. *Пусть P — группа Ли, G — ее алгебра Ли и $O(f)$ — орбита коприсоединенного представления* Ad^* *группы Ли P, проходящая через точку $f\in G^*$. Тогда касательное* *пространство* $T_fO(f)$ *допускает следующее описание:* $T_fO(f) = \{\mathrm{ad}^*_\xi f \mid \xi \in G\} \subset G^*$.

Доказательство. Для любого касательного вектора $v \in T_fO(f)$ найдется такой элемент $g \in G$, что

$$v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}^*_{\exp tg} f \in T_fO(f). \tag{418}$$

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис алгебры Ли G, а $e^1, \ldots, e^n$ — базис в пространстве G^*, сопряженный к $\{e_i\}$, т. е. $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Тогда для любого $x \in G$ имеем $x = x^i e_i$, а для любого $f \in G^*$ имеем $f = f_i e^i$, причем $f_i = f(e_i)$. Координаты x^i и f_i — линейные функции на соответствующем пространстве. Пусть v^i — это i-я координата вектора v. Из цепочки равенств

$$v^i = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_i(\mathrm{Ad}^*_{\exp tg} f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathrm{Ad}^*_{\exp tg} f)(e_i) =$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\,(\mathrm{Ad}^*_{\exp(-tg)} e_i) = f\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}^*_{\exp(-tg)} e_i\right) =$$

$$= f\,(-[g, e_i]) = -(\mathrm{ad}^*_g f)(e_i) \tag{419}$$

следует соотношение $v = -\mathrm{ad}^*_g f$, которое доказывает наше утверждение.

2. Определение. На каждой орбите $O(f)$ коприсоединенного представления Ad^* группы Ли P определим симплектическую структуру ω, которую будем называть *канонической симплектической структурой* (форма ω также называется *формой Кириллова*). Пусть $\xi, \eta \in T_fO(f)$. Тогда в силу п. 1 найдутся такие элементы $\xi_1, \eta_1 \in G$, что $\xi = \mathrm{ad}^*_{\xi_1} f$ и $\eta = \mathrm{ad}^*_{\eta_1} f$. Положим по определению $\omega(\xi, \eta) = f([\xi_1, \eta_1])$.

Ближайшие пункты будут посвящены доказательству того факта, что ω задает симплектическую структуру на орбите $O(f) \subset G^*$.

3. Лемма. *Определение* 2 *корректно.*

Доказательство. Если $\xi = \mathrm{ad}^*_{\xi_1} f = \mathrm{ad}^*_{\xi_2} f$, то $\xi_1 - \xi_2 \in \mathrm{Ann}(f)$, $\mathrm{Ann}(f)$ — аннулятор ковектора f. Поэтому для проверки корректности определения надо показать, что $f([\xi_1 + \xi_0, \eta_1 + \eta_0]) = f([\xi_1, \eta_1])$, где $\xi_0, \eta_0 \in \mathrm{Ann}(f)$. Имеем

$$f([\xi_1 + \xi_0, \eta_1 + \eta_0]) = f([\xi_1, \eta_1]) + f([\xi_0, \eta_1]) +$$

$$+ f([\xi_1, \eta_0]) + f([\xi_0, \eta_0]) = f([\xi_1, \eta_1]) + (\mathrm{ad}^*_{\xi_0} f)\,\eta_1 -$$

$$- (\mathrm{ad}^*_{\eta_0} f)(\xi_1) + (\mathrm{ad}^*_{\xi_0} f)(\eta_0) = f([\xi_1, \eta_1]), \tag{420}$$

так как $\mathrm{ad}^*_{\xi_0} f = \mathrm{ad}^*_{\eta_0} f = 0$.

4. Лемма. *Форма* $\omega \in \Lambda^2(T_fO(f))$ *не вырождена.*

Доказательство. Проверим, что если $\omega(\xi, \eta)=0$ для всех $\xi \in T_f O(f)$, то $\eta=0$. Пусть $\xi=\mathrm{ad}^*_{\xi_1} f$, $\eta=\mathrm{ad}^*_{\eta_1} f$ и $\omega(\xi, \eta)=f([\xi_1, \eta_1])=0$ для любого $\xi_1 \in G$. Итак, $(\mathrm{ad}^*_{\eta_1} f)(\xi_1)=0$ для любого $\xi_1 \in G$. Следовательно $\mathrm{ad}^*_{\eta_1} f=0$ и $\eta=\mathrm{ad}^*_{\eta_1} f=0$.

5. Следствие. *Размерность каждой орбиты коприсоединенного представления четна.*

6. Предложение. *Форма ω инвариантна относительно коприсоединенного представления* Ad^*, *т. е.* $(\mathrm{Ad}^*_h)\omega_g=\omega_f$, *где* $g=\mathrm{Ad}^*_h f$ (рис. 22); $\omega_g \in \Lambda^2(T_g O(f))$, $\omega_f \in \Lambda^2(T_f O(f))$.

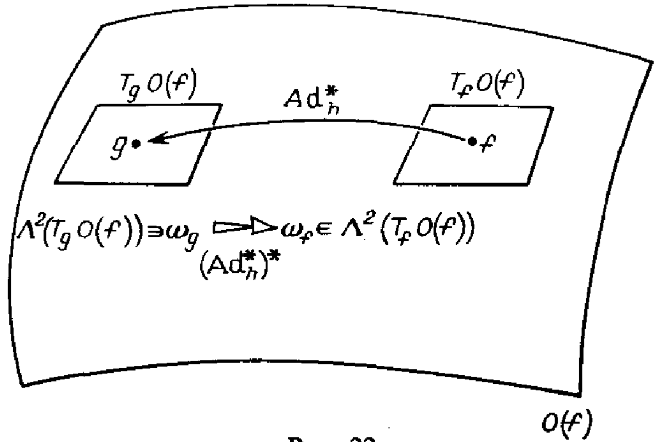


Рис. 22

Доказательство. Операция увлечения форм определяется равенством $[(\mathrm{Ad}^*_h)^*\omega_g](\xi, \eta)=\omega_g(d(\mathrm{Ad}^*_h)\xi, d(\mathrm{Ad}^*_h)\eta)$. Вычислим дифференциал $d(\mathrm{Ad}^*_h)$, где Ad^*_h: $G^* \to G^*$. Поскольку Ad^*_h — линейное отображение, то его дифференциал совпадает с ним самим, т. е. $d(\mathrm{Ad}^*_h)=\mathrm{Ad}^*_h$. Если отображение ограничить на подмногообразие, то его дифференциал также ограничивается, поэтому $d(\mathrm{Ad}^*_h)\xi=\mathrm{Ad}^*_h\xi$.

Для завершения вычислений нам потребуется равенство $\mathrm{Ad}^*_g \mathrm{ad}^*_{\xi_1} f=\mathrm{ad}^*_{\mathrm{Ad}_g \xi_1} \mathrm{Ad}^*_g f$. Докажем его. Для любого элемента $x \in G$ имеем

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}^*_g \mathrm{ad}^*_{\xi_1} f)(x)&=\mathrm{ad}^*_{\xi_1} f(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} x)=f([\xi_1, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} x])=\\ &=f([\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \mathrm{Ad}_g \xi_1, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} x])=f(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}[\mathrm{Ad}_g \xi_1, x])=\\ &=(\mathrm{Ad}^*_g f)([\mathrm{Ad}_g \xi_1, x])=[\mathrm{ad}^*_{\mathrm{Ad}_g \xi_1} \mathrm{Ad}^*_g f](x),\end{aligned} \tag{421}$$

что и требовалось проверить.

Пусть $\xi=\mathrm{ad}^*_{\xi_1} f$, $\eta=\mathrm{ad}^*_{\eta_1} f$. Тогда

$$\begin{aligned}[(\mathrm{Ad}^*_h)^*\omega_g](\xi, \eta)&=\omega_g(\mathrm{Ad}^*_h \xi, \mathrm{Ad}^*_h \eta)=\omega_g(\mathrm{Ad}^*_h \mathrm{ad}^*_{\xi_1} \xi, \mathrm{Ad}^*_h \mathrm{ad}^*_{\eta_1} f)=\\ &=\omega_g(\mathrm{ad}^*_{\mathrm{Ad}_h \xi_1} \mathrm{Ad}^*_h f, \mathrm{ad}^*_{\mathrm{Ad}_h \eta_1} \mathrm{Ad}^*_h f)=\omega_g(\mathrm{ad}^*_{\mathrm{Ad}_h \xi_1} g, \mathrm{ad}^*_{\mathrm{Ad}_h \eta_1} g)=\\ &=g([\mathrm{Ad}_h \xi_1, \mathrm{Ad}_h \eta_1])=g(\mathrm{Ad}_h [\xi_1, \eta_1])=(\mathrm{Ad}^*_{h^{-1}}([\xi_1, \eta_1])=\\ &=f([\xi_1, \eta_1])=\omega_f(\xi, \eta),\end{aligned} \tag{422}$$

так как $\mathrm{Ad}_h^* f = g$ и, следовательно, $f = \mathrm{Ad}_{h^{-1}}^* g$. Кроме того, использовалось следующее свойство присоединенного представления Ad: $\mathrm{Ad}_a[\xi, \eta] = [\mathrm{Ad}_a \xi, \mathrm{Ad}_a \eta]$.

7. Следствие. *Каноническая форма $\omega \in \Omega^2(O(f))$ является гладкой формой на орбите $O(f)$.*

Доказательство. Для того чтобы задать форму ω на всей орбите, достаточно задать ω в одной точке и разнести ее по всей орбите с помощью преобразований Ad_h^*, $h \in P$.

8. Замечание. Для проверки равенства $d\omega = 0$ воспользуемся следующим утверждением.

9. Предложение. *Пусть на многообразии M^{2n} задана невырожденная дифференциальная 2-форма $\omega \in \Omega^2(M^{2n})$. Тогда с помощью ω можно определить скобку Пуассона $\{f, g\} = \omega^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \dfrac{\partial g}{\partial x^j}$, здесь $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на M^{2n}, ω_{ij} — координаты формы ω в этих координатах и $\| \omega_{ij} \|^{-1} = \| \omega^{ij} \|$. Равенство $d\omega = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда скобка $\{f, g\}$ удовлетворяет тождеству Якоби $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.*

Доказательство. Необходимость доказана в теореме 12 § 21.

Для доказательства обратной импликации достаточно проделать все выкладки этой теоремы в обратном порядке.

10. Замечание. Для того чтобы применить это утверждение, вычислим скобку Пуассона относительно канонической формы ω. С этой целью сначала вычислим $\mathrm{sgrad}\, f$ относительно ω.

Скобку Пуассона на орбитах можно «склеить» в единую скобку Пуассона на всем пространстве G^*. Если $f, g \in C^\infty(G^*)$, то положим по определению $\{f, g\}(x) = \{f | O(x), g | O(x)\}(x)$. Поскольку пространство G^* расслаивается на орбиты представления Ad^*, то это определение корректно.

11. Лемма. *Пусть f — гладкая функция на пространстве G^*, дуальном к алгебре Ли G. Тогда $(\mathrm{sgrad}\, f)_x = \mathrm{ad}_{df(x)}^*(x)$. Здесь $df(x) \in (G^*)^* \cong G$.*

Доказательство. По определению векторного поля $\mathrm{sgrad}\, f$ имеем равенство $\omega(Y, \mathrm{sgrad}\, f) = df(Y)$ для любого поля Y. Покажем, что это равенство выполнено, если положить $(\mathrm{sgrad}\, f)_x = \mathrm{ad}_{df(x)}^*(x)$. Пусть $Y = \mathrm{ad}_y^* x$ для некоторого вектора $y \in G$. Тогда $\omega(Y, \mathrm{ad}_{df(x)}^* x) = \omega(\mathrm{ad}_y^* x, \mathrm{ad}_{df(x)}^* x) = x([y, df(x)])$. С другой стороны, $df_x(Y) = df_x(\mathrm{ad}_y^* x) = (\mathrm{ad}_y^* x)(df_x) = x([y, df_x])$, здесь использовали определение изоморфизма $(G^*)^* \cong G$. Поскольку форма ω не вырождена, то поле $\mathrm{sgrad}\, f$ определено однозначно и, следовательно, $\mathrm{sgrad}_x(f | O(x)) = \mathrm{ad}_{df(x)}^* x$.

12. Лемма. *Пусть f, g — гладкие функции на пространстве G^*, дуальном к алгебре Ли G. Тогда имеет место равенство*

$$\{f, g\} = -C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}. \tag{423}$$

Здесь $e_1, \ldots, e_n$ — базис алгебры Ли G, $e^1, \ldots, e^n$ — сопряженный базис пространства G^*, а $x^1, \ldots, x^n$ и $x_1, \ldots, x_n$ — соответствующие координаты в G и в G^*, C_{ij}^k — структурный тензор алгебры Ли G в базисе $e_1, \ldots, e_n$, т. е. $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$.

Доказательство. Из определения изоморфизма $G^{**} \cong G$ ясно, что $dg_x = \frac{\partial g}{\partial x_i} e_i$ и $df_x = \frac{\partial f}{\partial x_j} e_j$. Тогда

$$\begin{aligned} \{f, g\}_x &= -\omega(\operatorname{sgrad} f_x, \ \operatorname{sgrad} g_x) = \omega(\operatorname{sgrad} g_x, \ \operatorname{sgrad} f_x) = \\ &= df_x(\operatorname{sgrad} g_x) = df_x(\operatorname{ad}^*_{dg(x)} x) = (\operatorname{ad}^*_{dg(x)} x)(df_x) = x([dg_x, \ df_x]) = \\ &= x([e_i, e_j]) \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = C_{ij}^k x_k \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = -C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \end{aligned} \tag{424}$$

здесь мы использовали естественный изоморфизм $G^{**} \cong G$.

13. Замечание. Итак, на пространстве G^* определена скобка Пуассона $\{f, g\} = -C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$. Эту скобку впервые рассмотрел Березин [21], будем называть ее *скобкой Березина*. Для доказательства того, что $\{f, g\}$ на орбитах удовлетворяет тождеству Якоби (а именно это и надо проверить для доказательства замкнутости канонической формы ω), мы покажем, что скобка Березина на G^* удовлетворяет тождеству Якоби. Тогда ее ограничение на каждую орбиту также удовлетворяет тождеству Якоби, а это ограничение совпадает со скобкой Пуассона относительно канонической симплектической структуры на орбитах коприсоединенного представления Ad^*.

14. Теорема. *Скобка Пуассона $-\{f, g\} = C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$ на пространстве G^*, дуальном к алгебре Ли G, удовлетворяет тождеству Якоби.*

Доказательство. Учитывая равенство $\frac{\partial x_k}{\partial x_r} = \delta_r^k$, получим

$$\begin{aligned} \{h, \ \{f, g\}\} &= C_{qr}^p x_p \frac{\partial h}{\partial x_q} \frac{\partial}{\partial x_r}\left(C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}\right) = \\ &= C_{qr}^p C_{ij}^r x_p \frac{\partial h}{\partial x_q} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} + C_{qr}^p C_{ij}^k x_p x_k \frac{\partial h}{\partial x_q} \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} + \\ &\quad + C_{qr}^p C_{ij}^k x_p x_k \frac{\partial h}{\partial x_q} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^2 g}{\partial x_r \partial x_j}. \end{aligned} \tag{425}$$

Поэтому

$$\{h,\ \{f, g\}\}+\{f,\ \{g, h\}\}+\{g,\ \{h,\ f\}\}=$$

$$=\left[C^p_{qr}C^r_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_q}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}+C^p_{ir}C^r_{jq}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_q}+C^p_{jr}C^r_{qi}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_q}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]+$$

$$+\left[C^p_{qr}C^k_{ij}x_p x_k\frac{\partial h}{\partial x_q}\frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}+C^p_{qr}C^k_{ij}x_p x_k\frac{\partial f}{\partial x_q}\frac{\partial^2 g}{\partial x_r\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j}+\right.$$

$$\left.+C^p_{qr}C^k_{ij}x_p x_k\frac{\partial g}{\partial x_q}\frac{\partial^2 h}{\partial x_r\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]+\left[C^p_{jr}C^k_{qi}x_p x_k\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_q}\frac{\partial^2 g}{\partial x_r\partial x_i}+\right.$$

$$\left.+C^p_{jr}C^k_{qi}x_p x_k\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_q}\frac{\partial^2 h}{\partial x_r\partial x_i}+C^p_{jr}C^k_{qi}x_p x_k\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_q}\frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial x_i}\right]. \qquad (426)$$

Во втором слагаемом заменили q на i, i на j, j на q, а в третьем, седьмом, восьмом и девятом слагаемых заменили q на j, i на q, j на i. Первая квадратная скобка равна

$$\left(C^p_{qr}C^r_{ij}+C^p_{ir}C^r_{jq}+C^p_{jr}C^r_{qi}\right)\frac{\partial h}{\partial x_q}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}=0, \qquad (427)$$

так как равенство $[e_q,\ [e_i, e_j]]+[e_i,\ [e_j, e_q]]+[e_j,\ [e_q,\ e_i]]=0$ эквивалентно соотношению $C^r_{ij}C^p_{qr}+C^r_{jq}C^p_{ir}+C^r_{qi}C^p_{jr}=0$. Вторая и третья квадратные скобки перепишутся так:

$$\left(C^p_{qr}C^k_{ij}-C^p_{jr}C^k_{iq}\right)x_p x_k\frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_q}+$$

$$+\left(C^p_{qr}C^k_{ij}-C^p_{jr}C^k_{iq}\right)x_p x_k\frac{\partial^2 g}{\partial x_r\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_q}+$$

$$+\left(C^p_{qr}C^k_{ij}-C^p_{jr}C^k_{iq}\right)x_p x_k\frac{\partial^2 h}{\partial x_r\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_q}. \qquad (428)$$

Заметим, что тензор $A_{qrij}=\left(C^p_{qr}C^k_{ij}-C^p_{jr}C^k_{iq}\right)x_p x_k$ кососимметричен по r, i, а вторые частные производные $\partial^2 F/\partial x_r\partial x_i$ симметричны по r, i, поэтому при суммировании мы получим нуль. Теорема полностью доказана.

15. Теорема. *На орбитах коприсоединенного представления любой группы Ли имеется естественная инвариантная симплектическая структура.*

Доказательство вытекает из утверждений п. 3, 4, 6, 14.

§ 23. Уравнения Эйлера

1. Определение. Пусть f — гладкая функция на орбите $O(t)$, $t\in G^*$, коприсоединенного представления Ad^* группы Ли P, отвечающей алгебре Ли G. Тогда в силу п. 11 § 22 гамильтоновы уравнения $\dot{x}=\mathrm{sgrad}\, f_x$ на орбите $O(t)$ относительно канонической формы ω имеют вид $\dot{x}=\mathrm{ad}^*_{df(x)}(x)$, $x\in G^*$.

Если $f\in C^\infty(G^*)$, где G^* — пространство, дуальное к алгебре Ли G, то на каждой орбите возникают гамильтоновы уравнения

$$\dot{x}=\mathrm{ad}^*_{df(x)}(x), \quad x\in G^*, \quad f\in C^\infty(G^*). \tag{429}$$

Эту систему на G^* будем называть *уравнениями Эйлера*.

Важность изучения уравнений Эйлера определяется прежде всего тем фактом, что многие физически интересные системы имеют указанный вид. В качестве примера укажем, что такое представление допускают: а) уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой; б) уравнения, описывающие динамику твердого тела с распределенным электрическим зарядом в идеальной жидкости при наличии постоянного гравитационного и электрического полей и при условии равенства выталкивающей силы и силы тяжести и нулевом суммарном заряде тела; в) уравнения, описывающие вращение намагниченного твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном гравитационном и магнитном поле, см. § 50.

2. Конструкция. Большой интерес представляют уравнения Эйлера, когда гамильтониан f — квадратичная функция. Рассмотрим этот случай более подробно. Квадратичные функции на G^* находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными операторами C: $G^*\to G$: если $f(x)$ — квадратичная функция, то ее можно представить в виде $f(x)=2^{-1}x(C(x))$, $x\in G^*$. Билинейная форма $f(x, y)=x(C(y))$ симметрична тогда и только тогда, когда оператор C самосопряжен, $\langle C(x), y\rangle=\langle x, C(y)\rangle$, где $\langle x, y\rangle$ — обозначает значение x на y. Будем предполагать, что C самосопряжен. В этом случае, если $f(x)=2^{-1}x(C(x))$, то $df_x=C(x)$. Поэтому уравнения Эйлера примут вид $\dot{x}=\mathrm{ad}^*_{C(x)}(x)$. Эта система уравнений на G^* гамильтонова на каждой орбите представления Ad^* — гамильтонианом является ограничение функции $f(x)=2^{-1}x(C(x))$ на рассматриваемую орбиту.

3. Координаты. Перепишем уравнения Эйлера в координатах. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис алгебры Ли G, $e^1, \ldots, e^n$ — сопряженный базис в пространстве G^*, т. е. $e^i(e_j)=\delta^i_j$ и $C(e^i)=a^{ij}e_j$. Тогда, очевидно, $f(x)=2^{-1}a^{ij}x_ix_j$. Условие самосопряженности оператора C имеет вид $a^{ij}=a^{ji}$. Здесь $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в G^*, отвечающие базису e^i.

4. Лемма. а) *Пусть f — гладкая функция на G^*. Тогда уравнения Эйлера, отвечающие f, имеют вид*

$$\dot{x}_s=C^k_{js}\frac{\partial f}{\partial x_j}x_k, \quad s=1, \ldots, n=\dim G. \tag{430}$$

б) *Пусть* $C\colon G^* \to G$ — *самосопряженный линейный оператор с матрицей* a^{ij}. *Тогда ему отвечают уравнения Эйлера*

$$\dot{x}_s = a^{ij} C^k_{js} x_i x_k, \qquad s = 1, \ldots, n, \quad n = \dim G. \tag{431}$$

Эта система имеет первый интеграл $T = 2^{-1} a^{is} x_i x_s$ — *интеграл энергии.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathrm{ad}^*_{e_j} e^k = C^k_{js} e^s$. Поэтому $\mathrm{ad}^*_y x = \mathrm{ad}^*_{y^j e_j} x_k e^k = x_k y^j \mathrm{ad}^*_{e_j} e^k = x_k y^j C^k_{js} e^s$. Отсюда следует утверждение о виде уравнений Эйлера. Утверждения о том, что T — интеграл, следует из того, что ограничение уравнений Эйлера на орбиты представления Ad^* есть гамильтонова система с функцией Гамильтона, равной ограничению T на рассматриваемую орбиту. Это утверждение можно проверить и непосредственной выкладкой. Имеем равенства

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{2} a^{is} \dot{x}_i x_s + \frac{1}{2} a^{is} x_i \dot{x}_s = a^{is} \dot{x}_i x_s = a^{is} a^{qb} C^p_{bi} x_q a_p x_s = \\ &= a^{qb} C^p_{bi} a^{is} x_s x_q x_p = -a^{qb} C^p_{ib} a^{is} x_s x_q x_p = -a^{is} C^p_{ib} a^{qb} x_s x_q x_p = \\ &= -a^{si} C^p_{ib} a^{bq} x_s x_q x_p,\end{aligned} \tag{432}$$

здесь второе и седьмое равенства написаны в силу симметричности $a^{is} = a^{si}$, а пятое равенство вытекает из кососимметричности $C^a_{bi} = -C^a_{ib}$.

Поскольку $a^{qb} C^p_{bi} a^{is} x_s x_q x_p = a^{si} C^p_{ib} a^{bq} x_s x_p x_q$, то из полученного выше соотношения

$$\frac{dT}{dt} = a^{qb} C^p_{bi} a^{is} x_s x_q x_p = -a^{si} C^p_{ib} a^{bq} x_s x_q x_p \tag{433}$$

следует $\dfrac{dT}{dt} = 0$.

5. Замечание. Уравнения Эйлера $\dot{x}_s = a^{ij} C^k_{js} x_i x_k$ можно написать в более широкой ситуации, чем это указано в лемме 4, а именно, предположим, что в пространстве V заданы два тензора a^{ij} и C^k_{ij}. Тогда имеют смысл уравнения Эйлера и функция $T = 2^{-1} a^{ks} x_k x_s$ — первый интеграл, если только $a^{ij} = a^{ji}$ и $C^k_{ij} = -C^k_{ji}$.

6. Предложение. *Любая функция* F, *удовлетворяющая системе уравнений в частных производных*

$$C^k_{ij}\, x_k \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{434}$$

является первым интегралом нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (430).

Доказательство. Функция F, удовлетворяющая указанной системе уравнений в частных производных, является инвариантом коприсоединенного представления Ad^*, т. е.

постоянна на орбитах представления Ad^*. Следовательно, ограничение $F|O(t)$ функции F на любую орбиту $O(t)$ постоянно, т. е. $F|O(t)$ находится в инволюции с любой функцией на орбите. Это же утверждение можно проверить непосредственными вычислениями:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x^s}\dot{x}^s=\frac{\partial F}{\partial x^s}a^{ij}C^p_{js}x_i x_p=a^{ij}\left(C^p_{js}x_p\frac{\partial F}{\partial x^s}\right)x_i=0. \tag{435}$$

7. Замечание. Предложение 6 дает некоторый аналог метода Якоби, при использовании которого мы переходим от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнению в частных производных $\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,\ q,\ \frac{\partial S}{\partial q}\right)=0$ (уравнению Гамильтона — Якоби), вообще говоря, нелинейному. В п. 6 также предлагается перейти от обыкновенных уравнений (430) к уравнениям в частных производных (434), но в отличие от метода Гамильтона — Якоби к линейным. В п. 3 § 34 опишем регулярный алгебраический процесс, который позволяет строить большой запас интегралов системы (430). Этот метод позволяет проинтегрировать многие интересные системы.

8. Пример. Рассмотрим алгебру Ли $\mathrm{so}(3)=\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ *с коммутаторами* $[e_1,\ e_2]=e_3$, $[e_1,\ e_3]=-e_2$, $[e_2,\ e_3]=e_1$. Соответствующие уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a^{13}x_1x_2-a^{12}x_1x_3+(a^{33}-a^{22})x_2x_3+a^{23}(x_2^2-x_3^2),\\ \dot{x}_2&=-a^{23}x_2x_1+a^{21}x_2x_3+(a^{11}-a^{33})x_1x_3+a^{13}(x_3^2-x_1^2),\\ \dot{x}_3&=a^{32}x_1x_3-a^{31}x_3x_2+(a^{22}-a^{11})x_1x_2+a^{12}(x_1^2-x_2^2),\end{aligned} \tag{436}$$

а интегралы, описанные в п. 4 и 6, принимают форму

$$T=2^{-1}(a^{11}x_1^2+a^{22}x_2^2+a^{33}x_3^2)+a^{12}x_1x_2+ \\ +a^{13}x_1x_3+a^{23}x_2x_3, \tag{437}$$

$$F=x_1^2+x_2^2+x_3^2. \tag{438}$$

9. Теорема. *Пусть*

$$C=\begin{Vmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\alpha^{-1} & 0 & 0\\ 0 & \beta^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \gamma^{-1}\end{Vmatrix} \tag{439}$$

— диагональный оператор, C: $\mathrm{so}(3)^*\to\mathrm{so}(3)$. *Уравнения Эйлера на* $\mathrm{so}(3)^*$ *эквивалентны уравнениям движения трехмерного твердого тела, закрепленного в одной точке и имеющего моменты инерции* α, β, γ. *Эквивалентность задается оператором* C: $\mathrm{so}(3)^*\to\mathrm{so}(3)$.

Доказательство. Уравнения Эйлера, отвечающие алгебре Ли so(3) и оператору C, имеют вид

$$\dot{x}_1=\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)x_2x_3,$$
$$\dot{x}_2=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\gamma}\right)x_1x_3, \qquad (440)$$
$$\dot{x}_3=\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)x_1x_2.$$

Перепишем эти уравнения с помощью оператора C на so(3), т. е. сделаем замену переменных $y_1=\frac{1}{\alpha}x_1$, $y_2=\frac{1}{\beta}x_2$, $y_3=\frac{1}{\gamma}x_3$. Тогда, очевидно, получим уравнения $\alpha\dot{y}_1=(\beta-\gamma)y_2y_3$, $\beta\dot{y}_2=(\gamma-\alpha)y_1y_3$, $\gamma\dot{y}_3=(\alpha-\beta)y_1y_2$, которые описывают движение твердого тела, см. п. 12 § 5.

10. Лемма. *Алгебра Ли* so(3) *изоморфна алгебре Ли кососимметрических матриц, точнее, если*

$$f(\omega_1e_1+\omega_2e_2+\omega_3e_3)=\begin{Vmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{Vmatrix}, \qquad (441)$$

то $f([a, b])=[f(a), f(b)]=f(a)f(b)-f(b)f(a)$.

Доказательство получается непосредственным вычислением.

11. Предложение. *Уравнения, описывающие движение твердого тела*

$$A\dot{p}=(B-C)qr,$$
$$B\dot{q}=(C-A)pr, \qquad (442)$$
$$C\dot{r}=(A-B)pq,$$

эквивалентны следующей системе на so(3): $\varphi\dot{X}=[\varphi X, X]$, $X\in$ $\in$ so(3), *где* $\varphi(X)=IX+XI$, $I=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *и*

$$\lambda_1=\frac{-A+B+C}{2},\quad \lambda_2=\frac{A-B+C}{2},\quad \lambda_3=\frac{A+B-C}{2}. \qquad (443)$$

Эквивалентность задается изоморфизмом, описанным в п. 10.

Доказательство. Если

$$X=\begin{Vmatrix}0 & x_{12} & x_{13}\\ -x_{12} & 0 & x_{23}\\ -x_{13} & -x_{23} & 0\end{Vmatrix}, \qquad (444)$$

то непосредственное вычисление дает $\dot{x}_{12}=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}x_{13}x_{32}$, $\dot{x}_{13}=\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}x_{12}x_{23}$, $\dot{x}_{23}=\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}x_{21}x_{13}$, здесь предполагается, что

$x_{ij}=-x_{ji}$. После подстановки выражений для λ_i и замены $x_{12}=-r$, $x_{13}=q$, $x_{23}=-p$ получим уравнения, описывающие движение твердого тела.

12. Определение. Система уравнений $\varphi\dot{X}=[\varphi X, X]$, $X\in\in\mathrm{so}(n)$, на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$ кососимметрических матриц порядка $n\times n$, где $\varphi(X)=XI+IX$ и $I=\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$, $\lambda_i+\lambda_j\neq 0$, называется системой уравнений, описывающих движение n-мерного твердого тела с закрепленной точкой.

13. Замечание. Общие уравнения Эйлера из п. 8 совпадают с так называемыми *уравнениями движения триплета*, см. [75]. В этой же работе показано, как с помощью линейной замены переменных уравнения (436) привести к уравнениям, описывающим движение твердого тела.

14. Уравнения Эйлера естественным образом возникают при изучении геодезических потоков левоинвариантных метрик на группах Ли. Рассмотрим это более подробно. Касательный TP и кокасательный T^*P пучки группы Ли P допускают тривиализацию с помощью левых $L_g(h)=gh$ и правых $R_g(h)=hg$ сдвигов на элементы g из группы Ли P. Определим отображения λ: $TR\to P\times G$, $\bar{\lambda}$: $T^*P\to P\times G^*$ формулами $\lambda(x_g)=(g, dL_{g^{-1}}x_g)$, $x_g\in T_gP$ и $\bar{\lambda}(\xi_g)=(g, dL_g^*\xi_g)$, $\xi_g\in T_g^*P$, где G — алгебра Ли группы Ли P. Здесь dL_g, dL_g^* — индуцированные отображения касательных и кокасательных пространств, а G^* — пространство, сопряженное к алгебре Ли G. Каноническая 1-форма θ на T^*P в терминах левой тривиализации $\bar{\lambda}$ запишется следующим образом: $\theta_{(g,\xi)}(x, \beta)=\langle\xi, x\rangle$ для $g\in P$, ξ, $\beta\in G^*$ и $x\in G$. Симплектическая структура $d\theta$ на касательных векторах $(g, \xi; x_1, \beta_1)$, $(g, \xi; x_2, \beta_2)$ задается формулой $d\theta((x_1, \beta_1), (x_2, \beta_2))=\langle\xi, [x_1, x_2]\rangle+\langle\beta_2, x_1\rangle-\langle\beta_1, x_2\rangle$, в которой $X_1(g)=dL_g(x_1)$, $X_2(g)==dL_g(x_2)$ — левоинвариантные поля на P и β_1, β_2 — левоинвариантные ковекторные поля на группе Ли P.

15. Лемма. *Если функция Гамильтона $H(t)$ на T^*P левоинвариантна (т. е. $H(L_gt)=H(t)$, $t\in T^*P$, $g\in P$), то векторное поле* $\mathrm{sgrad}\,H$ *тоже левоинвариантно.*

16. Таким образом, если функция Гамильтона левоинвариантна, то соответствующее ей гамильтоново векторное поле $\mathrm{sgrad}\,H$ тоже левоинвариантно и, значит, проекция l: $T^*P\to T_e^*P$, задаваемая с помощью левых сдвигов формулой $l(t)=L_{\pi^*(t)^{-1}}(t)$, согласована с векторным полем $\mathrm{sgrad}\,H$. Следовательно, на кокасательном пространстве T_e^*P существует векторное поле $E(H)$, согласованное с полем $\mathrm{sgrad}\,H$. Покажем, что соответствующие полю $E(H)$ уравнения совпадают с уравнениями Эйлера.

17. Предложение. *Уравнения Гамильтона на T^*P, определяемые левоинвариантной функцией Гамильтона $H\in C^\infty(G^*)$ в терминах левой тривиализации $\bar{\lambda}$, имеют вид* $\dot{\xi}=\mathrm{ad}^*_{dH(\xi)}\xi$, $\dot{g}=dL_g(dH(\xi))$.

§ 24. Канонические преобразования

1. Определение. Пусть (M_1^{2n}, ω_1) и (M_2^{2n}, ω_2) — симплектические многообразия. Диффеоморфизм $f\colon M_1 \to M_2$ называется *симплектоморфизмом* или *каноническим преобразованием*, если $f^*\omega_2 = \omega_1$.

2. Теорема. *Пусть $S(\alpha_k, q_k)$ — такая гладкая функция, что $\det \| \partial^2 S/\partial\alpha_k \partial q_i \| \neq 0$. Тогда преобразование пространства $T^*\mathbf{R}^n$, задаваемое формулами*

$$p_k = \frac{\partial S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, q_1, \ldots, q_n)}{\partial q_k}, \quad \beta_k = -\frac{\partial S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, q_1, \ldots, q_n)}{\partial \alpha_k}, \tag{445}$$

является каноническим относительно стандартной симплектической структуры на кокасательном расслоении $T^*\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Напомним, что симплектическая структура на расслоении T^*M определена в п. 11 § 18. Из равенств (445) получим соотношения

$$dp_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} d\alpha_j + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} dq_j, \tag{446}$$

$$d\beta_i = -\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} d\alpha_j - \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} dq_j. \tag{447}$$

Из (447) найдем dq_j. Пусть a^{pi} находится из условия $a^{pi}\dfrac{\partial^2 S}{\partial\alpha_i \partial q_j} = \delta_j^p$, что всегда можно сделать в силу невырожденности матрицы $\| \partial^2 S/\partial\alpha_i \partial q_j \|$. Тогда

$$dq^s = -a^{si} d\beta_i - a^{si}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} d\alpha_j, \tag{448}$$

и из (446) следует

$$dp^i = \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} - \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_s} a^{sl} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_l \partial \alpha_j}\right] d\alpha_j - \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_m} a^{ms} d\beta_s. \tag{449}$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i =$$

$$= -\sum_{j_1, j_2 = 1}^n \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_{j_1}} - \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} a^{ls} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \alpha_{j_1}}\right] a^{im} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{j_2}} d\alpha_{j_1} \wedge d\alpha_{j_2} +$$

$$+ \sum_{s,k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} a^{ls} a^{ik} d\beta_s \wedge d\beta_k - \sum_{j_1, k=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_{j_1}} - \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} a^{ls} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \alpha_{j_1}}\right) a^{ik} + \right.$$

$$\left. + a^{im} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{j_1}} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} a^{ln}\right] d\alpha_{j_1} \wedge d\beta_k. \tag{450}$$

Вычислим коэффициент при $d\alpha_{j_1} \wedge d\alpha_{j_2}$. Пусть $A = \| a^{pi} \|$, $C = \| \partial^2 S / \partial \alpha_i \partial q_j \|$. Тогда $AC = E$ и $A = C^{-1}$, следовательно, $CA = E$, т. е. $\dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} a^{js} = \delta_i^s$. Поэтому

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{j_1} \partial q_i} a^{im} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{j_2}} = \delta_{j_1}^m \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{j_2}} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_{j_1} \partial \alpha_{j_2}}, \tag{451}$$

т. е. получили симметричное по индексам j_1, j_2 выражение. Далее, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} a^{ls} \dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \alpha_{j_1}}$ также симметрично по индексам j_1, j_2, т. е. коэффициент $F_{j_1 j_2}$ при $d\alpha_{j_1} \wedge d\alpha_{j_2}$ симметричен по индексам j_1, j_2, поэтому сумма $\sum\limits_{j_1 j_2 = 1}^{n} F_{j_1 j_2} d\alpha_{j_1} \wedge d\alpha_{j_2}$ равна нулю, так как $d\alpha_{j_1} \wedge d\alpha_{j_2} = -d\alpha_{j_2} \wedge d\alpha_{j_1}$. Аналогично, выражение $\dfrac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} a^{ls} a^{ik}$ симметрично по индексам s, k, поэтому слагаемое с $d\beta_s \wedge d\beta_k$ в (450) равно нулю. Коэффициент при $(-d\alpha_{j_1} \wedge d\beta_k)$ равен

$$\left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_{j_1}} - \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} a^{ls} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \alpha_{j_1}} \right] a^{ik} + a^{im} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{j_1}} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} a^{lk} =$$

$$= \delta_{j_1}^k - \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} a^{ls} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \alpha_{j_1}} a^{ik} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_l \partial q_i} a^{is} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_s \partial \alpha_{j_1}} a^{lk} = \delta_{j_1}^k. \tag{452}$$

Итак, $f^* \omega = \sum\limits_{i=1}^{n} d\beta_i \wedge d\alpha_i$.

3. Предложение. *При канонических преобразованиях гамильтоновы векторные поля переходят в гамильтоновы векторные поля.*

Доказательство. Применим к соотношению $df(X) = X(f) = \omega(X, \operatorname{sgrad} f)$, определяющему гамильтоново векторное поле $\operatorname{sgrad} f$, каноническое отображение $g\colon (M, \Omega) \to (N, \omega)$. Получим

$$g^*(df)(g_* X) = (g^* \omega)(g_* X, \ g_* \operatorname{sgrad} f), \tag{453}$$

$$d(g^* f)(g_* X) = \Omega(g_* X, \ g_* \operatorname{sgrad} f). \tag{454}$$

Здесь $g_* X = Y$ — любое поле. Итак, для произвольного поля Y имеет место соотношение $\Omega(Y, \operatorname{sgrad} (g^* f)) = d(g^* f)(Y) = \Omega(Y, g_* \operatorname{sgrad} f)$. Отсюда $g_* \operatorname{sgrad} f = \operatorname{sgrad} (g^* f)$, т. е. $g_* \operatorname{sgrad} f$ — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом $g^* f = f \circ g$.

4. Замечание. Утверждение, обратное к п. 3, неверно: преобразования, сохраняющие форму ω, и преобразования, переводящие гамильтоновы векторные поля в гамильтоновы, — это разные преобразования. Действительно, преобразование $\alpha_i = \alpha q_i$, $\beta_i = \beta p_i$ переводит гамильтоново векторное поле $\operatorname{sgrad} H$

на $T^*\mathbf{R}^n$ в гамильтоново векторное поле $\operatorname{sgrad}\tilde{H}$, где $\tilde{H}=\alpha\beta H\left(\frac{\beta_i}{\beta}, \frac{\alpha_i}{\alpha}\right)$. Однако $f^*\omega=\sum_{i=1}^{n} d\alpha_i\wedge d\beta_i=\alpha\beta\sum_{i=1}^{n} dp_i\wedge dq_i=$ $=\alpha\beta\omega$, т. е. преобразование $\alpha_i=\alpha q_i$, $\beta_i=\beta p_i$ не является каноническим при $\alpha\beta\neq 1$, см. также п. 1 § 8.

5. Замечание. Закон преобразования гамильтониана при преобразованиях (445) получен в теореме 2 § 8. В частности, если взять в качестве функции S такую функцию, что

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n\right)=0, \tag{455}$$

то преобразования $p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}(t, \alpha, q)$, $\beta_i=-\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}(t, \alpha, q)$ переводят систему $\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$ в простейшую систему $\dot{\alpha}_i=0$, $\dot{\beta}_i=0$.

6. Обозначения. Для уравнения вида (455) обычно используются следующие обозначения: решение $S(q_1, \ldots, q_n, t)$ уравнения (455) называется *действием*, функция $H(t, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots$ $\ldots, q_n)$ — *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*, переменные $q_1, \ldots, q_n$ — *координаты*, а $p_1, \ldots, p_n$ — *импульсы*, t — *время*.

Рассмотрим стационарный случай, когда гамильтониан H не зависит от времени t. Тогда действие S ищем в виде $S=-ht+W(q)$ и для нахождения функции W получим *стационарное уравнение Гамильтона — Якоби* $H(\partial W/\partial q, q)=h$.

Рассмотрим инвариантную теорию уравнения Гамильтона — Якоби. Для этого нам потребуется новое понятие.

7. Определение. Пусть N — произвольное многообразие, а (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие. Отображение $f\colon N\to M^{2n}$ называется *изотропным*, если $f^*\omega=0$. Предположим дополнительно, что f — иммерсия, т. е. дифференциал df инъективен во всех точках. В этом случае N (вместе с f) называется погруженным *лагранжевым подмногообразием* в M^{2n}, если $\dim N=2^{-1}\dim M^{2n}=n$.

8. Лемма. *Пусть* $\alpha\in\Omega^1(T^*M^n)$ — 1-*форма на* T^*M^n, *определенная в п.* 13 § 18, *а* s — *сечение расслоения* $\pi\colon T^*M^n\to M^n$, *т. е.* $\pi\circ s=\mathrm{id}$. *Тогда* $s^*\alpha=s$.

Доказательство. Напомним, что если $\zeta_m\in T_m(T^*M)$, то $\alpha(\zeta_m)=m[d_m\pi(\zeta_m)]$, $d_m\pi\colon T_m(T^*M)\to T_{\pi(m)}M$. Поэтому для $\zeta_m\in T_m(T^*M)$ имеем

$$\begin{aligned}(s^*\alpha)_m(\zeta_m)=\alpha_{s(m)}(ds(\zeta_m))=s(m)[d_{s(m)}\pi(d_m s(\zeta_m))]=\\ =s(m)[d(\pi\circ s)(\zeta_m)]=s(m)(\zeta_m),\end{aligned} \tag{456}$$

так как $\pi\circ s=\mathrm{id}$. Итак, $(s^*\alpha)_m=s(m)$.

9. Следствие. *Нулевое сечение кокасательного расслоения является лагранжевым подмногообразием.*

Доказательство. Из соотношения $s^*\alpha = s \equiv 0$ вытекает равенство $s^*(d\alpha) = d(s^*\alpha) = 0$.

10. Следствие. *Пусть $\varphi \in C^\infty(M)$. Тогда $\Lambda = d\varphi(M)$ — лагранжево подмногообразие в T^*M, т. е. график любого дифференциала является лагранжевым подмногообразием.*

Доказательство. Имеет место равенство

$$(d\varphi)^*(d\alpha) = d((d\varphi)^*\alpha) = d(d\varphi) = d^2\varphi \equiv 0. \tag{457}$$

11. Следствие. *Пусть есть такое сечение $s\colon \mathbf{R}^n \to T^*\mathbf{R}^n$, что $s(\mathbf{R}^n)$ — лагранжево подмногообразие. Тогда найдется такая функция $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $s = d\varphi$.*

Доказательство. Пусть ω — симплектическая структура на $T^*\mathbf{R}^n$. Тогда $\omega = d\alpha$, $\alpha \in \Omega^1(T^*\mathbf{R}^n)$, см. п. 13 § 18. Лагранжевость означает, в частности, что $s^*\omega = 0$, т. е. $0 = s^*\omega = s^*d\alpha = ds^*\alpha$. Поскольку любая замкнутая форма на $\mathbf{R}^n$ является точной (лемма Пуанкаре), то $s^*\alpha = d\varphi$, где $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Мы уже доказали, что $s^*\alpha = s$, поэтому $s = d\varphi$.

12. Замечание. Итак, лагранжевы подмногообразия в $T^*\mathbf{R}^n$, однозначно проектирующиеся на $\mathbf{R}^n$, исчерпываются графиками дифференциалов.

13. Обсуждение. Рассмотрим стационарное уравнение Гамильтона — Якоби $H\left(q_1, \ldots, q_n, \dfrac{\partial u}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial q_n}\right) = c = \mathrm{const}$, см. п. 6.

Вместе с функцией $u(q_1, \ldots, q_n)$, являющейся решением уравнения Гамильтона — Якоби, все функции $u(q) + \mathrm{const}$ также являются решениями этого уравнения. Ввиду того, что такая совокупность функций однозначно характеризуется дифференциалом каждой из них, можно сказать, что уравнение Гамильтона — Якоби есть уравнение относительно дифференциала du неизвестной функции $u(q)$. Рассмотрим поверхность уровня Γ функции H на $T^*\mathbf{R}^n$. Если u является решением уравнения Гамильтона — Якоби, то график ее дифференциала $L = \left\{(q, p) \mid p = \dfrac{\partial u}{\partial q}(q)\right\}$ лежит на Γ. Но графики дифференциалов функций на $\mathbf{R}^n$ суть лагранжевы подмногообразия в $T^*\mathbf{R}^n$, однозначно проектирующиеся на $\mathbf{R}^n$. Следовательно, решениями уравнения Гамильтона — Якоби являются лагранжевы многообразия, лежащие на Γ и однозначно проектирующиеся на $\mathbf{R}^n$.

Обобщим нашу задачу, отказавшись от требования однозначной проектируемости.

14. Определение. Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие. *Уравнение Гамильтона — Якоби* на M — это произвольная гиперповерхность V в многообразии M. Произвольное лагранжево подмногообразие, лежащее на V, называется *реше-*

нием уравнения Гамильтона—Якоби. *Задачей Гамильтона—Якоби* на симплектическом многообразии M называется задача нахождения лагранжевых подмногообразий, лежащих на поверхности V.

Для исследования решений уравнения Гамильтона—Якоби нам потребуется следующее утверждение, известное как *принцип поглощения*.

15. Предложение. *Функция H постоянна на лагранжевом подмногообразии $M^n \subset N^{2n}$ тогда и только тогда, когда гамильтоново векторное поле* $\operatorname{sgrad} H$ *касается подмногообразия $M^n \subset N^{2n}$.*

Доказательство достаточности. Поскольку поля $\operatorname{sgrad} H$ и X касаются лагранжева подмногообразия, то $\omega(X, \operatorname{sgrad} H) = 0$. Следовательно, $dH(X) = X(H) = \omega(X, \operatorname{sgrad} H) = 0$, т. е. $dH(X) \equiv 0$ для всех $X \in T_a M$, $a \in M$. Поэтому $H \mid M^n = \text{const}$.

Необходимость. Допустим, что многообразие M^n лежит на поверхности уровня функции H, т. е. $H \mid M^n \equiv 0$. Отсюда $\omega_m(\operatorname{sgrad} H_m, X_m) = 0$ для всех $X_m \in T_m M^n$. Если бы вектор $\operatorname{sgrad} H_m$ не принадлежал пространству $T_m M^n$, то в подходящей системе координат билинейная форма ω_m имела бы матрицу, у которой квадрат размера $(n+1) \times (n+1)$ состоял бы из нулей:

$$\omega_m = \left\| \begin{array}{c|c:c} \underbrace{}_{} & \begin{matrix}0\\0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & B \\ \hline 0\,0\cdots 0 & 0 & * \\ \hdashline A & * & * \\ \underbrace{}_{n} & & \end{array} \right\| \qquad (458)$$

так как форма ω_m на $T_m M$ тождественно обращается в нуль в силу лагранжевости подмногообразия M. Теперь определитель $\det \omega_m$ обращается в нуль, так как он равен произведению определителей выделенных матриц A, B, а в них есть либо нулевая строка, либо нулевой столбец. Поэтому форма ω была бы вырожденной, что на самом деле не так.

16. Предложение. *Пусть задано n-параметрическое семейство лагранжевых подмногообразий $L_v \subset M^{2n}$, расположенных на поверхности уровня как функции f_1, так и функции f_2 $(f_1, f_2 \in C^\infty(M^{2n}))$. Тогда $\{f_1, f_2\} \equiv 0$ (каждое L_v расположено на своей поверхности уровня).*

Доказательство. Векторное поле $\operatorname{sgrad} f_1$ касается лагранжева подмногообразия L_v в силу принципа поглощения, так как $L_v \subset \{f_1 = \mathrm{const}\}$. Поскольку подмногообразия L_v лежат на поверхностях уровня $f_2 = \mathrm{const}(v)$, то поле $\mathrm{sgrad} f_1$ касается поверхности уровня $f_2 = \mathrm{const}(v)$ и, следовательно, производная $(\mathrm{sgrad} f_1) f_2$ обращается в нуль. Поэтому $\{f_1, f_2\} = -(\mathrm{sgrad} f_1)(f_2) = 0$.

§ 25. Теорема Дарбу

1. Замечание. Как известно, любая метрика может быть приведена в одной точке к каноническому (диагональному) виду путем выбора подходящих локальных координат. В этом смысле обе структуры — риманова и симплектическая — похожи, см. п. 5 § 15. Однако между ними имеется и серьезное различие, проявляющееся в тот момент, когда мы переходим к рассмотрению целой окрестности точки. Как известно, риманова метрика, вообще говоря, не может быть приведена (путем замены координат) к диагональному виду в целой окрестности, поскольку этому может препятствовать ненулевой тензор римановой кривизны. Симплектическая структура, напротив, всегда может быть приведена к каноническому виду путем замены координат сразу в целой достаточно малой окрестности. Это утверждение составляет содержание классической теоремы Дарбу. Итак, в этом смысле симплектического тензора кривизны нет.

2. Теорема Дарбу. *Пусть ω — невырожденная замкнутая 2-форма в окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}^{2n}$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 можно выбрать такую систему локальных координат $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, что форма ω принимает стандартный вид $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$.*

3. Лемма. *Пусть в окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}^{2n}$ имеются n независимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в инволюции. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 существуют такие функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$, что набор $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ является канонической системой координат.*

Доказательство. Поскольку $[\mathrm{sgrad}\ \varphi_i, \mathrm{sgrad}\ \varphi_j] = \mathrm{sgrad}\ \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$, то в силу свойства коммутирующих полей из п. 10 § 13 существуют такие координаты $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$, что $\mathrm{sgrad}\ \varphi_i = \partial / \partial u_i$. Отсюда

$$\{u_i, \varphi_j\} = (\mathrm{sgrad}\ \varphi_j)(u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \delta_{ij}. \tag{459}$$

В силу того, что $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$, и в силу равенства (459) имеем

$$\left\| \begin{matrix} \{\varphi_i, \varphi_j\} & \{\varphi_j, u_i\} \\ \{u_i, \varphi_j\} & \{u_i, u_j\} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & -E \\ E & A \end{matrix} \right\| \tag{460}$$

и $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, u_1, \ldots, u_n)$ можно принять за координаты. Пусть $A=\|\{u_i, u_j\}\|=\|a_{ij}\|$. В силу (459) и тождества Пуассона имеем равенства

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_k}=\{\{u_i, u_j\}, \varphi_k\}=-\{\{\varphi_k, u_i\}, u_j\}+\{\{\varphi_k, u_j\}, u_i\}=$$
$$=\{\delta_{kj}, u_i\}-\{\delta_{ki}, u_j\}\equiv 0. \quad (461)$$

Следовательно, $\{u_i, u_j\}=a_{ij}(\varphi_j, \ldots, \varphi_n)$. Тогда

$$\omega=-\sum_{i=1}^{n} d\varphi_i\wedge du_i-\sum_{i<j} a_{ij}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)d\varphi_i\wedge d\varphi_j. \quad (462)$$

Форма $\sum\limits_{i<j} a_{ij}d\varphi_i\wedge d\varphi_j$ как разность двух замкнутых форм замкнута, и, следовательно, в достаточно малой окрестности точки x_0 она точна, т. е. $\sum\limits_{i<j} a_{ij}d\varphi_i\wedge d\varphi_j=d\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\varphi)d\varphi_i\right)$. В этом случае форма ω приводится к виду

$$\omega=d\left(\sum_{i=1}^{n} u_i d\varphi_i\right)-d\left(\sum_{i=1}^{n} f_i d\varphi_i\right)=d\left(\sum_{i=1}^{n}(u_i-f_i(\varphi))d\varphi_i\right). \quad (463)$$

Полагая $\psi_i=u_i-f_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, мы получим канонические координаты.

4. Лемма. *В пространстве* $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$ *локально всегда существует* n *функций в инволюции.*

Доказательство. Докажем более сильное индуктивное утверждение: если имеется $k<n$ независимых функций $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_k$ в инволюции, то существует не зависящая от них функция φ_{k+1} такая, что $\{\varphi_i, \varphi_{k+1}\}=0$ (ясно, что одну функцию в инволюции мы всегда предъявить можем, так как $\{\varphi, \varphi\}=0$). В силу свойства п. 10 § 13 найдутся такие координаты $u_i, \ldots, u_k$; $v_1, \ldots, v_{2n-k}$, что $\operatorname{sgrad} u_i=\partial/\partial u_i$. При этом $\varphi_i=\varphi_i(v_1, \ldots, v_{2n-k})$, так как $\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}=(\operatorname{sgrad}\varphi_j)\varphi_i=\{\varphi_i, \varphi_j\}=0$. Поскольку $k<2n-k$, то существует функция $\varphi_{k+1}(v)$, не зависящая от $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Тогда $\{\varphi_{k+1}, \varphi_i\}=\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial u_i}=0$. Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Оно сразу следует из лемм 3 и 4.

6. Замечание. Теорема Дарбу допускает обобщение, принадлежащее А. Б. Гивенталю, см. п. 8. Теорема Гивенталя утверждает, что не существует внешней геометрии подмногообразий симплектических многообразий: подмногообразия с одинаковой внутренней геометрией локально переводятся друг в друга сохраняющим симплектическую структуру диффеоморфизмом объемлющего пространства.

7. Замечание. Нам потребуется следующая формула. Пусть X — векторное поле на многообразии M, а φ_t — соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Тогда

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t)^*\alpha=(\varphi_t)^*L_X\alpha \tag{464}$$

для любой формы α. Равенство (464) сразу вытекает из определения 1 § 21.

8. Теорема. *Пусть M — гладкое многообразие, Y — замкнутое подмногообразие в M, а ω_0, ω_1 — такие симплектические структуры на M, что их ограничения на TY совпадают. Предположим, что ω_0, ω_1 можно соединить кусочно гладкой кривой ω_t, $0\leqslant t\leqslant 1$, в пространстве симплектических форм на M, совпадающих с ω_0 (или с ω_1) на Y. Тогда существуют такие две окрестности U, V подмногообразия Y в M и такой диффеоморфизм Φ: $U\to V$, что ограничение Φ на Y является тождественным отображением и $\Phi^*\omega_1=\omega_0$, иными словами, Φ — симплектоморфизм $(U,\ \omega_0)$ на $(V,\ \omega_1)$.*

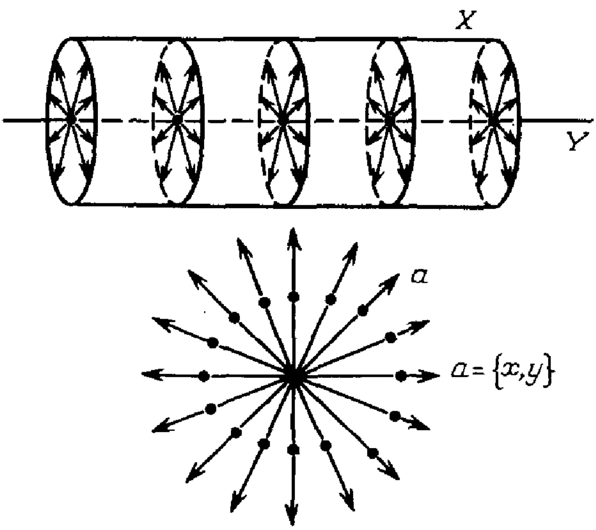


Рис. 23. Расслоение π: $U\to Y$

Доказательство. Обозначим линейное отображение из T_xM в T_x^*M, определенное формой ω, символом I_ω. Пусть U — достаточно малая трубчатая окрестность подмногообразия Y, X — «радиальное» векторное поле на U, касательное к слоям нормального расслоения $\pi: U\to Y$ и обращающееся в нуль на Y (рис. 23), а φ_t — локальная однопараметрическая группа, порожденная полем X. Предположим, что гомотопия ω_t гладкая. Пусть $v_t=I_{\omega_t}^{-1}\alpha_t$, где

$$\alpha_t=\int\limits_{-\infty}^{0}\left\{X \llcorner \left[(\varphi_\tau)^*\frac{d\omega_t}{dt}\right]\right\}d\tau. \tag{465}$$

Ясно, что $v_t\,|\,Y=0$. Обозначим $\Phi(t)$ локальную однопараметрическую группу, порожденную векторным полем v_t, т. е.

положим $x(t)=\Phi(t)x_0$, где $\dot{x}(t)=v_t(x(t))$, $x(0)=x_0$. Покажем, что в качестве Φ из формулировки теоремы можно взять отображение $\Phi(1)$. Проверим, что $\Phi(t)^*\omega_t=\omega_0$, $t\in[0, 1]$. В самом деле,

$$\frac{d}{dt}\{\Phi(t)^*\omega_t\}=\Phi(t)^*\left\{\frac{d\omega_t}{dt}+L_{v_t}\omega_t\right\} \tag{466}$$

в силу формулы Лейбница и формулы (464). Из соотношения (465) следует равенство

$$L_{v_t}\omega_t=d(v_t \llcorner \omega_t)=d(I_{\omega_t}v_t)=d\alpha_t. \tag{467}$$

Из определения (465) легко проверить, что $d\alpha_t=\frac{d\omega_t}{dt}$. Из всего сказанного следует равенство $\Phi(t)^*\omega_t=\omega_0$, $t\in[0, 1]$, поэтому, в частности, $\Phi(1)^*\omega_1=\omega_0$. Теорема доказана.

9. Замечание. Локальный вариант теоремы 8 не требует гомотопности форм ω_0, ω_1 в классе симплектических структур, так как в этом случае можно положить $\omega_t=\omega_0+t(\omega_1-\omega_0)$.

10. Замечание. Теорема 8 в предположении, что симплектические структуры ω_0, ω_1 совпадают на ограничении $TM|Y$ расслоения TM на подмногообразие Y, известна как теорема Вейнстейна. Ее доказательство можно найти, например, в [74]. Другие доказательства теоремы Дарбу см. например, в [8], [74], [102], [194], [227], [243], [301], [374].

11. Замечание. Из теоремы Вейнстейна можно получить сдедующее важное утверждение о строении лагранжевых подмногообразий, которое принадлежит Костанту, см. его доказательство, например, в [74].

12. Теорема. *Пусть L — вложенное лагранжево подмногообразие в симплектическом многообразии M с симплектической структурой ω. Рассмотрим L как нулевое сечение в T^*L, и пусть ω' — каноническая симплектическая структура на T^*L. Тогда у L существует такая окрестность U в M и такой диффеоморфизм h: $U\to V\subset T^*L$, что $h|L=\mathrm{id}$ и $h^*\omega'=\omega$.*

§ 26. Вложения симплектических многообразий

1. Замечание. Теорему Дарбу можно рассматривать как теорему о существовании локального вложения окрестности любой точки симплектического многообразия M^{2n} в симплектическое пространство $\mathbf{R}^{2N}$ с канонической структурой $\Omega=\sum_{i=1}^{N} dp_i\wedge dq_i$. Мы естественным образом приходим к следующему вопросу. Можно ли вложить симплектическое многообразие M^{2n} в некоторое пространство $\mathbf{R}^{2N}$ таким образом, чтобы симплектическая структура ω на M^{2n} индуцировалась стандартной симплектической структурой Ω на $\mathbf{R}^{2N}$, т. е. чтобы $\omega=f^*\Omega$, где $f\colon M^{2n}\to\mathbf{R}^{2N}$ — вложение?

2. Определение. Отображение $f\colon M\to N$ симплектического многообразия (M, ω_1) в симплектическое многообразие (N, ω_2) называется *симплектическим*, если $f^*\omega_2=\omega_1$.

3. Лемма. *Необходимым условием существования симплектического отображения из многообразия (M, ω) в многообразие $\left(\mathbf{R}^{2N}, \sum\limits_{i=1}^{N} dp_i\wedge dq_i\right)$ является точность формы ω, т. е. возможность ее записи в виде $\omega=d\alpha$, где α — некоторая 1-форма.*

Доказательство. Отображение $f\colon M\to\mathbf{R}^{2N}$ порождает гомоморфизм $f^*\colon H^2(\mathbf{R}^{2N}; \mathbf{R})\to H^2(M; \mathbf{R})$ групп когомологий, и поскольку $H^2(\mathbf{R}^{2N}; \mathbf{R})=0$, то $[\omega]=f^*[\Omega]=0$, что и утверждалось.

4. Следствие. *Компактное замкнутое симплектическое многообразие нельзя симплектически вложить ни в какое симплектическое пространство $(\mathbf{R}^{2N}, \Omega)$.*

Доказательство. Точная 2-форма ω_1 на компактном замкнутом ориентируемом многообразии не может быть невырожденной. В самом деле, если допустить существование точной невырожденной формы, то, с одной стороны, ее n-я внешняя степень дает $2n$-мерную форму ω_1^n объема на многообразии M^{2n}. Следовательно, $\int\limits_M \omega_1^n=\mathrm{vol}\,M\neq 0$. С другой стороны, форма ω_1^n точна, так как $\omega_1=d\alpha$ и $\omega_1^n=d(\alpha\wedge d\alpha\wedge\ldots\wedge d\alpha)$. По формуле Стокса интеграл по замкнутому компактному многообразию M от точной формы ω_1^n равен нулю. Полученное противоречие доказывает утверждение.

5. Теорема. *Пусть (M^{2n}, ω) — произвольное вещественно аналитическое некомпактное симплектическое многообразие, причем симплектическая структура ω является точной: $\omega=d\sigma$. Тогда существует симплектическое вложение многообразия (M^{2n}, ω) в $(\mathbf{R}^{2N}, \Omega)$ для некоторого $N<\infty$. Более того, в действительности можно считать, что $N=n(2n+1)$.*

Доказательство получается из результатов Громова [369], [376].

6. Замечание. Напомним, что для построения конкретных примеров симплектических многообразий важно уметь вкладывать одно симплектическое многообразие в другое, в этом случае определены перестройки $\tilde{X}$, см. п. 30 § 18.

7. Определение. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\varepsilon\colon H^k(M, \mathbf{Z})\to H^k(M, \mathbf{R})$, отображающий группы целочисленных когомологий многообразия M в группы его вещественных когомологий. Этот гомоморфизм возникает, когда мы вкладываем $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{R}$ и рассматриваем каждую целочисленную коцепь как вещественную. Замкнутая внешняя k-форма на многообразии

M называется *целочисленной*, если ее класс когомологий является образом некоторого целочисленного класса когомологий при гомоморфизме ε.

8. Теорема. *Комплексное проективное пространство* $\mathbf{C}P^N$ *со стандартной кэлеровой формой* Ω (*см. п.* 21 § 18) *является универсальным целочисленным симплектическим многообразием. Другими словами, любое многообразие M с целочисленной симплектической формой σ может быть вложено в* $\mathbf{C}P^N$ *для подходящего достаточно большого N с помощью такого отображения f, что $f^*\Omega=\sigma$. Если* $\dim M=m$, *то можно положить* $N=2m+1$.

Доказательство этой теоремы было получено Тишлером в [503], Нарасимхамом, Рамананом в [460] и Громовым в [369].

9. Пример. Если M^4 — многообразие Тёрстона (см. п. 29 § 18), то его можно вложить в $\mathbf{C}P^5$ со стандартной симплектической структурой, так как симплектическая структура многообразия M^4 является целочисленной. Пусть $\tilde{X}$ — многообразие, полученное из $\mathbf{C}P^5$ перестройкой вдоль M^4. Тогда имеет место следующая

10. Теорема. *Многообразие $\tilde{X}$ является односвязным симплектическим многообразием с* $\beta_1(M^4)=\beta^3(X)=3$. *Следовательно, X не кэлерово.*

Доказательство см. в работе [434].

11. Для доказательства обобщения теоремы о вложении в пространство $\mathbf{C}P^N$ потребуется следующая важная теорема 12, известная как теорема Мозера о стабильности, см. [452].

12. Теорема. *Пусть M^n — замкнутое многообразие и $\omega_t (0\leqslant t\leqslant 1)$ — гладкое семейство невырожденных 2-форм из одного класса когомологий. Тогда существует семейство диффеоморфизмов F_t: $M\to M$, $0\leqslant t\leqslant 1$, такое, что $F_t^*(\omega_0)=\omega_t$.*

13. Теорема Тишлера. *Пусть M — замкнутое компактное многообразие и ω — целочисленная замкнутая 2-форма на многообразии M (не обязательно невырожденная). Тогда для достаточно большого N существует симплектическое отображение f: $M\to\mathbf{C}P^N$ такое, что $f^*\Omega=\omega$, где Ω — стандартная симплектическая форма на* $\mathbf{C}P^N$.

Доказательство. Приведем идею доказательства теоремы Тишлера, см. [503]. Искомое отображение f строится в несколько этапов; j-й этап обозначается f_j, $0\leqslant j\leqslant p$ (p — некоторое число, зависящее от числа элементов некоторого открытого покрытия компактного многообразия M). Выберем f_0: $M\to\mathbf{C}P^N$ таким, что $f_0^*\Omega$ и ω лежат в одном классе когомологий. Это можно сделать, так как $\mathbf{C}P^n$ является $2n$-остовом комплекса Маклейна—Эйленберга типа $K(\mathbf{Z}, 2)$. Обозначим $d\alpha$ точную форму $d\alpha=\omega-f_0^*\Omega$. Для каждой точки $x\in M$ найдем такую ее окрестность W_x, что множество $f_0(W_x)\subset\mathbf{C}P^n$ покрывается симплектической картой на $\mathbf{C}P^n$ достаточно малых размеров. Существование симплектического атласа следует из теоремы Дарбу (см. п. 2 § 25) и явно строится на $\mathbf{C}P^n$ Тишлером. Выберем конечное подпокрытие $W_1, \ldots, W_p$ этого покрытия. Тогда существует набор вещественных функций h_k, t_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, таких, что $\pi^{-1} \sum_{i=1}^{p} dh_i \wedge dt_i = d\alpha$ и их носители содержатся в одном из элементов покрытия $\{W_i\}$.

Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant p$, предположим выполненным индуктивное предположение: существует отображение f_{j-1}: $M \to \mathbf{C}P^{n+j-1}$ такое, что

$$f_{j-1}^{*}\Omega^{n+j-1} = f_0^{*}\Omega^n + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{j-1} dh_k \wedge dt_k. \tag{468}$$

Заметим, что отображение f_p было бы искомым. Остается проверить шаг индукции, т. е. построить отображение f_j, исходя из отображения f_{j-1}. На $M \backslash W_j$ положим $f_j = i f_{j-1}$, где i: $\mathbf{C}P^{n+j-1} \to \mathbf{C}P^{n+j}$ — естественное включение. Существует симплектическая карта на $\mathbf{C}P^{n+j}$ со значениями в шаре радиуса 1, $B^{n+j}(1) \subset \mathbf{R}^{2(n+j)}$. Обозначим символом π_1 проекцию шара $B^{n+j}(1)$ на шар $B^{n+j-1}(1) \subset \mathbf{R}^{2(n+j-1)}$, а символом π_2, проекцию шара $B^{n+j}(1)$ на шар $B^1(1) \subset \mathbf{R}^2$.

Пусть φ_x: $D_x \to B^N(1)$ — карта. Определим отображение g_j: $W_j \to B^{n+j}(1)$, положив $\pi_1 g_j = \varphi_x f_{j-1}$, $\pi_2 g_j = h_j + \sqrt{-1}\, t_j$, и отображение $f_j = \varphi_x^{-1} g_j$. Обозначим φ_x симплектическое координатное отображение φ_x: $D_x \to B^N(1)$, $D_x \subset \mathbf{C}P^N$ (для любого N). Теорема Мозера о стабильности симплектических форм позволяет аппроксимировать построенное симплектическое погружение f: $M \to \mathbf{C}P^N$ симплектическим вложением g: $M \to \mathbf{C}P^N$. Чтобы получить симплектическое вложение g замкнутого симплектического многообразия M с целочисленной симплектической формой ω в $\mathbf{C}P^N$, исходя из имеющегося симплектического погружения f: $M \to \mathbf{C}P^N$, аппроксимируем f вложением g_0: $M \to \mathbf{C}P^N$ таким, что все формы $(1-t)\omega + t g_0^{*}\Omega^N = \omega_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, не выраждены. Тогда по теореме Мозера существует диффеоморфизм F: $M \to M$ такой, что $F^{*}\omega_1 = \omega_0$, т. е. $F^{*} g_0^{*}\Omega^N = \omega$. Вложение gF: $M \to \mathbf{C}P^N$ будет искомым. Теорема доказана.

14. Замечание. Модифицируя доказательство теоремы Тишлера, В. А. Попов доказал следующие две теоремы 15, 16.

15. Теорема. *Пусть (M, ω) — произвольное симплектическое многообразие размерности $m = 2n$ с точной симплектической формой $\omega = d\alpha$. Тогда существует собственное симплектическое отображение (погружение) f: $M \to \mathbf{R}^{2N}$ такое, что* $f^{*}\left(\sum_{i=1}^{N} dp_i \wedge dq_i\right) = \omega$, *где* $N = (m+1)(m+2)$.

16. Теорема. *Пусть (M, ω) — произвольное симплектическое многообразие с целочисленной симплектической формой ω. Тогда* *существует симплектическое погружение $f\colon M\to \mathbf{C}P^N$, $N\sim m^3$, $\dim M=m=2n$. Существует симплектическое погружение $g\colon M\to \mathbf{C}P^{2N+1}$, образ которого $g(M)$ содержится в $V^{2N+1}=\{(z_0\colon \ldots \colon z_N\colon z_{N+1}\colon \ldots \colon z_{2N+1})\mid$ существует $k\leqslant N$, $z_k\neq 0\}$, и отображение $g\colon M\to V^{2N+1}$ собственное. Тогда g гомотопно вложению.*

§ 27. Пуассоновы многообразия

1. Определение. Пуассоновой структурой на многообразии M называется билинейная операция $\{f, g\}$ в пространстве $C^\infty(M)$ гладких функций на M, удовлетворяющая требованиям: а) $\{f, g\}=-\{g, f\}$ — антикоммутативность; б) выполняется тождество Якоби $\{f, \{g, h\}\}+\{g, \{h, f\}\}+\{h, \{f, g\}\}=0$; в) справедливо тождество Лейбница $\{h, f_1 f_2\}=\{h, f_1\}f_2+f_1\{h, f_2\}$. Многообразие с пуассоновой структурой называется *пуассоновым многообразием*, а операция $\{f, g\}$ — *скобкой Пуассона.*

2. Предложение. *Скобка Пуассона однозначно определяет тензорное поле A^{ij} такое, что $A^{ij}=-A^{ji}$, причем*

$$\{f, g\}=A^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}. \tag{469}$$

Доказательство. Пусть $\{f, g\}$ — произвольная пуассонова структура на M, а U — открытый шар с центром в $0\in\mathbf{R}^n$. Если $\varphi\in C^0(U)$ и $\varphi(0)=0$, то существуют такие функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in C^\infty(U)$, что $\varphi(u)=\sum\limits_{i=1}^{n} u^i\psi_i(u)$. Их можно построить по формуле $\psi_i(u)=\int\limits_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial u^i}(tu)\,dt$. Тогда очевидно, что $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}\right|_0=\psi_i(0)$. Если $f, g\in C^\infty(M)$, то, выбирая на M такие локальные координаты, что $x^i(p)=0$ в точке $p\in M$, получим

$$f(x^1, \ldots, x^n)=\sum_{i=1}^{n} x^i\alpha_i;\quad g(x^1, \ldots, x^n)=\sum_{i=1}^{n} x^i\beta_i, \tag{470}$$

и по определению пуассоновой структуры

$$\begin{gathered}\{f, g\}(p)=\{x^i, x^j\}\,\alpha_i(p)\,\beta_j(p)+x^i(p)\{\alpha_i, x^j\}\,\beta_j(p)+\\ +\alpha_i(p)\{x_i, \beta_j\}_p x^j(p)+x^i(p)\,x^j(p)\{\alpha_i, \beta_j\}_p=\\ =\{x^i, x^j\}\left.\frac{\partial f}{\partial u^i}\right|_0\left.\frac{\partial g}{\partial u^j}\right|_0=A^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial g}{\partial u^j}.\end{gathered} \tag{471}$$

3. Лемма. *Гладкое кососимметрическое тензорное поле A^{ij} задает скобку Пуассона тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{l=1}^{n}\left(A^{lj}\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l}+A^{li}\frac{\partial A^{kj}}{\partial x^l}+A^{lk}\frac{\partial A^{ji}}{\partial x^l}\right)=0. \tag{472}$$

4. Определение. *Рангом скобки Пуассона* в фиксированной точке $x_0 \in M$ называется ранг тензора $A^{ij}(x_0)$. Рангом скобки Пуассона на всем многообразии M называется число

$$R = \max_{x \in M} \operatorname{rg} A^{ij}(x). \tag{473}$$

Функция $f \in C^\infty(M)$ называется *центральной функцией* или *функцией Казимира* скобки Пуассона, если она принадлежит центру алгебры Ли гладких функций, т. е. $\{f, g\} = 0$ для любой гладкой функции g. Если скобка Пуассона не вырождена, т. е. ее ранг равен $\dim M$, то центральными функциями являются только константы.

5. Предложение. *Пусть ранг тензорного поля A^{ij} локально постоянен в точке $x \in M$ и равен R. Тогда в некоторой окрестности $V(x)$ определены независимые функции $f_1, \ldots, f_g$, где $g = \dim M - R$, которые являются центральными для ограничения скобки Пуассона на окрестность $V(x)$.*

6. Определение. Каждой гладкой функции H на пуассоновом многообразии M ставится в соответствие векторное поле $v = \operatorname{sgrad} H$, задаваемое соотношением $v(g) = \{H, g\}$ для любой гладкой функции g или в локальных координатах $v^i = (\operatorname{sgrad} H)^i = A^{ji} \dfrac{\partial f}{\partial x^j}$. Векторные поля вида $v = \operatorname{sgrad} H$ называются *гамильтоновыми.*

7. Конструкция. Пуассоново многообразие M разбивается на *симплектические слои*, каждый из которых является локально симплектическим подмногообразием, размерность которого равна рангу скобки Пуассона в любой его точке. Касательное пространство к слою в точке $x \in M$ образовано векторами вида $\operatorname{sgrad} f(x)$, ортогональное дополнение в T_x^*M к касательному пространству слоя совпадает с ядром 2-формы $A^{ij}(x)$, отвечающей скобке $\{f, g\}$. Более точно см. [10], [228]. Назовем две точки $x, y \in M$ эквивалентными, если их можно соединить кусочно гладкой кривой, каждый сегмент которой является интегральной траекторией гамильтонова векторного поля. Тогда симплектический слой O_x, проходящей через точку x, есть класс эквивалентности этой точки.

8. Пример. Пусть G — вещественная алгебра Ли, G^* — дуальное к G пространство. Для $f, g \in C^\infty(G^*)$ определена скобка Березина, см. п. 13 § 22:

$$\{f, g\}(\varphi) = \langle \varphi, [df_\varphi, \; dg_\varphi] \rangle, \qquad \varphi \in G^*, \tag{474}$$

здесь считаем, что $G^{**} = G$. В этом примере симплектические слои совпадают с орбитами коприсоединенного представления группы Ли P, отвечающей алгебре Ли G. Векторное поле $\operatorname{sgrad} f_x$ имеет вид $ad^*_{df(x)}(x)$. Центральные функции — это инварианты коприсоединенного представления.

9. Определение. Функции f, g на многообразии Пуассона находятся в *инволюции*, если $\{f, g\}=0$. Семейство функций B в инволюции называется *полным* в точке $x\in M$, если размерность подпространства в $T^*_x O_x$, порожденного дифференциалами df функций $f\in B$, ограниченных на слой O_x, равна $2^{-1}\dim O_x$.

10. Предложение. *Пусть $K\subset T^*_x M$ — подпространство, порожденное дифференциалами функций из инволютивного семейства F, а $\tilde{K}=\{\xi\in T^*_x M \mid A(\xi, K)=0\}$ — ортогональное дополнение к K относительно 2-формы $A=\|A^{ij}(x)\|$ на $T^*_x M$, отвечающей скобке Пуассона. Инволютивное семейство F полно в точке $x\in M$ тогда и только тогда, когда $\tilde{K}=K+\operatorname{Ker} A$.*

11. Замечание. Пусть $F\colon M_1\to M_2$ — гладкое отображение пуассоновских многообразий M_i, $i=1, 2$. Определено отображение $F^*\colon C^\infty(U)\to C^\infty(F^{-1}(U))$, $U\subset M_2$ — открытое подмножество в M_2. Возникает естественный вопрос: когда это отображение является гомоморфизмом алгебр Ли.

12. Предложение. *Отображение F^* индуцирует гомоморфизм пуассоновых структур тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих трех эквивалентных требований:* а) *$F_* A_1=A_2$, где A_i — соответствующее тензорное поле на M_i, $i=1, 2$;* б) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U_1) & \xleftarrow{F^*} & C^\infty(U_2) \\ \downarrow \mathrm{sgrad} & & \downarrow \mathrm{sgrad} \\ D(U_1) & \xrightarrow{F_*} & D(U_2)|F(U_1) \end{array} \tag{475}$$

коммутативна, где U_2 — открытое множество в M_2, $U_1=F^{-1}(U_2)$, $D(U)$ — алгебра Ли гладких векторных полей на U; в) *если ω_1, ω_2 — симплектические структуры на симплектических слоях в M_1, M_2, то $F^*\omega_2|V=\omega_1|V$, где $V(u)=(\operatorname{Ker} F_*|D_u)^\perp$ и $D_u=\{\mathrm{sgrad} f_u \mid f\in C^\infty(U)\}$.*

13. Рассмотрим случай скобки Березина (п. 8). Итак, пусть $F\colon M\to G^*$ — гладкое отображение, M — многообразие с пуассоновой структурой $\{f, g\}$. Обозначим $\Phi\colon G\to C^\infty(M)$ линейное отображение $\Phi_X(u)=\langle F(u), X\rangle$, т. е. $\Phi_X=F^*\lambda_X$, где λ_X — линейный функционал на G^*, определенный равенством $\langle\lambda_X, \varphi\rangle=\langle\varphi, X\rangle$, $X\in G$, $\varphi\in G^*$.

14. Предложение. *Отображение $F^*\colon C^\infty(G^*)\to C^\infty(M)$ является гомоморфизмом пуассоновых структур тогда и только тогда, когда $\Phi\colon (G, [X, Y])\to(C^\infty(M), \{f, g\})$ — гомоморфизм алгебр Ли.*

15. Определение. Пуассоново многообразие M допускает *реализацию* в пуассоновом многообразии N, если существует такое отображение $f\colon M\to N$, что $F^*\colon C^\infty(N)\to C^\infty(M)$ — гомоморфизм пуассоновых структур. Если N — инвариантное относительно коприсоединенного представления подмногообразие в пространстве G^*, на котором в качестве пуассоновой структуры взята скобка Березина, то в этом случае говорят, что пуассоново многообразие допускает реализацию в алгебре Ли G.

16. Следствие. *Пусть пуассоново многообразие M допускает реализацию с помощью f в алгебре Ли G. Если F, H находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления, то $F \circ f$, $H \circ f$ находятся в инволюции на M.*

17. Определение. Пусть симплектическое многообразие M допускает реализацию f в алгебре Ли G и на M задано гамильтоново векторное поле sgrad F. Говорят, что оно *реализуется* в G с помощью f, если на подмногообразии N, на котором реализуется M, существует такая функция F_1, что $F = F_1 \circ f$.

18. Очень часто динамические системы не являются гамильтоновыми. Например, векторное поле v, определяющее динамическую систему, может быть задано на нечетномерном многообразии M. В этом случае под *реализацией системы* v будем понимать задание такой пуассоновой структуры на M, которая допускает реализацию в некоторой алгебре Ли G, при этой реализации система $\dot{x} = v(x)$ должна перейти в гамильтонову систему. Более подробно, это означает следующее.

19. Определение. Говорят, что векторное поле v на M^n допускает *вложение* в алгебру Ли, если M^n можно отождествить с инвариантным относительно коприсоединенного представления подмногообразием $V \subset G^*$ в пространстве G^*, дуальном к некоторой алгебре Ли G, причем: а) векторное поле v касается орбит коприсоединенного представления группы Ли P на G^*; б) векторное поле v на V оказывается гамильтоновым на орбитах относительно стандартной симплектической структуры (P — группа Ли, отвечающая алгебре Ли G).

20. Пусть G — алгебра Ли, а $\rho\colon G \to \mathrm{End}(V)$ — ее представление. Символом $G \underset{\rho}{\oplus} V$ обозначим полупрямую сумму G и V. Коммутатор в $G \underset{\rho}{\oplus} V$ определяется формулой $[(l_1, v_1), (l_2, v_2)] = [l_1, l_2] \oplus (\rho(l_1) v_2 - \rho(l_2) v_1)$, $l_i \in G$, $v_i \in V$, $i = 1, 2$.

21. Предложение. *В обозначениях предыдущего пункта пространство $T^* V$ с канонической симплектической структурой ω допускает реализацию в алгебре Ли $G \underset{\rho}{\oplus} V$.*

Доказательство. Для алгебры Ли G отображение $R\colon T^* V = V \oplus V^* \to (G \underset{\rho}{\oplus} V)^*$, определенное формулой $R(\alpha \oplus \alpha^*)(l, v) = \langle \alpha^*, v - \rho(l)\alpha \rangle$, где $\alpha, v \in V$, $\alpha^* \in V^*$, $l \in G$, задает нужную реализацию.

22. Предложение. *Каноническое симплектическое пространство $\mathbf{R}^{2n}(q_i, p_i)$ допускает реализацию в алгебре Ли верхних треугольных матриц.*

Доказательство. Пусть

$$K_+=\left\{\begin{pmatrix} * & \cdot & * \\ 0 & \cdot & * \end{pmatrix}\right\}, \quad K_-=\left\{\begin{pmatrix} * & \cdot & 0 \\ * & \cdot & * \end{pmatrix}\right\}, \tag{476}$$

т. е. K_+ — верхние треугольные матрицы, а K_- — нижние треугольные. Имеется естественное невырожденное спаривание $f\colon K_+ \times K_- \to \mathbf{R}$, $f(X, Y)=\operatorname{tr} XY$, которое позволяет отождествить $K_+^*=K_-$ и $K_-^*=K_+$. Положим

$$N=\left\{\begin{pmatrix} p_1 & 0 & & & \\ s_1 & p_2 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & p_{n-1} & 0 \\ 0 & & & s_{n-1} & p_n \end{pmatrix}\right\}\subset K_-=K_+^*, \tag{477}$$

легко видеть, что N — инвариантное относительно Ad^* подпространство. Нужная реализация задается формулами

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & & 0 \\ s_1 & p_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & s_{n-1} & p_n \end{pmatrix}, \tag{478}$$

$$p_i=y_i, \quad s_j=\exp(x_j-x_{j+1}). \tag{479}$$

23. Алгебраизация системы Неймана. Рассмотрим материальную точку на сфере $S^n=\{x \mid |x|=1\}$, находящуюся в поле квадратичного потенциала $U(x)=2^{-1}(x, Ax)$, где A — вещественная симметричная матрица, которую без ограничения общности можно считать диагональной. Такая система была проинтегрирована для $n=2$ в 1859 г. К. Нейманом, он использовал метод разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби (см. § 11). Уравнения движения этой системы имеют вид $\ddot{x}_j=-a_j x_j+\nu x_j$, где $\nu=(x, Ax)-|\dot{x}|^2$ — множитель Лагранжа. Эти уравнения можно переписать в виде

$$\dot{x}_i=y_i, \quad \dot{y}_j=-a_j x_j+(Ax\oplus x-|y|^2 E)x_j. \tag{480}$$

Введем матрицы $X=x\otimes x$, $P=x\otimes y-y\otimes x$. Тогда уравнения (480) можно переписать в виде

$$\dot{X}=[X, P], \quad \dot{P}=[A, X], \quad |x|=1, \quad (x, y)=0. \tag{481}$$

Если в этих уравнениях сделать замену переменных $X\to X-n^{-1}E$ и $A\to A-n^{-1}(\operatorname{tr}A)E$, то можно считать, что X, $P\in \mathrm{sl}(n, \mathbf{R})$.

Для реализации системы Неймана на орбите коприсоединенного представления рассмотрим алгебру Ли $\Omega(\mathrm{sl}(n, \mathbf{R}))=\mathrm{sl}(n, \mathbf{R})\otimes\mathbf{R}[x]/(x^2)$, ей отвечает группа Ли $\Omega(\mathrm{SL}(n, \mathbf{R}))=\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})\times\mathrm{sl}(n, \mathbf{R})$ с умножением $(g_1, \xi_1)(g_2, \xi_2)=(g_1g_2, \xi_1+\mathrm{Ad}_{g_1}\xi_2)$. Рассмотрим в $\Omega(\mathrm{sl}(n, \mathbf{R}))$ подалгебру $L=\mathrm{so}(n)+S$, где S — векторное пространство всех симметрических матриц, и подпространство $V=S+\mathrm{so}(n)$. Пространство L^* отождествим с V, используя прямую сумму форм Киллинга $\langle A, B\rangle=-2^{-1}\mathrm{tr}\,AB$. Система Неймана реализуется на специальной орбите коприсоединенного представления группы Ли T, отвечающей алгебре Ли L.

24. Теорема. *Рассмотрим орбиту группы $T=\mathrm{SO}(n)\times S$, проходящую через точку $z\otimes z-n^{-1}E$ в пространстве $L^*=\mathrm{so}(n)\oplus S$, $z=(1, \ldots, 1)/\sqrt{n}$. Она состоит из пар (X, P), $X=x\otimes x-n^{-1}E$, $P=x\otimes y-y\otimes x$, $|x|=1$, $(x, y)=0$. Эта $2(n-1)$-мерная орбита с симплектической структурой Кириллова диффеоморфна касательному расслоению TS^{n-1} при отображении $(X, P)\to(x, y)$ с симплектической структурой, индуцированной на TS^{n-1} структурой $\sum_{j=1}^{n} dx_j\wedge dy_j$ в пространстве $\mathbf{R}^{2n}(x_i, y_j)$. Гамильтониан*

$$H(x, p)=-2^{-1}\langle P, P\rangle+\langle A, X\rangle \tag{482}$$

определяет на этой орбите уравнения движения для системы Неймана (см. (481)).

Доказательство см. в [482]. Гамильтоновость уравнений (481) была также установлена в [305].

ЧАСТЬ 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава 5

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С СИММЕТРИЯМИ. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ ГРУПП ЛИ НА СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

§ 28. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы

1. Определение. Система гамильтоновых уравнений $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) называется *вполне интегрируемой*, если существуют такие гладкие функции $f_1, \ldots, f_n$ на многообразии M^{2n}, что: а) f_i — первые интегралы потока $\dot{x}$, т. е. $\{H, f_i\} = 0$, $i = 1, \ldots, n$; б) функции $f_1, \ldots, f_n$ находятся попарно в инволюции, $\{f_i, f_j\} = 0$; в) функции $f_1, \ldots, f_n$ функционально независимы почти всюду на M^{2n}, т. е. их дифференциалы линейно независимы на открытом всюду плотном подмножестве в M^{2n}.

Семейство функций $f_1, \ldots, f_n$, удовлетворяющее свойствам а) — в), будем называть *полным инволютивным*.

2. Пример. Система $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$, где H определена в п. 19 § 20, является вполне интегрируемой: функции F_1, F_2, F_3, определенные в п. 19 § 20, дают полный инволютивный набор первых интегралов, что вытекает из лемм 21—23 в § 20.

3. Предложение. *Геодезический поток на поверхности вращения является вполне интегрируемым.*

Доказательство. Пусть M^2 — поверхность вращения. Геодезический поток определен на T^*M^2. Поскольку $\dim T^*M^2 = 4$, то для полной интегрируемости надо указать полное инволютивное семейство функций, состоящее из двух функций, т. е. достаточно указать один первый интеграл геодезического потока, см. п. 1 § 20.

Для геодезических на поверхности вращения выполнено соотношение $x \sin\omega = \mathrm{const}$, где ω — угол, который геодезическая линия образует с меридианом в точке пересечения с ним, а x — радиус параллели, на которой лежит рассматриваемая точка, или, что то же самое, расстояние до оси вращения (рис. 24). Это утверждение в элементарной дифференциальной геометрии известно как теорема Клеро.

4. Определение. Пусть K^{2n} — симплектическое многообразие, H — гладкая функция на K^{2n}. Рассмотрим однопараметрическое семейство $V_c=\{H=c\}$, $c\in\mathbf{R}$, поверхностей уровня гамильтониана H и соответствующее семейство задач Гамильтона — Якоби в симплектическом многообразии K^{2n}. Говорят, что задача Гамильтона — Якоби имеет *невырожденное n-параметрическое семейство решений* в области $U\subset K^{2n}$, если существует отображение $\varphi\colon U\to V$ на область $V\subset\mathbf{R}^n$ такое, что: а) φ регулярно, т. е. ранг $d\varphi$ максимален; б) для любого $v\in V$ прообраз $\varphi^{-1}(v)=L_v$ является лагранжевым подмногообразием, лежащим на некоторой поверхности уровня функции H, т. е. L_v — решение соответствующей задачи Гамильтона — Якоби, см. п. 14 § 24. Пусть $Q_i\colon V\to\mathbf{R}$ $(i=1, \ldots, n)$ — координатные функции на V. Если $V\ni v=(c_1, \ldots, c_n)$, то $L_v=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\{\overline{Q_i}=c_i\}$, где $\overline{Q_i}=\varphi^*(Q_i)=Q_i\circ\varphi$ — параметры лагранжевых многообразий L_v, понимаемые как функции на U.

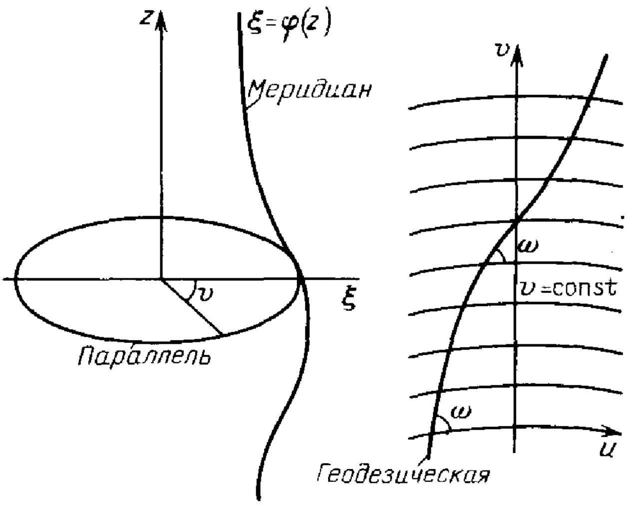


Рис. 24

5. Теорема. *Пусть задача Гамильтона — Якоби имеет невырожденное n-параметрическое семейство решений в некоторой области U симплектического многообразия M^{2n}. Тогда соответствующая гамильтонова система $\dot{x}=\operatorname{sgrad} H$ вполне интегрируема в U, причем за набор коммутирующих первых интегралов можно принять параметры, рассматриваемые как функции на U.*

Доказательство. Дифференциалы функций $\overline{Q_i}$ линейно независимы в силу регулярности отображения φ (L_v — подмногообразие в силу теоремы о неявных функциях, так как φ — регулярное отображение).

Лагранжевы многообразия L_v лежат на поверхностях уровня $H=c$ по определению решения уравнения Гамильтона — Якоби. Далее, L_v лежат на поверхности уровня функции $\overline{Q_j}=Q_j\circ\varphi$, поэтому по предложению 16 § 24 имеем $\{H, \overline{Q_j}\}=0$, т. е. $\overline{Q_i}$ — первые интегралы потока $\dot{x}=\operatorname{sgrad} H$, и по тому же

предложению $\{\overline{Q_i}, \overline{Q_j}\}=0$, т. е. функции $\overline{Q_i}$ в инволюции и их число по определению равно половине размерности многообразия M^{2n}.

6. Предложение (А. В. Браилов). *На любом симплектическом многообразии существует полное инволютивное семейство гладких функций, функционально независимых почти всюду на многообразии.*

Доказательство. Согласно теореме Дарбу п. 2 § 25 в некоторой шаровой окрестности любой точки существуют симплектические координаты, т. е. симплектическая структура имеет каноническое представление $dp_1\wedge dq_1+\ldots+dp_n\wedge dq_n$. На этом шаре рассмотрим функции $f_i=p_i^2+q_i^2$. Ясно, что $\{f_i, f_j\}=0$, т. е. эти функции находятся в инволюции. Пусть $f=\sum\limits_{i=1}^n f_i=\sum\limits_{i=1}^n (p_i^2+q_i^2)$. Построим теперь на шаре гладкую функцию $h=g\circ f$, зависящую только от «радиуса» f шара, равную единице в центре шара, равную тождественно нулю на границе шара и монотонно убывающую с ростом f от единицы в центре шара до нуля на границе (рис. 25). Эту функцию продолжим нулем на все многообразие. Ясно, что $\{h, f_i\}=0$, следовательно, $\{hf_i, hf_j\}=0$.

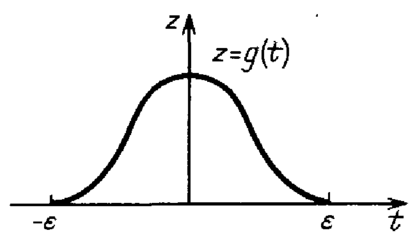


Рис. 25. ε — радиус координатного шара

Утверждается, что функции $hf_1, \ldots, hf_n$ независимы внутри шара. В самом деле, если допустить функциональную зависимость, то существует такая функция $F\not\equiv 0$, что $F(hf_1, \ldots, hf_n)\equiv 0$, т. е. $F\left(g\left(\sum\limits_{i=1}^n f_i\right)f_1, \ldots, g\left(\sum\limits_{i=1}^n f_i\right)f_n\right)\equiv 0$. Ясно, что функции $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n$ независимы, поэтому можно заменить их формальными переменными $t_1, \ldots, t_n$. Если мы докажем, что функция $F\left(g\left(\sum\limits_{i=1}^n t_i\right)t_1, \ldots, g\left(\sum\limits_{i=1}^n t_i\right)t_n\right)$ не равна тождественно нулю, то тем самым докажем независимость функций $hf_1, \ldots, hf_n$.

Допустим противное, пусть указанная функция тождественно обращается в нуль, т. е. функции $g\left(\sum\limits_{i=1}^n t_i\right)t_1, \ldots, g\left(\sum\limits_{i=1}^n t_i\right)t_n$ функционально зависимы. Якобиан J этой системы функций, очевидно, равен

$$J=\det\left(\frac{\partial g}{\partial t}\left\|\begin{matrix} t_1 & \cdots & t_1\\ t_2 & \cdots & t_2\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ t_n & \cdots & t_n\end{matrix}\right\| + g\left\|\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}\right\|\right)=g^n\pm tg^{n-1}\frac{\partial g}{\partial t}, \qquad (483)$$

где $t=t_1+...+t_n$. Если $J\equiv 0$, то $g\pm t\frac{\partial g}{\partial t}=0$, т. е. $g(t)$ — линейная функция, что не так.

Покрывая теперь многообразие счетным числом дисков и выполняя на каждом из них только что описанную конструкцию, получим искомый набор функций $k_1, ..., k_n$, которые попарно находятся в инволюции и каждая k_i отлична от нуля на открытом всюду плотном подмножестве (рис. 26).

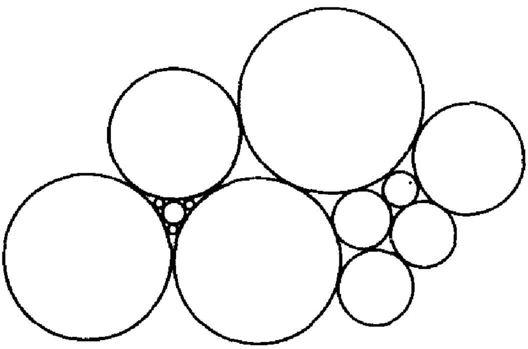


Рис. 26

7. Замечание. Конструкция, изложенная в п. 6, носит формальный характер: она показывает, что в гладком случае на любом симплектическом многообразии существует хотя бы одна вполне интегрируемая гамильтонова система. Однако ясно, что построенный в п. 6 набор функций не представляет интереса с точки зрения содержательных физических приложений. Поэтому следует сузить класс функций, среди которых нужно искать вполне интегрируемые гамильтоновы системы и полные инволютивные семейства функций. Часто рассматривается класс аналитических функций. Другой естественный класс таких функций указан в § 57 — это так называемые боттовские функции на гладких многообразиях.

§ 29. Структура вполне интегрируемых гамильтоновых систем

1. Теорема Лиувилля. *Пусть на симплектическом 2n-мерном многообразии M^{2n} задана система n функций $f_1, ..., f_n$, находящихся попарно в инволюции, т. е. $\{f_i, f_j\}\equiv 0$, $i, j=1, ..., n$. Рассмотрим множество уровня этой системы функций, т. е. $M_\xi=\{x\in M \mid f_i(x)=\xi_i,\ i=1, ..., n\}$. Предположим, что на M_ξ функции f_j, $j=1, ..., n$, независимы, т. е. 1-формы df_j, $j=1, ..., n$, линейно независимы в каждой точке $x\in M_\xi$. Тогда:* а) *M_ξ — гладкое многообразие, инвариантное относительно потока* sgrad *H с функцией Гамильтона $H=f_1$;* б) *если многообразие M_ξ компактно и связно, то оно диффеоморфно n-мерному тору T^n;* в) *фазовый поток* sgrad *H с функцией Гамильтона H определяет на M_ξ условно периодическое движение.*

Доказательство. По теореме о неявных функциях M_ξ — гладкое многообразие размерности $\dim M_\xi=n$.

2. Лемма. *На n-мерном многообразии M_ξ существуют n касательных векторных полей, попарно коммутирующих и линейно независимых в каждой точке.*

Доказательство. Поля $v_i = \operatorname{sgrad} f_i$, $i=1, \ldots, n$, искомые. Действительно, по условию df_i линейно независимы, а операция поднятия индексов с помощью ω является изоморфизмом, поэтому поля v_i также линейно независимы. Далее,

$$[\operatorname{sgrad} f_k,\ \operatorname{sgrad} f_l] = \operatorname{sgrad}\{f_l,\ f_k\} = \operatorname{sgrad} 0 = 0 \tag{484}$$

в силу предложения 11 § 21. Итак, поля v_i коммутируют. Поля v_i касаются поверхности M_ξ. Действительно, вектор X касается поверхности $H=\text{const}$ тогда и только тогда, когда $dH(X)=0$, так как уравнение $dH=0$ задает касательную плоскость к поверхности $H=\text{const}$. В нашем случае

$$df_i(\operatorname{sgrad} f_k) = \{f_i,\ f_k\} = 0. \tag{485}$$

3. Следствие. *Многообразие M_ξ инвариантно относительно каждого из n коммутирующих фазовых потоков $\dot{x} = \operatorname{sgrad} f_i$ с функцией Гамильтона f_i.*

4. Следствие. *Многообразие M_ξ является лагранжевым.*

Доказательство. Векторы $\operatorname{sgrad} f_i$ образуют базис в $T_x M_\xi$ и $\omega(\operatorname{sgrad} f_i,\ \operatorname{sgrad} f_j) = \{f_i,\ f_j\} = 0$.

5. Предложение. *Пусть P^n — компактное связное n-мерное многообразие, на котором задано n попарно коммутирующих векторных полей, линейно независимых в каждой точке. Тогда P^n диффеоморфно n-мерному тору.*

Доказательство. Построим действие группы Ли $\mathbf{R}^n$ на P^n. Пусть φ_i^t, $i=1, \ldots, n$, — однопараметрическая группа, отвечающая векторному полю v_i, которое задано на P^n по условию. Поскольку $[v_i,\ v_j]=0$, то потоки φ_i^t, φ_j^t коммутируют, см. п. 34 § 10. Поскольку многообразие компактно, то векторные поля v_i порождают не локальные однопараметрические группы, а глобальные, т. е. v_i — полные поля. Определим действие φ^t: $M \to M$, $t \in \mathbf{R}^n$, группы $\mathbf{R}^n$ на P^n формулой $\varphi^t(x) = \varphi^{t_1} \ldots \varphi^{t_n}(x)$, где $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n$. Очевидно, что $\varphi^t \varphi^s = \varphi^{t+s}$ для всех t, $s \in \mathbf{R}^n$.

6. Лемма. *Построенное действие группы $\mathbf{R}^n$ на P^n транзитивно, т. е. любую точку $x_0 \in P^n$ можно с помощью некоторого отображения φ^t перевести в любую наперед заданную точку $x \in P^n$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение φ: $\mathbf{R}^n \to P$, $\varphi(t) = \varphi^t(x_0)$. Вычислим его дифференциал $d\varphi$: $T_0 \mathbf{R}^n \to T_{x_0} P$. Имеем

$$d\varphi(e_i) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi^{te_i}(x_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi_i^t(x_0) = v_i(x_0). \tag{486}$$

Поэтому матрица отображения $d\varphi$ имеет вид $\| v_{ij} \|$, где v_{ij} — это j-я координата вектора v_i. Следовательно, $\det d\varphi \neq 0$, так как $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы. Итак, существует такая окрестность U точки x_0 и окрестность V точки $0 \in \mathbf{R}^n$, что φ отображает V на U диффеоморфно.

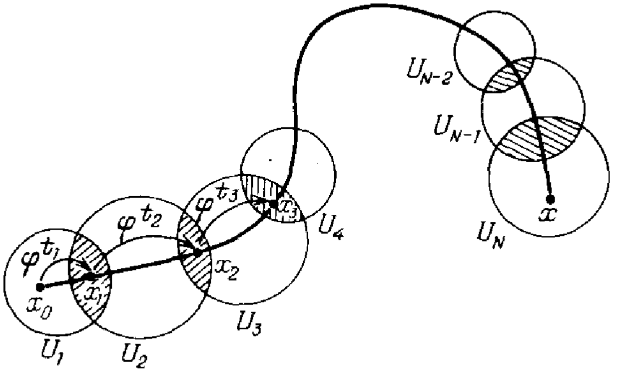


Рис. 27

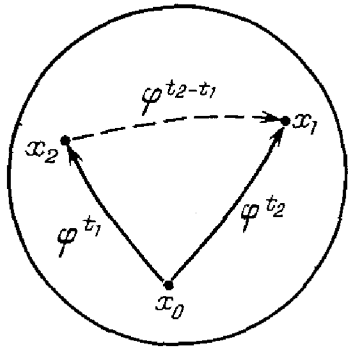


Рис. 28

Соединим точку x с x_0 кривой $\gamma(t)$, покроем эту кривую конечным числом окрестностей $U_1, \ldots, U_N$, построенных выше (рис. 27). Пусть $x_1 \in U_1 \cap U_2, \ldots, x_{N-1} \in U_{N-1} \cap U_N$. Тогда имеем $x_1 = \varphi^{t_1} x_0, \ldots, x = \varphi^{t_N} x_{N-1}$, и окончательно $x = \varphi^{t_N + \ldots + t_1} x_0$ (рис. 28).

7. Лемма. *Стационарная подгруппа любой точки $x_0 \in P$ относительно построенного действия группы $\mathbf{R}^n$ на P дискретна.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{R}^n$ — абелева группа, то стационарная подгруппа $Z = \{t \in \mathbf{R}^n \mid \varphi^t(x_0) = x_0\}$ не зависит от выбора точки $x_0 \in P$. Проверим, что в достаточно малой окрестности V точки 0 в Z нет других точек стационарной подгруппы Z кроме точки $t = 0$. Это вытекает из того, что φ: $V \to U$ — диффеоморфизм, см. п. 6.

8. Предложение. *Пусть $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ — дискретная подгруппа. Тогда существует линейно независимая система векторов $e_1, \ldots, e_k \in \mathbf{R}^n$ такая, что* $\Gamma = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{k} n_i e_i,\ n_i \in \mathbf{Z} \right\}$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Если $\Gamma \neq \{0\}$, то выберем наименьший по абсолютной величине элемент $e_1 \in \Gamma$, $e_1 \neq 0$ (такой элемент существует в силу предположения о дискретности Γ). Если $\gamma \in \Gamma$, то найдется такое целое число $m \in \mathbf{Z}$, что $|\gamma - m e_1| < |e_1|$, но $\gamma - m e_1 \in \Gamma$, следовательно, $\gamma - m e_1 = 0$, т. е. $\gamma = m e_1$ и e_1 порождает группу Γ.

Предположим, что для размерности $n - 1$ утверждение доказано, докажем его для размерности n. Пусть Γ — дискретная подгруппа в $\mathbf{R}^n$. Считаем, что $\Gamma \neq \{0\}$; $e_1 \in \Gamma$ — такой элемент, что $e_1 \neq 0$ и $e_1 \neq m\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, $m > 1$, т. е. e_1 не является кратным некоторого элемента $\gamma \in \Gamma$. Рассмотрим

$(n-1)$-мерное пространство $\mathbf{R}^n/\mathbf{R}e_1$ и естественную проекцию π: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n/\mathbf{R}e_1$. Докажем, что $\pi(\Gamma)$ — дискретная подгруппа в $\mathbf{R}^n/\mathbf{R}e_1$. Пусть $\pi(\Gamma)$ не дискретна, это означает, что существует такая последовательность $\gamma_n \in \Gamma$, что $\pi(\gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$, но $\pi(\gamma_n) \neq 0$. Пусть $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}e_1 \oplus V$. Можно считать, что π есть проекция на V. Тогда $\gamma_n = c_n e_1 + \gamma'_n$, $\pi(\gamma_n) = \gamma'_n \to 0$ при $n \to \infty$. Будем считать, что $c_n e_1$ — ограниченное множество. Действительно, $\hat{\gamma}_n = \gamma_n - [c_n] e_1 \in \Gamma$ и $\tilde{\gamma}_n = \{c_n\} e_1 + \gamma'_n = \tilde{c}_n e_1 + \gamma'_n$. Множество $\{\tilde{c}_n\}$ ограничено. Следовательно, из него можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\tilde{c}_n \to c$, $n \to \infty$. Тогда $\tilde{\gamma}_n \to c e_1$, $n \to \infty$, так как $\gamma'_n \to 0$, $n \to \infty$, причем $\tilde{\gamma}_n \neq c e_1$, так как $\tilde{\gamma}'_n \neq 0$. Если $\{c_n\} e_1 + \gamma'_n = c e_1$, то $(\{c_n\} - c) e_1 + \gamma'_n = 0$, поэтому $\{c_n\} - c = 0$ и $\gamma'_n = 0$. Итак, $\tilde{\gamma}_n \in \Gamma$, $\tilde{\gamma}_n \to c e_1$, $n \to \infty$, $\tilde{\gamma}_n \neq c e_1$, а это противоречит дискретности группы Γ.

По предположению индукции существует система линейно независимых векторов $f_2, \ldots, f_k$ такая, что $\pi(\Gamma) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x = \sum_{i=2}^{k} m_i f_i, \quad m_i \in \mathbf{Z} \right\}$. Выберем такие векторы $e_2, \ldots, e_k$, что $\pi(e_i) = f_i (i = 2, \ldots, k)$, и рассмотрим систему $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Очевидно, что эти векторы линейно независимы. Это искомая система: если $\gamma \in \Gamma$, то

$$\pi(\Gamma) = \sum_{i=2}^{k} m_i f_i = \pi\left(\sum_{i=2}^{k} m_i e_i\right), \tag{487}$$

следовательно, $\gamma - \sum_{i=2}^{k} m_i e_i \in \mathbf{R}e_1$, т. е. $\gamma - \sum_{i=2}^{k} m_i e_i = m_1 e_1$.

9. Доказательство предложения 5. Многообразие P диффеоморфно факторпространству $\mathbf{R}^n/Z$, где Z — стационарная подгруппа. Поскольку $Z = \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i e_i, \ m_i \in \mathbf{Z} \right\}$ в силу предложения 8, то $P = \mathbf{R}^n/Z = T^n$, что и утверждалось.

10. Определение. Пусть T^n — n-мерный тор, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — угловые координаты. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов тора T^n называется *условно периодическим движением*, если она описывается дифференциальным уравнением $\dot{\varphi} = \omega$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) = \text{const}$.

Эти уравнения немедленно интегрируются: $\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t$. Таким образом, в карте $\{\varphi_i\}$ траектории являются прямыми линиями. Величина ω называется *частотой условно периодического движения.*

11. Доказательство теоремы 1. В силу леммы 2 многообразие M_ξ удовлетворяет условиям предложения 5.

На M_ξ построена карта φ: $V \to U$, $\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \varphi^{t_1} \ldots \varphi^{t_n} x_0$. Очевидно, что координатная линия $\{t_j = \text{const}, j = 1, \ldots \hat{i}, \ldots, n\}$ переходит в интегральную траекторию векторного поля $\operatorname{sgrad} f_i$. Теорема 1 доказана.

12. Замечание. Если поверхность уровня M_ξ некомпактна, то векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$, вообще говоря, не полные и действие группы Ли $\mathbf{R}^n$ на M_ξ мы не получим. Если такое действие существует, то поверхность уровня M_ξ диффеоморфна цилиндру $T^{n-k}\times\mathbf{R}^k$.

13. Замечание. Если выполняются условия теоремы 1, то соответствующая гамильтонова система локально может быть явно решена при условии, что симплектическая структура ω точна, т. е. $\omega=d\alpha$. Это утверждение вытекает из теоремы 1 § 12.

14. Определение. Инволютивная система функционально независимых функций $f_1, \ldots, f_n$ на симплектическом многообразии M^n называется *канонически сопряженной* с инволютивной функционально независимой системой функций $g_1, \ldots, g_n$, если $\{f_i, g_j\}=\delta_{ij}$, $i, j=1, \ldots, n$.

15. Теорема. *Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие с точной симплектической структурой $\omega=d\alpha$. Тогда для любой инволютивной функционально независимой системы $f_1, \ldots, f_n$ канонически сопряженная система $g_1, \ldots, g_n$ функций строится с помощью квадратур.*

Доказательство. По предположению функции $f_1, \ldots, f_n$ функционально независимы, дополним их произвольным образом до некоторой локальной системы координат $f_1, \ldots, f_n$, $h_1, \ldots, h_n$. Имеем равенство

$$\alpha=\sum_{j=1}^n a_j df_j+\sum_{j=1}^n b_j dh_j, \tag{488}$$

где a_i, b_j, $i, j=1, \ldots, n$,— некоторые гладкие функции. На подмногообразии $M_\xi=\{f_i=\xi_i,\ i=1, \ldots, n\}$ 2-форма ω обращается в нуль, см. п. 4, т. е. $\omega|M_\xi=0$. Тогда ограничение $\alpha|M_\xi$ локально является полным дифференциалом некоторой функции $Q\in C^\infty(M)$ (т. е. $\alpha|M_\xi=dQ$), так как $d(\alpha|M_\xi)=(d\alpha)|M_\xi=$ $=\omega|M_\xi=0$. Имеем

$$dQ=\sum_{j=1}^n \frac{\partial Q}{\partial f_j}df_j+\sum_{j=1}^n \frac{\partial Q}{\partial h_j}dh_j. \tag{489}$$

Ограничим соотношения (488), (489) на M_ξ, получим $\alpha|M_\xi=dQ|M_\xi=\sum_{j=1}^n \frac{dQ}{dh_j}dh_j=\sum_{j=1}^n b_j dh_j$. Отсюда

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial Q}{\partial f_j}df_j+\sum_{j=1}^n b_j dh_j=dQ, \tag{490}$$

и, следовательно,

$$\alpha=dQ+\sum_{j=1}^n \left(a_j-\frac{\partial Q}{\partial f_j}\right)df_j. \tag{491}$$

Положим $g_i = \frac{\partial Q}{\partial f_i} - a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда из (491) следует, что форма α имеет вид $\alpha = dQ - \sum_{i=1}^{n} g_i df_i$. Таким образом,

$$\omega = d\alpha = \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dg_i. \tag{492}$$

Из невырожденности формы ω следует, что функции $f_1, \ldots, f_n$, $g_1, \ldots, g_n$ функционально независимы в совокупности, причем $\{f_i, g_j\} = \delta_{ij}$ и $\{g_i, g_j\} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

16. З а м е ч а н и е. Конструкции п. 15 выполняются только локально. Построение аналогичных координат в некоторой окрестности тора представляет собой отдельную сложную задачу.

17. О п р е д е л е н и е. Координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $s_1, \ldots, s_n$, действующие в окрестности тора M_ξ, называются *переменными действие — угол* для данной гамильтоновой системы, если: а) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — угловые координаты на торах, близких к M_ξ; б) $\omega = \sum_{i=1}^{n} d\varphi_i \wedge ds_i$; в) исходная гамильтонова система имеет вид $\dot{s}_i = 0$, $\dot{\varphi}_j = \omega_j(s_1, \ldots, s_n)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Заметим, что в целом на всем многообразии координаты (φ_i, s_j) определить нельзя. Соответствующее препятствие указано в работе [341], там же рассмотрен пример, когда оно отлично от нуля.

18. Конструкция. Укажем алгоритм построения переменных действие — угол. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — базисные циклы тора M_ξ, $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ — координаты. Положим

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \sum_{k=1}^{n} p_k dq_k. \tag{493}$$

Переменные $s_1, \ldots, s_n$ канонически сопряжены с угловыми переменными $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, см. [8], [102], [374].

§ 30. Некоммутативное интегрирование гамильтоновых систем

1. В теореме Лиувилля 1 § 29 основную роль играет коммутативность набора функций $f_1, \ldots, f_n$. Другими словами, линейное пространство G функций, натянутое на $f_1, \ldots, f_n$, является коммутативной алгеброй Ли размерности n. При этом гамильтониан интегрируемой системы включен в эту алгебру как один из ее элементов: $F = f_1$. Во многих конкретных ситуациях гамильтоновы системы обладают набором интегралов $f_1, \ldots, f_n$, которые не образуют коммутативной алгебры Ли, т. е. не находятся в инволюции. Поэтому было бы весьма полезно располагать методом, позволяющим интегрировать некоторые такие системы. Следующая теорема 2 естественно обобщает теорему Лиувилля, см. работы А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко [187], [191].

2. Теорема. *Пусть на симплектическом многообразии* M^{2n} *задан набор из* k *гладких функций* $f_1, \ldots, f_k$, *линейная оболочка* G *которых является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона, т. е.* $\{f_i, f_j\} = \sum\limits_{q=1}^{k} C_{ij}^q f_q$, *где* $C_{ij}^q = \mathrm{const}$. *Пусть* M_ξ — *совместная поверхность уровня общего положения функций* f_i, *т. е.* $M_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. *Предположим, что на этой поверхности уровня все* k *функций* $f_1, \ldots, f_k$ *функционально независимы, алгебра Ли* G *удовлетворяет условию* $\dim G + \operatorname{ind} G = \dim M$. *Тогда поверхность* M_ξ *является гладким* r*-мерным подмногообразием (где* $r = \operatorname{ind} G$), *инвариантным относительно каждого векторного поля* $v = \operatorname{sgrad} h$, $h \in \operatorname{Ann}(\xi) = \{x \in G \mid \operatorname{ad}_x^* \xi = 0\}$. *Пусть далее* v — *одно из следующих гамильтоновых полей на* M: а) *либо* $v = \operatorname{sgrad} h$, *где гамильтониан* h *является элементом алгебры интегралов* G *и лежит в аннуляторе* $\operatorname{Ann}(\xi)$ *ковектора* ξ, *определяющего поверхность уровня* M_ξ; б) *либо* $v = \operatorname{sgrad} F$ — *гамильтоново поле на* M, *для которого все функции алгебры* G *являются интегралами,* т. е. $\{F, f\} \equiv 0$ *для всех* $f \in G$. *Тогда, как и в случае «коммутативной теоремы» Лиувилля, если многообразие* M_ξ *связно и компактно, то оно диффеоморфно* r*-мерному тору* T^r, *и на этом торе можно ввести такие криволинейные координаты* $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, *что векторное поле* v, *будучи записано в этих координатах, на торе приобретает вид* $\dot\varphi_i = q_i(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, *т. е. компоненты этого поля* v *постоянны на торе, и интегральные траектории поля определяют условно периодическое движение системы* v, *т. е. задают «прямолинейную обмотку» тора* T^r.

3. Замечание. Если алгебра Ли G интегралов коммутативна, то условие $\dim G + \operatorname{ind} G = \dim M$ превращается в условие $k + k = 2n$, так как $\operatorname{ind} G = \dim G = k$. Итак, $k = n$, и мы получаем классическую «коммутативную теорему» Лиувилля, доказанную в предыдущем параграфе.

4. Определение. Гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} h$ на симплектическом многообразии M^{2n} называется *вполне интегрируемой в некоммутативном смысле*, если она обладает такой алгеброй Ли G интегралов, что $\dim G + \operatorname{ind} G = \dim M$. Вполне интегрируемую систему в смысле определения 1 § 28 будем также называть интегрируемой в *коммутативном смысле*.

5. Опишем простую и красивую конструкцию, позволяющую превращать гамильтонову систему, обладающую группой симметрии, в гамильтонову систему на симплектическом многообразии меньшей размерности (Марсден и Вейнстейн [431]).

Соответствующая процедура называется редукцией гамильтоновой системы. Эта конструкция используется, в частности, при доказательстве теоремы 2.

Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) задана гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} F$ с алгеброй Ли G интегралов, аддитивными образующими которой являются k независимых (почти всюду) гладких функций $f_1, \ldots, f_k$. Пусть P — соответствующая группа Ли, действующая на M симплектическими диффеоморфизмами (т. е. сохраняющими ω). Каждой точке $x \in M$ сопоставим линейный функционал $\varphi(x)$ на алгебре Ли G. Положим $\varphi(x)f = f(x)$, где $f \in G$. Итак, $\varphi(x) \in G^*$.

Следовательно, имеем отображение $\varphi\colon M \to G^*$.

6. Лемма. *Пусть $\xi \in G^*$ — произвольный ковектор. Тогда его полный прообраз $\varphi^{-1}(\xi)$ при отображении φ является совместной поверхностью уровня M_ξ интегралов $f_1, \ldots, f_k$ — образующих алгебры Ли G.*

Доказательство. По определению $\varphi^{-1}(\xi) = \{x \in M \mid f(x) = \xi(f)\}$, где $f \in G$. Поскольку (f_i) — аддитивный базис в G, то $f = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i$, т. е. $f(x) = \xi(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i \xi(f_i)$. Если $\xi(f_i) = \xi_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, то $f_i(x) = \varphi(x) f_i = \xi(f_i) = \xi_i$ для $x \in M_\xi$. Итак, $M_\xi = \varphi^{-1}(\xi) = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i\}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Лемма доказана.

7. Предложение. *Пусть элемент $f \in G$ лежит в аннуляторе* Ann (ξ) *и $x \in M_\xi$, где M_ξ — неособая поверхность. Тогда* $\operatorname{sgrad} f(x) \in T_x M_\xi$.

Доказательство. Рассмотрим аддитивные образующие $f_1, \ldots, f_k$ в G и градиенты $\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_k$. Поскольку M_ξ — неособая поверхность, то все эти градиенты независимы во всех точках поверхности, поэтому они трансверсальны M_ξ, т. е. k-мерная плоскость V, натянутая на $\operatorname{grad} f_i$, пересекается только по нулю с $T_x M_\xi$, $V \oplus T_x M_\xi = T_x M$ (рис. 29). Удобно считать, что на M задана риманова метрика. Тогда векторы $\operatorname{grad} f_i$ ортогональны поверхности M_ξ. Чтобы доказать соотношение $\operatorname{sgrad} f(x) \in T_x M_\xi$, достаточно проверить, что $(\operatorname{sgrad} f) g = 0$ для любой функции $g \in G$, т. е. что производная вдоль $\operatorname{sgrad} f$ любой функции $g \in G$, постоянной на M_ξ, равна нулю. В самом деле, $(\operatorname{sgrad} f) g = (\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g)$, где (x, y) — риманова метрика на M. Из равенства нулю скалярных произведений вектора $\operatorname{sgrad} f$ на все векторы $\operatorname{grad} f_i$ вытекает ортогональность $\operatorname{sgrad} f$ к плоскости V, т. е. $\operatorname{sgrad} f \in T_x M_\xi$. Итак,

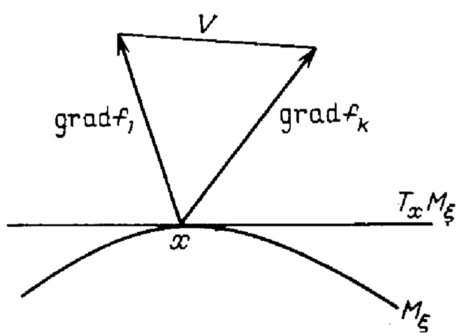


Рис. 29

$(\operatorname{sgrad} f)\, g = \{f, g\}$. Далее, $\{f, g\}(x) = \langle \xi, \{f, g\}\rangle = \langle ad_f^* \xi, g\rangle = 0$, так как $\operatorname{ad}_f^* \xi = 0$, $f \in \operatorname{Ann}(\xi)$, что и требовалось доказать.

8. Предложение. *Имеет место равенство* (рис. 30)

$$(T_x M_\xi) \cap \{\operatorname{sgrad} f \mid f \in G\} = K_x = \{\operatorname{sgrad} h \mid h \in \operatorname{Ann}(\xi)\}. \qquad (494)$$

Доказательство. В п. 7 доказано, что $\{\operatorname{sgrad} h \mid h \in \operatorname{Ann}(\xi)\} \subset T_x M_\xi \cap \{\operatorname{sgrad} f \mid f \in G\}$. Докажем обратное включение. Пусть $X \in T_x M_\xi$ и $X = \operatorname{sgrad} f$, где $f \in G$. Надо доказать, что

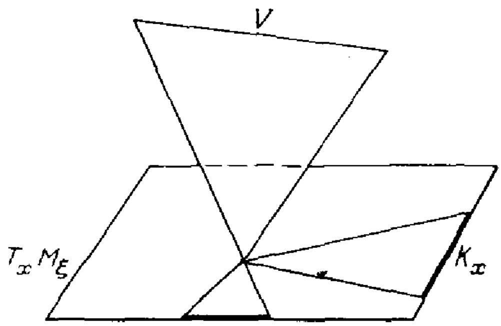


Рис. 30

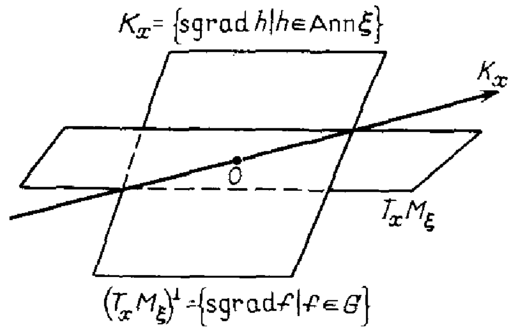


Рис. 31

$f \in \operatorname{Ann}(\xi)$. Рассмотрим $\langle \operatorname{a}d_f^* \xi, g\rangle = \langle \xi, \{f, g\}\rangle \equiv 0$ для любого $g \in G$, так как $\{f, g\}(x) = 0$. Последнее равенство вытекает из того, что $\{f, g\}(x) = (\operatorname{sgrad} f)\, g|_x = X(g) = 0$, так как $X \in T_x M_\xi$, а все $g \in G$ постоянны на поверхности уровня M_ξ. Итак, $\langle \operatorname{a}d_f^* \xi, g\rangle \equiv 0$ при любом $g \in G$. Это означает, что $\operatorname{a}d_f^* \xi = 0$, т. е. $f \in \operatorname{Ann}(\xi)$. Предложение доказано (рис. 31).

9. Следствие. *Поверхность уровня M_ξ инвариантна относительно действия группы S_ξ, отвечающей алгебре Ли* $\operatorname{Ann}(\xi)$, *на многообразии M.*

10. Рассмотрим форму ω на M, и пусть $\tilde{\omega} = \omega | M_\xi$ — ограничение ее на поверхность M_ξ. Действие подгруппы S_ξ на M_ξ порождает в каждой точке $x \in M_\xi$ подпространство $K_x \subset T_x M_\xi$, образованное векторами $\operatorname{sgrad} f$, $f \in \operatorname{Ann}(\xi)$.

11. Предложение. *Ядро формы ω совпадает с подпространством $K_x \subset T_x M_\xi$.*

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Ker} \tilde{\omega} \supset K_x$. Пусть $X = \operatorname{sgrad} h$, $h \in \operatorname{Ann}(\xi)$, $X \in K_x \subset T_x M_\xi$. Требуется доказать, что X лежит в ядре формы ω, т. е. что $\omega(X, Y) = 0$ для любого вектора Y из подпространства $T_x M_\xi$. В самом деле, $\omega(X, Y) = \omega(\operatorname{sgrad} h, Y) = Y(h) = 0$, так как вектор Y касается поверхности уровня, а функция h, являясь элементом алгебры интегралов G, постоянна на поверхности уровня. Докажем обратное, т. е. что $\operatorname{Ker} \tilde{\omega} \subset K_x$. Пусть $\omega(X, Y) = 0$ для любого вектора $Y \in T_x M_\xi$. Требуется представить вектор X в виде $X = \operatorname{sgrad} h$ для некоторой функции $h \in \operatorname{Ann}(\xi)$. Рассмотрим форму ω как кососимметрическое скалярное произведение на касательном пространстве T_xM и обозначим $(T_xM_\xi)^\perp$ ортогональное дополнение относительно формы ω к подпространству T_xM_ξ в T_xM. Поскольку форма ω не вырождена, то имеет место равенство $\dim(T_xM_\xi)^\perp = \dim M - \dim T_xM_\xi = \dim V = k$. Ясно, что $\operatorname{Ker}\tilde\omega = T_xM_\xi \bigcap (T_xM_\xi)^\perp$. Докажем, что $\{\operatorname{sgrad} f \mid f \in G\} = (T_xM_\xi)^\perp$. В самом деле, пусть $Y \in T_xM_\xi$. Тогда $\omega(\operatorname{sgrad} f, Y) = Y(f) = 0$, так как $f = \mathrm{const}$ на M_ξ. Итак, $\{\operatorname{sgrad} f \mid f \in G\} \subset (T_xM_\xi)^\perp$. Далее, $\dim\{\operatorname{sgrad} f \mid f \in G\} = k = \dim G$. Это равенство вытекает из того, что линейная оболочка градиентов $(\operatorname{grad} f \mid f \in G)$ имеет размерность k, а кососимметрическое скалярное произведение не вырождено и линейная оболочка косых градиентов также имеет размерность k. Наконец, было доказано, что $\dim(T_xM_\xi)^\perp = k$, поэтому $\{\operatorname{sgrad} f \mid f \in G\} = (T_xM_\xi)^\perp$. Предложение доказано.

12. Соберем вместе все факты и изучим геометрическую картину взаимодействия описанных подмногообразий. Основными объектами являются: а) поверхность уровня M_ξ, $\dim M_\xi = 2n - k$; б) орбита $P(x)$ точки x, $\dim P(x) = k$; в) орбита $S_\xi(x)$ точки x при действии подгруппы S_ξ, отвечающей алгебре Ли $\operatorname{Ann}(\xi)$. Ясно, что $T_xG(x) = \{\operatorname{sgrad} f \mid f \in G\}$, $T_xS_\xi(x) = K_x = \{\operatorname{sgrad} h \mid h \in \operatorname{Ann}(\xi)\}$. Отсюда следует, что $P(x) \bigcap M_\xi = S_\xi(x)$ (рис. 32). Отметим, что размерность орбиты $S_\xi(x)$ равна размерности S_ξ и равна r.

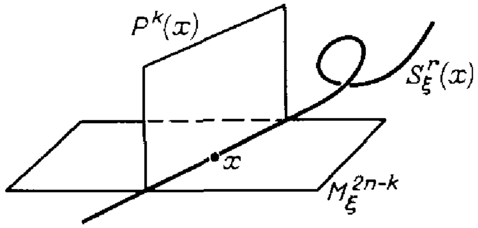


Рис. 32

13. Конструкция. Рассмотрим действие группы P на M и предположим, что в малой окрестности поверхности M_ξ это действие имеет один тип стационарных подгрупп, т. е. что все орбиты группы P, близкие к орбите $P(x)$, ей диффеоморфны. Рассмотрим проекцию $\pi\colon M \to M/P$ многообразия M на пространство орбит $N = M/P$. Это пространство может не быть гладким многообразием и иметь особенности. Для нас важно то, что в малой окрестности точки $\pi P(x) \in M/P$ пространство M/P — гладкое многообразие размерности $2n-k$. В действительности, если, например, P — компактная группа и она гладко действует на M, то объединение множества орбит общего положения, диффеоморфных друг другу, является открытым всюду плотным подмножеством в M, поэтому пространство N является $(2n-k)$-мерным многообразием всюду, за исключением подмножества меры нуль. Отметим, что пространство (многообразие) N не обязано быть симплектическим, так как, например, оно может быть нечетномерным. Проекция π, будучи ограничена на поверхность M_ξ, проектирует ее на пространство $Q_\xi = M_\xi / S_\xi$. Поэтому пространство N расслоено на поверхности Q_ξ (рис. 33). Здесь мы опираемся на предложение 8.

14. Предложение. *Многообразия Q_ξ, т. е. фактормногообразия поверхностей уровня M_ξ по действию подгруппы S_ξ, являются симплектическими многообразиями с невырожденной замкнутой формой ρ, являющейся проекцией формы $\tilde{\omega}$ на M_ξ при отображении $\pi\colon M_\xi \to Q_\xi$. При этом $\pi^*\rho = \tilde{\omega} = \omega | M_\xi$.*

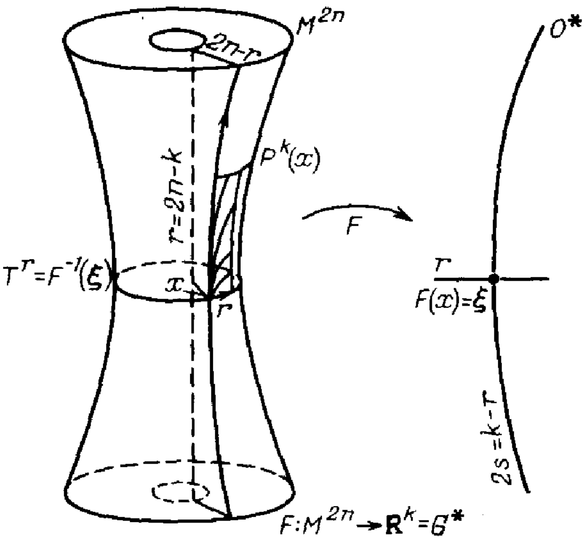


Рис. 33

Доказательство. Поскольку ядро формы $\tilde{\omega}$ на $T_x M_\xi$ совпадает с подпространством $K_x \subset T_x M_\xi$, то наше утверждение вытекает из предложения 11.

15. Редукция. Вернемся теперь к изучению гамильтоновых систем на M. Пусть $v = \operatorname{sgrad} F$ — система с алгеброй интегралов G, т. е. $\{F, h\} = 0$, $h \in G$. Поскольку F коммутирует (в смысле скобки Пуассона) со всеми элементами из G, то F инвариантна относительно группы Ли P. В самом деле, $(\operatorname{sgrad} f)\, F = \{f, F\} = 0$, $f \in G$. В частности, подгруппа S_ξ, действуя на M, переводит функцию F в себя. Итак, определена естественная проекция векторного поля $\operatorname{sgrad} F$ на пространство $N = M/P$. При этом векторное поле $\operatorname{sgrad} F$ касается поверхности M_ξ и также проектируется в некоторое поле $E(F)$ на фактормногообразии Q_ξ, так как поле $\operatorname{sgrad} F$ инвариантно относительно S_ξ. Итак, пространство N расслоено на симплектические многообразия Q_ξ и на N определено векторное поле $E(F)$, касающееся всех поверхностей Q_ξ (рис. 34). Окончательно мы сопоставили тройке $(M^{2n}, \operatorname{sgrad} F, \omega)$ новую тройку $(Q_\xi, E(F), \rho)$. Этот процесс называется *редукцией*.

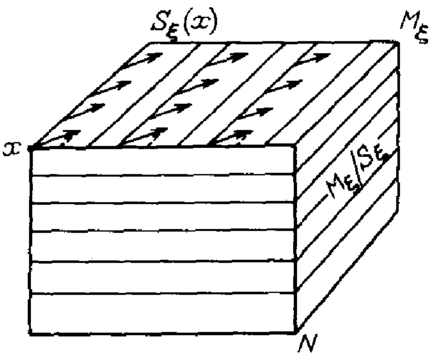


Рис. 34

16. Предложение. *Векторное поле $E(F)$ является гамильтоновым относительно симплектической формы ρ на многообразии Q_ξ для функции Гамильтона F, равной проекции функции $F | M_\xi$ на многообразие Q_ξ, т. е. $E(F) = \operatorname{sgrad}_\rho (\pi^* F | M_\xi)$.*

Доказательство вытекает из предложения 14 и инвариантности гамильтониана при действии группы.

17. Предложение. *Пусть G — конечномерная алгебра интегралов потока* $\operatorname{sgrad} F$ *на M, удовлетворяющая всем перечисленным условиям, и пусть $E(F)$ — редуцированная система на многообразии $N = \bigcup_{\xi} Q_\xi$, являющаяся гамильтоновой на каждом подмногообразии Q_ξ. Пусть G' — линейное пространство функций на многообразии N таких, что их ограничения на подмногообразия Q_ξ образуют конечномерную алгебру Ли интегралов потока $E(F)$. Тогда пространство функций $G \oplus G''$, где $G'' = \pi^* G'$, т. е. $G'' = \{g\pi \mid g \in G'\}$, $\pi\colon M \to N$, является алгеброй Ли интегралов системы* $\operatorname{sgrad} F$, *причем* $[G, G''] = 0$.

Доказательство. Пусть g — некоторая функция на пространстве N. Тогда ее прообраз $g\pi$ при отображении $\pi\colon M \to N$ является функцией на M, очевидно инвариантной относительно действия P на M. Это означает, что функция $g\pi$ находится в инволюции со всей исходной алгеброй функций (интегралов) G. Итак, всякая новая функция g, являющаяся интегралом для редуцированного потока $E(F)$ на N, дает дополнительный интеграл $g\pi$ исходного гамильтонова потока $\operatorname{sgrad} F$ на M. То, что эти дополнительные интегралы независимы от функций алгебры G, следует из того, что их градиенты отличны от нуля по направлению подмногообразий Q_ξ, лежащих (локально) в поверхности уровня M_ξ, в то время как градиенты функций из G ортогональны M_ξ. Предложение доказано.

18. Доказательство теоремы 2. Пусть v — одна из систем, указанных в формулировке теоремы, т. е. либо $v = \operatorname{sgrad} F$, $\{F, G\} = 0$, либо $v = \operatorname{sgrad} h$, где $h \in \operatorname{Ann}(\xi)$. Рассмотрим описанную выше редукцию. Поскольку теперь выполнено дополнительное условие $\dim G + \operatorname{ind} G = \dim M$, т. е. $k + r = 2n$, то размерность поверхности M_ξ равна r. Размерность орбиты $S_\xi(x)$, содержащейся в M_ξ, также равна r. Отсюда сразу следует, что $M_\xi = S_\xi(x)$, т. е. в условиях теоремы 2 поверхность уровня M_ξ является орбитой точки x при действии группы Ли S_ξ, алгебра Ли которой является аннулятором ковектора ξ, определяющего данную поверхность уровня. В частности, $\dim Q_\xi = 2n - k - r = 0$. Поэтому в данном случае структура редуцированной системы особенно проста. Поскольку Q_ξ является точкой, то поток $E(F)$ нулевой (рис. 35). Здесь пространство N имеет размерность n. Поскольку M_ξ — поверхность уровня интегралов G, то поток v касается

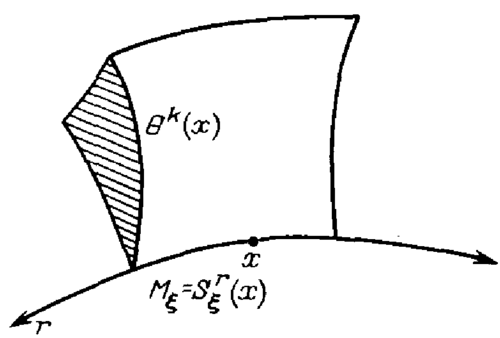


Рис. 35

M_ξ в обоих случаях а) и б), т. е. M_ξ — r-мерное подмногообразие, инвариантное относительно всех полей вида $\operatorname{sgrad} h$, $h \in \operatorname{Ann}(\xi)$, и $\operatorname{sgrad} F$, $\{F, G\} = 0$. Осталось доказать, что поверхность уровня является r-мерным тором в том случае, когда M_ξ компактна и связна. Для этого нам потребуется важная теорема, см. [513].

19. Теорема Вернь. *Пусть $\xi \in G^*$ — ковектор общего положения. Тогда его аннулятор $\operatorname{Ann}(\xi) = \{x \in G \mid \operatorname{ad}_x^* \xi = 0\}$ коммутативен, в частности, подгруппа S_ξ коммутативна.*

Доказательство. Рассмотрим коприсоединенное представление группы Ли P на пространстве G^*, сопряженном к алгебре Ли G группы Ли P. Обозначим $O^*(\xi)$ орбиту, проходящую через точку $\xi \in G^*$. Поскольку $\dim \operatorname{Ann}(\xi) = r$ и $\dim G^* = k$, то $\dim O^*(\xi) = k - r$. Так как ковектор ξ общего положения, то орбиты, близкие к $O^*(\xi)$, диффеоморфны ей и можно считать, что достаточно малая окрестность U точки ξ расслоена на гомеоморфные слои (рис. 36). Обозначим X_0 локальное сечение расслоения U на орбиты представления Ad_P^*. Пользуемся тем, что U представимо в виде прямого произведения базы X_0 на слой — часть орбиты.

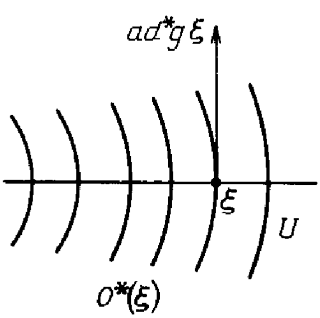


Рис. 36

Пусть $h(\eta)$ — гладкая функция на U, постоянная на орбитах. Утверждается, что $\operatorname{ad}^*_{dh(\xi)} \xi = 0$, где dh (дифференциал) интерпретируется как элемент дуального пространства $G^{**} \cong G$, т. е. $dh(\xi) \in G$. Другими словами, утверждается, что $dh(\xi) \in \operatorname{Ann}(\xi)$. Мы должны убедиться в том, что $(\operatorname{ad}^*_{dh(\xi)} \xi)(g) = 0$ для любого $g \in G$. Имеем

$$(\operatorname{ad}^*_{dh(\xi)} \xi)(g) = \langle \operatorname{ad}^*_{dh(\xi)} \xi, g \rangle = \langle \xi, [dh(\xi), g] \rangle = -\langle \operatorname{ad}^*_g \xi, dh(\xi) \rangle = 0; \tag{495}$$

так как ковектор $\operatorname{ad}^*_g \xi$ лежит в касательной плоскости $T_\xi O^*$ к орбите O^* в точке ξ, а функция h постоянна на орбитах, в частности, постоянна и на орбите O^*. На сечении X_0, являющемся гладкой поверхностью размерности r, трансверсально пересекающей орбиты, близкие к орбите $O^*(\xi)$, рассмотрим набор из r независимых функций $h_1, \ldots, h_r$ и продолжим их до гладких функций на всей окрестности U, продолжив их с сечения X_0 значениями, постоянными вдоль орбит O^*. Получим $\operatorname{ad}^*_{dh_i(\xi)} \xi = 0$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Таким образом, $dh_i(\xi) \in \operatorname{Ann}(\xi)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Так как функции h_i были выбраны независимыми, то все дифференциалы $dh_i(\xi)$ независимы в $\operatorname{Ann}(\xi)$ и число их равно r, т. е. в точности совпадает с размерностью аннулятора $\operatorname{Ann}(\xi)$. Итак, дифференциалы образуют базис в $\operatorname{Ann}(\xi)$ и для доказательства коммутативности аннулятора достаточно доказать, что попарные коммутаторы этих дифференциалов $dh_i(\xi)$ равны нулю, т. е. $[dh_i(\xi), dh_j(\xi)]=0$. Поскольку $\mathrm{ad}^*_{dh_i(\xi)}\xi=0$, то $b(\xi)=(\mathrm{ad}^*_{dh_i(\xi)}\xi)(dh_j(\xi))=0$. Отсюда

$$b(\xi)=\langle \mathrm{ad}^*_{dh_i(\xi)}\xi,\ dh_j(\xi)\rangle=\langle \xi,\ [dh_i(\xi),\ dh_j(\xi)]\rangle=0. \qquad (496)$$

Рассмотрим произвольное направление η в окрестности U и продифференцируем вдоль этого направления функцию $b(\xi)\equiv 0$:

$$\frac{d}{d\eta}b(\xi)=\frac{d}{d\eta}\langle\xi,\ [dh_i(\xi),\ dh_j(\xi)]\rangle=\langle\eta,[dh_i(\xi),\ dh_j(\xi)]\rangle+$$
$$+\langle\xi,\left[\frac{d}{d\eta}dh_i(\xi),\ \ dh_j(\xi)\right]\rangle+\langle\xi,\left[dh_i(\xi),\ \ \frac{d}{d\eta}dh_j(\xi)\right]\rangle=$$
$$=\langle\eta,[dh_i(\xi),\ dh_j(\xi)]\rangle-\langle \mathrm{ad}^*_{dh_j(\xi)}\xi,\ \ \frac{d}{d\eta}dh_i(\xi)\rangle-$$
$$-\langle \mathrm{ad}^*_{dh_i(\xi)}\xi,\ \ \frac{d}{d\eta}dh_j(\xi)\rangle=\langle\eta,[dh_i(\xi),\ dh_j(\xi)]\rangle=0, \quad (497)$$

так как $\mathrm{ad}^*_{dh_j(\xi)}\xi=\mathrm{ad}^*_{dh_i(\xi)}\xi=0$. Поскольку $\eta\in U\subset G^*$ произвольно, то из равенства $\langle\eta,[dh_i(\xi),\ dh_j(\xi)]\rangle=0$ вытекает, что $[dh_i(\xi),\ dh_j(\xi)]=0$. Теорема доказана.

20. Продолжим доказательство теоремы 2. Мы доказали, что M_ξ — орбита группы S_ξ, и так как $\dim M_\xi=\dim S_\xi$, то M_ξ есть факторгруппа S_ξ по дискретной решетке Γ. Так как группа $S_\xi=\exp \mathrm{Ann}(\xi)$ коммутативная, то M_ξ в случае компактности и связности является r-мерным тором, см. п. 8 § 29.

§ 31. Интегрируемые алгебры Ли

1. Обсуждение. Если гамильтонова система на симплектическом многообразии M вполне интегрируема по Лиувиллю в некоммутативном смысле, т. е. допускает конечномерную алгебру Ли G функционально независимых интегралов, причем $\dim G+\mathrm{ind}\, G=\dim M$ и алгебра Ли G некоммутативна, то возникает естественный вопрос: является ли эта же гамильтонова система вполне интегрируемой в обычном коммутативном смысле, т. е. существует ли коммутативная алгебра Ли G_0 функционально независимых функций такая, что $2\dim G_0=$ $=\dim M$.

Хотя в случае существования такой алгебры G_0 инвариантные поверхности имеют размерность, бóльшую, чем $\dim M_\xi$, тем не менее ответ полезно знать, так как в этом случае торы маленькой размерности можно организовать в торы большей размерности. Оказывается, что для широкого класса алгебр Ли G ответ является положительным.

2. Определение. Алгебра Ли G называется *интегрируемой* (или удовлетворяет условию FI), если на G^* существует линейное подпространство $H \subset C^{\infty}(G^*)$, в котором можно выделить аддитивный базис функционально независимых функций $f_1, \ldots, f_q$, $q = \dim H$, таких, что они находятся в инволюции на G^* относительно скобки Пуассона, причем $q = \dim H = 2^{-1}(\operatorname{ind} G + \dim G)$.

3. Замечание. Если G — интегрируемая алгебра Ли, то ограничения $f_1 | O = h_1, \ldots, f_q | O = h_q$ функций $f_1, \ldots, f_q$ алгебры Ли H на орбиту O коприсоединенного представления Ad^* дают набор функций, который обладает следующим свойством. Рассмотрим всевозможные функциональные комбинации $F(h_1, \ldots, h_q)$ функций $h_1, \ldots, h_q$. Тогда в пространстве всех таких функций найдется s линейно независимых, где $s = 2^{-1}\dim O = 2^{-1}(\dim G^* - \operatorname{ind} G)$, т. е. на каждой орбите $O \subset G^*$ общего положения имеем вполне интегрируемую гамильтонову систему.

В работах [187], [191] были высказаны следующие две гипотезы.

4. Гипотеза эквивалентности. Пусть гамильтонова система $\dot{x} = \operatorname{sgrad} f$ на симплектическом многообразии M вполне интегрируема в некоммутативном смысле, т. е. коммутативная алгебра Ли ее интегралов H ($f \in H$) включается в некоторую объемлющую, вообще говоря, некоммутативную алгебру Ли функций G такую, что $\dim G + \operatorname{ind} G = \dim M$. Тогда эта же система вполне интегрируема и в обычном коммутативном смысле, т. е. существует другая коммутативная алгебра Ли G_0 независимых интегралов такая, что $2\dim G_0 = \dim M$ и $f \in G_0$. При этом интегралы алгебры G_0 принадлежат к тому же функциональному классу, что и функции, составляющие алгебру Ли G (если, например, функции из G аналитические, то и функции из G_0 также аналитические). При этом функции алгебры G_0 функционально выражаются через функции алгебры G.

5. Гипотеза о слоении орбит на торы Лиувилля. Любая алгебра Ли интегрируема.

Между гипотезами 4, 5 имеется тесная связь. Имеет место следующая теорема, принадлежащая А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [187], [191].

6. Теорема. *Пусть M — симплектическое многообразие, L — алгебра Ли функционально независимых интегралов гамильтоновой динамической системы, $\dim L + \operatorname{ind} L = \dim M$. Если алгебра Ли L_0 интегрируема, то найдется другая, коммутативная алгебра Ли L_0 функционально независимых интегралов, причем $2\dim L_0 = \dim M$.*

Доказательство. Алгебру Ли L_0 будем искать среди таких функций, которые функционально выражаются через интегралы из алгебры L. Пусть $x^1, \ldots, x^n \in L$ — линейный базис алгебры Ли L. Тогда функции из алгебры Ли L_0 будут иметь вид $f(x^1, \ldots, x^n)$, где f — гладкая функция n независимых переменных. Заметим, что скобка Пуассона двух функций $f(x^1, \ldots, x^n)$ и $g(x^1, \ldots, x^n)$ задается формулой

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial g}{\partial x^j}(x^1, \ldots, x^n) \{x^i, x^j\}. \quad (498)$$

С другой стороны, всякая функция f n независимых переменных определяет функцию f^* на дуальном пространстве L^*, а именно, $f^*(\xi) = f(\langle \xi, x^1 \rangle, \ldots, \langle \xi, x^n \rangle)$, $\xi \in L^*$. Тогда скобка Пуассона пары функций $f^*(\xi)$, $g^*(\xi)$ на орбите коприсоединенного представления задается формулой

$$\{f^*, g^*\}(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\langle \xi, x^1 \rangle, \ldots, \langle \xi, x^n \rangle) \frac{\partial g}{\partial x^j}(\langle \xi, x^1 \rangle, \ldots$$

$$\ldots, \langle \xi, x^n \rangle)\{\langle \xi, x^i \rangle, \langle \xi, x^j \rangle\} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\langle \xi, x^1 \rangle, \ldots, \langle \xi, x^n \rangle) \times$$

$$\times \frac{\partial g}{\partial x^j}(\langle \xi, x^1 \rangle, \ldots, \langle \xi, x^n \rangle) \langle \xi, [x^i, x^j] \rangle. \quad (499)$$

Формулы (498), (499) показывают, что соответствие $f \to f^*$ является изоморфизмом бесконечномерных алгебр Ли. Учитывая свойство FI, получаем доказательство нашей теоремы.

7. Замечание. Имеются достаточно богатые серии примеров интегрируемых алгебр Ли. Например, все полупростые алгебры Ли G таковы, в качестве коммутативной алгебры Ли H следует взять функции $f(\xi + \lambda a)$, $\xi \in G^*$, где f — функции, постоянные на орбитах коприсоединенного представления. Интегрируемыми алгебрами Ли являются также широкие классы разрешимых алгебр Ли и некоторые полупрямые суммы алгебр Ли. По этому поводу см. работы [11], [18], [33], [39], [40], [45], [47], [50], [150], [151], [198], [205], [206], [212], [213], [215], [228], [229], [231], [246] — [249], [253], [254], [256], [258], [265] — [270], [278], [296].

Класс всех интегрируемых алгебр Ли обозначим FILA.

8. Лемма. а) *Если G — абелева алгебра Ли, то* $G \in$ FILA. б) *Если G, $H \in$ FILA, то* $G \oplus H \in$ FILA.

Доказательство очевидно.

9. Приведем список интегрируемых алгебр Ли, см. п. 10—35. Полный инволютивный набор функций на алгебре Ли G обозначим $F(G) = \{f_1, \ldots, f_q\}$, $f_i \in C^\infty(G^*)$. Итак: а) $f_1, \ldots, f_q$ функционально независимы; б) $\{f_i, f_j\} = 0$, $i, j = 1, \ldots, q$; в) $q = 2^{-1}(\dim G + \operatorname{ind} G)$.

10. Произвольная полупростая комплексная или вещественная полупростая алгебра Ли G интегрируема, причем $F(G)$ построено А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [186], [188], [189], $F(G)$ состоит из полиномов, см. также теорему 7 § 42.

11. Компактная вещественная форма G_c полупростой алгебры Ли G интегрируема. Семейство $F(G_c)$ построено

А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [186], [188], [189], $F(G_c)$ состоит из полиномов.

12. Нормальная компактная подалгебра G_n в компактной вещественной форме G_c комплексной полупростой алгебры Ли G интегрируема. Семейство $F(G_n)$ построено А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [186], [188], [189], $F(G_n)$ состоит из полиномов.

13. Полупрямая сумма $E(n)=\mathrm{so}(n)\underset{\rho}{\oplus}\mathrm{R}^n$, где ρ — представление минимальной размерности, интегрируема. Семейство $F(E(n))$ построено В. В. Трофимовым и А. Т. Фоменко [264], [266], [267], оно состоит из полиномов. Другое семейство построено А. В. Браиловым в работе [52], оно также состоит из полиномов.

14. Полупрямая сумма $G=\mathrm{su}(n)\underset{\rho}{\oplus}\mathrm{C}^n$, где ρ — представление минимальной размерности, интегрируема. Семейство $F(G)$ построено А. В. Браиловым и А. В. Болсиновым, оно состоит из полиномов.

15. Полупрямая сумма $G=\mathrm{u}(n)\underset{\rho}{\oplus}\mathrm{C}^n$, где ρ — представление минимальной размерности, интегрируема. Семейство $F(G)$ построено А. В. Браиловым, оно состоит из полиномов.

16. Полупрямая сумма $G=K\underset{\rho}{\oplus}V$, где $\rho=\mathrm{ad}_K: V\to V$ (V — идеал, K — компактная алгебра Ли), интегрируема. Семейство $F(G)$ построено В. В. Трофимовым (в некоторых частных случаях) и А. В. Браиловым (в общем случае), оно состоит из полиномов.

17. Полупрямая сумма $G=\mathrm{gl}(2n)\underset{\rho}{\oplus}\mathbf{R}^N$, где $\mu=\Lambda^2\rho$, ρ — представление минимальной размерности, $\Lambda^2\rho$ — вторая внешняя степень представления ρ, интегрируема. Семейство $F(G)$ построено Т. А. Певцовой, см. [212]. Оно состоит из рациональных функций.

18. Полупрямая сумма $G=\mathrm{sl}(2n)\underset{\rho}{\oplus}\mathbf{R}^N$, где $\mu=S^2\rho$, ρ — представление минимальной размерности, $S^2\rho$ — вторая симметрическая степень представления ρ, интегрируема. Семейство $F(G)$ построено Т. А. Певцовой, см. [212]. Оно состоит из рациональных функций.

19. Полупрямая сумма $\mathrm{sp}(2n)\underset{\mu}{\oplus}\mathbf{R}^N=G$, где $\mu=\rho+\tau$, ρ — представление минимальной размерности, τ — одномерное тривиальное представление, интегрируема. Семейство $F(G)$ построено Т. А. Певцовой, см. [212]. Оно состоит из рациональных функций.

20. Полупрямая сумма $G=K\underset{\rho}{\oplus}V$, где K — произвольная простая алгебра Ли, а ρ — произвольное неприводимое линейное представление, V — абелев идеал (V — пространство представления), интегрируема. Семейство $F(G)$ построено А. В. Болсиновым. Этот результат обобщает многие из перечисленных выше. Семейство $F(G)$ состоит из полиномов, см. теорему 2 § 45.

21. Полупростые алгебры Ли, как уже отмечалось, интегрируемые. Новое семейство $F(G)$ построено О. И. Богоявленским [30], [31]. Оно состоит из полиномов.

22. Вещественные формы В G борелевских подалгебр простых комплексных алгебр Ли G интегрируемы. Семейство $F(\mathrm{B}G)$ построено В. В. Трофимовым [246]—[249], А. А. Архангельским [11] и для $\mathrm{B}E_8$ — С. Сяровым. Оно состоит из полиномов.

23. Разрешимая алгебра Ли $G = L \oplus \sum\limits_{i<j} \mathbf{R} E_{ij}$ интегрируема, где L — подалгебра алгебры диагональных матриц. Семейство $F(G)$ построено Ле Нгок Тьеуеном, см. [150], [151]. Оно состоит из полиномов.

24. Операция тензорного произведения $G \otimes A$ на фробениусову алгебру A не выводит за пределы класса FILA интегрируемых алгебр Ли, т. е. если $G \in \mathrm{FILA}$, то $G \otimes A \in \mathrm{FILA}$. Впервые алгоритм для размножения полных инволютивных семейств был найден в работах В. В. Трофимова [250], [251], [253], [254], затем он был развит А. В. Браиловым и Ле Нгок Тьеуеном [47], [151].

25. Полупростые алгебры Ли являются интегрируемыми, см. п. 10, 21. Новое семейство $F(G)$ построено О. И. Богоявленским в работе [36]. Оно состоит из полиномов.

26. Алгебры Ли малых размерностей интегрируемы, см. [253].

27. Полупрямая сумма $K \underset{\rho}{\oplus} V = G$, где K — полупростая алгебра Ли, ρ — представление, у которого стационарная подалгебра регулярного элемента относительно представления ρ тривиальна, является интегрируемой. Семейство $F(G)$ построено А. В. Браиловым, Т. А. Певцовой [53], [212]. Все функции этих полных инволютивных наборов являются линейными.

28. Алгебра Ли $G \oplus G = H$ интегрируема, см. п. 24. Новое семейство $F(H)$ построено А. В. Болсиновым, см. [39].

29. Алгебра Ли $G = \mathrm{so}(n) \underset{\rho}{\oplus} \mathbf{R}^n$ является интегрируемой, как уже отмечено в п. 13. Новое семейство построено А. М. Переломовым, А. Г. Рейманом, функции этого семейства являются интегралами «n-мерного случая Клебша», см. [213], [228].

30. Алгебра Ли $G = \mathrm{so}(n) \underset{\rho}{\oplus} \mathbf{R}^n$ является интегрируемой. Новое семейство $F(G)$ построено А. М. Переломовым [215] и А. Г. Рейманом [228], функции этого семейства являются интегралами аналога случая Ковалевской в n-мерном случае.

31. Новое семейство $F(G)$ для алгебры Ли $G=\mathrm{so}(n)\underset{\rho}{\oplus}\mathbf{R}^n$, где ρ — представление минимальной размерности, построено А. В. Беляевым [18]. Оно состоит из полиномов, которые являются интегралами аналога случая Лагранжа в n-мерном случае.

32. Алгебры Ли $\mathrm{so}(4)$ и $\mathrm{so}(3)\underset{\rho}{\oplus}\mathbf{R}^3$ интегрируемы, как отмечено выше. Они играют важную роль в современных исследованиях и им посвящены работы [415], [208], [165], [188], [189], [30], [60], [63], [183], [193], [61], [8], [202], [134], [87], [391], [309], [307], [379], [59], [32], [237].

33. Любая нильпотентная вещественная алгебра Ли является интегрируемой. Семейство $F(G)$ построено М. Вернь [513]. Оно состоит из полиномов.

34. Любая вполне разрешимая вещественная алгебраическая алгебра Ли интегрируема. Семейство $F(G)$ построено В. А. Гинзбургом. Оно состоит из полиномов.

35. Любая разрешимая вещественная алгебраическая алгебра Ли, для которой существует флаг из алгебраических подалгебр $G=G_n\supset G_{n-1}\supset\ldots\supset G_1\supset G_0=0$, $\dim G_i=i$, является интегрируемой. Семейство $F(G)$ построено А. В. Болсиновым.

§ 32. Симплектические действия групп Ли

1. Определение. Пусть P — группа Ли, действующая на симплектическом многообразии (M, ω) симплектоморфизмами, т. е. для любого $g\in P$ соответствующее отображение $\hat{g}$: $M\to M$ является каноническим преобразованием, см. п. 1 § 24. В этом случае M называется *симплектическим P-пространством*. Если группа P действует на многообразии M транзитивно, то M называется *однородным симплектическим P-пространством*.

2. В том случае, когда группа P действует на многообразии M, определен гомоморфизм φ: $G\to D(M)$ алгебры Ли G группы Ли P в алгебру Ли $D(M)$ векторных полей на M:

$$\varphi(X)m=\hat{X}(m)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp\widehat{tX}(m),\qquad X\in G,\quad m\in M,\tag{500}$$

см., например, [102], [263]. Пространство векторных полей на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) вида $\mathrm{sgrad}\, f$ является алгеброй Ли относительно коммутатора. Эту алгебру Ли будем обозначать символом $\mathrm{Ham}(M)$ (см. § 10 и § 19).

3. Определение. Симплектическое действие группы Ли P на симплектическом многообразии M называется *строго симплектическим*, если $\varphi(G)\subset\mathrm{Ham}(M)$, и *гамильтоновым*, если существует такой гомоморфизм λ: $G\to C^\infty(M)$ алгебр Ли (который назовем *поднятием* или *гомоморфизмом, накрывающим* φ), что диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & C^{\infty}(M) \arrow[r, "p"] & \operatorname{Ham}(M) \arrow[r] & 0 \\ & & & G \arrow[ul, "\lambda"] \arrow[u, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad (501)$$

коммутативна, где отображение p: $C^{\infty}(M) \to \operatorname{Ham}(M)$ определено равенством $p(f) = \operatorname{sgrad} f$.

4. Определение. Пусть (M, ω) — строго симплектическое P-многообразие с поднятием λ: $G \to C^{\infty}(M)$. Отображение Φ: $M \to G^*$, определенное формулой $\Phi(m)(X) = \lambda(X)m$, называется *отображением моментов*.

5. Определение. Если P — группа, действующая симплектически на многообразии (M, ω), сохраняет функцию H (т. е. H постоянна на орбитах группы P), то группа P является по определению *группой симметрий гамильтоновой системы* $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$.

6. Теорема ограничения. *Пусть P — компактная группа симметрий гамильтоновой системы* $\dot{x} = \operatorname{sgrad}_{\omega} H$, *а $F \subset C^{\infty}(M)$ — P-инвариантная алгебра интегралов, F_P — P-неподвижная подалгебра, N — многообразие неподвижных точек, $\bar{F}$ — множество ограничений интегралов F* на *N. Тогда:* а) *$(N, \bar{\omega})$ — симплектическое многообразие, где $\bar{\omega} = \omega | N$;* б) *множество $\bar{F}$ замкнуто относительно скобки Пуассона $\{f, g\}_N$ и отображение ограничения является эпиморфизмом алгебр Ли $(F_P, \{f, g\}_N) \to (\bar{F}, \{k, l\}_N)$;* в) *$\bar{F}$ — алгебра интегралов гамильтоновой системы $\dot{x} = \operatorname{sgrad}_{\omega} \bar{H}$ на N, где $\bar{H}$ — ограничение H на N.*

7. Лемма. *Пусть (W, ω) — симплектическое векторное пространство, ρ: $P \to \operatorname{End}(W)$ — вполне приводимое симплектическое представление группы P, W_0 — неподвижное подпространство. Тогда $\omega | W_0$ — невырожденная форма.*

Доказательство. Пусть $\xi \in W_0$, а $\xi^{\perp}$ — ортогональное дополнение. Поскольку $\xi \in W_0$, то $\xi^{\perp}$ инвариантное относительно P. Следовательно, существует инвариантное одномерное подпространство $\mathbf{R}\eta$ такое, что $W = \xi^{\perp} \oplus \mathbf{R}\eta$. Из определения вектора η вытекает, что $\omega(\xi, \eta) \neq 0$. Вместе с P-инвариантностью $\mathbf{R}\eta$ это означает, что $\eta \in W_0$.

8. Лемма. *Если $f \in F_P$, то* $\operatorname{sgrad}_M f = \operatorname{sgrad}_N f$.

Доказательство. Пусть $q \in N$. Из инвариантности f получаем, что $\operatorname{sgrad}_M f(q) \in T_q N$. Поэтому для доказательства леммы достаточно для любого векторного поля X на M проверить равенство

$$\omega(\operatorname{sgrad}_M f, X) = \omega(\operatorname{sgrad}_N \bar{f}, X). \qquad (502)$$

Обе части (502) равны $X(F)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. Пусть $q \in N$ — неподвижная точка. Тогда соответствие $\sigma \to d_q\sigma$: $T_qN \to T_qN$ является симплектическим представлением группы P в пространстве T_qN. Так как по условию группа P компактна, то это представление вполне приводимо. Применяя лемму 7, получаем утверждение а). Гомоморфность ограничения и замкнутость образа F_P в $\bar{F}$ относительно скобки Пуассона следуют из ее определения и равенства (502). Эпиморфность получается из того, что ограничение функции f на N совпадает с композицией ограничения и операции $S(f)$ усреднения по группе:

$$S(f) = \frac{1}{\mu(P)} \int_P f \circ \sigma \, d\mu(\sigma). \tag{503}$$

Таким образом, доказано утверждение б) теоремы ограничения. Докажем утверждение в). Действительно, пусть $f \in F$ — интеграл системы $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ на (M, ω). Тогда $\{H, f\}_M = 0$; применяя б), получим, что $\{\bar{H}, \bar{f}\}_N = 0$. Утверждение в), а вместе с ним и теорема ограничения полностью доказаны.

Приведем простейший пример, когда возникают симплектические действия групп.

9. Теорема. *Пусть P — компактная группа, действующая автоморфизмами на алгебре Ли G, G_n — неподвижная подалгебра, $x \in G_n^* \subset G^*$, $O_P(x)$ — орбита представления* Ad^* *группы Ли P, отвечающей G, проходящая через x, $O_{P_n}(x)$ — орбита группы P_n, отвечающей алгебре Ли G_n. Тогда:* а) *P действует симплектически на $O_P(x)$;* б) *$O_{P_n}(x)$ открыто в многообразии P-неподвижных точек орбиты $O_P(x)$;* в) *если ω, ω_n — формы Кириллова алгебр Ли G, G_n соответственно, то $\omega_n = \omega \mid G_n^*$.*

10. Лемма. *Пусть P, $O_P(x)$ те же, что и в теореме 9. Если $\sigma \in P$, то σ^*: $G^* \to G^*$ обозначает сопряженное к σ линейное отображение. Тогда $\sigma^*(O_P(x)) \subset O_P(x)$.*

Доказательство. Пусть $x \in G^*$. Определим окрестность $V_{x'}$ в $O_P(x')$:

$$V_{x'} = \{\exp(\operatorname{ad}_g^*)(x'),\ g \in G\}. \tag{504}$$

Применяя σ^* к (504), получим

$$\sigma^*(V_{x'}) = \{\exp(\operatorname{ad}^*_{\sigma^{-1}(g)})(\sigma^* x'),\ g \in G\}, \tag{505}$$

откуда следует включение

$$\sigma^*(V_{x'}) \subset O_P(x'). \tag{506}$$

Таким образом, локально лемма доказана. Для перехода к глобальному утверждению достаточно заметить, что орбита $O_P(x)$ — связное множество, а $O_P(x) \cap \sigma^{*-1}(O_P(\sigma^*(x)))$ — открытое множество в силу (506).

11. Лемма. *Пусть* $x \in G^*$, ξ, $\eta \in T_x O_P(x)$, ω — *форма Кириллова. Тогда* $\omega_x(\xi, \eta) = \omega_{\sigma^* x}(\sigma^*\xi, \sigma^*\eta)$.

Доказательство. По определению векторов ξ, η найдутся векторы ξ', $\eta' \in G$ такие, что

$$\xi = \mathrm{ad}^*_{\xi'}(x), \quad \eta = \mathrm{ad}^*_{\eta'}(x). \tag{507}$$

Тогда по определению формы Кириллова $\omega_x(\xi, \eta) = \langle x, [\xi', \eta']\rangle$. Применяя к (507) преобразование σ^*, получим

$$\sigma^*\xi = \mathrm{ad}^*_{\sigma^{-1}\xi'}(\sigma^* x), \; \sigma^*\eta = \mathrm{ad}^*_{\sigma^{-1}\eta'}(\sigma^* x). \tag{508}$$

Используя (508), легко вычислить форму Кириллова в точке $\sigma^* x$:

$$\omega_{\sigma^*(x)}(\sigma^*\xi, \sigma^*\eta) = \langle \sigma^* x, [\sigma^{-1}\xi', \sigma^{-1}\eta']\rangle = \\ = \langle \sigma^* x, \sigma^{-1}[\xi', \eta']\rangle = \omega_x(\xi, \eta). \tag{509}$$

12. Доказательство теоремы 9. Утверждение а) вытекает из лемм 10, 11. Докажем утверждение б). Пусть N — многообразие неподвижных точек. Из (505) вытекает, что в окрестности точки x множество N задается уравнениями

$$\exp(\mathrm{ad}^*_{\sigma^{-1}(g)})(x) = \exp(\mathrm{ad}^*_g)(x), \quad \sigma \in P. \tag{510}$$

Из (510) получаем, что $\mathrm{ad}^*_g(x) \in T_x N$ тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{ad}^*_g(x) = \mathrm{ad}^*_{\sigma(g)}(x), \quad \sigma \in P. \tag{511}$$

Пусть $\mathrm{Ann}(x) = \{u \in G \mid \mathrm{ad}^*_u(x) = 0\}$, $g \in G$, $g = g' + g''$, где $g' \in G_n + \mathrm{Ann}(x)$, а $g'' \in W$, где W — P-инвариантное дополнение к $G_n + \mathrm{Ann}(x)$ в G. Тогда $\mathrm{ad}^*_{g''}(x) = \mathrm{ad}^*_{\sigma g''}(x)$, откуда $g'' = 0$. Действительно, если $g'' \neq 0$, то найдется такое преобразование $\sigma \in P$, что $g'' \neq \sigma g''$, значит, $0 \neq g'' - \sigma g'' \in W$, а это противоречит тому, что $g'' - \sigma g''_* \in \mathrm{Ann}(x)$. Поэтому можно усилить (511): $\mathrm{ad}_g(x) \in T_x N$ тогда и только тогда, когда $g'' = 0$. Это, в свою очередь, означает, что

$$T_x N = T_x O_{P_n}(x). \tag{512}$$

Очевидно, что $O_{P_n}(x) \subset N$, поэтому из (512) вытекает утверждение б). Утверждение в) теоремы 9 тривиально следует из определения формы Кириллова. Теорема 9 доказана.

13. Пример отображения моментов. Группа $P = \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ действует на многообразии $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$. Пространство $G^* = \mathrm{sp}(n, \mathbf{R})$ отождествляется с алгеброй Ли G, которая состоит из матриц X порядка $2n$ вида

$$X = \left\| \begin{matrix} A & B \\ C & -A^t \end{matrix} \right\|, \qquad B^t = B, \quad C^t = C \tag{513}$$

(см. § 16). Отображение моментов μ: $\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^N$, $N=2n^2+n$, переводит вектор $x=(p, q)$ в матрицу

$$\mu(x)=\begin{Vmatrix} p\otimes q & p\otimes p \\ q\otimes q & -(p\otimes q)^t \end{Vmatrix}. \tag{514}$$

14. Пример. Пусть имеются два действия группы Ли P на симплектических многообразиях M, N с отображениями моментов Φ_M и Φ_N. Тогда группа P действует на $M\times N$ с отображением момента $\Phi_{M\times N}(m, n)=\Phi_M(m)+\Phi_N(n)$.

15. Пример. Если ρ: $P_1\to P_2$ — гомоморфизм групп Ли и P_2 действует на M с отображением моментов Φ_2: $M\to G_2^*$, то P_1 действует на M (с помощью гомоморфизма ρ) с отображением момента $\Phi_1=(d\rho)^*\circ\Phi_2$.

16. Теорема. *Пусть P — связная группа Ли, G — ее алгебра Ли. Предположим, что $H^1(G)=H^2(G)=0$. Если группа Ли P действует симплектически на симплектическом многообразии (M, ω), то существует такой однозначно определенный гомоморфизм λ: $G\to C^\infty(M)$, где $C^\infty(M)$ — алгебра Ли всех гладких функций на M относительно скобки Пуассона, что $\omega(\hat{\xi}, X)=d\lambda(\xi)(X)$, где $\hat{\xi}$ — векторное поле на M, отвечающее элементу $\xi\in G$. В этом случае определено отображение моментов Φ: $M\to G^*$ формулой $\langle\Phi(m), \xi\rangle=\lambda(\xi)(m)$. Отображение моментов эквивариантно относительно заданного действия группы Ли P на многообразии M и коприсоединенного представления группы Ли P на пространстве G^*.*

17. Замечание. Теорема 16 дает критерий гамильтоновости данного симплектического действия группы Ли в терминах когомологий алгебр Ли. Доказательство теоремы 16 можно найти в [374]. С теорией когомологий алгебр Ли можно познакомиться по работам [81], [291]. Отметим только, что если G — полупростая алгебра Ли, то $H^1(G)=H^2(G)=0$, см., например, [65], [81]. Критерий существования отображения моментов в терминах топологии многообразия дает теорема 18, доказательство ее см. в [374].

18. Теорема. *Пусть группа P действует симплектически на компактном симплектическом многообразии M. Если $H^1(M, \mathbf{R})=0$, то $\lambda(\xi)$ однозначно можно найти из условия $\int_M\lambda(\xi)\omega^n=0$.*

19. Замечание. В п. 20—26 будет дан обзор результатов, связанных со свойством выпуклости отображения момента. Мы будем следовать работам Атьи, Гийемина, Стернберга [313], [314], [372], [375], подробное изложение затронутых здесь вопросов можно найти в книге [374].

20. Обозначения. Пусть V — векторное пространство и $a_1, \ldots, a_n\in V$. Тогда $S(a_1, \ldots, a_n)$ обозначает выпуклое множество $\left\{\sum_{i=1}^n s_i a_i \mid s_1, \ldots, s_n\geqslant 0\right\}$.

21. Определение. Если группа Ли P действует на многообразии M, $x_0 \in M$ — неподвижная точка этого действия, то гомоморфизм из P в группу линейных преобразований пространства $T_{x_0}M$, который сопоставляет каждому элементу $g \in P$ дифференциал dg в точке x_0, называется *представлением изотропии.*

22. Теорема о локальной выпуклости. *Пусть M — симплектическое многообразие, T^r — r-мерный тор, $T^r \times M \to M$ — гамильтоново действие тора T^r на M с отображением моментов Φ: $M \to L^*$, x — неподвижная точка действия тора T^r, L — алгебра Ли тора T^r, а $p = \Phi(x)$. Тогда найдется такая окрестность U точки $x \in M$ и окрестность U' точки $p \in L^*$, что $\Phi(U) = U' \cap \{p + S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — веса линейного представления изотропии тора T^r в касательном пространстве $T_x M$.*

23. Теорема. *Предположим, что r-мерный тор T^r гамильтоново действует на симплектическом многообразии M с отображением моментов Φ: $M \to L^*$. Тогда образ отображения моментов является выпуклым многогранником.*

Эти теоремы можно применить к изучению структуры орбит коприсоединенного представления связных компактных групп Ли.

24. Теорема. *Орбиты коприсоединенного представления связной компактной группы Ли P односвязны.*

Доказательство. Приведем схему доказательства. Пусть Φ — отображение моментов. Тогда $\langle \Phi(x), \xi \rangle = \langle \xi, x \rangle$ для любого элемента ξ алгебры Ли G группы Ли P, где $\langle \xi, x \rangle$ — инвариантное скалярное произведение на G. Для почти всех $\xi \in G$ функция $\langle \xi, x \rangle$, ограниченная на данную орбиту O, является такой функцией Морса на O, что индексы всех критических точек четны. В этом случае соответствующее многообразие O односвязно.

25. Теорема. *В коприсоединенном представлении связной компактной группы Ли P стационарная подгруппа P_η любого элемента $\eta \in G^*$ связна (G — алгебра Ли группы Ли P).*

Доказательство. Отображение π: $P \to O$, $g \to \mathrm{Ad}_g^* \eta$, является расслоением над орбитой O группы P со слоем P_η (стационарная подгруппа). Поскольку группы $\pi_1(O)$ и $\pi_0(O)$ тривиальны, то из точной гомотопической последовательности

$$\ldots \to \pi_1(O) \to \pi_0(P_\eta) \to \pi_0(P) \to \ldots \qquad (515)$$

вытекает, что P_η связна.

26. Пример. Пусть $P = \mathrm{SO}(4)$, M — орбита коприсоединенного представления в $\mathrm{so}(5)^*$. На рис. 37 изображено множество $\Phi(M) \cap L^*$. Положительный квадрант есть L^*_+. Итак, $\Phi(M) \cap L^*$, вообще говоря, не выпуклое множество.

27. Теорема (А. В. Браилов). *Пусть $\dot{x} = \mathrm{sgrad}\, H$ — гамильтонова система на симплектическом многообразии (M, ω),* *а H — ее алгебра Ли интегралов. Предположим, что для любого $h \in \mathbf{R}$ изоэнергетическая поверхность $M_h = \{x \in M \mid H(x) = h\}$ компактна. Тогда H — компактная алгебра Ли.*

Доказательство. Пусть $g \in H$, X_g — соответствующее гамильтоново поле на M. Векторное поле X_g касается M_h для любого h и поэтому полно на M (т. е. интегральные траектории можно продолжать неограниченно долго). Поэтому определено действие связной односвязной группы Ли Q, отвечающей алгебре Ли H, на многообразии M. Это действие гамильтоново, так как по определению векторного поля X_g оно является гамильтоновым векторным полем с гамильтонианом g. Пусть P: $M \to H^*$ — соответствующее отображение момента, $P(x)(g) = g(x)$. Поскольку H — алгебра Ли интегралов гамильтоновой системы $\dot{x} = \operatorname{sgrad} F$, то изоэнергетические поверхности M_h инвариантны относительно действия Q и их образы $P(M_h)$ инвариантны относительно Ad^* для любого h. Так как по предположению M_h компактно, то $P(M_h)$ также компактны. Пусть $g \in H$ — нильпотентный элемент в алгебре Ли H. Тогда ad_g^* — нильпотентный эндоморфизм H^* и отображение $t \to \exp(\mathrm{ad}_{tg}^*)x$ полиномиально для каждого $x \in H^*$. В силу инвариантности $P(M_h)$ для $x \in P(M_h)$ это отображение является отображением из $\mathbf{R}^1$ в $P(M_h)$. Поскольку $P(M_h)$ компактно, а отображение $t \to \exp(\mathrm{ad}_{tg}^*)x$ полиномиально, то это постоянное отображение, $\exp(\mathrm{ad}_{tg}^*)x = x$ для всех t. Поэтому для любого $x \in P(M)$ имеем $\mathrm{ad}_g^* x = 0$. Следовательно, всякий нильпотентный элемент g лежит в центре Z алгебры Ли H. Пусть R — разрешимый радикал H. Тогда $[R, R]$ состоит из нильпотентных элементов и, следовательно, $[R, R] \subset Z$. Поэтому весь радикал R состоит из нильпотентных элементов и, следовательно, $R = Z$. Итак, H — редуктивная алгебра Ли. Пусть $S = [H, H]$ — ее полупростой идеал. Поскольку $S \cap Z = 0$, то в S нет ненулевых нильпотентных элементов. Следовательно, S — компактная полупростая алгебра Ли. Поэтому H — компактная алгебра Ли. Теорема доказана.

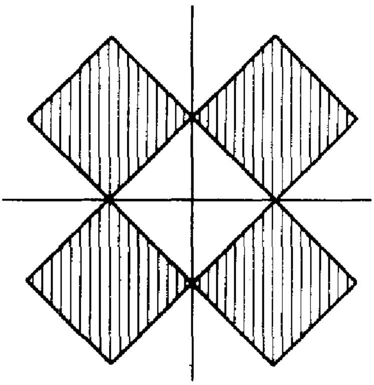


Рис. 37

§ 33. Редукция гамильтоновых систем с симметриями и псевдогруппы Ли

1. Определение. Пусть E — некоторое множество, O — точка, не принадлежащая E. Множество E называется *группоидом*, если на $E \cup O$ задана бинарная ассоциативная операция

$*$ такая, что: а) $O*O=O$; б) выделено непустое подмножество $N\subset E$ такое, что для произвольного элемента $a\neq 0$ существует элемент $a^{-1}\neq 0$, обладающий свойством $a*a^{-1}$, $a^{-1}*a\in N$; в) если $e\in N$ и $a*e\neq 0$, то $a*e=a$ и $e*e=e$. По поводу свойств группоидов см. [377], [485]. Множество N называется *подмножеством единиц*. Обозначим $E^*\subset E\times E$ область определения частичной операции: $(a, b)\in E^*$ тогда и только тогда, когда существует $a*b\in E$, т. е. $a*b\neq 0$. Обозначим буквами r и l отображения сокращения $E\to N$, заданные формулами

$$r(a)=a^{-1}*a,\quad l(a)=a*a^{-1}. \tag{516}$$

Отметим, что элементы a и b перемножаемы (т. е. $(a, b)\in E^*$) тогда и только тогда, когда $r(a)=l(b)$. При этом $l(a*b)=l(a)$ и $r(a*b)=r(b)$.

2. Определение. Группоид E называется *симплектическим* или *конечномерной псевдогруппой* Ли, если: а) E — симплектическое многообразие, его подмножество единиц N — лагранжево подмногообразие; б) отображения сокращения l, r: $E\to N$ — субмерсии, трансверсальные N; в) отображение $a\to a^{-1}$ и умножение $(a, b)\to a*b$ являются антиканоническим и каноническим отображением соответственно из E в E и из E^* в E. Каноничность означает, что прообраз формы ω_E совпадает с сужением формы $\omega_E\oplus\omega_E$ на E^*. Конечномерная псевдогруппа Ли E *соответствует пуассонову многообразию* N, если N вложено в E как подмногообразие единиц и отображение сокращения антиканоническое.

3. Теорема (М. В. Карасев [118], [119]). *Любому пуассонову многообразию соответствует локальная конечномерная псевдогруппа Ли. Каждая конечномерная псевдогруппа Ли соответствует единственному пуассонову многообразию.*

4. Замечание. Теорема 3 представляет собой аналог третьей классической теоремы Ли о связи между группами Ли и алгебрами Ли. Реальному вычислению структуры псевдогруппы из теоремы 3 посвящена следующая теорема 8. С этой целью введем

5. Определение. Симплектическое многообразие E называется *фазовым пространством над пуассоновым многообразием* N, если: а) N вложено в E как лагранжево подмногообразие; б) задано антиканоническое расслоение r: $E\to N$ и каноническое расслоение l: $E\to N$; в) l и r косоортогональны (полярны) друг другу; г) l и r трансверсальны N и на N тождественны. Будем называть l и r *пуассоновыми расслоениями* над N.

6. Теорема (М. В. Карасев [118]). *Над любым пуассоновым многообразием N существует фазовое пространство.*

7. Обозначения. Символом $\operatorname{sgrad} H$, как обычно, обозначим гамильтоново поле на E, отвечающее функции Гамильтона H, возможно зависящей явно от времени, а символом

γ_H обозначим сдвиг вдоль траекторий этого поля за единичное время. Нижние индексы $(\operatorname{sgrad} H)_a$ будут указывать переменную (в данном случае a), по которой действует оператор.

8. Теорема (М. В. Карасев [118], [119]). *Если E — псевдогруппа Ли, отвечающая пуассонову многообразию N, и φ — гладкая функция на E, то функция $\Phi(a, b) = \varphi(a*b)$ на E^* удовлетворяет системе уравнений*

$$(\operatorname{sgrad} r_j)_a - (\operatorname{sgrad} l_j)_b \Phi(a, b) = 0, \tag{517}$$

$$\Phi(a, b)|_{a \in N} = \varphi(b), \quad \Phi(a, b)|_{b \in N} = \varphi(a), \; j = 1, \ldots, \dim N. \tag{518}$$

Наоборот, если E — фазовое пространство над данным пуассоновым многообразием N, а r и l — его пуассоновы расслоения, то для любой функции φ на E система (518) *на многообразии $E^* = \{(a, b) | r(a) = l(b)\}$ имеет единственное решение $\Phi(a, b) = \varphi(a*b)$; получающаяся таким образом операция $a*b$ задает на E структуру конечномерной псевдогруппы Ли, отвечающей пуассонову многообразию N. Эта же псевдогруппа может быть вычислена так: точки a и b перемножаемы, если $a = \gamma_{l^*f}(l(b))$ для некоторой функции f на N; при этом $a*b = \gamma_{l^*f}(b)$. Такое определение корректно, т. е. не зависит от выбора функции f.*

9. Замечание. Доказательства и обсуждения теорем 3, 6, 8 содержатся в работах [118], [119], [120].

10. Обсуждение. Один из главных механизмов возникновения пуассоновых многообразий — это процедура редукции гамильтоновых систем с симметриями.

Пусть X — симплектическое многообразие, H — функция Гамильтона на нем, $A = (A_1, \ldots, A_n)$ — набор независимых первых интегралов гамильтонова векторного поля $\operatorname{sgrad} H$. Возникает естественный вопрос: каким условиям должен удовлетворять набор A для того, чтобы поле $\operatorname{sgrad} H$ допускало редукцию, т. е. понижение числа степеней свободы на поверхностях $M_\xi = \{A_i = \xi_i = \text{const}, \; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ с сохранением гамильтоновой структуры.

Понизить число степеней свободы можно, избавившись от координат вдоль траекторий полей $\operatorname{sgrad} A_j$. Обозначим α_z линейную оболочку этих полей в точке $z \in X$. Условием существования редукции является интегрируемость распределения плоскостей $\{\alpha_z\}$. В силу критерия Фробениуса данное распределение интегрируемо тогда и только тогда, когда набор A замкнут относительно скобок Пуассона $\{f, g\}_X$ на многообразии X, т. е.

$$\{A_j, A_k\} = \psi_{kj}(A), \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{519}$$

Соотношения (519) и представляют собой искомые условия существования редукции поля $\operatorname{sgrad} H$.

11. Обозначения. Набор независимых функций, постоянных на слоях распределения $\{\alpha_z\}$, обозначим $B=(B_1, \ldots, B_m)$ $(m+n=\dim X)$. Поскольку H также постоянна на слоях, то $H=h(B)$, т. е. гамильтоново поле $\operatorname{sgrad} H$ является линейной комбинацией полей $\operatorname{sgrad} B_j$. Линейная оболочка β_z этих полей совпадает с касательной плоскостью к поверхности $\{A_i=\mathrm{const}\}$ в точке z. Таким образом, распределение $\{\beta_z\}$ заведомо интегрируемо и поэтому набор B замкнут относительно скобки Пуассона:

$$\{B_j, B_k\}_X=\Phi_{kj}(B), \quad j, k=1, \ldots, m. \tag{520}$$

Обозначим буквой M базу отображения B. Тензор $\|\Phi_{jk}\|$ задает на базе новую скобку Пуассона, а исходное поле $\operatorname{sgrad} H$ после проектирования вдоль B (т. е. вдоль слоев распределения $\{\alpha_z\}$) превращается в гамильтоново поле $\operatorname{sgrad} h$ на пуассоновом многообразии M: $dB(\operatorname{sgrad} H)=\operatorname{sgrad} h$, $H=h(B)$. Редуцированное поле $\operatorname{sgrad} h$ направлено вдоль симплектических листов на M (на которых скобка не вырождена). Коразмерность этих листов равна $\operatorname{cork}\Phi=\operatorname{cork}\Psi$. Итак, размерность фазового пространства в результате редукции уменьшилась на $(\operatorname{rk}\Psi+2\operatorname{cork}\Psi)$ единиц.

12. Определение. Важно, что на базах отображений A, B возникают новые скобки Пуассона, порожденные тензорами Ψ, Φ. Будем предполагать, что оба отображения являются глобальными расслоениями

$$\begin{tikzcd} & M \\ X \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "A"'] & \\ & N \end{tikzcd} \tag{521}$$

B каноническое, A каноническое, A и B косоортогональны. Пуассоновы многообразия M и N в диаграмме (521) называются *взаимно полярными*.

13. Оказывается, слои канонических расслоений A и B в диаграмме (521) являются орбитами пуассоновых действий на двух конечномерных псевдогруппах, отвечающих пуассоновым многообразиям M и N.

14. Определение. *Действие* абстрактного *группоида* E на множестве X — это такая операция

$$(a, z)\to a\circ z, \tag{522}$$

заданная на некотором подмножестве $X^*\subset E\times X$, что выполнены условия: а) если $a\circ z$ определено, то $b\circ(a\circ z)$ определено тогда и только тогда, когда в E определено произведение $b*a$, и в этом случае $b\circ(a\circ z)=(b*a)\circ z$; б) для любого $z\in X$ существует «единица» e в E такая, что $e\circ z=z$.

15. Определение. Конечномерная псевдогруппа Ли E *пуассоново действует* на симплектическом многообразии X, если это действие (522) — каноническое отображение.

16. Замечание. При выполнении условий а), б) из п. 14 пуассоновость действия эквивалентна лагранжевости подмногообразия $\Xi(X, E)=\{(a\circ z, z, a)\}\subset X\times X\times E$ относительно симплектической формы $\omega_X\oplus\omega_X\oplus\omega_E$. Это «сплетающее» лагранжево подмногообразие было введено в работе [21]. Точно так же лагранжевость подмногообразия $\Xi(E, E)=\{(a*b, b, a)\}\subset E\times E\times E$ эквивалентна каноничности операции умножения $*$ в псевдогруппе E. А. Вейнстейн [525] именно с его помощью определяет симплектический группоид.

Буквами r и l обозначим отображения сокращения псевдогруппы E.

17. Теорема. *Пусть задана диаграмма* (521) *и E — псевдогруппа, отвечающая пуассонову многообразию N. Тогда для любой гладкой функции φ на X система уравнений*

$$(\operatorname{sgrad} r_j)_a-(\operatorname{sgrad} A_j)_z\Phi(a, z)=0,$$
$$\Phi_{a\in N}=\varphi(z),\quad j=1,\ \ldots,\ \dim N, \tag{523}$$

на подмногообразии $X^*=\{(a, z)\mid r(a)=A(z)\}\subset E\times X$ имеет единственное решение $\Phi(a, z)=\varphi(a\circ z)$. Определенная таким способом операция $a\circ z$ — это пуассоново действие псевдогруппы E на X. То же самое пуассоново действие можно задать так: если $a=\gamma_{l^*f}(A(z))$ для некоторой функции f на N, то по определению $a\circ z=\gamma_{A^*f}(z)$. Орбиты этого действия совпадают со слоями B.

В некотором смысле это утверждение можно обратить.

18. Теорема. *Пуассоново действие любой конечномерной псевдогруппы E на X порождает (по крайней мере локально) диаграмму* (521), *в которой N — подмногообразие единиц из E, а B — расслоение на E-орбиты. Это действие псевдогруппы E удовлетворяет формулам теоремы* 17.

19. Замечание. В случае обычного пуассонова действия группы Ли [430], [496], [8] многообразие N оказывается линейным и скобка на нем линейна, т. е. $\psi_{jk}(\xi)=\sum\limits_{s=1}^{n}\xi_s\lambda_{kj}^s$, $\lambda_{kj}^s=\mathrm{const}$ (или отличается от нее на постоянный коцикл). Отображение A — это обычное отображение *моментов*. Мы сохраним этот термин в общей ситуации теоремы 18.

20. Замечание. Действие $a\circ z$ определено тогда и только тогда, когда $r(a)=A(z)$. При этом $B(a\circ z)=B(z)$ и $A(a\circ z)=l(a)$. Последнее свойство моментов A показывает, что действие псевдогруппы E на X проектируется вдоль A и задает некоторое действие E на N.

21. Определение. Естественное действие псевдогруппы на своем многообразии единиц назовем *коприсоединенным*. Вычисляется это действие по формулам теоремы 17, в которой вместо X нужно взять многообразие N, а вместо A — тождественное отображение id: $N \to N$.

22. Замечание. Если $l(a)=\zeta$ и $r(a)=\xi$, то $a \circ \xi = \zeta$. Таким образом, орбитами коприсоединенного действия являются симплектические листы многообразия N. На каждом листе это действие пуассоново.

23. Следствие. Пуассоново действие псевдогруппы E на симплектическом многообразии X переводится отображением моментов A: $X \to N$ в коприсоединенное действие E на своем многообразии единиц N.

24. Рассмотрим теперь псевдогруппу, отвечающую пуассонову многообразию M, полярному N. Следующая теорема служит источником примеров глобальных псевдогрупп.

25. Теорема. *Пусть псевдогруппа E, отвечающая пуассонову многообразию N, действует на X пуассоново и свободно, ее орбиты задают глобальное расслоение B: $X \to M$, а расслоение моментов A: $X \to N$ также глобально. Тогда глобальная псевдогруппа, отвечающая пуассонову многообразию M, полярному N, существует и пуассоново действует на X вдоль слоев A. Ее действие коммутирует с действием E.*

26. В заключение рассмотрим интересный класс скобок Пуассона, тесно связанный с квадратичными коммутационными соотношениями [234], [240].

27. Определение. Группа Ли K, наделенная скобкой Пуассона так, что умножение μ: $K \times K \to K$ канонично, а обращение ν: $K \to K$ $(\nu(x)=x^{-1})$ антиканонично, называется *пуассоновой группой* или *группой Гамильтона — Ли* [93].

Пуассоново действие такой группы на симплектическом многообразии X задается каноническим отображением $K \times X \to X$. Подробности см. в [93], [233].

28. Замечание. Множество K-инвариантных функций на X будет замкнуто относительно скобки Пуассона, и поэтому, если K-орбиты порождают расслоение B: $X \to M$, то на базе M возникает единственная пуассонова структура, относительно которой B — каноническое отображение. Буквой A обозначим косоортогональное B отображение в диаграмме (521). Предположим, что A: $X \to N$ является глобальным расслоением.

29. Обозначения. Обозначим D_i базисные левоинвариантные векторные поля на группе Ли. Скобку на K запишем в виде (K — группа Ли, отвечающая алгебре Ли G)

$$\{u, v\}_K = \langle RDu, Dv \rangle, \qquad u, v \in C^\infty(K), \tag{524}$$

где R: $G^* \to G$, $R = R(\alpha)$ — гладкая функция точки $\alpha \in K$. Оказывается [93], тензор R полностью характеризуется своими первыми производными в единице $e \in K$. Точнее, числа

$$\tilde{\lambda}^i_{jk} = (D_i R_{kj})(e) \tag{525}$$

задают на G^* структуру алгебры Ли, и две структуры Ли на G и G^* согласованы друг с другом в следующем смысле [7]:

$$\tilde{\lambda}([X, Y]) = \tilde{\lambda}(Y)\,\mathrm{sgrad}(X)^* + \mathrm{sgrad}\, X \cdot \tilde{\lambda}(Y) - \\ - \tilde{\lambda}(X)\,\mathrm{sgrad}(Y)^* - \mathrm{sgrad}\, Y \cdot \tilde{\lambda}(X), \tag{526}$$

где $X, Y \in G$, $\tilde{\lambda}(X) = \| \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{\lambda}^i_{jk} \|$.

30. Если вещественные числа $\tilde{\lambda}^i_{jk}$ удовлетворяют всем перечисленным условиям, то на односвязной группе Ли K, отвечающей алгебре Ли G, существует единственная скобка (524), которая превращает K в пуассонову группу и для которой выполнены равенства (525). Эту скобку на K будем называть *инвариантной*.

31. Лемма. *Пусть тензор $R = R(\alpha)$ задает по формуле* (524) *инвариантную скобку на группе K, и пусть $\alpha_0 \in K$. Тогда тензор $R(\alpha) - R(\alpha_0)$ задает скобку Пуассона на K, причем левый сдвиг δ: $\alpha \to \alpha_0^{-1}\alpha$ переводит эту скобку в инвариантную.*

32. Определение. Обозначим $\tilde{K}$ односвязную группу Ли со структурными константами $\tilde{\lambda}^i_{jk}$. В силу сказанного выше на $\tilde{K}$ существует единственная инвариантная скобка

$$\{f, g\}_{\tilde{K}} = \langle \tilde{R} Df, Dg \rangle, \qquad f, g \in C^\infty(\tilde{K}), \tag{527}$$

такая, что $\lambda^i_{jk} = (D_j \tilde{R}_{kj})(e)$ — структурные константы алгебры Ли G. Группы K и $\tilde{K}$ называются *сопряженными*, см. [93], [233].

33. Теорема. *Пусть пуассонова группа K пуассоново действует на односвязном симплектическом многообразии X и задает расслоение B: $X \to M$. Пусть A: $X \to N$ — каноническое расслоение, косоортогональное B. Тогда выполнено следующее.*

1) *База N диффеоморфна области в сопряженной пуассоновой группе K, причем скобка Пуассона на N отличается от инвариантной скобки* (527) *на «константу»* $\{f, g\}_N = \langle (\tilde{R} + C) Df, Dg \rangle$, $C_{jk} = \mathrm{const}$.

2) *Числа C_{jk} подчинены условию «коцикличности»*

$$\sum (C_{js} \lambda^k_{sl} C_{lm} - C_{js} \tilde{\lambda}^s_{km}) = 0, \tag{528}$$

здесь суммирование идет по повторяющимся индексам и по циклической перестановке произвольной тройки индексов (j, k, m), а λ^k_{sl} и $\tilde{\lambda}^s_{km}$ — структурные константы групп K и $\tilde{K}$ соответственно.

3) *«Коцикл» $\{C_{jk}\}$ тривиален, если $C_{jk} = \tilde{R}_{kj}(\xi_0)$ для некоторого $\xi_0 \in \tilde{K}$; в этом случае после левого сдвига δ скобка на $N \approx \tilde{K}$ становится инвариантной.*

4) *При выполнении условия* (3) *конечномерная псевдогруппа Ли E, отвечающая пуассонову многообразию $N \approx K$, диффеоморфна $K \times \tilde{K}$ и пуассоново действует на X по формуле* $(\alpha, \xi) \circ z = \alpha \cdot z$, *если* $\xi = A(z)$ *(здесь $z \to \alpha \cdot z$ — действие K на X). Расслоение A является отображением моментов.*

5) *Коприсоединенное действие E на $\tilde{K}$ имеет вид* $(\alpha, \zeta) \circ \circ \xi = \alpha \cdot \xi$, *если* $\zeta = \xi$ *(здесь $\xi \to \alpha \cdot \xi$ — некоторое пуассоново действие группы K на сопряженной группе $\tilde{K}$, орбитами которого являются симплектические листы в K). Умножение в псевдогруппе $E = K \times K$ задается формулой* $(\beta, \zeta) * (\alpha, \xi) = (\beta\alpha, \xi)$, *если* $\zeta = \alpha \cdot \xi$.

6) *Пусть K действует на X свободно. Тогда база M расслоения B обладает структурой глобальной конечномерной псевдогруппы Ли.*

34. Замечание. Подробные формулы см. в работе [120].

Глава 6

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ИНВОЛЮЦИИ НА ОРБИТАХ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ

§ 34. Метод сдвига аргумента

1. Замечания. Весьма эффективным методом построения функций в инволюции на орбитах коприсоединенного представления группы Ли является метод сдвига аргумента.

2. Определение. Пусть $f(x)$ — функция, заданная на линейном пространстве V, а $a \in V$ — фиксированный вектор. На пространстве V построим семейство функций $f_{\lambda, a}(x) = f(x + \lambda a)$, где λ — произвольное число ($\lambda \in \mathbf{R}$, если V — вещественное линейное пространство). Будем говорить, что функции $f_{\lambda, a}(x)$ получаются из $f(x)$ *операцией сдвига аргумента*. Если $f_{\lambda, a}(x)$ можно разложить в ряд по λ, то

$$f_{\lambda, a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_{\lambda, a, n}(x) \tag{529}$$

и операция сдвига порождает из функции $f(x)$ целое семейство функций $\{f_{\lambda, a, n}(x)\}$.

Эта идея для случая алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$ впервые появилась в работе С. В. Манакова [165]. Затем для случая общих алгебр Ли метод был разработан А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [186]—[189]. В теории гамильтоновых систем сдвиг аргумента используется в силу следующей важной теоремы.

3. Теорема (см. [186]—[189]). *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две функции на пространстве L^*, дуальном к алгебре Ли L,* *постоянные на орбитах $O(t)$ коприсоединенного представления группы Ли T, отвечающей алгебре Ли L, $a \in L^*$ — фиксированный ковектор, λ, $\mu \in \mathbf{R}$ — фиксированные числа. Утверждается, что функции $\bar{F}_{\lambda,a}(t) = F(t+\lambda a)$ и $\bar{G}_{\mu,a}(t) = G(t+\mu a)$ находятся в инволюции на всех орбитах $O(t)$ относительно стандартной симплектической структуры (для любых λ, $\mu \in \mathbf{R}$).*

Доказательство. Нужно доказать равенство $\langle t, [d\bar{F}_{\lambda,a}(t), d\bar{G}_{\mu,a}(t)]\rangle \equiv 0$, где $\langle X, Y\rangle$ — значение линейного функционала X на векторе Y, так как $\operatorname{sgrad}_t F = \operatorname{ad}^*_{dF(t)}(t)$. Действительно,

$$\{\bar{F}, \bar{G}\} = -\omega(\operatorname{sgrad} \bar{F}, \ \operatorname{sgrad} \bar{G}) = -\omega\left(\operatorname{ad}^*_{d\bar{F}(t)}(t), \ \operatorname{ad}^*_{d\bar{G}(t)}(t)\right) = = -t\left([d\bar{F}_t, \ d\bar{G}_t]\right). \tag{530}$$

Пусть $\lambda \neq \mu$ и $t = \alpha(t+\lambda a) + \beta(t+\mu a)$, где $\beta = \lambda/(\lambda-\mu)$, $\alpha = \mu/(\mu-\lambda)$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle t, \left[d\bar{F}_\lambda(t), \ d\bar{G}_\mu(t)\right]\rangle &= \alpha\langle(t+\lambda a), \ \left[dF(t+\lambda a), \ d\bar{G}_{\mu,a}(t)\right]\rangle + \\ &+ \beta\langle(t+\mu a), \ \left[d\bar{F}_{\lambda,a}(t), \ dG(t+\mu a)\right]\rangle = \\ &= \alpha\langle \operatorname{ad}^*_{dF(t+\lambda a)}(t+\lambda a), \ d\bar{G}_{\mu,a}(t)\rangle - \\ &- \beta\langle \operatorname{ad}^*_{dG(t+\mu a)}(t+\mu a), \ d\bar{F}_{\lambda,a}(t)\rangle = 0,\end{aligned} \tag{531}$$

так как функции F и G постоянны на орбитах представления Ad^*.

Равенство нулю при $\lambda = \mu$ получается из соображений непрерывности.

4. Замечание. Теорему 3 можно обобщить на случай функций из конечномерного пространства представления группы Ли в пространстве функций на орбитах представления Ad^*, см. [249].

5. Обозначения. Пусть W — такое подпространство в пространстве аналитических функций $A(L^*)$ на пространстве L^*, дуальном к алгебре Ли L, что: а) $\dim W < \infty$; б) для любых элементов $g \in T$, $f \in W$ имеет место включение $f(\operatorname{Ad}^*_g x) \in W$, т. е. W инвариантно относительно представления, индуцированного коприсоединенным представлением в пространстве функций на L^*, T — группа Ли, отвечающая L.

Фиксируем в W базис $f_1, \ldots, f_s$. Тогда каждая функция $f \in W$ определяет на группе T, отвечающей алгебре Ли L, набор функций C^i_f, по правилу

$$f(\operatorname{Ad}^*_g x) = C^i_f(g) f_i(x) \tag{532}$$

и набор линейных функционалов $C^i_*(f) \in L^*$:

$$C^i_*(f)(\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} C^i_f(\exp t\xi) = d\,C^i_f(\xi), \tag{533}$$

т. е. $C_*^i(f)$ — дифференциал отображения C_f^i в единице группы Ли T.

6. Предложение. *При сделанных выше предположениях выполняется равенство* $(\operatorname{sgrad} f)(x) = C_*^1(f) f_1(x) + \ldots + C_*^s(f) f_s(x)$.

Доказательство. Дифференцируя равенство $f(\mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi} x) = C^1(\exp t\xi) f_1(x) + \ldots + C^s(\exp t\xi) f_s(x)$ по t при $t=0$, получим

$$C_*^1(\xi) f_1(x) + \ldots + C_*^s(\xi) f_s(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi} x) =$$

$$= f_{*,x}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi} x\right) = f_*(\mathrm{ad}_\xi^* x) = (\mathrm{ad}_\xi^* x)(f_{*,x}) = x([\xi, f_{*,x}]) =$$

$$= -x([f_{*,x}\,\xi]) = -\langle \mathrm{ad}^*_{f_{*,x}}(x), \xi\rangle, \tag{534}$$

здесь $f_{*,x} \in L^{**}$, но имеется канонический изоморфизм $L^{**} \cong L$, поэтому $f_{*,x} \in L$. Итак, $\mathrm{ad}^*_{f_{*,x}}(x) = -C_*^1 f_1(x) - \ldots - C_*^s f_s(x)$. Проверим, что определение векторного поля $\operatorname{sgrad} f$ будет выполнено, если положить $\operatorname{sgrad} f = C_*^1 f_1 + \ldots + C_*^s f_s$. В силу невырожденности симплектической структуры ω тем самым все будет доказано. Имеем

$$\omega(C_*^i f_i(x), \mathrm{ad}_\xi^* x) = \omega(-\mathrm{ad}^*_{f_{*,x}}(x), \mathrm{ad}_\xi^* x) = \langle x, -[f_{*,x}, \xi]\rangle =$$

$$= \langle x, [\xi, f_{*,x}]\rangle = \mathrm{ad}_\xi^*(x)(f_{*,x}) = \langle df_x, \mathrm{ad}_\xi^* x\rangle. \tag{535}$$

7. Теорема (см. [249]). *Пусть в $A(L^*)$ выделено конечномерное подпространство W, инвариантное относительно коприсоединенного представления группы Ли T, отвечающей алгебре Ли L (см. п. 5), а $f_1, \ldots, f_s$ — базис в W. Если в W заданы такие функции $h_1, \ldots, h_p \in W$, что*

$$C_{j*}^k(dh_{i,x}) \equiv 0, \qquad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant p, \quad 1 \leqslant k \leqslant s, \tag{536}$$

где $C_{j*}^k = C_*^k(h_j)$ относительно базиса $f_1, \ldots, f_s$, то: а) *на всех орбитах коприсоединенного представления* Ad^* *группы Ли T функции h_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, находятся в инволюции, т. е. $\{h_i, h_j\} = 0$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant p$;* б) *сдвиги функций h_i находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления* Ad^* *группы Ли T, т. е.*

$$\{h_i(x+\lambda a), \quad h_j(x+\mu a)\} = 0, \qquad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant p, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \quad a \in L^*. \tag{537}$$

Для доказательства этого утверждения потребуются следующие две леммы.

8. Лемма. *В пространстве гладких функций $C^\infty(L^*)$ на L^* рассмотрим дифференциальные операторы $X_i = C_{ij}^k x_k \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, где*

x_i — *координаты относительно базиса* $e^1, \ldots, e^n$, *сопряженного к базису* $e_1, \ldots, e_n \in L$, *а* C_{ij}^k — *структурный тензор алгебры Ли* L *в базисе* $e_1, \ldots, e_n$. *Тогда:* а) *если* W — *инвариантное подпространство в* $C^\infty(L^*)$, *то* $X_i f \in W$ *для любой функции* $f \in W$; б) *если* $f \in W$ *и* $f_1, \ldots, f_s$ — *базис в* W, $X_i f = C_i^j f_j$, *то* $C_*^j(f) = -C_i^j e^i$.

Доказательство. Из равенства $f(\mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi} x) = C^i(\exp t\xi) f_i(x)$ следует, что $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi} x) = C_*^i(\xi) f_i(x)$, но

$$\frac{d}{dt} f(\mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi} x) = df_x(\mathrm{ad}^*_\xi x) = (\mathrm{ad}^*_\xi x)(df_x) = \langle x, [\xi, df_x]\rangle =$$
$$= -(\mathrm{ad}^*_{df_x}(x))(\xi) = -[(X_i f) e^i](\xi), \tag{538}$$

поэтому $(X_i f) e^i = -f_i(x) C_*^i$.

Утверждение а) вытекает из конечномерности W, так как в этом случае W — замкнутое подпространство и, следовательно, $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\mathrm{Ad}^*_{\exp t\xi} x) \in W$.

Утверждение б) получается из равенства $-f_i C_*^i = [X_i(f)](e^i) = C_i^j f_j e^i$.

9. Лемма. *Пусть* $f, g \in C^\infty(L^*)$ — *гладкие функции на* L^*. *Тогда функции* f *и* g *находятся в инволюции на всех орбитах представления* Ad^* *тогда и только тогда, когда*

$$C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \equiv 0; \tag{539}$$

здесь C_{ij}^k — *структурный тензор алгебры Ли* L *в базисе* $e_1, \ldots, e_n$, *а* $x_1, \ldots, x_n$ — *координаты в пространстве* L^* *в базисе, сопряженном с* $e_1, \ldots, e_n$.

Доказательство. Для скобки Пуассона имеем выражение

$$\{f, g\} = -C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \tag{540}$$

см. п. 12 § 22. Используя его, получим, что функции f и g в инволюции на всех орбитах тогда и только тогда, когда $C_{ij}^k x_k \times \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \equiv 0$, что и утверждалось.

Доказательство теоремы 7. Проверим, что

$$C_{ij}^k x_k \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i}(x + \lambda a) \frac{\partial h_\beta}{\partial x_j}(x + \mu a) = 0. \tag{541}$$

Обозначим $x + \lambda a$ буквой y. Тогда левая часть (541), которую обозначим буквой A, равна

$$A = C_{ij}^k y_k \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) - \lambda C_{ij}^k a_k \frac{\partial h_\alpha}{d y_i}(y) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a), \tag{542}$$

где $\nu = \mu - \lambda$. Из равенства

$$C_{ij}^k (y_k + \nu a_k) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) = C_{\beta * i}^\gamma f_\gamma (y+\nu a) \tag{543}$$

($C_{\beta * i}^\gamma$ — i-я координата ковектора $C_{\beta *}^\gamma$, $1 \leqslant \gamma \leqslant p$, $1 \leqslant \beta \leqslant s$) следует, что

$$C_{ij}^k a_k \frac{\partial h_\beta}{\partial y_i}(y+\nu a) = \frac{1}{\nu}\left[C_{\beta * i}^\gamma f_\gamma (y+\nu a) - C_{ij}^k y_k \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) \right], \tag{544}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
A = C_{ij}^k y_k \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) &- \\
- \frac{\lambda}{\nu}\left[C_{\beta * i}^\gamma f_\gamma (y+\nu a) - C_{ij}^k y_k \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) \right] \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) &= \\
= \left(1 + \frac{\lambda}{\nu}\right) C_{ij}^k y_k \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) &- \\
- \frac{\lambda}{\nu} C_{\beta * i}^\gamma f_\gamma (y+\nu a) \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) &= \\
= - \left(1 + \frac{\lambda}{\nu}\right) C_{\alpha * j}^\delta h_\delta (y) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_i}(y+\nu a) &- \\
- \frac{\lambda}{\nu} C_{\beta * i}^\gamma f_\gamma (y+\nu a) \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) &= \\
= - \left(1 + \frac{\lambda}{\nu}\right) C_{\alpha *}^\delta \left(d h_\beta (y+\nu a)\right) h_\delta (y) &- \\
- \frac{\lambda}{\nu} C_{\beta *}^\gamma \left(d h_\alpha (y)\right) f_\gamma (y+\nu a) &\equiv 0.
\end{aligned} \tag{545}$$

Наконец, предельный переход в (541) доказывает равенство при $\nu = \mu - \lambda = 0$.

10. Определение. Конечномерное подпространство W в $A(L^*)$ (где L — алгебра Ли) с выделенным набором функций $h_1, \ldots, h_p \in W$ называется *S-представлением* группы Ли T, ассоциированной с L, если выполнены следующие два условия: а) W — инвариантно относительно коприсоединенного представления $\mathrm{Ad}^*(T)$; б) $\langle C_*^k (h_j), \; dh_p(x) \rangle \equiv 0$ на L^*.

11. Замечание. Условие $\langle C_*^k(h_j),\ dh_p(x)\rangle \equiv 0$, очевидно, не зависит от выбора базиса $f_1, \ldots, f_s$ в пространстве W.

12. Замечание. В теореме 7 утверждается, что если $(h_1, \ldots, h_p;\ W)$ — S-представление группы Ли T, то сдвиги $h_i(x+\lambda a)$, $h_j(x+\mu a)$ находятся в инволюции на всех орбитах представления $\mathrm{Ad}^*(T)$ относительно стандартной симплектической структуры.

13. Частным случаем теоремы 7 является методика сдвига полуинвариантов (см. [11]). Отметим, что в этом случае условие $C_{j*}^k(dh_{i,x})=0$ можно опустить, что является глубоким фактом из теории представлений, который вытекает из результатов работ [188], [324], [486], [339], [246].

14. Операцию сдвига аргумента можно скомбинировать с операцией ограничения функций на подпространства в L^*. Приведем соответствующие формулировки для инвариантов. Эти результаты принадлежат А. В. Браилову. На произвольные представления они обобщаются очевидным образом.

15. Обозначения. Пусть V — векторное пространство, σ — инволютивный автоморфизм V, т. е. $\sigma^2=\mathrm{id}$, а V_0 — собственное подпространство для σ, отвечающее собственному значению $+1$, V_1 — собственное подпространство для σ, отвечающее собственному значению -1. Тогда $V=V_0\oplus V_1$ — разложение для V относительно инволютивного автоморфизма σ. Пусть $\sigma^*: V^*\to V^*$ — дуальный к σ автоморфизм сопряженного пространства V^*. Ясно, что σ^* — инволютивный автоморфизм. Символом $V^*=(V^*)_0\oplus(V^*)_1$ обозначим соответствующее разложение пространства V^*. Отображение ограничения функционалов $x\in V^*$ на подпространство $V_0\subset V$ устанавливает естественный изоморфизм $(V^*)_0\to V_0^*$, где V_0^* — пространство, дуальное к V_0. Аналогично, отображение ограничения функционалов $y\in V^*$ на $V_1\subset V$ позволяет отождествить $(V^*)_1$ с пространством V_1^*, дуальным к V_1.

Пусть теперь $V=L$ — алгебра Ли, σ — инволютивный автоморфизм L, $L=L_0\oplus L_1$ — разложение L относительно σ, $L^*=L_0^*\oplus L_1^*$ — разложение L^* относительно σ. Поскольку σ — автоморфизм L, то $[L_i,\ L_j]\subset L_{i+j}$, где $i,j=0,1$ — вычеты по модулю два. Для произвольной гладкой функции f на L^* обозначим $\bar f$ ее ограничение на L_0^*.

16. Лемма. *Пусть σ — инволютивный автоморфизм алгебры Ли L, $L=L_0\oplus L_1$ и $L^*=L_0^*\oplus L_1^*$ — соответствующие разложения L и L^*, $a\in L_1^*$, λ, $\mu\in\mathbf{R}$ и f, g — два инварианта коприсоединенного представления* Ad^*. *Тогда ограничения $\overline{f_{\lambda,a}}$ и $\bar g_{\mu,a}$ сдвигов инвариантов f, g находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления в* $\mathrm{Ad}^*(T_0)$, *T_0 — группа Ли, отвечающая L_0.*

Доказательство. Заметим, что для сдвига любой гладкой функции f на элемент $a\in L_1^*$ имеет место равенство

$d\bar{f}_a(x)=\frac{1}{2}(df_a(x)+d\tilde{f}_{-a}(x))$, $x\in L_0^*$, где $\tilde{f}(x)=f(\sigma^*(x))$. Отметим также, что если $f\in I(L)$ — инвариант коприсоединенного представления $\mathrm{Ad}^*(T)$, то и $\tilde{f}\in I(L)$. Поэтому

$$\{\bar{f}_{\lambda,a},\ \bar{g}_{\mu,a}\}(x)=\frac{1}{4}\langle x,[df_{\lambda,a}(x)+d\tilde{f}_{-\lambda,a}(x),\ dg_{\mu,a}(x)+$$

$$+d\tilde{g}_{-\mu,a}(x)]\rangle=\frac{1}{4}\langle x,[df_{\lambda,a}(x),dg_{\mu,a}(x)]\rangle+$$

$$+\frac{1}{4}\langle x,[df_{\lambda,a}(x),\ d\tilde{g}_{-\mu,a}(x)]\rangle+\frac{1}{4}\langle x,[d\tilde{f}_{-\lambda,a}(x),$$

$$dg_{\mu,a}(x)]\rangle+\frac{1}{4}\langle x,[df_{-\lambda,a}(x),\ dg_{-\mu,a}(x)]\rangle=$$

$$=\frac{1}{4}\{f_{\lambda,a}\, g_{\mu,a}\}(x)+\frac{1}{4}\{f_{\lambda,a},\tilde{g}_{-\mu,a}\}(x)+$$

$$+\frac{1}{4}\{\tilde{f}_{-\lambda,a},g_{\mu,a}\}(x)+\frac{1}{4}\{\tilde{f}_{-\lambda,a},\tilde{g}_{-\mu,a}\}(x)=0 \quad (546)$$

в силу теоремы 3, так как f, g, $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ — инварианты коприсоединенного представления $\mathrm{Ad}^*(T)$ группы Ли T, отвечающей L.

§ 35. Метод построения коммутативных наборов функций по цепочкам подалгебр

1. Определение. Предположим, что H — подалгебра Ли в алгебре Ли G. Имеет место естественная проекция π: $G^*\to H^*$, которая определяется ограничением линейных функционалов, $\pi(h)=h|H$. В этом случае функции, заданные на H^*, можно поднимать на G^*, точнее, если $F\in C^\infty(H^*)$, то определена функция $\pi^*F=F\circ\pi\in C^\infty(G^*)$, которую будем называть *подъемом функции* F на G^*.

2. Лемма (см. [246]). *Если функции f, $g\in C^\infty(H^*)$ находятся в инволюции на всех орбитах представления* Ad^*, *то их подъемы π^*f, π^*g на G^* находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления* Ad^* *группы Ли P, отвечающей алгебре Ли G.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_s$ — базис в H. Дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_n$ в G. Введем следующие обозначения для индексов: $i, \ldots =1, \ldots, s$; $\alpha, \ldots =s+1, \ldots, n$; $a, \ldots =1, \ldots, n$. Эти обозначения сохраним до конца параграфа. В этих обозначениях подъем функции с H^* на G^* не зависит от координат x_α. Инволютивность будем доказывать с помощью леммы 9 § 34. Имеем

$$C_{ab}^c x_c \frac{\partial f}{\partial x_a}\frac{\partial g}{\partial x_b}=C_{\alpha\beta}^c x_c \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g}{\partial x_\beta}+C_{i\alpha}^c x_c \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha}+$$

$$+C_{\alpha i}^c x_c \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g}{\partial x_i}+C_{ij}^c x_c \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}=C_{ij}^c x_c \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}=C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}=0. \quad (547)$$

Мы воспользовались тем, что $\dfrac{\partial g}{\partial x_\beta}=0$, и равенством $C_{ij}^\alpha=0$, которое выполняется в силу того, что $[e_i, e_j]\in H$. Окончательно получаем 0, так как на всех орбитах представления $\mathrm{Ad}^*(Q)$ функции f и g находятся в инволюции (Q отвечает H), т. е.

$$\{f, g\}=C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\equiv 0. \quad (548)$$

3. Лемма (см. [246]). *Предположим, что $G\supset H$, f — инвариант коприсоединенного представления $\mathrm{Ad}^*(P)$, а g — подъем функции с H^*. Тогда f и g находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления группы Ли P, отвечающей алгебре Ли G.*

Доказательство вытекает из равенства

$$C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}=\left(C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\frac{\partial g}{\partial x_j}\equiv 0. \quad (549)$$

4. Лемма (см. [246]). *Пусть H и G — такие алгебры Ли, что $H\subset G'$, где G' — производная алгебра Ли и f — полуинвариант представления $\mathrm{Ad}^*(P)$. Если $\partial g/\partial x_\alpha=0$, то $\{f, g\}\equiv 0$ на всех орбитах коприсоединенного представления $\mathrm{Ad}^*(P)$, P отвечает G.*

Доказательство. Функция f является полуинвариантом тогда и только тогда, когда $C_{ij}^k x_k \dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\lambda_i f$, поэтому

$$C_{bc}^a x_a \frac{\partial f}{\partial x_b}\frac{\partial g}{\partial x_c}=\left(C_{bc}^a x_a \frac{\partial f}{\partial x_b}\right)\frac{\partial g}{\partial x_c}=$$

$$=(X_c f)\frac{\partial g}{\partial x_c}=\lambda_c \frac{\partial g}{\partial x_c} f=\left(\lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_i}+\lambda_\alpha \frac{\partial g}{\partial x_\alpha}\right) f=0, \quad (550)$$

но $\lambda_i=0$, так как характер на производной алгебре — тождественный нуль.

5. Итак, по каждой цепочке подалгебр $G\supset H_1\supset H_2\supset\ldots\supset H_s$ в алгебре Ли G можно строить функции в инволюции на G^*, используя достаточно большой запас функций в инволюции на H_s^*, например полученных с помощью сдвигов инвариантов, и на каждом шаге добавляя инварианты коприсоединенного представления группы Ли Q_i, отвечающей алгебре Ли H_i. Если выполняется условие $G\supset G'\supset H_1\supset H'_1\supset H_2\supset H'_2\supset\ldots\supset H'_{s-1}\supset H_s$, то на каждом шаге можно добавлять полуинварианты. Оказывается, эту конструкцию можно обобщить: на каждом шаге можно добавлять не только полуинварианты, но и функции из некоторых представлений. Точнее, справедлива следующая

6. Лемма. *Пусть K — подалгебра в алгебре Ли G и $V\subset A(G^*)$ — инвариантное относительно* $\mathrm{Ad}^*(P)$ *конечномерное подпространство в пространстве аналитических функций на G^*. Функция $f\in V$, как описано в п. 5 § 34, при выборе базиса в пространстве V определяет ковекторы $C^i_*\in G^*$. Если подъем функции $g\in A(K^*)$ на G^* постоянен вдоль этих ковекторов, то он находится в инволюции с функцией f на всех орбитах коприсоединенного представления группы Ли P, отвечающей алгебре Ли G.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы 2.6.

7. Простейший вариант изложенной конструкции мы получим в том случае, когда $H_s\subset G$ — максимальная абелева подалгебра в $G'\subset G$. В качестве инвариантов абелевой подалгебры H_s можно взять любой ее элемент, рассматриваемый как функция на дуальном пространстве H^*_s. Вообще говоря, инвариантов максимальной абелевой подалгебры не хватает для построения вполне интегрируемых систем, и приходится использовать несколько подалгебр.

8. Лемма. *Предположим, что в алгебре Ли G есть такая цепочка подалгебр $G\supset H_1\supset H_2$, что $G\supset G'\supset H_1\supset H'_1\supset H_2$, $H'_2=0$, $[H_1, H_2]=0$. Тогда любая функция $f\in A(H^*_1)$ и элементы $x\in H_2$, которые рассматриваются как функции на H^*_2, находятся в инволюции на всех орбитах представления* $\mathrm{Ad}^*(P)$, *здесь группа Ли P отвечает алгебре Ли G.*

Доказательство получается применением леммы 9 § 34 с учетом того, что $[H_1, H_2]=0$.

Итог исследования подводит следующая

9. Теорема (В. В. Трофимов [246]). *Пусть дана пара алгебр Ли (K, L), $K\supset L$. Тогда если функции f, g на L^* находятся в инволюции на всех орбитах представления* $\mathrm{Ad}^*(T)$, *где T — группа Ли, отвечающая алгебре Ли L, то подъемы $\tilde f$, $\tilde g$ функций f, g находятся в инволюции на всех орбитах представления* $\mathrm{Ad}^*(S)$, *где S — группа Ли, отвечающая алгебре Ли K, и $\tilde f=f\circ\pi$, $\tilde g=g\circ\pi$, $\pi\colon K^*\to L^*$ — отображение ограничения; если f — инвариант коприсоединенного представления группы Ли S и $\tilde g$ — подъем функции $g\in C^\infty(L^\infty)$, то $\{f, \tilde g\}\equiv 0$ на всех орбитах представления* $\mathrm{Ad}^*(S)$; *если цепочка $K\supset L$ такова, что $K\supset K'\supset L$, f — полуинвариант представления* $\mathrm{Ad}^*(S)$ *и $\tilde g$ — подъем функции $g\in C^\infty(L^*)$, то $\{f, \tilde g\}\equiv 0$ на всех орбитах коприсоединенного представления* $\mathrm{Ad}^*(S)$ *группы Ли S.*

10. Замечание. Методика этого параграфа является обобщением конструкции М. Вернь (см. [513]). В работе [513] для

построения глобальных симплектических координат на орбитах максимальной размерности представления Ad^* в нильпотентной алгебре Ли использовались цепочки идеалов $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$ такие, что $\dim G_i/G_{i-1}=1$ и инварианты представления $\mathrm{Ad}^*(P_i)$ (P_i — группа Ли, отвечающая алгебре Ли G_i), $i=1, \ldots, \dim G$, поднимались с помощью естественной проекции π_i: $G^* \to G_i^*$ на G^*, что давало требуемые координаты.

В заключение приведем два утверждения 11 и 12, в которых операции сдвига аргумента и подъема функций работают одновременно.

11. Лемма. *Пусть $a \in G^*$ — элемент дуального пространства к алгебре Ли G, G^a — аннулятор a, f — инвариант коприсоединенного представления группы Ли, отвечающий алгебре Ли G, а g — гладкая функция на $(G^a)^*$. Тогда функция $f_a(x)=f(x+a)$ и функция g, рассматриваемая как функция на G^*, находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления группы Ли P, отвечающей алгебре Ли G.*

Доказательство. Имеем равенства

$$\{f_a, g\}(x)=\langle x, [df_a(x), dg(x)]\rangle=$$

$$=-\langle a, [df_a(x), dg(x)]\rangle=-\langle \mathrm{ad}^*_{dg(x)}(a), df_a(x)\rangle=0, \quad (551)$$

так как $dg(x) \in G^a$. Лемма доказана.

12. Лемма. *Пусть σ — инволютивный автоморфизм алгебры Ли G и $G=G_0+G_1$, $G^*=G_0^*+G_1^*$ — соответствующие разложения пространств G и G^* на собственные подпространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1. Для $a \in G_1^*$ и инварианта f представления $\mathrm{Ad}^*(P)$ положим $\bar{f}_a(x)=f(x+a)|G_0^*$ — ограничение на G_0^* сдвига инварианта f на элемент a. Если $\tilde{g}$ — подъем функции $g \in C^\infty(G^a)^*$ на G^*, то $\bar{f}_a$ и $\tilde{g}$ находятся в инволюции на G^*, группа P отвечает G.*

Доказательство. Имеем равенства

$$\{\bar{f}_a, g\}(x)=\langle x, [d\bar{f}_a(x), dg(x)]\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\langle x, [df_a(x)+d\tilde{f}_{-a}(x), dg(x)]\rangle=$$

$$=-\frac{1}{2}\langle a, [df_a(x)-d\tilde{f}_{-a}(x), dg(x)]\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\langle(\mathrm{ad}^*_{dg(x)}(a), df_a(x)-d\tilde{f}_{-a}(x)\rangle=0, \quad (552)$$

так как $dg(x) \in G_0^a$. Лемма доказана.

§ 36. Семейства функций в инволюции, связанные с согласованными скобками Пуассона

1. Определение. Две скобки Пуассона на многообразии M называются *согласованными*, если любая их линейная комбинация снова является скобкой Пуассона на M.

В другой терминологии согласованные скобки Пуассона называются *пуассоновыми* или *гамильтоновыми парами*. Согласованные скобки изучались в работах Магри [424], [425].

2. Предложение. *Скобки Пуассона* $\{f, g\}_0$, $\{f, g\}_1$ *согласованы тогда и только тогда, когда выполнено тождество*

$$\{\{f, g\}_0, h\}_1+\{\{f, g\}_1, h\}_0+\{\{g, h\}_0, f\}_1+ \\ +\{\{g, h\}_1, f\}_0+\{\{h, f\}_0, g\}_1+\{\{h, f\}_1, g\}_0=0. \quad (553)$$

3. Обозначения. Пусть на многообразии M заданы две согласованные скобки Пуассона $\{f, g\}_0$ и $\{f, g\}_1$. Обозначим буквой J двумерное линейное семейство скобок вида $\{f, g\}_{\lambda, \mu}=\lambda\{f, g\}_0+\mu\{f, g\}_1$. Отождествим семейство J с соответствующим подпространством в пространстве кососимметрических тензорных полей типа (2, 0). Положим $R=\max\limits_{x\in M,\ C\in J} \operatorname{rk} C(x)$, см. п. 2 § 27.

4. Теорема. а) *Пусть f и g — центральные функции пуассоновых структур $A, B\in J$ соответственно, причем A и B линейно независимы (т. е. непропорциональны). Тогда f и g находятся в инволюции относительно всех скобок из семейства J.*

б) *Пусть f и g — центральные функции пуассоновой структуры $A\in J$, причем ранг тензорного поля A равен R почти всюду на M. Тогда f и g находятся в инволюции относительно всех скобок семейства J.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Действительно, в силу линейной независимости A и B пространство J порождается этими пуассоновыми структурами. Функции f и g находятся в инволюции относительно A и B и, следовательно, относительно их произвольной линейной комбинации.

Пусть $x\in \operatorname{Ker} A$, $y\in \operatorname{Ker} B$, C — произвольная форма из J. Если A и B линейно независимы, то $C=\alpha A+\beta B$. Следовательно, $C(x, y)=\alpha A(x, y)+\beta B(x, y)=0$. Если $B=\lambda A$ и $\operatorname{rk} A=R$, то утверждение следует из соображений непрерывности. Действительно, существует последовательность форм A_i такая, что $A_i\in J$, $A_i\to A$, A_i и B линейно независимы, $\operatorname{rk} A_i=R$ и последовательность векторов $\{x_i\}$ такая, что $x_i\to x$, $x_i\in \operatorname{Ker} A_i$. Тогда

$$C(x, y)=\lim_{n\to\infty} C(x_n, y)=0. \quad (554)$$

5. Замечание. Таким образом, взяв объединение центральных функций всех скобок из семейства J, имеющих почти всюду на M ранг R, мы получим инволютивное семейство относительно всех скобок Пуассона $\{f, g\}\in J$ одновременно. Недостаток этой конструкции состоит в том, что центральные функции могут быть глобально не определены. Поэтому будем рассматривать локальную ситуацию.

Фиксируем точку $x \in M$ такую, что ранг почти всех скобок из семейства J в точке x максимален, т. е. равен R. Рассмотрим семейство функций F_J, состоящее из локальных центральных функций тех скобок Пуассона из J, которые в точке x имеют ранг R. Отметим, что функции из семейства F_J могут иметь разные области определения, при этом пересечение этих областей может состоять из одной точки x. Чтобы избежать такой ситуации, семейство F_J уменьшим, оставив лишь конечное число независимых в точке x функций. Обозначим это семейство по-прежнему F_J. В силу конечности F_J существует окрестность $U(x)$, в которой все функции $f \in F_J$ определены и пуассоновы структуры, отвечающие этим функциям, имеют постоянный ранг R. Из теоремы 4 следует, что построенный набор F_J инволютивен в окрестности $U(x)$.

6. Замечание. Метод сдвига аргумента является частным случаем общей методики построения инволютивных семейств по произвольной паре согласованных скобок Пуассона. В данном случае кроме скобки Березина на пространстве G^*, дуальном к алгебре Ли G, надо рассмотреть еще одну скобку Пуассона $\{f, g\}_a(x) = \langle a, [df(x), dg(x)]\rangle$, где $a \in G^*$ — фиксированный ковектор. Назовем эту скобку *а-скобкой Березина*. Тензорное поле, определяющее скобку $\{f, g\}_a$, постоянно и имеет вид $\Phi_a(X, Y) = \langle a, [X, Y]\rangle$.

7. Лемма. *Скобка Березина и а-скобка Березина образуют гамильтонову пару для любого $a \in G^*$. Функции вида $f_{\lambda, a}(x) = f(x + \lambda a)$, где f — инвариант коприсоединенного представления* Ad^* *группы Ли P, отвечающей алгебре Ли G, являются центральными для линейной комбинации $\{f, g\} + \lambda\{f, g\}_a$.*

§ 37. Сжатия алгебр Ли

1. Операцию сжатия в теории гамильтоновых систем ввел С. П. Новиков в работах, посвященных интегрированию уравнений Эйлера на алгебре Ли $E(3) = \mathrm{so}(3) \oplus \mathbf{R}^3$ группы движений евклидова пространства $\mathbf{R}^3$. Результаты, изложенные в этом параграфе, принадлежат А. В. Браилову [51].

2. Определение. Алгебра Ли G называется *$\mathbf{Z}_2$-градуированной*, если $G = H \oplus V$, причем $[H, H] \subset H$, $[H, V] \subset V$, $[V, V] \subset H$.

Пусть $H^*(V^*)$ — подпространство в G^* всех ковекторов, аннулирующих V (соответственно H). Тогда $G^* = H^* \oplus V^*$. Для любых $x \in G^*$ и $g \in G$ везде ниже x_H и x_V обозначает H^*-компоненту и V^*-компоненту вектора x, g_H и g_V — H-компоненту и V-компоненту вектора $g \in G$. Определим на G новый коммутатор $[x, y]_\lambda$ формулой

$$[g, g']_\lambda = [g_H, g'_H] + [g_V, g'_V] + [g_H, g_V] + \lambda [g_V, g'_V]. \quad (555)$$

Коммутатор $[x, y]_\lambda$ удовлетворяет тождеству Якоби. Полученную алгебру Ли обозначим G_λ.

3. Определение. Пусть G — $\mathbf{Z}_2$-градуированная алгебра. G_λ — построенная выше серия алгебр Ли, соответствующая коммутаторам $[x, y]_\lambda$. *Сжатием* $\mathbf{Z}_2$-градуированной алгебры Ли G называется алгебра Ли G_0.

4. Обозначения. Пусть G — $\mathbf{Z}_2$-градуированная алгебра Ли. Обозначим скобку Пуассона для сжатия G_0 символом $\{x, y\}_0$, а аннулятор элемента x символом $\operatorname{Ann}_0(x)$.

5. Теорема (А. В. Браилов). *Пусть G — полупростая $\mathbf{Z}_2$-градуированная алгебра Ли, G_0 — соответствующее сжатие. Тогда индекс* $\operatorname{ind} G_0$ *алгебры Ли G_0 равен индексу алгебры Ли G (рангу G).*

6. Лемма. *Пусть G — $\mathbf{Z}_2$-градуированная алгебра Ли, $x \in G^*$, $g \in G$, $G = H \oplus V$. Тогда*

$$(\operatorname{ad}_g^* x)_0 = \operatorname{ad}_{g_H}^* x_H + \operatorname{ad}_{g_V}^* x_V + \operatorname{ad}_{g_H}^* x_V. \tag{556}$$

Доказательство. Если $g' \in G$, то

$$\begin{aligned}
&\langle (\operatorname{ad}_g^* x)_\lambda, g' \rangle = \langle x, [g, g']_\lambda \rangle = \\
&\quad = \langle x, [g_H, g'_H] + [g_V, g'_H] + [g_H, g'_V] + \lambda [g_V, g'_V] \rangle = \\
&= \langle x_H, [g_H, g'_H] \rangle + \langle x_V, [g_V, g'_H] + [g_H, g'_V] \rangle + \lambda \langle x_H, [g_V, g'_V] \rangle = \\
&\quad = \langle \operatorname{ad}_{g_H}^* x_H + \operatorname{ad}_{g_V}^* x_V + \operatorname{ad}_{g_H}^* x_V + \lambda \operatorname{ad}_{g_V}^* x_H, g' \rangle.
\end{aligned} \tag{557}$$

Полагая здесь $\lambda = 0$, мы получим (556).

7. Обозначения. Пусть G — полупростая алгебра Ли, $B(X, Y)$ — форма Киллинга G, $g \in G$. Двойственный ковектор g^* к вектору g относительно B определяется равенством $g^*(X) = B(X, g)$, $X \in G$.

8. Определение. Если $g \in G_\lambda$, то $g^* \in G_\lambda^*$ определяется формулой $g^*(u) = B(g, u)$, $u \in G_\lambda$, где форма $B(X, Y)$ на G_λ та же, что и на G (напомним, что G и G_λ, рассматриваемые как векторные пространства, совпадают). Если $W \subset G$ — подпространство, то $W^* = \{g^* \mid g \in W\}$.

9. Теорема. *В G можно выбрать подалгебру Картана J так, что будут выполнены следующие условия:* а) $J = J_H \oplus J_V$, *где* $J_H = J \cap H$, $J_V = J \cap V$; б) *если $g \in V$ и $[g, J_V] = 0$, то $g \in J_V$*; в) *J_H — подалгебра Картана в K, где K — централизатор J_V в H*; г) *J_V — редуктивная подалгебра в G.*

Доказательство см. в [88].

10. Лемма. *Пусть G — полупростая алгебра Ли, J — подалгебра Картана в G такая, что выполнены условия* а) — г), *$J^* \subset G^*$ — двойственное к J в смысле определения* 8 *подпространство в G_0^*. Тогда для $x \in J^*$ общего положения имеет место равенство* $\operatorname{Ann}_0(x) = J$.

Доказательство. Пусть $x=x_H+x_V$, $x_H\in H^*$, $x_V\in V^*$ и $u\in\in\mathrm{Ann}_0(x)$, $u=u_H+u_V$, $u_H\in H$, $u_V\in V$. Из (556) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\mathrm{ad}^*_{u_H}x_H+\mathrm{ad}^*_{u_V}x_V=0,\\&\mathrm{ad}^*_{u_H}x_V=0.\end{aligned}\tag{558}$$

По определению $x=g^*$ для некоторого $g\in J$, $g=g_H+g_V$, $g_H\in H$, $g_V\in V$. Поскольку H ортогональна V, то $g^*_H=x_H$, $g^*_V=x_V$. Поэтому равенства (558) запишутся так:

$$\begin{aligned}[g_H, u_H]+[g_V, u_V]&=0,\\ [g_V, u_H]&=0.\end{aligned}\tag{559}$$

Для элемента g_V общего положения из второго равенства (559) вытекает, что $u_H\in K$, так как $g_H\in J_H\subset K$, то и $[g_H, u_H]\in K$. Поэтому если коммутировать первое равенство (559) с g_V, то получим

$$[g_V, [g_V, u_V]]=0;\tag{560}$$

так как J_V редуктивна в G, то из (560) вытекает, что $[g_V, u_V]=0$. Из этого равенства и первого равенства (559) получаем $[g_H, u_H]=0$. Отсюда для g_H и g_V общего положения (используя $[g_V, u_V]=0$) получим, что $u_V\in J_V$, $u_H\in J_H$. Окончательно $u\in J$. Итак, мы доказали, что $\mathrm{Ann}_0(x)\subset J$. Обратное включение легко получить из формул (559).

11. Лемма. *Если G — произвольная $\mathbf{Z}_2$-градуированная алгебра Ли, G_0 — ее сжатие, то* $\mathrm{ind}\,G\leqslant\mathrm{ind}\,G_0$.

Доказательство. Пусть G_λ — семейство алгебр Ли, введенное при определении сжатия, см. п. 2. Соответствие $\varphi(g_H+g_V)=g_H+\sqrt{\frac{\lambda''}{\lambda'}}\,g_V$ является изоморфизмом $\varphi\colon G_{\lambda''}\to G_{\lambda'}$ при $\lambda', \lambda''\neq 0$. Поэтому $\mathrm{ind}\,G_\lambda=\mathrm{const}(\lambda)$ при $\lambda\neq 0$. Докажем, что при $\lambda\neq 0$ индекс может только увеличиться. Действительно, индекс равен корангу матрицы $\|C^k_{ij}(\lambda)x_k\|$, где $C^k_{ij}(\lambda)$ — структурный тензор алгебры Ли G_λ, а x_k — координаты ковектора общего положения. При малом изменении λ ранг матрицы $\|C^k_{ij}(\lambda)x_k\|$ может только увеличиться, поэтому индекс алгебры Ли G_λ может только уменьшиться, значит, при $\lambda\neq 0$ имеет место неравенство $\mathrm{ind}\,G_0\geqslant\mathrm{ind}\,G_\lambda$.

12. Доказательство теоремы 5. Из леммы 10 получаем

$$\mathrm{ind}\,G_0\leqslant\dim\mathrm{Ann}(t^*)=\dim J=\mathrm{rk}\,G=\mathrm{ind}\,G,\tag{561}$$

где $t\in J$ — элемент общего положения в картановской подалгебре J. С другой стороны, из леммы 11 следует, что $\mathrm{ind}\,G_0\geqslant\mathrm{ind}\,G_1=\mathrm{ind}\,G$, значит, $\mathrm{ind}\,G_0=\mathrm{ind}\,G$. Теорема 5 полностью доказана.

13. Замечание. Пусть $G=H\oplus V$ — $\mathbf{Z}_2$-градуированная алгебра Ли. Подобно тому как мы выше определили сжатие коммутатора $[x, y]\to[x, y]_0$, для некоторых функций F на G^* можно определить нечто вроде сжатия.

14. Определение. Предположим, что разложение по степеням V для функции F обрывается на некотором члене, т. е. оно имеет вид $F^0(x_H)+F^1(x_H, x_V)+\ldots+F^n(x_H, x_V)$ и $F^k(x_H, x_V)$ при фиксированном x_H является k-формой от x_V. Положим в этом случае $F_\lambda(x)=\lambda^{\frac{n}{2}}F(x_H, \lambda^{-1/2}x_V)$. Заметим, что $F_\lambda(x)$ определено и при $\lambda=0$: $F_0(x)=F_n(x_H, x_V)$.

15. Предложение. *Пусть $G=H\oplus V$ — Z_2-градуированная алгебра Ли, F, F' — функции на G^* такие, что*: а) $\{F, F'\}=0$; б) *определены F_λ и F'_λ (см. п.* 14, *например, F и F' — полиномы). Тогда $\{F_\lambda, F'_\lambda\}=0$, в частности, $\{F^n, F'^m\}_0=0$, где F^n, F'^m — максимальные компоненты при разложении на однородные составляющие по V.*

Доказательство. Соответствие $g_H+g_V\to g_H+\lambda^{-1/2}g_V$ является гомоморфизмом алгебр Ли $G\to G_\lambda$ при $\lambda\neq0$. При этом гомоморфизме функция F переходит в $\lambda^{-n/2}F_\lambda$, поэтому $\{F_\lambda, F'_\lambda\}_\lambda=0$ при $\lambda\neq0$. Это равенство верно и при $\lambda=0$, так как коммутатор и функции непрерывно зависят от λ.

16. Замечание. Предложение 15 можно использовать для построения инволютивных наборов функций на G_0^*. Покажем, как это утверждение можно применить к нахождению инвариантов сжатой алгебры Ли G_0.

17. Предложение. *Пусть $G=H\oplus V$ — $\mathbf{Z}_2$-градуированная алгебра Ли, F — полином на G^*, инвариантный относительно коприсоединенного представления, F_0 — сжатие F (см. определение* 14), *а G_0 — сжатие G. Тогда F — инвариант коприсоединенного представления G.*

Доказательство. Пусть $u\in G_0$. Тогда u можно рассматривать как линейную функцию на G_0^*. Очевидно, что при этом сжатие $u-u_0$ будет равно u_V, если $u_V\neq0$, и u_H в противном случае. Тот факт, что F — G-инвариант, может быть записан в виде равенств

$$\{F, u_H\}\equiv0,\quad \{F, u_V\}\equiv0, \tag{562}$$

$u_H\in H$, $u_V\in V$. Из сделанного выше замечания вытекает, что $\{F_0, u_H\}\equiv0$, $\{F_0, u_V\}_0\equiv0$. Оба этих тождества в совокупности и означают, что сжатие F_0 является G_0-инвариантом.

18. Пример. Алгебра Ли $\mathrm{so}(4)$ задается соотношениями $[e_{ij}, e_{jk}]=e_{ik}$, индексы i, j, k пробегают значения от 1 до 4, $e_{ij}=-e_{ji}$. Подалгебра $H=\mathrm{so}(3)$ натянута на векторы e_{12}, e_{13}, e_{23}, V — линейная оболочка векторов e_{14}, e_{24}, e_{34}. Нетрудно проверить, что разложение $\mathrm{so}(4)=H\oplus V$ является $\mathbf{Z}_2$-градуировкой на $\mathrm{so}(4)$, а соответствующее сжатие $\mathrm{so}(4)_0$ —

это полупрямая сумма $\mathrm{so}(3)\oplus\mathbf{R}^3$, или, другими словами, алгебра Ли группы движений евклидова пространства $\mathbf{R}^3$. Инвариантами коприсоединенного представления для $\mathrm{so}(4)$, как известно, являются функции $F=\sum_{i,j=1}^{4} x_{ij}^2$ и $F'=x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{23}x_{14}$. Сжимая F и F', получаем инварианты коприсоединенного представления для алгебры Ли $\mathrm{so}(3)\otimes\mathbf{R}^3$: $F_0=x_{14}^2+x_{24}^2+x_{34}^2$ и $F'_0=F'$.

§ 38. Метод тензорных расширений алгебр Ли

1. Замечание. Этот метод был впервые предложен В. В. Трофимовым в [250], [251], [253], а затем развит А. В. Браиловым в [47] и Ле Нгок Тьеуеном в [151]. Пусть A — коммутативная ассоциативная (конечномерная) алгебра с единицей. *Тензорное произведение* $G\otimes A$ алгебры Ли G и A является алгеброй Ли относительно коммутатора $[g\otimes a, h\otimes b]=[g, h]\otimes ab$, $g, h\in G$, $a, b\in A$. Вопрос, который здесь возникает, состоит в том, чтобы, зная полное инволютивное семейство функций на пространстве G^*, построить полное инволютивное семейство функций на пространстве $(G\otimes A)^*$. Впервые эта задача изучалась в работах В. В. Трофимова [250], [251], [253] для алгебр $A=\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{m_1+1}, \ldots, x_n^{m_n+1})$, где $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо полиномиальных функций переменных $x_1, \ldots, x_n$, а $(x_1^{m_1+1}, \ldots, x_n^{m_n+1})$ — идеал, натянутый на $x_1^{m_1+1}, \ldots, x_n^{m_n+1}$. Затем эта задача рассматривалась А. В. Браиловым для алгебр с двойственностью Пуанкаре.

2. Конструкция. Рассмотрим случай кольца $A=\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{m_1+1}, \ldots, x_n^{m_n+1})$. Пусть ε_i обозначает образ элемента x_i в кольце A при естественном отображении π: $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]\to A$, т. е. $\varepsilon_i=\pi(x_i)$, а $e_1, \ldots, e_r$ — базис алгебры Ли G. Тогда векторы $\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}e_j$, $0\leqslant j\leqslant r$, $0\leqslant\alpha_i\leqslant m_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, образуют базис алгебры Ли $G\otimes A$. Дуальный базис в G^* обозначим e^i, он определяется из соотношения $\langle e^i, e_j\rangle=\delta_j^i$, где $\langle f, x\rangle$ — значение $f\in G^*$ на векторе $x\in G^*$. Координаты в пространстве $G\otimes A$ в базисе, дуальном к $\varepsilon_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_n^{\alpha_n}e_j$, $1\leqslant j\leqslant r$, $0\leqslant\alpha_i\leqslant m_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, обозначим $x(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_j$, а координаты в G^* в базисе, дуальном к e_i. Обозначим x_i, $1\leqslant i\leqslant r$. Введем в пространстве $G\otimes A$ новые переменные

$$z_i=\sum_{\substack{\alpha_j+\beta_j=m_j\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}x(\beta_1, \ldots, \beta_n)_i. \qquad (563)$$

3. Алгоритм (t) В. В. Трофимова. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — аналитическая функция на пространстве G^* (или на открытом подмножестве в G^*) со значениями в $\mathbf{R}$. Раскладывая $F(x_1, \ldots, x_n)$ в ряд Тейлора и подставляя вместо x_i выражения для z_i из (563), мы получим конечную сумму, так как достаточно высокие степени элементов ε_i равны нулю. Итак, $F(z_1, \ldots, z_r)$ — корректно определенная функция на пространстве $(G\otimes A)^*$ со значениями в кольце A; ее можно представить в виде

$$F(z_1, \ldots, z_r)=\sum_{\substack{0\leqslant\alpha_j\leqslant m_j\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n} F_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x(\beta_1, \ldots, \beta_n)_i), \tag{564}$$

поскольку $\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}$ — базис алгебры $A=\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{m_1+1}, \ldots, x_n^{m_n+1})$, здесь $F_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x(\beta_1, \ldots, \beta_n)_i)\in\mathbf{R}$. Алгоритм (t) по определению будет переводить функцию F на пространстве G^* в набор функций $F_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, т. е. $(t)(F)=\{F_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\}$.

4. Теорема (В. В. Трофимов, [251], [253]). *Пусть функции $F_1(x), \ldots, F_N(x)$, определенные на пространстве G^*, находятся в инволюции относительно формы Кириллова на всех орбитах коприсоединенного представления группы Ли P, ассоциированной с алгеброй Ли G. Тогда все функции $(t)(F_1)\cup\ldots\cup(t)(F_N)$ на выходе алгоритма (t) находятся в инволюции относительно формы Кириллова на всех орбитах коприсоединенного представления группы Ли $P\otimes A$, ассоциированной с алгеброй Ли $G\otimes A$. При этом, если $F_1, \ldots, F_N$ функционально независимы на пространстве G^*, то все функции семейства $(t)(F_1)\cup\ldots\cup(t)(F_N)$ функционально независимы на пространстве $(G\otimes A)^*$. Если $F_1, \ldots, F_N$ — полный набор, то $(t)(F_1)\cup\ldots\cup(t)(F_N)$ — также полный набор функций.*

Доказательство этой теоремы будет дано в несколько более общей ситуации, см. п. 27.

5. Примеры. В работе Такифа [501] построены инварианты алгебры $\Omega_1(G)=G\otimes\mathbf{R}[x]/(x^2)$. Рассмотрим следующее кольцо $A=\mathbf{R}[x]/(x^3)$. В пространстве $\Omega_2(G)=G\otimes A$ имеем координаты $x(0)_i$, $x(1)_i$, $x(2)_i$ и переменные $z_i=x(0)_i\varepsilon^2+x(1)_i\varepsilon+x(2)_i$ (здесь $\varepsilon^3=0$). Воспользовавшись формулой Тейлора, получим $F(z_1, \ldots, z_r)=F_0(z)+F_1(z)\varepsilon+F_2(z)\varepsilon^2$, где

$$F_0(z)=F(x(2)_i); \tag{565}$$

$$F_1(z)=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial F(x(2)_i)}{\partial x(2)_i}x(1)_i; \tag{566}$$

$$F_2(z)=\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{r}\frac{\partial^2 F(x(2)_i)}{\partial x(2)_p\,\partial x(2)_q}x(1)_p x(1)_q+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial F(x(2)_i)}{\partial x(2)_k}x(0)_k \tag{567}$$

(рис. 38).

Рассмотрим алгебру Ли, отвечающую кольцу $A=\mathbf{R}[x_1, x_2]/(x_1^2, x_2^2)$. Тогда $\Omega_{1,1}(G)=G\otimes A=G+G\varepsilon_1+G\varepsilon_2+G\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1^2=$

$=\varepsilon_2^2=0$. Координаты в $\Omega_{1,1}(G)^*$ мы обозначили $x(0, 0)_i$, $x(1, 0)_i$, $x(0, 1)_i$, $x(1, 1)_i$ в соответствии с написанным разложением $\Omega_{1,1}(G)$ в прямую сумму линейных пространств. Имеем

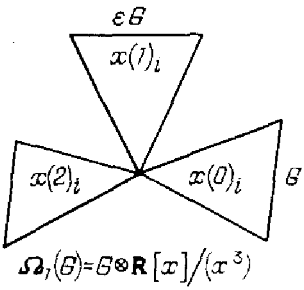


Рис. 38

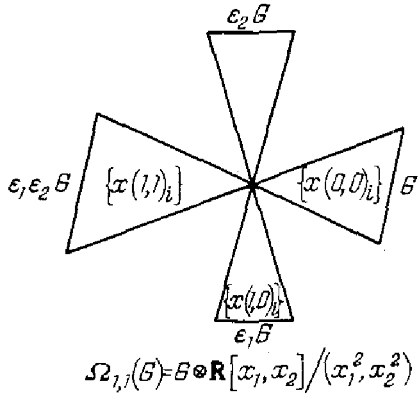


Рис. 39

переменные $z_i=\varepsilon_1\varepsilon_2\,x(0, 0)_i+\varepsilon_1\,x(0, 1)_i+\varepsilon_2\,x(1, 0)_i+x(1, 1)_i$, и снова по формуле Тейлора $F(z_1, \ldots, z_r)=F_{0,0}+\varepsilon_1 F_{1,0}+$ $+\varepsilon_2 F_{0,1}+\varepsilon_1\varepsilon_2 F_{1,1}$, где

$$F_{0,0}(z)=F(x(1, 1)_i); \tag{568}$$

$$F_{1,0}(z)=\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial F(x(1, 1)_i)}{\partial x(1, 1)_k}x(0, 1)_k; \tag{569}$$

$$F_{0,1}(z)=\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial F(x(1, 1)_i)}{\partial x(1, 1)_k}x(1, 0)_k; \tag{570}$$

$$F_{1,1}(z)=\sum_{p,q=1}^{r}\frac{\partial^2 F(x(1, 1)_i)}{\partial x(1, 1)_p\,\partial x(1, 1)_q}x(1, 0)_p\,x(0, 1)_q+$$
$$+\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial F(x(1, 1)_i)}{\partial x(1, 1)_k}x(0, 0)_k \tag{571}$$

(рис. 39).

6. Определение. Пусть A — градуированная коммутативная алгебра, т. е. $A=A_0\oplus\ldots\oplus A_n$ и $A_iA_j\subset A_{i+j}$, $i+j\leqslant n$. Предположим, что $\dim A_n=1$. Пусть Ω — линейный функционал на A, равный тождественно нулю на A_i при $i\leqslant n-1$ и не равный нулю на A_n. Пусть $\beta(a, b)=\Omega(ab)$ — симметричная билинейная форма на A. Если β — невырожденная форма, то алгебра A называется *алгеброй с двойственностью Пуанкаре*.

7. Конструкция. Легко видеть, что для алгебр с двойственностью Пуанкаре имеем $A_0=\mathbf{R}$. Пусть $\varepsilon_1=1$. Выберем произвольный базис $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{j_1}$ в A_1, затем выберем произвольный базис $\varepsilon_{j_1+1}, \ldots, \varepsilon_{j_2}$ в A_2 и так далее до градуировки $n/2$.

В $A_{n/2}$ выберем базис, в котором матрица формы β диагональна. В пространствах A_i, $i>n/2$, выберем базисы, сопряженные относительно β к уже выбранным в $A_{n/2-i}$. В итоге получим $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ — однородный самосопряженный относительно β базис алгебры A, $\beta(\varepsilon_{*i}, \varepsilon_j)=\delta_{ij}$, где $*$ — перестановка.

8. Обозначения. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис в G^*, $x_1, \ldots, x_m$ — соответствующие координаты. Линейные функции на G^* естественно рассматривать как элементы алгебры Ли G. Напротив, элементы $x_i \otimes \varepsilon_j$ алгебры Ли $G_A = G \otimes A$, рассматриваемой как алгебра Ли над $\mathbf{R}$, можно рассматривать как линейные координатные функции на G_A^*. Пусть $x_i^j = x_i \otimes \varepsilon_j$ — координаты на G_A^*.

9. Алгоритм (*b*) А. В. Браилова. Для полиномиальной функции $P(x)$ на G^*, имеющей вид

$$P(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i_1, \ldots, i_k)} P_{i_1 \ldots i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k} = P_I x_I, \tag{572}$$

определим функции $P^{(j)}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, на пространстве G_A^* формулой

$$P^{(j)}(x_1^1, \ldots, x_m^N) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{(i_1, \ldots, i_k) \\ (j_1 \ldots j_k)}} P_{i_1 \ldots i_k} (\varepsilon_j, \varepsilon_{j_1} \ldots \varepsilon_{j_k}) x_{i_1}^{*j_1} \ldots x_{i_k}^{*j_k} = P_I(\varepsilon_j, \varepsilon_J) x_I^{*J}, \tag{573}$$

здесь $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j_1} \ldots \varepsilon_{j_k})$ — проекция элемента $\varepsilon_{j_1} \ldots \varepsilon_{j_k}$ на базисный вектор ε_j. Пусть F — набор полиномиальных функций на G^*. Алгоритм (*b*) переводит семейство F в семейство $(b)(F) = F^A = \{P^{(j)} \mid P \in F, 1 \leqslant j \leqslant N\}$.

10. Теорема (А. В. Браилов, [47]). 1) *Если F — инволютивный набор на G^*, то F^A — инволютивный набор на $G_A^* = (G \otimes A)^*$.* 2) *Если F — полный инволютивный набор и число независимых полиномиальных инвариантов алгебры Ли G равно ее индексу, то F^A — полный инволютивный набор на $G_A^* = (G \otimes A)^*$.* 3) *Если набор F содержит невырожденную квадратичную форму, то набор F^A также содержит невырожденную квадратичную форму.*

11. Обозначение. Звездочкой обозначим также линейный оператор $*\varepsilon_i = \varepsilon_{*i}$, $*^2 = \mathrm{id}$. Пусть (X, Y) — скалярное произведение в алгебре A, соответствующее базису $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$. Легко проверить, что для любых элементов $a, b \in A$ выполнено равенство $(*a, b) = (\varepsilon_N, ab)$.

Пусть $\Delta \in A \otimes A$, где $\Delta = \sum_{i=1}^{N} (*\varepsilon_i) \otimes \varepsilon_i$. Элемент Δ есть точный аналог *диагонального когомологического класса*, см. [181].

12. Лемма. *Имеет место равенство* $(*a, bc)=(*b, ac)$ *для любых элементов* $a, b, c\in A$.

Доказательство очевидно.

13. Лемма. *Имеет место равенство* $\Delta(1\otimes a)=\Delta(a\otimes 1)$ *для любого элемента* $a\in A$.

Доказательство вытекает из равенств

$$\Delta(1\otimes a)=*\varepsilon_i\otimes\varepsilon_i a=(*\varepsilon_j, \varepsilon_i a)*\varepsilon_i\otimes *\varepsilon_j= \\ =(*\varepsilon_i, \varepsilon_j a)*\varepsilon_i\otimes *\varepsilon_j=\varepsilon_j a\otimes *\varepsilon_j=\Delta(a\otimes 1). \quad (574)$$

14. Определение. Для многочлена $P\in\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ определим $\tilde{P}\in A[x_1, \ldots, x_m]$ равенством $\tilde{P}(x)=P_I\varepsilon_J x_I^{*J}$, где мультииндексные обозначения понятны из формул (572), (573). Роль полиномов, обозначенных буквой с тильдой, объясняет

15. Лемма. *Имеет место равенство*

$$\{P^{(i)}, Q^{(j)}\}=(\varepsilon_i\otimes\varepsilon_j, \Delta\widetilde{\{P, Q\}}\otimes 1), \qquad P, Q\in C^\infty(G^*). \quad (575)$$

Доказательство. Поскольку

$$\{P^{(i)}, Q^{(j)}\}(x)=\left(\varepsilon_i\otimes\varepsilon_j, \frac{\partial\tilde{P}(x)}{\partial x_r^s}\otimes\frac{\partial\tilde{Q}(x)}{\partial x_q^p}\{x_r^s, x_q^p\}\right), \quad (576)$$

то достаточно показать, что

$$\frac{\partial\tilde{P}(x)}{\partial x_r^s}\otimes\frac{\partial\tilde{Q}(x)}{\partial x_q^p}\{x_r^s, x_q^p\}=\Delta\cdot\widetilde{\{P, Q\}}(x)\otimes 1. \quad (577)$$

Левую часть (577) обозначим $\{P, Q\}^\otimes$. Введенная таким образом операция $\{P, Q\}^\otimes$ билинейна и при фиксации одного из аргументов становится дифференцированием второго. Это означает следующее:

$$\{P_1P_2, Q\}^\otimes=\tilde{P}_1\otimes 1\cdot\{P_2, Q\}^\otimes+\tilde{P}_2\otimes 1\cdot\{P_1, Q\}^\otimes, \quad (578)$$

$$\{P, Q_1Q_2\}^\otimes=1\otimes\tilde{Q}_1\cdot\{P, Q_2\}^\otimes+1\otimes\tilde{Q}_2\cdot\{P, Q_1\}^\otimes. \quad (579)$$

Левая часть (577) также обладает аналогичными свойствами:

$$\Delta\cdot\{P_1P_2, Q\}^\sim\otimes 1= \\ =\tilde{P}_1\otimes 1\cdot(\Delta\cdot\widetilde{\{P_2, Q\}}\otimes 1)+\tilde{P}_2\otimes 1\cdot(\Delta\cdot\widetilde{\{P_1, Q\}}\otimes 1), \quad (580)$$

$$\Delta\cdot\{P, Q_1Q_2\}^\sim\otimes 1= \\ =1\otimes\tilde{Q}_1\cdot(\Delta\widetilde{\{P, Q_2\}}\otimes 1)+1\otimes\tilde{Q}_2\cdot(\Delta\cdot\widetilde{\{P, Q_1\}}\otimes 1). \quad (581)$$

Свойство (580) вытекает из мультипликативности операции $P\to\tilde{P}$ и свойств стандартной скобки $\{f, g\}$. Свойство (581) получается из леммы 13. Сопоставляя равенства (578), (579) и (580), (581), видим, что равенство (577) достаточно доказать для линейных P и Q. Имеем равенства

$$\{x_r, x_q\}^{\otimes} = *\varepsilon_s \otimes *\varepsilon_p \{x_r^s, x_q^p\} =$$
$$= (\varepsilon_k, \varepsilon_s \cdot \varepsilon_p) *\varepsilon_s \otimes *\varepsilon_p C_{rq}^t x_t^k = (*\varepsilon_k, \varepsilon_s \cdot \varepsilon_p) *\varepsilon_s \otimes *\varepsilon_p C_{rq}^t x_t^{*k} =$$
$$= (*\varepsilon_s, \varepsilon_k \cdot \varepsilon_p) *\varepsilon_s \otimes *\varepsilon_p C_{rq}^t x_t^{*k} =$$
$$= \varepsilon_k \varepsilon_p \otimes *\varepsilon_p C_{rq}^t x_t^{*k} = \Delta \cdot \varepsilon_k \otimes 1 \cdot C_{rq}^t x_t^{*k} = \Delta \cdot \widetilde{\{x_r, x_q\}} \otimes 1. \quad (582)$$

16. Лемма. *Пусть* $P_1, \ldots, P_r \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_m]$ — *полиномы, независимые в точке* $y \in C^*$, *где* $y = (y_1, \ldots, y_m)$. *Тогда полиномы* $P_1^{(1)}, \ldots, P_r^{(N)}$ *независимы в любой точке* $x \in G_A^*$, *у которой старшие координаты* $x_i^N = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Доказательство. Предположим для определенности, что полиномы $P_1, \ldots, P_r$ независимы по первым r координатам, т. е. $\det \| \partial P_j(y)/\partial x_i \| \neq 0$. Рассмотрим матрицы $M_{sq}(x)$:

$$(M_{sq}(x))_{ij} = \frac{\partial P_j^{(q)}(x)}{\partial x_i^{*s}}, \quad (583)$$

где $1 \leqslant s$, $q \leqslant N$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant r$. Если $s > q$, то $(\varepsilon_q, a \cdot \varepsilon_s) = 0$. Поэтому, если $(\varepsilon_q, \varepsilon_I) \neq 0$, то $\partial x_I^{*J}/\partial x_i^{*s} = 0$. Значит, при $s > q$ матрица $M_{sq}(x)$ состоит из нулей. При $s = q$ имеем

$$\frac{\partial P_j^{(q)}(x)}{\partial x_i^{*s}} = (\varepsilon_q, \varepsilon_J) P_I \frac{\partial x_I^{*J}}{\partial x_i^{*s}} = \sum_{I,t} P_{j,I} x_{i_1}^{*1} \ldots x_{i_t}^{*1} \frac{\partial x_{i_t}^{*s}}{\partial x_i^{*s}} x_{i_{t+1}}^{*1} \ldots x_{i_m}^{*1} = \frac{\partial P_j(y)}{\partial y_i}. \quad (584)$$

Рассмотрим матрицу $M_{sqij}(x)$, составленную из матриц $M_{sq}(x)$, эта матрица является блочно треугольной, причем на диагонали стоят невырожденные матрицы $\partial P_j(y)/\partial y_i$, поэтому она не вырождена и, значит, полиномы $P_1^{(1)}, \ldots, P_r^{(N)}$ независимы в точке x.

17. Теорема (А. В. Браилов). *Пусть* $P_1, \ldots, P_r$ — *набор независимых инвариантов коприсоединенного представления группы Ли* P, *ассоциированной с алгеброй Ли* G, *и ее индекс равен* r. *Тогда*: а) $\operatorname{ind} G_A = \dim A \operatorname{ind} G$; б) $P_1^{(1)}, \ldots, P_r^{(N)}$ — *полный набор независимых инвариантов коприсоединенного представления группы Ли* P, *ассоциированной с алгеброй Ли* G.

Доказательство. Пусть $P(x)$ — инвариант. Это эквивалентно тому, что $\{P, x_s\} \equiv 0$, $1 \leqslant s \leqslant m$. Из леммы 15 получаем

$$\{P^{(i)}, x_s^{*j}\} = \{P^{(i)}, x_s^{(j)}\} = (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j, \Delta \cdot \widetilde{\{P, x_s\}} \otimes 1) = 0, \quad (585)$$

значит, $P^{(i)}$ — инварианты алгебры Ли $G_A = G \otimes A$. Если $P_1, \ldots, P_r$ независимы, то из леммы 16 следует независимость

rN штук инвариантов $P_1^{(1)}, \ldots, P_r^{(N)}$ алгебры Ли $G_A = G \otimes A$, значит, $\operatorname{ind} G_A \geqslant rN$. Обратное неравенство получается следующим образом. Пусть $L_{sq}(x)$ — квадратная матрица $(L_{sq}(x))_{ij} = \{x_i^s, x_j^{*q}\}(x)$. Если $s > q$, то $L_{sq}(x) = 0$. Если $s = q$, то $(L_{sq}(x))_{ij} = x_k^N C_{ij}^k$. Если $y \in G^*$ $(y_i = x_i^N,\ i = 1, \ldots, m)$ — регулярная точка, то ранг матрицы $b_{ij} = x_k^N C_{ij}^k$ равен $m - \operatorname{ind} G$. Отсюда $\operatorname{ind} G_A \leqslant mN - \operatorname{rk} L_{sq}(x) = mN - (m - \operatorname{ind} G) N = rN$.

18. Доказательство теоремы 10. 1) Инволютивность семейства F^A вытекает из леммы 15.

2) Пусть $P_1, \ldots, P_k \in F$ независимы и образуют полный коммутативный набор. В этом случае $k = 2^{-1}(m + r)$, $r = \operatorname{ind} G$. Из леммы 16 вытекает независимость kN штук находящихся в инволюции полиномов $P_1^{(1)}, \ldots, P_k^{(N)}$. Для полноты этого набора достаточно, чтобы $kN = 2^{-1}(\dim G_A + \operatorname{ind} G_A)$, что вытекает из теоремы 17: $2^{-1}(\dim G_A + \operatorname{ind} G_A) = 2^{-1}(mN + rN) = kN$.

3) Пусть $Q \in F$ — невырожденная квадратичная форма, можно считать, что $Q(x) = q_i (x_i)^2$, $q_i \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $Q^N(x) = q_i x_i^j x_i^{*j}$ — также невырожденная квадратичная форма. Нетрудно видеть, что в вещественном случае эта форма всегда индефинитна. Теорема доказана.

19. Замечание. Алгоритмы (t) (см. п. 3) и (b) (см. п. 9) имеют разные области определения (рис. 40), где условно изображены области действия этих алгоритмов.

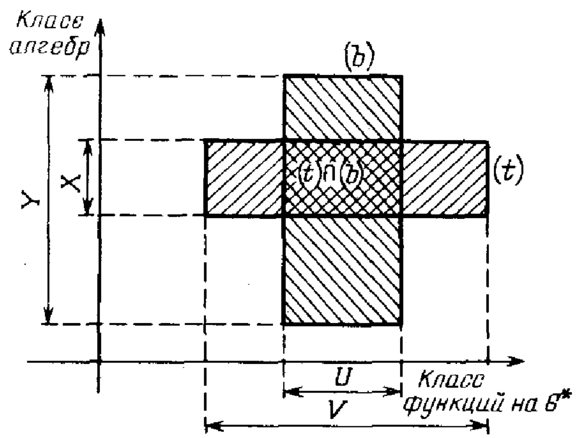


Рис. 40. $X = \{R[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^{m_1+1}, \ldots, x_n^{m_n+1})\}$, $Y = \{$алгебры с двойственностью Пуанкаре$\}$, U — многочлены на G^*, V — аналитические функции на областях в G^*

20. Теорема (В. В. Трофимов, см. [256]). *Пусть $(h_1, \ldots, h_p;\ W)$ является S-представлением группы Ли P. Тогда утверждается, что $((t)(h_1), \ldots, (t)(h_p);\ (t)(W))$ является S-представлением группы Ли P, ассоциированной с алгеброй Ли G.*

21. Предложение. *Пусть $F \in C^\infty(G^*)$. Тогда имеем*

$$X(\varepsilon_1^{\alpha_1} \ldots \varepsilon_n^{\alpha_n} e_i) F_{\beta_1 \ldots \beta_n} = (X(e_i) F)_{\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_n - \alpha_n}, \tag{586}$$

где $F_{\beta_1,\ldots,\beta_n}\in(t)(F)$.

Доказательство. Непосредственно из определения коммутатора в $G\otimes A$ следует, что

$$X\left(\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}e_i\right)=$$
$$=\sum_{\substack{0\leqslant\alpha_p+\beta_p\leqslant m_p\\ 1\leqslant p\leqslant n}} C_{ij}^k x\left(\alpha_1+\beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n+\beta_n\right)_k\frac{\partial}{\partial x(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)_j},\quad (587)$$

где C_{ij}^k — структурный тензор алгебры Ли G в базисе e_i. Из этого соотношения легко получить, что $X(\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}e_i)F(z_1,\ \ldots$ $\ldots,\ z_r)=\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}(X(e_i)F)(z_1,\ \ldots,\ z_r)$, где $X(e_i)$ — оператор в $C^\infty(G^*)$, отвечающий базисному вектору $e_i\in G$, и вместо z_i подставлено его выражение (563). Применяя к функции $F(z_1,\ \ldots,\ z_r)=$ $=\sum\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}F_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)_i)$ оператор $X(\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}e_i)$ и воспользовавшись соотношением $X(\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}e_i)F=\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}(X(e_i)F)$, мы очевидно, получим наше утверждение.

22. Следствие. *Если W — инвариантное подпространство в $C^\infty(G^*)$ относительно Ad_P^*, то $(t)(W)=\{(t)(b)\,|\,b\in W\}$ — инвариантное подпространство относительно $\mathrm{Ad}_{P\otimes A}^*$, здесь $P\otimes A$ отвечает алгебре Ли $G\otimes A$.*

23. Предложение. *Если W — конечномерное инвариантное подпространство в $C^\infty(G^*)$, то $(t)(W)$ — конечномерное инвариантное подпространство в $C^\infty((G\otimes A)^*)$.*

Доказательство. Докажем, что если $f_1,\ \ldots,f_s$ — базис пространства W, то $(t)(f_1)\cup\ldots\cup(t)(f_s)$ — базис в $(t)(W)$. Это утверждение вытекает из явного вида функций $f\in(t)(F)$, который легко получается из разложения $f(z_1,\ \ldots,\ z_r)$ в ряд Тейлора.

24. Обозначения. Пусть $(h_1,\ \ldots,h_p,\ W)$ — S-представление группы Ли P и $X(e_i)h_k=C_*^j(h_k)f_j$. Тогда

$$X\left(\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}e_i\right)h_{k,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}=C_*^{j\beta_1\ldots\beta_n}\left(h_{k,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\right)_{i\alpha_1,\ldots,\alpha_n}f_{j\beta_1,\ldots,\beta_n},\quad (588)$$

так как $(t)(W)$ — инвариантное конечномерное пространство, здесь $h_{k,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\in(t)(h_k)$.

25. Предложение. *Имеет место равенство*

$$C_*^{j\beta_1\ldots\beta_n}\left(h_{k,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\right)_{i\alpha_1\ldots\alpha_n}=C_*^j\left(h_k\right)_i\delta_{\gamma_1-\alpha_1}^{\beta_1}\ldots\delta_{\gamma_n-\alpha_n}^{\beta_n}.\quad (589)$$

Доказательство. Из предложения 21 следует, что

$$X\left(\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}e_i\right)\left(h_{k,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\right)=\left[\left(X\left(e_i\right)\left(h_k\right)\right]_{\gamma_1-\alpha_1,\ldots,\gamma_n-\alpha_n}=$$
$$=\left[C_*^j\left(h_k\right)_i f_j\right]_{\gamma_1-\alpha_1,\ldots,\gamma_n-\alpha_n}=C_*^j\left(h_k\right)_i f_{j,\gamma_1-\alpha_1,\ldots,\gamma_n-\alpha_n}.\quad (590)$$

Сравнивая полученное выражение с (588), получим наше утверждение.

26. Доказательство теоремы 20. Инвариантность пространства $(t)(W)$ вытекает из п. 22. Проверим условие б) определения 10 § 34. Распишем это условие в координатах: $\langle C_*^k(h_j), dh_p(x)\rangle = C_{*i}^k(h_j)\,\partial h_p/\partial x_i$, где $C_{*i}^k(h_j) = C_*^k(h_j)(e_i)$ — координаты ковектора $C_*^k(h_j)$ в базисе $e_i \in G$. Умножим

$$C_{*i,\beta_1,\ldots,\beta_n}^{k,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(h_{j,\xi_1,\ldots,\xi_n})\frac{\partial h_{p\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_{i\beta_1\ldots\beta_n}} \tag{591}$$

на $\varepsilon_1^{\alpha_1}\ldots\varepsilon_n^{\alpha_n}$ и сложим; получим, что достаточно доказать равенство нулю выражения $C_{*i,\beta_1,\ldots,\beta_n}^{k,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(h_{j,\xi_1,\ldots,\xi_n})\,\partial h(z)/\partial x_{i\beta_1\ldots\beta_n}$, что, очевидно, равно $C_{*i,\beta_1,\ldots,\beta_n}^{k,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(h_{j,\xi_1,\ldots,\xi_n})\,\varepsilon_1^{m_1-\beta_1}\ldots\varepsilon_n^{m_n-\beta_n}\dfrac{\partial h(z)}{\partial z_i}$, что в силу п. 25 равно

$$\varepsilon_1^{m_1-\beta_1}\ldots\varepsilon_n^{m_n-\beta_n}\delta_{\xi_1-\beta_1}^{\gamma_1}\ldots\delta_{\xi_n-\beta_n}^{\gamma_n}C_*^k(h_j)_i\frac{\partial h(z)}{\partial z_i} \tag{592}$$

и получим нуль, так как по условию $C_*^k(h_j)_i\dfrac{\partial h(z)}{\partial z_i} = 0$, теорема доказана.

27. Доказательство теоремы 4 вытекает из теоремы 7 § 34, если применить теорему 20.

28. Определение. Ассоциативная коммутативная алгебра A с единицей называется *алгеброй Фробениуса*, если на A существует невырожденное скалярное произведение (x, y), которое удовлетворяет условию «инвариантности» $(ab, c) = (a, bc)$, a, b, $c \in A$.

29. Конструкция. Рассмотрим конечномерную ассоциативную коммутативную алгебру A с единицей, $\dim A = N$. Фиксируем в A некоторый базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ и линейный оператор $\Omega\colon A \to A$ такой, что $\Omega\varepsilon_i = \varepsilon_{\omega_i}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, где ω — некоторая перестановка индексов. Определим на A скалярное произведение $\langle x, y\rangle$, относительно которого базис $e_1, \ldots, e_N$ будет ортонормированным.

30. Определение. Ассоциативная коммутативная алгебра с единицей называется *самосопряженной* относительно тройки $(A, \Omega, \varepsilon_i)$, если скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ удовлетворяет условию $\langle \varepsilon_{\omega i}, \varepsilon_j\varepsilon_k\rangle = \langle \varepsilon_{\omega j}, \varepsilon_i\varepsilon_k\rangle$, $1 \leqslant i, j, k \leqslant N$.

31. Теорема. *Ассоциативная коммутативная алгебра A является самосопряженной тогда и только тогда, когда A является алгеброй Фробениуса.*

32. Алгоритм. Пусть ε_i — базис алгебры A, x_j — координаты на G^* (пространстве, дуальном к алгебре Ли G); тогда обозначим x_i^α функцию $x_i \otimes \varepsilon_\alpha$. Для многочлена P вида (572) определим функцию P формулой

$$\tilde{P} = \sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\ \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{N} P_{i_1\ldots i_k}\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_2}\ldots\varepsilon_{j_k}x_{i_1}^{\omega j_1}\ldots x_{i_k}^{\omega j_k}. \tag{593}$$

Для любого элемента $a\in A$ построим функцию $P^a=(\Omega a, \tilde{P})$, т. е. $P^a=(\Omega a, P_I\varepsilon_J x_I^{\Omega J})$.

Рассмотрим только такие расширения, для которых скобка Пуассона обладает следующим свойством. Для всех многочленов P, Q на пространстве G^* имеет место равенство $\{P^a, Q^b\}_{(G\otimes A)^*}=\{P, Q\}_{G^*}^{\pi(a,b)}$, где a, $b\in A$, а $\pi\colon A\times A\to A$ — некоторое отображение.

33. Теорема (Ле Нгок Тьеуен). *Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей и $(A, \Omega, \varepsilon_i)$ — ее тройка, $\pi\colon A\times A\to A$ — некоторое отображение и для каждой полиномиальной функции P на дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G и элемента $a\in A$ определено продолжение P^a функции P относительно тройки $(A, \Omega, \varepsilon_i)$. Тогда если справедливо тождество $\{P^a, Q^b\}_{(G\otimes A)^*}=\{P, Q\}_{G^*}^{\pi(a,b)}$ для всех полиномиальных функций P, Q на G^*, то $\pi(a, b)=ab$.*

34. Теорема (Ле Нгок Тьеун [151]). *Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей. Для существования некоторой тройки $(A, \Omega, \varepsilon_i)$ для алгебры A, относительно которой расширенные функции P^a и Q^b удовлетворяют равенству $\{P^a, Q^b\}_{G_A^*}=\{P, Q\}_{G^*}^{ab}$ для всех многочленов P, Q, где G — произвольная алгебра Ли, необходимо и достаточно, чтобы алгебра A была алгеброй Фробениуса, $G_A^*=(G\otimes A)^*$.*

§ 39. Метод сходных функций

1. Обозначения. Пусть H — полупростая подалгебра Ли G. Рассмотрим присоединенное действие алгебры Ли H в G. Алгебра Ли G превращается в H-модуль. Пусть V — H-подмодуль в G, не содержащий H. Если в V фиксировать базис $x_1, \ldots, x_n$, то на H определена $(n\times n)$-матрица W 1-форм. Значение этой матрицы на векторе $h\in H$ будем обозначать W_h. Таким образом, W_h — матрица преобразования $\mathrm{ad}_h\colon V\to V$ в базисе $x_1, \ldots, x_n$. Матричные элементы ω_{ij} матрицы W являются 1-формами на H. Поскольку алгебра H полупроста, то ω_{ij} можно считать принадлежащим H.

2. Предложение. *Пусть B — инвариантная r-форма относительно действия алгебры H на строках $(X_1, \ldots, X_n)$, $X_i\in V$. Функции на G^* вида $B(XW^{l_1}, \ldots, XW^{l_r})$ находятся в инволюции со всеми линейными функциями ω_{ij} $(1\leqslant i, j\leqslant n)$.*

3. Замечание. Может оказаться, что H-модуль G имеет несколько подмодулей $V_1, \ldots, V_m$, изоморфных V. В этом случае имеет смысл говорить о функциях вида $B(XW^{l_1}, X'W^{l_2}, \ldots, X^{(m)}W^{l_{(m+1)}})$. По-прежнему функции такого вида находятся в инволюции со всеми линейными функциями ω_{ij}, $1\leqslant i, j\leqslant n$.

4. Определение. Будем называть *каноническими H-инвариантами* функции вида $B(XW^{l_1}, \ldots, X^{(m)}W^{l_{(m+1)}})$.

5. Определение. Согласно теореме Гамильтона—Кэли $W^n=\sum_{i=0}^{n-1} a_i(W)W^i$. В записи канонического H-инварианта явно присутствуют степени матрицы W. Назовем два канонических H-инварианта *сходными*, если один получается из другого заменой матрицы W^n на W^i, причем степень i такова, что функция $a_i(W)$ тождественно не равна нулю.

6. Определение. Пусть G—алгебра Ли, а H—ее подалгебра. Скажем, что пара (G, H) удовлетворяет *M-условию*, если выполнены следующие условия. Предположим, что $G=H\oplus V_1\oplus...\oplus V_k$—разложение H-модуля G на неприводимые подмодули. Требуется, чтобы: а) H была простой подалгеброй Ли в G классического типа A_n, B_n, C_n, D_n; б) все V_i являлись либо тривиальными H-модулями, либо отвечающее подмодулю V_i $(i=1, ..., k)$ представление алгебры Ли было эквивалентно минимальному.

7. Теорема (А. В. Беляев [20]). *Пусть G—алгебра Ли, а H—ее подалгебра. Предположим, что пара (G, H) удовлетворяет M-условию, $F_i=X'W^iBX^t$—канонический H-инвариант. Тогда скобка Пуассона $\{F_i, F_n\}$ сходных функций F_i, F_n (X может совпасть с X') равна нулю.*

§ 40. Метод R-матрицы

1. Определение. Алгебра Ли G называется *двойной алгеброй Ли*, если задан такой линейный оператор R: $G\to G$, что скобка

$$[X, Y]_R=\frac{1}{2}([RX, Y]+[X, RY]) \tag{594}$$

задает в G структуру алгебры Ли, т. е. для нее выполнено тождество Якоби. Алгебру Ли со скобкой (594) будем обозначать символом G_R. Скобку Березина алгебры Ли G_R будем называть *R-скобкой*.

2. Пример. Пусть алгебра Ли G как векторное пространство представлено в виде прямой суммы двух своих подалгебр $G=G_+\oplus G_-$. Обозначим $P_\pm$ проектор на $G_\pm$ параллельно дополнительной подалгебре и положим $R=P_+-P_-$. Тогда R задает на G структуру двойной алгебры Ли.

3. Замечание. Общая теория R-скобок изложена, например, в [206]. Через $I(G)$ обозначим кольцо инвариантов коприсоединенного представления группы Ли P, отвечающей алгебре Ли G.

4. Теорема (см. [206]). *Функции из $I(G)$ находятся в инволюции относительно R-скобки на G^*. Уравнения движения,* *задаваемые функцией* $\varphi \in I(G)$, *относительно R-скобки имеют вид*

$$\dot{\xi} = -\mathrm{ad}^*_{G,M}(\xi), \qquad M = 2^{-1} R(d\varphi(\xi)). \tag{595}$$

Доказательство. Пусть φ, $\psi \in C^\infty(G^*)$. Тогда их R-скобка имеет вид

$$\{\varphi, \psi\}_R(x) = 2^{-1}\langle [Rd\varphi(x),\ d\psi(x)],\ x\rangle + \\ + 2^{-1}\langle [d\varphi(x),\ Rd\psi(x)],\ x\rangle. \tag{596}$$

Поскольку φ — инвариантная функция, то $\langle [d\varphi(x), X], x\rangle = 0$ для всех $X \in G$. Отсюда вытекает первое утверждение. Очевидно, что для всех $\varphi \in I(G)$ уравнение Эйлера $\dot{\psi} = \{\varphi, \psi\}_R$ имеет вид

$$\dot{\psi}(x) = 2^{-1}\langle [Rd\varphi(x), d\psi(x)], x\rangle = \\ = -2^{-1}\langle d\psi(x), \mathrm{ad}^*_{Rd\varphi(x)}x\rangle, \tag{597}$$

т. е. $\dot{x} = -2^{-1}\,\mathrm{ad}^*_{R\,d\varphi(x)}x$.

5. Замечание. Обзор систем, интегрируемых с помощью метода R-матрицы, можно найти в работе [206].

Глава 7

ПОЛНОТА ИНВОЛЮТИВНЫХ НАБОРОВ ФУНКЦИЙ

§ 41. Критерий полноты

1. Обозначения. В этом параграфе будем изучать вопрос о полноте семейства функций F_J, построенного в п. 5 § 36. Определение полноты дано в п. 9 § 27. Напомним, что F_J — это объединение центральных функций всех скобок из линейного семейства J, порожденного парой согласованных скобок Пуассона.

Вместе с пространством J рассмотрим его комплексификацию $J^{\mathbf{C}}$, т. е. семейство комплексных тензорных полей вида $\lambda A + \mu B$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{C})$, где A и B — произвольные линейно независимые пуассоновы структуры из J. Для почти всех $C \in J$ имеем $\mathrm{rk}\, C(x) = R$, поэтому с точностью до пропорциональности существует лишь конечное число ненулевых элементов $C_1, \ldots, C_N \in J^{\mathbf{C}}$ таких, что $\mathrm{rk}\, C_i(x) < R$, $i = 1, \ldots, N$. Для каждого из них определим подпространство $K_i \subset \mathrm{Ker}\, C_i(x) \subset T^*_x M^{\mathbf{C}}$:

$$K_i = \{\xi \in \mathrm{Ker}\, C_i(x) \mid B(\xi, \mathrm{Ker}\, C_i(x)) = 0 \ \text{для всех}\ B \in J\}. \tag{598}$$

Обозначим буквой L подпространство в $T^*_x M$, порожденное дифференциалами функций $f \in F_J$. Пусть $\tilde{L} \subset T^*_x M$ — косоортогональное дополнение к L относительно некоторой 2-формы $C(x)$, $C \in L$. Полнота семейства F_J в точке x означает, что $\tilde{L} = L + \mathrm{Ker}\, C(x)$, поэтому выясним строение $\tilde{L}$.

2. Теорема. а) *Кососортогональное дополнение $\tilde{L}$ к подпространству L не зависит от выбора пуассоновой структуры $C \in J$.*

б) *Подпространство $\tilde{L}^{\mathrm{C}}$ содержит ядра всех 2-форм $C(x)$ на $(T_x^*M)^{\mathrm{C}}$, где $C \in J^{\mathrm{C}} \setminus \{0\}$.*

в) *Равенство* $\tilde{L}^{\mathrm{C}} = L^{\mathrm{C}} + \sum_{i=1}^{N} \ker C_i(x)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\dim K_i = \dim M - R$, $i = 1, \ldots, N$.

Из этой теоремы легко получить необходимое и достаточное условие полноты семейства F_J в точке $x \in M$.

3. Теорема (критерий полноты А. В. Болсинова, см. [43], [46]). *Инволютивное семейство F_J полно в точке $x \in M$ относительно фиксированной пуассоновой структуры $C \in J$ тогда и только тогда, когда:* а) $\operatorname{rk} A(x) = R$ *для всех* $A \in J^{\mathrm{C}}$, $A \neq \lambda C$; б) $\dim K_C = \dim M - R$, *где*

$$K_C = \{\xi \in \ker C(x) \mid B(\xi, \operatorname{Ker} C(x)) = 0 \text{ для всех } B \in J\}. \qquad (599)$$

Доказательство. Условие полноты имеет вид $\tilde{L} = L + \operatorname{Ker} C(x)$, поэтому достаточность сразу следует из утверждения в) предыдущей теоремы 2. Оттуда же следует необходимость условия $\dim K_C = \dim M - R$. Покажем необходимость первого условия. Предположим, что существует элемент $C' \in J^{\mathrm{C}}$, $C' \neq \lambda C$, такой, что $\operatorname{rk} C'(x) < R$. Условие $\tilde{L} = L + \operatorname{Ker} C(x)$ тогда не выполняется, поскольку каждая «особая» форма C' дает независимый вклад в размерность $\tilde{L}$, равный $R - \operatorname{rk} C'(x)$, см. п. 15.

4. Замечание. При $\operatorname{rk} C(x) = R$, т. е. в случае симплектического слоя O_x максимальной размерности, условие $\dim K_C = \dim M - R$ выполняется автоматически. Для этого случая утверждение теоремы впервые было доказано А. В. Браиловым при дополнительном требовании аналитичности рассматриваемых скобок Пуассона.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству теоремы 2.

5. Пусть T — конечномерное линейное вещественное пространство размерности n. Рассмотрим двумерное линейное семейство J кососимметрических билинейных форм на T, порожденное фиксированными формами A_0 и A_1. Пусть $R = \max_{C \in J} \operatorname{rk} C$. Обозначим буквой L подпространство в T, порожденное ядрами форм $A \in J$ ранга R.

6. Предложение. *Подпространство $L \subset T$* изотропно относительно всех форм $C \in J$.

7. Кососимметрические формы на T будем рассматривать как кососимметрические операторы из T в T^*. Фиксируем две произвольные линейно независимые формы A и B из семейства J, пусть при этом $\operatorname{rk} A = R$.

8. Предложение. *В пространстве $L \subset T$ можно выбрать базис x_i^j, $i=1, \ldots, n-R$, $j=0, 1, \ldots, k_i$, для которого справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &Ax_i^0=0,\\ &Ax_i^1=Bx_i^0,\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &Ax_i^{k_i}=Bx_i^{k_i-1},\\ &Bx_i^{k_i}=0 \end{aligned} \tag{600}$$

для любого $i=1, \ldots, n-R$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $(A-\lambda B)x=0$ относительно $x \in T$ с параметром λ. Ясно, что подпространство $L \subset T$ порождается решениями этого уравнения при малых λ. Пусть $y_1^\lambda, \ldots, y_{n-R}^\lambda$ — базисные решения, аналитические по λ (λ мало). Разлагая векторы y_i^λ в ряд по λ и подставляя в уравнение, получим соотношения $Ay_i^0=0$, $Ay_i^1=By_i^0$, $Ay_i^2=By_i^1, \ldots$, где $y_i^\lambda=\sum\limits_{j=1}^{\infty} y_i^j\lambda^j$. Система векторов y_i^j порождает L, но базисом не является. Обозначим U_k подпространство в L, порожденное векторами y_i^j, $j \leqslant k$, $i=1, \ldots, n-R$. Имеем $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots$, причем, начиная с некоторого N, имеем $U_N=U_{N+1}=\ldots=L$. Кроме того, справедливы соотношения $A(U_0)=0$, $A(U_N)=B(U_N)$, $A(U_k)=B(U_{k-1})$, $k=1, \ldots, N$.

9. Лемма. *Существуют подпространства* V_0, $V_1, \ldots, V_N \subset L$ *такие, что*: а) $U_k=U_{k-1}\oplus V_k$, $k=1, \ldots, N$; б) $A(V_k)=B(V_{k-1})$, $k=1, \ldots, N$; в) $U_0=V_0=\operatorname{Ker} A$, $V_N \subset \operatorname{Ker} B$.

Доказательство. Подпространства V_k строятся по индукции, начиная с V_N.

Шаг 1. Имеем $B(U_N)=B(U_{N-1})$, следовательно, существует подпространство $V_N \subset U_N$ такое, что $V_N \subset \operatorname{Ker} B$, $U_N=U_{N-1}\oplus V_N$.

Шаг $N-k$. Пусть $U_{k+1}=U_k \oplus V_{k+1}$. Тогда $B(U_k)=A(U_{k+1})=$ $=A(U_k \oplus V_{k+1})$. Учитывая, что $\operatorname{Ker} A \subset U_k$, имеем $B(U_k)=$ $=A(U_k)\oplus A(V_{k+1})=B(U_{k-1})\oplus A(V_{k+1})$. Ясно, что существует подпространство $V_k \subset U_k$ такое, что $U_k=U_{k-1}\oplus V_k$, $A(V_{k+1})=$ $=B(V_k)$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство предложения. В силу леммы 9 корректно определен оператор $A^{-1}B$: $V_k \to V_{k+1}$, поскольку $V_k \cap \operatorname{Ker} A=\{0\}$, $k \neq 0$. Определим цепочку подпространств $V_0^1 \subset \ldots \subset V_0^N=V_0$, полагая $V_0^i=\{\xi \in V_0 \mid (A^{-1}B)^i\xi=0\}$. Выберем произвольный базис в V_0^1, дополним его до базиса в V_0^2 и т. д., получим базис $x_1^0, \ldots, x_{n-R}^0$ в пространстве V_0. Остальные векторы базиса x_i^j в L определяются по формуле $x_i^j=(A^{-1}B)^j x_i^0$ (нулевые векторы отбрасываются).

10. Следствие. *Косоортогональное дополнение* $\tilde{L}=\{\xi \in$ $\in T \mid B(\xi, L)=0\}$ *к подпространству L в T не зависит от выбора нетривиальной формы $B \in J$.*

Доказательство. Кососортогональное дополнение $\tilde{L}_B$ к подпространству $L \subset T$ относительно формы $B \in J$ совпадает с ортогональным дополнением в T к подпространству $B(L) \subset T^*$. Из соотношений (600) следует, что $A(L)=B(L)$ для любых двух нетривиальных форм A, $B \in J$, поэтому $\tilde{L}_B = \tilde{L}_A = \tilde{L}$.

11. Предложение. *Пусть, как и раньше, A и B — две линейно независимые формы из семейства J, причем $\operatorname{rk} A = R$. Тогда $\tilde{L}$ является максимальным среди всех подпространств $K \subset T$, удовлетворяющих условию $B(K) \subset A(K)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что любое подпространство $K \subset T$ такое, что $B(K) \subset A(K)$, содержится в $\tilde{L}$. Воспользуемся соотношением $A(V_k)=B(V_{k-1})$, $k=1, \ldots, N$. Докажем по индукции, что $A(K, V_k)=0$ для любого k. При $k=0$ имеем $A(K, V_0)=A(K, \operatorname{Ker} A)=0$. Пусть $A(K, V_k)=0$. Тогда $A(K, V_{k+1}) = -(K, A(V_{k+1})) = -(K, B(V_k)) = (B(K), V_k) \subset \subset (A(K), V_k) = A(K, V_k)=0$.

Покажем теперь, что $B(\tilde{L}) \subset A(\tilde{L})$. Действительно, $B(\tilde{L}) \subset \subset L^\perp \subset T^*$, но $L^\perp = A(\tilde{L})$, так как $\operatorname{Ker} A \subset L$. Предложение доказано.

12. Для более подробного описания пространства $\tilde{L}$ необходимо перейти к полю комплексных чисел. Обозначим $T^{\mathbf{C}}$, $L^{\mathbf{C}}$, $\tilde{L}^{\mathbf{C}}$, $J^{\mathbf{C}}$ комплексификацию пространств T, L, $\tilde{L}$, J.

В семействе $J^{\mathbf{C}}$ содержится с точностью до пропорциональности лишь конечное число форм немаксимального ранга. Рассмотрим все такие формы $C_1, \ldots, C_N$, $C_i \in J^{\mathbf{C}}$, $\operatorname{rk} C_i < R$, $C_i \neq \lambda C_j$. Положим $K_i = \{\xi \in \operatorname{Ker} C_i \mid B(\xi, \operatorname{Ker} C_i)=0\}$, где B и C_i линейно независимы и $B \in J$. Проверим, что подпространство K_i не зависит от выбора формы $B \in J$. Действительно, если $B' = \beta B + \gamma C_i$, то $B'(\xi, \operatorname{Ker} C_i) = \beta B(\xi, \operatorname{Ker} C_i)$. Следовательно, $K_i = \{\xi \in \operatorname{Ker} C_i \mid B(\xi, \operatorname{Ker} C_i)=0$ для всех $B \in J\}$.

13. Предложение. а) *Подпространство $\tilde{L}^{\mathbf{C}} \subset T^{\mathbf{C}}$ содержит ядра всех нетривиальных форм из семейства $J^{\mathbf{C}}$.*

б) *Имеет место равенство* $\tilde{L}^{\mathbf{C}} = L^{\mathbf{C}} + \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} C_i$, *т. е.* $\tilde{L}^{\mathbf{C}}$ *порождается ядрами всех нетривиальных форм из семейства $J^{\mathbf{C}}$ тогда и только тогда, когда $\dim K_i = n-R$, $i=1, \ldots, N$.*

Доказательство. Чтобы не усложнять обозначений, все пространства предполагаются комплексифицированными, индекс $\mathbf{C}$ не пишется.

Первое утверждение вытекает из предложения 11. В самом деле, $0=B(\operatorname{Ker} B) \subset A(\operatorname{Ker} B)$, т. е. $\operatorname{Ker} B \subset \tilde{L}$. Форма $B \in J$ была выбрана произвольно, поэтому $\operatorname{Ker} C \subset \tilde{L}$ для всех $C \in J$, отличных от нуля.

Отметим отсюда одно следствие: $\dim K_i \geqslant n-R$. Действительно, для любой формы C_i имеем $B(\operatorname{Ker} C_i \cap L, \operatorname{Ker} C_i)=0$, т. е. $\operatorname{Ker} C_i \cap L \subset K_i$, но $C_i(L)=A(L)$ для любой формы $A \in J$ ранга R.

поэтому $\dim \operatorname{Ker} C_i \bigcap L = \dim \operatorname{Ker} A \bigcap L = \dim \operatorname{Ker} A = n - R$, следовательно, $\dim K_i \geqslant n - R$.

Для доказательства второго утверждения выберем произвольное алгебраическое дополнение K к L в $\tilde{L}$. Тогда $\tilde{L} = V_0 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_N \oplus K$. Рассмотрим оператор Φ: $\tilde{L} \to \tilde{L}$, определяемый соотношением $A(\Phi\xi) = B\xi$, $\xi \in \tilde{L}$, $\Phi\xi \in V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \ldots \oplus V_N \oplus K$. Из (600) следует, что подпространство L инвариантно относительно Φ и ограничение $\Phi | L$ нильпотентно. Разложим пространство $\tilde{L}$ на обобщенные собственные подпространства оператора Φ. Имеем $\tilde{L} = U_0 + \sum\limits_{\lambda \neq 0} U_\lambda$, причем $L \subset U_0$. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{rk} B = R$. Покажем, что в этом случае $L = U_0$. Предположим противное. Тогда существует элемент $\xi \in U_0$ такой, что $\xi \notin L$, $\Phi\xi \in L$. По определению оператора Φ имеем $A(\Phi(\xi)) = B(\xi)$, но $A(L) = B(L)$, поэтому существует такой элемент $\eta \in L$, что $B\eta = B\xi$. Отсюда $\eta - \xi \in \operatorname{Ker} B \subset L$, следовательно, $\xi \in L$. Получили противоречие. Итак, $\tilde{L} = L + \sum\limits_{\lambda \neq 0} U_\lambda$.

Введем обозначение: подпространство в U_λ, состоящее из собственных векторов, обозначим U_λ^0.

14. Лемма. *Подпространство* $L_0 = L + \sum\limits_{\lambda \neq 0} U_\lambda^0$ *порождено ядрами форм* $C \in J \setminus \{0\}$. *Другими словами,*

$$L + \sum_{\lambda \neq 0} U_\lambda^0 = L + \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} C_i. \tag{601}$$

Доказательство. Покажем, что L_0 содержит все ядра $\operatorname{Ker} C_i$, $i = 1, \ldots, N$. Пусть $C_i = \alpha_i A + \beta_i B$. Тогда $\operatorname{Ker} C_i = \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A)$, где $\lambda_i = -\alpha_i/\beta_i$. Покажем, что $\operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) \subset L + U_{\lambda_i}^0$. Из определения оператора Φ следует, что $U_{\lambda_i}^0 = \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) \bigcap \operatorname{Im} \Phi$. Отсюда $\dim U_{\lambda_i}^0 \geqslant R - \operatorname{rk}(B - \lambda_i A)$, поскольку $\dim \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) = n - \operatorname{rk}(B - \lambda_i B)$, $\operatorname{codim} \operatorname{Im} \Phi = n - R$. Далее, $\dim L \bigcap \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) = n - R$, следовательно, $\operatorname{Ker}(B - \lambda_i A) = (L \bigcap \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A)) \oplus U_{\lambda_i}^0 \subset L \oplus U_{\lambda_i}^0 \subset L_0$. С другой стороны, $U_{\lambda_i}^0 \subset \operatorname{Ker}(B - \lambda_i A)$. Лемма доказана.

Из утверждения леммы следует, что $\tilde{L} = L + \sum\limits_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} C_i$ тогда и только тогда, когда $U_{\lambda_i}^0 = U_{\lambda_i}$, т. е. отсутствуют присоединенные векторы оператора Φ веса $\lambda_i \neq 0$, где $\lambda_i = -\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$, $C_i = \alpha_i A + \beta_i B$. Пусть присоединенный вектор веса λ_i существует. Это эквивалентно тому, что система уравнений

$$(\Phi - \lambda_i E) x = y, \quad (\Phi - \lambda_i E) y = 0 \tag{602}$$

имеет решения при $y\neq 0$. Учитывая определение оператора Φ, перепишем эту систему следующим образом:

$$\begin{gathered}(B-\lambda_i A)x=Ay, \quad (B-\lambda_i A)y=0,\\ x\in \operatorname{Im}\Phi, \quad y\in \operatorname{Im}\Phi.\end{gathered} \tag{603}$$

Легко видеть, что первые два уравнения разрешимы тогда и только тогда, когда $y\in K_i\subset \operatorname{Ker}(B-\lambda_i A)$. Если $\dim K_i=n-R$, то $K_i=\operatorname{Ker} C_i\bigcap L$, т. е. $y\in L$. На пространстве L оператор Φ нильпотентен, поэтому y не может быть собственным вектором ненулевого веса. Следовательно, система (602) не имеет решений при $y\neq 0$. Если $\dim K_i>n-R$, то существует $y_0\in K_i\bigcap \operatorname{Im}\Phi$, $y_0\neq 0$. Уравнение $(B-\lambda_i A)x=Ay_0$ разрешимо, и множество его решений имеет вид $x_0+\operatorname{Ker}(B-\lambda_i A)$, где x_0 — частное решение. Поэтому $(x_0+\operatorname{Ker}(B-\lambda_i A))\bigcap \operatorname{Im}\Phi\neq\varnothing$, так как $\dim \operatorname{Ker}(B-\lambda_i A)>n-R$. Следовательно, система (602) имеет нетривиальное решение и присоединенный вектор существует. Предложение доказано.

15. Следствие. *Имеют место следующие оценки:*

$$\dim \tilde{L}\geqslant \dim L+\sum_{i=1}^{N}(R-\operatorname{rk} C_i), \tag{604}$$

$$\dim L\leqslant n-\frac{R}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(R-\operatorname{rk} C_i), \tag{605}$$

причем равенства имеют место тогда и только тогда, когда $\dim K_i=n-R$, $i=1, \ldots, N$.

16. Следствие. *Подпространство L является максимальным изотропным (лагранжевым) относительно произвольной нетривиальной формы из семейства J тогда и только тогда, когда все нетривиальные формы из семейства J^C имеют одинаковый ранг.*

Доказательства следствий. Все обозначения из доказательства предложения 13 сохраняются. Разложим $\tilde{L}$ на обобщенные собственные подпространства U_{λ_i} оператора Φ. Имеем

$$\dim \tilde{L}=\dim L+\sum_{i=1}^{N}\dim U_{\lambda_i}\geqslant \dim L+\sum_{i=1}^{N}\dim U^0_{\lambda_i}, \tag{606}$$

где $U^0_{\lambda_i}\subset U_{\lambda_i}$ — подпространство, состоящее из собственных векторов. Из доказательства последней леммы 14 следует, что $\dim U^0_{\lambda_i}=R-\operatorname{rk} C_i$. Это доказывает справедливость первой оценки. Условие $\dim K_i=n-R$, как это было показано, в точности означает совпадение подпространств U_{λ_i} и $U^0_{\lambda_i}$, поэтому первая оценка переходит в точное равенство. Отметим, что каждая форма C_i дает независимый вклад в размерность пространства

$\tilde{L}$, поэтому $\operatorname{Ker} C_i \not\subset L + \sum_{l \neq i} \operatorname{Ker} C_l$. Вторая оценка следует из первой и равенства $\dim L + \dim \tilde{L} = n + (n - R)$. Докажем следствие 16. Лагранжевость подпространства L означает, что $L = \tilde{L}$, поэтому из первой оценки необходимо следует равенство $\operatorname{rk} C_i = R$, т. е. все формы из $J^{\mathbf{C}}$ имеют одинаковый ранг. Условие $\dim K_i = n - R$ в этом случае выполняется автоматически, и первая оценка переходит в равенство.

17. Доказательство теоремы 2. Утверждение а) является точным аналогом следствия 10. В самом деле, доказательство теоремы легко сводится к задаче из линейной алгебры. Действительно, подпространство $L \subset T_x^* M$ порождается ядрами 2-форм $C(x)$ $(C \in J)$ такими, что $\operatorname{rk} C(x) = R$. Поэтому при доказательстве мы можем забыть о скобках Пуассона и рассматривать двумерное семейство кососимметрических билинейных форм на $T_x^* M$. Утверждения б) и в) теоремы в точности соответствуют утверждениям а) и б) предложения 13.

§ 42. Полнота семейств функций, построенных методом сдвига аргумента

1. Применим общий критерий А. В. Болсинова из п. 3 § 41 к скобке Березина на G^* и a-скобке Березина на G^*. Получим критерий полноты семейства функций, построенных в [188] методом сдвига аргумента, см. п. 2 § 34.

Обозначим F_a семейство функций $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., полученных следующим образом. Пусть $f(x)$ — произвольный локальный инвариант коприсоединенного представления Ad^* группы Ли, отвечающей алгебре Ли G. Положим $f(a + \lambda x) = P_0(x) + \lambda P_1(x) + \lambda^2 P_2(x) + \ldots$

2. Теорема (критерий А. В. Болсинова, случай орбит общего положения, см. [46]). *Пусть G — произвольная конечномерная комплексная (вещественная) алгебра Ли, $S = \{y \in C^* \mid \dim \operatorname{Ann}(y) > \operatorname{ind} G\}$ — множество сингулярных элементов в G^* (соответственно в $(G^{\mathbf{C}})^*$), $a \in G^*$ — регулярный элемент. Инволютивное семейство F_a полно на G^* тогда и только тогда, когда* $\operatorname{codim} S \geqslant 2$.

Доказательство. Пусть элемент $x \in G^*$ регулярен. Будем проверять полноту семейства F_a в точке x, пользуясь теоремой 3 § 41. Второе условие этой теоремы выполнено автоматически в силу регулярности элемента $x \in G^*$. Первое условие переписывается следующим образом: $\operatorname{rk}(\alpha\Phi_x + \beta\Phi_a) = \dim G - \operatorname{ind} G$ для $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, не обращающихся одновременно в нуль. Геометрически это означает, что двумерная плоскость, натянутая на векторы x и a в пространстве G^* (или в пространстве

$(G^{\mathbf{C}})^*$ в вещественном случае), пересекается с множеством S только в нуле. Ясно, что элементы $x \in G^*$, удовлетворяющие этому условию, существуют тогда и только тогда, когда $\operatorname{codim} S \geqslant 2$ (рис. 41). Теорема доказана.

3. Замечание. Множество сингулярных элементов в G^* и в $(G^{\mathbf{C}})^*$ в случае вещественной алгебры Ли G могут иметь различные размерности. Поэтому в условиях теоремы 2 множество S нельзя заменить в вещественном случае на множество сингулярных элементов в G^*.

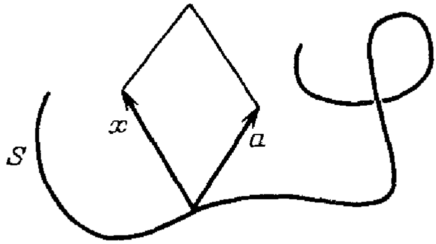


Рис. 41

4. Рассмотрим теперь случай сингулярных орбит. Пусть $x \in G^*$ — сингулярный элемент, т. е. $\dim \operatorname{Ann}(x) > \operatorname{ind} G$, а $O(x)$ — орбита точки x при действии группы Ли P на G^* коприсоединенным образом (P отвечает алгебре Ли G). Когда семейство F_a сдвигов инвариантов при ограничении на сингулярную орбиту $O(x)$ образует полный инволютивный набор на этой орбите? Известно, что так бывает не всегда, даже если семейство F_a полно на всем пространстве G^*, т. е. если из него можно выбрать $2^{-1}(\dim G + \operatorname{ind} G)$ функционально независимых на G^* функций.

5. Теорема (критерий А. В. Болсинова, случай сингулярных орбит, см. [46]). *Пусть G — произвольная конечномерная комплексная (вещественная) алгебра Ли, S — множество сингулярных элементов в G^* (соответственно в $(G^{\mathbf{C}})^*$). Пусть $a \in G^*$ — произвольный регулярный элемент, $x \in G^*$ — произвольный сингулярный элемент, π: $G^* \to \operatorname{Ann}(x)^*$ — естественная проекция. Инволютивное семейство F_a полно в сингулярной точке $x \in G^*$ тогда и только тогда, когда:* а) *комплексная прямая* $x + \lambda a$ $(\lambda \in \mathbf{C})$ *пересекает множество сингулярных элементов S только в точке x;* б) *имеет место равенство* $\dim \operatorname{Ann} \pi(a) = \operatorname{ind} G$, *где* $\operatorname{Ann} \pi(a)$ — *аннулятор элемента* $\pi(a) \in \operatorname{Ann}(x)^*$ *в алгебре Ли* $\operatorname{Ann}(x)$.

Доказательство. Это утверждение является точной переформулировкой теоремы 3 § 41. Действительно, первое условие означает, что все линейные комбинации $\alpha\Phi_x + \beta\Phi_a$ при $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, имеют максимальный ранг $R = \dim G - \operatorname{ind} G$. Далее, следуя обозначениям теоремы 3 § 41, положим $K_x = \{\xi \in \operatorname{Ker} \Phi_x \mid \Phi_a(\xi, \operatorname{Ker} \Phi_x) = 0\}$. Учитывая, что $\operatorname{Ker} \Phi_x = \operatorname{Ann}(x)$, получаем $K_x = \{\xi \in \operatorname{Ann}(x) \mid (\operatorname{ad}^*_\xi a, \operatorname{Ann}(x)) = 0\}$, или $K_x = \operatorname{Ann} \pi(a)$. Таким образом, условие б) доказываемой теоремы в точности соответствует второму условию теоремы 3 § 41.

6. Следствие. *Пусть семейство сдвигов инвариантов F_a полно на всем пространстве G^*, $x \in G^*$ — сингулярный эле-*

мент, причем $\operatorname{ind}\operatorname{Ann}(x)=\operatorname{ind}G$. *Тогда найдется регулярный элемент* $b\in G^*$ *такой, что инволютивное семейство* F_b *полно на сингулярной орбите* $O(x)$.

Доказательство. Полнота семейства F_a на G^* гарантирует выполнение условия $\operatorname{codim}S\geqslant 2$, где S — множество сингулярных элементов. Это, в свою очередь, гарантирует выполнение условия а) теоремы 5 почти для всех $b\in G^*$. Равенство $\operatorname{ind}\operatorname{Ann}(x)=\operatorname{ind}G$ означает, что $\dim\operatorname{Ann}\pi(b)=\operatorname{ind}G$ для регулярных проекций $\pi(b)$, т. е. почти для всех $b\in G^*$. Ясно, что $b\in G^*$ можно выбрать удовлетворяющим двум условиям одновременно. Тогда семейство F_b будет полно в точке $x\in G^*$ и, следовательно, на всей орбите $O(x)$.

Рассмотрим теперь случай полупростых алгебр Ли.

7. Теорема. *Пусть* G — *полупростая алгебра Ли (комплексная или вещественная). Тогда семейство сдвигов инвариантов коприсоединенного представления* Ad^* *группы Ли* P, *отвечающей алгебре Ли* G, *является полным инволютивным семейством на* G^*.

Доказательство. Если G — полупростая алгебра Ли, то коразмерность множества сингулярных точек равна трем и теорема вытекает из критерия п. 2.

8. Замечание. Эта теорема ранее была доказана другими методами А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко, см. [186], [188], [189].

9. Пример. Пусть G — фробениусова алгебра Ли ([298]), т. е. алгебра Ли с нулевым индексом. В этом случае орбиты общего положения представления Ad^* открыты в G^* и, следовательно, инвариантами являются только константы. Поэтому семейство сдвигов тривиально. С другой стороны, множество сингулярных элементов задается одним уравнением $\det(C^i_{jk}x_i)=0$, где C^i_{jk} — структурный тензор алгебры Ли, т. е. $\operatorname{codim}S=1$.

10. Теорема. *Пусть* G — *полупростая алгебра Ли. Тогда семейство сдвигов инвариантов коприсоединенного представления* Ad^* *группы Ли* P, *отвечающей алгебре Ли* G, *является полным инволютивным семейством на полупростых сингулярных орбитах.*

Доказательство. Если алгебра Ли G полупроста, то условие $\operatorname{ind}\operatorname{Ann}(x)=\operatorname{ind}G$ выполнено для всех полупростых сингулярных элементов и утверждение следует из критерия п. 5.

11. Замечание. Эта теорема была доказана в [85], [185], [53]. В некоторых случаях условие полупростоты сингулярного элемента $x\in G^*$ существенным не является.

12. Предложение. *Для всех элементов* $x\in\mathrm{sl}(n)$ *выполнено равенство* $\operatorname{ind}\operatorname{Ann}(x)=\operatorname{ind}\mathrm{sl}(n)$. *Таким образом, методом сдвига аргумента можно построить полные инволютивные семейства* *функций на всех сингулярных орбитах коприсоединенного действия группы Ли* $\mathrm{SL}(n)$.

Доказательство получаем явным вычислением централизатора произвольного элемента $x \in \mathrm{sl}(n)$ и его индекса, используя стандартную жорданову нормальную форму.

§ 43. Функции в инволюции на симметрических алгебрах Ли

1. Определение. *Симметрической алгеброй Ли* называется пара (G, θ), где G — алгебра Ли, а θ — ее автоморфизм такой, что $\theta^2 = \mathrm{id}$. Обозначим буквой H множество таких элементов $x \in G$, для которых $\theta(x) = x$, а буквой V — множество таких $x \in G$, что $\theta(x) = -x$. Ясно, что $G = H \oplus V$, $[H, H] \subset \subset H$, $[H, V] \subset V$, $[V, V] \subset H$. В частности, H — подалгебра в G. Если B — форма Киллинга алгебры Ли G, т. е. $B(x, y) = = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y$, то подпространства H и V ортогональны относительно B.

2. Конструкция. Обозначим G_θ полупрямую сумму подалгебры H и коммутативного пространства V по представлению ad: $H \to \mathrm{End}(V)$, т. е. зададим на линейном пространстве $G = H + V$ еще один коммутатор $[x, y]_\theta$ по формуле $[h_1 + v_1, h_2 + v_2]_\theta = = [h_1, h_2] + [h_1, v_2] + [v_1, h_2]$, $h_i + v_i \in H + V$, $h_i \in H$, $v_i \in V$, $i = 1, 2$.

На пространстве $G^* = H^* + V^*$ рассмотрим три различные скобки Пуассона: а) скобку Пуассона Ли $\{x, y\}$, отвечающую алгебре Ли G; б) скобку Пуассона — Ли $\{x, y\}_\theta$, отвечающую алгебре Ли G_θ; в) скобку $\{x, y\}_a$, $a \in V^*$, см. п. 6 § 36.

3. Лемма. *Три скобки* $\{x, y\}$, $\{x, y\}_\theta$, $\{x, y\}_a$ *на* G^* *согласованы, т. е. любая линейная комбинация этих трех скобок является скобкой Пуассона на* G^*.

4. Предложение. *Центральными функциями скобки* $\alpha\{x, y\} + \beta\{x, y\}_\theta + \gamma\{x, y\}_a$ при $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ *являются функции вида*

$$f_{\alpha, \beta, \gamma, a}(h + v) = f\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,h + v + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}\,a\right), \qquad (607)$$

где f *пробегает кольцо инвариантов алгебры Ли* G.

Доказательство см. в [228].

5. Замечание. Класс полупрямых сумм, возникающих из рассмотрения симметрических алгебр Ли, содержит серию алгебр Ли, кольца инвариантов коприсоединенного представления которых совпадают с кольцами инвариантов представлений изотропии неприводимых симметрических пространств. Список симметрических алгебр Ли этого вида приведен в табл. 1, см. [293], гл. 9.

Таблица 1

Тип по Картану	Симметрическое пространство M	$\dim M$	$\operatorname{rk} M$	Индекс алгебры G_θ
AI	$SU(n)/SO(n)$	$\frac{n^2+n-2}{2}$	$n-1$	$n-1$
BDI	$SO(2p+1)/SO(p)\times SO(p+1)$	$p(p+1)$	p	p
CI	$Sp(n)/U(n)$	$n(n+1)$	n	n
EI	$E_6/Sp(4)$	42	6	6
E(V)	$E_7/SU(8)$	70	7	7
EVIII	$E_8/SO(16)$	128	8	8
FI	$E_4/Sp(3)\times SU(2)$	28	4	4
G_2	$G_2/SU(2)\times SU(2)$	8	2	2

Имеется связь между операцией сдвига инвариантов из кольца $I(G_\theta^*)$ и операцией подъема функций, см. п. 9 § 35.

6. Предложение. *Операция сдвига инвариантов из кольца $I(G_\theta^*)$ эквивалентна взятию абелевой подалгебры L в V в качестве алгебры первых интегралов.*

Доказательство. Пусть $I_1, \ldots, I_r$ — набор однородных полиномиальных образующих в кольце $I(G_\theta^*)$ и $n_i = \deg I_i$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда согласно теории инвариантов групп, порожденных отражениями, имеем $\sum_{i=1}^{r} n_i = 2^{-1}(\dim G_\theta + \operatorname{rk} G_\theta) = \dim V$. Следовательно, сдвиг образующих I_i на регулярный элемент приводит к семейству функций в инволюции, зависящих только от координат в пространстве V.

7. Инволютивное семейство. Для построения функций в инволюции на $G^* = H^* + V^*$ применим общую конструкцию § 36, рассмотрев любое двумерное подпространство в пространстве, порожденном скобками $\{f, g\}$, $\{f, g\}_\theta$ и $\{f, g\}_a$. Тогда из п. 4 следует, что функции вида $f(\lambda h + v + \lambda^2 a)$ находятся в инволюции относительно всех скобок вида $\alpha(\{f, g\} + \{f, g\}_a) + \beta\{f, g\}_\theta$. Проанализируем полноту этого семейства, используя критерий Болсинова.

Рассмотрим следующий важный случай. Пусть G — полупростая вещественная алгебра Ли, а θ — *инволюция Картана*, т. е. форма $(X, Y) = -B(X, \theta Y)$ положительно определена, где B — форма Киллинга. Будем отождествлять H с H^* и V с V^* с помощью формы Киллинга. В общем случае семейство функций в инволюции $F_{a,\theta} = \{f(\lambda h + v + \lambda^2 a) \mid f \in I(G), \lambda \in \mathbf{R}\}$ полным не является. Однако функции $f \in F_{a,\theta}$ коммутируют с элементами подалгебры $\operatorname{St}(a)$, где $\operatorname{St}(a)$ — стационарная подалгебра элемента $a \in V$ при действии H на V, ср. п. 11 § 35. Рассмотрим произвольный полный инволютивный набор $F_{\mathrm{St}(a)}$ на двойственном пространстве $\mathrm{St}(a)^*$. Функции $g\in F_{\mathrm{St}(a)}$ естественным образом продолжаются на все пространство G^* с помощью проекции π: $G^*\to \mathrm{St}(a)^*$, см. п. 1 § 35. Объединяя семейства $F_{a,\theta}$ и $F_{\mathrm{St}(a)}$, получим инволютивное семейство на G^* в смысле скобки $\{f, g\}_\theta$.

8. Теорема. *Пусть G — полупростая вещественная алгебра Ли, θ — инволюция Картана, $G=H\oplus V$ — соответствующее разложение алгебры Ли G, $a\in V$ — произвольный элемент. Тогда инволютивное семейство $F_{a,\theta}\bigcup F_{\mathrm{St}(a)}$ полно на $G=H\oplus V$ относительно скобки Пуассона $\{f, g\}_\theta$.*

Доказательство. Фиксируем точку $h+v\in H+V$. Обозначим M подпространство в G, порожденное дифференциалами функций вида $f(\lambda h+v+\lambda^2 a)$. Обозначим $\tilde{M}$ косоортогональное дополнение к M относительно 2-формы на G, задаваемой скобкой $\{f, g\}_\theta$ в точке $h+v$. Утверждение теоремы эквивалентно существованию точки $h+v$ такой, что $\tilde{M}=M+\mathrm{St}(a)$.

Перейдем к комплексным алгебрам Ли. Чтобы не усложнять обозначений, будем сразу считать алгебры Ли G и G_θ комплексными. Отметим, что после перехода к комплексным алгебрам Ли элемент $a\in V$ произвольным уже считать нельзя, поскольку вещественное подпространство V состоит из полупростых элементов. Поэтому и в комплексном случае мы будем считать $a\in V$ полупростым. Обозначим $A_{\alpha,\beta}$ кососимметрическую форму на G, задаваемую скобкой $\alpha(\{f, g\}+\{f, g\}_a)+\beta\{f, g\}_\theta$ в точке $h+v$. Покажем, что точка $h+v$ может быть выбрана так, что: а) $\mathrm{rk}\, A_{\alpha,\beta}=R=\dim G-\mathrm{ind}\, G$, $\alpha+\beta\neq 0$, $\alpha\neq 0$; б) $\mathrm{rk}\, A_{0,1}=R=\dim G-\mathrm{ind}\, G$; в) $\dim K_{1,-1}=\mathrm{ind}\, G$, где $K_{1,-1}=\{\xi\in \mathrm{Ker}\, A_{1,-1}\mid A_{0,1}(\xi, \mathrm{Ker}\, A_{1,-1})=0\}$.

В силу утверждения в) теоремы 2 § 41 эти условия эквивалентны тому, что $\tilde{M}=M+\mathrm{Ker}\, A_{1,-1}$.

9. Лемма. *Условие* а) *эквивалентно регулярности элемента вида $\lambda h+v+\lambda^2 a$ ($\lambda\in\mathbf{C}$, $\lambda\neq 0$) в алгебре Ли G.*

Доказательство. Форма $A_{\alpha,\beta}$ задается кососимметрическим оператором $\varkappa$: $G\to G$ вида

$$\varkappa(\xi+\eta)=([\xi, (\alpha+\beta)h]+[\eta, (\alpha+\beta)v+\alpha a])+$$
$$+([\xi, (\alpha+\beta)v+\alpha a]+[\eta, \alpha h]), \quad (608)$$

где $\xi\in H$, $\eta\in V$, $[\xi, (\alpha+\beta)h]+[\eta+(\alpha+\beta)v+\alpha a]\in H$, $[\xi, (\alpha+\beta)v+$ $+\alpha a]+[\eta, \alpha h]\in V$. Сделаем замену $\xi'=\xi/\lambda$, $\lambda=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$. Тогда ядро формы $A_{\alpha,\beta}$ совпадает с пространством решений системы уравнений

$$\begin{aligned}&[\xi', \lambda h]+[\eta, v+\lambda^2 a]=0,\\ &[\xi', v+\lambda^2 a]+[\eta, \lambda h]=0,\end{aligned} \quad (609)$$

т. е. $\xi'+\eta$ принадлежит централизатору элемента $\lambda h+v+\lambda^2 a$ в алгебре Ли G. Поэтому условие $\operatorname{rk} A_{\alpha,\beta}=R=\dim G-\operatorname{ind} G$ эквивалентно регулярности элемента $\lambda h+v+\lambda^2 a$ в алгебре Ли G.

Поскольку $\operatorname{ind} G=\operatorname{ind} G_\theta$ (см. [52]), то второе условие эквивалентно регулярности элемента $h+v$ как вектора двойственного пространства G_θ^*.

Рассмотрим теперь третье условие. Ядро формы $A_{1,-1}$ совпадает с пространством решений системы уравнений

$$[\eta, a]=0, \quad [\eta, h]+[\xi, a]=0. \tag{610}$$

Введем следующие обозначения: $C(a)$ — централизатор элемента a в алгебре Ли G, $V(a)=V\cap C(a)$, $\operatorname{St}(a)^\perp$ — ортогональное дополнение к $\operatorname{St}(a)$ в H относительно формы Киллинга, $V(a)^\perp$ — ортогональное дополнение к $V(a)$ в V. Имеют место разложения в прямые суммы $G=H+V=\operatorname{St}(a)+\operatorname{St}(a)^\perp+V(a)+V(a)^\perp$, $C(a)=V(a)+\operatorname{St}(a)$. Здесь мы учли то, что элемент $a\in V$ полупрост.

В системе уравнений (610) положим $h=h_1+h_2$, $\xi=\xi_1+\xi_2$, где h_1, $\xi_1\in\operatorname{St}(a)$, h_2, $\xi_2\in\operatorname{St}(a)^\perp$. Тогда второе уравнение системы запишется в виде

$$[\eta,\ h_1]=0, \quad [\eta,\ h_2]+[\xi_2,\ a]=0. \tag{611}$$

Второе из уравнений (611) однозначно разрешимо относительно $\xi_2\in\operatorname{St}(a)^\perp$ при любых $\eta\in V(a)$, $h_2\in\operatorname{St}(a)^\perp$. Элемент $\xi_1\in\operatorname{St}(a)$ в уравнения не входит, т. е. $\operatorname{St}(a)\subset\operatorname{Ker} A_{1,-1}$. Из этого следует, что размерность ядра формы $A_{1,-1}$ равна сумме $\dim\operatorname{St}(a)+\dim W$, где W — пространство решений следующей системы уравнений относительно η:

$$[\eta,\ a]=0, \quad [\eta,\ h_1]=0. \tag{612}$$

10. Лемма. *Почти для всех $h_1\in\operatorname{St}(a)$ имеет место равенство* $\dim W=\operatorname{ind} G-\operatorname{ind}\operatorname{St}(a)$.

Доказательство. Пусть K — подалгебра Картана в $\operatorname{St}(a)$. Утверждается, что централизатор подалгебры K в $C(a)$ есть подалгебра Картана в $C(a)$ (и, следовательно, в G, поскольку $\operatorname{ind} G=\operatorname{ind} C(a)$). Достаточно проверить, что централизатор подалгебры K в $C(a)$ коммутативен. Предположим противное, т. е. существуют такие элементы $h'+v'$, $h''+v''\in C(a)$, что $[K, h'+v']=[K, h''+v'']=0$, но $[h'+v', h''+v'']\neq 0$. Легко видеть, что h', $h''\in K$, поэтому $[K, v']=[K, v'']=0$, но $[v', v'']\neq 0$. Имеем $[K, [v', v'']]=0$; с другой стороны, $[v', v'']\in\operatorname{St}(a)$. Подалгебра $K\subset\operatorname{St}(a)$ является максимальной коммутативной в $\operatorname{St}(a)$. Следовательно, $[v', v'']\in K$. Ограничение формы Киллинга на K не вырождено, поэтому найдется $x\in K$ такой, что $(x,[v',v''])\neq 0$, но это невозможно, так как $[x,v']=[x,v'']=0$. Далее, существует такой элемент $h_1\in K$, что его централизатор в $C(a)$ совпадает с централизатором подалгебры K в $C(a)$, причем такие элементы образуют в K множество, являющееся дополнением к некоторому конечному семейству гиперплоскостей. Централизатор такого элемента h_1 в алгебре Ли $C(a)$ совпадает с прямой суммой $K+W$, где W — пространство решений системы (612). Следовательно, $\dim W=\operatorname{ind} C(a)-\dim K=$ $=\operatorname{ind} G-\operatorname{ind}\operatorname{St}(a)$. Лемма доказана.

Пусть $h=h_1+h_2\in H$, причем $h_1\in\operatorname{St}(a)$ удовлетворяет условиям леммы 10, в частности, h_1 регулярен в $\operatorname{St}(a)$. Пусть K — подалгебра Картана в $\operatorname{St}(a)$, содержащая h_1. Рассмотрим разложение $\operatorname{St}(a)=K+B^++B^-$, где B^+ и B^- — нильпотентные подалгебры в $\operatorname{St}(a)$, отвечающие соответственно множествам положительных и отрицательных корней. Утверждается, что ограничение формы $A_{0,1}$ на подпространство B^++B^- не вырождено. В самом деле, на этом пространстве форма $A_{0,1}$ имеет вид $A_{0,1}(b_1,b_2)=(h_1,[b_1,b_2])$. Поэтому невырожденность следует из регулярности элемента h_1 в $\operatorname{St}(a)$. Следовательно, размерность подпространства $K_{1,-1}$, т. е. ядра формы $A_{0,1}$, ограниченной на ядро формы $A_{1,-1}$, не превосходит

$$\dim\ \operatorname{Ker} A_{1,-1}\ -\dim(B^++B^-)=$$
$$=\dim\ \operatorname{St}(a)+\operatorname{ind} G-\operatorname{ind}\ \operatorname{St}(a)-(\dim\ \operatorname{St}(a)-\operatorname{ind}\ \operatorname{St}(a))=\operatorname{ind} G. \quad (613)$$

Итак, мы показали, что третье условие выполнено почти для всех элементов $h+v\in H+V$. Аналогичное утверждение справедливо, очевидно, и для второго условия. Наконец, первое условие означает, что комплексная кривая $\lambda h+v+\lambda^2 a$ $(\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\})$ не пересекает множество сингулярных элементов S в алгебре Ли G. Ясно, что это условие также выполняется почти для всех $h+v$, так как $\operatorname{codim} S=3>1$. Итак, можно выбрать точку $h+v$, в которой условия а), б), в) выполняются одновременно. В этой точке $\tilde{M}=M+\operatorname{Ker} A_{1,-1}$.

Покажем, что $M+\operatorname{Ker} A_{1,-1}=M+\operatorname{St}(a)$. Все предыдущие обозначения сохраняются. Рассмотрим цепочку вложений $M+(B^++B^-)\subset M+\operatorname{St}(a)\subset M+\operatorname{Ker} A_{1,-1}$. Сумма $M+(B^++B^-)$ прямая. В противном случае существует $\xi\in M\cap(B^++B^-)$, $\xi\neq 0$. Тогда $A_{0,1}(\xi,B^++B^-)=0$, так как $B^++B^-\subset M$. Это противоречит невырожденности формы $A_{0,1}$ на B^++B^-. Теперь остается сравнить размерности:

$$\dim(M+\operatorname{Ker} A_{1,-1})=\dim M+\dim\ \operatorname{Ker} A_{1,-1}-$$
$$-\dim M\cap\operatorname{Ker} A_{1,-1}=\dim M+\dim\ \operatorname{St}(a)+\operatorname{ind} G-\operatorname{ind}\ \operatorname{St}(a)-$$

$$-\operatorname{ind} G=\dim M+\dim \operatorname{St}(a)-\operatorname{ind} \operatorname{St}(a)=$$
$$=\dim M+\dim(B^{+}+B^{-})=\dim(M+B^{+}+B^{-}), \qquad (614)$$

здесь использовано то, что $\dim M \cap \operatorname{Ker} A_{1,-1}=\operatorname{ind} G$.

§ 44. Скобки Пуассона, связанные с лиевыми пучками

1. Определение. Пусть L — конечномерное линейное пространство. Линейное семейство структур алгебры Ли на L называется *лиевым пучком*. Пусть $([x, y]_\alpha)_{\alpha\in J}$ — соответствующее семейство коммутаторов на L. Линейность означает, что множество параметров J является линейным пространством, при этом $a[x, y]_\alpha+b[x, y]_\beta=[x, y]_{a\alpha+b\beta}$, $a\alpha+b\beta\in J$. Размерность пространства J называется *размерностью лиева пучка*.

2. Согласованные скобки. Если на пространстве L задан лиев пучок $([x, y]_\alpha)_{\alpha\in J}$, то на двойственном пространстве естественным образом возникает линейное семейство согласованных скобок Пуассона $(\{f, g\}_\alpha)_{\alpha\in J}$, где $\{f, g\}_\alpha(x)=(x, [df, dg]_\alpha)$. Для того чтобы применить общую конструкцию § 36, мы должны рассмотреть произвольное двумерное семейство скобок Пуассона $(\{f, g\}_\gamma)_{\gamma\in J_0}$, где $J_0\subset J$ — двумерное подпространство, содержащее α. Итак, пусть на конечномерном комплексном пространстве L задан пучок $([x, y]_\alpha)_{\alpha\in J}$ размерности два, $J\cong\mathbf{C}^2$. На L^* рассмотрим соответствующее семейство скобок Пуассона $(\{f, g\}_\alpha)_{\alpha\in J}$. Пусть максимум рангов скобок из этого семейства равен R, т. е. $R=\dim L-\min\limits_{\alpha\in J}\operatorname{ind} L_\alpha$. Следуя общему методу, рассмотрим семейство функций F_J, состоящее из центральных функций скобок $(\{f, g\}_\alpha)_{\alpha\in J}$, ранга R, т. е.

$$F_J=\bigcup_{\alpha\in J,\ \operatorname{ind} L_\alpha=\dim L-R} I(L_\alpha), \qquad (615)$$

где $I(L_\alpha)$ — кольцо инвариантов коприсоединенного представления группы Ли N_α, отвечающей алгебре Ли L_α, задаваемой коммутатором $[x, y]_\alpha$. Будем предполагать, что алгебры Ли из пучка обладают полными полиномиальными наборами инвариантов (или рациональными инвариантами), например, все алгебры Ли L_α алгебраические.

3. Обозначения. а) Множество сингулярных элементов в L^* в смысле коприсоединенного представления алгебры Ли L_α, $\alpha\in J$, обозначим S_α. б) Стационарную подалгебру вектора $x\in L^*$ относительно коприсоединенного действия алгебры Ли L_α на L^* обозначим $\operatorname{Ann}_\alpha(x)$. в) Центр алгебры Ли L_α обозначим Z_α.

4. Предложение. *Пространство Z_α является подалгеброй в любой алгебре Ли L_β, $\beta \in J$.*

Доказательство. Легко видеть, что для любых двух алгебр L_α и L_β из пучка выполняется тождество

$$[[\xi, \eta]_\alpha, \zeta]_\beta + [[\xi, \eta]_\beta, \zeta]_\alpha +$$
$$+[[\eta, \zeta]_\beta, \xi]_\alpha + [[\eta, \zeta]_\alpha \xi]_\beta + [[\zeta, \xi]_\alpha, \eta]_\beta + [[\zeta, \xi]_\beta, \eta]_\alpha = 0. \quad (616)$$

Пусть $\xi, \eta \in Z_\alpha$. Тогда из тождества (616) немедленно следует, что $[[\xi, \eta]_\beta, \zeta]_\alpha = 0$ для любого $\xi \in L$, т. е. $[\xi, \eta]_\beta \in Z_\alpha$. Следовательно, Z_α — подалгебра в L_β.

5. Замечание. Условие (616) означает в точности, что операция $[x, y]_\beta$ является коциклом в смысле когомологий алгебры Ли L_α относительно присоединенного представления, см. [291].

Пучки, которые будут рассматриваться ниже, обладают одним весьма удобным свойством; все алгебры Ли пучка за исключением конечного числа (с точностью до пропорциональности параметра) изоморфны между собой. Будем предполагать, что это условие выполнено, и фиксируем какой-нибудь представитель L_ω из этих алгебр «общего положения». Пусть $L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_k}$ — все с точностью до пропорциональности алгебры Ли из пучка, которые не являются алгебрами общего положения.

6. Элементы центра Z_{α_i} мы будем рассматривать как линейные функции на L^*. Любая функция $v \in Z_{\alpha_i}$ принадлежит кольцу инвариантов $I(L_{\alpha_i})$ и поэтому коммутирует со всеми функциями из F_J относительно произвольной скобки $\{f, g\}_\alpha$, $\alpha \neq \lambda\alpha_i$. Обозначим F_i полный инволютивный набор функций на $Z^*_{\alpha_i}$ относительно скобки $\{f, g\}_\omega$ «общего положения». Скобка $\{f, g\}_\omega$ естественным образом ограничивается на $Z^*_{\alpha_i}$, так как Z_{α_i} — подалгебра в L_ω. Функция $f \in F_i$ продолжается на все пространство L^* с помощью естественной проекции $\pi_i: L^* \to Z^*_{\alpha_i}$, см. § 35. В силу выбора семейств F_i и теоремы 4 § 36 семейство $F_J \cup F_1 \cup \ldots \cup F_k$ является инволютивным относительно любой скобки $\{f, g\}_\alpha$, $\alpha \in J$.

7. Предложение (А. В. Болсинов). *Пусть для любой алгебры Ли L_{α_i} выполняется равенство* $\operatorname{ind} L_{\alpha_i} = \operatorname{ind} L_\omega + \dim Z_{\alpha_i} - \operatorname{ind} Z_{\alpha_i}$ *(здесь Z_{α_i} рассматривается как подалгебра в L_ω, т. е. алгебра Ли с коммутатором $[x, y]_\omega$). Пусть для алгебры Ли L_ω «общего положения» выполнено условие* $\operatorname{codim} S_\omega \geqslant 2$. *Тогда инволютивное семейство $F_J \cup F_1 \cup \ldots \cup F_k$ является полным на L^* относительно скобки $\{f, g\}_\omega$.*

Доказательство. Условие $\operatorname{codim} S_\omega \geqslant 2$ гарантирует, что существуют точки $x \in L^*$, которые являются регулярными в смысле коприсоединенного представления всех алгебр Ли L_α из пучка одновременно. Действительно, достаточно показать, что дополнение к множеству $S_J = \bigcup_{\alpha \in J} S_\alpha$ в L^* содержит всюду плотное открытое множество. Множество S_J является объединением множеств коразмерности два за исключением, быть может, конечного числа $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_k}$. При этом объединение происходит фактически не по двум, а по одному параметру, поскольку $S_\alpha = S_{\lambda_\alpha}$ (удобно считать, что параметр α пробегает не множество $J \cong \mathbf{C}^2$, а соответствующее проективное пространство $P(J) \cong \mathbf{C}P^1$). Поэтому размерность S_J может увеличиться только на единицу по сравнению с размерностью типичного множества S_ω, т. е. $\operatorname{codim} S_J \geqslant 1$.

Потребуем далее, чтобы точка $x \in L^*$ удовлетворяла одновременно трем условиям: а) точка x регулярна как ковектор в смысле всех алгебр Ли L_α из пучка, т. е. $x \in L^* \setminus S_J$; б) ковектор $\pi_i(x)$ регулярен в $Z^*_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, k$, где π_i: $L^* \to Z^*_{\alpha_i}$ — естественная проекция, Z_{α_i} рассматривается как подалгебра в L_ω; в) все инволютивные семейства F_i полны в точке x, или, более строго, инволютивные семейства F_i на $Z^*_{\alpha_i}$ полны в точках $\pi_i(x)$.

Обозначим буквой M подпространство в L, порожденное дифференциалами функций $f \in F_J$ в точке x. Пусть $\tilde{M}$ — косоортогональное дополнение к M в L относительно 2-формы, задаваемой произвольной скобкой $\{f, g\}_\alpha$. Напомним, что $\tilde{M}$ не зависит от выбора скобки $\{f, g\}_\alpha$, $\alpha \neq 0$, в силу теоремы 2 § 41. Покажем, что $\tilde{M} = M + \operatorname{Ann}_{\alpha_1}(x) + \ldots + \operatorname{Ann}_{\alpha_k}(x)$. Из теоремы 2 § 41 следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\dim K_i = \operatorname{ind} L_\omega$, $i = 1, \ldots, k$, где $K_i = \{\xi \in \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x) \mid (x, [\xi, \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x)]_\omega) = 0\}$. Рассмотрим подпространство $K'_i = \{\xi \in Z_{\alpha_i} \mid (x, [\xi, Z_{\alpha_i}]_\omega) = 0\}$. Другими словами, K'_i — это аннулятор ковектора $\pi_i(x)$ в подалгебре $Z_{\alpha_i} \subset L_\omega$. Точка $\pi_i(x)$ регулярна в $Z^*_{\alpha_i}$, поэтому $\dim K'_i = \operatorname{ind} Z_{\alpha_i}$.

8. Лемма. *Пусть на конечномерном пространстве K задана кососимметрическая форма B, K' — подпространство в K, $B \mid K'$ — ограничение формы B на K'. Тогда имеет место оценка* $\dim K - \dim \operatorname{Ker} B \geqslant \dim K' - \dim \operatorname{Ker} B \mid K'$.

Доказательство. Разность $\dim K - \dim \operatorname{Ker} B$ равна рангу формы B на K; аналогично, ранг ограничения $B \mid K'$ равен $\dim K' - \dim \operatorname{Ker} B \mid K'$, но ранг ограничения не превосходит ранга формы на объемлющем пространстве.

Из утверждения леммы следует, что $\dim \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x) - \dim K_i \geqslant \dim Z_{\alpha_i} - \dim K'_i$. По условию $\dim \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x) = \operatorname{ind} L_{\alpha_i} = \operatorname{ind} L_\omega + \dim Z_{\alpha_i} - \operatorname{ind} Z_{\alpha_i}$. Поэтому $\dim K_i = \operatorname{ind} L_\omega$, так как всегда $\dim K_i \geqslant \operatorname{ind} L_\omega$.

Отметим еще одну оценку, которая пригодится в дальнейшем:

$$\operatorname{ind} L_\omega \leqslant \dim K_i \leqslant \dim \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x) - \dim Z_{\alpha_i} + \operatorname{ind} Z_{\alpha_i} \qquad (617)$$

или

$$\operatorname{ind} L_{\alpha_i} \geqslant \operatorname{ind} L_\omega + \dim Z_{\alpha_i} - \operatorname{ind} Z_{\alpha_i}. \tag{618}$$

Итак, $\tilde{M} = M + \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x) + \ldots + \operatorname{Ann}_{\alpha_k}(x)$. Покажем, что на самом деле $\tilde{M} = M + Z_{\alpha_1} + \ldots + Z_{\alpha_k}$. Ясно, что $M + Z_{\alpha_i} \subset \subset M + \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x)$. Подпространство Z_{α_i} содержится в косоортогональном дополнении $\tilde{M}$ к M, поэтому $M \cap Z_{\alpha_i} \subset K_i'$, следовательно,

$$\dim(M + Z_{\alpha_i}) = \dim M + \dim Z_{\alpha_i} - \dim(M \cap Z_{\alpha_i}) \geqslant$$
$$\geqslant \dim M + \dim Z_{\alpha_i} - \operatorname{ind} Z_{\alpha_i}. \tag{619}$$

С другой стороны,

$$\dim(M + \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x)) = \dim M + \dim \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x) - \dim(M \cap \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x)) =$$
$$= \dim M + \operatorname{ind} L_{\alpha_i} - \dim K_i = \dim M + \operatorname{ind} L_{\alpha_i} - \operatorname{ind} L_\omega. \tag{620}$$

Поэтому $\dim(M + Z_{\alpha_i}) \geqslant \dim(M + \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x))$. Следовательно, $M + Z_{\alpha_i} = M + \operatorname{Ann}_{\alpha_i}(x)$ и $\tilde{M} = M + Z_{\alpha_1} + \ldots + Z_{\alpha_k}$. Пусть M_i — подпространство в Z_{α_i}, порожденное дифференциалами функций $f \in F_i$ в точке x. По построению семейства F_i полны в точке x, поэтому подпространства M_i являются максимальными изотропными подпространствами в Z_{α_i} в смысле скобки $\{x, y\}_\omega$. Учитывая, что все подпространства M_i косоортогональны между собой, заключаем, что подпространство $M + M_1 + M_2 + \ldots + M_k$ является максимальным изотропным в L. Это означает полноту семейства $F_J \cup F_1 \cup \ldots \cup F_k$ в точке $x \in L^*$ и, следовательно, на всем пространстве L^*.

9. Замечание. Если условие об изоморфизме почти всех алгебр Ли из пучка не выполняется, то нужно ввести несколько иное определение алгебры Ли «общего положения», накладывая на такие алгебры Ли два условия: а) $\operatorname{ind} L_\alpha = \min\limits_{\beta \in J} \operatorname{ind} L_\beta = r$; б) $\operatorname{codim} S_\alpha = \max\limits_{\beta \in J,\, \operatorname{ind} L_\beta = r} \operatorname{codim} S_\beta$. Все алгебры Ли любого двумерного лиева пучка за исключением конечного числа являются алгебрами «общего положения» в этом смысле.

10. Замечание. Утверждение предложения 7 допускает следующую эквивалентную переформулировку. Рассмотрим семейство функций $F = F_J \cup Z_{\alpha_1} \cup \ldots \cup Z_{\alpha_k}$. Из предложения 4 следует, что F — алгебра Ли относительно любой из скобок $\{x, y\}_\alpha$, $\alpha \in J$. Предложение 7 фактически утверждает, что алгебра Ли F является полной в некоммутативном смысле относительно скобки $\{x, y\}_\omega$.

11. Конец этого параграфа будет посвящен изучению некоторых важных конкретных примеров лиевых пучков: неприводимых замкнутых лиевых пучков.

12. Определение. Лиев пучок называется *неприводимым*, если не существует нетривиального подпространства $K \subset L$, которое является идеалом для всех элементов пучка одновременно.

Пусть A — линейная операция на L, а B — билинейная операция. Определим действие операции A на множестве всех билинейных операций, полагая

$$A(B)(X, Y) = A(B(X, Y)) - B(AX, Y) - B(X, AY), \qquad X, Y \in L. \tag{621}$$

Если $([x, y]_\alpha)$, $\alpha \in J$, — лиев пучок на L, то для $x \in L$, $\alpha \in J$ определим оператор $A_{x,\alpha}(y) = [x, y]_\alpha$. Будем говорить, что лиев пучок *замкнут*, если множество коммутаторов $([x, y]_\alpha)_{\alpha \in J}$ инвариантно относительно действия всех операторов $A_{x,\gamma}$. Имеется полная классификация замкнутых неприводимых лиевых пучков.

13. Теорема (И. Л. Кантор, Д. Б. Персиц [117]). *Неприводимые замкнутые лиевы пучки над* $\mathbf{C}$ *исчерпываются следующим списком:*

1) *L — множество кососимметрических матриц размера $n \times n$; J — множество симметрических матриц размера $n \times n$; коммутатор $[X, Y]_A$, $A \in J$, задается формулой $[X, Y]_A = XAY - YAX$;*

2) *L — множество симметрических матриц размера $n \times n$; J — множество кососимметрических матриц размера $n \times n$; коммутатор $[X, Y]_A$, $A \in J$, задается формулой $[X, Y]_A = XAY - YAX$;*

3) *L — множество матриц размера $n \times m$; J — множество матриц размера $m \times n$; коммутатор $[X, Y]_A$, $A \in J$, задается формулой $[X, Y]_A = XAY - YAX$;*

4) *L — четномерное линейное пространство, $J = L$; коммутатор $[X, Y]_A$, $A \in J$, задается формулой $[X, Y]_A = \langle A, X\rangle Y - \langle A, Y\rangle X - \langle X, Y\rangle A$, где $\langle X, Y\rangle$ — невырожденная кососимметрическая форма на L;*

5) *одномерный пучок, порожденный простой алгеброй Ли.*

14. Программа изучения. Установим, какие неизоморфные алгебры Ли содержатся в данном пучке. Укажем индексы этих алгебр Ли, их центры и явный вид инвариантов коприсоединенного представления типичных алгебр Ли из пучка (множество параметров J содержит открытое по Зарисскому множество U, такое, что алгебры Ли L_A и L_B изоморфны для любых $A, B \in U$; такие алгебры Ли называются типичными или алгебрами «общего положения» в пучке $\{L_C\}_{C \in J}$). Наконец, проверим полноту инволютивных семейств, построенных по некоторому двумерному подпучку.

Случай 1.

15. Замечание. Пусть $A, B \in J$ — симметрические матрицы. Если C — некоторая невырожденная матрица, то алгебры Ли

L_A и L_{C^TAC} изоморфны. Изоморфизм устанавливается отображением $f(X)=CXC^T$. Отсюда следует, что класс алгебры Ли L_A, т. е. множество алгебр L_B, изоморфных L_A, определяется рангом матрицы A, так как в комплексном случае любая симметрическая матрица A ранга k может быть приведена к стандартному виду

$$E_k=\left\|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & 0 & & & \\ & 0 & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right\| \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\ \ddots\\1\end{array}}\right\}k . \qquad (622)$$

16. Предложение. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{ind} L_{E_k}=\operatorname{ind}\operatorname{so}(n)+\dim\operatorname{so}(n-k)-\operatorname{ind}\operatorname{so}(n-k). \qquad (623)$$

Доказательство. Алгебра Ли L_{E_k} является полупрямой суммой алгебры Ли $\operatorname{so}(k)$ и радикала V, который естественным образом разлагается в прямую сумму V_1+V_2. На V_1 действие алгебры Ли $\operatorname{so}(k)$ является суммой $n-k$ экземпляров простейшего представления $\operatorname{so}(k)$ на $\mathbf{C}^k$, на V_2 действие $\operatorname{so}(k)$ тривиально, $[V_1, V_2]\subset V_2$, V_2 — центр алгебры Ли L_{E_k}. Центр Z_k алгебры Ли L_{E_k} является подалгеброй в алгебре $L_{E_n}=\operatorname{so}(n)$, изоморфной $\operatorname{so}(n-k)$. Поэтому формулу (623), которую надо доказать, можно переписать в виде

$$\operatorname{ind} L_{E_k}=\operatorname{ind} L_{E_n}+\dim Z_k-\operatorname{ind} Z_k, \qquad (624)$$

где Z_k рассматривается как подалгебра в $\operatorname{so}(n)$ (ср. с предложением 7). Рассмотрим два случая. Пусть сначала $n-k$ четно. Отождествим пространства L и L^* при помощи невырожденного скалярного произведения $(X, Y)=\operatorname{tr} XY$. Тогда коприсоединенное действие алгебры Ли L_A на $L^*=L$ имеет вид $(\operatorname{ad}^*_A)_X Z=AXZ-ZXA$. Положим

$$Z=\left\|\begin{array}{c|c} Z_1 & 0 \\ \hline 0 & Z_2 \end{array}\right\|, \qquad (625)$$

где $\det Z_2\neq 0$, элемент Z_1 полупрост и регулярен в $\operatorname{so}(k)$. Тогда аннулятор ковектора Z в алгебре Ли L_{E_k} имеет вид

$$\operatorname{Ann}_{E_k}(z)=\left\{\left\|\begin{array}{c|c} H & 0 \\ \hline 0 & V_2 \end{array}\right\| \;\middle|\; H\in K\right\}, \qquad (626)$$

где K — подалгебра Картана в $\mathrm{so}(k)$, содержащая Z_1. Таким образом, $\dim \mathrm{Ann}_{E_k}(Z) = \operatorname{ind} \mathrm{so}(k) + \dim \mathrm{so}(n-k) = \operatorname{ind} \mathrm{so}(n) + \dim \mathrm{so}(n-k) - \operatorname{ind} \mathrm{so}(n-k)$. Следовательно, $\operatorname{ind} L_{E_k} \leqslant \dim \mathrm{Ann}_{E_k}(z)$, при доказательстве леммы 8 была получена обратная оценка (618). Поэтому $\operatorname{ind} L_{E_k} = \operatorname{ind} L_{E_n} + \dim Z_k - \operatorname{ind} Z_k$.

Пусть $n-k$ нечетно. Положим

$$Z = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & Z_2 \end{array} \right\| . \tag{627}$$

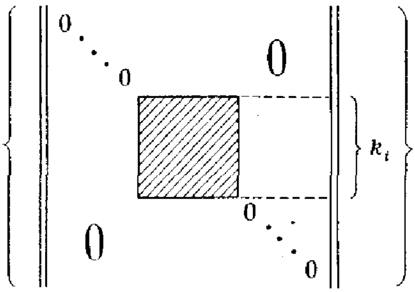
Тогда

$$\mathrm{Ann}_{E_k}(Z) = \left\{ \left\| \begin{array}{c|c|c|c} H & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & & \\ \hline 0 & 0 & & \end{array} \right\| \; H \in K \right\} . \tag{628}$$

Подсчитывая размерность, получим оценку $\operatorname{ind} L_{E_k} \leqslant \dim \mathrm{Ann}_{E_k} Z = \operatorname{ind} L_{E_n} + \dim Z_k - \operatorname{ind} Z_k$. Из (618) получим обратную оценку.

17. Инварианты. Если $\det A \neq 0$, то кольцо полиномиальных инвариантов алгебры Ли L_A при отождествлении L с L^* состоит из функций вида $f(CXC^T)$, где $f \in I(L_{E_n})$, $E_n = CAC^T$. Кольцо $I(L_{E_n})$ порождается функциями вида $\operatorname{tr} Y^{2l}$ $(2l < n)$, когда n нечетно, и $\operatorname{tr} Y^{2l}$ $(2l < n)$, $\operatorname{Pf}(Y) = \sqrt{\det Y}$, когда n четно. Поэтому в качестве образующих кольца $I(L_A)$ можно взять функции $\operatorname{tr}(CXC^T)^{2l} = \operatorname{tr}(XA^{-1})^{2l}$ $(2l < n)$, когда n нечетно, и $\operatorname{tr}(XA^{-1})^{2l}$ $(2l < n)$, $\operatorname{Pf}(X)$, когда n четно.

18. Инволютивное семейство. Рассмотрим двумерный пучок, порожденный алгебрами L_E и L_{B_0}, где $E = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$, $B_0 = \operatorname{diag}(\underbrace{b_1, \ldots, b_1}_{k_1}, \underbrace{b_2, \ldots, b_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{b_s, \ldots, b_s}_{k_s})$. Следуя общей конструкции, выделим из пучка $(L_{\lambda E + \mu B_0})_{\lambda, \mu \in \mathbf{C}}$ все алгебры Ли, которые не изоморфны $L_E \cong \mathrm{so}(n)$. Ясно, что такими будут только алгебры L_{C_i}, где $C_i = B_0 - b_i E$. Центр Z_i алгебры Ли L_{C_i} имеет вид

$Z_i =$  (629)

и как подалгебра в $L_E = \mathrm{so}(n)$ изоморфен $\mathrm{so}(k_i)$. Пусть F_i — произвольное полное инволютивное семейство функций на $Z_i^* \cong \mathrm{so}(k_i)^*$.

19. Теорема (А. В. Болсинов). *Семейство функций* $F_{B_0} = F_1 \cup \ldots \cup F_s \cup \left(\bigcup\limits_{\lambda \neq -b_i} I(L_{B_0 + \lambda E}) \right)$ *на пространстве* L^* *инволютивно и полно относительно скобки Пуассона, отвечающей алгебре Ли* $L_E = \mathrm{so}(n)$, *или, более общим образом, относительно скобок* $\{x, y\}_{\lambda E + \mu B_0}$ *таких, что* $\operatorname{ind} L_{\lambda E + \mu B_0} = \operatorname{ind} L_E$.

Доказательство вытекает из предложения 7. В самом деле, $\operatorname{ind} L_{C_i} = \operatorname{ind} L_E + \dim Z_i - \operatorname{ind} Z_i$ (см. п. 16) и $\operatorname{codim} S_E = 3 > 2$, где S_E — множество сингулярных элементов в $L^* \cong \mathrm{so}(n)^*$.

20. Следствие. *Пусть* $C_i = B_0 - b_i E$. *Для того чтобы получить полное инволютивное семейство на* L^* *относительно скобки* $\{x, y\}_{C_i}$, *достаточно добавить к семейству* F_{B_0} *функции из центра* Z_i.

Доказательство. Нужно проверить, сколько новых функций добавится к семейству F_{B_0}. Набор F_i выражается через линейные функции $v \in Z_i$. Набор F_i состоит из $2^{-1}(\dim Z_i + \operatorname{ind} Z_i)$ функционально независимых функций, поэтому добавится не более $\dim Z_i - 2^{-1}(\dim Z_i + \operatorname{ind} Z_i)$ функций (на самом деле ровно столько, иначе набор F_{B_0} можно было бы расширить с сохранением инволютивности относительно скобки $\{x, y\}_E$, что невозможно). Итак, в наборе F_{B_0} было $2^{-1}(\dim L_E + \operatorname{ind} L_E)$ независимых функций. Добавив $2^{-1}(\dim Z_i - \operatorname{ind} Z_i)$ новых функций, получим семейство, состоящее из $2^{-1}(\dim L_E + \operatorname{ind} L_E + \dim Z_i - \operatorname{ind} Z_i) = 2^{-1}(\dim L_{C_i} + \operatorname{ind} L_{C_i})$ функций, т. е. полное относительно скобки $\{x, y\}_{C_i}$.

21. Следствие. *Семейство функций* $\bigcup\limits_{(\lambda, \mu) \neq (0, 0)} (I(L_{\lambda A_0 + \mu B}))$ *инволютивно и полно на* L^* *относительно скобки* $\{x, y\}_{A_0}$, *где* $A_0 = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0)$, *отвечающей алгебре Ли* $E(n-1)$.

Доказательство. Пусть $A_0 = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0)$. Алгебра Ли L_{A_0} изоморфна в этом случае алгебре Ли $E(n-1)$ группы движений $(n-1)$-мерного евклидова пространства. Пусть $B=\operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, $b_n \neq 0$. Тогда $\max\limits_{\lambda, \mu} \operatorname{rk}(\lambda A_0+\mu B)=n$, и можно применить к пучку, натянутому на алгебры Ли L_{A_0} и L_B, теорему 19, поскольку такой пучок изоморфен стандартному $(b_i \neq b_j)$.

Случай 2.

22. Замечание. Алгебры Ли из пучка $(L_A)_{A \in J}$ разбиваются на $[n/2]+1$ классов, каждый из которых содержит изоморфные между собой алгебры. Алгебры Ли L_A и L_B принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A=\operatorname{rk} B$. Канонические представители классов имеют вид L_{F_k}, $F_k \in J$, где

$$F_k = \left\| \begin{array}{cccccc}
\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & & 0 & & \\
& \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & & 0 & \\
& & \ddots & & & \\
& 0 & & \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & \\
& & & & 0 & \\
& & 0 & & & \ddots \\
& & & & & 0
\end{array}\right\| \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} 2k \qquad (630)$$

Алгебра Ли L_{F_k} является полупрямой суммой симплектической алгебры Ли $\operatorname{sp}(2k, \mathbf{C})$ и радикала V, который разлагается в прямую сумму V_1+V_2. На V_1 действие алгебры Ли $\operatorname{sp}(2k, \mathbf{C})$ является суммой $n-2k$ экземпляров простейшего представления ρ_0 размерности $2k$. На V_2 действие тривиально, $[V_1, V_1]=V_2$, V_2 — центр алгебры Ли L_{F_k}. Если n четно, то алгебра Ли $L_{F_{n/2}}$ изоморфна симплектической алгебре Ли $\operatorname{sp}(n, \mathbf{C})$.

23. Предложение. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{ind} L_{F_k}=\frac{1}{2}(n-2k)(n-2k+1)+k. \qquad (631)$$

Доказательство. Продемонстрируем метод вычисления индекса, который удобно применять в случае, когда стационарные подалгебры общего положения представления Ad^* сопряжены. Этот метод предложен А. Г. Элашвили [297] и основан на следующем утверждении.

24. Лемма. *Пусть G — комплексная конечномерная алгебра Ли, $x \in G^*$ — некоторый элемент, а* $\operatorname{Ann}(x)$ — *стационарная под-*

алгебра этого ковектора x относительно коприсоединенного представления группы Ли P, отвечающей алгебре Ли G. Пусть $\mathrm{Ann}(x)\cap[G, \mathrm{Ann}(x)]=0$. Тогда элемент x регулярен и $\mathrm{ind}\, G=\dim \mathrm{Ann}(x)$.

Доказательство. Обозначим K_x подпространство в G^*, состоящее из ковекторов $y\in G^*$ таких, что $\mathrm{Ann}(y)\subset\mathrm{Ann}(x)$, т. е. $K_x=\{y\in G^*\,|\,\mathrm{ad}_\xi^* y=0, \quad \xi\in\mathrm{Ann}(x)\}$. Легко видеть, что $K_x=[G, \mathrm{Ann}(x)]^\perp$. Кроме того, $\mathrm{Ann}(x)^\perp=T_xO(x)$. Поэтому условие $\mathrm{Ann}(x)\cap[G, \mathrm{Ann}(x)]=0$ в точности означает, что $G^*=K_x+T_xO(x)$. Выпуская орбиты из точек $y\in K_x$, близких к $x\in G^*$, мы заполним этими орбитами некоторую окрестность точки x. Ясно, что стационарные подалгебры точек этих орбит сопряжены аннулятору $\mathrm{Ann}(x)$. Итак, имеется открытое подмножество в G^*, состоящее из точек $v\in G^*$, стационарные подалгебры которых имеют одинаковую размерность. Ясно, что это возможно лишь в том случае, когда все эти точки регулярны. Лемма доказана.

Докажем теперь предложение 23, подобрав подходящим образом ковектор $x\in L^*$. Как и в предыдущем случае, коприсоединенное действие алгебры Ли L_{F_k} имеет вид $(\mathrm{ad}_{F_k})_Y^* X=F_kYX-XYF_k$, если отождествить L с L^* с помощью скалярного произведения $\mathrm{tr}\, XY$. Положим

$$X=\begin{Vmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{Vmatrix}, \tag{632}$$

X_1 — регулярный ковектор в смысле алгебры Ли $\mathrm{sp}(2k, \mathbf{C})$, $\det X_2\neq 0$. Тогда

$$\mathrm{Ann}_{F_k}(X)=\left\{\left\Vert\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline 0 & Y_3 \end{array}\right\Vert \;\middle|\; h\in H\right\}, \tag{633}$$

где Y_3 — произвольная матрица, $Y_3^T=Y_3$, H — стационарная подалгебра элемента X_1 в смысле алгебры Ли $\mathrm{sp}(2k, \mathbf{C})$, т. е. подалгебра Картана в $\mathrm{sp}(2k, \mathbf{C})$. Очевидно, что $\mathrm{Ann}_{F_k}(X)\cap\cap[\mathrm{Ann}_{F_k}(X), L]_{F_k}=0$. Поэтому

$$\dim L_{F_k}=\dim\mathrm{Ann}_{F_k}(X)=\dim H+\dim V_2=$$
$$=k+\frac{1}{2}(n-2k)(n-2k+1). \tag{634}$$

Отметим, что при доказательстве предложения 16 этот метод применить нельзя, так как стационарные подалгебры минимальной размерности не сопряжены.

25. Обозначения. Положим

$$
B=\left\|\begin{array}{ccc}
\begin{array}{|cc|}0 & b_1\\ -b_1 & 0\\ \hline\end{array} & & 0\\
 & \ddots & \\
0 & & \begin{array}{|cc}\hline 0 & b_{n/2}\\ -b_{n/2} & 0\end{array}
\end{array}\right\|,\quad
B'=\left\|\begin{array}{cccc}
\begin{array}{c|}0\\ \hline\end{array} & & & \\
 & \begin{array}{|cc|}0 & b_1'\\ -b_1' & 0\\ \hline\end{array} & & 0\\
 & & \ddots & \\
 & 0 & & \begin{array}{|cc}\hline 0 & b'_{\frac{n-1}{2}}\\ -b'_{\frac{n-1}{2}} & 0\end{array}
\end{array}\right\| \tag{635}
$$

Обозначим Z_k подпространство в L вида

$$
Z_k=\left\{\left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0\\ \hline 0 & \end{array}\right\|\begin{array}{l}\}\,2k\\ \\ \end{array}\right\} \tag{636}
$$

Пусть

$$
A_i=\left\|\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & 0 & & 0 & & \\
 & & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \underbrace{\boxed{a_i}}_{2} & & \\
 & 0 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & \begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & 0\end{array}
\end{array}\right\|
\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}2i\\ \left.\begin{array}{c}\\ \end{array}\right\}2\\ \\ \\ \end{array} \tag{637}
$$

26. Теорема (А. В. Болсинов). а) *Пусть n — четное число. Тогда семейство функций* $\left(\bigcup\limits_{\lambda\neq b_i} I\left(L_{B-\lambda F_k}\right)\right)\bigcup A_1\bigcup\ldots\bigcup A_k\bigcup Z_k$ *является инволютивным и полным на пространстве L^* относительно скобки $\{x, y\}_{F_k}$.* б) *Пусть n — нечетное число. Тогда семейство функций* $\bigcup\limits_{\lambda} I\left(L_{F_k+\lambda B'}\right)$ *является инволютивным и полным на пространстве L^* относительно скобки $\{x, y\}_{F_k}$.*

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 19 и является непосредственным следствием предложений 7 и 23.

Случай 3.

27. Замечание. Как и в предыдущих двух случаях, алгебры Ли L_A и L_B изоморфны между собой тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$. Рассмотрим только случай алгебр Ли L_A «общего положения», т. е. $\operatorname{rk} A = \min(n, m)$. Пусть для определенности $n \geqslant m$. Тогда алгебра Ли L_A является полупрямой суммой алгебры Ли $\mathrm{gl}(m)$ и коммутативного идеала V, действие $\mathrm{gl}(m)$ на V является прямой суммой $n-m$ экземпляров простейшего представления.

28. Теорема (А. В. Болсинов). *Пусть $n \neq 0 \mod (n-m)$, либо $n=m$. Тогда для любой матрицы A ранга m найдется матрица B ранга m такая, что семейство функций $\bigcup\limits_{\lambda} I(L_{A+\lambda B})$ инволютивно и полно на L^* относительно скобки $\{x, y\}_A$.*

Доказательство. Если $m=n$, то без ограничения общности можно считать, что $A = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$. Пусть $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Тогда все алгебры Ли пучка, порожденного алгебрами Ли L_A и L_B, за исключением абелевой алгебры L_0 имеют индекс n. Поэтому семейство $\bigcup\limits_{\lambda} I(L_{A+\lambda B})$ инволютивно. Полнота следует из того, что почти все алгебры из этого пучка изоморфны $L_A \cong \mathrm{gl}(m)$ и $\operatorname{codim} S_A = 3 > 2$, где $S_A \subset L^*$ — множество сингулярных элементов в смысле коприсоединенного действия алгебры Ли L_A. Если $n > m$, то положим

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 0 & & 0 & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \quad 0 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \quad 1 \end{matrix} \right\|. \tag{638}$$

Тогда $\operatorname{rk}(\lambda A + \mu B) = m$ при всех $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, не обращающихся одновременно в нуль. Поэтому все нетривиальные алгебры Ли из пучка $(L_{\lambda A + \mu B})_{\lambda, \mu \in \mathbf{C}}$ изоморфны между собой. Кроме того, $\operatorname{codim} S_A \geqslant 2$ в случае $n \neq 0 \mod (n-m)$. Оценка коразмерности множества S_A легко проводится по индукции с использованием общей методики оценки коразмерности множества сингулярных элементов в случае полупрямых сумм, см. п. 19 § 45. Теперь инволютивность и полнота семейства $\bigcup\limits_{\lambda} I(L_{A+\lambda B})$ непосредственно следуют из предложения 7.

29. Замечание. Если $n = 0 \mod (n-m)$, то алгебра Ли L_A является фробениусовой (см. [298], [478]), поэтому $\operatorname{codim} S_A = 1$, кольца инвариантов $I(L_{A+\lambda B})$ тривиальны.

Случай 4.

30. Замечание. Все алгебры Ли L_A изоморфны между собой (исключение — абелева алгебра Ли L_0). Покажем, что все эти алгебры Ли являются фробениусовыми, т. е. $\operatorname{ind} L_A=0$ при $A\neq 0$. Отождествим L и L^* с помощью формы $\langle X, Y\rangle$. Тогда коприсоединенное действие алгебры Ли L_A на L^* запишется в виде $(\mathrm{ad}_A)^*_X Y=\langle A, X\rangle Y+\langle A, Y\rangle X+\langle X, Y\rangle A$.

Пусть $\langle A, Y\rangle\neq 0$. Решим уравнение $(\mathrm{ad}^*_A)_X Y=0$ относительно X. Ясно, что X линейно выражается через Y и A. Положим $X=\alpha Y+\beta A$ и подставим в выражение для $(\mathrm{ad}^*_A)_X Y$, получим

$$\langle A, \alpha Y+\beta A\rangle Y+\langle A, Y\rangle(\alpha Y+\beta A)+\langle \alpha Y+\beta A, Y\rangle A=$$
$$=2\langle A, Y\rangle(\alpha Y+\beta A)=0. \quad (639)$$

Итак, $\alpha Y+\beta A=0$, т. е. $X=0$ и $\operatorname{ind} L_A=0$. Следовательно, пользуясь методом построения инволютивного семейства по двумерному лиеву пучку, мы не сможем получить полного семейства на L^*. Полное семейство функций в инволюции на L^* можно построить другим способом, взяв произвольное лагранжево подпространство в L, содержащее A. Легко видеть, что это подпространство является абелевой подалгеброй размерности $2^{-1}\dim L$ и поэтому полно и инволютивно на L^*.

§ 45. Инволютивные семейства функций на полупрямых суммах

1. Замечание. Пусть K — полупростая алгебра Ли, $\rho\colon K\to \operatorname{End}(V)$ — линейное представление, $G=K+V$ — полупрямая сумма. Задача построения полных инволютивных наборов на двойственном пространстве G^* решалась в работах А. Г. Реймана [228], В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко [266], А. В. Браилова [48], [49], Т. А. Певцовой [212]. Здесь мы докажем общую теорему о существовании полного инволютивного семейства функций.

Докажем следующую теорему, принадлежащую А. В. Болсинову.

2. Теорема. *Пусть K — классическая комплексная простая алгебра Ли, $\rho\colon K\to \operatorname{End}(V)$ — неприводимое представление, $G=K+V$ — полупрямая сумма. Тогда сдвиги инвариантов коприсоединенного представления Ad^* на произвольный регулярный ковектор $a\in G^*$ образуют полный инволютивный набор на G^*.*

Прежде чем доказывать эту теорему, напомним основные моменты, связанные с коприсоединенным представлением полупрямых сумм алгебр Ли. Начнем с общего понятия расширения алгебры Ли.

3. Определение. Алгебра Ли $(E, [x, y])$ называется *расширением* алгебры Ли L с помощью абелевой алгебры Ли A, если задана точная последовательность алгебр Ли:

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} L \to 0. \qquad (640)$$

Выберем в E такое подпространство S, что $E=i(A)\oplus S$.

4. Лемма. *Каждое расширение E алгебры Ли L с помощью A определяет представление ρ алгебры Ли L в пространстве A.*

Доказательство. Пусть $m\in L$, $a\in A$. Определим действие $\rho(m)$ алгебры Ли L в A формулой $i\rho(m)a=[x, ia]$, где x — такой элемент в E, что $\pi(x)=m$. Из тождества Якоби $[[x, y], ib]=[x, [y, ib]]-[y, [x, ib]]$ получим равенство $\rho([m, n])=\rho(m)\rho(n)-\rho(n)\rho(m)$, где $\pi(x)=m$, $\pi(y)=n$.

5. Лемма. *Произвольное расширение $(E, [x, y])$ алгебры Ли L с помощью A определяет некоторый класс когомологий $\beta\in H^2(L; A)$ алгебры Ли L* со значениями в A.

Доказательство. Фиксируем подпространство S такое, что $E=i(A)\oplus S$. Ограничение $\hat{\pi}=\pi|S$ задает изоморфизм между S и L. Обозначим p_1 (соответственно p_2) каноническую проекцию пространства E на iA (соответственно на S). Для $m, n\in L$ выберем такие элементы $\hat{x}, \hat{y}\in S$, что $\pi(\hat{x})=m$, $\pi(\hat{y})=n$. Положим $iC(m, n)=p_1[\hat{x}, \hat{y}]$, $C\colon L\times L\to A$ — кососимметрическое полилинейное отображение, т. е. 2-коцепь алгебры Ли L со значениями в A. Более того, $\delta C(x_1, x_2, x_3)=0$, т. е. C — коцикл. Пусть теперь S' — другое дополнительное подпространство к $i(A)$, т. е. $E=i(A)\oplus S'$. Тогда $C'-C=\delta T$, где $T\colon L\to A$ — линейное отображение, т. е. 1-коцепь алгебры Ли L со значениями в A.

6. Лемма. *Пусть задано представление $\rho\colon L\to \mathrm{End}(A)$ алгебры Ли L в векторном пространстве A, рассматриваемом как абелева алгебра Ли, и класс когомологий $\beta\in H^2(L; A)$. Тогда существует расширение E алгебры Ли L с помощью A, ассоциированное с представлением ρ и классом β.*

Доказательство. Положим $E=A\oplus L$. Определим на E коммутатор: $[a, x]=\rho(x)a$, если $x\in L$, $a\in A$, и

$$[x_1+a_1, x_2+a_2]=[x_1, x_2]+C(x_1, x_2)+\rho(x_1)a_2-\rho(x_2)a_1, \qquad (641)$$

если $x_i\in L$, $a_i\in A$ и $[a, b]=0$, $a, b\in A$. Ясно, что E — искомое расширение.

7. Определение. Пусть есть два расширения E_1 и E_2 алгебры Ли L с помощью A. Они называются *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм $f\colon E_1\to E_2$ алгебр Ли, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{\pi_1} & L \\ \| & & \downarrow f & & \| \\ A & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{\pi_2} & L \end{array} \qquad (642)$$

коммутативна.

8. Предложение. *Два расширения* E_1, E_2 *алгебры Ли* L *с помощью* A *эквивалентны тогда и только тогда, когда они определяют одно и то же представление* ρ *алгебры Ли* L *на* A *и один и тот же элемент когомологий* $\beta \in H^2(L; A)$.

9. Определение. Расширение, отвечающее нулевому классу когомологий $\beta \in H^2(L; A)$ называется *несущественным* расширением или *полупрямой суммой* $E = L_\rho + A$. Если $\beta \neq 0$, то расширение *существенное*.

10. Замечание. Поскольку для каждого конечномерного модуля V над полупростой алгеброй Ли G выполняется равенство $H^2(G; V) = 0$, то любое расширение полупростой алгебры Ли несущественно, т. е. является полупрямой суммой.

11. Пример. Построим существенное расширение. Пусть D, как обычно, алгебра Ли векторных полей на многообразии M^n, а Ω_p — пространство p-форм на M. Алгебра Ли D представлена в пространстве Ω_p с помощью операции производной Ли (см. п. 1 § 21), поэтому можно рассмотреть пространство когомологий $H^2(D; \Omega_p)$, см. [291]. Выберем на M^n связность Γ^i_{jk} без кручения, ее производная Ли определяется формулой

$$(L_X\Gamma)^k_{li} = \partial_{il}X^k + X^r\partial_r\Gamma^k_{li} - \partial_r X^k\Gamma^r_{li} + \partial_l X^r\Gamma^k_{ri} + \partial_i X^r\Gamma^k_{lr}, \qquad (643)$$

где $X \in D$. Равенство

$$C_\Gamma(X, Y)_{ij} = (L_X\Gamma)^k_{li}(L_Y\Gamma)^l_{kj} - (L_Y\Gamma)^k_{li}(L_X\Gamma)^l_{kj} \qquad (644)$$

задает 2-коцепь алгебры Ли D со значением Ω_2. Легко видеть, что $\delta C_\Gamma(x, y, z) = 0$, т. е. это коцикл и, следовательно, он определяет некоторый класс когомологий. Оказывается, что этот класс когомологий ненулевой для любого многообразия M^n, причем он не зависит от выбора связности, т. е. получили выделенный класс когомологий. Итак, имеем существенное расширение E алгебры Ли D с помощью Ω_2, которое называется *универсальным расширением* алгебры Ли D.

12. Определение. Для произвольного представления ρ алгебры Ли G в вещественном пространстве V *индексом* этого представления называется число $\operatorname{ind}\rho = \{$коразмерность орбиты общего положения представления группы Ли, отвечающей алгебре Ли $G\}$. Напомним, что индекс коприсоединенного представления по определению — это *индекс алгебры Ли*, $\operatorname{ind} G = \operatorname{ind} \operatorname{ad}^*$ [88].

Пусть G — некоторая алгебра Ли, $W \subset G$ — векторное подпространство, $x \in G^*$ — элемент двойственного к G пространства. Определим подпространство

$$W^x = \operatorname{Ann}(W, x) = \{g \in W \mid \operatorname{ad}^*_g x = 0\} \subset V. \qquad (645)$$

Если W — подалгебра, то и W^x также подалгебра.

13. Теорема (М. Раис, [478], [479]). *Пусть G — полупрямая сумма алгебры Ли H по представлению ρ алгебры Ли H в V. Тогда для элемента $x \in G^*$ общего положения выполнено равенство*

$$\operatorname{ind} G = \operatorname{ind} H^x + \operatorname{ind} \rho^*, \tag{646}$$

где ρ^* — представление H в V^*, двойственное к ρ.

Доказательство. Пусть $x \in G^*$, $x = x_H + x_V$, $x_H \in H^*$, $x_V \in V$,— такой элемент, что выполнены следующие условия: а) $\dim \rho^* = \dim H - \dim H^x$; б) $\operatorname{ind} H^{x_V} = \inf \{\operatorname{ind} H^y, \quad y \in V^*\}$; в) $\dim \operatorname{Ann}(H^{x_V}, x | H^{x_V}) = \operatorname{ind} H^{x_V}$. Все такие элементы x образуют непустое открытое по Зарисскому множество в G^*. Таким образом, элементы общего положения в G^* удовлетворяют условиям а)—в). Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что из а)—в) следует равенство $\dim G^x = \operatorname{ind} H^x + \operatorname{ind} \rho^*$. Пусть $g = g_H + g_V \in G^x$. Тогда

$$\operatorname{ad}^*_{g_H}(x_H) + \operatorname{ad}^*_{g_V}(x_V) = 0, \tag{647}$$

$$\operatorname{ad}^*_{g_H}(x_V) = 0. \tag{648}$$

Из (648) следует, что $g_H \in H^{x_V}$. Рассмотрим ограничение равенства (647) на H^{x_V}:

$$\langle \operatorname{ad}^*_{g_V}(x_V), H^{x_V} \rangle = -\langle \operatorname{ad}^*_{H^{x_V}}(x_V), g_V \rangle = 0; \tag{649}$$

$$\langle \operatorname{ad}^*_{g_H}(x_H), H^{x_V} \rangle = \langle x_H, \operatorname{ad}^*_{g_H}(H^{x_V}) \rangle =$$
$$= \langle x_H | H^{x_V}, \operatorname{ad}_{g_H}(H^{x_V}) \rangle = \langle \operatorname{ad}^*_{g_H}(x_H | H^{x_V}), H^{x_V} \rangle. \tag{650}$$

Таким образом, ограничивая (647) на H^{x_V}, получим $(\operatorname{ad}^*_{g_H})(x | H^{x_V}) = 0$. Пусть π_H — проекция из G в H вдоль V. Мы доказали, что $\pi_H(G^x) \subset \operatorname{Ann}(H^{x_V}, x | H^{x_V})$. Пусть, напротив, $g_H \in \operatorname{Ann}(H^{x_V}, x | H^{x_V})$. Тогда уравнение (648) выполняется автоматически. Покажем, что можно так подобрать $g_V \in V$, что будет выполнено и уравнение (647).

14. Лемма. *Если $y \in H^*$ и $y | H^{x_V} = 0$, то найдется такой элемент $g_V \in V$, что $y = \operatorname{ad}^*_{g_V}(x_V)$.*

Доказательство. Выше было показано, что $(\operatorname{ad}^*_{g_V}) x_V | H^{x_V} = 0$, поэтому достаточно проверить, что $\dim (\operatorname{ad}_V)^* x_V = \dim \{y \in H^* | y | H^{x_V} = 0\}$. Очевидно, что $\dim \{y \in H^* | y | H^{x_V} = 0\} = \dim H / H^{x_V}$. С другой стороны, $\dim (\operatorname{ad}_V)^* x_V = \dim V / V^{x_V}$. Пусть $L(X, Y) = \langle x_V, [X, Y] \rangle$ — билинейная кососимметричная форма на G. Легко проверяется, что H и V — изотропные относительно формы L подпространства и $H^{x_V} \oplus V^{x_V} = \operatorname{Ker} L$, откуда следует, что $\dim V / V^{x_V} = \dim H / H^{x_V}$. Лемма доказана.

Поскольку $((\operatorname{ad}_{g_H})^* x_H) | H^{x_V} = 0$, то в силу леммы можно подобрать g_V так, что

$$(\operatorname{ad}_{g_H})^* x_H + (\operatorname{ad}_{g_V})^* x_V = 0. \tag{651}$$

Отсюда следует, что $g_H \in \pi_H(G^x)$ и $\pi_H(G^x) = \mathrm{Ann}(H^{x_V}, x|H^{x_V})$. Теперь подсчитаем размерность слоя проекции $\pi_H\colon G^x \to \pi_H(G^x)$. Из уравнения (647) следует, что $\dim(\pi_H)^{-1}(g_H) = \dim V^{x_V}$, откуда $\dim G^x = \dim \mathrm{Ann}(H^{x_V}, x|H^{x_V}) + \dim V^{x_V}$. Теперь заметим, что $\dim V^{x_V} = \dim V - \dim V/V^{x_V}$. Выше было доказано, что $\dim V/V^{x_V} = \dim H/H^{x_V}$, поэтому $\dim V^{x_V} = \dim V - \dim H + \dim H^{x_V} = \mathrm{ind}\,\rho^*$. Теперь из условия в) получаем $\dim G^x = \mathrm{ind}\, H^{x_V} + \mathrm{ind}\,\rho^*$. Теорема доказана.

15. Формулы. Пусть Q — конечномерная группа Ли (с алгеброй Ли H), действующая в линейном пространстве V, $P = Q \underset{\Phi}{\times} V$ — соответствующее полупрямое произведение. Алгебра Ли G группы Ли P является полупрямой суммой $G = H \underset{\varphi}{+} V$ алгебры Ли H и пространства V по индуцированному представлению $\varphi = d\Phi\colon H \to \mathrm{End}(V)$. Пространство G^* будем отождествлять с прямой суммой $H^* + V^*$, полагая $H^* = V^\perp$, $V^* = H^\perp$. Тогда коприсоединенное представление группы Ли P и алгебры Ли G на V запишутся так:

$$\mathrm{Ad}^*_{(g,a)}(x+v) = \left((\mathrm{Ad}^*_Q)_g x + A(a, \Phi^*(g)v)\right) + \Phi^*(g)v, \tag{652}$$

$$\mathrm{ad}^*_{(\xi,a)}(x+v) = \left((\mathrm{ad}^*_H)_\xi x + A(a, v)\right) + \varphi^*(\xi)v, \tag{653}$$

здесь первая скобка в (652) и (653) принадлежит H^*, а вторая — пространству V^*, где Ad^*_Q — коприсоединенное действие группы Ли Q на H^*, ad^*_H — коприсоединенное действие алгебры Ли H на H^*, Φ^* — действие группы Ли Q на V^*, сопряженное с Φ, φ^* — действие алгебры Ли H на V^*, сопряженное с φ, $A\colon V \times V^* \to H^*$ — линейное преобразование, определенное равенством $(A(a, v), \xi) = (\varphi(\xi)a, v)$, $g \in Q$, $\xi \in H$, $a \in V$, $x \in H^*$, $v \in V^*$.

16. Определение. Элемент $v \in V^*$ называется *слабо регулярным*, если для стационарной подалгебры $\mathrm{St}(v) \subset H$ выполняется условие $\dim \mathrm{St}(v) + \mathrm{ind}\,\mathrm{St}(v) = \min\limits_{u \in V^*}(\dim \mathrm{St}(u) + \mathrm{ind}\,\mathrm{St}(u))$. Элементы общего положения являются слабо регулярными; обратное, вообще говоря, неверно. Пусть $S = \{x + v \in H^* + V^* \mid \dim \mathrm{Ann}(x+v) > \mathrm{ind}\, G\}$ — множество сингулярных элементов в G^*.

17. Предложение. *Элемент $v \in V^*$ слабо регулярен тогда и только тогда, когда существует такой элемент $x \in H^*$, что $x + v \in S$.*

Доказательство. Пусть $x + v \in G^*$, $\pi\colon H^* \to \mathrm{St}(v)^*$ — естественная проекция. Вычислим размерность $\dim \mathrm{Ann}(x+v)$. Имеем

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Ann}(x+v) &= \dim \mathrm{Ann}\,\pi(x) + \mathrm{codim}\, O(v) = \\ &= \dim \mathrm{Ann}\,\pi(x) + \dim V - \dim H + \dim \mathrm{St}(v) \geqslant \\ &\geqslant (\mathrm{ind}\,\mathrm{St}(v) + \dim \mathrm{St}(v)) + \dim V - \dim H,\end{aligned} \tag{654}$$

причем если ковектор $\pi(x)$ регулярен в $\mathrm{St}(v)^*$, то в точности $\dim \mathrm{Ann}(x+v) = (\mathrm{ind}\, \mathrm{St}(v) + \dim \mathrm{St}(v)) + \dim V - \dim H$. Таким образом,

$$\min_{x \in H^*} \dim \mathrm{Ann}(x+v) = \mathrm{ind}\, \mathrm{St}(v) + \dim \mathrm{St}(v) + \dim V - \dim H; \quad (655)$$

$$\mathrm{ind}\, G = \min_{x+v \in H^* + V^*} \dim \mathrm{Ann}(x+v) =$$

$$= \min_{u \in V^*} (\mathrm{ind}\, \mathrm{St}(u) + \dim \mathrm{St}(u)) + \dim V - \dim H. \quad (656)$$

Утверждение сразу следует из этих равенств.

18. Обозначения. Символом S_V обозначим дополнение к множеству слабо регулярных точек в пространстве V^*, символом S_{St_0} — множество сингулярных элементов в St_0^* в смысле представления ad^*, где $\mathrm{St}_0 \subset H$ — стационарная подалгебра общего положения.

19. Предложение. *Условие* $\mathrm{codim}\ S \geqslant 2$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\mathrm{codim}\, S_V \geqslant 2$ *и* $\mathrm{codim}\, S_{\mathrm{St}_0} \geqslant 2$.

Доказательство. Рассмотрим сечение множества $S \subset H^* + V^*$ аффинными плоскостями вида $v + H^*$, $v \in V^*$. Легко видеть, что условие $\mathrm{codim}\, S = 1$ эквивалентно выполнению одного из следующих двух условий: 1) множество точек $v \in V^*$, для которых коразмерность пересечения $(v+H^*) \cap S$ в плоскости $v+H^*$ равна единице, открыто по Зарисскому в V^* и непусто; 2) множество точек $v \in V^*$ таких, что $v + H^* \subset S$, имеет коразмерность один в V^*.

В силу предложения 17 условие 2) в точности означает, что $\mathrm{codim}\, S_V = 1$. Рассмотрим пересечение $(v+H^*) \cap S$. Пусть $v + H^* \not\subset S$, т. е. точка $v \in V_H^*$ слабо регулярна. Элемент $x+v$ содержится в пересечении $(v+H^*) \cap S$ тогда и только тогда, когда $\pi(x) \in S_{\mathrm{St}(v)} \subset \mathrm{St}(v)^*$, где $S_{\mathrm{St}(v)}$ — множество сингулярных элементов в $\mathrm{St}(v)^*$. Поэтому $\mathrm{codim}\,(v+H^*) \cap S = \mathrm{codim}\, S_{\mathrm{St}(v)}$. Следовательно, первое условие означает, что существует непустое открытое по Зарисскому множество $U' \subset V^*$, состоящее из элементов v таких, что $\mathrm{codim}\, S_{\mathrm{St}(v)} = 1$. Поскольку множество точек общего положения тоже открыто по Зарисскому, то условие 1) эквивалентно тому, что $\mathrm{codim}\, S_{\mathrm{St}_0} = 1$. Предложение доказано.

20. Доказательство теоремы п. 2. Пусть сначала $\dim K > \dim V$, что эквивалентно нетривиальности стационарной подалгебры общего положения [3]. В работе А. Г. Элашвили [297] получен список представлений простых алгебр Ли, удовлетворяющих этому условию, и найдены стационарные подалгебры общего положения. В данном случае существует открытое по Зарисскому непустое подмножество в V, все точки которого имеют сопряженные стационарные подалгебры. Именно эти точки естественно назвать точками общего положения, и при доказательстве теоремы мы будем придерживаться такой терминологии. В силу критерия полноты семейства сдвигов и предложения п. 19 достаточно проверить выполнение двух условий: 1) $\operatorname{codim} S_V \geqslant 2$; 2) $\operatorname{codim} S_{\mathrm{St}_0} \geqslant 2$.

Известно, что представления φ и φ^*, вообще говоря, не эквивалентны даже для полупростых алгебр Ли, однако полупрямые суммы $K \underset{\varphi}{+} V$ и $K \underset{\varphi^*}{+} V^*$ изоморфны как алгебры Ли. Поэтому будем рассматривать только одно из этих представлений. Разберем два случая: 1) стационарная подалгебра общего положения редуктивна; 2) стационарная подалгебра общего положения не редуктивна.

21. Случай 1. В этом случае автоматически $\operatorname{codim} S_{\mathrm{St}_0} \geqslant 2$, где St_0 — стационарная подалгебра общего положения, которая предполагается редуктивной. Остается проверить первое условие. Элемент $v_n \in V^*$ назовем нильпотентным, если замыкание его орбиты $O(v_n) \subset V^*$ при действии группы T, отвечающей алгебре Ли K, на V^* содержит нуль. Пусть, как и выше, S_V — дополнение в V^* к подмножеству слабо регулярных элементов.

22. Лемма. *Если существует слабо регулярный нильпотентный элемент $v_n \in V^*$, то* $\operatorname{codim} S_V \geqslant 2$.

Доказательство. Предположим, что условие $\operatorname{codim} S_V \geqslant 2$ не выполняется, т. е. S_V является алгебраической гиперповерхностью и задается уравнением $P(v)=0$, где P — некоторый однородный полином. Кроме того, множество S_V инвариантно относительно действия группы T, отвечающей алгебре Ли K, поэтому полином P является полуинвариантом представления φ^*, но у полупростых алгебр Ли не существует нетривиальных характеров, поэтому на самом деле P — инвариант. Пусть v_n — слабо регулярный нильпотентный элемент. Тогда $P|O(v_n)=\mathrm{const}$, но замыкание орбиты $O(v_n)$ содержит нуль, следовательно, $P|O(v_n)=0$ и $P(v_n)=0$, т. е. $v_n \in S_V$. Противоречие доказывает лемму.

23. Замечание. Если алгебра Ли K простая классическая, представление φ^* неприводимо и $\dim V \leqslant \dim K$, то слабо регулярные нильпотентные элементы всегда существуют. Для того чтобы их найти, достаточно иметь классификацию типов орбит представления φ^*. Если представление φ^* не слишком сложно, то изучение типов орбит не представляет больших трудностей. Наиболее нетривиальными являются случаи представлений в пространстве тривекторов, спинорных и полуспинорных представлений. Однако и в этих случаях необходимые для нас сведения получены в работах [493], [84], [222], [361],

Таблица 2

№	K	φ или φ^*	$\mathrm{St}(n_n)$	St_0	$\dim \mathrm{St}_0$ $\dim \mathrm{St}(v_n)$	$\operatorname{ind} \mathrm{St}_0$ $\operatorname{ind} \mathrm{St}(v_n)$
1	$\mathrm{sl}(2n)$	$\Lambda^2 \rho_0$	$(\mathrm{sp}(2n-2)\times \mathrm{sl}(2)) \underset{\psi}{+} \mathbf{C}^{4n-4}$, $\psi=\rho_0+\rho_0'$	$\mathrm{sp}(2n)$	$n(2n+1)$	n
2	$\mathrm{sl}(n)$	$S^2\rho_0$	$\mathrm{so}(n-1) \underset{\rho_0}{+} \mathbf{C}^{n-1}$	$\mathrm{so}(n)$	$\dfrac{n(n-1)}{2}$	$\left[\dfrac{n}{2}\right]$
3	$\mathrm{sl}(n)$	ad	$\mathbf{C}^{n-1}$	$\mathbf{C}^{n-1}$	$n-1$	$n-1$
4	$\mathrm{sl}(6)$	$\Lambda^3\rho_0$	$\mathrm{sl}(3) \underset{\mathrm{ad}}{+} \mathbf{C}^8$	$\mathrm{sl}(3)\times\mathrm{sl}(3)$	16	4
5	$\mathrm{sl}(7)$	$\Lambda^3\rho_0$	$(\mathrm{sl}(2)\times\mathrm{sl}(2))+\mathbf{C}^8$ $S^3\rho_0\times\rho_0'$	g_2	14	2
6	$\mathrm{sl}(8)$	$\Lambda^3\rho_0$	$\mathrm{sl}(2) \underset{S^7\rho_0}{+} \mathbf{C}^5$	$\mathrm{sl}(3)$	8	2
7	$\mathrm{so}(n)$	ρ_0	$\mathrm{so}(n-2) \underset{\rho_0}{+} \mathbf{C}^{n-2}$	$\mathrm{so}(n-1)$	$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$	$\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$
8	$\mathrm{so}(n)$	ad	$\mathbf{C}^{[n/2]}$	$\mathbf{C}^{[n/2]}$	$[n/2]$	$[n/2]$
9	$\mathrm{so}(7)$	spin	$\mathrm{sl}(3) \underset{\rho_0+\rho_0^*}{+} \mathbf{C}^6$	g_2	14	2

10	$\mathfrak{so}(9)$	spin	$\mathfrak{g}_2 + \underset{\rho_0}{\mathbf{C}^7}$	$\mathfrak{so}(7)$	21	3
11	$\mathfrak{so}(11)$	spin	$\mathfrak{sp}(4) + \underset{\psi}{U_{14}}$	$\mathfrak{sl}(5)$	24	4
12	$\mathfrak{so}(13)$	spin	$\mathfrak{sl}(2) + \underset{\psi}{U_{13}}$	$\mathfrak{sl}(3) \times \mathfrak{sl}(3)$	16	4
13	$\mathfrak{sp}(2n)$	$\Lambda^2\rho_0 = \varphi + \tau$	$\mathfrak{sl}(2) + \underset{\psi}{U_{3(n-1)}}$	$\underbrace{\mathfrak{sl}(2) \times \dots \times \mathfrak{sl}(2)}_{n}$	$3n$	n
14	$\mathfrak{sp}(2n)$	ad	$\mathbf{C}^n$	$\mathbf{C}^n$	n	n
15	$\mathfrak{sp}(6)$	$\Lambda^3\rho_0 = \varphi + \rho_0$	$\mathfrak{sl}(2) + \underset{S^4\rho_0}{\mathbf{C}^5}$	$\mathfrak{sl}(3)$	8	2
16	$\mathfrak{so}(12)$	$s-$spin	$\mathfrak{sp}(6) + \underset{\psi}{\mathbf{C}^{14}}$, $\Lambda^2\rho_0 = \psi + \tau$	$\mathfrak{sl}(6)$	35	5
17	$\mathfrak{so}(14)$	$s-$spin	$\mathfrak{g}_2 + \underset{\mathrm{ad}}{\mathbf{C}^{14}}$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_2$	28	4

[386]. Классификация орбит действия группы Ли $\mathrm{SL}(n)$ в пространстве тривекторов получена при $n=6$, 7 Рейхелем и Схоутеном [493], при $n=8$ — Г. Б. Гуревичем [84]. Классификация орбит действия группы $\mathrm{Sp}(6, \mathbf{C})$ в пространстве тривекторов размерности 6 получена В. Л. Поповым в [222], в этой же работе дана классификация спиноров размерности 14. Классификация спиноров до размерности двенадцать включительно проведена Игузой [386], размерности 13 — Э. Б. Винбергом и В. Г. Кацем [361]. Список стационарных подалгебр слабо регулярных нильпотентных элементов $v_n \in V^*$ приведен в табл. 2. В таблице указаны также для сравнения стационарные подалгебры общего положения, индексы и размерности. Слабая регулярность элементов следует из равенств $\dim \mathrm{St}(v_n) = \dim \mathrm{St}_0$, $\mathrm{ind}\, \mathrm{St}(v_n) = \mathrm{ind}\, \mathrm{St}_0$.

24. Пояснения к табл. 2. Использованы следующие обозначения: U_l — унипотентный некоммутативный радикал размерности l; $\mathbf{C}^l$ — коммутативная алгебра размерности l; ρ_0 — простейшее представление; τ — одномерное тривиальное представление; в графе 11 $\psi = \rho_0 + \rho_0 + \Lambda^2 \rho$ и $U_{14} = V_1 + V_2 + V_3$, $[V_2, V_3] = V_1$; в графе 12 $\psi = \rho_0 + \tau + \rho_0 + \mathrm{ad} + \rho_0 + \tau + \rho_0$ и $U_{13} = V_1 + \ldots + V_7$, $[V_i, V_j] \subset V_{ij}$ при $i+j \leqslant 7$, исключения: $[V_2, V_2] = [V_2, V_4] = 0$; в графе 13 $\psi = \underbrace{\mathrm{ad} + \ldots + \mathrm{ad}}_{n-1\ \text{раз}}$ и $U_{3(n-1)} = V_1 + \ldots + V_{n-1}$, $[V_i, V_j] = V_{i+j}$, $i+j \leqslant n-1$, другими словами, $\mathrm{sl}(2) \underset{\downarrow}{+} U_{3(n-1)} = \mathrm{sl}(2) \otimes A$, где $A = \mathbf{C}[x]/\mathbf{C}[x^n]$.

Разберем один случай подробно.

25. Пусть $K = \mathrm{sp}(n, \mathbf{C})$, $\varphi = \Lambda^2 \rho_0$. Элементы алгебры Ли $\mathrm{sp}(n, \mathbf{C})$ представим в стандартном виде

$$X = \begin{Vmatrix} D & C \\ B & -D^t \end{Vmatrix}, \tag{657}$$

где $C = C^t$, $B = B^t$. Представление $\varphi = \Lambda^2 \rho_0$ реализуется в пространстве кососимметрических матриц $\varphi(X) A = XA + AX^t$, $A^t = -A$. Положим

$$A_0 = \left\Vert \begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & & \\ -1 & 0 & & \\ & -1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & 0 \end{matrix} & 0 \end{array} \right\Vert \tag{658}$$

Решая уравнение $XA_0+A_0X^t=0$, находим стационарную подалгебру

$$\mathrm{St}(A_0)=\left\{\left\|\begin{array}{ccccc|ccccc} a_0 & a_1 & \cdots & & a_{n-1} & b_{n-1} & & \cdots & b_1 & b_0\\ & \ddots & & & \vdots & \vdots & & & \iddots & \\ 0 & & \ddots & & a_1 & b_1 & \iddots & & 0 & \\ & & & & a_0 & b_0 & & & & \\ \hline & & & & c_0 & -a_0 & & & & \\ 0 & & & \iddots & c_1 & -a_1 & \ddots & & 0 & \\ & & \iddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ c_0 & c_1 & \cdots & & c_{n-1} & -a_{n-1} & & \cdots & -a_1 & -a_0 \end{array}\right\|\right\} \qquad (659)$$

Легко проверяется, что $\mathrm{St}(A_0)=\mathrm{sl}(2)\otimes A$, где $A=\mathbf{C}[x]/\mathbf{C}[x^n]$. Поэтому $\operatorname{ind}\mathrm{St}(A_0)=\operatorname{ind}\mathrm{sl}(2)\dim A=n=\operatorname{ind}\mathrm{St}_0$, см. [253], $\dim\mathrm{St}(A_0)=\dim\mathrm{St}_0$. Остается проверить, что элемент A_0 нильпотентен. Имеется следующее простое достаточное условие нильпотентности.

26. Лемма. *Если элемент $v_n\in V$ является собственным вектором ненулевого веса для некоторого оператора $\varphi(X)$, $X\in K$, то v_n нильпотентен.*

Доказательство. Рассмотрим кривую $\gamma(t)=tv_n$, $t\in[0, 1]$. Утверждается, что $\gamma(t)\subset O(v_n)$. Достаточно проверить, что $\dot\gamma(t)\in T_{\gamma(t)}O(\gamma(t))$, т. е. $v_n\in T_{tv_n}O(tv_n)$ для всех $t\in[0, 1]$. Это условие выполнено, так как в силу линейности представления $T_{tv_n}O(tv_n)=T_{v_n}O(v_n)$, и по предложению существует такой элемент $X\in K$, что $\varphi(X)v_n=\alpha v_n\in T_vO(v_n)$, $\alpha\neq 0$.

Элемент A_0 удовлетворяет сформулированному достаточному условию леммы 26, так как является собственным вектором единичного веса оператора $\varphi(X)$ при $X=\mathrm{diag}\,(1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n)$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

27. Случай 2. Стационарная подалгебра общего положения нередуктивна. Имеются 4 представления с таким свойством: а) $K=\mathrm{sl}(n)$, $\varphi=\rho_0$; б) $K=\mathrm{sp}(n, \mathbf{C})$, $\varphi=\rho_0$; в) $K=\mathrm{sl}(2n+1)$, $\varphi=\Lambda^2\rho_0$; г) $K=\mathrm{so}(10)$, $\varphi=s\text{-spin}$.

Представление φ^* во всех случаях локально транзитивно, поэтому выполнено условие $\operatorname{codim}S_V\geqslant 2$. Действительно, любой элемент общего положения является нильпотентным. Итак, остается проверить условие $\operatorname{codim}S_{\mathrm{St}_0}\geqslant 2$ для стационарной подалгебры общего положения. Стационарные подалгебры в этих четырех случаях имеют вид: 1) $\mathrm{St}_{0,1}=\mathrm{sl}(n-1)\underset{\rho_0}{+}\mathbf{C}^{n-1}$; 2) $\mathrm{St}_{0,2}=\mathrm{sp}(2n-2, \mathbf{C})+U_{2n-1}$, радикал U_{2n-1} некоммутативен, $U_{2n-1}=V_1+V_2$, $[V_1, V_1]=V_2$, $V_2=Z(\mathrm{St}_{0,2})$, $\dim V_2=1$; 3) $\mathrm{St}_{0,3}=\mathrm{sp}(2n, \mathbf{C})\underset{\rho_0}{+}\mathbf{C}^{2n}$; 4) $\mathrm{St}_{0,4}=\mathrm{so}(7)\underset{\mathrm{spin}}{+}\mathbf{C}^8$. Случай 4) уже разобран выше. Случай 1) легко рассматривается по индукции. Действительно, мы только что доказали, что $\operatorname{codim} S \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{codim} S_{0,1} \geqslant 2$, где S — множество сингулярных элементов в $(\mathrm{sl}(n) \underset{\rho_0}{+} \mathbf{C}^n)^*$, $S_{0,1}$ — множество сингулярных элементов в $(\mathrm{sl}(n-1) \underset{\rho_0}{+} \mathbf{C}^{n-1})^*$. Снижая размерность, доходим до алгебры Ли $\mathrm{sl}(1) \underset{\rho_0}{+} \mathbf{C}^1$, а она абелева, поэтому множество сингулярных элементов пусто. Случаи 2) и 3) тесно связаны друг с другом и тоже рассматриваются по индукции с использованием следующей леммы.

28. Лемма. *Пусть $L_0 = L/M$ — фактор-алгебра Ли L по идеалу M, S_L и S_{L_0} — множества сингулярных элементов в L^* и L_0^* соответственно, и $\operatorname{ind} L_0 = \operatorname{ind} L - \dim M$. Тогда если $\operatorname{codim} S_{L_0} \geqslant 2$, то $\operatorname{codim} S_L \geqslant 2$.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon L \to L_0$ — естественная проекция. Тогда определено естественное вложение $\pi^*\colon L_0^* \to L^*$. Коприсоединенные представления алгебр Ли L и L_0 обозначим ad и ad_0^* соответственно. Легко проверить, что $\pi^*(\mathrm{ad}^*_{\pi(g)} x) = \mathrm{ad}^*_g \pi(x)$. Проверим равенство $\pi^*(S_{L_0}) = S_L \cap \pi^*(L_0^*)$. Из тождества $\pi^*(\mathrm{ad}^*_{0,\pi(g)} x) = \mathrm{ad}^*_g \pi^*(x)$ следует, что $\operatorname{Ann} \pi^*(x) = \pi^{-1}(\operatorname{Ann} x)$ для любого $x \in L_0^*$. Сингулярность элемента $x \in L_0^*$ означает, что $\dim \operatorname{Ann} x > \operatorname{ind} L_0$, следовательно, $\dim \operatorname{Ann} \pi^*(x) = \dim \operatorname{Ann} x + {} + \dim M > \operatorname{ind} L$, т. е. элемент $\pi^*(x)$ сингулярен в L^*. Таким образом, $\pi^*(S_{L_0}) \subset S_L \cap \pi^*(L_0^*)$. Обратное включение доказывается аналогично. Поскольку отображение π^* является вложением, то коразмерность S_{L_0} в L_0^* равна коразмерности множества $\pi^*(S_{L_0}) = S_L \cap \pi^*(L_0^*)$ в $\pi^*(L_0^*)$. Множество S_L выделяется в L^* некоторым набором однородных полиномов, поэтому при переходе к сечению $S_L \cap \pi^*(L_0^*)$ коразмерность может только возрасти (коразмерность в $\pi^*(L_0^*)$), поэтому $\operatorname{codim} S_{L_0} \geqslant \operatorname{codim} S_L$. Лемма доказана.

29. В нашем случае $L = \mathrm{sp}(2n-2, \mathbf{C}) \underset{\rho_0+\tau}{+} U_{2n-1}$, $M = {} = Z(L) = V_2$, $L_0 = L/M = \mathrm{sp}(2n-2, \mathbf{C}) \underset{\tau}{+} \mathbf{C}^{2n-2}$. Известно, что $\operatorname{ind} \mathrm{St}_{0,2} = \operatorname{ind}(\mathrm{St}_{0,2}/Z(\mathrm{St}_{0,2})) + 1$, см. [479]. Поэтому если $\operatorname{codim} S_{L_0} \geqslant 2$, то $\operatorname{codim} S_{\mathrm{St}_{0,2}} \geqslant 2$. Это позволяет в случаях 2) и 3) п. 27 применить индукцию, переходя на каждом шаге к стационарной подалгебре общего положения $\mathrm{St}_{0,2}$, затем от нее, пользуясь леммой 28, к алгебре Ли $L_0 = \mathrm{St}_{0,2}/Z(\mathrm{St}_{0,2})$ и т. д. В результате мы придем к алгебре Ли $\mathrm{sp}(2, \mathbf{C}) \underset{\rho_0}{+} \mathbf{C}^2$. Стационарная подалгебра в этом случае одномерна, следовательно, удовлетворяет условию $\operatorname{codim} S_{\mathrm{St}_0} \geqslant 2$.

Осталось рассмотреть случаи, когда $\dim V \geqslant \dim K$, стационарная подалгебра общего положения в этом случае тривиальна, поэтому следует проверить условие $\operatorname{codim} S_V \geqslant 2$. В [395] получен полный список представлений простых алгебр Ли, для которых выполнены условия $\dim V > \dim K$ и $\operatorname{codim} S_V = 1$. Оказывается, все такие представления приводимы. Теорема доказана.

30. Предложение. *Пусть* $G = K \underset{\varphi}{+} V$ *— полупрямая сумма простой алгебры Ли* K *и линейного пространства* V *по представлению* φ, $a \in G^*$ *— регулярный элемент. Если:* 1) $K = \mathrm{sl}(n)$, $\varphi = \underbrace{\rho_0 + \ldots + \rho_0}_{p\text{ раз}}$, $n \neq 0 \mod p$, *либо* $p = 1$; 2) $K = \mathrm{so}(n)$, $\varphi = \underbrace{\rho_0 + \ldots + \rho_0}_{p\text{ раз}}$, p *произвольно;* 3) $K = \mathrm{sp}(n, \mathbf{C})$, $\varphi = \underbrace{\rho_0 + \ldots + \rho_0}_{p\text{ раз}}$, p *нечетно или* $p > n$, *то семейство сдвигов инвариантов коприсоединенного представления алгебры Ли* G *на ковектор* a *полное. Если ограничения на число слагаемых не выполнены, то семейство сдвигов неполное.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Глава 8

СЕКЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 46. Динамические системы и симплектические структуры, порождаемые секционными операторами

1. Замечание. В работах [274], [278] А. Т. Фоменко предложил конструкцию построения операторов, названных секционными и позволяющих получать достаточно богатые серии как вполне интегрируемых гамильтоновых систем на орбитах представлений групп Ли, так и примеры разнообразных симплектических структур, обладающих интересными свойствами. Частными случаями таких гамильтоновых систем оказываются, например, уравнения движения многомерного твердого тела с закрепленной точкой в отсутствие силы тяжести, уравнения движения многомерного твердого тела по инерции в идеальной жидкости и т. п., см. [266], [267].

2. Конструкция. Пусть H — алгебра Ли, Q — соответствующая группа Ли, ρ: $H \to \operatorname{End}(V)$ — представление H на линейном пространстве V и $O(X)$ — орбита действия Q на V. Пусть $X \in V$. Если задать линейный оператор q: $V \to H$ (который назовем *секционным*), то на орбитах возникает векторное поле $\dot{X} = \rho(q(X))(X)$. Предъявим специальный класс секционных операторов, образующих многопараметрическое семейство, основными параметрами которого являются два элемента $a\in V$, $b\in K=\operatorname{Ker}\Phi_a$, где $\Phi_a\colon H\to V$, $\Phi_a(h)=\rho(h)a$.

Пусть a — элемент общего положения в H. Предположим, что в алгебре K есть полупростые элементы. Пусть $b\in K$ — произвольный полупростой элемент. Рассмотрим $\Pi=\operatorname{Ker}\rho(b)\subset V$; пусть $H=K+K'$, где K' — произвольное алгебраическое дополнение к K. Имеем $V=\Pi+\operatorname{Im}\rho(b)$ (в силу полупростоты b), $\Pi\cap\operatorname{Im}\rho(b)=0$. Плоскость $\Phi_aK'=\Phi_aH\subset V$ определена однозначно (при заданном a). Положим $B=\Pi\cap\Phi_aK'$, $R'=\Phi_aK'\cap\operatorname{Im}\rho(b)$. В силу выбора b оператор $\rho(b)$ изоморфно отображает $\operatorname{Im}\rho(b)$ на себя. Пусть $\rho(b)^{-1}$ — обратный оператор и $R=\rho(b)^{-1}R'$. Тогда $\operatorname{Im}\rho(b)=R+Z$, где Z — произвольное алгебраическое дополнение. Пусть T — алгебраическое дополнение к B в Π.

Окончательно получаем разложение пространства V в прямую сумму четырех подпространств: $V=T+B+R+Z$. Если на V задано скалярное произведение, то Z и T однозначно определяются как ортогональные дополнения. Положим $\tilde B=\Phi_a^{-1}B$, $\Phi_a^{-1}R'=\tilde R$, получаем разложение алгебры Ли H в прямую сумму четырех подпространств: $H=K+\tilde B+\tilde R+\tilde Z$, где $\tilde Z$ — алгебраическое дополнение к $\tilde B+\tilde R$ в K' (рис. 42).

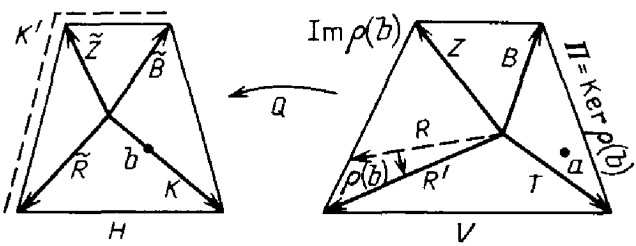


Рис. 42

Определим секционный оператор $q\colon\ T+B+R+Z\to\to K+\tilde B+\tilde R+\tilde Z$, положив

$$q=\left\|\begin{matrix} D & & & 0\\ & \Phi_a^{-1} & & \\ & & \Phi_a^{-1}\rho(b) & \\ 0 & & & D'\end{matrix}\right\|, \tag{660}$$

где $D\colon T\to K$ и $D'\colon Z\to\tilde Z$ — произвольные линейные операторы, $\Phi_a^{-1}\colon\ B\to\tilde B$, $\Phi_a^{-1}\rho(b)\colon\ R\to\tilde R$. Такие операторы назовем *каноническими секционными*. Итак, получили многопараметрическое семейство операторов $q=q(a,\ b,\ D,\ D')$.

3. Определение. Пусть $M=P/Q$ — компактное однородное пространство. Тогда алгебра Ли G группы движений

P разлагается в прямую сумму $G=H+V$ двух подпространств H и V, где $H=T_eQ$ — стационарная подалгебра, касательная плоскость к стационарной подгруппе Q, а V можно отождествить естественным образом с касательным пространством к многообразию M. Ясно, что H присоединенным образом действует на V, т. е. $\rho=\mathrm{ad}$.

Пространство M называется *симметрическим*, если существует такой инволютивный автоморфизм θ: $P\to P$ группы P, что $(P_\theta)_0\subset Q\subset P_\theta$, где $P_\theta=\{x\in P\,|\,\theta(x)=x\}$ — множество неподвижных точек автоморфизма θ, а $(P_\theta)_0$ — компонента связности единицы $e\in P_\theta$.

4. Теорема (А. Т. Фоменко). *Пусть $M=P/Q$ — компактное симметрическое пространство, где P, Q — полупростые компактные группы Ли. Пусть $a\in V$ — точка общего положения. Тогда разложение пространства $V=T+B+R+Z$, определяющее канонический секционный оператор C: $V\to H$, имеет следующий вид: T — максимальное коммутативное подпространство в пространстве V, $a\in T$, $R=R'$, $Z=0$, $\Phi_aH+T=V=T+B+R$, $\Phi_aH=B+R$, $R=\mathrm{Im}\,\rho(b)$. Плоскости T, B, R попарно ортогональны. Если q, C: $V\to H$ — два канонических секционных оператора, то наряду с динамической системой $\dot X=\rho(q(X))(X)$ на орбитах $O(X)\subset V$ возникает внешняя 2-форма $F(X,\ \xi,\ \eta)=\langle CX,\ [\xi,\ \eta]\rangle$, где ξ, $\eta\in T_XO(X)$.* Здесь $\langle X,\ Y\rangle$ — *невырожденное скалярное произведение Киллинга на полупростой алгебре Ли H.*

Доказательство. Пусть $a\in V$ — произвольный элемент общего положения. Из теории симметрических пространств (см., например, [160]) следует, что в плоскости V всегда существует максимальное коммутативное подпространство T, содержащее a. Фиксируем такое подпространство, и пусть T' — ортогональное дополнение к T относительно формы Киллинга. Напомним, что на алгебре $G=H+V$ задана форма Киллинга $\langle X,\ Y\rangle=\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y$, ограничение которой на V также задает невырожденное положительно определенное скалярное произведение на V.

Следуя общей схеме построения секционного оператора, мы должны теперь рассмотреть в подалгебре H аннулятор $K=K(a)$ элемента a, т. е. совокупность всех таких $k\in H$, что $[k,\ a]=0$. Это означает равенство $K=\mathrm{Ker}\,\Phi_a$. Из тождества Якоби следует, что аннулятор является подалгеброй в H (не обязательно коммутативной). Можно считать, что $K(a)$ является аннулятором любого элемента t общего положения из T, т. е. $K(a)=K(t)$, где a, t — элементы общего положения в T. Теперь мы должны рассмотреть в K произвольный элемент b общего положения. Отметим, что при этом элемент b не обязан быть элементом общего положения с точки зрения всей алгебры Ли H. Согласно нашей общей схеме мы должны рассмотреть подпространство $\Pi = \operatorname{Ker}\rho(b)$ в V. Ясно, что оно совпадает с аннулятором K, т. е. $\operatorname{Ker}\rho(b) = \{v \in V \mid [v, b] = 0\}$. Подпространство Π не зависит от выбора элемента b общего положения в K. Очевидно, $T \subset \Pi$. Пусть B — ортогональное дополнение к плоскости T в Π.

5. Лемма. *Плоскость B совпадает с $\Phi_a H \cap \Pi$, где Φ_a: $H \to V$, $\Phi_a(h) = \rho(h)(a) = [h, a]$. Кроме того, $\Phi_a H \perp T$.*

Доказательство. Согласно определению оператора Φ_a пересечение $\Phi_a H$ с Π состоит из всех элементов вида $[h, a]$, коммутирующих с a, где $h \in H$. Докажем, что плоскость $\Phi_a H$ ортогональна к T. Рассмотрим скалярное произведение $\langle \Phi_a h, t \rangle$, где $h \in H$, $t \in T$. Тогда $\langle \Phi_a h, t \rangle = \langle [h, a], t \rangle = \langle h, [a, t] \rangle = 0$, так как $t \in T$, т. е. $[a, T] = 0$. Кроме того, мы использовали свойство операции ad: $\langle \operatorname{ad}_X Y, Z \rangle = -\langle Y, \operatorname{ad}_X Z \rangle$. Другими словами, операторы ad_X кососимметричны относительно формы Киллинга. Таким образом, $T \perp \Phi_a H$ и $T \perp (\Phi_a H \cap \Pi)$, следовательно, $B = \Phi_a H \cap \Pi$. Лемма доказана.

6. Замечание. Использованное нами обозначение B для плоскости, ортогональной к T в Π, полностью согласуется с обозначениями п. 2, где дана общая схема построения секционного оператора.

Пусть T' — ортогональное дополнение к T в V, а K' — ортогональное дополнение к K в H.

7. Лемма. *Для элемента $a \in T$ общего положения отображение Φ_a: $H \to V$, где $\Phi_a(h) = [h, a]$, устанавливает линейный изоморфизм между плоскостями K' и T'. При этом $K = \operatorname{Ker}\Phi_a$, $T' = \Phi_a K'$.*

Доказательство. Отметим, что плоскости H и V ортогональны в G. Имеем $\Phi_a H = \Phi_a(K + K') = \Phi_a K'$, так как $K = \operatorname{Ker}\Phi_a$. В силу леммы 5 плоскость $\Phi_a K'$ ортогональна T в V, следовательно, $\Phi_a K' \subset T'$. При этом отображение Φ_a является мономорфизмом на плоскости K', так как $\operatorname{Ker}\Phi_a \cap K' = K \cap K' = 0$. Исследуем действие стационарной подгруппы H на плоскости V. Ясно, что из каждой точки $t \in T$ вырастает орбита этого действия. Рассмотрим орбиты общего положения $O(t)$, вырастающие из точек t общего положения, лежащих в T. Имеем $\dim V = \dim O(t) + \dim T$. Ясно, что $\dim O(t) = \dim T'$. В то же время касательная плоскость к орбите $O(t)$ в точке t естественно отождествляется с фактор-пространством $H/\ker\Phi_a = H/K = K'$. Отсюда следует, что $\dim K' = \dim O(t) = \dim T'$. Поскольку отображение Φ_a мономорфно вкладывает K' в T', то $\Phi_a K' = T'$, что и требовалось доказать.

8. Лемма. *В пространстве V выполнены следующие соотношения:* а) $V = \operatorname{Im}\rho(b) + \operatorname{Ker}\rho(b)$, *причем* $\operatorname{Im}\rho(b) \cap \operatorname{Ker}\rho(b) = 0$; б) $R = \operatorname{Im}\rho(b) \subset \operatorname{Im}\Phi_a = \Phi_a K' = R + B$, *в частности, в обозначениях п. 2* $R = R'$ *и* $R + B = T'$.

Доказательство. Оператор $\rho(b)$, будучи ограничен на плоскость V, кососимметричен относительно формы Киллинга, поэтому может быть записан кососимметрической матрицей. При подходящем выборе базиса она принимает канонический блочно диагональный вид, и соответствующее разложение пространства V в сумму плоскостей, на одной из которых оператор $\rho(b)$ тривиален, а на другой сводится к поворотам в двумерных плоскостях, совпадает с разложением в сумму образа и ядра оператора $\rho(b)$.

Далее, образ $\rho(b)$ ортогонален ядру оператора $\rho(b)$, а так как $\operatorname{Ker}\rho(b)=\Pi$ и $T\subset\Pi$, то $\operatorname{Im}\rho(b)\perp\Pi$ и $\operatorname{Im}\rho(b)\perp T$. Поэтому $\operatorname{Im}\rho(b)\subset T'=\Phi_a K'$, т. е. $\operatorname{Im}\rho(b)\subset\Phi_a K'=\Phi_a H$. Поскольку $R'=\Phi_a K'\bigcap\operatorname{Im}\rho(b)$, то $R'=\operatorname{Im}\rho(b)$. Отсюда $\Phi_a K'=\operatorname{Im}\rho(b)+\operatorname{Ker}\rho(b)\bigcap\Phi_a K'=\operatorname{Im}\rho(b)+B$. Итак, $\Phi_a K'=R'+B$. Поскольку $R'=\operatorname{Im}\rho(b)$, то $R=R'$, т. е. $\Phi_a K'=R+B$. Лемма доказана.

9. Таким образом, канонический секционный оператор C: $V\to H$ приобретает в нашем случае вид C: $T+B+R\to K+\tilde{B}+\tilde{R}$, где $a\in T$, $K=K(a)=\operatorname{Ann}(a)$, $b\in K$, $\Pi=B+T=\operatorname{Ker}\rho(b)$, $R=\operatorname{Im}\rho(b)$, $\Phi_a H=B+R$, $\tilde{B}=\Phi_a^{-1}B$, $\tilde{R}=\Phi_a^{-1}\rho(b)R=\Phi_a^{-1}R'$. Значит,

$$C=\left\|\begin{matrix} D & & 0 \\ & \Phi_a^{-1} & \\ 0 & & \Phi_a^{-1}\rho(b)\end{matrix}\right\|. \tag{661}$$

Первые утверждения теоремы 4 доказаны. Осталось определить внешнюю 2-форму F. Пусть C — секционный оператор. Рассмотрим произвольную точку $X\in V$, и пусть ξ, η — произвольные векторы из V, приложенные в точке X. Тогда $[\xi,\eta]\in H$ и $CX\in H$, следовательно, определено скалярное произведение $\langle CX, [\xi,\eta]\rangle$, которое мы примем за значение формы F_C в точке X на паре векторов ξ, η. Корректность определения основана на свойстве симметрического пространства: если $G=H+V$ — разложение из п. 3, то $[V, V]\subset H$ (включения $[H, H]\subset H$ и $[H, V]\subset V$ выполняются для любого однородного пространства). Теорема доказана.

10. Лемма. *Пусть f — гладкая функция на пространстве V. Обозначим $\operatorname{sgrad}_C f\in V$ векторное поле на V такое, что для произвольного векторного поля $Y\in V$ выполнено равенство $F_C(\operatorname{sgrad}_C f, Y)=Y(f)$. Здесь $Y(f)$ — производная функции f вдоль поля Y. Тогда $\operatorname{grad} f=[CX, \operatorname{sgrad}_C f]$. Поле $\operatorname{sgrad}_C f$ определено, вообще говоря, неоднозначно.*

Доказательство. Из равенства $Y(f)=\langle Y, \operatorname{grad} f\rangle$ следует $\langle Y, \operatorname{grad} f\rangle=\langle CX, [\operatorname{sgrad}_C f, Y]\rangle=\langle [CX, \operatorname{sgrad}_C f], Y\rangle$. Отсюда $\langle Y, \operatorname{grad} f-[CX, \operatorname{sgrad}_C f]\rangle=0$. В силу произвольности поля Y получаем $\operatorname{grad} f-[CX, \operatorname{sgrad}_C f]=0$, что и требовалось доказать.

11. Замечание. Существуют такие важные симметрические пространства, что форма F_C при подходящем выборе канонического секционного оператора определяет на орбитах (или почти всюду на орбитах) симплектическую структуру. Возьмем, например, в качестве симметрического пространства полупростую группу Ли $Q=M$. Тогда $M=P/Q$, где $P=Q\times Q$ и инволюция θ: $P\to P$ задается формулой $\theta(x, y)=(y, x)$. Соответствующее разложение в алгебре Ли $H\oplus H$ имеет вид $V=\{(X, -X)|X\in H\}$, $H=\{(X, X)|X\in H\}$. Здесь одной буквой обозначена H и ее реализация в $G=H\oplus H$. Далее, $d\theta V=-V$, $d\theta H=H$.

12. Лемма. *Имеют место равенства* $B=\tilde{B}=0$, $H=K+\tilde{R}$, *и* $V=T+R$ — *картановское разложение алгебры Ли* H.

Доказательство. Здесь $T=\{(t, -t)|t\in T'\}$, T' — картановская подалгебра в H. Ясно, что $K=\{(t, t)|t\in T'\}$. Поэтому T и K изоморфны T'. Поскольку V и H соответствуют одной и той же группе, то присоединенное действие ad_H на V имеет вид $\mathrm{ad}_{(h,h)}(X, -X)=([h, X], -[h, X])\in V$, т. е. совпадает с действием $\mathrm{ad}_h X$. Следовательно, для нахождения B достаточно найти централизатор T' в H. Отсюда (ввиду полупростоты) получаем, что $B=0$ и централизатор совпадает с T'. Вследствие полупростоты ортогональное дополнение R к T (и $\tilde{R}$ к K) натянуто на корневые подпространства алгебры Ли H, а это означает, что разложения $V=T+R$ и $H=K+\tilde{R}$ изоморфны картановскому разложению. Отметим, что хотя M и диффеоморфно Q, но вложено в $P=Q\times Q$ не как подгруппа. Можно считать, что плоскости $H=\{(X, X)|X\in H\}$ и $V=\{(X, -X)|X\in \in H\}$ отождествлены с помощью естественной операции α: $(X, X)\to(X, -X)$. В частности, орбиты $O\subset V$ совпадают с орбитами стандартного присоединенного действия.

13. Предложение. *Форма* $F_C(X;\ \xi,\ \eta)$, *где* $C=C(a, a, 0, E)$, *совпадает с формой Кириллова на алгебре Ли* H *(линейно изоморфной* V*); в частности, не вырождена и замкнута (и инвариантна) на орбитах* O *присоединенного действия группы* Q *на* V.

Доказательство. Поскольку $V=T+R$, то $X=\pi X+Y$, где $\pi X\in T$, $Y\in R$ и $CX=D\pi X+\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b Y=\pi X+Y=X\in H$. Следовательно, $F_C=\langle X,\ [\xi, \eta]\rangle$. В полупростом случае эта форма фактически совпадает с формой Кириллова, отличаясь от нее на линейное преобразование в одной точке. Формы $\langle X, [\xi, \eta]\rangle$ и $\langle X, [\xi', \eta']\rangle$ инвариантны на V относительно Ad, поэтому достаточно сравнить их только в одной точке X общего положения на V; $\xi=\mathrm{ad}_X\xi'$, $\eta=\mathrm{ad}_X\eta'$; $\langle X, [\xi', \eta']\rangle$ и $\langle X, [\mathrm{ad}_X\xi', \mathrm{ad}_X\eta']\rangle$ отличаются на невырожденное линейное преобразование ad_X, переводящее касательное пространство $T_X O$ в себя.

14. Определение. *Рангом симметричного пространства* (компактного) $M=P/Q$ называется размерность максимального коммутативного подпространства T в плоскости V, где

$G=H\oplus V$, G, H — алгебры Ли групп Ли P и Q соответственно, здесь симметрическое пространство M определяется инволюцией σ: $P\to P$ такой, что $(P_\sigma)_0\subset Q\subset P_\sigma$, P_σ — множество неподвижных точек автоморфизма σ, $(P_\sigma)_0$ — связная компонента единицы (см. [160]) и $d\sigma|H=\mathrm{id}$, $d\sigma|V=-\mathrm{id}$. *Рангом компактной группы Ли* P называется размерность максимальной компактной связной коммутативной подгруппы в P. Такая подгруппа называется *максимальным тором*. Пространство $M=P/Q$ называется *пространством максимального ранга*, если ранг M равен рангу группы Ли P.

В качестве примера симметрического пространства максимального ранга рассмотрим пространство $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Группа $\mathrm{SO}(n)$ вложена в $\mathrm{SU}(n)$ как подгруппа вещественных матриц. Можно проверить, что ранг этого пространства максимален и равен $n-1$.

15. Лемма. *В случае пространства максимального ранга разложение пространства V и H, соответствующее каноническому секционному оператору, имеет вид $Z=\tilde{Z}=0$, $R=\tilde{R}=0$, $K=0$, $a\in T$, $b=0$, $C=(0,\Phi_0^{-1})$ и C: $T+B\to\tilde{B}$.*

Доказательство. Поскольку ранг M максимален, то $T\subset V$ является одновременно и картановской подалгеброй в G. Следовательно, аннулятор плоскости T в G равен T, и, значит, его пересечение с $H\subset G$ нулевое, т. е. $K=0$ и $b=0$. Поскольку $\rho(b)=0$, то $\Pi=\mathrm{Ker}\,\rho(b)=G$, $\mathrm{Im}\,\rho(b)=0$, т. е. $R=\tilde{R}=0$, $\Phi_a H=B+R=B$. Поэтому $V=T+\Phi_a H$ и группа Q действует на плоскости V таким образом, что всё орбиты общего положения в V диффеоморфны группе Q. Итак, из всех компонент оператора остается только отображение Φ_a^{-1}, что доказывает лемму.

16. Предложение. *Если симметрическое пространство $M=P/Q$ имеет максимальный ранг, то внешняя форма F_C на пространстве V (и, в частности, на орбитах группы Ли Q в V, гомеоморфных Q), определяемая каноническим секционным оператором $C=C(a,\ 0,\ 0,\ 0)=(0,\ \Phi_a^{-1})$, порождается тензором римановой кривизны симметрического пространства. А именно, имеет место равенство $F_C(X;\xi,\eta)=4\langle a,\ R(X,\xi)\eta\rangle$, где R — тензор римановой кривизны, а $a\in T$ — фиксированный вектор.*

§ 47. Секционные операторы для коприсоединенного представления и вполне интегрируемые системы

1. Замечание. Общую конструкцию Фоменко в предыдущем параграфе применим к задаче построения вполне интегрируемых гамильтоновых систем на орбитах коприсоединенного представления. Итак, пусть G — конечномерная алгебра Ли, G^* — пространство, дуальное к G, $a\in G^*$ — регулярный элемент, F_a — семейство полиномов, полученных при разложении в ряд локальных инвариантов алгебры Ли G в точке $a\in G^*$. Общее определение секционного оператора в случае коприсоединенного представления можно конкретизировать.

2. Определение. Самосопряженный оператор $C\colon G^*\to G$ называется *секционным*, если для некоторого элемента $b\in\operatorname{Ann}(a)$ выполняется равенство

$$\Phi_a C(x)=\mathrm{ad}_b^* x. \tag{662}$$

3. Предложение. *Пусть C — секционный оператор, $h(x)=2^{-1}(Cx, x)$ — соответствующий квадратичный гамильтониан. Тогда $\{h, f\}\equiv 0$ для всех $f\in F_a$, т. е. семейство F_a состоит из первых интегралов в инволюции уравнения Эйлера $\dot{x}=\mathrm{ad}^*_{dh}x$.*

Доказательство. Пусть f_b — локальный инвариант представления Ad^* в окрестности точки $a\in G^*$ такой, что $df(a)=-b$. Рассмотрим разложение в ряд $h(a+x)=P_0+P_1(x)+P_2(x)+\ldots$, где $P_i(x)$ — однородные полиномы степени i. Легко видеть, что дифференциалы полиномов P_i удовлетворяют цепочке рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered}\Phi_a dP_1=0,\\ \Phi_a dP_2+\Phi_x dP_1=0,\\ \Phi_a dP_3+\Phi_x dP_2=0,\\ \ldots\ldots\ldots\end{gathered} \tag{663}$$

Напомним, что $\Phi_a\xi=\mathrm{ad}_\xi^* a$. В силу выбора $f_b\in I(G)$ имеем $dP_1=-b$. Поэтому $\Phi_a C(x)-\Phi_a dP_2(x)=\mathrm{ad}_b^* x-\Phi_x b=0$, т. е. $\operatorname{sgrad}_a(h-P_2)=0$. Функция $h-P_2$ является, таким образом, центральной для скобки $\{f, g\}_a$ и, следовательно, коммутирует с семейством F_a. Функция $P_2(x)$ принадлежит инволютивному семейству F_a по определению. Поэтому $\{h, f\}\equiv 0$ для всех $f\in F_a$.

4. Замечание. Рассмотрим подпространство $K(a)=\{y\in G^*\mid \Phi_a(\operatorname{Ann}(a))=0\}$. Из равенства $(G, \Phi_y\operatorname{Ann}(a))=([G, \operatorname{Ann}(a)], y)$ следует, что $K(a)=[G, \operatorname{Ann}(a)]^\perp$. В силу самосопряженности оператора C из условия $C(K(a))\subset\operatorname{Ann}(a)$ следует включение $C(\operatorname{Ann}(a)^\perp)\subset K(a)^\perp$, т. е. $C(T_aO(a))\subset[G, \operatorname{Ann}(a)]$.

5. Предложение. *Имеет место включение $C(K(a))\subset\operatorname{Ann}(a)$.*

Доказательство. Пусть $y\in K(a)$. Тогда $\mathrm{ad}_b^* y=0$, так как $b\in\operatorname{Ann}(a)$. Таким образом, $\Phi_a C(y)=0$, т. е. $C(y)\in\operatorname{Ann}(a)$.

6. Предложение. *Если $\operatorname{Ann}(a)$ не является максимальной коммутативной подалгеброй в G, то секционный оператор C вырожден.*

Доказательство. Пусть $Z(\operatorname{Ann}(a))$ — централизатор подалгебры $\operatorname{Ann}(a)$ в G. Имеем $\dim\operatorname{Ann}(a)<\dim Z(\operatorname{Ann}(a))\leqslant$

$\leqslant \dim \operatorname{Ker} \operatorname{ad}_b = \dim \operatorname{Ker} \operatorname{ad}_b^*$. Поскольку $C(\operatorname{Ker} \operatorname{ad}_b^*) \subset \operatorname{Ann}(a)$, то $\operatorname{Ker} C \cap \operatorname{Ker} \operatorname{ad}_b^* \neq \{0\}$.

7. Предложение. *Если $[G, \operatorname{Ann}(a)] + \operatorname{Ann}(a) \neq G$, то оператор C не может быть положительно определен.*

Доказательство. Если $[G, \operatorname{Ann}(a)] + \operatorname{Ann}(a) \neq G$, то $T_a O(a) \cap K(a) \neq \{0\}$. Пусть $0 \neq y \in T_a O(a) \cap K(a)$. Тогда $C(y) \in \operatorname{Ann}(a) = T_a O(a)^\perp$ и $(C(y), y) = 0$.

8. Предложение. *Пусть $h(x) = 2^{-1}(Cx, x)$ — квадратичный гамильтониан, отвечающий секционному оператору C: $G^* \to G$. Тогда уравнения Эйлера $\dot{x} = \operatorname{ad}^*_{dh(x)} x$ на G^* являются гамильтоновыми относительно скобки Пуассона $\lambda\{f, g\} + \mu\{f, g\}_a$ при всех λ, μ и $a \in G^*$.*

Доказательство. Гамильтоновость уравнений относительно скобки $\{f, g\} + \lambda\{f, g\}_a$ при $\lambda \neq 0$ проверяется тривиально. В качестве гамильтониана следует рассмотреть функцию $g(x) = h(x) - \lambda(b, x)$. Тогда

$$\dot{x} = \Phi_x dh(x) = \Phi_x C(x) = \Phi_x C(x) + \lambda \Phi_a C(x) - \lambda \operatorname{ad}_b^* x =$$
$$= \Phi_{x+\lambda a}(C(x) - \lambda b) = \Phi_{x+\lambda a} dg(x). \quad (664)$$

Гамильтоновость относительно скобки $\{f, g\}_a$ можно проверить, например, следующим образом. Для локальной гамильтоновости необходимым и достаточным является выполнение следующих двух условий: а) производная Ли постоянного тензорного поля Φ_a вдоль векторного поля $v = \operatorname{ad}^*_{dh} x$ равна нулю; б) векторное поле $v = \operatorname{ad}^*_{dh} x$ касается симплектических слоев формы Φ_a, или $(\operatorname{ad}^*_{dh} x, \operatorname{Ann}(a)) = 0$. Первое условие выполнено из соображений непрерывности, так как производная Ли любого тензорного поля $\Phi_a + \lambda \Phi_x$ при $\lambda \neq 0$ вдоль $v = \operatorname{ad}^*_{dh} x$ равна нулю. Второе условие также выполнено, так как любой элемент $b' \in \operatorname{Ann}(a)$ можно рассматривать как линейную функцию на G^*, поэтому $(\operatorname{ad}^*_{dh} x, b) = \{h, b'\} = 0$, поскольку $b' \in F_a$. Глобальная гамильтоновость следует из того, что скобка $\{f, g\}_a$ постоянна на всем пространстве G^*.

9. **Конструкция.** Дадим теперь явное описание секционных операторов Фоменко для произвольной алгебры Ли G. Выберем произвольное алгебраическое дополнение L к $\operatorname{Ann}(a)$ в G. Пусть $L^\perp$ — ортогональное дополнение к L в G^*. Тогда $G^* = T_a O(a) \oplus L^\perp$. Имеет место изоморфизм Φ_a: $L \to T_a O(a)$, поэтому корректно определен оператор Φ_a^{-1}: $T_a O(a) \to L$. Положим $C_0(x) = \Phi_a^{-1} \operatorname{ad}_b^* x$. Определение корректно, так как $\operatorname{ad}_b^*(G^*) \subset T_a O(a)$. Оператор C_0: $C^* \to C$ не является, вообще говоря, секционным в смысле определения 2, так как может быть несамосопряженным. Поэтому его следует подправить. Обозначим π: $G^* \to T_a O(a)$ проекцию, соответствующую разложению $G^* = T_a O(a) \oplus L^\perp$. Положим $C = C_0 + C_0^* - C_0 \pi$. Утверждается, что C — секционный оператор. Для доказательства следует прове-

рить справедливость соотношения (662) и самосопряженность оператора $C_0\pi$. Оператор C_0 удовлетворяет соотношению (662), поэтому необходимо показать, что $\Phi_a(C_0^*x-C_0(\pi(x)))=0$. Для любого вектора $\xi\in G$ имеем

$$(\Phi_a(C_0^*x-C_0(\pi(x))), \xi)=(-x, C_0\Phi_a\xi)-(\Phi_a\Phi_a^{-1}\mathrm{ad}_b^*\pi(x), \xi)=$$
$$=(-x, \Phi_a^{-1}\mathrm{ad}_b^*\Phi_a\xi)-(\mathrm{ad}_b^*\pi(x), \xi)=-(x, \Phi_a^{-1}\Phi_a[b, \xi])+$$
$$+(\pi(x), [b, \xi])=-(\pi(x), (\Phi_a^{-1}\Phi_a-E)[b, \xi]). \quad (665)$$

Мы использовали в последнем равенстве тот факт, что $\mathrm{Im}\,\Phi_a^{-1}=L$, поэтому $(x, \eta)=(\pi(x), \eta)$ для любого $\eta\in\mathrm{Im}\,\Phi_a^{-1}$. Далее, $(\Phi_a^{-1}\Phi_a-E)[b, \xi]=\xi\in\mathrm{Ann}(a)$, поэтому $[\pi(x), \xi]=0$.

Докажем самосопряженность оператора $C_0\pi$: $G^*\to G$. Для произвольных $x, y\in G^*$ имеем $(C_0\pi(x), y)=(\Phi_a^{-1}\mathrm{ad}_b^*\pi(x), \pi(y))$. Положим $\pi(x)=\Phi_a\xi$, $\pi(y)=\Phi_a\eta$. Тогда

$$(C_0(\pi(x)), y)=(\Phi_a^{-1}\mathrm{ad}_b^*\Phi_a y, \Phi_a\eta)=-(\Phi_a\Phi_a^{-1}\mathrm{ad}_b^*\Phi_a\xi, \eta)=$$
$$=-(\mathrm{ad}_b^*\Phi_a\xi, \eta)=(\Phi_a\xi, [b, \eta])=-(\xi, \Phi_a[b, \eta])=$$
$$=-(\xi, \mathrm{ad}_b^*\Phi_a\eta)=-(\xi, \Phi_a\Phi_a^{-1}\mathrm{ad}_b^*\Phi_a\eta)=(\Phi_a\xi, \Phi_a^{-1}\mathrm{ad}_b^*\Phi_a\eta)=$$
$$=(\pi(x), C_0(\pi(y)))=(x, C_0(\pi(y))). \quad (666)$$

Мы использовали тождество $\mathrm{ad}_b^*\Phi_a=\Phi_a\mathrm{ad}_b$, которое следует из того, что $b\in\mathrm{Ann}(a)$. Итак, показано, что оператор $C=C_0+C_0^*-C_0\pi$, где π: $G^*\to T_aO(a)$, является секционным. Из определения секционного оператора следует, что этот оператор при фиксированных элементах $a\in G^*$, $b\in\mathrm{Ann}(a)$ определен не однозначно, а с точностью до произвольного самосопряженного оператора D: $G^*\to G$, образ которого содержится в $\mathrm{Ann}(a)$. Поэтому общий вид секционного оператора C при фиксированных $a\in G^*$, $b\in\mathrm{Ann}(a)$ такой: $C=C_0+C_0^*-C_0\pi+D$, где $C_0=\Phi_a^{-1}\mathrm{ad}_b^*$, Φ_a^{-1}: $T_aO(a)\to L$, π: $G^*\to T_aO(a)$, D самосопряжен и $\mathrm{Im}\,D\subset\mathrm{Ann}(a)$.

10. Применим предыдущую конструкцию секционного оператора к симметрической алгебре Ли. Итак, пусть G — вещественная полупростая алгебра Ли, θ — инволюция Картана, а $G=H+V$ — соответствующее разложение. Рассмотрим гамильтоновы системы, связанные с семейством скобок $\alpha(\{f, g\}+\{f, g\}_a)+\beta\{f, g\}_\theta$, см. § 43. Введем следующие обозначения: $C(a)$ — централизатор элемента $a\in V$ в алгебре Ли G; $\mathrm{St}(a)$ — стационарная подалгебра элемента $a\in V$ при действии H на V, или $\mathrm{St}(a)=H\cap C(a)$, $V(a)=V\cap C(a)$, $\mathrm{St}(a)^\perp$ — ортогональное дополнение к $\mathrm{St}(a)$ в H, $V(a)^\perp$ — ортогональное дополнение к $V(a)$ в V. Выберем элемент $b\in V$, удовлетворяющий условиям $[b, a]=0$, $[b, \mathrm{St}(a)]=0$. Легко проверить, что в данном случае $\mathrm{ad}_b(\mathrm{St}(a)^\perp)\subset V(a)^\perp$, кроме того, ad_a: $\mathrm{St}(a)^\perp\to V(a)^\perp$ — изоморфизм. Поэтому корректно определен оператор $L_{a,b,D}(h)=\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b h_2+Dh_1$, где $h=h_1+h_2$, $h_1\in\mathrm{St}(a)$, $h_2\in\mathrm{St}(a)^\perp$, а D: $\mathrm{St}(a)\to\mathrm{St}(a)$ — произвольный самосопряженный оператор.

11. Предложение. *Оператор $L_{a,b,D}$: $H \to H$ самосопряжен относительно ограничения формы Киллинга на H.*

Доказательство. Достаточно показать самосопряженность оператора $\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b$: $\mathrm{St}(a)^\perp \to \mathrm{St}(a)^\perp$, т. е. выполнение тождества $(\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b x, y) = (x, \mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b y)$ для любых $x, y \in \mathrm{St}(a)^\perp$. Представим $x, y \in \mathrm{St}(a)$ в виде $x = \mathrm{ad}_a x'$, $y = \mathrm{ad}_a y'$, где $x', y' \in V(a)^\perp$. Это возможно, так как $\mathrm{St}(a)^\perp \subset \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}_a$. Имеем

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b x, y) &= (\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b\mathrm{ad}_a x, \mathrm{ad}_a y') = (\mathrm{ad}_b x', \mathrm{ad}_a y') = \\ &= -(x', \mathrm{ad}_b\mathrm{ad}_a y') = -(x', \mathrm{ad}_a\mathrm{ad}_b y') = (\mathrm{ad}_a x', \mathrm{ad}_b y') = \\ &= (\mathrm{ad}_a x', \mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b\mathrm{ad}_a y') = (x, \mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b y). \quad (667)\end{aligned}$$

12. Предложение. *Функции вида $g(h+v) = 2^{-1}(L_{a,b,D}(h), h) - (b, v)$ являются центральными функциями скобки Пуассона $\{f, g\} + \{f, g\}_a - \{f, g\}_\theta$.*

Доказательство. Необходимо проверить, что дифференциал dg функции $g(h+v)$ является решением системы уравнений (647), (648). Дифференциал dg в силу предыдущего утверждения имеет вид $dg(h+v) = L_{a,b,D}(h) - b$. Имеем $[b, a] = 0$ по условию. Далее,

$$\begin{aligned}[L_{a,b,D}h, a] - [b, h] &= [\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b h_2 + Dh_1, a] - \\ &- [b, h_1 + h_2] = [\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b h_2, a] - [b, h_2] = 0. \quad (668)\end{aligned}$$

13. Следствие. *Функции из семейства $F_{a,\theta}$ являются первыми интегралами гамильтоновых относительно скобки $\{f, g\}_\theta$ систем на G с гамильтонианами $g(h+v)$.*

14. Замечание. Семейство $F_{a,\theta} = \{f(\lambda h + v + \lambda^2 a) \mid f \in I(G), \lambda \in \mathbf{R}\}$ может оказаться неполным, поэтому при произвольном выборе оператора D: $\mathrm{St}(a) \to \mathrm{St}(a)$ гамильтонова система

$$\begin{aligned}\dot h &= [L_{a,b,D}(h), h] - [b, v], \\ \dot v &= [L_{a,b,D}(h), v]\end{aligned} \qquad (669)$$

относительно скобки $\{f, g\}_\theta$ может оказаться неинтегрируемой. Для получения вполне интегрируемой системы оператор D следует выбрать так, чтобы уравнения Эйлера $\dot h_1 = [Dh_1, h_1]$ на $\mathrm{St}(a)$ были вполне интегрируемы. Тогда, добавив к семейству $F_{a,\theta}$ полное семейство интегралов $F_{\mathrm{St}(a)}$ уравнения $\dot h_1 = [Dh_1, h_1]$, в силу теоремы 8 § 43 получим полное семейство первых интегралов в инволюции уравнений Эйлера (669). Если положить $D = \lambda E$, то мы получим систему, вполне интегрируемую в некоммутативном смысле (см. [187], [191]), некоммутативная алгебра первых интегралов — это $F_{a,\theta} \cup \mathrm{St}(a)$. Итак, имеет место следующее

15. Предложение. *Пусть гамильтонова система $\dot h_1 = [Dh_1, h_1]$ интегрируема по Лиувиллю на алгебре Ли $\mathrm{St}(a)$, $F_{\mathrm{St}(a)}$ — полное семейство первых интегралов в инволюции. Тогда уравнения Эйлера (669), отвечающие скобке $\{f, g\}_\theta$, вполне* *интегрируемы по Лиувиллю на G, и первыми интегралами в инволюции являются функции из семейства $F_{a,\theta}\bigcup F_{\mathrm{St}(a)}$.*

16. Замечание. В рамках изложенной конструкции получаются интересные примеры гамильтоновых систем: n-мерное обобщение случая Лагранжа (см. [18], [39], [228]) и движение n-мерного твердого тела в квадратичном потенциале [228], [33], некоторые другие примеры см. в [228].

17. Пусть L — пространство кососимметрических матриц, для любой симметрической матрицы A на L определен коммутатор $[X, Y]_A = XAY - YAX$. Рассмотрим двумерный подпучок, порожденный алгебрами L_E и L_B, где $E = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$, $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. Семейство функций $F = \bigcup\limits_{\lambda \neq -b_i} I(L_{B+\lambda E})$ инволютивно на L^* относительно скобки $\{X, Y\}_E$, отвечающей алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, см. § 44.

18. Предложение. *Семейство F эквивалентно стандартному семейству сдвигов в случае нормальной серии на* $\mathrm{so}(n)$, *т. е. семейству первых интегралов уравнений движения n-мерного твердого тела, обнаруженных С. В. Манаковым* [165].

Доказательство. Для того чтобы в этом убедиться, можно рассмотреть коэффициенты разложения функций $\mathrm{tr}(X+\lambda B)^k$ и $\mathrm{tr}(X(E+\lambda B)^{-1})^l$ в ряд по λ и проверить их совпадение. Такая проверка, однако, громоздка, мы поступим другим способом. Пусть матрица B регулярна в $\mathrm{gl}(n)$, т. е. $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Тогда оба семейства $\bigcup\limits_{\lambda \neq -b_i} I(L_{B+\lambda E})$ и $\mathrm{tr}(X+\lambda B)^k$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots$, инволютивны и полны относительно скобки $\{X, Y\}_E$, поэтому для доказательства их эквивалентности достаточно проверить, что они коммутируют между собой. Итак, пусть $f(X) = (X+\lambda B)^k$, $g \in I(L_{E+\mu B})$. Дифференциал $dg(X) \in L$ удовлетворяет тождеству $(E+\mu B)\,dg(X)\,X - X\,dg(X)(E+\mu B) = 0$, а дифференциал $df(X) \in L$ имеет вид $df(X) = \pi(k(X+\lambda B)^{k-1})$, где π: $\mathrm{gl}(n) \to \mathrm{so}(n)$ — ортогональная проекция относительно скалярного произведения $(X, Y) = \mathrm{tr}\,XY$. Имеем $\{f, g\}_E(X) = \mathrm{tr}(df\,dg - dg\,df)X = \mathrm{tr}\,df(dg \cdot X - X \cdot dg)$, но $dg \cdot X - X \cdot dg \in L$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
\{f, g\}_E(X) &= k\,\mathrm{tr}(X+\lambda B)^{k-1}(dg \cdot X - X\,dg) = \\
&= k\,\mathrm{tr}(X+\lambda B)^{k-2}((X+\lambda B)\,dg \cdot X - X\,dg \cdot (X+\lambda B)) = \\
&= \lambda k\,\mathrm{tr}(X+\lambda B)^{k-2}(B\,dg \cdot X - X\,dg \cdot B) = \\
&= -\frac{\lambda}{\mu}\,k\,\mathrm{tr}(X+\lambda B)^{k-2}(dg \cdot X - X\,dg) = \\
&= -\frac{\lambda}{\mu}\,k\,\mathrm{tr}(X+\lambda B)^{k-3}((X+\lambda B)\,dg \cdot X - X\,dg \cdot (X+\lambda B)) = \ldots \\
&\ldots = k\left(-\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \mathrm{tr}(X+\lambda B)\,(dg \cdot X - X \cdot dg) = 0. \qquad (670)
\end{aligned}
$$

19. Лемма. *Стандартные уравнения движения твердого тела на* $\mathrm{so}(n)$: $\dot{X}=[X, \Omega]_E$, $X=B\Omega+\Omega B$, $X, \Omega\in L$ (*см. п.* 12 § 23), *гамильтоновы не только относительно обычной скобки Пуассона* $\{X, Y\}_E$, *но и относительно любой нетривиальной линейной комбинации* $\lambda\{X, Y\}_E+\mu\{X, Y\}_B$.

Доказательство. Рассмотрим функции $f_k(X)$, которые являются коэффициентами при λ^k в разложении $\mathrm{tr}(X+\lambda B)^{k+2}$ по степеням λ:

$$\mathrm{tr}(X+\lambda B)^{k+2}=\mathrm{tr}\,\lambda^{k+2}B^{k+2}+\mathrm{tr}\,\lambda^{k+1}(k+2)B^{k+1}X+ \\ +\mathrm{tr}\,\lambda^k(B^kX^2+\ldots+X^2B^k)+\ldots, \qquad (671)$$

$$f_k(X)=\mathrm{tr}(B^kX^2+\ldots+X^2B^k), \qquad (672)$$

где $f_0(X)=\mathrm{tr}\,X^2$, $f_1(X)=\mathrm{tr}\,3BX^2$, $f_2(X)=\mathrm{tr}(4B^2X^2+2BXBX)$. Обозначим sgrad_E и sgrad_B косые градиенты относительно скобки $\{X, Y\}_E$ и $\{X, Y\}_B$ соответственно. Непосредственной выкладкой легко убедиться в справедливости соотношений

$$\mathrm{sgrad}_E f_0=0, \quad \mathrm{sgrad}_E f_1=\mathrm{sgrad}_B f_0, \\ \mathrm{sgrad}_E f_2=\mathrm{sgrad}_B f_1, \ \ldots, \ \mathrm{sgrad}_E f_k=\mathrm{sgrad}_B f_{k-1}, \ \ldots \qquad (673)$$

Гамильтониан, соответствующий уравнениям

$$\dot{X}=[X, \Omega]_E, \quad X=B\Omega+\Omega B, \quad X, \Omega\in L, \qquad (674)$$

является конечной линейной комбинацией функций $f_0, f_1, f_2, \ldots$, т. е. $g(X)=\sum_{i=1}^{s} c_i f_i(X)$ и $\mathrm{sgrad}_E g(X)=\sum_{i=0}^{s} c_i\,\mathrm{sgrad}_E f_i(x)$, поэтому

$$\dot{X}=[X, \Omega]=\mathrm{sgrad}_E g(X)= \\ =\sum_{i=1}^{n} c_i\,\mathrm{sgrad}_B f_{i-1}(X)=\mathrm{sgrad}_B\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_{i-1}(X)\right). \qquad (675)$$

Таким образом, показана гамильтоновость уравнений (674) относительно скобки $\{X, Y\}_B$. Аналогично,

$$\dot{X}=\mathrm{sgrad}_{E+\lambda B}\sum_{i=0}^{s-1} d_i f_i(X), \qquad (676)$$

где коэффициенты d_i находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \lambda d_{s-1}&=c_s, \\ \lambda d_{s-2}&=c_{s-1}-d_{s-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \lambda d_0&=-d_1+c_1. \end{aligned} \qquad (677)$$

20. Пусть $A_0=\mathrm{diag}\ (1, 1, \ldots, 1, 0)$. Тогда $L_{A_0}=E(n)=\mathrm{so}(n)+\mathbf{R}^n$. Положим $B_0=\mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_{n+1})$, $b_i\neq b_j$, $b_{n+1}\neq 0$. Семейство функций $\bigcup_{(\lambda, \mu)\neq(0, 0)} I(L_{\lambda A_0+\mu B_0})$ инволютивно на L^*

относительно скобки $\{X, Y\}_{A_0}$, отвечающей алгебре Ли $E(n)$, см. § 44. Посмотрим, какие квадратичные гамильтонианы содержатся в этом семействе. В кольце инвариантов $I(L_{A_0+\mu B_0})$ содержится квадратичная функция вида

$$f_\mu(X)=\operatorname{tr} X(A_0+\mu B_0)^{-1}X(A_0+\mu B_0)^{-1}. \tag{678}$$

Чтобы получить удобное описание линейных комбинаций функций $f_\mu(X)$, сделаем замену $Y=B_0^{-1/2}XB_0^{-1/2}$. Тогда

$$f_\mu(Y)=\operatorname{tr} Y(\mu E+A_0B_0^{-1})^{-1}Y(\mu E+A_0B_0^{-1})^{-1}. \tag{679}$$

Общий вид линейных комбинаций таких функций следующий: $g(Y)=2^{-1}(\operatorname{ad}^{-1}_{A_0B_0^{-1}}\operatorname{ad}_C Y, Y)$, C диагональна. Итак, с помощью инволютивного семейства $\bigcup\limits_{(\lambda, \mu)\neq(0, 0)} I(L_{\lambda A_0+\mu B_0})$ можно проинтегрировать по Лиувиллю уравнения Эйлера для алгебры Ли $E(n)$, т. е. уравнения Эйлера на $E(n)^*$ с гамильтонианом

$$g(X)=2^{-1}(\operatorname{ad}^{-1}_{A_0B_0^{-1}}\operatorname{ad}_C B_0^{-1/2}XB_0^{-1/2},\ B_0^{-1/2}XB_0^{-1/2}) \tag{680}$$

или, используя стандартные координаты x_{ij}, y_i на $E(n)^*$,

$$2g(X)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{ij}^2\left(\frac{c_i-c_j}{b_i-b_j}\right)+\sum_{1\leqslant i\leqslant n} y_i^2\frac{c_i-c_{n+1}}{b_{n+1}}. \tag{681}$$

Рассмотрим на $E(n)^*$ квадратичные гамильтонианы общего вида

$$h(X)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_{ij}^2a_{ij}+\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_iy_i^2. \tag{682}$$

Тогда гамильтонианы $g(X)$ вида (681) выделяются условиями

$$\frac{a_i-a_j}{a_{ij}}+\frac{a_j-a_k}{a_{jk}}+\frac{a_k-a_i}{a_{ki}}=0, \qquad 1\leqslant k,\ i,\ j\leqslant n, \tag{683}$$

что в точности соответствует n-мерному обобщению случая Клебша, обнаруженному А. М. Переломовым [213].

§ 48. Основные примеры секционных операторов

1. Определим аналоги уравнений движения твердого тела на произвольной полупростой алгебре Ли, см. [186], [188], [189]. Пусть G — комплексная полупростая алгебра Ли, а $G=T+V^++V^-$ — ее корневое разложение, т. е. T — подалгебра Картана и $V^+=\sum\limits_{\alpha>0}\mathbf{C}E_\alpha$, $V^-=\sum\limits_{\alpha<0}\mathbf{C}E_\alpha$. Предположим, что a, $b\in T$ — два произвольных регулярных элемента картановской подалгебры T. Рассмотрим оператор $\operatorname{ad}_a\colon G\to G$, $\operatorname{ad}_a b=[a, b]$.

Ясно, что оператор ad_a сохраняет корневое разложение. Поскольку a — элемент общего положения, то оператор ad_a обратим на $V=V^+\oplus V^-$. Согласно общей методике определим секционный оператор $\varphi_{a,b,D}\colon G\to G$ формулой $\varphi_{a,b,D}(X)=\varphi_{a,b}(X')+D(t)=\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b X'+D(t)$, где $X=X'+t$ — однозначное разложение вектора X по V и T, а $D\colon T\to T$ — произвольный линейный оператор, симметричный на T относительно формы Киллинга. Оператор $\varphi_{a,b,D}$ параметризован с помощью a, b, D. В базисе Вейля $(E_\alpha,\ E_{-\alpha},\ H_\alpha)$ полупростой алгебры Ли G оператор $\varphi_{a,b,D}$ задается матрицей

$$\varphi_{a,b,D}=\begin{array}{c}\left\|\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & D\end{array}\right\|\end{array}\begin{array}{l}\}\,E_\alpha\\[2em] \}\,E_{-\alpha}\\[2em] \}\,H_\alpha\end{array}, \tag{684}$$

где $\lambda_\alpha=\alpha(b)/\alpha(a)$, $q=\dim V^\pm$ — число положительных корней. Построенные операторы $\varphi_{a,b,D}$ играют роль операторов инерции для комплексных полупростых алгебр Ли.

2. Определение. Уравнение Эйлера на комплексной полупростой алгебре Ли G, которое отвечает построенному оператору $\varphi_{a,b,D}$, называется *аналогом уравнения движения твердого тела* на полупростой алгебре Ли G. Операторы $\varphi_{a,b,D}$ называются *комплексной полупростой серией* секционных операторов.

3. Построим семейство гамильтоновых систем на произвольной компактной вещественной алгебре Ли, использовав для этого вещественные формы комплексных простых алгебр Ли, см. [186], [188]. Каждая комплексная полупростая алгебра Ли G обладает компактной вещественной формой G_c. Напомним, что $G_c=\{E_\alpha+E_{-\alpha},\ i(E_\alpha-E_{-\alpha}),\ iH_\alpha\}$. Пусть a, $b\in iT_0$ (T_0 — вещественное подпространство в картановской подалгебре T, натянутое на все корни $H_\alpha\in T$) — элементы общего положения. Ясно, что $\mathrm{ad}_a(E_\alpha+E_{-\alpha})=\alpha(a')(i(E_\alpha-E_{-\alpha}))$, $\mathrm{ad}_a(i(E_\alpha-E_{-\alpha}))=-\alpha(a')(E_\alpha+E_{-\alpha})$, где $a=ia'$, $a'\in T_0$. Итак, оператор ad_a переводит вектор $E_\alpha+E_{-\alpha}$ в вектор, пропорциональный $i(E_\alpha-E_{-\alpha})$, и наоборот. Поэтому все векторы $E_\alpha+E_{-\alpha}$ и $i(E_\alpha-E_{-\alpha})$ являются собственными векторами с собственными числами $\alpha(b)\alpha(a)^{-1}=\alpha(b')\alpha(a')^{-1}$, $a=ia'$, $b=ib'$, a', $b'\in T_0$. Оператор $\varphi=\varphi_{a,b,D}\colon G_c\to G_c$ определим так: $\varphi(X)=\varphi(X'+t)=\varphi_{a,b}(X')+D(t)=\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b X'+D(t)$, где $X=X'+t$ — однозначное разложение X на такие составляющие, что $t\in iT_0$, $X'\perp iT_0$. В базисе $\{E_\alpha+E_{-\alpha},\ i(E_\alpha-E_{-\alpha}),\ iH_\alpha\}$ оператор

φ задается матрицей

$$\varphi = \left\|\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \} E_\alpha + E_{-\alpha} \\ \\ \} i(E_\alpha - E_{-\alpha}) \\ \\ \} iH_\alpha \end{array}, \tag{685}$$

где числа $\lambda_\alpha = \alpha(b)/\alpha(a)$ вещественны.

4. Определение. Серия операторов $\varphi_{a,b,D}$: $G_c \to G_c$ называется *компактной серией* секционных операторов.

5. Аналогичные операторы можно построить на некоторых простых компактных вещественных алгебрах Ли, отвечающих классическим нормальным компактным подалгебрам в комплексных полупростых алгебрах Ли. В каждой компактной форме G_c рассмотрим подалгебру G_n, называемую нормальной компактной подалгеброй, которая натянута на векторы $E_\alpha + E_{-\alpha}$, α пробегает множество всех корней алгебры Ли G относительно подалгебры Картана T. Поскольку все эти векторы собственные для операторов φ компактной серии, то при ограничении их на подалгебру G_n получим некоторую серию операторов на G_n. Эти операторы совпадают с $\varphi = \varphi_{a,b}$: $G_c \to G_c$, $\varphi(X) = \mathrm{ad}_a^{-1}\,\mathrm{ad}_b(X)$, $X \in G_n$, a, $b \in iT_0$, $\alpha(a) \neq 0$, $\alpha(b) \neq 0$. В базисе $\{E_\alpha + E_{-\alpha}\}$ оператор φ задается матрицей

$$\varphi = \varphi_{a,b} = \left\|\begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q\end{matrix}\right\|. \tag{686}$$

Отметим, что здесь a, $b \in G_n$, т. е. операторы нормальной серии $\varphi_{a,b}$: $G_n \to G_n$ требуют для своего определения элементов некоторой большей алгебры Ли.

6. Определение. Серия операторов $\varphi_{a,b}$: $G_n \to G_n$, построенная в п. 5, называется *нормальной серией секционных операторов*.

7. Лемма. *Среди гамильтоновых систем нормальной серии содержатся классические уравнения движения многомерного твердого тела с неподвижной точкой.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли $\mathrm{so}(n)$ и представим ее в виде нормальной подалгебры в алгебре Ли $\mathrm{su}(n)$. Вложим $\mathrm{su}(n)$ стандартным образом в $\mathrm{u}(n)$ и рассмотрим два регулярных элемента a, b из картановской подалгебры iT_0

в $u(n)$ (а не в $su(n)$). Пусть $a=\operatorname{diag}(ia_1, \ldots, ia_n)$, $b=\operatorname{diag}(ib_1, \ldots$ $\ldots, ib_n)$, $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $a_l \neq \pm a_j$, $b_l \neq b_j$ при $l \neq j$. Тогда оператор $\varphi_{a,b}\colon G_n \to G_n$ действует так: $\varphi_{a,b}(E_\alpha + E_{-\alpha}) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)}(E_\alpha + E_{-\alpha})$. Поэтому гамильтонова система $\dot{X}=[X, \varphi_{a,b}X]$ имеет вид

$$\dot{x}_{ij} = \sum_{q=1}^{n} x_{iq}x_{qj}(\lambda_{qj} - \lambda_{iq}) = \sum_{q=1}^{n} x_{iq}x_{qj}\left(\frac{b_q - b_j}{a_q - a_j} - \frac{b_i - b_q}{a_i - a_q}\right). \qquad (687)$$

Пусть теперь $a=-ib^2$, т. е. $a_p = b_p^2$. Отсюда

$$\dot{x}_{ij} = \sum_{q=1}^{n} x_{iq}x_{qj}\left(\frac{1}{a_j + a_q} - \frac{1}{a_i + a_q}\right). \qquad (688)$$

Итак, при $a=-ib^2$ получаем известную систему п. 12 § 23.

8. Построим секционные операторы для алгебры Ли группы движений евклидова пространства. Алгебра Ли $E(n)$ группы движений $\mathbf{R}^n$ является полупрямой суммой $so(n) + \mathbf{R}^n$, где $\varphi\colon so(n) \to \operatorname{End}(\mathbf{R}^n)$ — дифференциал стандартного представления группы $SO(n)$ в пространстве $\mathbf{R}^n$, причем $\mathbf{R}^n$ рассматривается как коммутативная алгебра Ли. Пространство $E(n)^*$, дуальное к $E(n)$, отождествим с $E(n)$; для этого определим невырожденное скалярное произведение в $E(n)$. Пусть $B(X, Y)$ — форма Киллинга алгебры Ли $so(n)$, а $(X, Y)_e$ — евклидово скалярное произведение на $\mathbf{R}^n$. Тогда положим $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = B(x_1, x_2) + (y_1, y_2)_e$, где $x_1, x_2 \in so(n)$, $y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n$. С помощью этого произведения отождествим $E(n)^*$ с $E(n)$ и все подпространство в $E(n)^*$ будем изображать как подпространства в $E(n)$, используя это отождествление. Ортогональное дополнение к подпространству W в $E(n)$ или в $E(n)^*$ относительно скалярного произведения $B(X, Y) + (Z, R)_e$ обозначим $W^\perp$. Пусть a — элемент общего положения, а $K = \operatorname{Ker}\Phi_a$. Тогда Φ_a отображает $K^\perp$ в $K^{*\perp}$, где $K = K^*$ при отождествлении $E(n)^*$ с $E(n)$. Отображение $\Phi_a\colon K^\perp \to K^{*\perp}$ — изоморфизм. По общей методике пусть $E(n) = K^\perp + K$, $E(n)^* = K^{*\perp} + K^*$ и $a \in K^*$, $b \in K$, причем a — элемент общего положения. Тогда если $z = x + y \in$ $\in E(n)^*$, $x \in K^{*\perp}$, $y \in K^*$, то $C(a, b, D)(z) = \Phi_a^{-1}\operatorname{ad}_b^*(x) + D(y)$, где $D\colon K^* \to K$ — произвольный самосопряженный линейный оператор.

9. Пусть $A = \mathbf{R}[x]/(x^2)$. Положим $\Omega(G) = G \otimes A$. Построим для алгебр Ли $\Omega(G)$, где G — полупростая алгебра Ли, секционные операторы.

10. Лемма. *Пусть G — комплексная полупростая алгебра Ли, $a \in \Omega(G)^*$ — элемент общего положения. Тогда* $\operatorname{Ker}\Phi_a =$ $= H + \varepsilon H$, *где* $\varepsilon = \pi(x)$, $\pi\colon \mathbf{R}[x] \to A$ — *естественная проекция, H — подалгебра Картана в G. Пусть $b = b_1 + \varepsilon b_2 \in \operatorname{Ker}\Phi_a = H + \varepsilon H$, причем b_1 — элемент общего положения. Тогда* $\operatorname{Ker}\rho(b) =$ $= H + \varepsilon H \subset \Omega(G)^* \cong G + \varepsilon G$. *Утверждается, что* $\Phi_a(\operatorname{Ker}\Phi_a^\perp) \subset$

$\subset \operatorname{Ker}\Phi_a^{\perp}$ *и* $\rho(b)(\operatorname{Ker}\rho(b)^{\perp})\subset \operatorname{Ker}\rho(b)^{\perp}$ *для любого* $b\in\operatorname{Ker}\Phi_a$, *где* $W^{\perp}$ *означает ортогональное дополнение относительно прямой суммы форм Киллинга на* G, $\rho=\operatorname{ad}^*$.

Доказательство получается прямым вычислением.

11. Определение. *Комплексная серия* секционных операторов C: $\Omega(G)^*\to\Omega(G)$ задается матрицей [253]

$$C=C(a,\ b,\ D)=\left\|\begin{matrix}\Phi_a^{-1}\operatorname{ad}_b^* & 0\\ 0 & D\end{matrix}\right\| \tag{689}$$

(G — полупростая комплексная алгебра Ли) в соответствии с разложениями $\Omega(G)=\operatorname{Ker}\Phi_a\oplus\operatorname{Ker}\Phi_a^{\perp}$, $\Omega(G)^*=\operatorname{Ker}\rho(b)\oplus\oplus\operatorname{Ker}\rho(b)^{\perp}$, здесь D: $\operatorname{Ker}\rho(b)\to\operatorname{Ker}\Phi_a$ — произвольный самосопряженный оператор.

12. Определение. Пусть G_c — компактная вещественная форма в комплексной полупростой алгебре Ли G. *Компактная серия* секционных операторов C: $\Omega(G_c)^*\to\Omega(G_c)$ также задается формулой (689), только D: $H_0+\varepsilon H_0\to H_0+\varepsilon H_0$, где H_0 — вещественная часть подалгебры Картана H в G [253].

13. Определение. Пусть G_n — нормальная подалгебра в G. *Нормальная серия* секционных операторов C: $\Omega(G_n)^*\to\Omega(G_n)$ является ограничением операторов компактной серии на $\Omega(G_n)$.

§ 49. Бигамильтоновость уравнений Эйлера

1. Теорема (М. В. Мещеряков [176]). *Пусть* φ: $G\to G$ — *самосопряженный относительно формы Киллинга полупростой алгебры Ли* G *линейный оператор. Уравнение Эйлера* $\dot X=[X,\ \varphi X]$ *гамильтоново относительно скобки Пуассона* $\{Y,\ Z\}_a$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi=\varphi_{a,b,D}$ *для некоторых* $b\in H$ *и* D: $H\to H$.

2. Замечание. Таким образом, гамильтоновость потока Эйлера с квадратичным гамильтонианом $F(X)=2^{-1}B(X,\ \varphi(X))$ одновременно относительно пары скобок: скобки Пуассона $\{f,\ g\}$ и скобки $\{f,\ g\}_a=\langle a,[df_a,\ dg_a]\rangle$ характеризуют тензоры инерции $\varphi_{a,b,D}$ многомерных «твердых тел» среди всех тензоров инерции на алгебре G.

3. Лемма. *Пусть* $F\in I(G)$ — *полиномиальный инвариант коприсоединенного представления и* $F_\lambda(\xi)=F(\xi+\lambda a)=\sum\limits_{k=1}^{N+1}F_k(\xi,\ a)\,\lambda^k$. Тогда *дифференциалы* $U_k(\xi)=dF_k(\xi)$ *функций* F_k *удовлетворяют цепочке рекуррентных соотношений*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ad}^*_{U_0(\xi)}\xi=0,\\
&\operatorname{ad}^*_{U_1(\xi)}\xi+\operatorname{ad}^*_{U_0(\xi)}a=0,\\
&\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\\
&\operatorname{ad}^*_{U_{k+1}(\xi)}\xi+\operatorname{ad}^*_{U_N(\xi)}a=0.
\end{aligned} \tag{690}$$

Доказательство. Поскольку $I(G)$ лежит в ядре скобки Пуассона $\{f, g\}(\xi)=\langle\xi, [df(\xi), dg(\xi)]\rangle$, то $\{f, F\}(\xi)=0$ для любой функции $f\in C^\infty(G^*)$. Это означает, что $\mathrm{ad}^*_{dF(\xi)}\xi=0$ для любого вектора $\xi\in G^*$. Замена $\xi\to\xi+\lambda a$, если учесть разложение $dF_\lambda(\xi)=\sum_k dF_k(\xi, a)\lambda^k$, приводит к цепочке соотношений (690) на векторы $dF_k(\xi)=U_k(\xi)$.

4. Лемма. *Пусть G — такая алгебра Ли, что стационарные подалгебры общего положения в коприсоединенном представлении линейно порождаются дифференциалами инвариантов представления* Ad^*. *Тогда уравнения Эйлера $\dot\xi=\mathrm{ad}^*_{\varphi_{a,b,D}(\xi)}\xi$ гамильтоновы относительно скобки Пуассона $\{f, g\}_a$.*

Доказательство. Оператор $\varphi=\varphi_{a,b,D}$ удовлетворяет соотношениям $\mathrm{ad}^*_{\varphi(\xi)}a=\mathrm{ad}^*_b\xi$, $\mathrm{ad}^*_b a=0$. Пусть алгебра Ли G такова, что любое $b\in G_a=\{x\in G\,|\,\mathrm{ad}^*_x a=0\}$ реализуется как дифференциал некоторого полиномиального инварианта h, т. е. $dh(a)=b$. Положим $h_\lambda(\xi)=\sum_{j=0}^{q} h_j\lambda^j$. Из леммы 3 получаем соотношения $\mathrm{ad}^*_{dh_{q-1}}\xi+\mathrm{ad}^*_{dh_{q-2}}a=0$, $\mathrm{ad}^*_{dh_{q-2}}\xi+\mathrm{ad}^*_{dh_{q-3}}a=0$, причем $dh_{q-1}(\xi)=b$ в силу линейности h_{q-1} по ξ. Рассмотрим функцию $\tilde F(\xi)=F(\xi)+h_{q-2}(\xi)$. Тогда $\mathrm{ad}^*_{d\tilde F}(a)=0$ и, следовательно, $\tilde F$ принадлежит ядру скобки Пуассона $\{f, g\}_a$. Ясно, что $\tilde F$ — квадратичная функция, и поскольку ядро скобки $\{f, g\}_a$ порождается линейными функциями $f_i(\xi)=\langle b_i, \xi\rangle$, где $b_i=dF_i(a)$ и F_i — однородные полиномиальные образующие кольца инвариантов $I(G)$, то $\tilde F=\sum_{i,j}\nu_{ij}f_if_j+c$, $\nu_{ij}=\nu_{ji}\in\mathbf{R}$, $c=\mathrm{const}$. Значит, $F=-h_{q-2}+\sum_{i,j}\nu_{ij}f_if_j+c$. Теперь находим, что скобка $\{F, f\}$ функций F и $f\in C^\infty(G^*)$ равна

$$\{f, h_{q-2}\}-\sum_{i,j}\nu_{ij}(\{f,f_i\}f_j+\{f,f_j\}f_i). \tag{691}$$

Учитывая соотношения $\{f, h_{q-2}\}=-\{f, h_{q-3}\}_a$, $\{f, f_j\}=-\{f, H_j\}_a$, где

$$F_j(\xi+\lambda a)=F_j^0(\xi)+\ldots+H_j\lambda^{q_j-2}+f_j\lambda^{q_j-1}+\lambda^{q_j}F_j(a), \tag{692}$$

$q_j=\deg F_j$, перепишем скобку $\{F, f\}$ в виде

$$\{F, f\}=\{h_{q-3}, f\}_a-\sum_{i,j}\nu_{ij}(\{H_i, f\}_af_j+\{H_j, f\}_af_i). \tag{693}$$

Далее, $\{H_if_j, f\}_a=\{H_i, f\}_af_j+\{f_j, f\}_aH_i$ для любых i, $j=1, \ldots, \dim G_a$. Поскольку f_j лежат в ядре скобки $\{f, g\}_a$, то $\{H_if_j, f\}_a=\{H_i, f\}_af_j$ и соотношение (693) примет вид $\{F, f\}=\{h_{q-3}-\sum_{i,j}\nu_{ij}(H_if_j+f_iH_j), f\}$ для любой функции $f\in C^\infty(G^*)$.

Поэтому функцию $F_1 = h_{q-3} - \sum\limits_{i,j} \nu_{ij}(H_i f_j + H_j f_i)$ можно считать гамильтонианом уравнения Эйлера $\dot{\xi} = \mathrm{ad}^*_{\varphi(\xi)}\xi$ относительно скобки $\{f, g\}_a$. Лемма доказана.

5. Лемма. *Пусть G — полупростая алгебра Ли, а уравнение Эйлера $\dot{x} = [x, \varphi(x)]$ гамильтоново относительно скобки $\{f, g\}_a$. Тогда $\varphi = \varphi_{a, b, D}$ для некоторых $b \in G_a = H$ и D: $H \to H$.*

Доказательство. Обозначим векторное поле, задающее уравнение Эйлера, через Y. Если поле Y гамильтоново относительно скобки $\{f, g\}$, то производная Ли L_Y вдоль Y — дифференцирование алгебры Ли $(C^\infty(G), \{f, g\})$, см. § 21. Пусть $u, v \in G$ — произвольные элементы алгебры G и $f_u(x) = B(x, u)$, $f_v(x) = B(x, v)$ — отвечающие им линейные функции на G. Тогда $L_Y\{f_u, f_v\}_a = \{L_Y f_u, f_v\}_a + \{f_u, L_Y f_v\}_a$, так как $\{f_u, f_v\}_a(x) = B(a, [u, v]) = \mathrm{const}$. Кроме того, $L_Y f_u = \{F, f_u\}$, $L_Y f_v = \{F, f_v\}$ в силу гамильтоновости поля Y относительно скобки $\{f, g\}$. Здесь $F(x) = 2^{-1}B(x, \varphi(x))$. Отсюда следует, что $\{\{F, f_u\}, f_v\}_a + \{f_u, \{F, f_v\}\}_a = 0$ для любых $u, v \in G$. Далее, $\{F, f_u\}(x) = B(x, [\varphi(x), u]) = -B(x, \mathrm{ad}_u \circ \varphi(x))$ и $(\mathrm{ad}_u \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \mathrm{ad}^*_u = -\varphi \circ \mathrm{ad}_u$. Положим $\Phi_u(x) = 2^{-1}B(x, (\varphi \circ \mathrm{ad}_u - \mathrm{ad}_u \circ \varphi)X)$. Ясно, что $\{F, f_u\} = \Phi_u$, $\{\Phi_u, f_v\}_a = B(a, [(\varphi \circ \mathrm{ad}_u - \mathrm{ad}_u \circ \varphi)(x), v])$, $\{\Phi_v, f_u\}_a = B(a, [(\varphi \circ \mathrm{ad}_v - \mathrm{ad}_v \circ \varphi(x), u])$. Следовательно, оператор φ удовлетворяет соотношению

$$B(a, [\varphi \circ \mathrm{ad}_u(x) - \mathrm{ad}_u \circ \varphi(x), v]) = B(a, [\varphi \circ \mathrm{ad}_v(x) - \mathrm{ad}_v \circ \varphi(x), u]). \tag{694}$$

В силу самосопряженности линейного оператора φ получим еще одно соотношение $B(\varphi([v, a]), [u, x]) - B([v, a], [u, \varphi(x)]) = B(u, \mathrm{ad}_a \circ \varphi \circ \mathrm{ad}_v(x)) - B(u, \mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_v \circ \varphi(x))$ для любого элемента $u \in G$. Учитывая невырожденность формы B, получим из предыдущего равенства функциональное уравнение на оператор φ

$$[x, \varphi([v, a])] - [\varphi(x), [v, a]] = [a, \varphi([v, x])] - [a, [v, \varphi(x)]]. \tag{695}$$

Отсюда $[\varphi(x), [a, v]] - [x, \varphi([a, v])] = [a, [\varphi(x), v]] - [a, \varphi([x, v])]$ для любого $v \in G$. Поэтому

$$\mathrm{ad}_{\varphi(x)} \circ \mathrm{ad}_a - \mathrm{ad}_x \circ \varphi \circ \mathrm{ad}_a = \mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_{\varphi(x)} - \mathrm{ad}_a \circ \varphi \circ \mathrm{ad}_x. \tag{696}$$

Окончательно

$$[\mathrm{ad}_{\varphi(x)}, \mathrm{ad}_a] = \mathrm{ad}_x \circ \varphi \circ \mathrm{ad}_a - \mathrm{ad}_a \circ \varphi \circ \mathrm{ad}_x. \tag{697}$$

В силу тождества Якоби в алгебре Ли G, имеем $[\mathrm{ad}_{\varphi(x)}, \mathrm{ad}_a] = \mathrm{ad}_{[\varphi(x), a]}$ и, следовательно, $\mathrm{ad}_{[\varphi(x), a]} = \mathrm{ad}_x \circ \varphi \circ \mathrm{ad}_a - \mathrm{ad}_a \circ \varphi \circ \mathrm{ad}_x$ для любого $x \in G$. Обозначим оператор $\mathrm{ad}_a \circ \varphi$ буквой ψ и подействуем операторами из соотношения (697) на произвольный вектор $y \in G$. Получим $[[\varphi(x), a], y] = [x, \varphi([a, y])] - [a, \varphi([x, y])]$ или $\psi([x, y]) = [\psi(x), y] + [x, \varphi \circ \mathrm{ad}_a(y)]$. Докажем теперь, что

$\varphi \circ \mathrm{ad}_a = \mathrm{ad}_a \circ \varphi$. Из соотношения (697) вытекает равенство $[[\varphi(x), a], a] = -[a, \varphi([x, a])]$. Таким образом, $\mathrm{ad}_a^2 \circ \varphi = \mathrm{ad}_a \circ \varphi \circ \mathrm{ad}_a$. При $h \in H$ имеем $\mathrm{ad}_a^2(\varphi(h)) = 0$. Поэтому в силу невырожденности оператора φ вектор $\varphi(h)$ лежит в ядре оператора ad_a^2. Последний оператор самосопряжен относительно формы Киллинга и на ортогональном дополнении V к подалгебре H не вырожден, так как элемент a регулярен. Значит, $\mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}_a^2 = H$ и $\varphi(h) \in H$ для любых $h \in H$. Заметим далее, что оператор φ сохраняет разложение $G = H \oplus V$. Отсюда ясно, что для любых $v \in V$ имеет место равенство $\mathrm{ad}_a \circ \varphi(v) = \varphi \circ \mathrm{ad}_a(v)$, причем на подалгебре Картана H операторы ad_a и φ также коммутируют. Итак, доказано, что линейный оператор $\psi = \mathrm{ad}_a \circ \varphi$ — дифференцирование полупростой алгебры Ли G. Все дифференцирования алгебры G внутренние, и, следовательно, найдется такой элемент $b \in G$, что $\Psi = \mathrm{ad}_b$. Таким образом, оператор φ удовлетворяет соотношению $[\varphi(x), a] = [b, x]$, т. е. $\varphi = \varphi_{a, b, D}$.

6. Доказательство теоремы 1. Утверждения лемм 4 и 5 дают доказательства необходимости и достаточности условий теоремы.

7. Замечание. В доказательстве леммы 5 существенным образом используются два обстоятельства. Первое — наличие симметрической невырожденной инвариантной билинейной формы, ограничение которой на централизатор регулярного элемента не вырождено. Второе — отсутствие у алгебры Ли G внешних дифференцирований. Алгебры Ли такого типа называются *совершенными*. Лемма 4 для них верна в силу их алгебраичности. Поэтому теорема 1 имеет место для класса совершенных алгебр Ли, обладающих инвариантной симметрической билинейной формой, ограничение которой на централизатор регулярного элемента не вырождено.

8. Замечание. Имеется классификация алгебр Ли G, которые допускают невырожденное инвариантное скалярное произведение (X, Y), $(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) = (X, Y)$. По этому поводу см. [439].

Глава 9

ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО ЛИУВИЛЛЮ НЕКОТОРЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ НА АЛГЕБРАХ ЛИ

§ 50. Уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики

1. Приведем список уравнений Эйлера, которые возникают в различных вопросах механики и математической физики. В этих примерах гамильтониан H не обязательно является квадратичной формой на пространстве G^*. Для того чтобы, например, учесть потенциал, рассматриваются гамильтонианы, являющиеся суммой квадратичного и некоторого линейного функционала.

2. Уравнения движения трехмерного твердого тела, закрепленного в одной точке, являются уравнениями Эйлера для алгебры Ли $\mathrm{so}(3)$ кососимметрических вещественных матриц размера 3×3, см. п. 12 § 5, п. 9 § 23. Напомним, что они имеют вид $\varphi\dot{X}=[\varphi X, X]$, $X\in\mathrm{so}(3)$, $\varphi X=IX+XI$, $I=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, где $\lambda_1=2^{-1}(-A+B+C)$, $\lambda_2=2^{-1}(A-B+C)$, $\lambda_3=2^{-1}(A+B-C)$, A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz.

Инвариантное описание оператора φ см. в п. 7 § 48.

3. Уравнения движения свободного твердого тела. Движение твердого тела в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ описывается уравнениями $\dot{K}=[K, \omega]+[e, u]$, $\dot{e}=[e, \omega]$, где K — кинетический момент тела, ω — угловая скорость тела, а векторы e и u определяются физическим содержанием задачи, описывают взаимодействие внешних сил. Указанные общие уравнения имеют три классических интеграла; $f_1=H$, где полная энергия H имеет вид $H=2^{-1}(K, h^{-1}(K))+m(r, e)$, затем $f_2=(K, e)$ и $f_3=(e, e)$. Рассмотрим, например, задачу о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Тогда e — единичный вектор, направленный по вертикальной оси Oz, и, следовательно, третий интеграл f_3 имеет вид $f_3=(e, e)=1$. Общее уравнение движения твердого тела задает векторное поле на шестимерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^6=\mathbf{R}^3(K)\times\times\mathbf{R}^3(e)$. Оказывается, это векторное поле гамильтоново на совместной поверхности уровня двух интегралов $f_2=c_2=\mathrm{const}$ и $f_3=c_3=\mathrm{const}$ относительно некоторой естественной скобки Пуассона. Пусть $M_{23}=\{f_2=c_2, f_3=c_3>0\}$. Эта поверхность является четырехмерным подмногообразием в $\mathbf{R}^6$. Поверхность M_{23} диффеоморфна кокасательному расслоению двумерной сферы. Определим на пространстве $\mathbf{R}^6(K, e)$ пуассонову структуру $\{f, g\}$. Если $K=(K_1, K_2, K_3)$ и $e=(e_1, e_2, e_3)$, то на образующих K_i, e_i операция задается табл. 3. Эта операция продолжается на $C^\infty(\mathbf{R}^6)$ и там задает структуру алгебры Ли. Проверяется, что эта пуассонова структура изоморфна скобке Березина для алгебры Ли $\mathrm{so}(3)\underset{\rho}{+}\mathbf{R}^3$ (алгебры Ли группы движений евклидова пространства). Эту скобку Пуассона можно ограничить на поверхность M_{23}, и там она задает невырожденную скобку.

4. Теорема (С. П. Новиков, И. Шмельцер). *Уравнения движения твердого тела* $\dot{K}=[K, \omega]+[e, u]$, $\dot{e}=[e, \omega]$ *можно представить на совместной поверхности уровня* M_{23} *двух интегралов* f_2 *и* f_3 *в гамильтоновом виде* $\dot{f}=\{f, h\}$, *где* h — *сужение функции* H *на* M_{23}.

Таблица 3

	K_1	K_2	K_3	e_1	e_2	e_3
K_1	0	$-K_3$	K_2	0	$-e_3$	e_2
K_2	K_3	0	$-K_1$	e_3	0	$-e_1$
K_3	$-K_2$	K_1	0	$-e_2$	e_1	0
e_1	0	$-e_3$	e_2	0	0	0
e_2	e_3	0	$-e_1$	0	0	0
e_3	$-e_2$	e_1	0	0	0	0

5. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле с потенциалом $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Пусть α, β, γ — три орта неподвижной системы координат, отнесенные к системе отсчета S, жестко связанной с твердым телом. Уравнения вращения твердого тела в системе S имеют вид

$$\dot{M} = M \times \omega + \frac{\partial U}{\partial \alpha} \times \alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} \times \beta + \frac{\partial U}{\partial \gamma} \times \gamma,$$
$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \tag{698}$$

где $U(\alpha, \beta, \gamma)$ — потенциальная функция:

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \int\limits_T \rho(r) \varphi((r, \alpha), (r, \beta), (r, \gamma)) dr_1 dr_2 dr_3, \tag{699}$$

здесь T — твердое тело, а r_1, r_2, r_3 — координаты в системе отсчета S.

Определим алгебру Ли L. По определению она является полупрямой суммой $\mathrm{so}(3) + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R}^3 + \mathbf{R}^3$ с базисом X_i, Y_j^α, i, $j = 1, 2, 3$, в котором коммутационные соотношения имеют вид

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \quad [X_i, Y_j^\alpha] = \varepsilon_{ijk} Y_k^\alpha, \quad [Y_i^\alpha, Y_j^\beta] = 0. \tag{700}$$

6. Теорема (О. И. Богоявленский [33]). *Уравнения* (698) *являются уравнениями Эйлера вида* $\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{df(x)}(x)$ *в пространстве* L^* *и имеют гамильтониан*

$$H = 2^{-1}(M, \omega) - U(\alpha, \beta, \gamma), \quad M_i = \sum_{k=1}^{3} I_{ik} \omega_k. \tag{701}$$

7. Динамика твердого тела с распределенным электрическим зарядом в идеальной несжимаемой жидкости. При наличии постоянного гравитационного и электрического полей и при условии равенства выталкивающей силы и силы тяжести и нулевом суммарном заряде тела уравнения движения в связанной с твердым телом системе отсчета S, центр которой совпадает с центром масс твердого тела при условии безвихревого обтекания, имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{M}=M\times\omega+p\times u+mgr\times\gamma+Ed\times\delta,\\ \dot{p}=p\times\omega,\quad \dot{\gamma}=\gamma\times\omega,\quad \dot{\delta}=\delta\times\omega,\end{gathered}\tag{702}$$

где ω — угловая скорость, u — скорость твердого тела в жидкости, p — полный импульс, M — полный момент импульса (в системе отсчета S), m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, γ — направление силы тяжести, вектор r определяет положение центра масс вытесненного объема жидкости, E — напряженность электрического поля, d — вектор дипольного момента, δ — направление электрического поля.

8. Теорема (О. И. Богоявленский, см. [33]). *Уравнения* (702) *являются уравнениями Эйлера в пространстве* L^* *и имеют гамильтониан*

$$H=2^{-1}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}M_iM_j+2c_{ij}M_ip_j+b_{ij}p_ip_j\right)-\\ -mg(r,\ \gamma)-E(d,\ \delta),\tag{703}$$

где $\omega_i=\partial H/\partial M_i$, $u_i=\partial H/\partial p_i$, *здесь* a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} — *произвольные постоянные коэффициенты, обеспечивающие положительную определенность указанной квадратичной формы.*

9. Вращение намагниченного твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном гравитационном и магнитном полях. В этом случае уравнения, описывающие движение твердого тела, имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{M}=M\times\omega+mgr\times\gamma+hz\times\delta,\\ \dot{\gamma}=\gamma\times\omega,\quad \dot{\delta}=\delta\times\omega,\end{gathered}\tag{704}$$

где z — вектор магнитного момента твердого тела, δ — направление магнитного поля, h — его напряженность.

10. Теорема (О. И. Богоявленский [33]). *Уравнения* (704) *являются уравнениями Эйлера в пространстве* M^* *с гамильтонианом* $H=2^{-1}(M,\ \omega)-mg(r,\ \gamma)-h(z,\ \delta)$, $M_i=\sum_{k=1}^{3}I_{ik}\omega_k$, *где алгебра Ли* M *имеет коммутационные соотношения, описанные в п. 5 при* α, $\beta=1,\ 2$. *При* $z=0$ *это уравнение переходит в классические уравнения Эйлера — Пуассона.*

11. Динамика твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной магнитной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Уравнения движения в системе отсчета S имеют вид

$$\dot{M}=M\times A,\quad \dot{K}=K\times B+u\times w,\quad \dot{u}=u\times B, \tag{705}$$

где M — суммарный момент количества движения твердого тела и жидкости относительно общего центра масс, A — угловая скорость вращения твердого тела, B — угловая скорость внутреннего вращения жидкости, K — вектор вихря скорости жидкости, векторы u и w связаны с магнитным полем, вмороженным в жидкость. Координаты векторов A, B линейно выражаются через координаты векторов M и K, координаты векторов u, w также связаны линейными соотношениями.

12. Теорема (О. И. Богоявленский [33]). *Уравнения* (705) *являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли* $\mathrm{so}(3)\oplus E(3)$ *и имеют гамильтониан* $H=2^{-1}((M, A)+(K, B)+(u, w))$, *где* $E(3)$ — *алгебра Ли группы движений евклидова пространства* $\mathbf{R}^3$.

13. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. В этом случае динамика описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\dot{M}=M\times A,\quad \dot{K}_a=K_a\times B_a+u_a\times w_a,\\ \dot{u}_a=u_a\times B_a,\end{gathered} \tag{706}$$

где $a=1, \ldots, n$, M — суммарный момент количества движения (относительно общего центра масс) твердого тела и жидкости во всех эллипсоидальных полостях, A — угловая скорость вращения твердого тела, векторы K_a, B_a, u_a, w_a характеризуют движение жидкости и вмороженное магнитное поле в a-полости. Координаты векторов A, $B_1, \ldots, B_n$ линейно выражаются через координаты векторов M, $K_1, \ldots, K_n$, координаты векторов u_a и w_a связаны линейными соотношениями; коэффициенты этих линейных связей зависят от компонент тензора инерции твердого тела и параметров эллипсоидальных полостей. Обозначим $L_{k,m}$ прямую сумму $\mathrm{so}(3)\oplus\ldots\oplus\mathrm{so}(3)\oplus E(3)\oplus\ldots\oplus E(3)$, состоящую из k экземпляров алгебры Ли $\mathrm{so}(3)$ и m экземпляров алгебры Ли $E(3)$.

14. Теорема ([33]). *Уравнения* (706) *являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли* $L=L_{1,n}$ *и имеют гамильтониан*

$$H=2^{-1}\left((M, A)+\sum_{\alpha=1}^{n}\left((K_\alpha, B_\alpha)+(u_\alpha, w_\alpha)\right)\right). \tag{707}$$

При отсутствии магнитного поля в k полостях $(u_\alpha = w_\alpha = 0,$ $\alpha = 1, \ldots, k)$ *алгебра Ли* L *редуцируется к алгебре Ли* $L_{k+1,n-k}$.

15. Вращение твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью, вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле с потенциалом $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. В этом случае динамика описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\dot M = M \times A + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \times \alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta} \times \beta + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \times \gamma,\\ \dot\alpha = \alpha \times A, \quad \dot\beta = \beta \times A, \quad \dot\gamma = \gamma \times A, \\ \dot K_\alpha = K_\alpha \times B_\alpha + u_\alpha \times w_\alpha, \quad \dot u_\alpha = u_\alpha \times B_\alpha,\end{gathered} \tag{708}$$

которые являются нераспадающейся комбинацией уравнений из п. 5 и 11.

16. Теорема (О. И. Богоявленский [33]). *Уравнения* (708) *являются уравнениями Эйлера в сопряженном пространстве к алгебре Ли* $L \oplus L_{0,n}$ *и имеют гамильтониан*

$$H = 2^{-1}(M, A) + 2^{-1} \sum_{\theta=1}^{n} ((K_\theta, B_\theta) + (u_\theta, w_\theta)) - U(\alpha, \beta, \gamma). \tag{709}$$

При отсутствии магнитного поля в k полостях алгебра Ли $L \oplus L_{0,n}$ *редуцируется к алгебре Ли* $L \oplus L_{k,n-k}$.

17. Уравнения Кирхгофа движения твердого тела в жидкости. Свяжем систему координат с движущимся телом. Пусть u_i — компоненты скорости поступательного движения начала координат, а ω_i — компоненты угловой скорости вращения твердого тела. Тогда кинетическая энергия системы жидкость — твердое тело имеет вид $T = 2^{-1}(A_{ij}\omega_i\omega_j + B_{ij}u_iu_j) + C_{ij}\omega_i u_j$, где A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} — постоянные, зависящие от формы тела и от плотностей тела и жидкости; по дважды повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 3. Пусть $N = (y_1, y_2, y_3)$, где $y_i = \partial T / \partial \omega_i$, и $K = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_i = \partial T / \partial u_i$. Тогда уравнение движения тела по инерции в идеальной жидкости описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\frac{dN}{dt} = N \times \omega + K \times u,\\ \frac{dK}{dt} = K \times \omega,\end{gathered} \tag{710}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

18. Теорема (см. [266], [267]). *Система уравнений Эйлера для алгебры Ли* $E(3)$ *группы Ли движений евклидова пространства* $\mathbf{R}^3$ *совпадает с уравнениями движения твердого тела по инерции в идеальной жидкости* (710).

19. Уравнения движения твердого тела по инерции в несжимаемой идеально проводящей жидкости. Рассмотрим классические уравнения магнитной гидродинамики несжимаемой идеально проводящей жидкости

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t}+(\operatorname{rot} v)\times v=\rho^{-1}(\operatorname{rot} H)\times H-\operatorname{grad}\Pi,\\ &\frac{\partial H}{\partial t}=\operatorname{rot}(v\times H). \end{aligned} \tag{711}$$

Как показано в работе [67], эти уравнения имеют в качестве простейшего конечномерного аналога уравнения

$$\begin{aligned} &\dot{M}=[\Omega,\ M]+[J,\ H],\\ &\dot{H}=[\Omega,\ H], \end{aligned} \tag{712}$$

где M, H, J, $\Omega\in\mathrm{so}(3)$. Физический смысл величин M, H, J, Ω см. в [67].

20. Теорема (В. В. Трофимов [253]). *Уравнения Эйлера для алгебры Ли* $\mathrm{so}(3)\otimes\mathbf{R}[x]/(x^2)$ *совпадают с уравнениями* (712), *являющимися конечномерными аппроксимациями уравнений магнитной гидродинамики* (711).

21. Квазиинстантон и уравнения Эйлера. Пусть $A^i_{\mu j}$ — связность в главном $\mathrm{SU}(2)$-расслоении над $\mathbf{R}^4$, $R_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,\ A_\nu]$ — ее тензор кривизны, где $A_\mu=\|A_{\mu j}\|\in\mathrm{SU}(2)$, см. [263]. На пространстве связностей рассмотрим функционал

$$S[A_\mu]=\int\limits_{\mathbf{R}^4} g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\langle R_{\mu\nu},\ R_{\alpha\beta}\rangle, \tag{713}$$

где $g^{\mu\nu}$ — метрика на $\mathbf{R}^4$, $\langle X,\ Y\rangle$ — форма Киллинга алгебры Ли $\mathrm{su}(2)$. Экстремали этого функционала описываются уравнениями Эйлера — Лагранжа $D_\mu R_{\mu\nu}=0$, A_μ — поле Янга — Миллса. Пусть $*R_{\alpha\sigma}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\sigma\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Любая автодуальная конфигурация $R_{\mu\nu}=*R_{\mu\nu}$ автоматически удовлетворяет уравнению Эйлера — Лагранжа и приводит к экстремуму функционала действия (713). Положим $A_\mu=A^a_\mu\sigma_a/2i$, где σ_a — матрицы Паули, см. [226]. Рассмотрим обобщенный анзац т'Хоофта

$$\begin{aligned} &A^1_\mu(x)=-\alpha\eta^1_{\mu\nu}\partial_\nu\psi^1(x),\\ &A^2_\mu(x)=-\beta\eta^2_{\mu\nu}\partial_\nu\psi^2(x),\\ &A^3_\mu(x)=-\gamma\eta^3_{\mu\nu}\partial_\nu\psi^3(x), \end{aligned} \tag{714}$$

здесь автодуальные тензоры т'Хоофта $\eta^a_{\mu\nu}$ определены равенствами $\eta^a_{\mu\nu}=-\eta^a_{\nu\mu}=\varepsilon^a_{\mu\nu}$, если μ, $\nu=1, 2, 3$, и $\eta^a_{\mu\nu}=-\eta^a_{\nu\mu}=\delta^a_\mu$, если $\nu=4$.

Следующее утверждение показывает, как возникают уравнения Эйлера на алгебре Ли $\mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$ при решении уравнений автодуальности для зависящих от $t = x_\mu x^\mu$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$ конфигураций полей Янга—Миллса A_μ, см. [113], а также [300], [517].

22. Теорема (Т. А. Иванова). *Для обобщенного анзаца т'Хоофта* (714) *уравнения автодуальности для полей* $A_\mu(t)$ *приводятся к уравнениям Эйлера на алгебре Ли* $\mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$ *с гамильтонианом* $H = a^{11}(z^1)^2 - a^{22}(z^2)^2 - a^{33}(z^3)^2$, *где* $z^1 = \dot\psi^1$, $z^2 = \dot\psi^2$, $z^3 = \dot\psi^3$ *и* $a^{11} = \pm 1/\sqrt{2 + a^{33}}$, $a^{22} = \pm\sqrt{2 + a^{33}}$, $a^{33} \in \mathbf{R}$ — *произвольное число.*

§ 51. Уравнения Эйлера на полупростых алгебрах Ли

1. Замечание. Вложение гамильтоновой системы в алгебру Ли гарантирует тривиальное семейство первых интегралов — функции, постоянные на орбитах коприсоединенного представления. Этих интегралов, как правило, не хватает для полной интегрируемости. Если алгебра Ли двумерна, то функции, постоянные на орбите, полностью решают задачу. Для построения полного набора интегралов на полупростых алгебрах Ли используется метод сдвига инвариантов, см. § 34. Эта общая схема является развитием идеи, предложенной в [165] для случая алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$.

2. Теорема (А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [186], [188]). *Пусть* G — *комплексная полупростая (или редуктивная) алгебра Ли,* $\dot X = [X, \varphi X]$ — *уравнения Эйлера с оператором* φ *комплексной серии. Тогда эта система вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах алгебры Ли* G, *находящихся в общем положении. Более точно, пусть* f — *любая гладкая инвариантная функция на* G. *Тогда все функции* $h_\lambda(X, a) = f(X + \lambda a)$ *являются интегралами векторного поля* $\dot X$ *при любых комплексных числах* λ. *Любые два интеграла* h_λ *и* d_μ, *построенные по функциям* f, $g \in I(G)$, *находятся в инволюции на любой орбите (регулярной или сингулярной). Гамильтониан* $F(X) = \langle X, \varphi X\rangle$ *векторного поля* $\dot X$ *также находится в инволюции со всеми интегралами вида* h_λ. *Из множества указанных интегралов можно выбрать функционально независимые на орбитах общего положения интегралы в количестве, равном половине размерности орбиты. Интеграл* F *функционально выражается через интегралы вида* h_λ.

Доказательство вытекает из п. 7 § 42 и результатов § 47.

3. Теорема (А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [186], [188]). *Пусть* G_c — *вещественная компактная форма полупростой комплексной алгебры Ли* G *и* $\dot X = [X, \varphi X]$ — *уравнения Эйлера с оператором* φ *компактной серии. Тогда эта система дифференциальных уравнений вполне интегрируема по Лиувиллю* *на орбитах общего положения. Более точно, пусть $f \in I(G_c)$ — любая гладкая инвариантная функция. Тогда все функции вида $h_\lambda(X, a) = f(X+\lambda a)$ являются интегралами векторного поля $\dot{X}$ для любого вещественного λ. Любые два интеграла h_λ и d_μ, построенные по функциям f, $g \in I(G_c)$, находятся в инволюции на любой орбите (регулярной или сингулярной). Гамильтониан $F(X) = \langle X, \varphi X \rangle$ векторного поля $\dot{X}$ также находится в инволюции со всеми интегралами вида h_λ. Из множества указанных интегралов (оно, вообще говоря, избыточно) можно выбрать функционально независимые в количестве, равном половине размерности орбиты общего положения. Интеграл F функционально выражается через интегралы вида h_λ.*

Доказательство вытекает из п. 7 § 42 и результатов § 47.

4. Теорема (А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [186], [188]). *Пусть G_n — нормальная компактная подалгебра в полупростой комплексной алгебре Ли G и $\dot{X} = [X, \varphi X]$ — уравнения Эйлера с оператором φ нормальной серии. Тогда эти уравнения вполне интегрируемы по Лиувиллю на орбитах алгебры Ли G_n, находящихся в общем положении. Более точно, пусть $f \in I(G_c)$ — любая гладкая инвариантная функция. Тогда все функции $h_\lambda(X, a) = f(X+\lambda a) \mid G_n$ являются интегралами потока $\dot{X}$ для вещественных λ. Любые два таких интеграла находятся в инволюции на любой орбите (регулярной или сингулярной). Гамильтониан $F(X) = \langle X, \varphi X \rangle$ потока $\dot{X}$ также находится в инволюции со всеми этими интегралами. Из множества указанных интегралов можно выбрать функционально независимые на орбитах общего положения в количестве, равном половине размерности орбиты. Интеграл F функционально выражается через интегралы вида h_λ. В частности, мы получаем полную интегрируемость уравнений движения классического m-мерного твердого тела.*

Доказательство вытекает из результатов гл. 8.

5. Замечание. Итак, уравнения Эйлера на всех орбитах общего положения в полупростых алгебрах Ли вполне интегрируемы по Лиувиллю. Однако в действительности верно более сильное утверждение. Оказывается, полный инволютивный набор алгебраических функций существует на любой полупростой орбите в алгебре Ли; в частности, эта орбита не обязана быть орбитой общего положения. Впервые этот результат был объявлен Дао Чонг Тхи в [85], однако в доказательстве этой теоремы в [85] были допущены пробелы. Эти пробелы окончательно устранены А. В. Браиловым. Точную формулировку теоремы см. в п. 10 § 42.

6. В табл. 4 приведен список компактных вещественных форм G_c, нормальных вещественных форм G_0 и компактных нормальных подалгебр G_n в классических простых комплексных алгебрах Ли G.

Таблица 4

Тип алгебры	G	G_c	G_0	G_n
A_{n-1}	$\mathrm{sl}(n, \mathbf{C})$	$\mathrm{su}(n)$	$\mathrm{sl}(n, \mathbf{R})$	$\mathrm{so}(n)$
B_n	$\mathrm{so}(2n+1, \mathbf{C})$	$\mathrm{so}(2n+1)$	$\mathrm{so}(2n+1, \mathbf{R})$	$\mathrm{so}(n+1)\times\mathrm{so}(n)$
C_n	$\mathrm{sp}(n, \mathbf{C})$	$\mathrm{sp}(n)$	$\mathrm{sp}(n, \mathbf{R})$	$\mathrm{u}(n)$
D_n	$\mathrm{so}(2n, \mathbf{C})$	$\mathrm{so}(2n)$	$\mathrm{so}(n, n)$	$\mathrm{so}(n)\times\mathrm{so}(n)$
G_2	$\mathfrak{g}_2(\mathbf{C})$	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{g}_2(\mathbf{R})$	$\mathrm{su}(2)\times\mathrm{su}(2)$
F_4	$\mathfrak{f}_4(\mathbf{C})$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{f}_4(\mathbf{R})$	$\mathrm{sp}(3)\times\mathrm{su}(2)$
E_6	$\mathfrak{e}_6(\mathbf{C})$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_6(\mathbf{R})$	$\mathrm{sp}(4)$
E_7	$\mathfrak{e}_7(\mathbf{C})$	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_7(\mathbf{R})$	$\mathrm{su}(8)$
E_8	$\mathfrak{e}_8(\mathbf{C})$	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{e}_8(\mathbf{R})$	$\mathrm{so}(16)$

7. Уравнения Эйлера на алгебре Ли so(4). В этом случае состояние системы описывается шестью переменными $l_{ij}=-l_{ji}$, $i, j=1, \ldots, 4$. Перейдем к новым переменным $l_1=2^{-1}(l_{23}+l_{14})$, $l_2=2^{-1}(l_{31}+l_{24})$, $l_3=2^{-1}(l_{12}+l_{34})$, $m_1=2^{-1}(l_{23}-l_{14})$, $m_2=2^{-1}(l_{31}-l_{24})$, $m_3=2^{-1}(l_{12}-l_{34})$, которые соответствуют разложению $\mathrm{so}(4)=\mathrm{so}(3)\oplus\mathrm{so}(3)$ алгебры Ли $\mathrm{so}(4)$ на простые слагаемые. Имеем $\{l_j, l_k\}=\varepsilon_{jkm}l_m$, $\{m_j, m_k\}=\varepsilon_{jks}m_s$, $\{l_j, m_k\}=0$. Рассмотрим гамильтониан H общего вида, являющийся однородным квадратичным:

$$H=\frac{1}{2}\left[\sum_{i, j=1}^{3} a_{ij}l_il_j+2\sum_{i, j=1}^{3} b_{ij}l_im_j+\sum_{i, j=1}^{3} c_{ij}m_im_j\right]. \tag{715}$$

Такой гамильтониан характеризуется тремя 3×3-матрицами $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|$ и $C=\|c_{ij}\|$, две из которых (A и C) симметричны и зависят, следовательно, от 21 параметра. Заметим, что, пользуясь преобразованиями из группы $G=\mathrm{SO}(3)\times\times\mathrm{SO}(3)$, мы можем привести матрицы A и C к диагональному виду, так что без ограничения общности можем считать, что H имеет вид

$$H=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{3} a_il_i^2+2\sum_{i, j=1}^{3} b_{ij}l_im_j+\sum_{i=1}^{3} c_im_i^2\right] \tag{716}$$

и зависит от 15 параметров.

Гамильтонова система с гамильтонианом H общего вида всегда обладает тремя интегралами движения $I_1=l^2$, $I_2=m^2$ и $I_3=H$. Орбита коприсоединенного представления имеет размерность 4 и выделяется уравнениями $I_1=\mathrm{const}$, $I_2=\mathrm{const}$. С топологической точки зрения орбиты являются произведением двумерных сфер $O=S^2\times S^2$.

Имеет место следующая теорема 8, решающая вопрос о существовании дополнительного квадратичного интеграла движения. Ответ на этот вопрос был дан в различной, хотя и эквивалентной форме в работах [30], [60].

8. Теорема (А. П. Веселов, см. [60]). *Пусть H имеет вид* (716), *причем собственные значения как матрицы A, так и матрицы C различны, а матрица B не вырождена* ($\det B \neq 0$). *Тогда для существования четвертого независимого квадратичного интеграла движения необходимо выполнение следующих условий.*

а) *Матрица B одновременно с A и C приводится к диагональному виду, так что матрицы A, B и C можно считать диагональными с элементами a_j, b_j, c_j соответственно.*

б) *Должны выполняться условия*

$$b_1^2(a_2-a_3)+b_2^2(a_3-a_1)+b_3^2(a_1-a_2)+(a_1-a_2)(a_2-a_3)\times \times(a_3-a_4)=0, \tag{717}$$

$$b_1^2(c_2-c_3)+b_2^2(c_3-c_1)+b_3^2(c_1-c_2)+(c_1-c_2)(c_2-c_3)\times \times(c_3-c_1)=0. \tag{718}$$

Дополнительный квадратичный интеграл движения существует лишь в случае Манакова [165] и для гамильтонианов вида

$$\begin{gathered} a_j=a+\lambda b_j^{-1}, \quad B_j=b_j+\lambda b_j^2(b_1b_2b_3)^{-1}, \\ c_j=(b_1b_2b_3)^{-1}b_j^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_j^2)+\lambda c. \end{gathered} \tag{719}$$

Приведем иную форму интегралов движения, взятую из работы [30].

9. Теорема (О. И. Богоявленский [30]). Следующие *три функции на* $\mathrm{so}(4)$ *находятся в инволюции:*

$$I_4=\left[\left(\frac{a_1-a_3}{a_1-a_2}\right)^{1/2} l_1+\left(\frac{b_1-b_3}{b_1-b_2}\right)^{1/2} m_1\right]^2 - \left[\left(\frac{a_3-a_2}{a_1-a_2}\right)^{1/2} l_2+\left(\frac{b_3-b_2}{b_1-b_2}\right) m_2\right]^2, \tag{720}$$

$$I_5=\left[\left(\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}\right)^{1/2} l_2+\left(\frac{b_1-b_2}{b_1-b_3}\right)^{1/2} m_2\right]^2 - \left[\left(\frac{a_2-a_3}{a_1-a_3}\right)^{1/2} l_3+\left(\frac{b_2-b_3}{b_1-b_3}\right)^{1/2} m_3\right]^2, \tag{721}$$

$$I_6=\left[\left(\frac{a_1-a_2}{a_2-a_3}\right)^{1/2} l_2+\left(\frac{b_1-b_2}{b_2-b_3}\right)^{1/2} m_2\right]^2 + \left[\left(\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\right)^{1/2} l_3+\left(\frac{b_1-b_3}{b_2-b_3}\right)^{1/2} m_3\right]^2. \tag{722}$$

10. Замечание. Функции I_1, I_2 и I_4, I_5, I_6 связаны одним линейным соотношением, так что среди них имеются четыре независимые функции. Поэтому общий вид гамильтониана, допускающего дополнительный интеграл движения, таков: $H=\alpha_4 I_4+\alpha_5 I_5+\alpha_6 I_6$.

11. Замечание. Во многих случаях торы Лиувилля являются вещественной частью комплексного тора, причем этот тор является абелевым многообразием. Выделим эту ситуацию в виде следующего определения.

12. Определение. Пусть на $\mathbf{R}^n$ задана пуассонова структура $\{h, g\}=\left\langle J\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}\right\rangle$, где $\frac{\partial h}{\partial x}=\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}\right)^t$, а $J=J(x)$ — кососимметрическая матрица. Если $H_1, \ldots, H_k$ — функционально независимый набор функций Казимира, то $\bigcap\limits_{i=1}^{k}\{H_i(x)=c_i \mid x\in\mathbf{R}^n\}$ — четномерное подмногообразие, $n-k=2m$. Гамильтонова система $\dot{x}=J\frac{\partial H}{\partial x}$, $x\in\mathbf{R}^n$, при сделанных предположениях называется *алгебраически вполне интегрируемой*, если выполняются следующие два свойства.

а) Система имеет m полиномиальных интегралов $H_{k+1}, \ldots, H_{k+m}$ в инволюции (т. е. $\{H_i, H_j\}=0$, $\{H, H_i\}=0$) таких, что $T^m=\bigcap\limits_{i=1}^{k+m}\{x\in\mathbf{R}^n \mid H_i(x)=c_i\}$ — инвариантное компактное связное подмногообразие (являющееся m-мерным тором) для $c=(c_1, \ldots, c_m)$ общего положения. Движение системы на T^m — прямолинейная обмотка тора $T^m=\mathbf{R}^m/\Gamma$, где Γ — решетка в $\mathbf{R}^m$.

б) Многообразие T^m можно считать некомпактным аффинным алгебраическим многообразием в $\mathbf{C}^n$. Требуется, чтобы это подмногообразие имело вид $\bigcap\limits_{i=1}^{k+m}\{x\in\mathbf{C}^n \mid H_i(x)=c_i\}=T^m_{\mathbf{C}}\setminus S$, где S — объединение нескольких подмногообразий коразмерности один, а $T^m_{\mathbf{C}}$ — комплексный алгебраический тор: $T^m_{\mathbf{C}}=\mathbf{C}^m/\Lambda$, Λ — решетка периодов. Алгебраичность означает, что $T^m_{\mathbf{C}}=\bigcap\limits_{i=1}^{M}\{F_i(x_0, \ldots, x_n)=0\}$, где F_i — однородные многочлены. Требуется, чтобы координаты $z_i(t)$ были мероморфными функциями на $T^m_{\mathbf{C}}$.

13. Рассмотрим подробнее геодезический поток левоинвариантной метрики на группе Ли SO(4). Имеет место следующее утверждение, фактически подводящее итог исследованиям М. Адлера, П. Мёрбеке, С. В. Манакова, О. И. Богоявленского, А. П. Веселова, М. Ланглуа, А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко.

14. Теорема. *Геодезический поток левоинвариантной метрики на группе Ли* SO(4) *алгебраически вполне интегрируем* *тогда и только тогда, когда метрика имеет один из трех указанных ниже видов.*

а) Метрика Манакова. В этом случае $H=2^{-1}\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\lambda_{ij}x_{ij}^2$ и числа λ_{ij} подчинены соотношению

$$\lambda_{23}\lambda_{14}(\lambda_{13}+\lambda_{24}-\lambda_{12}-\lambda_{34})+\lambda_{13}\lambda_{24}(\lambda_{12}+\lambda_{34}-\lambda_{23}-\lambda_{14})+ \\ +\lambda_{12}\lambda_{34}(\lambda_{23}+\lambda_{14}-\lambda_{13}-\lambda_{24})=0. \quad (723)$$

б) Алгебру Ли $so(4)$ представим в виде $so(4)=so(3)\oplus so(3)$. В этом случае метрика имеет вид

$$H=\sum_{i=1}^{3}(\lambda_i x_i^2+\lambda_{i+3}x_{i+3}^2+2\lambda_{i,\,i+3}x_ix_{i+3}),$$

где

$$(\lambda_{14}^2,\ \lambda_{25}^2,\ \lambda_{36}^2)(A_{12}A_{46}-A_{13}A_{45})^2= \\ =A_{21}A_{54}A_{32}A_{65}A_{13}A_{46}\left(\frac{(A_{65}-A_{32})^2}{A_{65}A_{32}},\right. \\ \left.\frac{(A_{46}-A_{13})^2}{A_{46}A_{13}},\ \frac{(A_{54}-A_{21})^2}{A_{54}A_{21}}\right), \quad (724)$$

причем знак произведения $\lambda_{14}\lambda_{25}\lambda_{36}$ выбирается из условия

$$\lambda_{14}\lambda_{25}\lambda_{36}(A_{12}A_{46}-A_{13}A_{45})^2= \\ =A_{21}A_{54}A_{32}A_{65}A_{13}A_{46}(A_{54}-A_{21})(A_{65}-A_{32})(A_{46}-A_{13}), \quad (725)$$

здесь $A_{ij}=\lambda_i-\lambda_j$.

в) В этом случае метрика имеет вид

$$H=\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{3}(3(3c_i+d_i)x_i^2+(c_i+3d_i)x_{i+3}^2+6(d_i-c_i)x_ix_{i+3}), \quad (726)$$

причем $c_i=b_i/a_i$ и $d_i=\dfrac{b_j-b_k}{a_j-a_k}$, где $(i,\ j,\ k)$ — перестановка $(1,\ 2,\ 3)$, параметризованы такими числами $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, что $a_1+a_2+a_3=0$ и $b_1+b_2+b_3=0$.

15. Пример. В качестве примера системы, являющейся алгебраически вполне интегрируемой, отметим динамическую систему Неймана, полная интегрируемость которой доказана в п. 2 § 28. Подробное исследование этой системы с точки зрения алгебраической полной интегрируемости см. в книге [164].

16. Конструкция. Приведем метод построения интегрируемых уравнений Эйлера, который связан с рассмотрением фильтраций в алгебрах Ли. Рассмотрим уравнение Эйлера $\dot{X}=[X,\ C(X)]$, где G — полупростая алгебра Ли, $X\in G$, а $C\colon\ G\to G$ — секционный оператор. Пусть задано разложение G в прямую сумму линейных подпространств: $G=L_0+L_1+\ldots+L_n$, где все L_i ортогональны относительно формы Киллинга и их коммутаторы удовлетворяют условию $[L_{k-i}, L_k]\subset L_k$ при $i>0$. Ясно, что $G_k=L_1+\ldots+L_k$ — подалгебра. Поэтому мы получаем фильтрацию алгебры Ли $G=G_n\supset\ldots\supset G_1\supset G_0=L_0$. Обратно, по каждой фильтрации, такой, что ограничение формы Киллинга на подалгебру G_i является невырожденным, восстанавливается нужное разложение G в прямую сумму подпространств $L_k=G_k\cap G_{k-1}^{\perp}$. Обозначим P_k ортогональный проектор на подпространство L_k. Произвольный элемент $l\in G$ имеет представление $l=l_0+\ldots+l_n$, $l_i=P_i(l)\in L_i$. Рассмотрим операторы C: $G\to G$ вида

$$C(l)=a_0(l)+\lambda_1 l_1+\ldots+\lambda_n l_n, \tag{727}$$

где a_0 — любой симметрический оператор в подалгебре L_0. Пусть f, $g\in I(G)$ — функции, постоянные на орбитах присоединенного представления в алгебре Ли G.

17. Теорема (О. И. Богоявленский [33]). *Уравнение Эйлера* $\dot X=[X, C(X)]$ *с оператором* C: $G\to G$ *вида* (727) *эквивалентно уравнению* $\dot l_0=[l_0, a_0(l_0)]$ *в подалгебре Ли* L_0 *и цепочке линейных дифференциальных уравнений в пространствах* L_k. *Уравнение Эйлера* $\dot X=[X, C(X)]$ *имеет набор первых интегралов* $f(\alpha m_k+\beta l_k)$, *где* $m_k=l_0+\ldots+l_k$, $m_n=X$, $X=l_0+\ldots+l_n$, *зависящих от спектральных параметров* α, β, $0\leqslant k\leqslant n$. *Скобки Пуассона этих интегралов* $\{f(\alpha m_k+\beta l_k),\ g(\gamma m_j+\delta l_j)\}$ *обращаются в нуль в следующих случаях:* а) $k=j$; б) $k>j$, $\alpha=1$, $\beta=0$ *или* $\alpha=0$, $\beta=1$.

§ 52. Уравнения Эйлера на разрешимых алгебрах Ли

1. Обозначения. Пусть G — комплексная простая алгебра Ли, H — ее подалгебра Картана, $G=H\oplus\sum\limits_{\alpha\neq 0}G^{\alpha}$ — корневое разложение, $\{h_i, e_\alpha\}$ — базис Шевалле. Рассмотрим в G борелевскую подалгебру bG, определяемую равенством

$$bG=\bigoplus_i \mathbf{R}h_i\oplus\sum_{\alpha>0}\mathbf{R}e_\alpha. \tag{728}$$

Ей отвечает группа Ли BG. Выберем в группе Вейля $W(G, H)$ алгебры Ли G элемент w_0 наибольшей длины, см. [55].

2. Теорема (А. А. Архангельский [11]). *Пусть* d_i — *полуинварианты представления* Ad^* *группы Ли* BA_n. *Существует открытое всюду плотное подмножество* $U\subset(bA_n)^*$ *такое, что если функция* f *на* $(bA_n)^*$ *функционально зависит от функций* $d_i(x+\lambda a)$, $i=1, \ldots, n$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $a\in U$, *то система уравнений* $\dot x=\mathrm{ad}^*_{df(x)}(x)$ *вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления* Ad^* *группы Ли* BA_n.

3. Теорема (В. В. Трофимов [246]). *Пусть d_i — полуинварианты представления* Ad^* *группы Ли* $\mathrm{BSp}(n)$. *Существует открытое всюду плотное подмножество* $U \subset (\mathrm{bsp}(n))^*$ *такое, что если функция f на* $(\mathrm{bsp}(n))^*$ *функционально зависит от функций* $d_i(x+\lambda a)$, $i=1, \ldots, n$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $a \in U$, *то система уравнений* $\dot{x}=\mathrm{ad}^*_{df(x)}(x)$ *вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления* Ad^* *группы* $\mathrm{BSp}(n)$.

4. Замечание. Явное описание полуинвариантов для BA_n можно найти в работе А. А. Архангельского [11], а для $\mathrm{BSp}(n)$ — в работе В. В. Трофимова [246]. В работе [249] дано описание полуинвариантов и, в частности, инвариантов для всех борелевских подалгебр bG в простых алгебрах Ли G.

Пусть $\Delta_i(X)$ — нижний левый угловой минор порядка i матрицы X, $O_{ij}(s)$ — окаймление минора $\Delta_s(X)$, соответствующее элементу x_{ij}.

5. Теорема (В. В. Трофимов [246]). *Пусть функция f на* $(\mathrm{bso}(n))^*$ *функционально зависит от полуинвариантов представления* Ad^* *группы Ли* $\mathrm{BSO}(n)$ *и, кроме того, в случае $n=2k$ — от координат максимальной абелевой подалгебры* $\mathrm{bso}(n)$, *т. е. от* $y_{i,j+n}(i+j<n)$, *в случае* $\mathrm{BSO}(4k+1)$ — *от сдвигов* Δ_{k+1} *и координат* $y_{i,j+k}$ $(i+j<k)$ *абелевой подалгебры, в случае* $\mathrm{BSO}(4s+3)$ — *от сдвигов* $O_{k+1,k+2}(k-1)$ *и координат* $y_{i,j+k}$ $(i+j<k)$ *абелевой подалгебры (алгебра Ли* $\mathrm{so}(N)$ *реализована матрицами, кососимметричными относительно побочной диагонали). Тогда система уравнений* $\dot{x}=\mathrm{ad}^*_{df(x)}(x)$ *вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления* Ad^* *группы Ли* $\mathrm{BSO}(n)$.

6. Теорема (см. [246]). *Если функция f на $(bG_2)^*$ функционально зависит от полуинвариантов коприсоединенного представления* Ad^* *группы Ли BG_2 и координат максимальной абелевой подалгебры в bG_2, то система уравнений* $\dot{x}=\mathrm{ad}^*_{df(x)}(x)$ *вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления* $\mathrm{Ad}^*_{BG_2}$.

7. Теорема (см. [249]). *В пространстве многочленов на $(bF_4)^*$ и $(bE_6)^*$ в явном виде предъявляется конечномерное подпространство W, инвариантное относительно представления* Ad^* *группы Ли BF_4 или BE_6, такое, что если функция f функционально зависит от сдвигов базисных функций пространства W, то система уравнений* $\dot{x}=\mathrm{ad}^*_{df(x)}(x)$ *вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления* Ad^* *группы Ли BF_4 или BE_6 соответственно.*

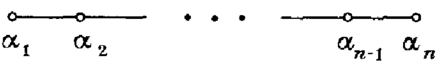
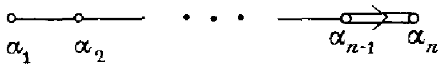
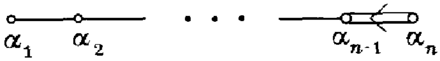
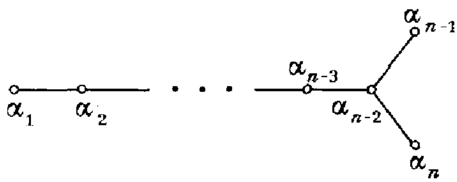
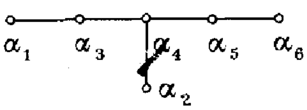
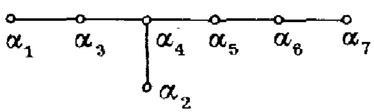
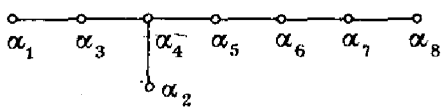
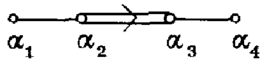
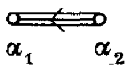
Доказательство теоремы 6 основано на использовании метода цепочки подалгебр (см. § 35), а доказательство теоремы 7 проводится на основе обобщенной методики сдвига, см. § 34. Подробности см. в работах В. В. Трофимова [246]—[249].

8. Замечание. Для построения полного инволютивного семейства функций на $(bG)^*$ надо знать индекс алгебры Ли bG.

Эту задачу решает следующая теорема, принадлежащая В. В. Трофимову.

9. Теорема (см. [249]). *Пусть G — простая алгебра Ли, bG — описанная выше вещественная форма борелевской подалгебры в G, $w_0 \in W(G, H)$ — элемент группы Вейля максимальной длины. Тогда если O — орбита максимальной размерности представления* Ad^*_{bG}, *то* $\operatorname{ind} bG = \operatorname{codim} O = \frac{1}{2} \operatorname{card} A$, *где* $A = \{\alpha_i \in \Delta \mid (-w_0)\alpha_i \neq \alpha_i\}$, Δ — *система простых корней алгебры Ли* G, $\operatorname{card} A$ — *мощность множества* A.

Таблица 5

Тип алгебры	Система простых корней	Инволюция $-\omega_0$
A_n		$\alpha_i \to \alpha_{n+1-i}$
B_n		id
C_n		id
D_n		если n четно, то id если n нечетно, то $\alpha_{n-1} \to \alpha_n$, $\alpha_i \to \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n-2$
E_6		$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_2 & \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_1 \end{pmatrix}$
E_7		id
E_8		id
E_4		id
G_2		id

10. Действие инволюции $(-w_0)$ на схеме простых корней простой алгебры Ли G приведено в табл. 5, см. [55].

11. Теорема (Ле Нгок Тьеуен, см. [150]). *Пусть L — любая подалгебра в алгебре Ли K_n всех верхних треугольных матриц вида $L = V + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{R} E_{ij}$, где E_{ij} — элементарная матрица порядка $n \times n$, а V — произвольное подпространство n-мерного пространства диагональных матриц. Тогда на пространстве L^* существует полный инволютивный набор, который состоит из полиномов и который можно предъявить в явном виде.*

12. Замечание. Общая теорема существования полного инволютивного семейства функций для нильпотентных алгебр Ли доказана в работе Вернь [513]. Однако представляет интерес явное построение такого набора функций. В качестве примера приведем результат, принадлежащий Т. А. Певцовой.

13. Теорема. *Пусть f_i — полуинварианты представления Ad^* группы Ли P_n верхних треугольных матриц n-го порядка с единицами на диагонали. Существует открытое всюду плотное подмножество $U \subset G_n^*$ такое, что если функция f на G_n^* функционально зависит от функций вида $f_i(x + \lambda a)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $a \in U$, то система уравнений $\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{df(x)}(x)$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления $\mathrm{Ad}^*_{P_n}$ (G_n — алгебра Ли верхних треугольных матриц n-го порядка с нулями на диагонали).*

14. Цепочки Тоды. Описанные ниже системы были найдены в работе О. И. Богоявленского [321]. Пусть $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — векторы координат и импульса в n-мерном евклидовом пространстве. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — линейно независимые векторы в этом пространстве, а $q_{\alpha_j} = (\alpha_j, q)$ — линейные функции $(r \leqslant n)$.

Цепочки Тоды описываются гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + U(q_1, q_2, \ldots, q_n), \tag{729}$$

где $U(q_1, \ldots, q_n) = \sum\limits_{k=1}^{r} g_k^2 \exp(2q_{\alpha_k})$ — потенциал системы.

Если система векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ произвольна, то относительно соответствующей гамильтоновой системы сейчас почти ничего сказать нельзя. Однако если $\{\alpha_i\}$ образуют систему корней простой алгебры Ли, то можно полностью исследовать соответствующую гамильтонову систему. Приведем описание соответствующих интегрируемых потенциалов.

15. Тип A_{n-1}. Система простых корней $\alpha_1 = e_1 - e_2, \ldots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$. Потенциал U имеет вид

$$U = e^{q_1 - q_2} + \ldots + e^{q_{n-1} - q_n}. \tag{730}$$

16. Тип B_n. Система простых корней $\alpha_1=e_1-e_2, \ldots, \alpha_{n-1}=e_{n-1}-e_n$, $\alpha_n=e_n$. Потенциал U имеет вид

$$U=e^{q_1-q_2}+\ldots+e^{q_{n-1}-q_n}+e^{q_n}. \tag{731}$$

17. Тип C_n. Система простых корней $\alpha_1=e_1-e_2, \ldots, \alpha_{n-1}=e_{n-1}-e_n$, $\alpha_n=2e_n$. Потенциал U имеет вид

$$U=e^{q_1-q_2}+\ldots+e^{q_{n-1}-q_n}+e^{2q_n}. \tag{732}$$

18. Тип D_n. Система простых корней $\alpha_1=e_1-e_2$, $\alpha_2=e_2-e_3, \ldots, \alpha_{n-1}=e_{n-1}-e_n$, $\alpha_n=e_{n-1}+e_n$. Потенциал U имеет вид

$$U=e^{q_1-q_2}+\ldots+e^{q_{n-1}-q_n}+e^{q_{n-1}+q_n}. \tag{733}$$

19. Тип G_2. Система простых корней $\alpha_1=e_1-e_2$, $\alpha_2=-2e_1+e_2+e_3$. Потенциал U имеет вид

$$U=e^{q_1-q_2}+e^{-2q_1+q_2+q_3}. \tag{734}$$

20. Тип F_4. Система простых корней $\alpha_1=e_1-e_2$, $\alpha_2=e_2-e_3$, $\alpha_3=e_3$, $\alpha_4=2^{-1}(e_4-e_1-e_2-e_3)$. Потенциал U имеет вид

$$U=e^{q_1-q_2}+e^{q_2-q_3}+e^{q_3}+e^{\frac{1}{2}(q_3-q_1-q_2-q_3)}. \tag{735}$$

21. Тип E_6. Система простых корней $\alpha_1=2^{-1}(-e_1+e_2+\ldots+e_7-e_8)$, $\alpha_2=e_1-e_2$, $\alpha_3=e_2-e_3$, $\alpha_4=e_3-e_4$, $\alpha_5=e_4-e_5$, $\alpha_6=-(e_1+e_2)$. Потенциал U имеет вид

$$U=e^{q_1-q_2}+e^{q_2-q_3}+e^{q_3-q_4}+e^{q_4-q_5}+e^{-(q_1+q_5)}+ \\ +e^{\frac{1}{2}(-q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6+q_7-q_8)}. \tag{736}$$

22. Тип E_7. Система простых корней $\alpha_1=2^{-1}(e_1-e_8+e_2+\ldots+e_7)$, $\alpha_2=e_1-e_2, \ldots, \alpha_6=e_5-\alpha_6$, $\alpha_7=-(e_1+e_2)$. Потенциал U имеет вид

$$U=e^{q_1-q_2}+\ldots+e^{q_5-q_6}+e^{-(q_1+q_2)}+e^{\frac{1}{2}(-q_1+q_2+\ldots+q_7-q_8)}. \tag{737}$$

23. Тип E_8. Система простых корней $\alpha_1=2^{-1}(-e_1-e_8+e_2+\ldots+e_7)$, $\alpha_2=e_1-e_2, \ldots, \alpha_7=e_6-e_7$, $\alpha_8=-(e_1+e_2)$. Потенциал U имеет вид

$$U=e^{q_1-q_2}+\ldots+e^{q_6-q_7}+e^{-(q_1+q_2)}+e^{\frac{1}{2}(-q_1+q_2+\ldots+q_7-q_8)}. \tag{738}$$

24. Предложение. *Цепочки Тоды (п. 15—23) допускают реализацию в соответствующей борелевской подалгебре.*

Доказательство. Приведем конструкцию для цепочки Тоды типа A_n. Обозначения возьмем из п. 15, 22 § 27.

В качестве функции F_1 (см. п. 15 § 27) возьмем функцию $F_1(X)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(X+a)^2$, $X\in N$ и

$$a=\left\|\begin{matrix} 0 & \alpha_1 & & & & \\ & 0 & \alpha_2 & & 0 & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 0 & \alpha_{n-1} \\ & & & & & 0 \end{matrix}\right\| \in K_+, \tag{739}$$

Прямое вычисление показывает, что $H=F_1\circ f$.

Аналогичное построение можно выполнить для остальных типов цепочек.

25. Теорема. *Цепочки Тоды типов $A_n, \ldots, E_8$, описанные выше, являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами.*

Доказательство см. в работе [231].

§ 53. Уравнения Эйлера на неразрешимых алгебрах Ли с нетривиальным радикалом

1. Первый (после важной работы В. И. Арнольда [8]) пример интерпретации уравнений Эйлера на алгебре Ли $e(3)$ группы движений трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$ был обнаружен С. П. Новиковым в [198], где указано, что соответствующие уравнения есть уравнения Кирхгофа, описывающие свободную динамику твердого тела в жидкости, см. п. 17 § 50. Эти уравнения были исследованы на интегрируемость В. В. Козловым и Д. А. Онищенко [134]. Как указал С. П. Новиков в [198], при стягивании алгебры Ли $\mathrm{so}(4)$ на алгебру $e(3)$ семейство метрик $\varphi_{a,b,D}$ переходит в случай Клебша. Затем аналогичное наблюдение было сделано в [59], предельным переходом получено известное семейство Стеклова—Ляпунова—Колосова.

2. Замечание. Уравнения движения многомерного твердого тела вкладываются в алгебру Ли $e(n)$ группы движений пространства $\mathbf{R}^n$. Оказывается, что в этом случае метод сдвига аргумента позволяет построить полный коммутативный набор интегралов на орбитах общего положения.

Отметим, что полнота сдвигов инвариантов есть следствие общей теоремы А. В. Болсинова (п. 2 § 45).

3. Теорема (В. В. Трофимов и А. Т. Фоменко [266], [267]). а) *Система дифференциальных уравнений $\dot X=\operatorname{ad}^*_{q(X)}(X)$, где $q=C(a, b, D)$ — секционный оператор, построенный в п. 8 § 48 для $e(n)$, вполне интегрируема на орбитах общего положения.* б) *Пусть f — инвариантная функция на $e(n)^*$. Тогда функции*

$h_\lambda(X)=f(X+\lambda a)$ *являются интегралами движения при любых числах* λ. *Любые два интеграла* h_λ *и* g_μ *находятся в инволюции на всех орбитах представления* Ad^* *группы Ли* $E(n)$, *причем число независимых интегралов указанного вида равно половине размерности орбиты общего положения. При этом если* O *— орбита максимальной размерности коприсоединенного представления, то* $\operatorname{codim} O=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, *т. е.* $\operatorname{ind} e(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

4. Замечание. В явном виде интегралы описаны в работе [266], или см., например, обзор [268] или [269], [270]. В [255] доказана интегрируемость соответствующего геодезического потока на группе Ли $E(n)$.

5. Обозначения. Построенный в теореме 3 полный коммутативный набор функций на пространстве $e(n)^*$ играет роль «компактной» серии интегралов для полупростых алгебр Ли, см. п. 3 § 51. Аналог «нормальной» серии построен А. В. Браиловым. Пусть $e(n)$ — алгебра Ли группы Ли $E(n)$ движений евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ Стандартный базис алгебры Ли $e(n)$ состоит из элементов $\bar{x}_{ij}$ и $\bar{y}_k$, где $\bar{x}_{ij}$ — инфинитезимальное вращение в (i, j)-й плоскости, $\bar{y}_k$ — инфинитезимальный сдвиг по k-й координате, $i, j=1, \ldots, n$, $i<j$, $k=1, \ldots, n$. Линейные координатные функции на $e(n)^*$, соответствующие элементам $\bar{x}_{ij}$, $\bar{y}_k$, обозначим x_{ij} и y_k. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные числа. Определим матрицы размера $(n+1)\times(n+1)$: $E_{ks}=\|\delta_{ik}\delta_{sj}\|$, здесь δ_{ik} — символ Кронекера,

$$Y_{ii}=E_{ii}-(n+1)^{-1}\sum_{j=1}^{n+1} E_{i,j}, \quad Y_{ij}^{\pm}=E_{ij}\pm E_{ji} \quad (i\neq j),$$

$$A_1=\sum_{i=1}^{n} a_i Y_{ii}, \quad A_{-1}=a_n E^{+}_{n,n+1}, \quad A=A_1+A_{-1}, \quad X_1=\|x_{ij}\|, \tag{740}$$

где $x_{ij}=-x_{ji}$, $x_{k,n+1}=x_{n+1,k}=0$ при $k=1, \ldots, n+1$; $X_{-1}=\sum_{i=0}^{n} y_i E^{-}_{i,n+1}$; $X=X_1+X_{-1}$. Таким образом, X, X_1, X_{-1} — матричные функции на пространстве $e(n)^*$.

6. Теорема (А. В. Браилов). *Пусть* $a_1>\ldots>a_{n-1}$, $a_n\neq 0$, b_1, $b_2, \ldots, b_n$ *— некоторые числа. Тогда дифференциальные уравнения* $\dot{x}=\mathrm{ad}^*_{dH(x)}(x)$, $x\in e(n)^*$, *с квадратичной функцией*

$$2H=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\frac{b_i-b_j}{a_i-a_j}x_{ij}^2-2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{a_n}y_i x_{in}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n b_n-a_i b_i}{a_n^2}y_i^2+\frac{b_n}{a_n}y_n^2 \tag{741}$$

вполне интегрируемы по Лиувиллю на орбите O представления Ad^* *группы* $E(n)$ *в* $e(n)^*$ *для орбиты O общего положения в* $e(n)^*$. *Полным набором коммутирующих интегралов являются функциональные коэффициенты* h_{ks} $(k=2, \ldots, n+2;\ s=0, \ldots, k)$ *при* $\lambda^s\mu^{-2}$ *в многочлене* $h_k(\lambda, \mu^{-1})=\Delta^k(X_1+\lambda A_1+\mu^2(X_{-1}+\lambda A_{-1}))$, *где* Δ^k — *сумма всех симметричных миноров k-го порядка.*

7. Замечание. Метод тензорных расширений позволяет строить полные коммутативные наборы первых интегралов для конечномерных аналогов уравнений магнитной гидродинамики, описанных в п. 19 § 50. Пусть G — комплексная полупростая алгебра Ли, $I_f(G)$ — множество функций на G^*, которые являются сдвигами инвариантов F коприсоединенного представления ad^* алгебры Ли G, т. е. $I_f(G)$ состоит из функций вида $h_\lambda(X)=F(X+\lambda f)$, где $\lambda\in\mathbf{C}$, $f\in G^*$ — фиксированный ковектор. Используя процедуру тензорного расширения (см. п. 3 § 38), мы построим семейство функций $(t)(I_f(G))$ на пространстве $\Omega(G)^*$. Следующая теорема была доказана В. В. Трофимовым.

8. Теорема (см. [253], [258]). а) *Пусть функция h функционально зависит от семейства* $(t)(I_a(G))$. *Тогда уравнения Эйлера* $\dot X=\mathrm{ad}^*_{dh(X)}(X)$ *являются вполне интегрируемой гамильтоновой системой на всех орбитах общего положения коприсоединенного представления* Ad^* *группы Ли* $\Omega(P)$, *ассоциированной с алгеброй Ли* $\Omega(G)$. б) *Пусть G — комплексная полупростая алгебра Ли,* $\dot X=\mathrm{ad}^*_{C(a,b,D)}(X)$ — *уравнения Эйлера на* $\Omega(G)^*$, $X\in\Omega(G)^*$, *с оператором «комплексной» серии, см. п.* 11 § 48. *Тогда эта система вполне интегрируема по Лиувиллю на всех орбитах коприсоединенного представления группы Ли* $\Omega(P)$, *ассоциированной с* $\Omega(G)$. *Более точно, пусть* $F(x)$ — *любая гладкая, инвариантная относительно коприсоединенного представления группы Ли* $\Omega(P)$ *функция на* $\Omega(G)^*$. *Тогда все функции* $F(X+\lambda f)$, $\lambda\in\mathbf{C}$, *являются первыми интегралами уравнений Эйлера для всех* $\lambda\in\mathbf{C}$. *Любые два таких интеграла* $F(X+\lambda f)$, $H(X+\mu f)$, λ, $\mu\in\mathbf{C}$, *находятся в инволюции на всех орбитах относительно формы Кириллова. Из указанного множества интегралов можно выбрать функционально независимые интегралы в количестве, равном половине размерности орбиты общего положения коприсоединенного представления группы Ли* $\Omega(P)$, *ассоциированной с алгеброй Ли* $\Omega(G)$.

9. Замечание. Аналогичная теорема справедлива для компактной вещественной формы полупростой алгебры Ли, а также для нормальной компактной подалгебры в простой комплексной алгебре Ли G. Список таких подалгебр приведен в табл. 4, определение соответствующих серий операторов см. в п. 12, 13 § 48. Подробности см. в работах [253], [258].

10. Многомерный случай Лагранжа. Впервые вполне интегрируемый случай уравнений движения n-мерного твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести был найден А. В. Беляевым [18]. Найденный случай является обобщением классического случая Лагранжа, см. п. 14 § 5. Несколько другое обобщение случая Лагранжа на произвольную размерность было найдено Ратью [483]. Далее, как заметил А. В. Болсинов, случай Лагранжа можно включить в серию вполне интегрируемых гамильтоновых систем на алгебрах Ли вида $\Omega(G)=G\otimes(\mathbf{R}[x]/(x^2))$.

11. Обозначения. Свяжем с n-мерным твердым телом ортонепер $O, e_1, \ldots, e_n$ (O — точка закрепления). Тогда движение тела в неподвижной системе координат $O, e'_1, \ldots, e'_n$ можно представить как путь в группе $P=\mathrm{SO}(n)$. Фазовое пространство этой системы есть $T^*\mathrm{SO}(n)$, а движение задается векторным полем $\operatorname{sgrad} H$, где $H\in C^\infty(T^*\mathrm{SO}(n))$ — функция полной энергии, которая имеет вид $H=T+\pi^*(U)$, где T — левоинвариантная часть гамильтониана, $\pi\colon T^*P\to P$ — проекция кокасательного расслоения, $U\in C^\infty(P)$ — потенциал. Потенциал U обладает тем свойством, что при действии группы P сдвигами U порождает конечномерное пространство V. Определена полупрямая сумма $G_1=G+V$, $G=\mathrm{so}(n)$, где V рассматривается как абелева алгебра Ли. Как заметил А. В. Бочаров (см. дополнение к [66]), исходная система эквивалентна гамильтоновой системе $\operatorname{sgrad} H_1$, где $H_1=T_1+U_1$ и T_1 — функция компоненты G^*, равная ограничению T на G^*, а U_1 — функция компоненты V^*, равная значению функционала $\varphi\in V^*$ на $u\in V$. Итак, движение твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести описывается гамильтоновым уравнением на пространстве $(\mathrm{so}(n)+\mathbf{R}^n)^*$. В качестве координат на $(\mathrm{so}(n)+\mathbf{R}^n)^*$ возьмем линейные формы ν_{ij}, γ_k на $(\mathrm{so}(n)+\mathbf{R}^n)^*$, являющиеся базисами $\mathrm{so}(n)$ и $\mathbf{R}^n$ соответственно. Их выбираем так, чтобы $\{\nu_{ij}, \nu_{jk}\}=\nu_{ij}$, $\{\nu_{ij}, \gamma_j\}=\gamma_i$. Гамильтониан H в переменных ν_{ij}, γ_k имеет вид

$$H=\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\nu_{ij}^2}{\alpha_i+\alpha_j}+\sum_{i=1}^{n} r_i\gamma_i, \tag{742}$$

здесь α_i — диагональные элементы матрицы I моментов инерции (все остальные элементы равны нулю), r_i — координаты центра масс в базисе $O, e_1, \ldots, e_n$.

12. Определение. *Обобщенным случаем Лагранжа* в смысле [18] называется случай, когда

$$I=\begin{Vmatrix} c & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c \\ & & & kc \end{Vmatrix}, \quad r_1=\cdots=r_{n-1}=0,\ r_n\neq 0. \tag{743}$$

13. Теорема (см. [18]). *Динамическая система, отвечающая случаю Лагранжа* (п. 12), *является вполне интегрируемой гамильтоновой системой.*

14. Определение. Гамильтонова система на $(\mathrm{so}(n)+\mathbf{R}^n)^*$ с гамильтонианом $H=2^{-1}\langle M, \Omega\rangle+\langle X, \Gamma\rangle$, где $M=\|m_{ij}\|\in$

$\in \mathrm{so}(n)$ — вещественная кососимметрическая $n\times n$-матрица, $M = \Omega J + J\Omega = C^{-1}\Omega$, $J = \mathrm{diag}(I_1, \ldots, I_n)$, $I_k > 0$, $X = \|\chi_{ij}\|$ — фиксированная матрица в $\mathrm{so}(n)$, M, $\Gamma \in \mathrm{so}(n)$, называется *волчком Лагранжа* в смысле [483], если $I_1 = I_2 = a$, $I_3 = I_4 = \ldots = I_n = b$ и $\chi_{12} = -\chi_{21} = \chi$, все остальные $\chi_{ij} = 0$. *Полностью симметричный волчок* определяется как система, у которой $I_1 = I_2 = \ldots = I_n = a$ и X — произвольный элемент алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$.

15. Теорема (см. [483], [484]). *Предположим, что* $\chi_{12} \neq 0$. *Тогда уравнения Эйлера движения n-мерного твердого тела*

$$\dot{\Gamma} = [\Gamma, \Omega], \quad \dot{M} = [M, \Omega] + [\Gamma, X] \tag{744}$$

можно переписать в виде $\frac{d}{dt}(\Gamma + \lambda M + \lambda^2 C) = [\Gamma + \lambda M + \lambda^2 C, \Omega + \lambda X]$ *в том и только том случае, когда* (744) *описывает n-мерный волчок Лагранжа или полностью симметричный волчок. Величины* $I_k = \mathrm{tr}(\Gamma + \lambda M + \lambda^2 C)$ *и* $\mathrm{pf}(\Gamma + \lambda M + \lambda^2 C) = [\det(\Gamma + \lambda M + \lambda^2 C)]^{1/2}$ *(для четного n) дают полный коммутативный набор интегралов.*

16. Замечание. Пусть G — полупростая алгебра Ли, $\Omega(G) = G \otimes (\mathbf{R}[x]/(x^2))$ — тензорное расширение алгебры Ли G с помощью $\mathbf{R}[x]/(x^2) = \mathbf{R} + \varepsilon\mathbf{R}$, $\varepsilon^2 = 0$. Рассмотрим на $\Omega(G) \cong \Omega(G)^*$ гамильтониан $F(x + \varepsilon y) = 2^{-1}\langle \varphi_{abD}(x), x\rangle - (b, y)$. При отождествлении $\Omega(G) \cong \Omega(G)^*$ уравнения Эйлера $\dot{X} = \mathrm{ad}^*_{dF(X)}(X)$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [\varphi_{a,b,D}(x), x] - [b, y], \\ \dot{y} &= [\varphi_{a,b,D}(x), y], \end{aligned} \tag{745}$$

где x, y, b, $\varphi_{a,b,D}(x) \in G$. В случае $G = \mathrm{so}(3)$ система (745) принимает вид классического случая Лагранжа движения твердого тела в поле силы тяжести. Это замечание принадлежит А. В. Болсинову. Итак, случай Лагранжа оказался включенным в семейство гамильтоновых систем на двойственных пространствах к алгебрам Ли типа $\Omega(G)$.

17. Теорема (А. В. Болсинов [39]). *Система уравнений* (745) *вполне интегрируема по Лиувиллю на всех орбитах общего положения представления* Ad^* *группы Ли* $\Omega(P)$, *отвечающей* $\Omega(G)$.

18. Замечание. Заметим, что у нас еще остался не обобщенным на n-мерное пространство случай Ковалевской, см. п. 14 § 5. Это будет сделано в следующем параграфе.

19. Замечание. Хотя теорема А. В. Болсинова (п. 2 § 45) и решает принципиально вопрос о существовании полного инволютивного семейства функций на пространстве, дуальном к полупрямой сумме $G + V$, большой интерес представляют явные конструкции таких семейств. В качестве примера приведем две теоремы такого сорта, см. п. 20, 21.

20. Теорема (Т. А. Певцова [212]). *Пусть G — полупрямая сумма простой алгебры Ли H и абелевой алгебры по представлению μ. Тогда если:* а) *алгебра Ли $H=\mathrm{gl}(2n)$, а представление $\mu=\Lambda^2\rho$;* б) *алгебра Ли $H=\mathrm{sl}(2n)$, а представление $\mu=S^2\rho$;* в) *алгебра Ли $H=\mathrm{sp}(2n)$, а представление $\mu=\rho+\tau$, где ρ — минимальное представление, а τ — одномерное тривиальное представление, то метод цепочек подалгебр в явном виде позволяет построить полное инволютивное семейство рациональных функций на пространстве G^*. Здесь $\Lambda^k\rho$ и $S^k\rho$ обозначают k-ю внешнюю и k-ю симметрическую степени представления ρ.*

21. Теорема (Е. Г. Шувалова; К. Швая [296]). *Пусть G — полупрямая сумма простой алгебры Ли $\mathrm{sl}(2)$ и абелевой V по неприводимому представлению φ_k: $\mathrm{sl}(2)\to\mathrm{End}(V)$, которое задается своими числовыми отметками $\overset{k}{\circ}$ на схеме простых корней. Тогда при $k=1, \ldots, 6$ метод сдвига инвариантов в явном виде позволяет построить полное инволютивное семейство функций на пространстве G^*.*

22. Теорема (см. [33]). *Пусть V — пространство, сопряженное к одной из алгебр Ли L, M, $\mathrm{so}(3)\oplus\mathbf{R}^3$, $L_{k,m}$, $L\oplus L_{0,n}$ (соответствующие обозначения были введены в § 50). Тогда на V существует полное инволютивное семейство функций, являющихся первыми интегралами уравнений Эйлера* (698), (702), (704)—(706), (708), *т. е. эти уравнения вполне интегрируемы по Лиувиллю.*

§ 54. Интегрируемые системы и симметрические пространства

1. Конструкция. Пусть группа Ли R с алгеброй Ли J действует на многообразии M. Действие группы R индуцирует симплектическое действие R на кокасательном расслоении T^*M. Этому действию соответствует отображение момента P: $T^*M\to J^*$, которое в данном случае определяется следующим образом: $\langle P(x), g\rangle=\langle x, \hat{g}(m)\rangle$, где $x\in T^*_mM$, $\langle X, Y\rangle$ в левой части обозначает спаривание J^* с J, а в правой части — спаривание T^*_mM и T_mM. Пусть на J имеется невырожденная билинейная симметричная инвариантная форма Q. Отождествляя J^* с J с помощью Q, мы будем рассматривать отображение момента $P=P_Q$: $T^*M\to J$, $Q(P(x), y)=\langle x, \hat{g}(m)\rangle$, где $g\in J$, $x\in T^*_mM$. При фиксированной точке $m\in M$ отображение момента P линейно по $x\in T^*_mM$. Поэтому если на J определен оператор $\varphi_{a,b,D}$ (элементы a и b могут быть элементами алгебры Ли, содержащей J), то $H_{a,b,D}(x)=2^{-1}Q(P(x), \varphi_{a,b,D}(P(x)))$ — квадратичная функция на T^*M.

2. Определение. Если квадратичная функция $H_{a,b,D}(x)$ является положительно определенной невырожденной квадратичной формой, то ей соответствует риманова метрика $ds^2_{a,b,D}$ на M. Это соответствие определено в общей ситуации и называется *преобразованием Лежандра*, см., например, [8], [102]. Метрики $ds^2_{a,b,D}$ называются *метриками отображения моментов* P.

3. Теорема (А. В. Браилов). *Пусть M — риманово глобально симметричное пространство,* $\operatorname{rk} M$ — *его ранг,* R — *связная компонента группы изометрий* M, J — *ее алгебра Ли,* Q — $\operatorname{Aut}(J)$*-инвариантная симметричная невырожденная билинейная форма на* J. *Предположим, что* R — *компактная полупростая группа Ли.* а) *Если* $\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} J$, $\varphi_{a,b,D}$ — *произвольный положительный оператор на* J (a *и* b *могут быть элементами большей алгебры Ли*) *и* $f_1(X), \ldots, f_k(X)$ — *полный инволютивный набор независимых интегралов уравнения* $\dot{X} = [X, \varphi_{a,b,D}(X)]$, $X \in J$, $k = 2^{-1}(\operatorname{rk} J + \dim J)$, *то* $k = \dim M$ *и функции* $f_1(P(x)), \ldots, f_k(P(x))$ *являются независимыми интегралами в инволюции геодезического потока на* T^*M *римановой метрики* $ds^2_{a,b,D}$ *отображения моментов* $P\colon T^*M \to J$. б) *Если* $\operatorname{rk} M < \operatorname{rk} J$, a, $b \in G$, $\varphi_{a,b,D}$ — *положительный оператор, то геодезический поток на* T^*M *римановой метрики* $ds^2_{a,b,D}$ *отображения моментов* $P_Q\colon T^*M \to J$ *имеет инволютивный набор интегралов движения* $F(P(x) + \lambda a)$, $F \in I(J)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, *и для элемента* $a \in J$ *общего положения в* J *из этого набора можно выбрать независимые на* T^*M *функции в количестве, равном размерности* M.

Доказательство. а) Фиксируем какую-либо точку $m \in M$. Изометрия многообразия M, оставляющая точку m неподвижной и переворачивающая геодезические, проходящие через m, определяет инволютивный автоморфизм $f\colon R \to R$. Этот автоморфизм R определяет инволютивный автоморфизм алгебры Ли J, который мы обозначим буквой σ. Пусть $J = H + V$ — такое разложение J, что $\sigma | H = \mathrm{id}$ и $\sigma | V = -\mathrm{id}$. Для точки m имеем $P(T^*_m(M)) = V$. Поскольку $\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} J$, то мы можем выбрать подалгебру Картана K в J так, что $K \subset V$. Ввиду компактности алгебры Ли J отсюда следует, что всякая орбита R в J пересекает V. Как известно, действие R на T^*M при отображении моментов переходит в (ко)присоединенное действие на J. Поэтому $J = P(T^*M)$. Следовательно, функции $f_1(P(X)), \ldots$ $\ldots, f_k(P(X))$ независимы на T^*M. Их инволютивность вытекает из формулы $\{f \circ P, g \circ P\} = \{f, g\} \circ P$. Поэтому осталось доказать, что $\dim M = 2^{-1}(\dim J + \operatorname{rk} J)$. Пусть a — произвольный элемент из V, J^a — централизатор a в J, $H^a = H \cap J^a$, $V^a = V \cap J^a$. Поскольку $[H, H] \subset H$, $[V, V] \subset H$, $[H, V] \subset V$ и $a \in V$, то $J^a = H^a + V^a$. Определим на J кососимметрическую форму $L_a(X, Y) = Q(a, [X, Y])$. Поскольку Q инвариантна относительно $\operatorname{Aut}(J)$, то она инвариантна, в частности, относительно σ.

Поэтому H и V являются Q-ортогональными дополнениями друг друга в J. Отсюда следует, что $H^{\perp}=V+H^a$, $V^{\perp}=H+V^a$, где $H^{\perp}$ и $V^{\perp}$ — кософортогональные дополнения к H и V в J относительно L_a. Следовательно, факторформа $\bar{L}_a$ на $J/J^a=H/H^a\oplus V/V^a$ не вырождена и осуществляет спаривание пространства H/H^a с V/V^a. Поэтому $\dim H/H^a=\dim V/V^a$. Пусть K — подалгебра Картана в J такая, что $K\subset V$, $a\in K$ — регулярный в J элемент. Тогда $J^a=V^a=K$, $H^a=0$. Имеем

$$\frac{1}{2}(\dim J+\operatorname{rk} J)=\frac{1}{2}(\dim J+\dim J^a)=\frac{1}{2}(\dim H+\dim V+\dim V^a)=$$

$$=\frac{1}{2}(\dim H-\dim H^a+\dim V-\dim V^a)+\dim V^a=$$

$$=\dim V/V^a+\dim V^a=\dim V=\dim M. \qquad (746)$$

б) Пусть K — такая подалгебра Картана в J, что $K_V=K\cap V$ — максимальное коммутативное подпространство в V. В этом случае $\dim K_V=\operatorname{rk} M$. Для элемента $a\in K_V$ общего положения в K_V имеем $V^a=K_V$, поэтому для орбиты O группы R в J, проходящей через точку a, имеем $\frac{1}{2}\dim O=\frac{1}{2}\dim J/J^a=$ $=\frac{1}{2}(\dim H/H^a+\dim V/V^a)=\dim V/V^a$. Воспользуемся теперь тем, что сдвиги инвариантов образуют полный инволютивный набор на каждой полупростой орбите, см. п. 10 § 42. Получим, что набор функций $F(x+\lambda a)$, $F\in I(J)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, содержит $\frac{1}{2}\dim O$ независимых на O функций.

4. Лемма. *Пусть J — вещественная или комплексная полупростая алгебра Ли, $a\in J$ — полупростой элемент, J^a — централизатор a, $\operatorname{Cent} J^a$ — его центр, $\langle X, Y\rangle$ — инвариантная симметрическая билинейная невырожденная форма, с помощью которой мы отождествляем J и J^*, $f_1, \ldots, f_k$ — образующие алгебры инвариантов $I(J)$. Тогда дифференциалы $df_1(a), \ldots, df_k(a)$ порождают $\operatorname{Cent} J^a$.*

Доказательство. а) *Случай поля комплексных чисел.* Пусть H — подалгебра Картана в J. Тогда, как известно, отображение ограничения $j\colon I(J)\to S(H)$, где $S(H)$ — алгебра полиномиальных функций на H, является вложением на $jI(J)=S(H)^W$, где $S(H)^W$ — подалгебра в $S(H)$ инвариантных многочленов относительно группы Вейля W, соответствующей подалгебре Картана H. Пусть $b\in\operatorname{Cent} J^a$, W^a — стабилизатор a в W, W^b — стабилизатор b в W. Тогда имеем $W^a\subset W^b$. Пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — орбита a относительно группы Вейля. Подберем положительную функцию g на H так, чтобы $dg(a)=b$ и $dg(a_i)=0$

при $a_i \neq a$. Пусть $\tilde{g} = n \sum_{\omega \in W} g \cdot \omega$. Тогда $d\tilde{g}(a) = b$ и $\tilde{g} \in S(H)^W$. Следовательно, $f = j^{-1}(\tilde{g})$ — инвариант J такой, что $df(a) = b$. Итак, показано, что если $f_1, \ldots, f_k$ — образующие алгебры инвариантов $I(J)$, то $f = P(f_1, \ldots, f_k)$ для подходящего полинома P. Следовательно, $b = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial P}{\partial f_i} df_i(a)$, что и требовалось доказать.

б) Пусть J — вещественная алгебра Ли. Рассмотрим ее комплексификацию $J^{\mathbf{C}}$. Тогда J — вещественная форма $J^{\mathbf{C}}$, пусть σ — сопряжение относительно J. Пусть $r = \operatorname{rk} J$ и $f_1, \ldots, f_r$ — образующие алгебры $I(J)$. Положим

$$g_1 = f_1 + \overline{f_1 \circ \sigma}, \ \ldots, \ g_r = f_r + \overline{f_r \circ \sigma}; \tag{747}$$

$$g_{r+1} = (\sqrt{-1})^{-1} (f_1 - \overline{f_1 \circ \sigma}), \ \ldots, \ g_{2r} = (\sqrt{-1})^{-1} (f_r - \overline{f_r \circ \sigma}), \tag{748}$$

черта обозначает комплексное сопряжение. Тогда $g_1, \ldots, g_{2r} \in I(J^{\mathbf{C}})$ и все они принимают вещественные значения на J, следовательно, их ограничения на J, которые мы также обозначим $g_1, \ldots, g_{2r}$, являются инвариантами J. Пусть g — инвариант J, $g^{\mathbf{C}}$ — его комплексное продолжение на $J^{\mathbf{C}}$. Тогда $g^{\mathbf{C}}$ — инвариант $J^{\mathbf{C}}$ и $g^{\mathbf{C}} = P(f_1, \ldots, f_r)$ для подходящего полинома P. Поскольку $f_1 = g_1 + \sqrt{-1}\, g_{r+1}, \ldots, f_r = g_r + \sqrt{-1}\, g_{2r}$, то $g^{\mathbf{C}}$ и g полиномиально выражаются через $g_1, \ldots, g_{2r}$. Пусть $(J^{\mathbf{C}})^a$ — централизатор a в $J^{\mathbf{C}}$ и $\operatorname{Cent}(J^{\mathbf{C}})^a$ — его центр. Тогда $\operatorname{Cent}(J^{\mathbf{C}})^a = \operatorname{Cent} J^a + \sqrt{-1} \operatorname{Cent} J^a$ и всякий элемент $b \in \operatorname{Cent} J^a$ является линейной комбинацией дифференциалов $df_1(a), \ldots, df_r(a)$ с комплексными коэффициентами в силу а), следовательно, b является линейной комбинацией дифференциалов $dg_1(a), \ldots, dg_{2r}(a)$ с вещественными коэффициентами, что и требовалось доказать.

5. Поскольку инварианты J постоянны на O, но не постоянны на K_V, то, используя лемму 4, на образе отображения P, т. е. на $P(T^*M)$, получим $\frac{1}{2} \dim O + \dim K_V$ независимых функций из набора $F_{\lambda,a}$, $F \in I(J)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Следовательно, среди функций $F(P(x) + \lambda a)$ имеется по меньшей мере $\frac{1}{2} \dim O + \dim K_V$ независимых на T^*M функций. Далее, $\frac{1}{2} \dim O + \dim K_V = \dim V/V^a + \dim V^a = \dim V = \dim M$.

Функции $F_{\lambda,a}(X)$ являются интегралами движения в инволюции уравнения Эйлера $\dot{X} = [X, \varphi_{a,b,D}(X)]$, которое гамильтоново на орбитах R в J с гамильтонианом $h_{a,b,D}(X) = \frac{1}{2} Q(X,$

$\varphi_{abD}(X))$. В силу соотношения $\{f\circ P,\ g\circ P\}=\{f,g\}\circ P$ получаем, что функции $F(P(x)+\lambda a)$ являются интегралами движения в инволюции гамильтоновой системы на T^*M с гамильтонианом $H_{a,b,D}(X)=h_{a,b,D}(P(X))$. Поскольку гамильтониан $H_{a,b,D}$ является гамильтонианом геодезического потока на T^*M метрики $ds^2_{a,b,D}$ и набор интегралов движения $F(P(X)+\lambda a)$ содержит независимые функции на T^*M в количестве, равном размерности M, то теорема доказана.

6. Обозначения. Пусть S^n — стандартная единичная сфера в $\mathbf{R}^{n+1}$. Группа $\mathrm{SO}(n+1)$ стандартным образом действует на сфере S^n.

7. Теорема (А. В. Браилов). *Пусть* $a, b\in \mathrm{gl}(n+1, \mathbf{R})$, $a=\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_{n+1})$, $b=\mathrm{diag}(b_1, \dots, b_{n+1})$, $a_1>\dots>a_{n+1}>0$, $b_1>\dots>b_{n+1}$; $Q(X, Y)=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,XY$ — *инвариантная билинейная симметрическая невырожденная форма на* $\mathrm{gl}(n+1, \mathbf{R})$, *положительно определенная на* $\mathrm{so}(n+1)\subset \mathrm{gl}(n+1, \mathbf{R})$; $\varphi_{a,b}=\mathrm{ad}_a^{-1}\mathrm{ad}_b$ — *Q-симметричный оператор; группа* $\mathrm{SO}(n+1)$ *стандартным образом действует на сфере* $S^n=\{y_1^2+\dots+y_{n+1}^2=1\}$, $P=P_Q$: $T^*S^n\to \mathrm{so}(n+1)$ — *соответствующее отображение моментов;* $ds^2_{a,b}$ — *риманова метрика на* S^n, *соответствующая (при преобразовании Лежандра) квадратичному гамильтониану* $H_{a,b}$, *где* $H_{a,b}(q)=\frac{1}{2}Q(P(q),\ \varphi_{a,b}(P(q)))$ *для* $q\in T^*S^n$. *Тогда:* а) *геодезический поток на* T^*S^n *римановой метрики* $ds^2_{a,b}$ *имеет* n *независимых квадратичных интегралов в инволюции* $H_1, \dots, H_n$, *где* $H_k(q)=$ $=\frac{1}{2}Q(P(q)\,\varphi_{a,a^k}(P(q)))$, $a^k=\mathrm{diag}(a_1^k, \dots, a_{n+1}^k)$ *и* $q\in T^*S^n$; б) *если* $-b=\mathrm{diag}(a_1^{-1}, \dots, a_{n+1}^{-1})$, *то при замене* $y_i=x_i/\sqrt{a_i}$, $i=1, \dots, n+1$, *метрика* $ds^2_{a,b}$ *переходит в метрику* $\left[\frac{x_1^2}{a_1^2}+\dots+\frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}^2}\right]\times$ $\times(dx_1^2+\dots+dx_{n+1}^2)$, *конформно эквивалентную стандартной метрике* $dx_1^2+\dots+dx_{n+1}^2$ *эллипсоида* $\left\{\frac{x_1^2}{a_1}+\dots+\frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}}=1\right\}$.

Доказательство получается непосредственным вычислением, см., например, [353].

8. Замечание. Мы обобщим предыдущую конструкцию. Для этого нам потребуется новое понятие. Алгебра операторов, коммутирующих с представлением группы Ли, коммутативна тогда и только тогда, когда каждое неприводимое представление группы Ли R входит в данное представление с кратностью не выше один. По аналогии с этим «квантовым» свойством дадим следующее

9. Определение. Гамильтоново действие группы Ли R на симплектическом многообразии M называется *свободным от* *кратностей*, если кольцо R-инвариантных функций на M коммутативно относительно скобки Пуассона.

10. Определение. Рассмотрим отображение моментов P: $M^{2n} \to J^*$, отвечающее гамильтонову действию группы Ли R с алгеброй Ли J на симплектическом многообразии M. Функции вида $f \circ P$ на M^{2n}, где $f \in C^\infty(J^*)$, назовем, следуя терминологии Гийемина и Стернберга, *коллективным*, см. [370]. Вполне интегрируемую систему, гамильтониан которой является коллективным и все первые интегралы таковы же, назовем вполне интегрируемой системой коллективного типа, см. [187], [370], [441].

11. Теорема (см. [374]). *Пусть на симплектическом многообразии M гамильтоново действует группа Ли R. Тогда если M допускает вполне интегрируемую гамильтонову систему коллективного типа, то действие группы Ли R на M свободно от кратностей.*

12. Замечание. В случае групп $\mathrm{U}(n)$ и $\mathrm{O}(n)$ действие свободно от кратностей тогда и только тогда, когда на M имеется вполне интегрируемая гамильтонова система коллективного типа, см. [371], [374].

В следующей теореме устанавливается связь между представлениями групп Ли, свободными от кратностей, и существованием вполне интегрируемых гамильтоновых систем коллективного типа, см. [373].

13. Теорема. *Действие группы Ли R на симплектическом многообразии M свободно от кратностей тогда и только тогда, когда представление T_g группы Ли R в пространстве $L^2(M)$ свободно от кратностей, где $T_g f(m) = f((g^{-1})(m))$, $f \in L^2(M)$.*

14. Замечание. Для компактных групп (P, Q) следующие три условия эквивалентны: а) все P-инвариантные гамильтоновы системы на $T^*(P/Q)$ являются вполне интегрируемыми системами коллективного типа; б) спектр представления T_g, $g \in P$, в пространстве $L_2(P/Q)$ прост; в) алгебра P-инвариантных функций на $T^*(P/Q)$ коммутативна. Выделим эту ситуацию в виде отдельного определения, см. [185].

15. Определение. Пусть G — редуктивная вещественная (или комплексная) алгебра Ли, φ — невырожденная билинейная инвариантная форма на G, H — редуктивная в G подалгебра, G^x — централизатор элемента x, $H^x = H \cap G^x$. Пусть $M = \{x \in G \mid \varphi(x, H) = 0\}$. Подалгебра H алгебры G называется *сферической*, а пара (G, H) — *сферической парой*, если для всех точек из некоторого открытого множества $U \subset M$ выполнены эквивалентные условия:

1) $\dim(G^x/H^x) + \frac{1}{2}\dim(G/G^x) = \dim(G/H)$;

2) $\dim(G^x/H^x) + \dim(H/H^x) = \dim M$;

3) $(\mathrm{rk}\, G - \mathrm{rk}\, H^x) + \dim(H/H^x) = \dim(G/H)$.

Пара групп (P, Q) называется *сферической*, если соответствующая пара алгебр (G, H) сферическая. В этом случае Q называется *сферической подгруппой* в P.

16. Замечание. В [402] получена классификация сферических подгрупп простых компактных групп Ли.

17. Замечание. Все симметрические пары (G, H), т. е. такие пары, что H — алгебра неподвижных точек инволютивного автоморфизма редуктивной алгебры G, сферические, см. [184], [185].

18. Обозначения. Пусть G — полупростая комплексная алгебра Ли, K — ее подалгебра Картана. Символом $R(\Lambda)$ будем обозначать неприводимое представление алгебры Ли G со старшим весом Λ (см. [65], [81]), символом $R'(\Lambda)$ — контраградиентное представление, буквой η — одномерное тривиальное представление. Если $\{\alpha_i\}$ — простые корни G относительно K, $\{\varphi_i\}$ — соответствующие фундаментальные веса, то $\Lambda = \sum \Lambda_i \varphi_i$, $\Lambda_i \in \mathbf{N}$. Простые корни нумеруем в том же порядке, как в [55].

19. В табл. 6 приведен список несимметрических сферических пар (G, H), где G — простая классическая комплексная алгебра Ли, H — редуктивная в G подалгебра, указано также представление j, определяющее вложение H в G.

20. Определение. *Система типа Калоджеро — Сазерленда* — это система, определяемая гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + g^2 \sum_{j<k}^{n} v(q_j - q_k), \tag{749}$$

где потенциал имеет специальный вид. В [328] изучался потенциал, для которого $v(\xi) = \xi^{-2} + \frac{\omega^2}{2g^2}\xi^2$, а в [498] — потенциал, для которого $v(\xi) = \sin^{-2}\xi$.

Эти классические системы допускают обобщение, использующее симметрические пространства. При этом варьируется как набор функций $v(\xi)$, так и область изменения индексов суммирования.

21. Класс функций. Будем предполагать, что функция $v(\xi)$ является одной из следующих пяти: I) $v(\xi) = \xi^{-2}$; II) $v(\xi) = \operatorname{sh}^{-2}\xi$; III) $v(\xi) = \sin^{-2}\xi$; IV) $v(\xi) = \wp(\xi)$; V) $v(\xi) = \xi^{-2} + \frac{\omega^2}{2g^2}\xi^2$, где $\wp$ — функция Вейерштрасса.

Таблица 6

	G	H	j
1	A_r, $r \geqslant 2$	$A_k \oplus A_{r-k-1}$, $r-k-1 \geqslant k \geqslant 1$	$R(\varphi_1) \otimes \eta + \eta \otimes R(\varphi_1)$
2	A_r, $r \geqslant 2$	A_{r-1}	$R(\varphi_1) + \eta$
3	A_{2r}, $r \geqslant 2$	C_r	$R(\varphi_1) + \eta$

Продолжение табл. 6

	G	H	j
4	$A_{2r},\ r\geqslant 2$	$C_r\oplus\mathbf{C}$	$R(\varphi_1)+\eta$
5	$B_r,\ r\geqslant 2$	$A_{r-1}\oplus\mathbf{C}$	$R(\varphi_1)+R'(\varphi_1)+\eta$
6	$C_r,\ r\geqslant 3$	$C_{r-1}\oplus\mathbf{C}$	$R(\varphi_1)+2\eta$
7	D_{2r+1}	A_{2r}	$R(\varphi_1)+R'(\varphi_1)$
8	D_5	$B_3\oplus\mathbf{C}$	$R(\varphi_3)+2\eta$
9	D_4	$A_1\oplus B_2$	$R(\varphi_1)\otimes R(\varphi_2)$
10	D_4	B_3	$R(\varphi_3)$
11	D_4	G_2	$R(\varphi_1)+\eta$
12	B_4	B_3	$R(\varphi_3)+\eta$
13	B_3	G_2	$R(\varphi_1)$
14	E_6	D_5	$R(\varphi_1)+R(\varphi_5)+\eta$
15	G_2	A_2	$R(\varphi_1)+R(\varphi_2)+\eta$

22. Индексы. С каждым римановым симметрическим пространством $M=P/Q$, где Q — максимальная компактная подгруппа, связана неприводимая ограниченная система корней, которая имеет тип A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 или BC_n [160]. Пусть Δ_+ — подсистема положительных корней.

23. Потенциалы. Определим потенциал $U(q)$ формулой

$$U(q)=\sum_{\alpha\in\Delta^+} g_\alpha^2 v(q_\alpha), \tag{750}$$

где $v(\xi)$ имеет вид, описанный в п. 21.

В случае системы корней A_n мы имеем потенциал Калоджеро — Сазерленда (749).

24. Пример. Системы, отвечающие BC_n, имеют потенциал

$$U(q)=g^2\sum_{k<l}^{n}\left[v(q_k-q_l)+\varepsilon v(q_k+q_l)\right]+g_1^2\sum_{k=1}^{n}v(q_k)+ \\ +g_2^2\sum_{k=1}^{n}v(2q_k). \tag{751}$$

25. Теорема (см. [206]). *Гамильтоновы системы с потенциалами Калоджеро — Сазерленда* (см. п. 23) *являются вполне интегрируемыми системами для неособых систем корней.*

26. Замечание. Системы, описанные выше, допускают явное интегрирование. С этими вопросами можно познакомиться по обзору [206].

Теперь мы изложим еще одну конструкцию гамильтоновых систем, связанных с эрмитовыми симметрическими пространствами и принадлежащую Форди, Войцеховскому и Маршаллу [354]. По этой схеме получаются гамильтоновы системы с гамильтонианом $H=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2+V(q_1, \ldots, q_n)$, у которого потенциал V имеет степень 4. Важность рассмотрения таких систем связана с линейными аппроксимациями четных потенциалов в окрестности особой точки. В настоящее время известно ограниченное число вполне интегрируемых потенциалов степени 4. В качестве примеров отметим $(\sum_k q_k^2)^2$ и $(\sum_k q_k^2)^2-\sum_k \omega_k q_k^2$.

27. Обозначения. Пусть симметрическое пространство связано с симметрической алгеброй Ли (G, σ) и $G=H+V$ — соответствующее разложение симметрической полупростой алгебры Ли G. Имеют место включения $[H, H]\subset H$; $[H, V]\subset V$, $[V, V]\subset H$. В случае эрмитова симметрического пространства существует такой элемент $A\in H$, что $H=C_G(A)=\{b\in \in G \mid [A, b]=0\}$. Пусть K — подалгебра Картана в G. Элемент A можно выбрать из подалгебры K. Имеем $V=V^+\oplus V^-$, $[A, H]=0$, $[A, X^\pm]=\pm aX^\pm$ (число a одно и то же для всех $X^\pm\in V^\pm$).

28. Спектральная задача. Рассмотрим следующую задачу, которая приводит к интегрируемым потенциалам. Для $Q(x, t)\in \in V$ рассмотрим спектральную задачу

$$\Psi_x=(\mu A+Q)\Psi, \tag{752}$$

где μ — спектральный параметр, t — время и временна́я зависимость ищется из условия

$$\Psi_t=P(x, t, \mu)\Psi. \tag{753}$$

Условие совместности (752) и (753) вместе с изоспектральным условием $\mu_t=0$ имеет вид $Q_t=P_x-[\mu A+Q, P]$.

Пусть $e_{\pm\alpha}$ — базис пространства $V^\pm$, Λ — постоянная диагональная матрица,

$$P=\mu^2A+\mu Q+\frac{1}{a}\sum_\alpha (q_x^\alpha e_\alpha-r_x^{-\alpha}e_\alpha)-\frac{1}{a}\sum_{\alpha,\beta} q^\alpha r^{-\beta}[e_\alpha, e_{-\beta}]+\Lambda, \tag{754}$$

$$Q=\sum_\alpha (q^\alpha e_\alpha+r^{-\alpha}e_{-\alpha}).$$

Уравнения совместности имеют вид

$$aq_t^\alpha=q_{xx}^\alpha+\sum_{\beta,\gamma,\delta} R^\alpha_{\beta,\gamma,-\delta}q^\beta q^\gamma r^{-\delta}+\omega_\alpha q^\alpha, \tag{755}$$

$$-ar_t^{-\alpha}=r_{xx}^{-\alpha}+\sum_{\beta,\gamma,\delta} R^{-\alpha}_{-\beta,-\gamma,-\delta}r^{-\beta}r^{-\gamma}q^\delta+\omega_\alpha r^{-\alpha}, \tag{756}$$

где $R^\alpha_{\beta,\gamma,-\delta}$ — тензор кривизны данного симметрического пространства, числа ω_α — линейные комбинации собственных значений матрицы Λ.

29. Потенциалы. Интегрируемые потенциалы соответствуют стационарным потокам уравнений совместности (755), (756). Стационарные потоки являются гамильтоновыми системами, и если положить $r^{-\alpha}=-q^{\alpha}$ $(s_{-\alpha}=-p_{\alpha})$, то соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}g^{\alpha,-\alpha}(p_{\alpha})^2-\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}R_{-\alpha\beta\gamma,-\delta}q^{\alpha}q^{\beta}q^{\gamma}q^{\delta}+\\ +\frac{1}{2}\sum_{\alpha}g_{\alpha,-\alpha}\omega_{\alpha}(q^{\alpha})^2. \quad (757)$$

30. Явный вид. Имеются четыре бесконечные серии эрмитовых симметрических пространств M. Им отвечают потенциалы

$$V(q_1, \ldots, q_n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i q_i^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}q_i^2\Big)^2, \quad (758)$$

$$V(q_1, \ldots, q_4)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\omega_i q_i^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{4}q_i^2\Big)^2-(q_1q_3-q_2q_4)^2, \quad (759)$$

$$V(q_1, q_2, q_3)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\omega_i(\delta_{i2}+1)q_i^2+\\ +\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3}(\delta_{i2}+1)q_i^2\Big)^2-(q_1q_3-q_2^2)^2, \quad (760)$$

$$V(q_1, \ldots, q_6)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\omega_i q_i^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{6}q_i^2\Big)^2-(q_3q_5-q_2q_6-q_1q_4)^2, \quad (761)$$

$$V(q_1, q_2, q_3, q_4)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\omega_i q_i^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{4}q_i^2\Big)^2-(q_1q_3+q_2q_4)^2. \quad (762)$$

Первые два потенциала отвечают симметрическому пространству $SU(m+n)/S(U(m)\times U(n))$ класса AIII. Третий потенциал отвечает симметрическому пространству $Sp(n)/U(n)$ класса CI в случае $n=2$. Четвертый потенциал отвечает симметрическому пространству $SO(2n)/U(n)$ класса DIII для $n=4$. Пятый потенциал отвечает симметрическому пространству $SO(n+2)/SO(2)\times SO(n)$ класса BDI для $n=4$.

31. Теорема (см. [354]). *Гамильтоновы системы, отвечающие перечисленным выше потенциалам* (758)—(762), *являются вполне интегрируемыми.*

32. Замечание. В рамках теории симметрических пространств можно дать многомерное обобщение случая Ковалевской. С этой целью рассмотрим компактную простую группу Ли P и ее замкнутую подгруппу Q такую, что факторпространство P/Q является симметрическим, см. [293]. Тогда $G=H+V$, где H — алгебра Ли группы Ли Q, а V — ортогональное дополнение к H в G относительно формы Киллинга.

33. Конструкция. Изложим схему построения интегрируемых гамильтонианов, предложенную А. М. Переломовым. Сохраним обозначения предыдущего пункта. Имеем неприводимое представление μ: $Q \to GL(V)$ стационарной подгруппы Q в пространстве V. Рассмотрим такое неприводимое представление ρ: $P \to \mathrm{GL}(W)$ группы Ли P, что неприводимое представление μ группы Q в V входит в ограничение $\rho|Q$ с единичной кратностью. Пространство W, в котором действует представление ρ, разложим в прямую сумму $W = W_0 \oplus W_1$, где W_0 — подпространство, в котором действует представление, изоморфное μ, а W_1 — ортогональное дополнение к W_0 (пространство W_0 изоморфно V).

Пусть $\tilde{G} = G \underset{\rho}{+} W$ — полупрямая сумма G и W по представлению ρ, $\tilde{P} = P \cdot W$ — соответствующее полупрямое произведение.

В итоге мы имеем разложение алгебры Ли $\tilde{G}$ в прямую сумму четырех подпространств: $\tilde{G} = H + V + W_0 + W_1$. Тогда для пространства $\tilde{G}^*$ имеем представление $G^* = H^* + V^* + W_0^* + W_1^*$, где $\dim V^* = \dim W_0^* = n$ и V^* и W_0^* изоморфны относительно действия группы Q.

34. Обозначения. Обозначим l_a, n_j, p_k и q_μ базисные линейные функции в пространствах H^*, V^*, W_0^* и W_1^*. В пространствах гладких функций на H^* и V^* существуют инвариантные относительно действия коприсоединенного представления группы Q квадратичные функции, которые обозначим $I^2(l_a)$ и $\tilde{I}^2(n_j)$ соответственно.

35. Гамильтонианы. Интересующая нас динамическая система задается гамильтонианом

$$h = \frac{1}{2}\left(\alpha I^2(l_a) + \beta \tilde{I}^2(n_j)\right) + \gamma p, \tag{763}$$

где $\gamma_p = \gamma^j p_j$, $\gamma = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$ — постоянный вектор пространства $W_0 \cong (W_0)^*$.

36. Случай симметрического пространства $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$. Итак, пусть $P = \mathrm{SO}(n+1)$, $Q = \mathrm{SO}(n)$, $\tilde{P} = P \cdot W = E(n+1)$ — группа движений $(n+1)$-мерного евклидова пространства, $W = \mathbf{R}^{n+1}$, $W_0 = \mathbf{R}^n$, $W_1 = \mathbf{R}^1$. Пусть $\hat{l}_{jk} = -\hat{l}_{kj}$ и $\hat{p}_m$ $(j, k, m = 1, \ldots, n+1)$ — стандартный базис в пространстве линейных функций на $G^* = H^* \oplus V^*$ и $W^* = W_0^* \oplus W_1^*$ соответственно со скобками Пуассона

$$\{\hat{l}_{ij}, \hat{l}_{km}\} = \delta_{jk}\hat{l}_{im} + \delta_{im}\hat{l}_{jk} - \delta_{ik}\hat{l}_{jm} - \delta_{jm}\hat{l}_{ik}, \tag{764}$$

$$\{\hat{l}_{ij}, , p_k\} = \delta_{jk}p_i - \delta_{ik}p_j, \quad \{p_j, p_k\} = 0. \tag{765}$$

В соответствии с п. 36 в качестве гамильтониана возьмем

$$h=\frac{1}{2}\left(\alpha\sum_{j<k=1}^{n} l_{jk}^2+\beta\sum_{j=1}^{n} n_j^2+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j p_j\right), \tag{766}$$

где $n_j=l_{j,n+1}$, $q=p_{n+1}$.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot l_{jk}&=-(\gamma_j p_k-\gamma_k p_j),\\ \dot n_j&=(\alpha-\beta)\,l_{jk}n_k+\gamma_j q,\\ \dot p_j&=\alpha l_{jk}p_k-\beta n_j q,\\ \dot q&=\dot p_{n+1}=\beta(np).\end{aligned} \tag{767}$$

37. Замечание. Гамильтонианы, определенные в п. 35, зависят от параметров α, β, γ^j, $j=1, ..., n$. В силу инвариантности скобок Пуассона при замене $p_j\to\lambda p_j$ свойства системы существенно зависят лишь от параметра α/β.

38. Теорема (А. М. Переломов). *Динамическая система* (767) *при* $\alpha=2\beta$ *обладает представлением Лакса* $\dot L=[L, M]$, $M=cl$, *где* $l=\|l_{ij}\|$,

$$L=-\frac{\alpha}{2}\,l^2+\beta n\otimes n+(\gamma\otimes p+p\otimes\gamma). \tag{768}$$

При $n=2$ *эта система совпадает с системой, описывающей движение твердого тела в случае Ковалевской.*

39. Замечание. Конструкция, изложенная в предыдущих пунктах, допускает обобщение, найденное А. Г. Рейманом и М. А. Семеновым-Тян-Шанским, см. [490]. Это обобщение связано с алгеброй Ли $e(p, q)=\mathrm{so}(p)+\overset{q}{\oplus}\,\mathbf{R}^p$, $p\geqslant q$, являющейся полупрямой суммой q копий пространства $\mathbf{R}^p$ и $\mathrm{so}(p)$ (здесь $\overset{q}{\oplus}\,\mathbf{R}^p$ — абелев идеал в $e(p, q)$).

40. Определение. На пространстве $e(p, q)^*$, дуальном к алгебре Ли $e(p, q)$, определим гамильтониан

$$h=\frac{1}{2}\left(2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant q} l_{ij}^2+c\sum_{q<i<j\leqslant p} l_{ij}^2+\sum_{1\leqslant i\leqslant q<j\leqslant p} l_{ij}^2\right)-\sum_{1\leqslant i\leqslant q}(f_i, e_i), \tag{769}$$

где $e_1, ..., e_p$ — фиксированный ортонормированный репер, $l=\|l_{ij}\|\in\mathrm{so}(p)$, $f_1, ..., f_q$ — векторы Пуассона, $c=\mathrm{const}$.

Обозначим f матрицу размера $p\times q$, составленную из столбцов $f_1, ..., f_q$, и пусть a — матрица размера $p\times q$ с элементами $a_{ij}=\delta_{ij}$. Введем ортогональный проектор P на подпространство $\mathbf{R}^q$, натянутое на векторы $e_1, ..., e_q$.

41. Теорема (см. [490]). *Уравнения Эйлера на* $e(p, q)^*$ *с гамильтонианом* (769) *обладают представлением Лакса*

$\frac{dL}{dt}=[L, M]$, *где* $L, M\in \mathrm{so}(p, q)\ [\lambda, \lambda^{-1}]$. *В естественных блочных обозначениях имеем*

$$L(\lambda)=\begin{Vmatrix} 0 & f \\ f' & 0 \end{Vmatrix}\lambda^{-1}+\begin{Vmatrix} -l & 0 \\ 0 & PlP \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 0 & a \\ a' & 0 \end{Vmatrix}\lambda, \tag{770}$$

$$M(\lambda)=\begin{Vmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix} 0 & a \\ a' & 0 \end{Vmatrix}\lambda, \tag{771}$$

здесь $\omega\in \mathrm{so}(p)$ — *матрица угловой скорости,* $\omega_{ij}=2l_{ij}$ *для* $i, j\leqslant q$, $\omega_{ij}=cl_{ij}$ *для* $i, j>q$ *и* $\omega_{ij}=l_{ij}$ *для* $i\leqslant q$, $j>q$. *Инварианты матрицы* $L(\lambda)$ *являются интегралами уравнений Эйлера с гамильтонианом* (769).

42. Замечание. Эквивалентное представление Лакса в случае $q=p-1$ было найдено А. М. Переломовым [472], см. выше.

43. Замечание. Конструкцию п. 39 можно обобщить на симметрические пары (P, Q), когда Q не является простой. Например, с римановой симметрической парой $(\mathrm{SO}(3, 3), \mathrm{SO}(3)\times \mathrm{SO}(3))$ связана система с гамильтонианом

$$h=\frac{1}{2}(l_1^2+l_2^2+2l_3^2+v^2)+\sum_{i=1}^{3}(K^t h_i, x)(x, e_i)\dotplus\sum_{i=1}^{3}(K^t h_i, e_i), \tag{772}$$

являющимся обобщением случая Ковалевской и задачи Неймана (см. [490]).

§ 55. Коммутативные подалгебры универсальной обертывающей алгебры

1. Определения. Универсальная обертывающая алгебра $U(L)$ алгебры Ли L имеет возрастающую фильтрацию

$$U(L)=\bigcup_{k=0}^{\infty} U^k(L), \tag{773}$$

в которой $U^k(L)$ есть подпространство элементов, представляемых в виде (некоммутативных) многочленов степени не выше k от элементов алгебры L, см. [88]. Из определяющих соотношений алгебры $U(L)$ следует, что

$$[U^k(L), U^l(L)]\subset U^{k+l-1}(L). \tag{774}$$

Ассоциированная градуированная алгебра

$$\mathrm{gr}\, U(L)=P(L)=\bigoplus_{k=0}^{\infty} P_k(L), \quad P_k(L)=U^k(L)/U^{k-1}(L) \tag{775}$$

согласно теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта канонически изоморфна симметрической алгебре пространства L. Однако помимо коммутативно-ассоциативной операции умножения в ней благодаря (774) естественным образом вводится лиевская операция $\{x, y\}$ — скобка Пуассона — Ли — Березина (мы будем называть ее просто скобка Пуассона), для которой $\{P_k(L), P_l(L)\} \subset P_{k+l-1}(L)$. А именно, при $u \in U^k(L)$, $v \in U^l(L)$ принимается, что

$$\{u+U^{k-1}(L), v+U^{l-1}(L)\} = [u, v] + U^{k+l-2}(L). \tag{776}$$

Это определение корректно ввиду (774). Другие эквивалентные определения см. в [270].

Скобка Пуассона связана с умножением тождеством Лейбница

$$\{x, yz\} = \{x, y\} z + y\{x, z\}. \tag{777}$$

Она однозначно определяется этим свойством и «начальными условиями» $\{x, y\} = [x, y]$ при $x, y \in L$.

Элементы $x, y \in P(L)$ будем называть *коммутирующими*, если $\{x, y\} = 0$. В соответствии с этим будем понимать и такие термины, как «коммутативное подпространство» (в частности, коммутативная подалгебра) и «централизатор» (какого-нибудь подмножества) в алгебре $P(L)$. Из (777) следует, что если какие-либо элементы алгебры $P(L)$ попарно коммутируют, то порожденная ими подалгебра коммутативна.

2. Замечание. Пусть T — связная группа Ли, имеющая L своей алгеброй Ли. Если понимать элементы алгебры $P(L)$ как многочлены на пространстве L^*, сопряженном к L, то скобка Пуассона в $P(L)$ будет совпадать с обычной скобкой Пуассона функций на орбитах коприсоединенного представления группы Ли T относительно канонической симплектической структуры на этих орбитах. Отсюда следует, что степень трансцендентности любой коммутативной подалгебры алгебры $P(L)$ не превосходит $d(L) = \frac{1}{2}(\dim L + \operatorname{ind} L)$, где $\operatorname{ind} L$ (индекс алгебры Ли L) — коразмерность орбиты общего положения коприсоединенного представления группы Ли T. В работе [188] для любой полупростой алгебры Ли L методом сдвига инвариантов были построены коммутативные подалгебры алгебры $P(L)$, степень трансцендентности которых равна $d(L)$.

3. Определение. Если A — коммутативная подалгебра алгебры $U(L)$, то $\operatorname{gr} A = B$ — коммутативная подалгебра алгебры $P(L)$. Будем говорить, что A — *подалгебра конечного типа*, если алгебра B конечно порождена. Нетрудно показать, что в этом случае степени трансцендентности алгебр A и B совпадают. Таким образом, степень трансцендентности любой коммутативной подалгебры конечного типа алгебры $U(L)$ не превосходит $d(L)$. Существуют ли в $U(L)$ коммутативные подалгебры конечного типа, степень трансцендентности которых равна

$d(L)$? Примеры таких подалгебр, во всяком случае, имеются. Так, конструкция «базиса Гельфанда — Цетлина» в пространствах неприводимых представлений алгебр Ли $\mathrm{sl}(n)$ и $\mathrm{so}(n)$ связана именно с такими подалгебрами алгебр $U(\mathrm{sl}(n))$ и $U(\mathrm{so}(n))$ соответственно.

4. Замечания. В настоящем параграфе, следуя работе Э. Б. Винберга [64], для произвольной полупростой алгебры Ли L делается попытка «квантования», т. е. поднятия в $U(L)$, коммутативных подалгебр алгебры $P(L)$, получаемых методом сдвига инвариантов.

Проведенные исследования дают также новый подход к определению самих подалгебр Мищенко — Фоменко, показывающих большую естественность, чем это можно было предположить, исходя из первоначального определения.

5. Обозначения. Пусть L — произвольная алгебра Ли. Алгебры $U(L)$ и $P(L)$ можно рассматривать как алгебры Ли относительно операции коммутирования и скобки Пуассона соответственно. Алгебра L канонически вкладывается в эти алгебры Ли. Образ элемента $x \in L$ в $P(L)$ будем отождествлять с x (и обозначать той же буквой), а образ x в $U(L)$ будем обозначать $\hat{x}$. Вложение $L \to U(L)$ продолжим до изоморфизма векторных пространств $P(L) \to U(L)$, при котором

$$x_1 \ldots x_k \to \widehat{x_1 \ldots x_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \hat{x}_{\sigma_1} \ldots \hat{x}_{\sigma_k} \quad (x_1, \ldots, x_k \in L). \tag{778}$$

Вложения алгебры L в $U(L)$ и $P(L)$ определяют на этих пространствах структуры L-модулей. Отображение (778) является изоморфизмом L-модулей. Положим $U_k(L) = \hat{P}_k(L)$. Тогда

$$U(L) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} U_k(L) \tag{779}$$

— разложение в прямую сумму L-подмодулей (но, вообще говоря, не градуировка алгебры).

6. Конструкция. Пусть теперь L — полупростая комплексная алгебра Ли, H — ее картановская подалгебра, Δ — система корней алгебры Ли L относительно H. Пусть (X, Y) — какое-нибудь инвариантное скалярное произведение в L. В каждом корневом подпространстве L_α выберем элемент e_α так, чтобы $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$.

Будем рассматривать коммутативные подалгебры алгебры $P(L)$ (соответственно $U(L)$), содержащие H (соответственно $\hat{H}$).

Централизатор H в $P_1(L) = L$ совпадает с H; централизатор H в $P_2(L)$ есть прямая сумма $P_2(H)$ и линейной оболочки произведений вида $e_\alpha e_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Delta)$, которую обозначим буквой Q. Соответственно этому централизатор $\hat{H}$ в $U_2(L)$ есть $U_2(H) \oplus \hat{Q}$.

Всякий элемент $q \in Q$ однозначно представляется в симметризованной форме

$$q = \sum_{\alpha \in \Delta} q_\alpha e_\alpha e_{-\alpha} \qquad (q_\alpha = q_{-\alpha} \in \mathbf{C}). \tag{780}$$

При этом

$$\hat{q} = \sum_{\alpha \in \Delta} q_\alpha \hat{e}_\alpha \hat{e}_{-\alpha}. \tag{781}$$

В частности, если $\{h_1, \ldots, h_l\}$ — ортонормированный базис подалгебры H, то элемент

$$c(L) = \sum_{i=1}^{l} h_i^2 + \sum_{\alpha \in \Delta} e_\alpha e_{-\alpha} \in P_2(H) \oplus Q \tag{782}$$

лежит в центре всей алгебры $P(L)$. В алгебре $U(L)$ ему соответствует *элемент Казимира*

$$\hat{c}(L) = \sum_{i=1}^{l} \hat{h}_i^2 + \sum_{\alpha \in \Delta} \hat{e}_\alpha \hat{e}_{-\alpha} \in U_2(H) + \hat{Q}, \tag{783}$$

лежащий в центре алгебры $U(L)$. Элемент $c(L)$ также будем называть *элементом Казимира*.

Рассмотрим произвольный набор $(q_1, \ldots, q_k) \subset Q$, где

$$q_i = \sum_{\alpha \in \Delta} q_{i,\alpha} e_\alpha e_{-\alpha} \quad (q_{i,\alpha} = q_{i,-\alpha} \in \mathbf{C}). \tag{784}$$

Каждому корню $\alpha \in \Delta$ сопоставим точку $p_\alpha = (q_{1,\alpha}, \ldots, p_{k,\alpha}) \in \mathbf{C}^k$ (так что $p_\alpha = p_{-\alpha}$).

7. Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $\{q_i, q_j\} = 0$ *при всех* i, j;

2) $[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0$ *при всех* i, j;

3) *для любых корней* $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ *таких, что* $\alpha + \beta + \gamma = 0$, *точки* $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ *лежат на одной прямой.*

8. Определение. Набор $(q_1, \ldots, q_k)$, удовлетворяющий эквивалентным условиям из теоремы 7, назовем *коммутативным*. Набор $(q_1, \ldots, q_k)$ назовем *разделяющим*, если $p_\alpha \neq p_\beta$ при $\alpha \neq \pm\beta$.

9. Теорема. *Для любого регулярного элемента* $h_0 \in H$ *и любых элементов* $h_1, \ldots, h_k \in H$ *набор* $(q_1, \ldots, q_k) \in Q$, *определяемый формулами*

$$q_i = \sum_{\alpha \in \Delta} \frac{\alpha(h_i)}{\alpha(h_0)} e_\alpha e_{-\alpha}, \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{785}$$

коммутативен. Обратно, если алгебра L *проста, то любой разделяющий коммутативный набор* $(q_1, \ldots, q_k) \subset Q$ *ранга не меньше* 3 *получается этим способом.*

10. Замечание. Очевидно, что ранг набора $(q_1, ..., q_k)$, определяемого формулами (785), равен рангу набора $(h_1, ..., h_k)$ и, значит, не превосходит $l = \operatorname{rk} L$.

11. Следствие. *Для любой полупростой алгебры Ли L в пространстве Q не существует разделяющего коммутативного набора ранга, большего $l = \operatorname{rk} L$.*

12. Пример. Условие разделяемости в формулировке теоремы существенно, как показывает следующий пример. Пусть алгебра L содержит собственную полупростую регулярную подалгебру L_1 того же ранга l. Пусть $\Delta_1 \subset \Delta$ — система корней алгебры L_1. Обозначим Q_1 линейную оболочку произведений вида $e_\alpha e_{-\alpha}$, где $\alpha \in \Delta_1$. Тогда по формулам (785), примененным к алгебре L_1, мы можем построить линейно независимый коммутативный набор из l элементов пространства Q_1. Присоединяя к нему элемент $\sum_{\alpha\in\Delta} e_\alpha e_{-\alpha}$ (проекцию на Q элемента Казимира алгебры L), мы получим линейно независимый коммутативный набор из $l+1$ элементов пространства Q.

Условие на ранг также существенно, так как проекция на Q элемента Казимира вместе с любым элементом $q \in Q$ образует коммутативный набор, но в общем случае далеко не всякий элемент $q \in Q$ может быть представлен в виде $\sum_{\alpha\in\Delta} \frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)} e_\alpha e_{-\alpha}$.

13. Замечания. Согласно первой части теоремы с каждым регулярным элементом $h_0 \in H$ можно связать l-мерное коммутативное подпространство

$$Q(h_0) = \left\{ \sum_{\alpha\in\Delta} \frac{\alpha(h)}{\alpha(h_0)} e_\alpha e_{-\alpha} \,\middle|\, h \in H \right\} \subset Q. \tag{786}$$

С другой стороны, методом сдвига инвариантов по каждому регулярному элементу $h_0 \in H$ строится однородная коммутативная подалгебра $L(h_0)$ алгебры $P(L)$, имеющая степень трансцендентности $d(L)$. При этом известно, что [274]

$$L(h_0) \cap L = H, \quad L(h_0) \cap P_2(L) = P_2(H) \oplus Q(h_0). \tag{787}$$

В силу теоремы 7 подпространство $Q(h_0) \subset Q$ поднимается до коммутативного подпространства $\hat{Q}(h_0) \subset \hat{Q}$, элементы которого к тому же коммутируют с элементами из $\hat{H}$. Таким образом, образующие первой и второй степени алгебры $L(h_0)$ поднимаются до попарно коммутирующих элементов алгебры $U(L)$.

14. Определение. Путем предельного перехода из подпространств вида $Q(h_0)$ можно получить другие l-мерные коммутативные подпространства пространства Q. Все полученные таким образом подпространства (включая сами подпространства $Q(h_0)$) будем называть *главными коммутативными подпространствами*. Для их явного описания введем некоторые понятия.

15. Определение. Будем рассматривать сходящиеся степенные ряды с коэффициентами из H от переменной t, принимающей значения в $\mathbf{C}$. Будем называть ряд $h_0=h_0^{(0)}+$ $+h_0^{(1)}t+h_0^{(2)}t^2+\ldots$ ($h_0^{(k)}\in H$) *регулярным*, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

1) h_0 — регулярный (полупростой) элемент алгебры $L\otimes\mathbf{C}((t))$ над полем $\mathbf{C}((t))$ рядов Лорана;

2) элемент $h_0(t)\in H$ регулярен при всех достаточно малых $t\neq 0$;

3) никакой корень $\alpha\in\Delta$ не обращается в нуль на всех элементах $h_0^{(0)}$, $h_0^{(1)}$, $h_0^{(2)}, \ldots$

16. Обозначения. Для всякого ряда $h=h^{(0)}+h^{(1)}t+h^{(2)}t^2+\ldots$ ($h^{(k)}\in H$) обозначим $\Delta_k(h)$ подсистему корней, обращающихся в нуль на $h^{(0)}$, $h^{(1)}, \ldots, h^{(k-1)}$. Ясно, что $\Delta=\Delta_0(h)\supset\Delta_1(h)\supset$ $\supset\Delta_2(h)\supset\ldots$ Ряд h_0 регулярен тогда и только тогда, когда $\Delta_m(h_0)=0$ для некоторого m. Будем называть ряд h *подчиненным* ряду h_0, если $\Delta_k(h)\supset\Delta_k(h_0)$ при всех k. В этом случае при $\alpha\in\Delta_k(h_0)\setminus\Delta_{k+1}(h_0)$ существует предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(h(t))}{\alpha(h_0(t))}=\frac{\alpha(h^{(k)})}{\alpha(h_0^{(k)})},\tag{788}$$

и, следовательно, если ряд h_0 регулярен, существует предел

$$\lim_{t\to 0}\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{\alpha(h(t))}{\alpha(h_0(t))}\,e_\alpha e_{-\alpha}\in Q.\tag{789}$$

При фиксированном h_0 элементы вида (789) образуют подпространство, которое обозначим $Q(h_0)$.

17. Теорема. *Для всякого регулярного ряда h_0 имеем*

$$Q(h_0)=\lim_{t\to 0}Q(h_0(t)),\tag{790}$$

и, следовательно, $Q(h_0)$ есть главное коммутативное подпространство пространства Q. Обратно, всякое главное коммутативное подпространство получается таким способом.

18. Замечание. Различным регулярным рядам может, конечно, отвечать одно и то же коммутативное подпространство. Пользуясь этим, можно сделать описание главных коммутативных подпространств более эффективным.

19. Определение. С помощью инвариантного скалярного произведения отождествим H^* с H и, таким образом, будем рассматривать корни как элементы H. Регулярный ряд h_0 называется *каноническим*, если для любого k выполнены условия:

C1) $h_0^{(k)} \in \langle \Delta_k(h_0) \rangle$;

C2) проекция $h_0^{(k)}$ на линейную оболочку каждой неразложимой компоненты системы $\Delta_k(h_0)$ отлична от нуля.

Из C2) следует, что если $\Delta_k(h_0) \neq 0$, то $\Delta_{k+1}(h_0) \neq \Delta_k(h_0)$. Поэтому канонический ряд автоматически конечен.

20. Определение. Канонические ряды h_0 и $\tilde{h}_0$ называются *эквивалентными*, если для любого k выполнены условия:

E1) $\Delta_k(h_0) = \Delta_k(\tilde{h}_0)$;

E2) проекции элементов $h_0^{(k)}$ и $\tilde{h}_0^{(k)}$ на линейную оболочку каждой неразложимой компоненты системы $\Delta_k(h_0)$ пропорциональны.

Заметим, что если условия E1) и E2) выполнены для какого-то k, то автоматически $\Delta_{k+1}(h_0) = \Delta_{k+1}(\tilde{h}_0)$.

21. Теорема. *Всякое главное коммутативное подпространство пространства Q имеет вид $Q(h_0)$, где h_0 — канонический регулярный ряд, причем ряд h_0 определен однозначно с точностью до эквивалентности.*

22. Замечания. К этому можно добавить, что если h_0 — канонический регулярный ряд, то в приведенном выше определении пространства $Q(h_0)$ можно ограничиться (автоматически конечными) рядами h, в которых $h^{(k)} \in \langle \Delta_k(h_0) \rangle$ при всех k.

23. Пример. Пусть $L = \mathrm{sl}(n)$, H — подалгебра диагональных матриц и $h_0 = h_0^{(0)} + h_0^{(1)} t + \ldots + h_0^{(n-2)} t^{n-2}$, где $h_0^{(k)} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \; -(n-k-1), 0, \ldots, 0)$. Если обозначить ε_i линейную функцию на H, равную i-му диагональному элементу, то $\Delta_k(h_0)$ — подсистема корней вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, где $i, j \leqslant n-k$, т. е. система корней алгебры $\mathrm{sl}(n-k)$, естественным образом (в виде «левого верхнего угла») вложенной в $\mathrm{sl}(n)$. В частности, $\Delta_{n-1}(h_0) = 0$, так что ряд h_0 является регулярным (и каноническим). Ряд $h_k = h_0^{(0)} + h_0^{(1)} t + \ldots + h_0^{(k-1)} t^{k-1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, очевидно, подчинен ряду h_0 и

$$\lim_{t \to 0} \sum_{\alpha \in \Delta} \frac{\alpha(h_k(t))}{\alpha(h_0(t))} e_\alpha e_{-\alpha} = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Delta_k(h_0)} e_\alpha e_{-\alpha}. \tag{791}$$

Следовательно, подпространство $Q(h_0)$ совпадает с линейной оболочкой элементов

$$\sum_{\alpha \in \Delta_k(h_0)} e_\alpha e_{-\alpha}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-2, \tag{792}$$

представляющих собой проекции на Q элементов Казимира подалгебр $\mathrm{sl}(n-k)$.

Подпространство $Q(h_0)$ в этом примере является частью коммутативной подалгебры M алгебры $P(\mathrm{sl}(n))$, порожденной подалгеброй H и центрами подалгебр $P(\mathrm{sl}(n-k))$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-2$. Подалгебра M поднимается до коммутативной подалгебры A алгебры $U(\mathrm{sl}(n))$, порожденной подалгеброй $\hat{H}$ и центрами подалгебр $U(\mathrm{sl}(n-k))$. Весовые подпространства алгебры A в пространстве V любого неприводимого линейного представления алгебры $\mathrm{sl}(n)$ одномерны; их базисные векторы и составляют *базис Гельфанда — Цетлина* пространства V.

24. Замечания. Докажем, что коммутативная подалгебра алгебры $P(\mathrm{sl}(n))$, порожденная подалгеброй H и центрами подалгебр $P(\mathrm{sl}(n-k))$, $k=0, 1, \ldots, n-2$ (см. пример выше), является пределом коммутативных подалгебр, получаемых методом сдвига инвариантов.

Нам будет технически удобнее иметь дело не с алгеброй $\mathrm{sl}(n)$, а с алгеброй $\mathrm{gl}(n)$, хотя она и не полупроста. Имеется гомоморфизм проектирования π: $\mathrm{gl}(n) \to \mathrm{sl}(n)$, $X \to X - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}\, X)E$. Он индуцирует гомоморфизм проектирования $P(\mathrm{gl}(n)) \to \to P(\mathrm{sl}(n))$, который обозначим той же буквой π. С помощью этого гомоморфизма из любого результата, который мы получим для алгебры $\mathrm{gl}(n)$, можно будет вывести соответствующий результат для алгебры $\mathrm{sl}(n)$.

25. Определение. Центр Z_n алгебры $P(\mathrm{gl}(n))$, как известно, состоит из инвариантов естественного действия алгебры $\mathrm{gl}(n)$ в $P(\mathrm{gl}(n))$. Опишем его образующие.

Обозначим $e_{ij} (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ матричные единицы, составляющие базис алгебры $\mathrm{gl}(n)$, и определим «главные миноры порядка r» алгебры $\mathrm{gl}(n)$ как элементы

$$M_{i_1 \ldots i_r} = \sum_{\sigma \in S_r} (\mathrm{sgn}\, \sigma)\, e_{i_1 i_{\sigma 1}} \ldots e_{i_r i_{\sigma r}}, \tag{793}$$

где умножение понимается не как умножение матриц, а как операция в алгебре $P(\mathrm{gl}(n))$. Тогда суммы

$$F_r = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} M_{i_1 \ldots i_r}, \qquad r = 1, \ldots, n, \tag{794}$$

алгебраически независимы и порождают Z_n.

Пусть $\partial_{ij} \in \mathrm{Der}\, P(\mathrm{gl}(n))$ обозначает дифференцирование по e_{ij}. Для любой матрицы $X = \|a_{ij}\|$ положим $\partial_X u = \sum a_{ij} \partial_{ij} u$ ($u \in \in P(\mathrm{gl}(n))$). В частности, пусть $X = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, причем $a_1, \ldots, a_n$ различны. Тогда согласно общему результату [188] элементы

$$F_{r,k}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{k!} \partial_X^k F_r, \qquad r = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{795}$$

алгебры $P(\mathrm{gl}(n))$ попарно коммутируют и алгебраически независимы. Порожденную ими коммутативную подалгебру обозначим $L(a_1, \ldots, a_n)$. Она имеет максимальную возможную степень трансцендентности, равную $d(\mathrm{gl}(n)) = 2^{-1} n(n+1)$.

Заметим, что элемент $F_{r,k}(a_1, \ldots, a_n)$ есть сумма всевозможных членов, получаемых из членов выражения элемента F_r через матричные единицы заменой каких-либо k диагональных матричных единиц соответствующими диагональными элементами матрицы X.

26. Утверждение. *Докажем, что подалгебра*

$$C = \lim_{t \to 0} L(t^{n-1}, \ldots, t, 1) \subset P(\mathrm{gl}(n)) \tag{796}$$

порождается центрами Z_{n-k} подалгебр $P(\mathrm{gl}(n-k))$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$.

В выражении элемента $F_{r,k}(t^n, \ldots, t, 1)$ члены наименьшей степени по t, равной $2^{-1}k(k-1)$, получаются при замене в подходящих членах выражения F_r множителей $e_{n-k+1,n-k+1}, \ldots$ $\ldots, e_{n,n}$ соответствующими степенями t. При этом в качестве коэффициента при $t^{k(k-1)/2}$ получается сумма главных миноров порядка $r-k$ алгебры $\mathrm{gl}(n-k)$ (вложенной в $\mathrm{gl}(n)$ в виде левого верхнего угла). Следовательно, эта сумма принадлежит C. Отсюда и вытекает доказываемое утверждение.

27. Конструкция. Переходя к алгебре $\mathrm{sl}(n)$, заметим, что подалгебра $P(\mathrm{sl}(n)) \subset P(\mathrm{gl}(n))$ аннулируется оператором ∂_E и, значит, $\partial_X u = \partial_{\pi X} u \in P(\mathrm{sl}(n))$ при $u \in P(\mathrm{sl}(n))$, $X \in \mathrm{gl}(n)$. Поэтому, применяя метод сдвига инвариантов к алгебре $\mathrm{sl}(n)$, в качестве исходной диагональной матрицы X можно без увеличения общности рассматривать матрицу с произвольным следом.

Центр алгебры $P(\mathrm{sl}(n))$ равен πZ_n и порождается элементами πF_r, $r = 2, \ldots, n$. Поскольку эти же элементы вместе с элементом $F_1 = E$ могут быть взяты в качестве образующих Z_n, коммутативная подалгебра алгебры $P(\mathrm{sl}(n))$, получаемая методом сдвига инвариантов исходя из матрицы $X = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{gl}(n)$, совпадает с подалгеброй $\pi L(a_1, \ldots, a_n)$.

Подалгебра $\pi L = \lim\limits_{t \to 0} \pi L(t^{n-1}, \ldots, t, 1)$ порождается проекциями на $P(\mathrm{sl}(n))$ центров Z_{n-k} подалгебр $P(\mathrm{gl}(n-k))$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Выберем в качестве образующих Z_{n-k} проекции на $P(\mathrm{sl}(n-k))$ сумм главных миноров порядков не меньше 2 алгебры $\mathrm{sl}(n-k)$ и единичную матрицу $E_{n-k} \in \mathrm{gl}(n-k)$ (проекция которой на $P(\mathrm{sl}(n-k))$ равна нулю). Тогда мы получим, что подалгебра πL порождается центрами подалгебр $P(\mathrm{sl}(n-k))$ и проекциями на $P(\mathrm{sl}(n))$ матриц E_{n-k} $(k = 1, \ldots, n-1)$, составляющими, как легко видеть, базис пространства всех диагональных матриц с нулевым следом.

Таким образом, коммутативная подалгебра алгебры $P(\mathrm{sl}(n))$, порожденная подалгеброй диагональных матриц (с нулевым следом) и центрами подалгебр $P(\mathrm{sl}(n-k))$, является пределом подалгебр, получаемых методом сдвига инвариантов.

ЧАСТЬ 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава 10

КАЧЕСТВЕННАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ НА СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

§ 56. Элементы теории Морса

1. Определение. Пусть $f\colon M\to\mathbf{R}$ — гладкая функция на многообразии M. Точка $p\in M$ называется *критической точкой* функции f, если отображение $df\colon T_pM\to T_{f(p)}\mathbf{R}=\mathbf{R}$ касательных пространств обращается в нуль. Если в окрестности U точки p выбрана некоторая локальная система координат $x^1, \ldots, x^n$, то это условие примет вид $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)=0,\ i=1, \ldots, n$.

2. Определение. Критическая точка $p\in M$ функции f называется *вырожденной*, если матрица вторых частных производных

$$H=f_{**}(p)=\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)\right\| \tag{797}$$

вырождена, т. е. $\det H=0$. Матрица H называется *матрицей Гесса*, а ее определитель — *гессианом* функции f в точке $p\in M$. Коранг матрицы $f_{**}(p)$ называется *степенью вырождения* критической точки $p\in M$ функции $f\colon M\to\mathbf{R}$. Критическая точка p с нулевым индексом вырождения называется *невырожденной*.

3. Определение. Гладкая функция f на многообразии M называется *функцией Морса*, если все ее критические точки не вырождены.

4. Лемма. *Пусть f — гладкая функция на многообразии M, а $p\in M$ — невырожденная критическая точка функции f. Тогда в некоторой открытой окрестности точки p существуют такие локальные координаты $y^1, \ldots, y^n$, что в этих координатах функция f запишется в виде* $f=f(p)-(y^1)^2-\ldots-(y^\lambda)^2+(y^{\lambda+1})^2+\ldots+(y^n)^2$.

Доказательство леммы 4 см., например, в [180], [103], [279].

5. Определение. Число λ из леммы 4 называется *индексом критической точки* $p \in M$ *функции* $f\colon M \to \mathbf{R}$. Квадратичную форму с матрицей $f_{**}(p)$ на пространстве $T_p(M)$ можно привести к каноническому виду $-(u^1)^2 - \ldots - (u^\lambda)^2 + (u^{\lambda+1})^2 + \ldots + (u^n)^2$. Тогда число отрицательных коэффициентов равно индексу λ критической точки $p \in M$. На рис. 43 схематично указано строение окрестностей различных критических точек.

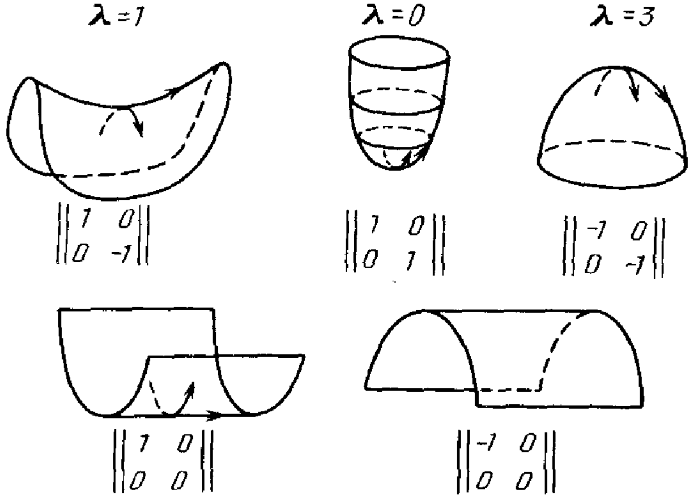


Рис. 43

6. Следствие. *Невырожденные критические точки являются изолированными.*

7. Лемма. *Пусть* $f\colon U \to \mathbf{R}$ — *гладкая функция на области* $U \subset \mathbf{R}^n$. *Тогда почти для всех линейных отображений* $L\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *функция* $f + L$ *имеет только невырожденные критические точки.*

Доказательство леммы 7 см. например, в [180], [103], [279].

8. Теорема. *На всяком компактном гладком многообразии существует функция Морса.*

Доказательство см., например, в [180], [103], [279].

9. Замечание. Существует тесная связь между критическими точками гладких функций на многообразии и топологическими инвариантами многообразия. Точные формулировки и доказательства соответствующих утверждений можно найти, например, в [180], [103], [279].

10. Обозначения. Пусть f — функция Морса на многообразии M. Введем обозначение $f_a = f^{-1}(a)$ — поверхность уровня функции f, отвечающая значению $a \in \mathbf{R}$. Пусть $Q_a = \{x \in Q \mid f(x) \leqslant \leqslant a\}$, т. е. Q_a состоит из всех точек, в которых значения функции f не превосходят a. Ясно, что $\partial Q_a = f_a$ (рис. 44).

11. Лемма (см. [180]). *Пусть отрезок* $[a, b]$ *(где* $a < b$*) не содержит критических значений функции* f, *т. е. в множестве* $f^{-1}[a, b]$, *лежащем в многообразии* Q, *на котором задана* *функция f, нет критических точек функции f. Тогда многообразия f_a и f_b диффеоморфны, кроме того, многообразия Q_a и Q_b также диффеоморфны. При этом Q_a является деформационным ретрактом Q_b* (рис. 45).

12. Лемма (см. [180]). *Пусть в слое $f^{-1}[a, b]=Q_b \setminus Q_a$ имеется ровно одна критическая точка индекса λ. Тогда многообразие Q_b гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу, получающемуся из многообразия Q_a приклейкой к краю $f_a=\partial Q_a$ одной клетки σ^λ размерности λ* (рис. 46).

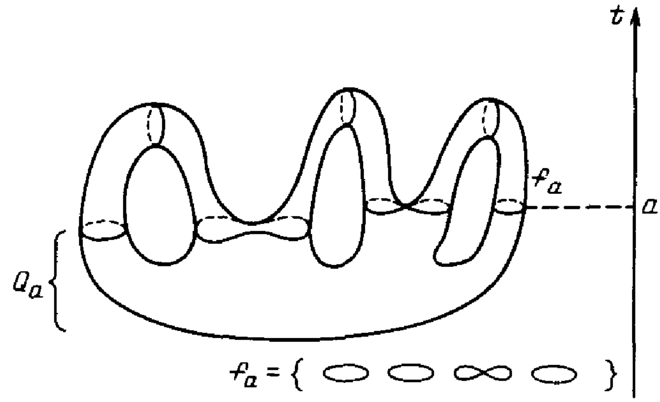


Рис. 44

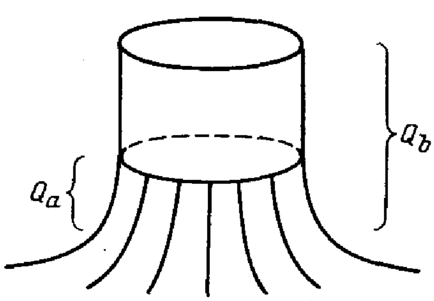


Рис. 45

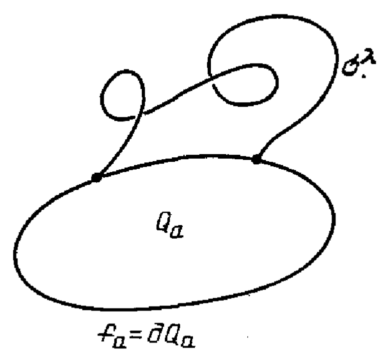


Рис. 46

13. Определение. *Ручкой H^n_λ размерности n и индекса λ* называется прямое произведение $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ двух дисков D^λ и $D^{n-\lambda}$ размерностей n и $n-\lambda$ соответственно. Край ручки имеет вид $\partial H^n_\lambda=(S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda})\bigcup(D^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$.

Определим *операцию приклейки* ручки H^n к многообразию Q^n с краем $V^{n-1}=\partial Q^n$. Пусть $S^{\lambda-1}\subset V^{n-1}$ — такая гладко вложенная в многообразие V^{n-1} сфера, что ее достаточно малая трубчатая окрестность $N_\varepsilon S^{\lambda-1}=N^{n-1}$ радиуса ε представляется в виде прямого произведения $S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda}$, где $D^{n-\lambda}$ —

нормальный диск размерности $n-\lambda$ и радиуса ε. Тогда можно построить новое гладкое многообразие $\tilde{Q}^n$ с краем, рассмотрев склейку H_λ^n с Q^n по отображению χ: $S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda}\to N_\varepsilon(S^{\lambda-1})\cong \cong S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda}$, являющемуся диффеоморфизмом части $S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda}$ границы ∂H_λ^n на трубчатую окрестность $N_\varepsilon S^{\lambda-1}$.

На рис. 47 показана операция приклейки ручки H_1^2, а на рис. 48 — операция приклейки ручки H_1^3.

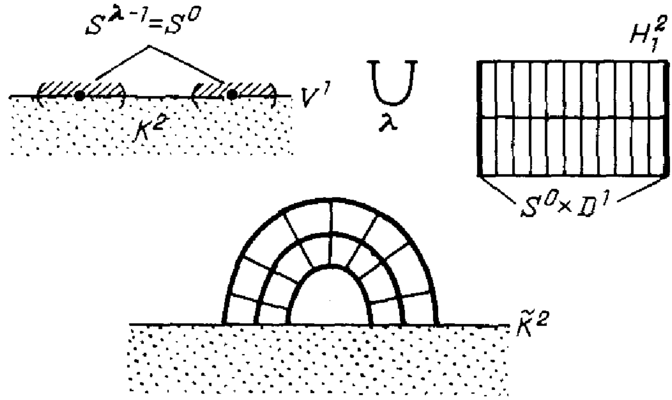


Рис. 47

14. Лемма (см. [180]). *Пусть f: $M\to\mathbf{R}$ — функция Морса на многообразии M. Тогда многообразие Q_b получается из многообразия Q_a описанной выше операцией приклейки к краю многообразия Q_a ручки индекса λ в обозначениях* п. 12.

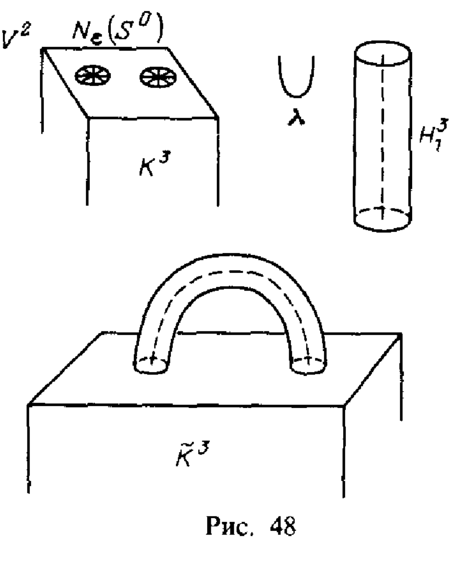


Рис. 48

Доказательство см., например, в [180], [103], [279].

15. Обобщением обыкновенной теории Морса на случай функций, вырожденных особым образом, служит так называемая эквивариантная теория Морса. Аналогом понятия критической точки в эквивариантной теории является понятие критического уровня.

16. Определение. Замкнутое подмногообразие N многообразия M называется *невырожденным критическим уровнем* функции f: $M\to\mathbf{R}$, если: а) N связно; б) для любой точки $x\in N$ выполняется равенство $df(x)=0$; в) в некоторой окрестности $U\supset N$ кроме N нет других критических точек функции f; г) коранг матрицы Гесса функции f совпадает с размерностью многообразия N во всех точках из N.

17. Замечание. Из соображений непрерывности следует, что все точки связной компоненты критического уровня имеют одинаковый индекс. Квадратичную форму $f_{**}(x)$ на пространстве T_xM, $x\in N$, приведем к каноническому виду $-(u^1)^2-\ldots-(u^\lambda)^2+$ $+(u^{\lambda+1})^2+\ldots+(u^r)^2$. Число λ отрицательных коэффициентов в этом разложении по определению называется *индексом вырожденной критической точки* $x\in N$.

18. Замечание. Функции, критические точки которых образуют целые подмногообразия, естественным образом возникают в случае, когда на многообразии действует группа Ли и функция инвариантна относительно преобразований группы. Другой пример дают функции f, полученные из многообразий меньших размерностей при отображении $\psi\colon M^n\to M^{n-q}$ как функции вида $f(x)=g(\psi(x))$.

19. Теорема Ботта. *Если критическое значение c функции f изолировано, поверхность уровня $f^{-1}(c)$ компактна, $f^{-1}(c)$ — невырожденный критический уровень, то найдется такое $\varepsilon>0$, что множество $K_+=\{x\,|\,f(x)\leqslant c+\varepsilon\}$ содержит подмножество K_- вида $\{x\,|\,f(x)\leqslant c-\varepsilon\}\bigcup Q$, где Q — топологическая сумма конечного числа замкнутых шаров, являющаяся деформационным ретрактом для K_+. Размерность шаров, составляющих Q, не меньше наименьшего из индексов критических точек $p\in f^{-1}(c)$* (рис. 49).

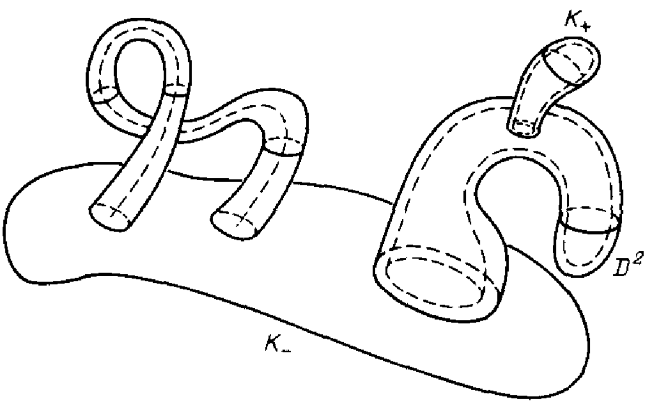


Рис. 49

20. Замечание. Аналог утверждения 7 для эквивариантных функций, вообще говоря, неизвестен. Рассмотрим два примера, когда существует сколь угодно близкая к данной функции эквивариантная функция Морса.

21. Пример. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^3$ стандартное действие группы Ли $SO(3)$, при котором отображение $R\in SO(3)$ переводит вектор $x\in\mathbf{R}^3$ в $R(X)\in\mathbf{R}^3$.

22. Теорема. *Для любой функции $f\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, инвариантной относительно действия группы Ли* $SO(3)$ *на* $\mathbf{R}^3$ (см. п. 21), *найдется функция* $h \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, *сколь угодно близкая к* f, *инвариантная относительно того же действия группы Ли* $SO(3)$ *и имеющая только невырожденные критические орбиты.*

Доказательство. Функция f постоянна на сферах с центром в нуле, так как f инвариантна относительно действия группы Ли $SO(3)$. Поэтому она порождает функцию на луче $[0, \infty)$, которую продолжим гладким образом до функции $g \in C^\infty(\mathbf{R})$ (рис. 50). Произвольную гладкую функцию на $\mathbf{R}$ можно сделать функцией Морса, изменив ее не более чем на $C_1 e^{-1/x^2}$. Если мы подвергнем такому преобразованию функцию g, то значения индуцированной функции $\bar{f}$ на $\mathbf{R}^3$ и ее производных в нуле не изменятся. Полученная функция f может иметь вырождение только в точке O. Это вырождение можно устранить сколь угодно малым шевелением. Выберем точку x_0, в которой $\operatorname{grad} \bar{f}$ не равен нулю.

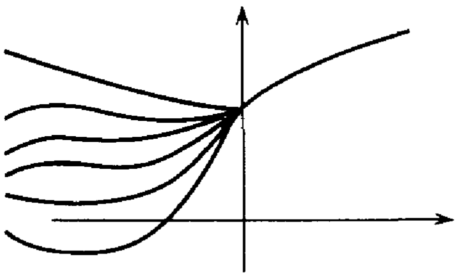


Рис. 50

Пусть $\operatorname{grad} \bar{f} \neq 0$ в некотором сферическом слое $W = B_1 \setminus B_2$, где B_1 — шар радиуса ε_1, B_2 — шар радиуса ε_2, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, с центром в нуле, $B = \{x \in \mathbf{R}^3\} \mid \|x\| = \varepsilon\}$. Рассмотрим две гладкие функции $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ и $0 \leqslant \varphi_1, \varphi_2 \leqslant 1$: функция φ_1 равна нулю на B_2 и единице на $\mathbf{R}^3 \setminus B_1$, а $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$ (рис. 51). Функция $\varphi_1 \bar{f} + \varphi_2 \bar{f}(x_0) + c_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\varphi_2$ искомая.

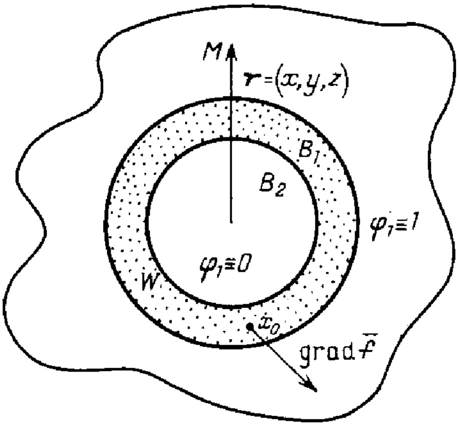


Рис. 51

23. Замечание. В п. 22 мы рассмотрели пример такой функции $f(x)$, что $g(x) = \text{const}$ — орбита заданного действия группы Ли. Рассмотрим более сложный пример аналогичной ситуации. Группа Ли $SO(3) \times SO(3)$ действует на $GL(3, \mathbf{R})$ по следующему правилу: $A \to R_1^{-1} A R_2$, где $R_1, R_2 \in SO(3)$ и $A \in GL(3, \mathbf{R})$.

На $GL(3, \mathbf{R})$ рассмотрим функцию $F_c(A) = c_1 \operatorname{tr}(AA^t) + c_2 [\operatorname{tr}(AA^t)]^2 + c_3 \operatorname{tr}(AA^t)^2$, $c = (c_1, c_2, c_3)$. Поверхности уровня функции $F_c(X)$ являются орбитами действия группы Ли $SO(3) \times SO(3)$ на $Gl(3, \mathbf{R})$.

24. Теорема. *Функция вида* $F_c(X)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, *не вырождена на* $GL(3, \mathbf{R})$ *в смысле определения* 16, *т. е. все ее критические подмногообразия не вырождены для почти всех* *наборов $c=(c_1, c_2, c_3)$. Кроме того, если для набора $c=(c_1, c_2, c_3)$ функция $F_c(X)$ вырождена, то найдется набор $c'=(c'_1, c'_2, c'_3)$, сколь угодно близкий к $c=(c_1, c_2, c_3)$, такой, что соответствующая функция $F_{c'}(X)$ уже не вырождена на* $GL(3, \mathbf{R})$.

Доказательство. Заметим сначала, что каждая орбита содержит диагональную матрицу. Кроме того, диагональные матрицы, лежащие в одной орбите, имеют общий спектр. Действительно, рассмотрим образ $A(S^2)$ единичной сферы S^2 при линейном отображении $A \in GL(3, \mathbf{R})$. Ясно, что $A(S^2)$ — эллипсоид. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — его полуоси. Заметим, что полуоси эллипсоида гладко зависят от коэффициентов матрицы линейного преобразования A. Умножением A слева на $R_1 \in SO(3)$ повернем эллипсоид так, чтобы его полуоси совпали с базисными векторами. Теперь применим преобразование с матрицей $D=\begin{Vmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{Vmatrix}$. Получим снова сферу. Следовательно, композиция DR_1A является ортогональным преобразованием, т. е. прообразы осей эллипсоида ортогональны. Найдется такая матрица $R_2 \in SO(3)$, что $R_2^{-1}(DR_1A)=E$. Отсюда $A=R_1^{-1}D^{-1}R_2$, т. е. орбита $O(A)$, содержащая произвольную матрицу A из $GL(3, \mathbf{R})$, содержит также и диагональную матрицу. Нетрудно видеть, что другие диагональные матрицы получаются из нее перестановкой базисных векторов и поэтому имеют тот же спектр.

Итак, достаточно исследовать степень вырождения функции на диагональной матрице, представляющей данную орбиту. Имеем

$$F_c\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}=c_1(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)+$$

$$+c_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^2+c_3(\lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4). \qquad (798)$$

Рассмотрим ограничение функции $F_c(X)$ на множество диагональных матриц. Таким образом, мы свели задачу к исследованию функции на пространстве $\mathbf{R}^3$ с координатами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Первое и второе слагаемые в (798) постоянны на сферах с центром в начале координат. Поэтому для выявления критических точек надо рассмотреть поведение третьего слагаемого на этих сферах. Очевидно, что эта функция имеет максимум в точках $A=r(1, 0, 0)$, $B=r(-1, 0, 0)$, $C=r(0, 1, 0)$, $D=r(0, -1, 0)$, $E=r(0, 0, 1)$, $F=r(0, 0, -1)$ (рис. 52). Минимум эта функция имеет в точках $P=\frac{4}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $Q=\frac{r}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$,

$R=\frac{r}{\sqrt{3}}(-1,\ -1,\ 1)$, $S=\frac{r}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ 1)$, $T=\frac{r}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1)$, $U=\frac{r}{\sqrt{3}}(-1,\ 1,\ -1)$, $V=\frac{r}{\sqrt{3}}(-1,\ -1,\ -1)$, $W=\frac{r}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ -1)$, где r — радиус сферы, на которой изучается поведение функции, см. рис. 52. Функция $F_c(X)$ допускает группу симметрий такую же, как октаэдр, поэтому можно рассмотреть ее поведение в одной точке максимума и в одной точке минимума, точнее, на лучах, проходящих через нуль и выбранную точку. Один из «максимальных» лучей задается уравнением $\lambda_1=t$, $\lambda_2=\lambda_3=0$, а «минимальный» луч — уравнением $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=t$. На «максимальном» луче функция имеет вид $F_1(t)=$ $=c_1t^2+c_2t^4+c_3t^4$, а на «минимальном» имеет вид $F_2(t)=$ $=3c_1t^2+9c_2t^4+3c_3t^4$. Критические точки находятся дифференцированием указанных выражений по t, т. е. из условий

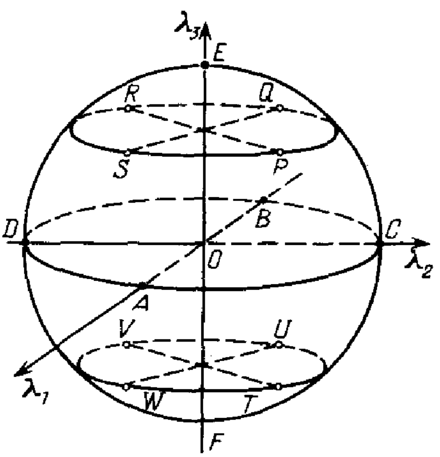


Рис. 52

$$F'_1(t)=2c_1t+4c_2t^3+4c_3t^3=0, \tag{799}$$
$$F'_2(t)=6c_1t+36c_2t^3+12c_3t^3=0. \tag{800}$$

Точка (0, 0, 0) является невырожденной (при $c_1\neq 0$). Остальные критические точки находятся из квадратных уравнений

$$2c_1+4c_2t^2+4c_3t^2=0, \tag{801}$$
$$6c_1+36c_2t^2+12c_3t^2=0, \tag{802}$$

решая которые, найдем $t_1=\sqrt{-2\frac{c_2+c_3}{c_1}}$, $t_2=\sqrt{-2\frac{3c_2+c_3}{c_1}}$.

Исследуем эти решения. а) Оба подкоренных выражения отрицательны. Тогда кроме нуля критических точек нет, а в нуле при $c_1>0$ максимум, при $c_1<0$ минимум. б) Если $t_1^2>0$, $t_2^2<0$, то имеется критическая точка на «максимальном» луче, причем матрица Гесса в каноническом виде имеет на диагонали один минус и два плюса. в) Если $t_1^2<0$, $t_2^2>0$, то критическая точка есть на «минимальном» луче, причем в этой точке матрица Гесса в каноническом виде на диагонали имеет один минус и два плюса. г) Если $t_1^2>0$, $t_2^2>0$, то на «максимальном» луче имеется точка перегиба, матрица Гесса в каноническом виде на диагонали имеет один минус и два плюса. На «минимальном» луче находятся абсолютные минимумы, матрица Гесса в каноническом виде на диагонали имеет три минуса.

Доказательство утверждения о существовании невырожденной функции, достаточно близкой к данной, проводится так же, как и в теореме 22.

25. Замечание. Ниже будет показано, как построить аналог теории Морса, если заменить функцию $f \in C^{\infty}(M)$ на отображение моментов симплектического многообразия, порожденное полным набором коммутирующих интегралов.

§ 57. Классификация трехмерных поверхностей постоянной энергии интегрируемых систем

1. Традиционно считается, что полная интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы дает более или менее полное качественное описание поведения интегральных траекторий системы. Безусловно, в принципе это так. Однако при этом часто игнорируется то обстоятельство, что для такого описания требуется эффективно найти переменные действие — угол (относительно которых траектории системы превращаются в прямолинейные обмотки торов) в окрестности торов Лиувилля.

Новый подход состоит в построении качественной геометрической теории, позволяющей описывать симплектическую топологию слоения фазового многообразия на торы Лиувилля.

В настоящем параграфе мы начнем изложение теории А. Т. Фоменко интегрируемых боттовских систем, развитой затем Х. Цишангом, С. В. Матвеевым, А. В. Болсиновым, А. А. Ошемковым и др. Уместно поставить следующие вопросы. Как располагаются торы Лиувилля в фазовом пространстве? Как они примыкают друг к другу, как заполняют открытые области и как перестраиваются в окрестности критических поверхностей интегралов и т. п.? Другими словами, как построить качественную теорию топологического расположения и взаимодействия торов Лиувилля (и тем самым взаимного расположения интегральных траекторий системы), например, на поверхности постоянной энергии системы?

2. Пусть M^4 — четырехмерное симплектическое многообразие, на котором задана гамильтонова система $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$, которую мы будем отождествлять с векторным полем $v = \operatorname{sgrad} H$, здесь H — гладкий гамильтониан. Положения равновесия x_0 системы v — это критические точки функции H. Поле v можно ограничить на инвариантную трехмерную поверхность $Q = \{x \in M \mid H(x) = \text{const}\}$, так как H — интеграл системы v. Являясь симплектическим многообразием, M^4 ориентируемо, а поэтому многообразие Q также ориентируемо.

Рассмотрим некритические поверхности уровня Q, т. е. такие, на которых grad $H \neq 0$. Для полной интегрируемости по Лиувиллю системы v на многообразии M достаточно найти еще один (второй) интеграл f, независимый с H (почти всюду) и находящийся с ним в инволюции на поверхности уровня. Пусть такой интеграл существует. Ограничим его на поверхность Q и получим гладкую функцию. Мы будем изучать интегрируемость системы лишь на какой-то одной поверхности постоянной энергии.

3. Не исключено, что у многих гамильтоновых систем, в целом неинтегрируемых, существует «одинокая» поверхность, на которой имеет место интегрируемость. Интеграл f, который интегрирует систему $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ лишь на одной поверхности уровня гамильтониана, удовлетворяет более слабому уравнению, чем обычное уравнение инволютивности $\{H, f\} = 0$. А именно, он должен коммутировать с гамильтонианом H лишь на самой поверхности уровня Q, а вне ее он уже не обязан коммутировать с H. В простейшем случае это условие можно записать так: $\{H, f\} = \lambda(H)$, где функция $\lambda(H)$ такова, что $\lambda(0) = 0$ и $d\{H, f\} = 0$ на Q, см. [131]. Мы предполагаем, что интересующая нас изолированная поверхность уровня гамильтониана задается уравнением $H = 0$.

4. Определение. Гладкий *интеграл* f будем называть *боттовским* на поверхности Q, если критические точки функции f на Q образуют невырожденные критические гладкие подмногообразия, см. определение 16 § 56. В этом случае гамильтонову систему на Q назовем *боттовской.*

5. Замечание. Общие свойства таких гладких функций (не интегралов) изучены в работах Р. Ботта, см., например, [325]. На этом основании такие функции уместно назвать *боттовскими.*

Из накопленного опыта исследования конкретных систем (см., например, работы Т. И. Погосяна, М. П. Харламова, Я. В. Татаринова, А. Т. Фоменко, А. А. Ошемкова, А. В. Болсинова, К. Шваи, Л. С. Поляковой, З. Тевдорадзе [218—220], [221], [241], [281—288], [207—209], [296]) можно извлечь, что подавляющее большинство уже обнаруженных интегралов являются боттовскими в указанном смысле. Поэтому введенный класс боттовских интегралов представляется естественным. В качестве простейшего примера приведем следующий результат, принадлежащий К. Швае.

6. Теорема (К. Швая, см. [296]). а) *Пусть* $G = \mathrm{sl}(2, \mathbf{R}) \oplus \oplus \mathbf{R}^2$ — *полупрямая сумма алгебры Ли* $\mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$ *и* $\mathbf{R}^2$ *по неприводимому двумерному представлению,* $f\left(\left\|\begin{matrix} x_0 & x_1 \\ x_{-1} & -x_0 \end{matrix}\right\|, \ (y_0, y_1)\right) = = x_{-1} y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2$ — *инвариант коприсоединенного представ-*

ления, $f(x+\lambda a)=f(x)+f_1(x,a)\lambda+f_2(x,a)\lambda^2+f(a)\lambda^3$. *Система* $\dot{x}=\operatorname{sgrad} f_1$ *вполне интегрируема на орбитах общего положения. Все орбиты коприсоединенного представления расслоены на изоэнергетические поверхности* $Q^3=\{f_1(x)=\mathrm{const}\}$, *обладающие тем свойством, что для всех этих поверхностей* Q^3 *функция* $f_2|Q^3$ *является боттовским интегралом потока* $\dot{x}$. *Точнее, функция* $f_2|Q^3$ *на некомпактном многообразии* Q^3 *не имеет критических точек. Многообразие* Q^3 *в общем положении диффеоморфно тривиальному одномерному векторному расслоению над* $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$.

б) *Пусть* $G=\mathrm{sl}(2,\mathbf{R})\oplus\mathbf{R}^3$ — *полупрямая сумма алгебры Ли* $\mathrm{sl}(2,\mathbf{R})$ *и* $\mathbf{R}^3$ *по неприводимому трехмерному представлению,* $f(x)=x_0y_1+2x_1y_2-2x_1y_0$, $g(x)=4y_0y_2-y_1^2$, *где* $x=\left(\begin{Vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_{-1} & -x_0\end{Vmatrix},\ (y_0,\ y_1,\ y_2)\right)\in G$, — *инварианты коприсоединенного представления (полный набор),* $f(x+\lambda a)=f(x)+f_1(x,a)\lambda+f(a)\lambda^2$ и $g(x+\lambda a)=g(x)+g_1(x,a)\lambda+g(a)\lambda^2$. *Система* $\dot{x}=\operatorname{sgrad} f_1(x)$ *вполне интегрируема на орбитах общего положения. Все орбиты коприсоединенного представления расслоены на изоэнергетические поверхности* $Q^3=\{f_1(x)=\mathrm{const}\}$, *обладающие тем свойством, что для всех поверхностей* Q^3 *функция* $f_2|Q^3$ *является боттовским интегралом потока* $\dot{x}$ *для вектора сдвига а общего положения. Точнее, функция* f_2 *на некомпактном многообразии не имеет критических точек. Многообразие* Q^3 *можно представить в виде* $Q^3=M^2\times(0,1)$, *где* M^2 — *одна из двумерных поверхностей:* а) *цилиндр* $M^2\cong S^1\times(0,1)$; б) *плоскость* $M^2\cong\mathbf{R}^2$; в) *два экземпляра плоскости* $M^2\cong S^0\times\mathbf{R}^2$.

7. Определение. Пусть γ — замкнутая траектория системы $v=\operatorname{sgrad} H$ на поверхности Q (т. е. периодическое решение). *Траектория* γ называется *устойчивой,* если некоторая ее трубчатая окрестность целиком расслоена (без щелей) на концентрические двумерные торы, инвариантные относительно системы v. Это означает, что все интегральные траектории, близкие к γ, «укладываются» на инвариантные двумерные торы, общей осью которых является траектория γ.

8. Замечание. Система может быть интегрируемой, но не иметь при этом ни одной замкнутой устойчивой траектории (хотя замкнутых траекторий может быть очень много). Простейший пример: геодезический поток двумерного плоского тора T^2 с локально евклидовой метрикой. Легко видеть, что этот геодезический поток имеет дополнительный интеграл, однако все замкнутые траектории системы являются неустойчивыми.

9. Обозначения. Пусть Q — поверхность постоянной энергии, на которой задан второй интеграл. Если он определен не только на поверхности $Q=\{H=0\}$, но и в некоторой ее окрестности, то f удовлетворяет уравнению $\{H,f\}=\lambda(H)$, $\lambda(0)=0$, $d\{H,f\}=0$.

Буквой T обозначим критические невырожденные подмногообразия интеграла f на Q. Каждое из них обладает *сепаратрисной диаграммой* — это объединение интегральных траекторий поля grad f, входящих в T и исходящих из T. В соответствии с этим будем говорить о *входящей* сепаратрисной диаграмме $P_-(T)$ и *исходящей* сепаратрисной диаграмме $P_+(T)$. В малой окрестности подмногообразия T обе диаграммы (входящая и исходящая) являются двумерными гладкими многообразиями с общим краем T (край понимается здесь не в общетопологическом смысле, а в смысле теории многообразий). Они могут быть как ориентируемыми, так и неориентируемыми. Итак, определены три объекта Q^3, T и $P_+(T)\bigcup P_-(T)$ (рис. 53). Заметим, что последний объект зависит от выбора метрики на Q, и если это важно, то эта зависимость будет специально отмечаться.

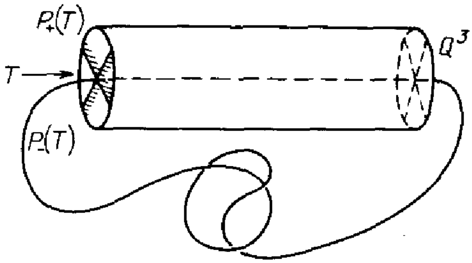


Рис. 53

10. Определение. Боттовский интеграл f на поверхности Q называется *ориентируемым*, если все его критические подмногообразия ориентируемы. Если хотя бы одно критическое подмногообразие неориентируемо, то будем говорить, что интеграл *неориентируем*.

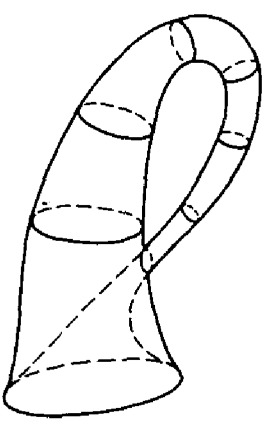


Рис. 54

11. Замечание. Без существенного ограничения общности можно изучать лишь ориентируемые интегралы f на Q. Дело в том, что рассматривая изоэнергетические поверхности Q с точностью до двулистного накрытия (над ними), всегда можно считать, что интеграл f ориентируем.

12. Предложение (см. [283]). *Пусть Q^3 — неособая компактная поверхность постоянной энергии в M^4 и f — боттовский неориентируемый интеграл на Q. Тогда все его неориентируемые критические подмногообразия гомеоморфны бутылке Клейна* (рис. 54), *причем интеграл f достигает на них либо минимума, либо максимума (локального). Пусть $U(Q)$ — достаточно малая трубчатая окрестность поверхности Q в M. Тогда существует двулистное накрытие π: $(\tilde{U}(\tilde{Q}),\ \tilde{H},\tilde{f})\to(U(Q), H, f)$ (со слоем $\mathbf{Z}_2$), где $\tilde{U}(\tilde{Q})$ — симплектическое многообразие с гамильтоновой системой $\tilde{v}=$ sgrad $\tilde{H}$ (где гамильтониан $\tilde{H}$ имеет вид $\tilde{H}=\pi^*H$), интегрируемой на $\tilde{Q}=\pi^{-1}(Q)$ при помощи боттовского ориен-*

тируемого интеграла $\tilde{f}=\pi^* f$. При этом все критические бутылки Клейна «разворачиваются» в критические торы T^2 в $\tilde{Q}$ (максимумы или минимумы интеграла $\tilde{f}$). Многообразие $\tilde{U}(\tilde{Q})$ является трубчатой окрестностью $\tilde{Q}$.

13. Следствие. *Если f — неориентируемый интеграл на Q, то $\pi_1(Q)\neq 0$ и в группе $\pi_1(Q)$ содержится подгруппа индекса два. Если, например, Q гомеоморфно сфере S^3 (частный случай из механики), то любой боттовский интеграл f на S^3 всегда ориентируем.*

14. Обозначения. В дальнейшем будем обозначать $m=m(Q)$ число устойчивых периодических решений системы $\dot{x}=\operatorname{sgrad} H$ на $Q=\{H=\text{const}\}$. Пусть далее $r=r(Q)$ — число критических подмногообразий интеграла f на Q, гомеоморфных бутылке Клейна. Если интеграл ориентируем, то $r=0$.

15. Теорема (А. Т. Фоменко, см. [283]). *Пусть M^4 — гладкое симплектическое четырехмерное многообразие (компактное или некомпактное) и $v=\operatorname{sgrad} H$ — гамильтоново векторное поле на M^4, где H — гладкий гамильтониан. Предположим, что система интегрируема по Лиувиллю на какой-то неособой компактной трехмерной поверхности уровня Q гамильтониана H, причем второй гладкий интеграл f коммутирует с H на Q и является боттовским на Q. Тогда число $m=m(Q)$ устойчивых периодических решений системы $\dot{x}=\operatorname{sgrad} H$ на поверхности Q следующим образом оценивается снизу через топологические инварианты поверхности Q.*

1) *В том случае, когда интеграл f ориентируем на Q, мы имеем:*

а) *если группа гомологий $H_1(Q; \mathbf{Z})$ конечна, то $m\geqslant 2$;*

б) *если фундаментальная группа $\pi_1(Q)=\mathbf{Z}$, то $m\geqslant 2$.*

2) *В том случае, когда интеграл f неориентируем на Q, мы имеем:*

а) *если группа гомологий $H_1(Q; \mathbf{Z})$ конечна, то $m+r\geqslant 2$;*

б) *если $H_1(Q; \mathbf{Z})=0$ (при этом группа $\pi_1(Q)$ может быть бесконечной), то $m\geqslant 2$;*

в) *если группа $H_1(Q; \mathbf{Z})$ конечная циклическая, то $m\geqslant 1$;*

г) *если $\pi_1(Q)=\mathbf{Z}$ или если $\pi_1(Q)$ — конечная группа, то $m\geqslant 1$;*

д) *если группа $H_1(Q; \mathbf{Z})$ конечная циклическая и поверхность Q не принадлежит к небольшой серии многообразий $Q_0=(S^1\times D^2)+sA^3+rK^3$, которые описаны в явном виде ниже, то $m\geqslant 2$.*

В обоих случаях 1) и 2) интеграл f достигает локального минимума или максимума на каждом из этих устойчивых периодических решений системы v (или на бутылках Клейна). Если группа гомологий $H_1(Q; \mathbf{Z})$ бесконечна, т. е. ранг $H_1(Q; \mathbf{Z})\geqslant 1$, то система $\dot{x}=v$ может вообще не иметь на поверхности Q устойчивых периодических решений.

16. Замечание. У многих интегрируемых систем поверхности постоянной энергии часто диффеоморфны либо сфере S^3, либо проективному пространству $\mathbf{R}P^3$, либо $S^1 \times S^2$. Например, для уравнений движения тяжелого твердого тела в зоне больших скоростей после подходящей факторизации можно считать, что поверхности Q гомеоморфны $\mathbf{R}P^3$. Кроме того, если гамильтониан H имеет изолированный минимум или максимум (т. е. изолированное положение равновесия системы) на M^4, то все достаточно близкие поверхности уровня $Q=\{H=\text{const}\}$ являются трехмерными сферами S^3.

17. Определение. Обозначим $L_{p,q}$ так называемое линзовое пространство, которое определяется следующим образом. Циклическую группу q-го порядка $\mathbf{Z}_q$ представим как мультипликативную группу корней q-й степени из единицы $\left\{\exp\frac{2\pi i\nu}{q}\,\middle|\,0\leqslant\nu\leqslant q-1\right\}$. Пусть p, q — взаимно простые натуральные числа. Группа $\mathbf{Z}_q$ свободно действует на трехмерной сфере S^3 по правилу

$$(z_1, z_2)\to\left(z_1\exp\frac{2\pi i\nu}{q},\ z_2\exp\frac{2\pi i\nu p}{q}\right), \tag{803}$$

где $S^3\subset\mathbf{R}^4\cong\mathbf{C}^2$ описывается уравнением $z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=1$. *Линзовое пространство* $L_{p,q}$ есть факторпространство $S^3/\mathbf{Z}_q$ относительно описанного действия группы $\mathbf{Z}_q$ на сфере S^3.

Выделим случаи, представляющие интерес для гамильтоновой механики, в виде отдельного утверждения.

18. Предложение. *Пусть гамильтонова система $\dot{x}=\operatorname{sgrad} H$ интегрируема при помощи боттовского интеграла f на какой-то отдельной поверхности Q постоянной энергии, гомеоморфной одному из многообразий S^3, $\mathbf{R}P^3$, $S^1\times S^2$, $L_{p,q}$.*

1) *В том случае, когда интеграл f ориентируем, мы всегда имеем $m\geqslant 2$, т. е. система $\dot{x}$ обязательно имеет по меньшей мере два устойчивых периодических решения на каждой из этих поверхностей.*

2) *В том случае, когда интеграл f неориентируем, мы имеем для сферы S^3 неравенство $m\geqslant 2$, а для многообразий $\mathbf{R}P^3$, $S^1\times S^2$, $L_{p,q}$ — неравенство $m\geqslant 1$. В частности, на сфере S^3 интегрируемая система всегда имеет по меньшей мере два устойчивых периодических решения для любого боттовского интеграла.*

19. Замечание. Два устойчивых периодических решения у интегрируемой системы существует не только на трехмерных малых сферах, близких к изолированному положению равновесия (минимуму или максимуму энергии H), но и на всех расширяющихся поверхностях уровня функции H до тех пор, пока они остаются гомеоморфными сфере S^3.

20. Замечание. Критерий теоремы 15 является точным в следующем смысле. Известны случаи, когда интегрируемая система v имеет на поверхности $Q=\mathbf{R}P^3$ или на $Q=S^3$ ровно два (и не больше) устойчивых периодических решения.

21. Следствие. *Пусть двумерная гладкая поверхность гомеоморфна сфере и снабжена гладкой римановой метрикой общего положения, т. е. на поверхности нет ни одной устойчивой замкнутой геодезической. Тогда соответствующий этой метрике геодезический поток неинтегрируем (на каждой неособой поверхности постоянной энергии) в классе боттовских интегралов.*

22. Определение. *Рангом* R фундаментальной группы $\pi_1(Q)$ называется наименьшее возможное число образующих (в копредставлении этой группы).

23. Примеры. Если ранг $\pi_1(Q)$ равен единице, то система v, интегрируемая на Q при помощи боттовского интеграла f, обязательно имеет на Q хотя бы одно устойчивое периодическое решение. Например, в некоторых интегрируемых случаях задачи движения четырехмерного твердого тела по инерции с закрепленной точкой (см. [279]) некоторые трехмерные неособые поверхности постоянной энергии диффеоморфны $S^1\times S^2$ (замечание А. В. Браилова; до конца ситуация проанализирована А. А. Ошемковым). Это означает, что $\pi_1(S^1\times S^2)=\mathbf{Z}$ и $R=1$. Аналогично, как хорошо известно, в интегрируемом случае Ковалевской (для трехмерного тяжелого тела) некоторые поверхности постоянной энергии (после подходящей факторизации) также гомеоморфны $S^1\times S^2$.

24. Предложение. *Пусть гамильтонова система* $\dot{x}=\operatorname{sgrad} H$ *интегрируема на какой-то одной неособой компактной трехмерной поверхности* Q *постоянной энергии с помощью боттовского интеграла* f. *Тогда, если система* $\dot{x}$ *не имеет на* Q *устойчивых периодических решений, то:* 1) *группа* $H_1(Q;\mathbf{Z})$ *не является конечной циклической,* 2) *ранг* $\pi_1(Q)\geqslant 2$, *причем хотя бы одна из образующих в группе* $\pi_1(Q)$ *имеет бесконечный порядок.*

25. Пример. Рассмотрим геодезический поток плоского двумерного тора T^2, т. е. тора, снабженного локально евклидовой метрикой. Этот поток интегрируем в классе боттовских интегралов и, очевидно, не имеет замкнутых устойчивых траекторий. В силу предыдущего предложения 24 должно выполняться неравенство $R\geqslant 2$ (R — ранг группы $\pi_1(Q)$). В самом деле, неособые поверхности Q диффеоморфны здесь трехмерному тору T^3, у которого $H_1(T^3;\mathbf{Z})=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$.

26. Следствие. *Пусть* $\dot{x}=\operatorname{sgrad} H$ — *гамильтонова система на* M^4 *и* Q — *некоторая неособая компактная трехмерная поверхность постоянной энергии. Предположим, что выполнены следующие два условия:* 1) *система* $\dot{x}$ *имеет на* Q *не более одного устойчивого периодического решения;* 2) *группа гомологий* $H_1(Q;\mathbf{Z})$ *конечная циклическая, либо ранг группы* $\pi_1(Q)$ *не* *больше* 1. *Тогда система* $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ *неинтегрируема в классе гладких боттовских интегралов на данной поверхности* Q.

27. Следствие. *Пусть гамильтонова система* $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ *интегрируема на* M^{2n} *в некоммутативном смысле и* G — *алгебра Ли функций на* M^{2n} *(относительно скобки Пуассона) с функционально независимыми (вообще говоря, некоммутативными) образующими* $f_1, \ldots, f_k$, *где* $f_1 = H$, $k = \dim G$ *и* $\dim G + \operatorname{ind} G = \dim M$. *Пусть* $\operatorname{ind} G = 2$. *Предположим, что среди функций есть хотя бы одна функция* f_α *такая, что ее ограничение на какую-то одну совместную трехмерную компактную поверхность уровня* Q *остальных функций* f_j, $j \neq \alpha$, *является боттовской функцией. Тогда для системы* $\dot{x}$ *на* Q *выполнены все утверждения из теоремы* 15.

28. Утверждение. *«Далеко не каждое» трехмерное гладкое компактное замкнутое ориентируемое многообразие может быть поверхностью постоянной энергии гамильтоновой системы, интегрируемой при помощи боттовского гладкого интеграла,* см. [41].

29. Замечание. Таким образом, препятствием к итегрируемости гамильтоновой системы может быть топология поверхности постоянной энергии. Детали см. в [283], [286].

Мы предъявим в явном виде топологическое препятствие, мешающее «подавляющему большинству» трехмерных многообразий реализовываться в виде поверхностей постоянной энергии интегрируемых систем.

30. Перечисленные выше результаты в действительности являются следствиями общей теоремы А. Т. Фоменко о топологическом описании поверхностей постоянной энергии интегрируемых боттовских систем. Прежде чем сформулировать ее, опишем в следующем пункте пять типов простейших трехмерных многообразий, оказывающихся теми «элементарными кирпичиками», из которых склеена произвольная поверхность постоянной энергии интегрируемой системы.

31. Пять типов многообразий. Дадим описание элементарных трехмерных многообразий P^3 (или I), Z^3 (или II), C^3 (или III), A^3 (или IV), K^3 (или V), из которых склеивается произвольная интегрируемая изоэнергетическая поверхность.

Тип 1. Прямое произведение $S^1 \times D^2$ окружности S^1 на диск D^2 называется *полноторием* P^3. Его край ∂P^3 — один тор T^2 (рис. 55).

Тип 2. Прямое произведение $T^2 \times D^1$ тора T^2 на отрезок D^1 называется *цилиндром* Z^3. Его край ∂Z^3 — два тора $T_1^2 \cup T_2^2$ (рис. 56).

Тип 3. Прямое произведение $N^2 \times S^1$ двумерной сферы с тремя выброшенными дисками D_1^2, D_2^2, D_3^2 (или диска с двумя дырками, рис. 57) $N^2 = S^2 \setminus (D_1^2 \cup D_2^2 \cup D_3^2)$ и окружности S^1 называется *ориентированным седлом* C^3 (или, более образно, «штанами»). Многообразие N^2 гомотопически эквивалентно восьмерке, т. е. букету двух окружностей (рис. 58). Край $\partial(N^2 \times S^1)$ — три тора $T_1^2 \cup T_2^2 \cup T_3^2$.

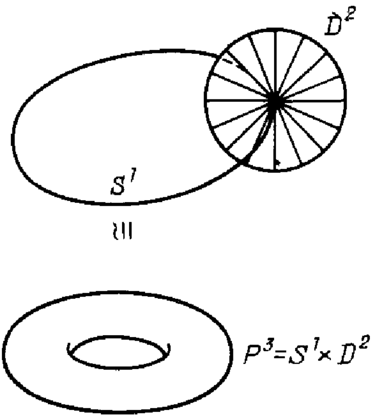


Рис. 55

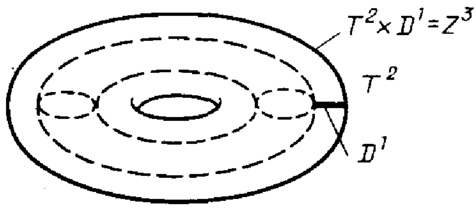


Рис. 56

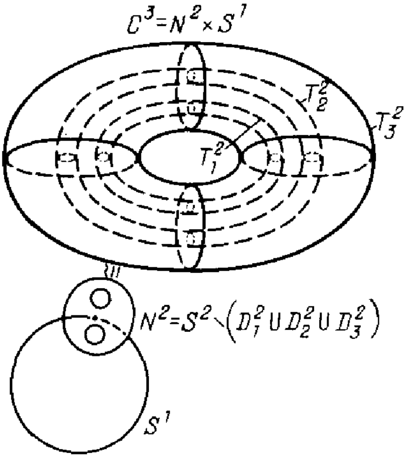


Рис. 57

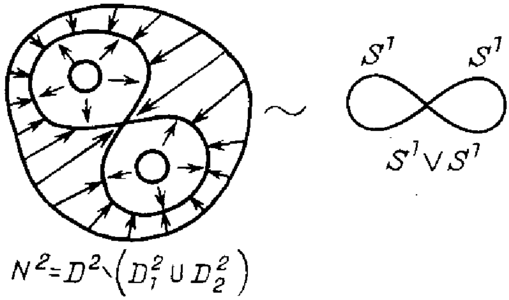


Рис. 58

Тип 4. Реализуем многообразие N^2 как диск с двумя дырками, которые зафиксируем и обозначим цифрами 1 и 2. Рассмотрим нетривиальное расслоение $N^2 \to A^3 \to S^1$ с базой — окружностью S^1 и слоем N^2. Над окружностью существуют лишь два неэквивалентных расслоения со слоем N^2. Это — прямое произведение $N^2 \times S^1$ (см. выше тип 3) и расслоение A^3 (рис. 59). Оно характеризуется тем, что после переноса слоя N^2 вдоль базы S^1 он возвращается на прежнее место с переменой местами дырок 1 и 2. Многообразие A^3 называется *неориентируемым седлом*.

Тип 5. Символом K^2 обозначим бутылку Клейна, а символом K^3 — пространство ориентированного косого произведения бутылки K^2 на отрезок D^1, т. е. $K^3 = K^2 \tilde{\times} D^1$ (рис. 60). Границей ∂K^3 пространства K^3 является тор T^2.

32. Топологические замечания. Многообразие N^2 гомотопически эквивалентно восьмерке, составленной из окружностей 1 и 2, поэтому в типе 3 с гомотопической точки зрения мы

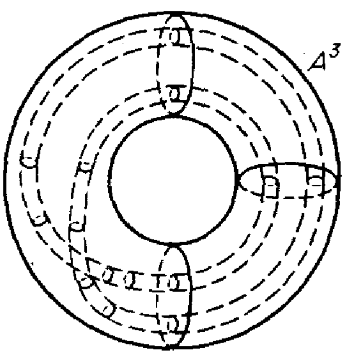


Рис. 59

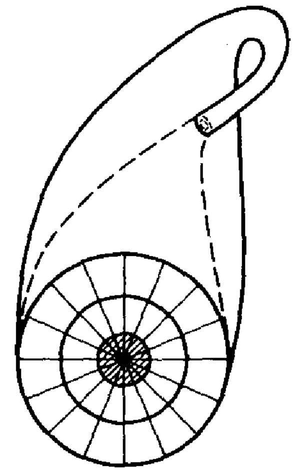


Рис. 60

имеем прямое произведение восьмерки на окружность, а в типе 4 восьмерка движется по окружности так, что после полного оборота две окружности 1 и 2 меняются местами (восьмерка переворачивается, рис. 61). Малая окрестность окружности-базы

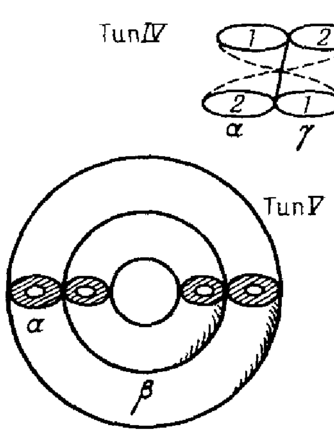


Рис. 61

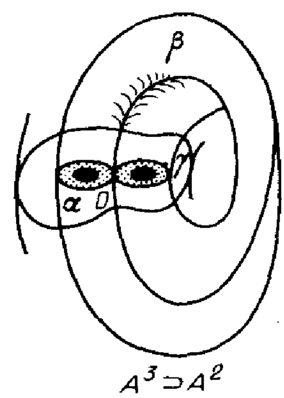


Рис. 62

S^1 гомеоморфна в этом случае двум листам Мёбиуса, пересекающимся трансверсально по общей оси. Краем многообразия A^3 являются два тора. Многообразие A^3 можно реализовать в $\mathbf{R}^3$ следующим образом. Рассмотрим полноторие, ограниченное стандартно вложенным тором, внутри которого высверлим тонкое полноторие, два раза наматывающееся на образующую большого полнотория (рис. 62). Ясно, что A^3 является пространством ориентированного косого произведения $N^2 \tilde{\times} S^1$. С топологической точки зрения многообразие A^3 не является новым. Оно получается склейкой полнотория и штанов по некоторому диффеоморфизму тора. Условно это можно записать так: $A^3 = \mathrm{I} + \mathrm{III} = (S^1 \times D^2) + (N^2 \times S^1)$.

С топологической точки зрения многообразие K^3 типа 5 также не является принципиально новым, так как оно представляется в виде следующей склейки вида: $K^3 = \mathrm{I} + \mathrm{IV} = (S^1 \times D^2) + A^3 = 2\mathrm{I} + \mathrm{III} = 2(S^1 \times D^2) + (N^2 \times S^1)$. Наконец, многообразие типа 2 также получается склейкой многообразий типов 1 и 3, а именно: $Z^3 = P^3 + C^3$.

Таким образом, из указанных пяти типов многообразий лишь два (I и III) являются топологически независимыми, остальные разлагаются в комбинации многообразий типов 1 и 3. Однако при изучении траекторий системы $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ (динамики системы) многообразия Z^3, A^3 и K^3 представляют большой самостоятельный интерес, так как соответствуют интересным движениям механических систем.

Пусть M^4 — гладкое симплектическое многообразие (компактное или некомпактное) и $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$ — гамильтонова система, интегрируемая по Лиувиллю на какой-то одной неособой компактной трехмерной поверхности постоянной энергии Q при помощи боттовского интеграла f. Пусть m — число периодических решений системы $\dot{x}$ на поверхности Q, на которых интеграл f достигает строгого локального минимума или максимума (тогда они устойчивы). Пусть p — число двумерных критических торов интеграла f (минимумов или максимумов интеграла); q — число критических окружностей интеграла f (неустойчивых траекторий системы) с ориентируемой сепаратрисной диаграммой; s — число критических окружностей интеграла f (неустойчивых траекторий системы) с неориентируемой сепаратрисной диаграммой; r — число критических бутылок Клейна (минимумы или максимумы интеграла). Это полный список всех возможных критических подмногообразий интеграла f на Q.

33. Теорема (А. Т. Фоменко; см. [283]). *Многообразие Q представляется в виде склейки (по некоторым диффеоморфизмам граничных торов) следующих «элементарных кирпичей»:*

$$Q = m\mathrm{I} + p\mathrm{II} + q\mathrm{III} + s\mathrm{IV} + r\mathrm{V} =$$
$$= m(S^1 \times D^2) + p(T^2 \times D^1) + q(N^2 \times S^1) + sA^3 + rK^3. \quad (804)$$

Если интеграл f ориентируемый, то последнего слагаемого нет, т. е. $r = 0$. Указанное разложение поверхности Q назовем гамильтоновым.

34. Замечание. Таким образом, в полученном нами каноническом гамильтоновом представлении многоообразия

Q все неотрицательные целые числа m, p, q, r, s имеют четкую интерпретацию — они сообщают нам, сколько критических подмногообразий каждого типа имеет данный интеграл f на данном многообразии Q. Если же мы будем игнорировать эту интерпретацию чисел m, p, q, s, r и поставим вопрос о наиболее простом топологическом представлении изоэнергетической поверхности Q, то на этот вопрос отвечает следующая

35. Теорема (А. Т. Фоменко). *Пусть Q — компактная неособая поверхность постоянной энергии гамильтоновой системы $\dot{x} = \operatorname{sgrad} H$, интегрируемой при помощи боттовского интеграла f. Тогда Q допускает следующее топологическое представление:*

$$Q = m'\mathrm{I} + q'\mathrm{III} = m'(S^1 \times D^2) + q'(N^2 \times S^1), \tag{805}$$

где m', q' — некоторые неотрицательные целые числа. Эти числа связаны с числами m, p, q, s, r из теоремы 33 *равенствами $m' = m + s + 2r + p$, $q' = q + s + r + p$.*

36. Определения. Для изоэнергетической поверхности Q^3 возникает два разложения: $Q^3 = m\mathrm{I} + p\mathrm{II} + q\mathrm{III} + s\mathrm{IV} + r\mathrm{V}$ и $Q^3 = m'\mathrm{I} + q'\mathrm{III}$. Первое из них называется *гамильтоновым разложением*, а второе — *топологическим разложением*.

37. Канонические перестройки торов Лиувилля. Рассмотрим следующие пять типов перестроек торов Лиувилля, отвечающие указанным в п. 31 многообразиям P^3, Z^3, C^3, A^3, K^3. Реализуем тор T^2 как одну из компонент края соответствующего многообразия. Тогда тор T^2, увлекаемый изменением интеграла f, преобразуется в объединение торов Лиувилля, являющихся остальными компонентами края. Эти перестройки имеют следующий вид.

Тип 1: перестройка $T^2 \to S^1 \to 0$. Тор T^2 стягивается на осевую окружность полнотория и «исчезает» затем с поверхности уровня интеграла f.

Тип 2: перестройка $2T^2 \to T^2 \to 0$. Два тора T^2 движутся навстречу друг другу по цилиндру, сливаются в один тор и «исчезают».

Тип 3: перестройка $T^2 \to 2T^2$. Тор T^2 распадается на два тора, проходя через центр штанов (ориентированного седла), которые затем «остаются» на поверхности уровня интеграла f.

Тип 4: перестройка $T^2 \to T^2$. Тор T^2 два раза наматывается на тор T^2 (следуя при этом топологии неориентированного седла A^3) и «остается» затем на поверхности уровня интеграла f.

Тип 5: перестройка $T^2 \to K^2 \to 0$. Тор T^2 превращается в бутылку Клейна (два раза накрывая ее) и затем «исчезает» с поверхности уровня интеграла f.

Пять перестроек, получающихся из указанных выше заменой стрелок на обратные, мы не будем считать новыми.

38. Замечание. Теперь мы можем дать полную классификацию всех перестроек торов Лиувилля, возникающих при изменении значения интеграла f. Меняя H и f местами, можно было бы говорить о бифуркации торов Лиувилля, когда они проходят через критический уровень энергии при фиксированном втором интеграле f. Ответ на этот вопрос дает следующая, принадлежащая А. Т. Фоменко теорема о классификации бифуркаций двумерных торов Лиувилля.

39. Теорема. *Пусть f — боттовский интеграл на неособой поверхности постоянной энергии Q^3. Тогда любая перестройка общего положения тора Лиувилля, возникающая при его проходе через критическую поверхность уровня интеграла f, является композицией перечисленных выше элементарных перестроек типов* 1—5. *Более того, из этих пяти перестроек независимы (с топологической точки зрения) лишь первая и третья. Перестройки типов* 4 *и* 5 *распадаются в композиции перестроек типов* 1 *и* 3.

40. Обсуждение. В качестве важного следствия этих результатов мы получаем возможность представить каждую изоэнергетическую поверхность Q с интегралом f на ней в виде одномерного графа $\Gamma(Q, f)$, все типы вершин которого (5 типов), оказывается, допускают точное и полное описание. Такое представление, вообще говоря, неоднозначно и будет подробно описано ниже. В рамках изложенной конструкции доказывается теорема 41 § 18, принадлежащая С. В. Матвееву и А. Т. Фоменко.

41. Определение. Рассмотрим четыре класса (H), (Q), (W), (S) трехмерных компактных ориентируемых замкнутых многообразий.

Класс (H). Многообразие M^3 принадлежит классу (H), если M^3 является поверхностью постоянной энергии (изоэнергетической поверхностью) интегрируемой гамильтоновой системы (при помощи боттовского интеграла).

Класс (Q). Многообразие M^3 принадлежит классу (Q), если оно разлагается в сумму «элементарных кирпичей» типов 1 и 3 из п. 31, т. е. $M^3 = m'\mathrm{I} + q'\mathrm{III}$, или $M^3 = m'(S^1 \times D^2) + q'(N^2 \times S^1)$.

Класс (W). Многообразие M^3 принадлежит классу (W), если в M^3 существует набор непересекающихся двумерных торов, выбросив которые получим многообразие, каждая компонента связности которого расслаивается со слоем — окружностью над двумерным многообразием (возможно, с краем).

Класс (S). Многообразие M^3 принадлежит классу (S), если на M^3 существует гладкая функция g, все критические точки которой организованы в невырожденные окружности, а все неособые поверхности уровня функции g являются несвязным объединением двумерных торов.

42. Замечания. Из теоремы 33 вытекает, что класс (H) содержится в классе (Q). Класс (W), возникший в задачах трехмерной топологии, подробно изучался Вальдхаузеном в [516] и был назван им Graphenmannigfaltigkeiten. Класс (S) ввел С. В. Матвеев, развивая идеи А. Т. Фоменко.

43. Теорема. *Все четыре класса трехмерных многообразий, описанных в п.* 41, *совпадают, т. е.* $(H)=(Q)=(W)=(S)$.

44. Замечание. Равенство $(H)=(Q)$ доказано А. В. Браиловым и А. Т. Фоменко, равенство $(W)=(Q)$ — А. Т. Фоменко и Х. Цишангом, равенство $(S)=(Q)$ — С. В. Матвеевым.

45. Обозначения. Ранг группы гомологий $H_1(Q; \mathbf{Z})$ обозначим буквой β (т. е. β — одномерное число Бетти), ε — число элементарных множителей в конечной части $\operatorname{Tor} H_1(Q; \mathbf{Z})$ группы $H_1(Q; \mathbf{Z})$. Если $\operatorname{Tor} H_1(Q; \mathbf{Z})$ разложена в упорядоченную сумму подгрупп, где порядок каждой подгруппы делит порядок предыдущей, то ε — число таких слагаемых.

46. Пусть $Q^3 \in (H)$ и $Q=m'\mathrm{I}+q'\mathrm{III}$ — топологическое разложение изоэнергетической поверхности $Q=m\mathrm{I}+p\mathrm{II}+q\mathrm{III}+r\mathrm{IV}+s\mathrm{V}$ интегрируемой боттовской системы. Здесь m — число устойчивых периодических решений системы, s — число неустойчивых периодических решений с неориентируемой сепаратрисной диаграммой, r — число критических бутылок Клейна.

47. Теорема (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг). *Всегда выполнены неравенства* $m+s+2r \geqslant \varepsilon-2\beta+1$, $q' \geqslant m'-2$ *при* $m+r+s+q>0$. *Если же* $m=r=s=q=0$, *то* $\varepsilon-2\beta \leqslant 0$, *причем равенство* $\varepsilon=2\beta$ *действительно достигается для некоторых пар* (Q, f).

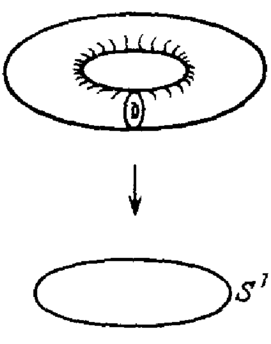


Рис. 63

48. Случай $m=r=s=q=0$ реализуется тогда и только тогда, когда многообразие Q является расслоением с базой S^1 и слоем тор (рис. 63). Если интеграл f «полностью ориентируем», т. е. $s=r=0$, то мы получим неравенство $m \geqslant \varepsilon-2\beta+1$, т. е. получаем оценку снизу на число устойчивых периодических решений системы. Детали см. в [288].

49. Замечание. Выше мы разобрали случай, когда совместная поверхность уровня обоих интегралов H и f компактна. Однако не составляет труда сформулировать и доказать аналогичные утверждения и для некомпактного случая.

§ 58. Граф, естественно связанный с интегрируемой гамильтоновой системой

1. Конструкция. Многообразие Q удобно задавать в виде некоторого графа $\Gamma=\Gamma(Q, f)$. Пусть $0 \leqslant f \leqslant 1$ на поверхности Q. Все минимумы и максимумы можно считать абсолютными.

Граф Г строится следующим образом. Начнем с частного случая.

а) Сначала предположим, что каждая связная компонента каждого критического слоя $f^{-1}(c)$ содержит ровно одно связное критическое подмногообразие. В этом случае граф $\Gamma=\Gamma(Q, f)$ строится однозначно следующим образом. Поскольку f — боттовская функция на Q, то картина распада и уничтожения неособых торов Лиувилля вблизи критических седловых окружностей строго определенная, см. выше.

Изобразим неособые двумерные торы Лиувилля обычными точками (на каждый тор отведем по одной точке). Меняя значение функции f, мы заставляем эти точки перемещаться, так как каждый неособый слой функции (интеграла) изображается теперь набором точек (по числу торов Лиувилля). В результате получится некоторый одномерный граф, начинающийся на плоскости ($f=0$) и заканчивающийся на плоскости ($f=1$). При этом введем следующие обозначения (рис. 64).

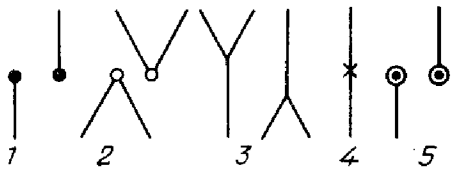


Рис. 64

1) Большой черной точкой (черным кружочком) с исходящим (соответственно входящим) ребром графа мы обозначим минимальную (соответственно максимальную) окружность для интеграла.

2) Белым кружочком с двумя исходящими (соответственно входящими) ребрами графа мы обозначим минимальный (соответственно максимальный) двумерный тор для интеграла.

3) Трилистником («треножником»), т. е. точкой с тремя ребрами графа, встречающимися в этой точке, мы обозначим связную трубчатую окрестность критической седловой окружности с ориентированной сепаратрисной диаграммой $\operatorname{sd} S^1$.

4) Звездочкой (с входящими и исходящими ребрами) обозначим трубчатую окрестность критической седловой окружности с неориентированной сепаратрисной диаграммой $\operatorname{sd} S^1$.

5) Кружочком с точкой внутри и с исходящим (соответственно входящим) ребром графа мы обозначим минимальную (соответственно максимальную) критическую бутылку Клейна.

Каждый трилистник (треножник) описывает либо распад одного тора на два тора, либо, наоборот, слияние двух торов в один. Это зависит от того, как ориентирован трилистник: либо двумя ребрами вверх, либо одним ребром вверх.

Получающийся таким образом граф $\Gamma=\Gamma(Q, f)$ можно реализовать в $\mathbf{R}^3$. Очевидно, существует непрерывное отображение h поверхности Q на граф $\Gamma(Q, f)$. Меняя интеграл f (но сохраняя поверхность Q), мы будем, вообще говоря, менять граф Г. Поэтому в обозначении графа Г учтено как многообразие Q, так и интеграл f.

б) Теперь рассмотрим общий случай, когда на некоторых связных компонентах критических поверхностей $f^{-1}(c)$ лежат несколько критических подмногообразий интеграла f. В этом случае конструкция, описанная выше (случай а)), не проходит. Но тем не менее оказывается и здесь естественным путем возникает граф Г, точное описание которого дается ниже в § 59 в теореме 3 и п. 10—17. Для случая а) этот общий граф, конечно, превращается в граф Г, описанный выше.

Отметим также следующее полезное обстоятельство. В общем случае б) можно построить некоторый граф $\Gamma(Q, \tilde{f})$, «возмутив» интеграл f. В самом деле, в работе Фоменко [283] было построено возмущение $f \to \tilde{f}$ интеграла f в некоторую близкую функцию $\tilde{f}$, которая, вообще говоря, не является интегралом, но зато имеет на каждой связной компоненте критического слоя $\tilde{f}^{-1}(c)$ *ровно одно* критическое подмногообразие. Следовательно, по схеме случая а) мы можем построить граф $\Gamma(Q, \tilde{f})$. При этом возмущении $f \to \tilde{f}$ многообразие Q не меняется. Таким образом, мы можем сопоставить паре (Q, f) (в общем случае) некоторый граф $\Gamma(Q, \tilde{f})$. Конечно, такое сопоставление неоднозначно, так как существует много возмущений $f \to \tilde{f}$. Однако из сказанного выше ясно, что все такие графы $\Gamma(Q, \tilde{f})$ задают одно и то же (исходное) многообразие Q.

Таким образом, от тройки (Q, H, f) можно путем гладкой деформации перейти к тройке $(Q, H, \tilde{f})$. Далее, из теоремы Браилова и Фоменко следует, что можно всегда подобрать такую пару $(\tilde{H}, g)$, что $(\tilde{H}, g)$ — «боттовская пара», интегралы $\tilde{H}$ и g коммутируют и определяемое ими слоение Q на двумерные поверхности совпадает со слоением, определяемым парой H и $\tilde{f}$. Другими словами, *по заданному симплектическому действию абелевой группы* $\mathbf{R}^2$, *порожденной коммутирующими функциями H и f, всегда можно построить новое симплектическое действие группы* $\mathbf{R}^2$, *отвечающее интегралам $\tilde{H}$ и g. При этом каждая связная компонента каждого критического слоя $g^{-1}(c)$ содержит ровно одно связное критическое подмногообразие интеграла g.*

2. Замечание. Вершины графа Г (в случае а)) занумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, 5 не случайно. Дело в том, что имеется взаимно однозначное соответствие между этими пятью видами вершин графа Г и пятью типами простейших трехмерных многообразий, перечисленных в п. 31 § 57. Оказывается, достаточно малая «окрестность» вершины графа типа i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, гомеоморфна (с точки зрения поверхности i) элементарному многообразию типа i.

Рассмотрим связное критическое подмногообразие L и близкие к нему неособые поверхности уровня $B_{a+\varepsilon}$ и $B_{a-\varepsilon}$. Пусть

$U(L)$ — связная компонента слоя между $B_{a+\varepsilon}$ и $B_{a-\varepsilon}$, содержащая L.

3. Следующие факты доказаны в [283]. 1) Пусть S^1 — критическая седловая окружность и ее сепаратрисная диаграмма P_- ориентируема. Тогда трехмерное многообразие $U(S^1)$ с краем $T_{1,\varepsilon} \cup T_{2,\varepsilon} \cup T_{-\varepsilon}$ гомеоморфно прямому произведению $N^2 \times S^1$, где N^2 — двумерная сфера с тремя дырками (диск с двумя дырками).

2) Пусть теперь сепаратрисная диаграмма P_- неориентируема. Тогда $U(S^1)$ гомеоморфно многообразию A^3, т. е. нетривиальному расслоению $A^3 \to S^1$ со слоем N^2: $U(S^1) = N^2 \tilde{\times} S^1$ (косое произведение).

3) Пусть $L = S^1$ — максимальная (или минимальная) окружность для интеграла. Тогда $U(S^1) = S^1 \times D^2$ (полноторие).

4) Пусть $L = T^2$ — максимальный (или минимальный) тор. Тогда $U(L) = T^2 \times D^1$ (цилиндр).

5) Пусть $L = K^2$ — максимальная (или минимальная) бутылка Клейна. Тогда $U(K^2) = K^3 = K^2 \tilde{\times} S^1$ (косое произведение).

§ 59. Новый топологический инвариант гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, интегрируемых по Лиувиллю

1. Классическая бифуркационная диаграмма Σ, при помощи которой обычно описывают топологию интегрируемых случаев, при всех несомненных достоинствах обладает существенным недостатком — она зависит от выбора второго интеграла, т. е. не является топологическим инвариантом системы. Две конструкции построения инвариантов вполне интегрируемых систем мы опишем в гл. 11. Эти конструкции копируют в некотором смысле конструкцию классических характеристических классов векторных расслоений, см. [103], [181]. Мы приведем здесь другую конструкцию топологических инвариантов, предложенную А. Т. Фоменко на основе построенной им топологической теории интегрируемых систем.

2. Определение. Назовем гамильтониан H *нерезонансным* на данной изоэнергетической поверхности Q^3, если в Q^3 всюду плотны торы Лиувилля, на которых интегральные траектории системы v образуют плотную иррациональную обмотку.

3. Теорема (А. Т. Фоменко [285]). *Пусть v — гамильтонова система с нерезонансным гамильтонианом H, интегрируемая при помощи некоторого боттовского интеграла f на компактной неособой трехмерной изоэнергетической поверхности Q. Тогда можно однозначно построить некоторый граф $\Gamma(Q, f)$ со следующим свойством: по графу $\Gamma(Q, f)$ однозначно (с точностью до гомеоморфизма) восстанавливается вся топологичес-*

кая картина эволюции и перестроек (бифуркаций) торов Лиувилля внутри поверхности Q при изменении значения интеграла f.

4. Обозначения. Пусть f: $Q \to \mathbf{R}$ — боттовский интеграл, $\alpha \in \mathbf{R}$ и $f_\alpha \subset f^{-1}(\alpha)$ — связная компонента поверхности уровня интеграла (особая или неособая). Если $\alpha = a$ — регулярное (некритическое) значение f, то $f^{-1}(a)$ — это объединение конечного числа торов Лиувилля. Критические значения f обозначим буквой c, связную компоненту критической поверхности уровня интеграла — символом f_c, а множество критических точек интеграла f на f_c — символом N_c. Как доказано в [285], связные компоненты множества N_c могут быть только следующих типов: 1) минимаксная окружность S^1 (локальный минимум или максимум f), тогда $N_c = f_c = S^1$; 2) минимаксный тор T^2, тогда $N_c = f_c = T^2$; 3) седловая критическая окружность S^1 с ориентируемой сепаратрисной диаграммой, тогда $N_c = S^1 \neq f_c$; 4) седловая критическая окружность S^1 с неориентируемой сепаратрисной диаграммой, тогда $N_c = S^1 \neq f_c$; 5) минимаксная бутылка Клейна K^2, тогда $N_c = f_c = K^2$.

Символом $U(f_c)$, где c — критическое значение интеграла, обозначим регулярную связную замкнутую трубчатую окрестность компоненты f_c в многообразии Q^3. Можно считать, что $U(f_c)$ — связное трехмерное многообразие, край которого состоит из несвязного объединения торов. В качестве $U(f_c)$ можно взять связную компоненту многообразия $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Можно считать, что $Q = \sum\limits_c U(f_c)$, т. е. Q получается из всех многообразий $U(f_c)$ склейкой их границ по некоторым диффеоморфизмов граничных торов.

5. Теорема (А. Т. Фоменко). *Пусть Q — компактная неособая изоэнергетическая поверхность системы v с гамильтонианом H (не обязательно нерезонансным), интегрируемая при помощи некоторого боттовского интеграла f. Тогда многообразие $U(f_c)$, входящее в разложение $Q = \sum\limits_c U(f_c)$, допускает следующее представление (в зависимости от типа множества N_c):*

тип 1: $U(f_c) = P_c^2 \times S^1$, *где* $P_c^2 = D^2$ (*диск*);

тип 2: $U(f_c) = P_c^2 \times S^1$, *где* $P_c^2 = S^1 \times D^1$ (*цилиндр*);

тип 3: $U(f_c) = P_c^2 \times S^1$, *где* P_c^2 — *некоторая двумерная поверхность с краем*;

тип 4: $U(f_c) = P_c^2 \dot{\times} S^1$, *где* P_c^2 — *некоторая двумерная поверхность с краем, а* $P_c^2 \dot{\times} S^1$ — *пространство расслоения Зейферта с базой* P_c^2 *и слоем* S^1 (*описание см. ниже*);

тип 5: $U(f_c) = P_c^2 \tilde{\times} S^1$, *где* $P_c^2 = \mu$ (*лист Мёбиуса*), *а* $\mu \tilde{\times} S^1$ *обозначает косое произведение (с краем — тором* T^2*).*

6. Следствие. *С каждой изоэнергетической поверхностью Q (в условиях теоремы 5) можно однозначно (с точностью до гомеоморфизма) связать некоторую замкнутую двумерную поверхность $P^2(Q, f) = \sum_c P_c^2$, получающуюся склейкой поверхностей P_c^2, индуцируемой склейкой $Q = \sum_c U(f_c)$.*

7. Теорема (основная; А. Т. Фоменко [285]). *Пусть v — гамильтонова система, интегрируемая на Q при помощи боттовского интеграла. Тогда существует однозначное (с точностью до гомеоморфизма) каноническое вложение $h(Q, f)$ графа $\Gamma(Q, f)$ в поверхность $P^2(Q, f)$. Если гамильтониан H нерезонансный на Q, то тройка (Γ, P, h) не зависит от выбора второго интеграла f. А именно: если f и f' — любые боттовские интегралы системы v, то соответствующие графы $\Gamma(Q, f)$ и $\Gamma(Q, f')$, как и поверхности $P(Q, f)$ и $P(Q', f')$, гомеоморфны, а диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{h} & P \\ \wr\Vert & & \wr\Vert \\ \Gamma' & \xrightarrow{h'} & P' \end{array} \tag{806}$$

коммутативна.

8. Следствие. *В нерезонансном случае тройка (Γ, P, h) является топологическим инвариантом самого интегрируемого случая (гамильтониана) и позволяет классифицировать интегрируемые гамильтонианы по их топологическому типу и сложности.*

9. Определение. Тройку (Γ, P, h) назовем *топологическим инвариантом интегрируемого гамильтониана*. Разбиение поверхности $P(Q)$ на области (определяемое графом $\Gamma(Q)$) также является топологическим инвариантом. Поверхность $P(Q)$ не обязана вкладываться в Q. Теперь определим многообразие $P_c^2 \dot{\times} S^1$. *Расслоенным полноторием типа* (a, b) называется полноторие, полученное склейкой двух оснований полного цилиндра $D^2 \times D^1$ при помощи отображения $(z, 0) \to \left(\exp \frac{2\pi i b}{a}, 1\right)$, где $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$, a, $b \in \mathbf{Z}$, $(a, b) = 1$. Слоем является

$$\left\{(z, t); \left(\exp \frac{2\pi i b}{a} z, t\right), \left(\exp \frac{4\pi i b}{a} z, t\right), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \exp 2\pi i \frac{(a-1)b}{a}, 0 \leqslant t \leqslant 1\right\}. \tag{807}$$

Тогда на полнотории $D^2 \times S^1$ определяется расслоение со слоем S^1 над D^2, локально тривиальное для всех ненулевых точек диска D^2. Слой — окружность $\{(0, t) | 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ является особым, если $a > 1$.

Теперь рассмотрим многообразие P_c^2 с отмеченными на нем точками $x_1, \ldots, x_m$ и окружим их малыми дисками $D_1^2, \ldots, D_m^2$. Затем возьмем прямое произведение $P_c^2 \times S^1$ и выбросим из него m полноторий $D_i^2 \times S^1$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Вклеим вместо них расслоенные полнотория типа (2, 1). Полученное многообразие обозначим $P_c^2 \dot{\times} S^1$. Оно является расслоением Зейферта, а P_c^2 — его базой, см. [172].

10. Дадим явное построение инвариантов. Предположим сначала, что на каждой компоненте f_c критического уровня расположено *ровно одно* критическое связное многообразие N_c. В этом случае построение графа $\Gamma(Q, f)$ было фактически описано в § 58 (а также в [283]). Построим граф Γ *в общем случае*. Теперь на одной компоненте критического уровня может лежать *несколько* критических многообразий. В отличие от обычных функций Морса критические многообразия боттовского интеграла, лежащие на одном уровне, вообще говоря, нельзя «развести» на разные уровни путем малого возмущения интеграла (оставаясь в классе интегралов). Возмущение $\tilde{f}$ интеграла f может не быть интегралом. Пусть $f^{-1}(a)$ — поверхность уровня интеграла. Если a — регулярное значение, то $f^{-1}(a)$ — объединение конечного числа торов. Изобразим их точками в $\mathbf{R}^3$ на уровне a, где ось $\mathbf{R}$ направлена вверх. Меняя a в области регулярных значений, мы заставляем эти точки заметать некоторые дуги — часть ребер будущего графа Γ. Пусть N_c — множество критических точек f на f_c. Выделим два случая: а) $N_c = f_c$; б) $N_c \subset f_c$, причем $N_c \neq f_c$. В работе [285] найдены все возможные варианты для N_c. Рассмотрим случай а). Здесь возможны лишь три типа критических множеств.

11. Тип «минимаксная окружность». Здесь $N_c = f_c$ гомеоморфно окружности, на которой f достигает локального минимума или максимума. Ее трубчатая окрестность $S^1 \times D^2$ гомеоморфна полноторию (в Q^3). При $a \to c$ неособые торы стягиваются на ось полнотория и при $a = c$ вырождаются в S^1. Условно изобразим эту ситуацию черной жирной точкой (вершина графа), в которую входит (или из которой выходит) одно ребро графа (рис. 65).

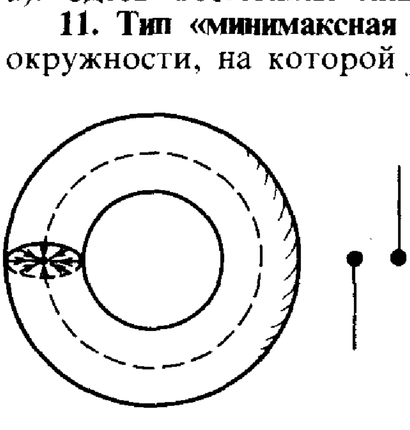


Рис. 65

12. Тип «тор». Здесь $N_c = f_c$ и гомеоморфно тору T^2, на котором f достигает локального минимума или максимума. Его трубчатая окрестность гомеоморфна цилиндру $T^2 \times D^1$. Граница цилиндра — два тора. При $a \to c$ они движутся навстречу друг другу и при $a=c$ сливаются в один тор. Изобразим эту ситуацию белым кружком (вершина графа), в который входят (или выходят) два ребра графа (рис. 66).

13. Тип «бутылка Клейна». Здесь $N_c=f_c$ и гомеоморфно бутылке Клейна K^2, на которой f достигает локального минимума или максимума. Ее трубчатая окрестность $K^2\tilde{\times}D^1$ гомеоморфна косому произведению K^2 на отрезок. Граница

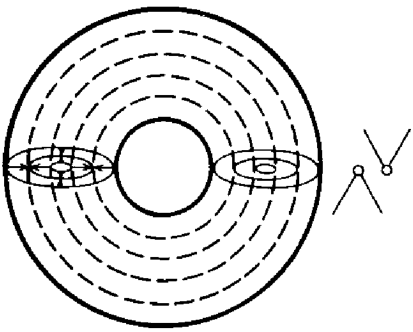


Рис. 66

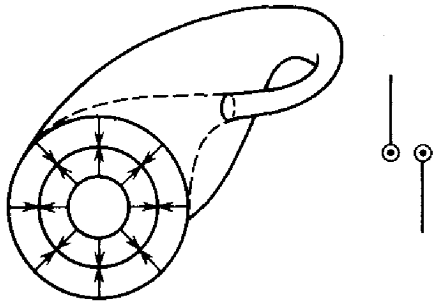


Рис. 67

$\partial(K^2\tilde{\times}D^1)$ — один тор. Когда $a\to c$, он сремится к K^2 и двулистно накрывает ее при $a=c$. Изобразим эту ситуацию белым кружочком с точкой внутри (вершина графа), в который входит (или выходит) одно ребро графа (рис. 67).

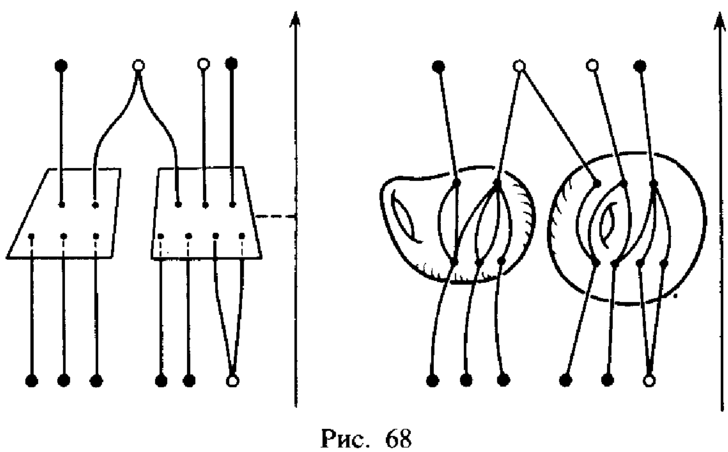


Рис. 68

14. Случай б). Здесь $N_c\subset f_c$, причем $\dim N_c=1$, а $\dim f_c=2$. Тогда (см. § 58 и [285]) N_c есть несвязное объединение непересекающихся окружностей. Каждая из них будет седловой для f. Компоненту f_c также назовем *седловой*. Условно ее можно изобразить плоским горизонтальным квадратом, лежащим на уровне c в $\mathbf{R}^3$ (рис. 68). Снизу в него втыкаются некоторые ребра графа (при $a\to c$ и $a<c$), вверх уходят другие ребра графа (когда $a>c$). В результате мы определили некоторый граф A, состоящий из регулярных дуг (ребер), часть из которых втыкается в квадраты, а часть заканчивается вершинами трех описанных типов.

15. Фиксируем седловое значение c и построим граф T_c, показывающий, как именно соединяются ребра графа A, взаимодействующие с f_c. Рассмотрим на Q векторное поле $w = \operatorname{grad} f$. Его траектории, входящие в критические точки интеграла или исходящие из них, называются *сепаратрисами*. Их объединение — это *сепаратрисная диаграмма* критического подмногообразия. Из каждой седловой критической окружности S^1 на уровне f_c выпустим ее сепаратрисную диаграмму. Если она ориентируема, то она получается склейкой двух плоских колец (цилиндров) по осевой окружности, см. § 58. Если она неориентируема, то она получается склейкой двух листов Мёбиуса по их осевой окружности. Рассмотрим некритические значения $c-\varepsilon$ и $c+\varepsilon$, близкие к c. Поверхности $f_{c-\varepsilon}$ и $f_{c+\varepsilon}$ состоят из торов (рис. 69). Сепаратрисные диаграммы критических окружностей, лежащих в f_c, пересекают эти торы трансверсально по некоторым окружностям и разбивают торы в объединение областей, которые мы назовем регулярными. Выберем на уровне $f_{c-\varepsilon}$ в каждой из них по точке и выпустим из этих точек интегральные траектории поля w. Они пройдут мимо критических окружностей на уровне f_c и попадут в некоторые другие регулярные области торов, составляющих $f_{c+\varepsilon}$. Очевидно, что тем самым мы получаем гомеоморфизм между открытыми регулярными областями из $f_{c-\varepsilon}$ и открытыми регулярными областями из $f_{c+\varepsilon}$.

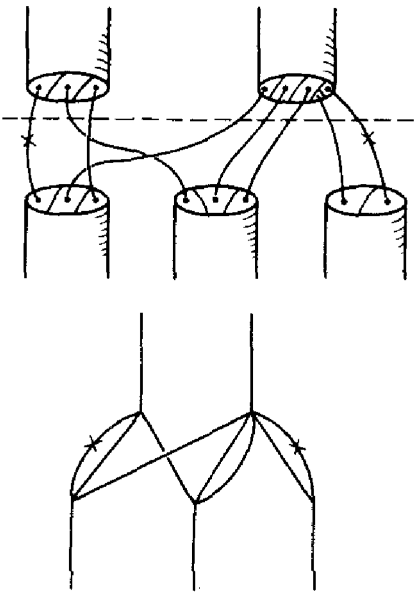


Рис. 69

16. Ориентируемый случай. Итак, предположим, что все сепаратрисные диаграммы ориентируемы (т. е. нет листов Мёбиуса). Поскольку каждый неособый тор — это точка на графе A, то можно соединить точки на уровне $f_{c-\varepsilon}$ и на уровне $f_{c+\varepsilon}$ дугами (отрезками), изображающими пучки интегральных траекторий поля w. Получим некоторый граф T_c. Его ребра показывают нам движение открытых регулярных областей торов. Торы разваливаются на куски, которые затем поднимаются (спускаются) и перегруппировываются в новые торы. Каждый верхний тор составлен из кусков нижних торов (и наоборот).

17. Неориентируемый случай. Итак, на f_c имеется хотя бы одна критическая окружность с неориентируемой диаграммой. На каждом торе, подходящем к f_c, отметим звездочкой регулярные области, инцидентные с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами (т. е. листами Мёбиуса). Следовательно, можно пометить звездочками и соответствующие ребра конструируемого графа. Итак, строим граф по схеме ориентируемого случая, после чего отмечаем звездочками те его ребра, которые изображают движение регулярных областей со звездочками. Полученный граф обозначим T_c (рис. 70). Ясно, что концы ребер графа T_c отождествляются с концами некоторых ребер графа A. Окончательно определим граф Γ как объединение (склейку) $\Gamma = A + \sum_c T_c$, где $\{c\}$ — критические седловые значения интеграла.

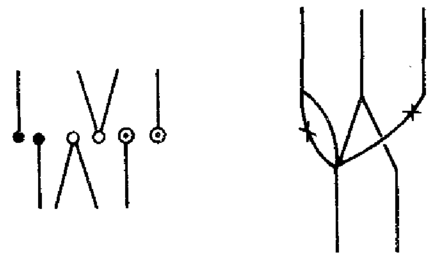


Рис. 70

18. Предложение. *Пусть f, f' — два любых боттовских интеграла. Тогда при гомеоморфизме $q(Q, f, f')$: $\Gamma(Q, f) \to \Gamma(Q, f')$ (см. теорему 7) седловые подграфы T_c для интеграла f гомеоморфно переходят в седловые подграфы T'_c для интеграла f'. Звездочки графа Γ переходят в звездочки графа Γ'. Вершины типов «минимаксная окружность» и «бутылка Клейна» графа Γ переходят в вершины того же типа (соответственно) на графе Γ'. Вершины типа «тор» графа Γ могут отобразиться в обычные внутренние точки ребер графа Γ'. Наоборот, обычные внутренние точки ребер графа Γ могут отобразиться в вершины типа «тор» на графе Γ'.*

19. Определение. Тройку $(\Gamma(Q), P(Q), h(Q))$ назовем *изоэнергетическим топологическим инвариантом* $I(H, Q)$ интегрируемого гамильтониана H на данной изоэнергетической поверхности Q. *Полным топологическим инвариантом* $I(H)$ назовем набор всех троек $\{\Gamma(Q), P(Q), h(Q)\}$ по всем Q. Гомеоморфные тройки считаем, конечно, эквивалентными. Полный инвариант $I(H)$ зависит уже *только от гамильтониана* H. Итак, если две интегрируемые системы имеют негомеоморфные топологические портреты, *то системы не эквивалентны*, между ними нельзя установить инварианты, траекторный изоморфизм. В то же время существуют заведомо не эквивалентные интегрируемые системы с одинаковыми топологическими инвариантами $I(H)$.

20. Конструкция. Построим поверхность $P(Q, f)$. Мы определим ее как объединение (склейку) вида $P(A) + \sum_c P(T_c)$, где $P(A)$ и $P(T_c)$ — двумерные поверхности с краем. Определим

$P(A)=(S^1\times \operatorname{Int} A)^{\cdot}+\Sigma D^2+\Sigma\mu+\Sigma S^1\times D^1$. Здесь $\operatorname{Int} A$ — объединение всех открытых ребер графа A. Следовательно, $S^1\times\operatorname{Int} A$ — это объединение открытых цилиндров. Многообразие $(S^1\times\operatorname{Int} A)^{\cdot}$ получается из него добавлением граничных окружностей. Пусть ребро графа A заканчивается в черной вершине. Тогда заклеим диском D^2 соответствующую ей граничную окружность на крае многообразия $(S^1\times\operatorname{Int} A)^{\cdot}$. Приклейку таких дисков мы обозначаем ΣD^2. Пусть два ребра графа A встретились в белой вершине. Она определяет две граничные окружности на $(S^1\times\operatorname{Int} A)^{\cdot}$, которые мы заклеим (соединим) цилиндром $S^1\times D^1$. Эту операцию мы обозначаем $\Sigma S^1\times D^1$. Пусть ребро графа A заканчивается белой вершиной с точкой внутри. Заклеим соответствующую ей граничную окружность на $(S^1\times\operatorname{Int} A)$ листом Мёбиуса μ. Эта операция обозначается $\Sigma\mu$. Итак, ΣD^2, $\Sigma S^1\times D^1$, $\Sigma\mu$ соответствуют минимаксным окружностям, торам и бутылкам Клейна. Теперь построим $P(T_c)=P_c$. Рассмотрим сначала ориентируемый случай, когда все критические седловые окружности на f_c имеют ориентированные сепаратрисные диаграммы. Как показал А. Т. Фоменко в [283], f_c гомеоморфно прямому произведению $K_c\times S^1$, где K_c — некоторый граф, получающийся из нескольких окружностей путем отождествления на них некоторых пар точек. Локально из каждой вершины графа K_c выходит ровно 4 ребра.

21. Предложение. *Комплекс f_c получается склейкой нескольких двумерных торов по окружностям, реализующим ненулевые циклы γ на торах. Если на одном торе расположено несколько таких окружностей, то они не пересекаются. Окружности, по которым касаются торы, входящие в состав f_c, являются критическими для f. Они гомологичны и разрезают f_c в объединение нескольких плоских колец.*

22. Итак, на f_c однозначно определен цикл γ. Выберем на каждом торе в f_c некоторую окружность — образующую α, дополнительную к γ (пересекающуюся с γ ровно в одной точке). Назовем ее *овалом*. Можно считать, что овалы касаются друг друга в точках, лежащих на критических окружностях интеграла. В ориентируемом случае объединение овалов дает граф K_c. Он не обязан быть плоским. Пусть x — точка касания двух овалов, т. е. критическая для f. Тогда отрезки интегральных траекторий поля w и линии уровня функции f определяют (на двумерном диске с центром в точке x, лежащем в Q и ортогональном критической окружности, на которой лежит точка x) около точки x «координатный крест», на каждом конце которого стоит стрелка, указывающая направление w. Построим такие нормальные двумерные кресты в каждой вершине графа K_c. Разные кресты соединены отрезками, являющимися частями овалов. Соединим теперь концы крестов узкими лентами, идущими вдоль дуг овалов. Эти ленты состоят из отрезков интегральных траекторий поля w, ортогонально пересекающих овалы (вне критических точек). Дуги овалов идут по оси этих лент. В результате получаем гладкую двумерную поверхность с краем. Знаком «—» отметим граничные окружности, соответствующие торам, подошедшим к f_c снизу. Знаком «+» отметим граничные окружности, соответствующие торам, подходящим к f_c сверху. Полученную поверхность обозначим $P(T_c)=P_c$. Ее граничные окружности разбиты на два класса: нижние (отрицательные) и верхние (положительные). Граф K_c однозначно (с точностью до гомеоморфизма поверхности) вложен в P_c^2.

Построим теперь P_c^2 в неориентируемом случае. Схема рассуждения в основном сохраняется. Пусть сначала для простоты на f_c лежит ровно одна критическая окружность с неориентируемой диаграммой. Тогда f_c имеет вид, показанный на рис. 71. Следовательно, каждый овал α, лежащий на таком f_c, должен быть удвоен. Любая другая критическая окружность с ориентируемой диаграммой, лежащая на этом f_c, встречает два экземпляра цикла α в двух точках. Это заставляет нас удваивать циклы α и на тех торах, которые касаются друг друга вдоль окружностей с ориентируемыми диаграммами, но входят в состав связного f_c, содержащего окружность с неориентируемой диаграммой. Количество окружностей с неориентируемыми диаграммами на связном f_c не влияет на процесс удвоения, т. е. удвоить циклы нужно лишь один раз. Дальнейшие построения повторяют ориентируемый случай. В результате получаем поверхность $\tilde{P}_c$. Отличие лишь в том, что теперь каждая граничная окружность поверхности $\tilde{P}_c$ (т. е. соответствующая одному тору) встречается ровно в двух экземплярах (удвоена).

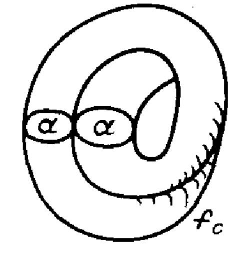


Рис. 71

Теперь построим поверхность $P(T_c)$. Из построения $\tilde{P}_c$ видно, что на ней корректно определено гладкое действие группы $\mathbf{Z}_2$ (инволюция σ). При этом $\sigma(x)=x$ в том и только том случае, когда точка x принадлежит критической окружности с неориентируемой сепаратрисной диаграммой. Обозначим такие точки $x_1, \ldots, x_m$, а соответствующие им окружности $S_1, \ldots, S_m$. Рассмотрим факторпространства $P_c=\tilde{P}_c/\mathbf{Z}_2$. Ясно, что $P_c=P(T_c)$ является двумерным многообразием с краем. Теперь каждая его граничная окружность отвечает ровно одному тору Лиувилля (верхнему или нижнему). Легко видеть, что $x_1, \ldots, x_m$ являются внутренними точками на поверхности P_c. Отметим их звездочками. В частном случае, когда f_c имеет вид, показанный на рис. 71 (т. е. $m=1$), поверхность P_c является двумерным цилиндром с одной звездочкой. Теперь мы можем построить всю поверхность $P(Q, f)$.

Ясно, что существует взаимно однозначное соответствие между граничными окружностями поверхности $P(A)$ и граничными окружностями объединения поверхностей P_c. Это соответствие задается ребрами графа A. Отождествив соответствующие окружности при помощи некоторых гомеоморфизмов, однозначно получаем двумерную поверхность $P(Q, f)$ (ориентируемую или неориентируемую). Очевидно, что замена склеивающих гомеоморфизмов другими индуцирует лишь гомеоморфизм поверхности на себя. На $P(Q, f)$ однозначно (с точностью до гомеоморфизма поверхности) расположен некоторый, вообще говоря, несвязный граф, который мы обозначим $K(Q, f)$. Рассмотрим окружности, рассекающие пополам цилиндры, входящие в состав поверхности $S^1 \times \operatorname{Int} A$. Можно считать, что каждая из них имеет вид $S^1 \times p$, где p — середина соответствующего ребра графа A. Теперь определим граф K как несвязное объединение всех графов K_c и окружностей вида $S^1 \times p$. Граф K имеет лишь вершины кратности 4. Построение поверхности $P(Q, f)$ полностью завершено.

23. Предложение [285]. *Если f, f' — любые боттовские интегралы на Q, то $P(Q, f)$ гомеоморфно $P(Q, f')$ (в нерезонансном случае).*

24. Обозначение. Обозначим K^* граф, сопряженный графу K в поверхности $P(Q, f)$. Его вершины — это центры q областей, на которые граф K разбивает P, а ребра — это дуги, соединяющие вершины через середины ребер графа K.

25. Предложение (см. [285]). *Граф $\Gamma(Q, f)$ совпадает с графом $K^*(Q, f)$. Следовательно, граф $\Gamma(Q, f)$ допускает вложение $h(Q, f)$: $\Gamma(Q, f) \to P(Q, f)$, однозначно (с точностью до гомеоморфизма поверхности) определяемое исходной интегрируемой нерезонансной системой. Граф K разбивает поверхность P на области, гомеоморфные либо диску, либо плоскому кольцу, либо листу Мёбиуса.*

26. Определение. С каждой интегрируемой гамильтоновой системой естественно связано целое число, которое называется *родом системы*, — это род поверхности $P(Q)$.

27. Доказательство предложения 18. Пусть f и f' — два боттовских интеграла на Q. В силу нерезонансности гамильтониана H каждый неособый тор с иррациональной обмоткой одновременно является компонентой поверхности уровня для каждого из интегралов, поскольку интегралы постоянны на траекториях системы v и, следовательно, постоянны на замыкании каждой траектории. Каждый неособый тор с рациональной обмоткой аппроксимируется сколь угодно близко неособыми торами с иррациональной обмоткой. Следовательно, он тоже является компонентой поверхности уровня для каждого из интегралов.

Рассмотрим поля $w = \operatorname{grad} f$ и $w' = \operatorname{grad} f'$. Они определяют одно и то же одномерное слоение поверхности Q на интегральные траектории, ортогональные (в какой-либо метрике) всем неособым поверхностям уровня, т. е. торам. Скорость движения по траекториям (определяемым полями w и w') может быть различной и может обращаться в нуль сразу на всем торе для одного из полей (в то время как другое поле ненулевое). Поскольку особые компоненты уровня аппроксимируются неособыми торами (при их движении вдоль w и w'), то особые компоненты связности поверхности уровня для f, отличные от тора, совпадают с аналогичными компонентами для f'. Если же поверхность уровня была критическим тором для f, то она может стать некритической для f' (и наоборот). Однако каждая особая компонента для f является особой компонентой и для f' (и наоборот). Торы образуют одномерное семейство в окрестности каждого неособого тора. Локально, рассматривая операции $f \to f^2 = f'$ или $f \to \sqrt{f} = f'$, мы можем превратить некритический тор в критический и наоборот. Все другие функциональные операции, локально сохраняющие боттовость, сводятся к этим двум, так как гладкая морсовская функция на одномерном многообразии может иметь лишь квадратичные особенности. С геометрической точки зрения операция $f \to f^2$ отвечает перегибанию ребра графа и появлению на нем локального минимума или максимума. Операция $f \to \sqrt{f}$ отвечает распрямлению ребра графа и уничтожению локального минимакса.

Построим гомеоморфизм графа Γ на граф Γ'. Чтобы определить его на подграфе A, достаточно рассматривать каждый неособый тор для интеграла f как тор для интеграла f' (особый или неособый). Это отображение продолжается и на подграфы вида T_c, так как одномерные слоения поверхности Q, порожденные w и w', совпадают всюду, кроме, быть может, некоторых критических или некритических торов (где скорость движения вдоль w или w' обращается в нуль). Как следствие, отметим, что полные поверхности уровня интегралов f и f' (содержащие одну и ту же компоненту связности) могут состоять из разного числа связных компонент. При этом значения f и f' могут быть различны на одной и той же компоненте связности. Предложение доказано.

28. Доказательство предложения 21 можно найти в [283], [286].

29. Доказательство предложения 23. Рассмотрим подробнее процесс построения поверхности P. Ограничимся пока ориентируемым случаем. Комплекс f_c получается склейкой нескольких экземпляров торов $T_1, \ldots, T_N$ по циклам, гомологичным циклу γ на f_c (см. выше). Пусть $S_1, \ldots, S_p$ — критические окружности на f_c. Выберем на каждой из них по точке $q_1, \ldots, q_p$. Рассмотрим какое-нибудь из плоских колец γ, на которые f_c разрезается окружностями S_i. Тогда на каждой из его граничных окружностей лежит ровно по одной точке вида q_α. Пусть это точки q_α и q_β. Соединим их гладкой дугой $\tau_{\alpha\beta}$, целиком лежащей внутри кольца. Эта дуга строится, конечно, неоднозначно, но на окончательный результат это не влияет. Самонепересекающуюся дугу $\tau_{\alpha\beta}$ можно было бы связать с интегралом f. Для этого нужно рассмотреть поле $\operatorname{sgrad} f$ на кольце γ. Это поле может обращаться в нуль только на границе кольца. Можно было бы выпустить из точки q_α короткий отрезок, идущий внутрь кольца, затем из его конца выпустить интегральную траекторию поля $\operatorname{sgrad} f$ и двигаться по ней, пока не приблизимся достаточно близко к противоположной границе кольца, на которой расположена точка q_β. Затем свернем с интегральной траектории и проведем короткий отрезок в точку q_β.

Повторим процесс построения гладкой дуги в следующем кольце, начиная с точки q_β, и т. д., пока не исчерпаем все кольца, входящие в состав f_c. В результате получим систему окружностей — овалов. Каждая из них составлена из дуг вида $\tau_{\alpha\beta}$. Рассмотрим во всех внутренних точках дуги $\tau_{\alpha\beta}$ нормальный отрезок вдоль интегральных траекторий поля $\operatorname{grad} f$. Концы полученной ленты определяются координатными крестами точек q_α и q_β. Заменяя дугу $\tau_{\alpha\beta}$ дугой $\tau'_{\alpha\beta}$, лежащей в γ и соединяющей q_α и q_β, получаем поверхность, гомеоморфную предыдущей. Замена f на f' приводит к гомеоморфизму P и может существенно повлиять на вид вложения P_c в Q.

30. Доказательство предложения 25 следует из конструкции, изложенной выше. Граф K_c состоит из дуг вида $\tau_{\alpha\beta}$. Каждая из них определяет свое кольцо вида γ на f_c.

31. Доказательство теоремы 5 следует из [283], а также из явной конструкции P_c, описанной выше. Остановимся подробнее на случае $P_c \times S^1$. Пусть $U(f_c)=\{x\in Q \mid c-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant c+\varepsilon\}$ — регулярная окрестность f_c, причем f_c содержит критические окружности $S_1, \ldots, S_m$ с неориентируемыми диаграммами. Пусть $U(S_i)$ — малая трубчатая окрестность S_i (полноторие) в $U(f_c)$. Тогда $U(f_c)\setminus(U(S_1)\cup\ldots\cup U(S_m))$ гомеоморфно прямому произведению $(P_c\setminus(x_1\cup\ldots\cup x_m))\times S^1$, при этом каждое полноторие $U(S_i)$ является расслоенным полноторием типа $(2, 1)$.

В серии важных работ М. П. Харламова была детально исследована топология отображения моментов некоторых случаев интегрируемости классических механических систем. Этой информации оказалось достаточно для того, чтобы сразу выписать значения топологического изоэнергетического инварианта $I(H, Q)$ для этих случаев интегрируемости. Однако следующий шаг — вычисление окончательного, меченого инварианта $I(H, Q)^*$ — потребовал привлечения новых идей другого характера, что и было сделано А. В. Болсиновым, А. А. Ошемковым и А. Т. Фоменко [208], [209]. Дело в том, что вычисление рациональных и целочисленных параметров, окончательно классифицирующих интегрируемые системы, требует специального (и нетривиального) исследования «функций склейки» элементарных «блоков», определяющих слоение изоэнергетического многообразия на торы Лиувилля.

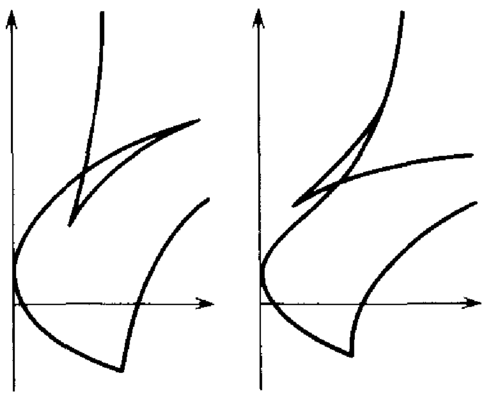


Рис. 72

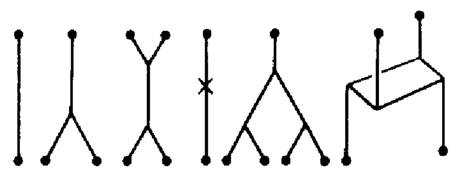


Рис. 73

32. Пример. Рассмотрим случай Ковалевской, см. п. 14 § 5. На рис. 72 приведена бифуркационная диаграмма $\Sigma \subset \mathbf{R}^2$ (вычисленная М. П. Харламовым), а на рис. 73 — полный список всех графов $\Gamma(Q)$, встречающихся в случае Ковалевской.

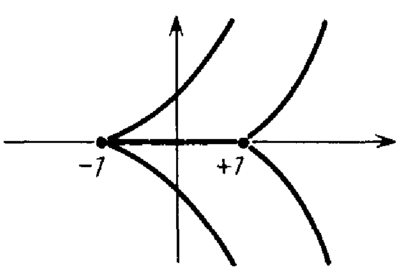


Рис. 74

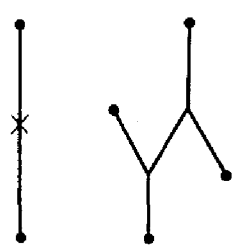


Рис. 75

33. Пример. *Случай Горячева — Чаплыгина.* Бифуркационная диаграмма показана на рис. 74, а полный список графов $\Gamma(Q)$ — на рис. 75.

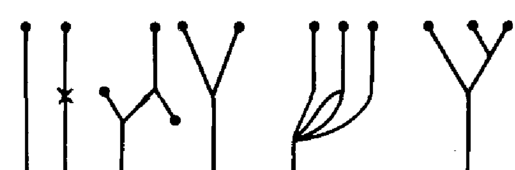


Рис. 76

34. Пример. *Гиростат.* Полный список графов $\Gamma(Q)$ приведен на рис. 76.

35. Пример. *Четырехмерное твердое тело.* Полный список графов $\Gamma(Q)$ приведен на рис. 77, а бифуркационная диаграмма на рис. 78.

36. Дальнейшие примерения инварианта $I(H, Q)$ были выполнены А. Т. Фоменко и Х. Цишангом. В частности, они

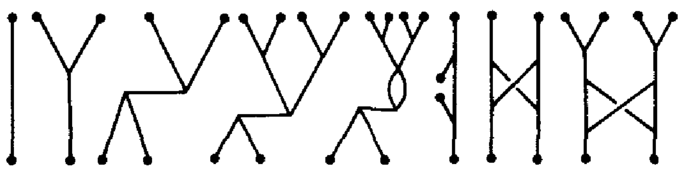


Рис. 77.

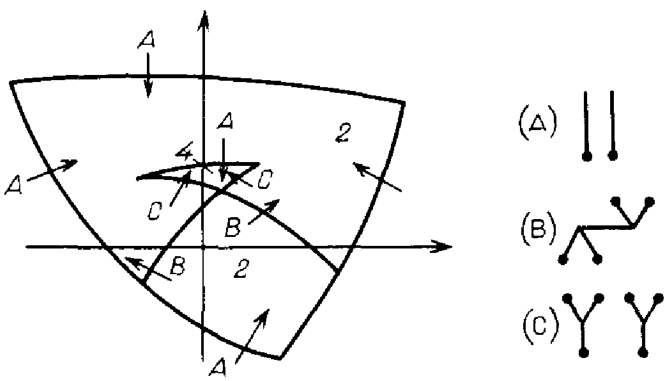


Рис. 78. Цифрами обозначено число торов Лиувилля в $F^{-1}(\nu)$

получили полную классификацию всех стабильно эквивалентных интегрируемых боттовских гамильтоновых систем (на достаточно сложных и неприводимых изоэнергетических 3-многообразиях).

37. Резюме. Подведем промежуточные итоги. Интегрируемая система называется боттовской, если она имеет боттовский интеграл. В работах А. Т. Фоменко построена теория типа Морса для боттовских интегралов на изоэнергетических 3-поверхностях. В частности, получена структурная теорема, дающая топологическое описание изоэнергетических многообразий Q интегрируемых боттовских систем. Оказалось, что Q допускает представление вида $m\mathrm{I}+p\mathrm{II}+q\mathrm{III}+s\mathrm{IV}+r\mathrm{V}$, т. е. представляется как склейка некоторого числа экземпляров *элементарных* 3-*многообразий* типов I, II, III, IV, V. Наряду с этим (гамильтоновым) разложением есть более «грубое» (топологическое) разложение $Q=m'\mathrm{I}+q'\mathrm{III}$, где числа m' и q' являются линейными комбинациями чисел m, p, q, s, r.

Как доказали затем С. В. Матвеев и А. Т. Фоменко, условие боттовости интеграла f можно *существенно ослабить*, заменив его условием, чтобы f был всего лишь «ручным» интегралом.

Однако, поскольку подавляющее большинство исследованных классических интегралов, известных в механике и математической физике, являются боттовскими (это выяснено в работах А. А. Ошемкова, А. Т. Фоменко, А. В. Болсинова, Л. С. Поляковой, К. Шваи, см. [207]—[209], [283]—[286], [296]), мы будем считать, что все рассматриваемые в настоящей книге интегралы боттовские, см. также [509].

Интеграл f задает отображение $f\colon Q\to\mathbf{R}$. Символом $a\in\mathbf{R}$ обозначим *регулярное значение* отображения f, а символом $c\in\mathbf{R}$ — *сингулярные* (*критические*) *значения*. Тогда полный прообраз $f^{-1}(a)$ каждого регулярного значения a состоит из несвязного объединения торов Лиувилля. Обозначим $f^{-1}(c)$ критический уровень интеграла f. Пусть f_s обозначает связную компоненту критического уровня $f^{-1}(c)$. Индексом s будем пользоваться также для разных уровней c, т. е. индекс s перечисляет все связные компоненты всех критических уровней функции f.

Класс замкнутых трехмерных ориентируемых многообразий, допускающих представление вида $m'\mathrm{I}+q'\mathrm{III}$, обозначим (Q). Пусть (H) — класс всех трехмерных изоэнергетических замкнутых поверхностей гамильтоновых систем, интегрируемых при помощи боттовских интегралов. Согласно [283] имеем $(H)\subset(Q)$. Затем в работах А. В. Браилова, С. В. Матвеева, А. Т. Фоменко и Х. Цишанга [283], [54], [287], [288] было доказано, что класс $(H)=(Q)$ совпадает также с классом (S) 3-многообразий и с классом (W) граф-многообразий. Далее, А. Т. Фоменко и Х. Цишанг [287], [288] изучили топологические свойства многообразий класса $(H)=(W)$, в частности, получили оценки числа устойчивых периодических решений интегрируемых боттовских гамильтоновых систем. Связь класса $(H)=(W)$ с классом (R) 3-многообразий, допускающих круглую функцию Морса, изучена А. Т. Фоменко и В. В. Шарко [289]. Затем неожиданные и глубокие связи класса $(H)=(W)$ с теорией трехмерных замкнутых гиперболических многообразий обнаружены С. В. Матвеевым и А. Т. Фоменко в [171].

38. Напомним, что гамильтониан H называется *нерезонансным* на изоэнергетической поверхности Q, если в Q всюду плотны торы Лиувилля, на которых интегральные траектории системы v образуют плотную иррациональную обмотку, см. [352], [285]. Опыт изучения конкретных интегрируемых систем математической физики [285], [207], [131], [208] показывает, что на M^4 гамильтонианы в большинстве случаев нерезонансны на почти всех поверхностях Q^3. Важные геометрические свойства интегрируемых систем см. в работах О. И. Богоявленского [37], В. В. Козлова [131]. О резонансности и нерезонансности многомерных систем в связи с некоммутативной интегрируемостью см. работу В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко [270].

Следуя [352], [285], назовем две интегрируемые гамильтоновы системы v_1 и v_2, заданные на многообразиях Q_1 и Q_2 соответственно, *топологически* (или *геометрически*) *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $d: Q_1 \to Q_2$, переводящий торы Лиувилля системы v_1 в торы Лиувилля системы v_2. В частности, в нерезонансном случае, этот диффеоморфизм переводит друг в друга критические поверхности уровня интеграла f_1 и критические поверхности уровня интеграла f_2, см. [285] (не путать с траекторной эквивалентностью!).

39. В [352], [285] А. Т. Фоменко обнаружил новый топологический инвариант $I(H, Q)$ интегрируемых нерезонансных боттовских гамильтоновых систем (названный *изоэнергетическим топологическим инвариантом*). Он представляет собой граф Γ, вложенный в замкнутую двумерную поверхность P^2. Инвариант не зависит от выбора боттовского интеграла f и полностью определяется самим гамильтонианом H. Как доказано в [285], *если две нерезонансные системы v_1 и v_2 имеют различные* (*т. е. не гомеоморфные*) *инварианты, то системы топологически не эквивалентны*. В [285] введен также *полный инвариант* $I(H)$, не зависящий от конкретного выбора поверхности Q. Наряду с графом Γ на поверхности P определен другой граф K такой, что $K^* = \Gamma$. Здесь K^* — это граф, сопряженный к графу K (см. [285], а также ниже). Удобно иногда вместо пары (P^2, Γ) рассматривать пару (P^2, K). Она также однозначно определяет изоэнергетический инвариант $I(H, Q)$.

В [285] отмечено, что, снабдив инвариант $I(H, Q)$ некоторыми числовыми метками, т. е. рассмотрев «*меченый*» *инвариант* $I(H, Q)^*$, можно получить критерий топологической эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем. *Эта программа, намеченная в работе* [285], *полностью реализована Фоменко и Цишангом*. Сейчас мы дадим точное определение «меченого» инварианта $I(H, Q)^*$, укажем оптимальные числовые метки, превращающие $I(H, Q)$ в $I(H, Q)^*$. Мы будем говорить, что меченые изоэнергетические топологические инварианты $I(H_1, Q_1)^*$ и $I(H_2, Q_2)^*$ гомеоморфны (или равны), если существует гомеоморфизм, переводящий поверхность P_1^2 в поверхность P_2^2, граф Γ_1 в граф Γ_2 и сохраняющий все числовые метки.

40. Теорема (Фоменко, Цишанг). Критерий эквивалентности интегрируемых систем. *Пусть даны два трехмерных замкнутых ориентируемых изоэнергетических многообразия Q_1^3 и Q_2^3, и пусть v_1, v_2 — интегрируемые* (*при помощи боттовских интегралов*) *нерезонансные гамильтоновы системы на них.* а) *Если соответствующие им меченые инварианты $I(H_1, Q_1)^*$ и $I(H_2, Q_2)^*$ не гомеоморфны* (*различны*), *то системы v_1 и v_3 топологически не эквивалентны. При этом многообразия*

Q_1^3 и Q_2^3 могут быть гомеоморфны. б) *Обратно, пусть меченые инварианты двух интегрируемых систем v_1 и v_2 гомеоморфны (равны). Тогда:* 1) *многообразия Q_1^3 и Q_2^3 гомеоморфны;* 2) *системы v_1 и v_2 топологически эквивалентны.*

Эта теорема позволяет приступить к топологической классификации всех интегрируемых боттовских гамильтоновых систем.

41. Следствие. *Пусть на одном и том же изоэнергетическом многообразии Q^3 заданы две интегрируемые нерезонансные боттовские гамильтоновы системы v_1 и v_2 с одинаковыми мечеными инвариантами $I(H_1, Q)^*$ и $I(H_2, Q)$. Тогда системы v_1 и v_2 топологически эквивалентны.*

В действительности можно описать множество всех значений, которые принимает меченый инвариант $I(H, Q)^*$ для всевозможных интегрируемых боттовских систем. Тогда из теоремы 40 мы получим, что инвариант $I(H, Q)$ классифицирует интегрируемые системы и можно предъявить «список» всех возможных интегрируемых боттовских систем.

42. В работе [41] А. В. Болсинова, С. В. Матвеева и А. Т. Фоменко была полностью завершена топологическая классификация интегрируемых (боттовских) гамильтоновых систем (с двумя степенями свободы). Эффективно и алгоритмически описано все множество допустимых значений, которые может принимать инвариант $I(H, Q)^*$, доказано, что каждое из этих допустимых значений реализуется на некоторой интегрируемой системе. Это позволило построить дискретную таблицу всех интегрируемых систем (указанного типа), рассматриваемых с точностью до топологической эквивалентности. Обнаружен простой способ кодирования интегрируемых систем, при котором каждая такая система записывается в виде некой «химической молекулы», составленной из атомов, список которых также алгоритмически предъявлен. Оказалось далее, что можно ввести естественное понятие сложности интегрируемой системы и, следовательно, упорядочить все системы в порядке возрастания их сложности. Затем при помощи компьютера были перечислены все интегрируемые системы «малой сложности», т. е. системы, сложность которых не превосходит некоторого фиксированного (не очень большого) числа. Наконец, были вычислены значения инварианта для многих классических интегрируемых систем, т. е. найдены соответствующие им «химические формулы». В результате на таблице всех возможных интегрируемых систем обозначилась «физическая зона», заполненная системами, уже обнаруженными в физике и механике. Это позволяет представить то место, которое занимают «физические интегрируемые системы» среди множества всех мыслимых (формально существующих и полностью перечисленных в указанной таблице) интегрируемых систем.

§ 60. Построение меченого инварианта интегрируемых систем

1. Пусть Q^3 — замкнутое изоэнергетическое многообразие (оно автоматически ориентируемо) и f — боттовский интеграл. Следуя [285], рассмотрим регулярную связную ε-окрестность связной компоненты f_s критического уровня. Обозначим эту окрестность $U(f_s)$. Она является гладким 3-многообразием, компактным, связным, край которого состоит из некоторого числа неособых торов Лиувилля. Будем считать, что $U(f_s)$ заключено между уровнями $f^{-1}(c-\varepsilon)$ и $f^{-1}(c+\varepsilon)$. Напомним, что индекс c нумерует критические значения интеграла f, а индекс s — связные компоненты всех критических уровней $f^{-1}(c)$. В дальнейшем мы предполагаем (не повторяя этого каждый раз), что система v *нерезонансна* на Q. Многообразие Q разлагается в объединение конечного числа 3-многообразий с торическими краями. Обозначая для краткости $U(f_s)$ символом Q_s, получим $Q=\sum\limits_s Q_s$. Здесь сумма (объединение) берется фактически по всем критическим значениям c (индекс s пробегает все компоненты всех критических уровней). Это разложение Q в сумму «кусков» Q_s *однозначно* определено (в нерезонансном случае) гамильтоновой системой v, т. е. не зависит от выбора боттовского интеграла f на Q, см. [285]. (Не путать это разложение с гамильтоновым!)

2. Однозначно определено расслоение π_s: $Q_s \to P_s$, базой которого является двумерная связная поверхность P_s с краем. Край состоит из конечного числа гладких окружностей, которые обозначим $S^1_{s,i}$. Слоем расслоения π_s является окружность. Подробнее об определении слоев (и об их однозначности) см. ниже. Над каждой граничной окружностью $S^1_{s,i}$ однозначно определен тор Лиувилля $T^2_{s,i}=\pi_s^{-1}(S^1_{s,i})$, являющийся одной из компонент края многообразия Q_s. Поскольку Q склеено из кусков Q_s, то для каждого граничного тора $T^2_{s,i}$ определен некоторый диффеоморфизм на другой граничный тор, определяемый разложением $Q=\sum Q_s$. Следовательно (см. [285]), однозначно определяется взаимно однозначное соответствие между граничными окружностями кусков P_s. Склеивая соответствующие окружности, получаем замкнутую поверхность P^2. На ней однозначно (с точностью до изотопии) определяется конечная система окружностей K_r, являющихся результатом склейки граничных окружностей $S^1_{s,i}$ и $S^1_{s',i'}$ кусков P_s и $P_{s'}$. Окружности типа K_r не пересекаются. Они образуют граф, который мы обозначим $\{K_r\}$.

3. З а м е ч а н и е. Мы будем употреблять термин «разрезать поверхность». Он означает следующее. Поверхность P склеена из кусков P_s. Граничные окружности кусков отождествляются диффеоморфизмами, которые мы считаем фиксированными.

Операция разреза обратна склейке. Мы не используем трубчатые окрестности окружностей для определения разреза (как это обычно делается).

Упростим обозначения. Склеивая окружности $S^1_{s,i}$ и $S^1_{s',i'}$ (при склейке кусков P_s и $P_{s'}$), мы получаем окружность типа K_r в графе K. Заменим пару индексов (s, i) в обозначении $S^1_{s,i}$ на один индекс. Для этого будем считать, что, разрезав P по окружности K_r, мы получаем две окружности (два берега разреза): K_r на куске P_s и $K_{r'}$ на куске $P_{s'}$. Вместо $S^1_{s,i}$ будем писать K_r, а вместо $S^1_{s',i'}$ напишем $K_{r'}$.

4. Нам потребуется подробное описание поверхности P, построенной в [285]. Напомним о связи P_s с многообразиями $Q_s = U(f_s)$. Многообразия Q_s разбиваются на пять типов в соответствии с разбиением поверхностей P_s на пять типов. Многообразия Q_s типов I, II, III имеют вид прямого произведения $P^2_s \times S^1$, где P^2_s — связная двумерная поверхность с краем. Поверхность P^2_s типа I — это диск D^2, поверхность P^2_s типа II — это кольцо $S^1 \times D^1$, поверхность P^2_s типа III является поверхностью с краем такой, что ее одномерная группа гомологий не имеет кручения и ранг не менее двух. Многообразие Q_s типа IV имеет вид $P^2_s \dot{\times} S^1$ (расслоение Зейферта с базой P^2_s и слоем S^1), причем P^2_s является поверхностью (типа IV) с краем, и одномерная группа гомологий P^2_s не имеет кручения, и ее ранг не менее двух. Многообразие Q_s типа V имеет вид $P^2_s \tilde{\times} S^1$ (косое произведение). Здесь P^2_s типа V — это лист Мёбиуса μ.

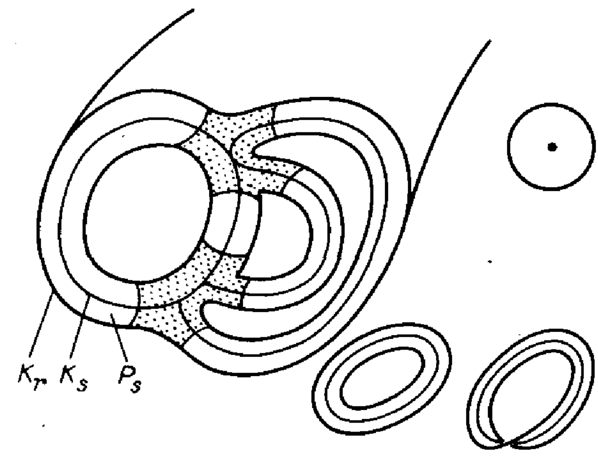


Рис. 79

Поверхности P_s типов I, II, V отвечают минимальным и максимальным (локально) значениям интеграла. Тип I отвечает критической окружности, тип II — критическому тору, тип V — критической бутылке Клейна. Поверхности P_s типов III и IV отвечают седловым значениям интеграла. Каждая из поверхностей P_s содержит связный граф, который мы обозначим K_s. Его можно понимать как «пересечение» P_s (нормальной к поверхности $f^{-1}(c)$) с поверхностью $f^{-1}(c)$. Граф K_s изображен на рис. 79.

Тип I: K_s является точкой в центре диска $P^2_s = D^2$. *Тип* II: K_s является осевой окружностью кольца $P^2_s = S^1 \times D^1$. *Тип* III:

K_s является графом, получающимся попарным касанием гладких окружностей в числе, не меньшем двух. Каждая пара таких окружностей либо не пересекается, либо касается в одной или нескольких точках. В каждой точке касания могут касаться лишь две окружности. На рис. 79 точки касания отмечены черными точками. Граф K_s (как и поверхность P_s) связен и отвечает критическим седловым окружностям интеграла f, имеющим лишь ориентируемые сепаратрисные диаграммы. Точки касания окружностей графа K_s (эти окружности мы называем *овалами*) соответствуют критическим седловым окружностям на поверхности уровня $f^{-1}(c)$. Итак, граф K_s составлен из овалов, и каждая его вершина имеет кратность 4 (локально из нее выходят ровно 4 ребра графа). Овалы, составляющие граф K_s, выделим и зафиксируем в каком-либо порядке. Условие касания в одной точке лишь двух овалов следует из боттовости интеграла f, см. [285]. *Тип* IV: граф K_s аналогичен графу типа III, однако среди критических седловых окружностей есть по крайней мере одна с неориентируемой сепаратрисной диаграммой. Как доказано в [285], это влечет за собой появление группы $\mathbf{Z}_2$, действующей на нормальном сечении к уровню $f^{-1}(c)$. Факторизуя по этому действию, мы получим поверхность P_s, в которой лежит граф K_s, составляющий «половину» первоначального набора овалов на уровне $f^{-1}(c)$. В случае IV на графе K_s выделены звездочки, отвечающие неподвижным точкам действия группы $\mathbf{Z}_2$. Они соответствуют критическим седловым окружностям с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами. Тип V: K_s является осевой окружностью листа Мёбиуса $P_s=\mu$, см. рис. 79.

5. Предложение (см. [285]). *Связная поверхность P_s (типов* I—V*) является трубчатой окрестностью вложенного в нее графа K_s. Более того, определена (с точностью до изотопии) ретракция P_s на граф K_s. Многообразие $P_s \setminus K_s$ гомеоморфно прямому произведению полуинтервала на некоторое множество непересекающихся окружностей. Это множество гомеоморфно границе поверхности P_s и состоит из окружностей вида K_r. В случаях* I—IV *поверхность P_s ориентируема, в случае* V *неориентируема.*

Ретракция P_s на K_s осуществляется вдоль интегральных траекторий поля $\operatorname{grad} f$ (для этого на Q задается риманова метрика). Поверхность P_s не обязана быть плоской. В случаях III и IV каждая вершина графа K_s окружена на P_s «координатным крестом», задающим структуру морсовской особенности интеграла f по нормали к критической окружности. Эти кресты соединены тонкими лентами, образованными отрезками интегральных траекторий поля $\operatorname{grad} f$, ортогональных овалам, составляющим K_s, см. [285].

6. Итак, если на Q задана интегрируемая система, то она однозначно (с точностью до изотопии) определяет слоение (с особенностями) поверхности P на окружности. На графах K_s типов III и IV однозначно определена система образующих — овалов. Их объединение дает граф K_s. Овалы могут лишь касаться друг друга. Рассматривая «нижние» торы Лиувилля, лежащие на близком уровне $c-\varepsilon$, и пронумеровав их, переносим эту нумерацию на образующие — овалы графа K_s. Если же фиксировать «верхние» торы Лиувилля, лежащие на близком уровне $c+\varepsilon$, можно получить другие образующие графа K_s. «Нижняя» система образующих превращается в «верхнюю», если мы перенесем критический уровень c, двигаясь от уровня $c-\varepsilon$ к уровню $c+\varepsilon$. Договоримся рассматривать «нижнюю» систему образующих.

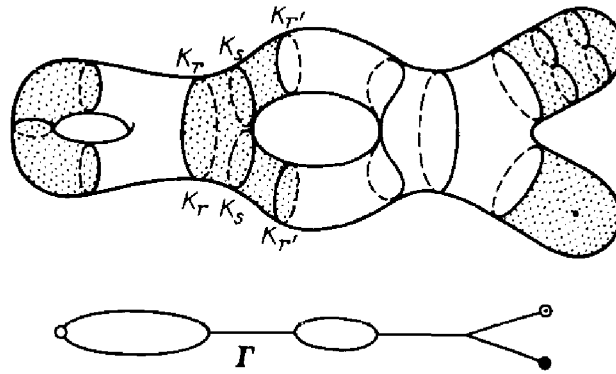


Рис. 80

Граф K, введенный в [285], представляется как объединение $K=\{K_r\}+\{K_s\}$ или $K=\sum\limits_r K_r+\sum K_s$. Каждая компонента вида K_r или K_s связна. Компоненты K_r являются окружностями, по которым склеены поверхности P_s (рис. 80). Разрезав поверхность P по всем окружностям K_r, получаем набор связных поверхностей P_s. Каждая из них содержит ровно одну связную компоненту графа вида K_s.

7. Предложение (см. [283], [285]). *В случаях* I, II, III *имеем* $Q_s=P_s\times S^1$. *При этом* $Q_s\cap f^{-1}(c)=K_s\times S^1$. *В случае* IV *имеем* $Q_s=P_s\dot{\times} S^1$. *При этом* $Q_s\cap f^{-1}(c)=K_s\dot{\times} S^1$. *В случае* V *имеем* $Q_s=P_s\tilde{\times} S^1$, *причем* $Q_s\cap f^{-1}(c)=\mu\tilde{\times} S^1$ (*бутылка Клейна*).

8. Представление многообразий типов I (полноторие), II (цилиндр $T^2\times D^1$) и V (косое произведение бутылки Клейна на отрезок) в виде расслоения (со слоем окружность) *неоднозначно*. Неоднозначность не устраняется с привлечением данных об интегральных траекториях системы. Напротив, многообразия Q_s типов III и IV *однозначно* (с точностью до изотопии) представляются соответственно как прямое произведение $P_s\times S^1$ и как расслоение Зейферта $P_s\dot{\times} S^1$. Согласно [283] критические подмногообразия интеграла f в случаях I, II, V таковы: окружность, тор, бутылка Клейна (соответственно). Поэтому слой окружность может наматываться вокруг «оси» много раз, что влияет на представление Q_s в виде произведения. А именно, чтобы совместить два таких представления, нужно применить некоторый диффеоморфизм (рис. 81). Он и задает неоднозначность выбора слоев. В случаях III и IV на поверхности $f^{-1}(c)$ *однозначно выделена система критических окружностей интеграла* (являющихся периодическими седловыми решениями системы). Как доказано в [283], они разрезают

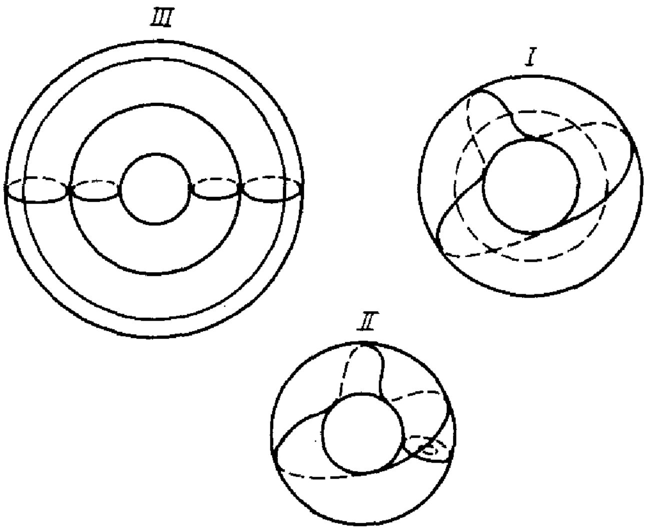


Рис. 81

уровень $f^{-1}(c)$ (его связные компоненты имеют вид $K_s \dot{\times} S^1$ в случае III и $K_s \times S^1$ в случае IV) в набор колец. Следовательно, каждое из колец однозначно (с точностью до изотопии) расслаивается на окружности, параллельные границе кольца (рис. 81). В частности, во всех случаях I—V многообразие $Q_s \setminus f^{-1}(c)$ однозначно расслаивается на торы Лиувилля. Это расслоение, пересекаясь с нормальной поверхностью P_s, однозначно высекает на нем слоение на окружности.

9. Напомним построение графа Г, входящего в изоэнергетический топологический инвариант, см. [285]. Рассмотрим разбиение P в объединение областей P_s, определяемое окружностями K_r. Построим граф K^*, сопряженный к графу K. Для этого в каждой области P_s выберем точку, объявим ее вершиной нового графа и соединим эти вершины ребрами, проходящими через середины ребер графа K, по которым инцидентны области P_s.

10. Напомним (см. [285]), *что граф K^* совпадает с графом Г, описывающим эволюцию и бифуркации торов Лиувилля при фиксированном значении энергии H и переменном значении второго интеграла f.*

Итак, мы получаем объект, состоящий из: 1) замкнутой двумерной поверхности P^2 (ориентируемой или неориентируемой); 2) графа $K=\sum_r K_r+\sum_s K_s$, вложенного в P^2 (граф K^*

совпадает с Г). Этот объект и является изоэнергетическим топологическим инвариантом $I(H, Q)$, обнаруженным А. Т. Фоменко.

11. Модифицируем граф K. Рассмотрим все Q_s типа II, т. е. цилиндры $T^2 \times D^1$. Им отвечают на P^2 двумерные цилиндры $P_s = S^1 \times D^1$. Внутри Q_s лежит критический тор T^2 (отвечающий белой вершине графа Г, см. [283], [285]). «Внизу», на P, этому тору отвечает окружность K_s (осевая окружность цилиндра P_s). Редуцируем граф K следующим образом. Стянем в Q каждое многообразие Q_s типа II на его критический тор. Затем «внизу», на P, стянем соответствующее кольцо на его осевую окружность K_s (типа II). Итак, мы убираем из разложения Q (в сумму элементарных кирпичей) все цилиндры $T^2 \times D^1$ (тип II) и убираем из разложения P (в сумму кусков P_s) все кольца типа II. На языке графа Г происходит следующее: белая вершина на нем исчезает и заменяется обычной точкой ребра (рис. 82). Напри-

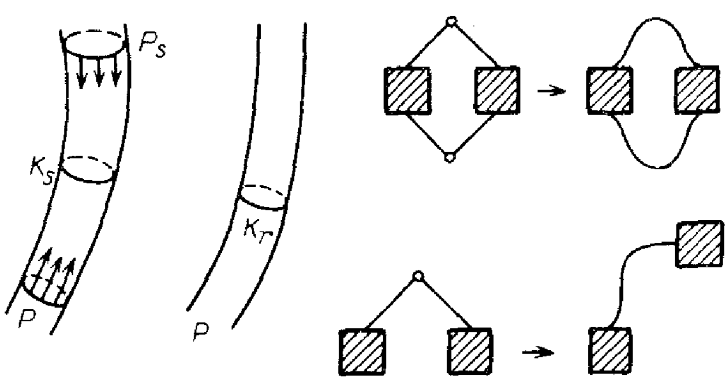


Рис. 82

мер, иногда можно считать, что мы распрямляем ребро графа, в результате чего критический тор становится некритическим. Эта процедура может изменить интеграл, но не меняет слоения Q на торы (в нерезонансном случае). Поскольку нас интересует топологическая эквивалентность систем, то описанная операция приводит нас к системе, топологически эквивалентной исходной. *Итак, на графе* Г *мы можем* «вытереть» *все белые вершины, заменив их обычными точками ребер графа.* При стягивании кольца по поверхности P мы получаем окружность. Естественно обозначить ее символом K_r, так как теперь она является границей двух соседних областей типа P_s. Пояснение: две пары прежних окружностей типа K_r и одна окружность типа K_s слились в одну окружность, которую мы обозначим K_r. Выполним эту операцию со всеми двумерными цилиндрами на P. Получаем новое разбиение поверхности и новый граф. Граф мы по-прежнему обозначим буквой K, чтобы не вводить новые обозначения, но будем говорить о нем как о *редуцированном* *графе* K. Точно так же мы сохраним прежние обозначения и для многообразий Q_s, но будем говорить о *редуцированных многообразиях. В дальнейшем считаем, что все наши объекты редуцированы.*

Описанная редукция нужна для корректного решения проблемы классификации интегрируемых систем. Дело в том, что соответствующим образом изменяя интеграл f (например, извлекая из него квадратный корень, как описано в [285]), мы, с одной стороны, получаем систему, топологически эквивалентную исходной, а с другой стороны, уничтожаем на графе Γ белую вершину. Соответственно на графе K нужно отождествить две окружности типа K_r с одной окружностью типа K_s. Как доказано в [285], единственными допустимыми (локальными) операциями над боттовским интегралом являются возведение его в квадрат или извлечение из него квадратного корня. Как мы покажем ниже, редуцированный граф K и редуцированная поверхность P уже позволяют (после нанесения числовых меток) различать неэквивалентные системы.

Перейдем к построению *меченого изоэнергетического топологического инварианта,* который обозначим $I(H, Q)^*$ и для краткости назовем *меченым инвариантом* (Фоменко, Цишанг).

12. Начнем с рассмотрения *ориентируемого* случая. Пусть: 1) редуцированная поверхность P ориентируема (фиксируем эту ориентацию); 2) боттовский интеграл f также ориентируем. Напомним, что ориентируемость интеграла означает ориентируемость всех его критических многообразий. При этом сепаратрисные диаграммы некоторых критических многообразий могут быть неориентируемы. Интеграл ориентируем в том и только том случае, когда в разложении Q на кирпичи нет многообразий типа V. Общий случай (т. е. когда P и интеграл f могут быть неориентируемыми) лишь технически сложнее. Общая схема рассуждений останется той же, как и в ориентируемом случае. Более того, в [283] доказано, что если на Q задан ориентируемый интеграл f, то, переходя к двулистному накрытию $\tilde{Q}$, мы получаем на $\tilde{Q}$ ориентированный интеграл $\tilde{f}$. *Следовательно, рассматривая изоэнергетические поверхности с точностью до двулистного накрытия, можно считать интеграл ориентируемым.*

После редукции ориентированной поверхности P она склеивается лишь из кусков следующих трех типов: *тип* I — диск D^2 с границей K_r и центральной точкой K_s; *тип* III — более сложная поверхность P_s (отвечающая окружностям с ориентированными диаграммами); *тип* IV — также более сложная поверхность P_s (отвечающая окружностям, среди которых есть по крайней мере одна с неориентируемой диаграммой).

13. Поскольку P предположена ориентируемой, то фиксируем индуцированную ориентацию на каждом куске P_s. Фиксируем ориентацию на каждой граничной окружности $S^1_{s,i}$ так, чтобы она была согласована с ориентацией P_s. Пусть склеены два куска P_s и $P_{s'}$. Выделим какую-нибудь пару склеиваемых окружностей $K_r = S^1_{s,i}$ и $K_{r'} = S^1_{s',i'}$. Рассмотрим многообразие Q_s, расслоенное над базой P_s со слоем S^1. Пусть каким-либо образом заданы и фиксированы эти расслоения. Для типов III и IV эта процедура однозначна, для типа I — нет. Поскольку на Q_s задана ориентация и на базе P_s также фиксирована ориентация, то однозначно определяется ориентация на слое — окружности. Фиксируем ориентацию слоя на каждом Q_s. Рассмотрим над каждой окружностью K_r граничный тор Лиувилля $T^2_r = \pi_s^{-1}(K_r)$, расслоенный над K_r со слоем S^1. Из предыдущего следует, что можно однозначно задать ориентацию на торе. Более того, можно считать, что на торе фиксирован базис из двух циклов — меридиана и параллели. Параллель отвечает слою проекции π_s, а меридиан отвечает, например, окружности K_r.

14. Замечание. Рассмотрим Q_s типов I, III, IV. Они содержат критические окружности интеграла f (периодические решения системы v). Поскольку система задана на всем Q, то она однозначно определяет ориентацию на всех своих решениях. В случаях I, III, IV эти решения (окружности) являются слоями расслоений π_s. Но в общем случае мы не будем пользоваться этой ориентацией, так как для Q_s типов II и V нет выделенных критических окружностей. Здесь критические многообразия — тор и бутылка Клейна. Рассмотрим расслоения π_s: $Q_s \to P_s$ и $\pi_{s'}$: $Q_{s'} \to P_{s'}$. Пусть P_s и $P_{s'}$ — поверхности типов III или IV (независимо друг от друга). В частности, P_s и $P_{s'}$ отличны от диска. Прообразы окружностей K_r и $K_{r'}$, т. е. торы $\pi_s^{-1}(K_r)$ и $\pi_{s'}^{-1}(K_{r'})$, обозначим T^2_r и $T^2_{r'}$. В каждом из них *однозначно* (с точностью до изотопии) определены слои расслоения, т. е. окружности $S^1_r = \pi_s^{-1}(x_r)$ и $S^1_{r'} = \pi_{s'}^{-1}(x_{r'})$, где x_r и $x_{r'}$ — некоторые точки на K_r и $K_{r'}$ соответственно (рис. 83).

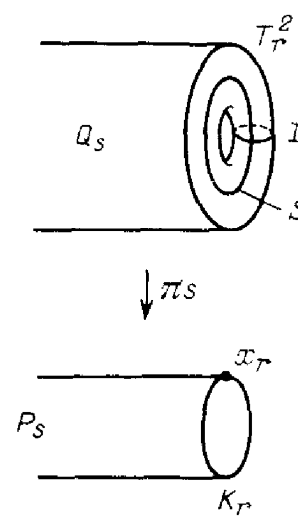


Рис. 83

15. Введем удобную систему координат на торах T^2_r и $T^2_{r'}$. Окружности S^1_r и $S^1_{r'}$ — образующие на торах T^2_r и $T^2_{r'}$ соответственно. Дополним образующую S^1_r на торе трансверсальной окружностью D^1_r, а образующую $S^1_{r'}$ — трансверсальной окружностью $D^1{}_{r'}$. Пары окружностей (S^1_r, D^1_r) и $(S^1_{r'}, D^1_{r'})$ дают, очевидно, системы координат на T^2_r и $T^2_{r'}$. Отображения π_s и $\pi_{s'}$ определяют расслоение торов T^2_r и $T^2_{r'}$ на окружности (однозначно для типов III и IV). Ясно, что D^1_r и $D^1_{r'}$ являются сечениями этих расслоений на торах T^2_r и $T^2_{r'}$. Выбор сечений D^1_r и $D^1_{r'}$ *неоднозначен*, однако этот произвол не повлияет на наши окончательные конструкции.

Поскольку P склеена из кусков P_s, следовательно, торы T^2_r и $T^2_{r'}$ склеиваются «наверху» (т. е. внутри Q) некоторым диффеоморфизмом λ. Он задается структурой Q и системой v. Учитывая введенную систему координат на торах, мы однозначно получаем две целочисленные матрицы

$$M_{rr'}=\begin{Vmatrix}\alpha(r,r') & \beta(r,r')\\ \gamma(r,r') & \delta(r,r')\end{Vmatrix},\quad M_{r'r}=\begin{Vmatrix}\alpha(r',r) & \beta(r',r)\\ \gamma(r',r) & \delta(r',r)\end{Vmatrix}. \tag{808}$$

Матрица $M_{rr'}$ записывает диффеоморфизм $T^2_r\to T^2_{r'}$, а матрица $M_{r'r}$ — диффеоморфизм $T^2_{r'}\to T^2_r$. Можно считать, что обе матрицы имеют определитель, равный -1. Этого можно добиться выбором ориентаций на базисных окружностях торов. Эти матрицы связаны соотношением $M_{rr'}M_{r'r}=\mathrm{id}$, т. е. они взаимно обратны. Для дальнейшего особую роль играет первая строка матрицы $M_{rr'}$ (или $M_{r'r}$), т. е. пара целых чисел $\alpha(r,r')$, $\beta(r,r')$. Будем обозначать эту пару (α,β), если нет опасений перепутать матрицы $M_{rr'}$ и $M_{r'r}$. Числа α и β можно считать взаимно простыми, причем $0\leqslant\alpha<|\beta|$, если $\beta\neq0$.

16. Выделим среди окружностей K_r те, для которых пара чисел (α,β) имеет вид $(\pm1,0)$. Эти окружности однозначно выделяются из множества всех окружностей K_r. Для наглядности будем говорить (и изображать на рисунках), что такие окружности K_r нарисованы *тонкими линиями*. Остальные окружности K_r (т. е. те, для которых $(\alpha,\beta)\neq(\pm1,0)$, изобразим *толстыми линиями*. Итак, граф $\{K_r\}$ разбивается в объединение тонких и толстых окружностей.

На каждой толстой окружности поставим рациональное число α/β (здесь мы считаем, что $0\leqslant\alpha<|\beta|$). Мы пользуемся тем, что $\beta\neq0$.

17. Пусть теперь хотя бы одна из двух граничащих по K_r областей P_s и $P_{s'}$ гомеоморфна диску. Возможны два случая: 1) обе области P_s и $P_{s'}$ гомеоморфны диску; 2) лишь одна из них гомеоморфна диску, а другая имеет тип III или IV. Пусть в случае 2) область P_s гомеоморфна диску.

Компонента графа K_s состоит в данном случае из одной вершины — центра диска (граница диска — окружность K_r). Наша цель — построить здесь для K_r аналог рациональной дроби α/β. Построение усложняется тем, что над диском $P_s=D^2$ не определено однозначно расслоение на окружности π_s: $Q_s\to P_s$. Предположим сначала, что область $P_s=D^2$ граничит (по K_r) с областью $P_{s'}$ типа III или IV. На языке графа Γ это означает, что единственное ребро, выходящее из черной вершины, приходит в седловую вершину (компоненту графа Γ). Как мы покажем ниже, эта ситуация является типичной. В этом случае выбор системы координат на торе $T_r^2 = \pi_s^{-1}(K_r)$ осуществляется так. Поскольку тор T_r^2 одновременно является одним из граничных торов $T_{r'}^2$ многообразия $Q_{s'} = \pi_{s'}^{-1}(P_{s'})$, то на торе $T_{r'}^2$, отождествленном с тором T_r^2 при помощи некоторого фиксированного диффеоморфизма, уже ранее нами построено слоение на окружности — слои — и выбрано сечение. Эти слоение и сечение можно перенести на тор T_r^2. Итак, мы вводим на торе T_r^2 координаты, которые берем «от соседа», т. е. многообразия $Q_{s'}$. Эта операция определена однозначно. Рассмотрим на полнотории Q_s меридиан, однозначно задаваемый следующим условием. Он определяется (с точностью до изотопии и ориентации) как простая кривая, лежащая на граничном торе полнотория и стягиваемая внутри полнотория, но не стягиваемая на торе. Разложим этот меридиан по базису, только что введенному нами на торе T_r^2 (слой и сечение от соседа). В результате получаем два числа p и q — коэффициенты разложения меридиана по базису. Их отношение p/q мы и сопоставим окружности K_r. Эта дробь — аналог дроби α/β.

18. Когда применима конструкция п. 17, т. е. когда можно считать, что область P_s типа I граничит с областью $P_{s'}$ типа III или IV?

19. Лемма. *Рассмотрим ориентированный редуцированный случай. Тогда на связной поверхности P каждая область P_s типа* I *всегда граничит с областью типа* III *или типа* IV, *за исключением того единственного случая, когда граф* Г *имеет вид, показанный на рис.* 84, *а, т. е. когда Q получается склейкой двух полноторий по некоторому диффеоморфизму граничных торов.*

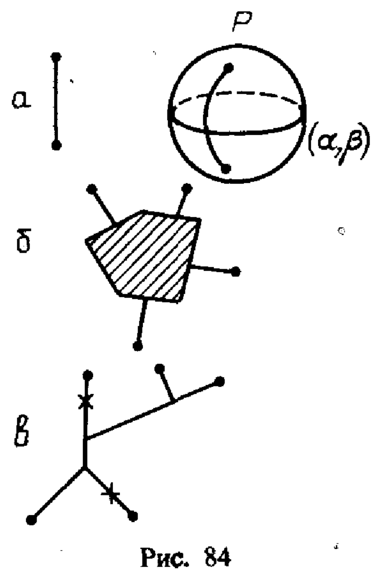


Рис. 84

Доказательство. В силу условий леммы в составе P нет областей типов II и V. Рассмотрим два случая: 1) граф Г содержит ровно две вершины; 2) граф Г содержит более двух вершин. В случае 1) вид графа Г см. на рис. 84,*а* (две черные вершины, соединенные ребром). В случае 2) граф Г показан на рис. 84,*б* — все его вершины черные, и каждое ребро, исходящее из черной вершины, втыкается в какое-то седло (ориентированное или неориентированное). Конкретный пример такого графа см. на рис. 84,*в*. Лемма доказана.

20. Итак, конструкция п. 17 применима во всех случаях, кроме одного, а именно, когда Q есть склейка двух полноторий (рис. 84,*а*). Легко видеть, что инвариант $I(H, Q)$ в случае 1) имеет вид, показанный на рис. 84, *а*, т. е. является сферой, разрезанной пополам экватором. Здесь $Q=Q_1+Q_2$, $P=P_1+P_2$, имеется ровно одна окружность K_r (экватор), ровно две компоненты графа K_s, а именно — два центра дисков. Этот случай прост, и его можно рассмотреть отдельно. Для классификации всех систем с таким простым значением инварианта $I(H, Q)$ можно ввести системы координат на каждом полнотории, повторить описанные конструкции, построить (α, β) и т. д. Теперь мы основное внимание уделим случаю 2).

21. Поскольку мы предположили ориентируемость редуцированной поверхности P и ориентируемость интеграла f, то каждая область P_s гомеоморфна либо диску (тип I), либо кольцу $S^1 \times D^1$ (тип II), либо ориентируемой поверхности типа III или типа IV. *Рассмотрим все толстые окружности K_r и разрежем по ним поверхность P. Получим набор областей, часть из них совпадают с прежними P_s, а часть являются объединением нескольких прежних областей P_s.* Назовем новые области «большими» и обозначим их R_b, где индекс b пробегает некоторое конечное множество целых чисел. Граница каждой области R_b состоит из окружностей K_r (толстых). Все прежние тонкие окружности K_r лежат строго внутри областей R_b. Над каждой областью R_b мы получаем расслоение со слоем окружность. Пространство расслоения Q_b либо совпадает с некоторым Q_s, либо является объединением нескольких таких многообразий Q_s. Граница Q_b состоит из торов Лиувилля. На каждом из них определено сечение расслоения, задаваемое окружностью D_r^1 (рис. 83). Следовательно, на границе Q_b задано сечение расслоения $Q_b \xrightarrow{S^1} R_b$. *Поэтому однозначно определен целочисленный инвариант — препятствие к продолжению этого сечения внутрь Q_b.* Обозначим этот числовой инвариант ε_b.

Итак, мы имеем следующий объект, состоящий из: 1) замкнутой ориентируемой поверхности P^2; 2) графа $K=\{K_r\}+\{K_s\}$, причем некоторые окружности K_r нарисованы тонкими линиями, а некоторые толстыми; 3) на каждой толстой окружности K_r поставлена числовая метка — пара взаимно простых чисел (α, β), $1 \leqslant \alpha < |\beta|$ (эта пара отлична от $(\pm 1, 0)$); 4) поверхность P представлена как объединение областей R_b, получающихся разрезанием P по всем толстым окружностям K_r, при этом каждой области R_b, отличной от диска, приписано некоторое целое число ε_b; 5) элемент $\sigma \in H^1(\Gamma;\ \mathbf{Z}_2)$.

Тонким окружностям K_r мы числовые метки не приписываем (лишь из методических соображений им можно было бы приписать $(\pm 1, 0)$).

Далее, каждой области R_b сопоставим новое рациональное число $\mu_b = \varepsilon_b - \sum\limits_r \alpha/\beta$. Сумма берется по всем толстым окружностям K_r, составляющим границу R_b. Индекс r в обозначении чисел α/β опущен, так как мы помним, что числа α/β зависят от окружности K_r.

22. Подведем итоги. Мы получили следующий объект. 1) Замкнутая ориентируемая поверхность P^2, разбитая в объединение областей R_b, границами которых являются толстые окружности K_r. 2) Редуцированный граф $K=\{K_r\}+\{K_s\}$ на поверхности P, причем некоторые окружности K_r нарисованы тонкими линиями, а некоторые толстыми. Все тонкие окружности K_r лежат внутри областей R_b. 3) Каждая толстая окружность K_r снабжена рациональным числом α/β, где $1\leqslant\alpha<|\beta|$. Вместо предыдущего можно просто писать $\frac{\alpha}{\beta}\bmod 1$. При этом предполагается, что области R_b, граничащие по K_r, не являются дисками. Если же хотя бы одна из областей R_b, граничащих по K_r, является диском, то сопоставляем окружности K_r число p/q (см. выше). 4) Каждой области R_b, отличной от диска, сопоставлено рациональное число $\mu_b=\varepsilon_b-\sum\limits_r\alpha/\beta$. 5) Задан $\sigma\in H^1(\Gamma,\ \mathbf{Z}_2)$.

23. Объект $I(H,\,Q)^*=(P^2=\sum R_b;\ \{K_r\};\{\alpha/\beta,\ p/q\};\ \{\mu_\beta\})$ назовем *меченым изоэнергетическим топологическим инвариантом* интегрируемой боттовской системы v на многообразии Q. Скажем, что значения инвариантов $I(H,\,Q)^*$ и $I(H',\,Q')^*$ для двух систем v и v' равны, если существует гомеоморфизм φ: $P\to P'$, переводящий граф Γ в граф Γ', граф K в граф K', области R_b в области $R'_{b'}$, числовые метки α/β в числовые метки α'/β' и числа μ_b в числа $\mu'_{b'}$. (Здесь мы имеем в виду, что $\alpha/\beta\equiv\alpha'/\beta'$ и $\mu_b\equiv\mu'_{b'}$.) В противном случае скажем, что значения инвариантов $I(H,\,Q)^*$ и $I(H',\,Q')^*$ для систем v и v' различны.

24. Дополнительные комментарии. С точки зрения меченого инварианта становятся нагляднее результаты работы [285]. Рассмотрим два случая: а) боттовский интеграл f на Q^3 таков, что каждая связная компонента каждого критического уровня f содержит ровно одно критическое подмногообразие; б) общий случай, когда таких подмногообразий может быть несколько. В случае а) все бифуркации торов Лиувилля являются элементарными и, следовательно, совпадают с какой-либо из перестроек 1—5, указанных в [282], [283]. В случае б) любая бифуркация торов является композицией этих элементарных перестроек. Такое разложение перестроек в композицию элементарных неоднозначно. Нужно возмутить интеграл f, получить близкую функцию f^* (вообще говоря, не являющуюся интегралом), описывающую (согласно алгоритму работы [283]) искомое разложение. При возмущении функции f многообразие Q^3 не меняется. Другой подход состоит в рассмотрении (в окрестности компоненты критического уровня) графа K_s. Семейство «нижних» торов, пересекая критический уровень, трансформируется в семейство «верхних» торов в-точном соответствии с геометрией графа K_s. В этом смысле все возможные боттовские перестройки торов Лиувилля классифицируются графами K_s, структура которых описана в [285] и получила дополнительное объяснение в рамках изложенной конструкции. Отметим очень интересные и важные компьютерные эксперименты по численному интегрированию гамильтоновых систем, описанные в работе Ченела и Сковела [329]. Многие из результатов работы [329] получают новое объяснение на языке графа K.

§ 61. Классификация перестроек торов Лиувилля на многомерных симплектических многообразиях в окрестности бифуркационной диаграммы отображения моментов

1. В настоящем параграфе мы даем классификацию элементарных перестроек общего положения торов Лиувилля, возникающих в тот момент, когда тор пересекает критический уровень интеграла энергии. Оказывается, все перестройки общего положения распадаются в композицию некоторых канонических (элементарных) перестроек пяти типов и эти последние явно описываются и имеют простую геометрическую природу. При этом мы, в частности, развиваем некоторые идеи, высказанные С. Смейлом в работе [235].

2. Определения. Пусть $v = \operatorname{sgrad} H$ — гамильтонова система на симплектическом многообразии M^{2n}. Пусть система v интегрируема, т. е. существуют n независимых (почти всюду) гладких интегралов $f_1, \ldots, f_n$, находящихся в инволюции. Будем считать, что $f_1 = H$. Пусть F: $M^{2n} \to \mathbf{R}^n$ — соответствующее этим интегралам отображение моментов, т. е. $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbf{R}^n$. Напомним, что точка $x \in M$ называется *регулярной* для отображения F, если ранг дифференциала $dF(x)$ равен n, т. е. отображение $dF(x)$: $T_xM \to \mathbf{R}^n = T_{F(x)}\mathbf{R}^n$ является эпиморфизмом. В противном случае точка x называется *критической*, а ее образ $F(x)$ — *критическим значением*.

Пусть $N \subset M$ — множество всех критических точек отображения моментов. Ясно, что оно замкнуто. Пусть $\Sigma = F(N)$ — множество всех критических значений. Оно называется *бифуркационной диаграммой (бифуркационным множеством)*. Поскольку отображение F гладко, то $\dim \Sigma \leqslant n-1$. Если точка $x \in \mathbf{R}^n$ не является критическим значением, т. е. $x \in \mathbf{R}^n \setminus \Sigma$, то ее полный прообраз $B_a = F^{-1}(a) \subset M$ (т. е. неособый слой) не содержит критических точек отображения F. В силу теоремы Лиувилля каждая его компактная связная компонента диффеоморфна тору Лиувилля T^n. Предположим пока для простоты, что весь слой B_a компактен (рис. 85). Из полученных ниже результатов легко будут следовать соответствующие утверждения и для некомпактных слоев, т. е. для «цилиндров». Если $a \in \Sigma$, то совместная поверхность уровня (т. е. слой) B_a является особой (критической) и $\dim B_a \leqslant n$.

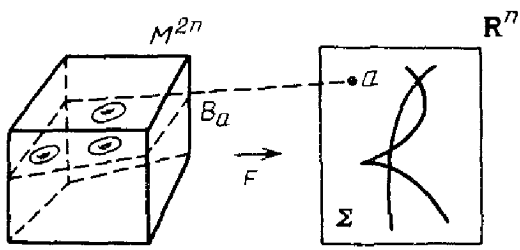


Рис. 85

3. Постановка задачи. При деформации точки a в $\mathbf{R}^n$ ее прообраз, т. е. слой B_a, как-то деформируется. До тех пор, пока точка a, двигаясь по $\mathbf{R}^n$, не встречается с бифуркационной диаграммой Σ, слой B_a преобразуется посредством диффеоморфизмов, т. е. не претерпевает качественных топологических перестроек. В частности, любые два слоя B_a и B_b, где точки a и b могут быть соединены гладкой кривой $\gamma \subset \mathbf{R}^n / \Sigma$ (т. е. не содержащей ни одного критического значения отображения моментов), диффеоморфны, состоят из одного и того же числа торов Лиувилля.

Если же непрерывная кривая γ встречает в какой-то точке бифуркационную диаграмму Σ, то слои B_a и B_b могут быть топологически различными. Если точка a при своем движении протыкает Σ, то слой B_a подвергается, вообще говоря, качественному топологическому преобразованию, перестройке (рис. 86).

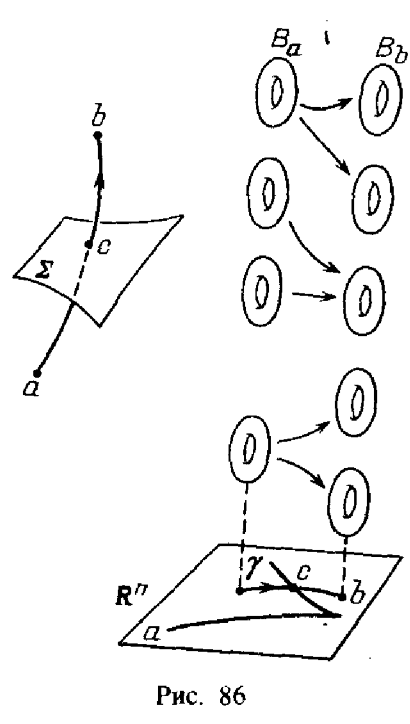


Рис. 86

Сформулируем общую задачу: описать топологические перестройки торов Лиувилля, возникающие в тот момент, когда точка a пересекает бифуркационную диаграмму Σ.

4. Замечание. При классификации перестроек естественно выделить два случая: 1) $\dim \Sigma < n-1$; 2) $\dim \Sigma = n-1$. В случае 1) диаграмма Σ не разделяет $\mathbf{R}^n$, т. е. любые две точки a, $b \in \mathbf{R}^n$ соединяются гладкой кривой $\gamma \subset \mathbf{R}^n \setminus \Sigma$. Следовательно, компактные неособые слои диффеоморфны между собой, в частности, состоят из одного и того же числа торов Лиувилля. Существенно более сложным является случай 2). Здесь диаграмма Σ, вообще говоря, разбивает $\mathbf{R}^n$ на несколько открытых непересекающихся областей. В каждой из них топология неособого слоя (например, количество торов Лиувилля), вообще говоря, своя. Она может меняться от области к области.

Итак, пусть $\dim\Sigma=n-1$. Рассмотрим точку $c\in\Sigma$ и изучим перестройки торов Лиувилля, когда гладкая кривая γ (след движения точки a) протыкает диаграмму Σ в точке c. При этом достаточно рассматривать лишь малую окрестность $U=U(c)$ точки c в $\mathbf{R}^n$.

5. Общее положение. Мы изучим случай общего положения, т. е. когда путь γ трансверсально протыкает Σ с ненулевой скоростью в точке c, лежащей на $(n-1)$-мерном страте (листе) диаграммы Σ. Другими словами, будем предполагать, что $U\cap\Sigma$ является гладким $(n-1)$-мерным подмногообразием в $\mathbf{R}^n$. В случае общего положения можно считать, что множество $N\cap F^{-1}(U)$ критических точек является объединением конечного числа гладких подмногообразий в M, стратифицированных рангом dF. Это означает, что N можно представить в виде объединения непересекающихся подмногообразий N_i, на каждом из которых ранг dF в точности равен i (некоторые из этих подмногообразий могут быть пустыми).

Понятие общего положения можно уточнить еще и так. Поскольку мы предположили, что в окрестности точки c множество Σ является $(n-1)$-мерным подмногообразием, то можно считать, что в окрестности какой-то одной связной компоненты B_c^0 особого слоя B_c последние $n-1$ интегралов $f_2, \ldots, f_n$ независимы, а первый интеграл $f_1=H$ (энергия) становится зависимым с ними на подмножестве критических точек $T=N\cap B_c^0$. В самом деле, ограничим отображение F на подмножество $N\cap F^{-1}(U)$, являющееся согласно требованию общего положения объединением конечного числа гладких подмногообразий. Поскольку ограничение F на каждый, в том числе и на максимальный, страт $N'\cap F^{-1}(U)$ является гладким отображением гладкого подмногообразия, то $dF(x)$: $T_xN'\to T_{F(x)}\Sigma$ является эпиморфизмом и ранг $dF(x)\geqslant n-1$, так как $\dim U\cap\Sigma=n-1$. В то же время, так как $x\in N$ — критическая точка, то ранг $dF(x)\leqslant n-1$. Следовательно, ранг $dF(x)=n-1$. Поэтому можно считать (в случае необходимости, заменяя базис в множестве интегралов), что $f_2, \ldots, f_n$ независимы на B_c^0. Следовательно, интеграл f_1 становится зависимым с ними на множестве $T=N\cap B_c^0$.

6. Пять типов многообразий. Теперь мы рассмотрим пять типов $(n+1)$-мерных многообразий, краями которых являются торы.

Тип 1. Рассмотрим стандартное вложение в $\mathbf{R}^{n+1}$ «полнотория» $D^2\times T^{n-1}$ с «осью», являющейся тором T^{n-1}. Его граница — тор T^n. Назовем $D^2\times T^{n-1}$ *диссипативным полноторием.*

Тип 2. Прямое произведение $T^n \times D^1$ называется *цилиндром*. Его край — два тора T^n.

Тип 3. Пусть N^2 — диск с двумя дырками. Прямое произведение $N^2 \times T^{n-1}$ называется *торическим ориентированным седлом*. Его край — три тора T^n.

Тип 4. Над тором T^{n-1} рассмотрим все неэквивалентные друг другу расслоения со слоем отрезок $D^1 = [-1, +1]$. Они классифицируются элементами α группы гомологий $H_1(T^{n-1}; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_2$ ($n-1$ раз). Обозначим Y_α^n пространство расслоения, отвечающего элементу α. Ясно, что Y_α^n является n-мерным гладким многообразием, край которого состоит из двух торов T^{n-1}, если $\alpha = 0$, и из одного тора, если $\alpha \neq 0$. Поскольку нас интересуют интегрируемые системы, то мы будем рассматривать далее только такие расслоения, краями которых являются торы.

Рассмотрим теперь новое расслоение $N^2 \to A_\alpha^{n+1} \to T^{n-1}$ с базой тор T^{n-1} и со слоем N^2, которое ассоциировано с расслоением $D^1 \to Y_\alpha^n \to T^{n-1}$, рассмотренным выше. Оно определяется следующим образом. Диск с двумя дырками гомотопически эквивалентен восьмерке. На N^2 рассмотрим отрезок $D^1 = [-1, +1]$, проходящий через центр диска и соединяющий (после его продолжения) центры двух выброшенных дисков (дырок). С каждым расслоением $D^1 \to Y_\alpha^n \to T^{n-1}$ можно, заменив слой D^1 на слой N^2, ассоциировать расслоение $N^2 \to A_\alpha^{n+1} \to T^{n-1}$, причем такое, что его границей являются торы. Частным его случаем является прямое произведение $N^2 \times T^{n-1}$, т. е. многообразие типа 3. Оно получается в том случае, когда $\alpha = 0$. Если же $\alpha \neq 0$, то соответствующее расслоение A_α^{n+1} нетривиально. Многообразия A_α^{n+1}, имеющие размерность $n+1$, называются *неориентированными торическими седлами*, если $\alpha \neq 0$. Краем многообразия A_α^{n+1} являются два тора, если $\alpha \neq 0$.

Тип 5. Пусть p: $T^n \to K^n$ — двулистное накрытие над неориентируемым многообразием K^n. Все такие накрытия можно классифицировать. Для каждого $\beta = 0, 1$ обозначим G_β группу преобразований тора $T^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$, порожденную инволюцией

$$R_\beta(a) = \begin{cases} \left(-a_1,\ a_2 + \frac{1}{2},\ a_3,\ \ldots,\ a_n\right), & \beta = 0, \\ \left(a_2,\ a_1,\ a_3 + \frac{1}{2},\ a_4,\ \ldots,\ a_n\right), & \beta = 1, \end{cases} \tag{809}$$

где $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$. Здесь предполагается, что $n \geqslant 0$ при $\beta = 0$ и $n \geqslant 3$ при $\beta = 1$. Группа G_β действует на торе T^n без неподвижных точек, следовательно, фактормножество $K^n_\beta = T^n/G_\beta$ является гладким многообразием. Преобразование R_β меняет ориентацию, поэтому K^n_β — неориентируемое многообразие. Многообразия K^n_0, K^n_1 не гомеоморфны. Обозначим K^{n+1}_β цилиндр отображения p: $T^n \to K^n_\beta$. Ясно, что $\dim K^{n+1}_\beta = n+1$ и $\partial K^{n+1}_\beta = T^n$, $\beta=0, 1$.

7. Топологические замечания. Все многообразия A^{n+1}_α при $\alpha \neq 0$ диффеоморфны друг другу. Это следует из того, что любая несамопересекающаяся траектория на торе может быть взята в качестве одной из образующих на нем. Таким образом, как и в четырехмерном случае, получаем лишь два топологически различных многообразия.

Многообразия A^{n+1}_α и K^{n+1}_α представляются в виде склейки многообразий первых трех типов, т. е. с топологической точки зрения независимыми «элементарными кирпичами» являются лишь многообразия $T^n \times D^1$, $N^2 \times T^{n-1}$, $D^2 \times T^{n-1}$. Доказательство этого утверждения аналогично четырехмерному случаю.

Отметим, что $K^n_0 = K^2_0 \times T^{n-2}$ и $K^n_1 = K^3_1 \times T^{n-3}$.

8. Теорема (А. В. Браилов, А. Т. Фоменко [54]). *Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — полный инволютивный набор гладких функций на симплектическом многообразии M^{2n} и F: $M^{2n} \to \mathbf{R}$ — соответствующее отображение моментов. Пусть $X^{n+1} = \{x \in M^{2n} \mid f_i(x) = \xi_i,\ i=1, \ldots, n-1\}$. Предположим, что ограничение $f_n|X^{n+1}$ является боттовской функцией и $X_0 = \{f_i(x) = \xi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ — неориентируемое многообразие минимума функции $f_n|X^{n+1}$. Тогда X диффеоморфно либо K^n_0 (при $n \geqslant 2$), либо K^n_1 (при $n \geqslant 3$).*

Доказательство. На многообразии X_0 глобально определены векторные поля $v_i = \operatorname{sgrad} f_i$, $i=1, \ldots, n-1$, и локально определено векторное поле $v_n = \operatorname{sgrad} d\sqrt{f_n - \xi_n}$. Эти поля коммутируют друг с другом и в каждой точке $x \in X_0$ линейно независимы. Пусть W — трубчатая окрестность X_0 в X^{n+1} вида $W = \{f_i(x) = \xi_i,\ i=1, \ldots, n+1;\ f_n(x) \leqslant \xi_n + \varepsilon\}$. Пусть π: $\partial W \to X_0$ — соответствующее двулистное накрытие. Нетрудно видеть, что на ∂W имеется глобально определенное векторное поле v'_n такое, что $\pi_* v'_n = v_n$. Векторные поля v_i, $i=1, \ldots, n-1$, также поднимаются в ∂W, $\pi_* v'_i = v_i$. Все векторные поля v'_i, $i=1, \ldots, n$, по-прежнему коммутируют и независимы в каждой точке $x \in \partial W$. Преобразование ∂W, состоящее в сдвиге вдоль интегральной кривой поля v'_i за время t, обозначим g^t_i. Для $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ композицию $g^{a_1}_1 \circ \ldots \circ g^{a_n}_n$ обозначим g^a.

Итак, группа $\mathbf{R}^n$ действует на ∂W по формуле $x \to g^a(x)$. Из неориентируемости X_0 вытекает, что многообразие ∂W связно. Следовательно, для любой точки $x_0 \in X_0$ ее $\mathbf{R}^n$-орбита совпадает с ∂W. Пусть $L = L_{x_0}$ — стационарная подгруппа точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Тогда отображение $a \to g^a(x_0)$, $a \in \mathbf{R}^n/L$, является диффеоморфизмом $\mathbf{R}^n/L$ на ∂W. Для любой точки $x \in \partial W$ компоненты вектора $a \in \mathbf{R}^n$ такого, что $g^a(x_0)=x_0$, назовем (неоднозначными) координатами точки x. Пусть σ — инволюция ∂W, переставляющая листы. Тогда $\sigma_* v'_n = -v'_n$. Следовательно, $\sigma(g^a(x)) = g^{\sigma_0(a)}(\sigma(x))$, где $(-a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sigma_0(a)$.

Фиксируем точку $x_0 \in \partial W$ и соответствующие ей (многозначные) координаты a_i. В этих координатах преобразование σ задается формулой $\sigma(a) = (q_1 - a_1, q_2 + a_2, \ldots, q_n + a_n)$, где q_i — координаты точки $\sigma(x_0)$. Заменяя при необходимости точку x_0 на точку с координатами $(q_1/2, 0, \ldots, 0)$, мы будем считать, что $q_1 = 0$. Пусть $T_q(a) = a + q$ — преобразование сдвига на вектор q по модулю L. Ясно, что $\sigma = \sigma_0 T_q$ и $\sigma_0 T_q = T_q \sigma_0$. Поскольку $\sigma_0 = \sigma T_{-q}$ — корректно определенное преобразование многообразия ∂W и $\sigma_0(x_0) = x_0$, то $\sigma_0(L) = L$. Поскольку $T_{2q} = \sigma_0^2 T_{2q} = \sigma^2 = \mathrm{id}|\partial W$, то $2q \in L$.

Определим решетки $L^{\pm} = \{l \in L | \sigma_0(l) = \pm l\}$, $L' = L^+ + L^-$. Тогда либо $L = L'$, либо $L \neq L'$. Рассмотрим сначала первый случай. Выберем базис (l_1) в L^- и базис (l_i), $i=2, \ldots, n$, в L^+. Тогда $(l_i) = (l_i)$, $i=1, \ldots, n$, — базис в $L' = L$. Следовательно, в базисе (l_i) линейный оператор σ_0 задается матрицей $\mathrm{diag}\ (-1, 1, \ldots, 1)$. Выше мы видели, что $q_1 = 0$, $2q \in L$. Следовательно, $2q \in L^+$ и можно считать, что базис (l_i) выбран таким образом, что $l_2 = 2q$. В координатах, связанных с базисом (l_i), имеем $\sigma(a_1, \ldots, a_n) = \left(-a_1, a_2 + \frac{1}{2}, a_3, \ldots, a_n\right)$, следовательно, X_0 диффеоморфно K_0^n.

Пусть $L' \neq L$. Для любого $a \in \mathbf{R}^n/L$ определим $a^{\pm} = (a \pm \sigma_0(a))/2$. Возьмем $l_1 \in L \setminus L'$. Предположим, что $l_1^- \in L^-$. Поскольку $l_1^+ = l_1 - l_1^-$, то в этом случае и $l_1^+ \in L^+$. Следовательно, $l_1 = l_1^+ + l_1^- \in L'$; получили противоречие. Поэтому $l_1^- \notin L^-$, тогда, очевидно, $2l_1^- \in L^-$. Покажем, что l_1 порождает L по модулю L'. Действительно, пусть $l \in L \setminus L'$. Тогда $2l^- \in L^-$ и $l^- \notin L^-$. Следовательно, $l_1^- - l^- \in L^-$ и $(l_1 - l)^+ \in L^+$. Поэтому $l_1 - l \in L'$, что и требовалось доказать. Пусть l^* — образующий элемент в L^-. Тогда для $l_1 \in L \setminus L'$ и подходящего целого числа m имеем $2l_1^- = ml^*$. Число m нечетно, так как $l_1^- \notin L^-$. Заменим l_1 на $l'_1 = l_1 - nl^*$, где $m = 2n+1$. Тогда $2l_1^- = ml^* - 2nl = l^*$. Таким образом, $l_1 \in L \setminus L'$ можно выбрать так, что $2l_1^-$ — образующий элемент в L^-. Пусть l_i, $i=2, \ldots, n$, — базис в L^+. Докажем, что $l_i = l_i$, $i=1, \ldots, n$, — базис в L. Пусть $l \in L$ — произвольный элемент. Необходимо найти целые числа m_i, $i=1, \ldots, n$, такие, что $l = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i$. Поскольку l_1 порождает L по модулю L', то можно считать, что $l \in L'$. Тогда $l = l^+ + l^-$, где $l^{\pm} \in L^{\pm}$, а поскольку $l^- = 2ml_1^-$, то отсюда следует, что $l=\sum_{i=1}^{n} m_i l_i$ для подходящих целых чисел m_i. В базисе l_i линейный оператор σ_0 задается матрицей

$$S=\|s_{ij}\|=\left\|\begin{array}{c|cccc} s_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline s_{21} & 1 & & & \\ s_{31} & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & 0 & & \\ s_{n1} & & & & 1 \end{array}\right\| . \tag{810}$$

Имеем $s_{11}=-1$, так как $\det S=-1$. Путем элементарных преобразований базиса l_i, $i=2, \ldots, n$, в L^+ можно добиться того, чтобы выполнялась цепочка равенств $s_{31}=s_{41}=\ldots=s_{n1}=0$. В итоге получаем, что σ_0 задается матрицей

$$\left\|\begin{array}{cc|cccc} -1 & 0 & & 0 & & \\ \beta & 1 & & & & \\ \hline & & 1 & & 0 & \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right\| . \tag{811}$$

Заменим теперь в базисе l_i, $i=1, 2, \ldots, n$, первый вектор l_1 на $l'_1=l_1+kl_2$. В новом базисе σ_0 задается той же матрицей, но с заменой β на $\beta'=\beta-2k$. Поэтому можно считать, что $\beta=0$ или $\beta=1$. Первый случай соответствует $L=L'$ и был разобран ранее. Рассмотрим случай $\beta=1$. Вектор $q\in L^+\cap\left(\frac{L}{2}\setminus L\right)$ координат точки $\sigma(x_0)$ определен по модулю L. Поэтому можно считать, что $q=\sum_{i=2}^{n} q_i l_i$, где $q_i=0$, $1/2$. Если $q_2=1/2$, то заменим точку отсчета x_0 на точку с координатами $(1/2, 0, \ldots$ $\ldots, 0)$. Поскольку $\sigma_0(l_1)=-l_1+l_2$, то сдвиг q в новых координатах даст тождество $q+\frac{1}{2}l_2\equiv 0 \pmod L$. Следовательно, можно считать, что $q_2=0$. Далее, совершая элементарные преобразования над векторами l_i, $i=3, \ldots, n$, можно добиться того, чтобы $q\equiv(l_3/2) \bmod L$. Наконец, заменяя l_2 на $l'_2=-l_1+l_2$, получаем, что σ задается в координатах, связанных с базисом (l_i), формулой $\sigma(a_1, \ldots, a_n)=(a_2, a_1, a_3+\frac{1}{2}, a_4, \ldots, a_n)$. Следовательно, многообразие X_0 диффеоморфно K_1^n. Теорема доказана.

9. Перестройка торов Лиувилля. Опишем пять типов канонических перестроек.

Тип 1. Тор задается как граница диссипативного полнотория $D^2 \times T^{n-1}$ и затем стягивается на его ось, т. е. на тор T^{n-1}. Назовем эту операцию *предельным вырождением*. Обозначим эту перестройку символом $T^n \to T^{n-1} \to 0$.

Тип 2. Два тора T_1^n и T_2^n, являющиеся границей цилиндра $T^n \times D^1$, движутся по нему навстречу друг другу и в середине цилиндра сливаются в один тор T^n. Условное обозначение $2T^n \to T^n \to 0$.

Тип 3. Тор T^n, являющийся нижним краем ориентированного торического седла $N^2 \times T^{n-1}$, поднимается вверх и в соответствии с топологией многообразия $N^2 \times T^{n-1}$ распадается на два тора T_1^n и T_2^n. Обозначение: $T^n \to 2T^n$.

Тип 4. Тор T^n, являющийся одним из краев многообразия A_α^{n+1}, где $\alpha \neq 0$, поднимается по A_α^{n+1} «вверх» и в его середине перестраивается, превращаясь в один тор — в верхний край многообразия A_α. Обозначение: $T^n \to T^n$. Все такие перестройки параметризуются ненулевыми элементами.

Тип 5. Реализуем тор T^n как край многообразия K_β^{n+1}. Деформируя тор внутрь K_β^{n+1} вдоль проекции p, мы, наконец, двулистно накрываем тором T^n многообразие K_β^n. После этого тор «исчезает». Условное обозначение: $T^n \to K_\beta^n \to 0$.

10. Определение. Фиксируем значения последних $n-1$ интегралов $f_2, \ldots, f_n$ и рассмотрим получившуюся $(n+1)$-мерную поверхность уровня X^{n+1}. Ограничивая на нее первый интеграл (энергию) $f_1 = H$, мы получим гладкую функцию f на многообразии X^{n+1}, которую будем называть *интегральной поверхностью*. Будем говорить, что перестройка торов Лиувилля, образующих неособый слой B_a, является перестройкой *общего положения*, если в окрестности перестраивающегося тора T^n поверхность X^{n+1} является компактным и неособым подмногообразием, а ограничение энергии $f_1 = H$ на X^{n+1} является (в этой окрестности) боттовской функцией.

11. Теорема (А. Т. Фоменко [283]). 1) *Если* $\dim \Sigma < n-1$, *то все неособые слои* B_a *диффеоморфны между собой.*

2) *Пусть* $\dim \Sigma = n-1$ *и невырожденный тор Лиувилля* T^n *движется вдоль совместной неособой поверхности* X^{n+1} *уровня последних интегралов* $f_2, \ldots, f_n$, *увлекаемый изменением значения интеграла энергии* $f_1 = H$. *Это эквивалентно тому, что точка* $a = F(T^n) \in \mathbf{R}^n$ *движется по гладкому отрезку* γ *по направлению к бифуркационной диаграмме* Σ. *Пусть в некоторый момент времени тор* T^n *подвергся топологической перестройке, т. е. вышел на критический уровень энергии. Это происходит в том и только в том случае, когда тор* T^n *встречает на своем пути критические точки* N *отображения моментов* F: $M^{2n} \to \mathbf{R}^n$ *(т. е. путь* γ *в точке с трансверсально и с ненулевой скоростью протыкает* $(n-1)$*-мерный лист диаграммы* Σ*). Предположим, что эта перестройка является перестройкой общего положения.*

Тогда все возможные типы перестроек тора Лиувилля исчерпываются композициями указанных выше (и обратных к ним) канонических перестроек типов 1, 2, 3, 4, 5. *В действительности, с топологической точки зрения независимыми из них являются лишь первая и третья, а перестройки* 2, 4 *и* 5 *являются их композицией.*

12. Определение. Гамильтониан называется *ориентируемым*, если все его критические подмногообразия (на X^{n+1}) ориентируемы, т. е. нет ни одного критического многообразия K^n_α. В противном случае гамильтониан называется *неориентируемым*.

13. Предложение. *Если* $(U(X^{n+1}); \operatorname{sgrad} H, f_2, \ldots, f_n)$ — *интегрируемая гамильтонова система с боттовским неориентируемым гамильтонианом* H *на поверхности* X^{n+1}, *то ее всегда можно двулистно накрыть гамильтоновой системой* $(\tilde{U}(\tilde{X}^{n+1}); \operatorname{sgrad}\tilde{H}, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_n)$ *с ориентируемым гамильтонианом* $\tilde{H}$ *на накрытии* $\tilde{X}^{n+1}$. *Здесь* $\tilde{U}(\tilde{X}^{n+1})$ — *двулистное накрытие окрестности* $U(X^{n+1})$ *многообразия* X^{n+1}.

14. Теорема (А. Т. Фоменко [283]). *Пусть* M^{2n} — *гладкое симплектическое многообразие и система* $v = \operatorname{sgrad} H$ *интегрируема с помощью гладких независимых коммутирующих интегралов* $H = f_1, f_2, \ldots, f_n$. *Пусть* X^{n+1} — *любая фиксированная компактная неособая совместная поверхность уровня последних* $n-1$ *интегралов* $f_2, \ldots, f_n$. *Пусть ограничение* H *на* X^{n+1} *является боттовской функцией. Тогда поверхность* X^{n+1} *имеет вид* $m(D^2 \times T^{n-1}) + p(T^n \times D^1) + q(N^2 \times T^{n-1}) + sA^{n+1}_\alpha + rK^{n+1}_\beta$, *т. е получается в результате склейки граничных торов (при помощи некоторых диффеоморфизмов) следующих «элементарных кирпичей»:* m *диссипативных полноторий,* p *цилиндров,* q *торических неориентированных седел,* s *торических неориентированных седел и* r *многообразий* K^{n+1}_β. *Число* m *в точности равно числу предельных вырождений системы* v *на поверхности* X^{n+1}, *на которых энергия* H *достигает локального минимума или максимума.*

15. Обозначения. Пусть $c \in \Sigma$ и малая окрестность $U(c) \cap \Sigma$ точки c на Σ является гладким $(n-1)$-мерным подмногообразием. Пусть γ — гладкий путь, трансверсально протыкающий Σ в точке c и соединяющий два некритических значения a и b, расположенных по разные стороны от гиперповерхности Σ. Рассмотрим связную компоненту B^0_c особого слоя $B_c = F^{-1}(c)$. Пусть $T = B^0_c \cap N$, а X^{n+1}_0 — связная компонента слоя $F^{-1}U(c)$, заключенная между двумя близкими неособыми слоями B_a и B_b. Поскольку a и b — некритические значения, то B_a и B_b являются объединениями торов Лиувилля. Пусть $B^0_a = X^{n+1}_0 \cap B_a$ и $B^0_b = X^{n+1}_0 \cap B_b$, т. е. $\partial X^{n+1}_0 = B^0_a \cap B^0_b$. Обозначим буквой f ограничение первого интеграла f_1 на интегральную поверхность $X^{n+1}_0 = X_0$.

16. Лемма. *Точка $x \in X_0$ является критической для функции f тогда и только тогда, когда в ней первый интеграл f_1 зависим (на M) от последних $n-1$ интегралов $f_2, \ldots, f_n$.*

Доказательство. Поскольку X_0 — совместная поверхность уровня последних интегралов, то их градиенты образуют базис в плоскости, нормальной к X_0 в M. Зависимость функции f_1 с функциями $f_2, \ldots, f_n$ эквивалентна тому, что в этой точке вектор $\operatorname{grad} f_1$ является линейной комбинацией градиентов $\operatorname{grad} f_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Ясно, что $\operatorname{grad} f$ на X_0 получается ортогональным проектированием $\operatorname{grad} f_1$ на X_0. Лемма доказана.

17. Лемма. *Множество T критических точек функции f на X_0 является несвязным объединением некоторого числа n-мерных торов T^n, $(n-1)$-мерных торов T^{n-1}, n-мерных неориентируемых многообразий K^n_β.*

Доказательство. Если $T = B^0_c$, то T является совместной (особой) поверхностью уровня всех n интегралов $f_1, \ldots, f_n$. Близкие к ней поверхности уровня R являются неособыми компактными торами Лиувилля. Ясно, что R — граница трубчатой окрестности V^{n+1} подмногообразия T в X_0. Если $\dim T = k$, то $R \cong T_0$ расслаивается над T со слоем S^{n-k}. Это может быть только в том случае, когда $n-k=0$ или $n-k=1$, т. е. когда либо $\dim T = n$, либо $\dim T = n-1$. Если T^n_0 — связная компонента T, то $T^n_0 = T^n$ или $T^n_0 = K^n_\beta$. Если $B^0_c \neq T$, то рассуждение усложняется. Ясно, что в этом случае $\dim T < \dim B^0_c = n$, т. е. $\dim T \leqslant n-1$. Из условий, наложенных на интегралы системы, следует, что на T интегралы $f_2, \ldots, f_n$ независимы (они независимы на всем B^0_c). Следовательно, на T^{n-1}_0 имеется $n-1$ независимых коммутирующих векторных полей $\operatorname{sgrad} f_i$, $i = 2, \ldots$ $\ldots, n$. Как известно, отсюда сразу следует, что $T^{n-1}_0 = T^{n-1}$. Лемма доказана.

18. Если критический тор имеет размерность n, то он является множеством либо локального минимума, либо локального максимума энергии H. В этом случае либо два близких неособых тора Лиувилля сливаются в один тор T^n, либо тор T^n распадается на два тора T^n. Пусть $P^n_- = P^n_-(T^{n-1})$ и $P^n_+ = P^n_+(T^{n-1})$ — соответственно входящая и исходящая сепаратрисные диаграммы критического подмногообразия T^{n-1}.

19. Определение. Назовем *торической ручкой индекса λ и степени вырождения k* прямое произведение $T^k \times D^\lambda \times D^{n+1-k-\lambda}$, *подошвой ручки* — следующую часть ее границы: $(T^k \times S^{\lambda-1}) \times D^{n+1-k-\lambda}$, *осью подошвы* — пространство $T^k \times S^{\lambda-1}$.

20. Определение. Определим операцию *приклейки торической ручки* к краю V^n $(n+1)$-мерного многообразия W^{n+1}. Пусть край содержит вложенное подмногообразие $T^k \times S^{\lambda-1}$. Предположим, что его трубчатая окрестность гомеоморфна прямому произведению $(T^k \times S^{\lambda-1}) \times D^{n+1-k-\lambda}$. Можно выбросить эту трубчатую окрестность, край которой гомеоморфен $T^k \times S^{\lambda-1} \times S^{n-k-\lambda}$. С другой стороны, край подошвы торической ручки также гомеоморфен произведению $T^k \times S^{\lambda-1} \times S^{n-k-\lambda}$. Отождествляя этот край с краем выброшенной окрестности, получаем новое $(n+1)$-мерное многообразие. Его край будем называть торической перестройкой края V^n. Для дальнейшего можно считать, что гладкий путь $\gamma = \gamma(t) \subset \mathbf{R}^n$ моделируется отрезком вещественной оси $\mathbf{R}^1$, на которой лежат три точки $a<c<b$, где c — критическое значение, a и b близки к c. Положим $C_a = F^{-1}$ $(t \leqslant a)$, $C_b = F^{-1}$ $(t \leqslant b)$. Тогда $C_a \subset C_b$. Другими словами, можно считать, что $f\colon\ X_0^{n+1} \to \mathbf{R}^1$ и $C_a = (f \leqslant a)$, $C_b = (f \leqslant b)$, $B_c^0 = f^{-1}(c)$.

21. Лемма. *Предположим, что на особом слое B_c^0 лежит ровно один критический (седловой) тор T^{n-1}.*

1) *Пусть $P_-^n(T^{n-1})$ — ориентируема. Тогда C_b получается из C_a приклейкой к краю B_a торической ручки индекса 1 и степени вырождения $n-1$. При этом C_b гомотопически эквивалентно C_a, к которому приклеено многообразие $T^{n-1} \times D^1$ по двум непересекающимся торам $T_{1,a}^{n-1}$ и $T_{2,a}^{n-1}$.*

2) *Пусть $P_-^n(T^{n-1})$ неориентируема. Тогда множество C_b гомотопически эквивалентно C_a, к краю B_a^0 которого по тору T_a^{n-1} приклеено n-мерное многообразие Y_a, имеющее край T^{n-1} и являющееся расслоением $D^1 \to Y_\alpha^n \to T^{n-1}$, отвечающим ненулевому элементу $\alpha \in \mathbf{Z}_2^{n-1} = H_1(T^{n-1};\ \mathbf{Z}_2)$.*

22. Лемма. *Пусть тор T_a^{n-1}, вложенный в какой-то неособый тор Лиувилля $T_a^n \subset B_a^0$, является либо одной из подошв торической ручки (индекса 1 и степени вырождения $n-1$), либо краем многообразия Y_α^n (в случае, когда $P_-(T^{n-1})$ неориентируема). Тогда этот тор T_α^{n-1} всегда реализует одну из образующих в группе гомологий $H_1(T_\alpha^n;\ \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{n-1}$. Если обе подошвы торической ручки приклеены к одному и тому же тору Лиувилля T_a^n, то соответствующие оси этих подошв, т. е. торы $T_{1,a}^{n-1}$ и $T_{2,a}^{n-1}$, не пересекаются, реализуют одну и ту же образующую группы гомологий $H_{n-1}(T_a^n;\ \mathbf{Z})$ и, следовательно, изотопны внутри тора T_a^n.*

Доказательство. Рассмотрим критический седловой тор T^{n-1}. Из леммы 17 следует, что он является орбитой действия абелевой подгруппы $\mathbf{R}^{n-1}$, вложенной в группу $\mathbf{R}^n$, порожденную полями $\operatorname{sgrad} f_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. При этом базис в подгруппе $\mathbf{R}^{n-1}$ образуют поля $\operatorname{sgrad} f_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Фиксируем эту подгруппу. Поскольку действие $\mathbf{R}^n$ (и $\mathbf{R}^{n-1}$) определено на всем M^{2n}, то мы всегда можем рассмотреть орбиты группы $\mathbf{R}^{n-1}$, близкие к орбите T^{n-1}. Рассмотрим достаточно близкий к слою B_c^0 неособый тор Лиувилля T_a^n, на котором сепаратрисная диаграмма P_-^n высекает некоторый тор T_a^{n-1}. Этот тор, конечно, не является орбитой действия группы $\mathbf{R}^{n-1}$ на торе T_a^n.

Однако, как мы сейчас покажем, тор T_a^{n-1} можно аппроксимировать некоторой орбитой действия группы $\mathbf{R}^{n-1}$. Для этого рассмотрим элемент $\alpha \in H_{n-1}(T^{n-1}; \mathbf{Z}_2)$. Из леммы 21 мы знаем, что тор T_α^{n-1} является одной из компонент края многообразия Y_α^n, приклеенного к тору T_α^n. Если $\alpha \neq 0$, то $\partial Y_\alpha^n = T_a^{n-1}$; если $\alpha = 0$, то $\partial Y_\alpha^n = \partial(T^{n-1} \times D^1) = T_{1,a}^{n-1} \cap T_{2,a}^{n-1}$, $T_{1,a}^{n-1} = T^{n-1}$.

Задание элемента α определяет некоторое число k образующих в критическом торе T^{n-1}, обходя вокруг которых нормальный отрезок сепаратрисной диаграммы P_- меняет свою ориентацию. Выделим эти образующие. В ориентируемом случае $k=0$, так как $\alpha=0$. Поскольку тор T^{n-1} является орбитой действия группы $\mathbf{R}^{n-1}$, то, заменяя образующие в группе $\mathbf{R}^{n-1}$ (если это необходимо), всегда можно считать, что в неориентируемом случае $(k \geqslant 0)$ среди полей $\operatorname{sgrad} f_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$, есть ровно k полей $\operatorname{sgrad} f_2, \ldots, \operatorname{sgrad} f_{k+1}$ таких, что однократный обход вдоль орбит точки $x \in T^{n-1}$, порожденных соответствующими им одномерными подгруппами $\mathbf{R}_2^1, \ldots, \mathbf{R}_{k+1}^1$, меняет ориентацию нормального отрезка сепаратрисной диаграммы. Рассмотрим сначала ориентируемый случай, когда $k=0$. Тогда в подгруппе $\mathbf{R}^{n+1}$ можно выделить $(n-1)$-мерный параллелепипед Π — фундаментальную область действия группы $\mathbf{R}^{n-1}$ на торе T^{n-1}. При естественном отображении группы $\mathbf{R}^{n-1}$ на тор T^{n-1} этот параллелепипед Π накрывает весь тор, т. е. тор T^{n-1} получается отождествлением противоположных граней этого параллелепипеда. Поскольку параллелепипед Π состоит из преобразований на M, то можно рассмотреть орбиту этого параллелепипеда при действии его на некоторую точку $h \in T_{1,a}^{n-1} \subset T_a^n$. Конечно, эта орбита уже не будет замкнутым $(n-1)$-мерным тором в T_a^n.

Однако так как точка $h \in T_{1,a}^{n-1}$ близка к точке $x \in T^n$, то можно считать, что орбита $\Pi(h)$ является «почти тором», т. е. каждая из образующих параллелепипеда Π переходит в отрезок, концы которого близки на торе T_a^n (т. е. получается «почти окружность»). Выберем на торе T_a^n координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в соответствии с теоремой Лиувилля. Мы используем здесь то обстоятельство, что точки параллелепипеда Π представлены симплектическими преобразованиями.

Тогда в этих координатах «почти тор» $\Pi(h)$ является линейным вполне геодезическим подмногообразием, быть может, с непустым краем. Изображая тор T_a^n (в этих координатах) в виде стандартного куба, противоположные грани которого отождествлены, мы получим в нем плоскость Π'. Ее пересечения с противоположными гранями являются $(n-2)$-мерными подпространствами, которые оказываются близкими после отождествления граней. Ясно, что плоскость Π' можно слегка повернуть так, что она превратится (после факторизации куба на тор) в некоторый $(n-1)$-мерный линейный вполне геодезический тор T_*^{n-1} в торе T_a^n. Ясно, что тор T_*^{n-1} близок к «почти тору» $\Pi(h)$ и в то же время близок к тору $T_{1,a}^{n-1}$. Отсюда следует, что эти торы изотопны.

Итак, мы доказали существование малой изотопии тора $T_{1,a}^{n-1}$ в торе T_a^n, переводящей его в линейный тор. Но в таком случае тор $T_{1,a}^{n-1}$ реализует образующую в группе $H_{n-1}(T_a^n; \mathbf{Z})$, что и требовалось доказать. Итак, в ориентируемом случае лемма доказана. Отметим, что при малом шевелении плоскости Π мы получили новую плоскость Π_*, образующие которой уже могут включать в себя образующую $\operatorname{sgrad} f_1$, которая была исключена на исходной плоскости Π. Ясно, что $T_*^{n-1}=\Pi_*(h)$.

Рассмотрим теперь неориентируемый случай. Здесь рассуждения более деликатные. Дело в том, что здесь нельзя обойтись самим параллелепипедом Π. В самом деле, из определения неориентируемой сепаратрисной диаграммы следует, что орбиты $(\Pi\cap\mathbf{R}_2^1)h, \ldots, (\Pi\cap\mathbf{R}_{k+1}^1)h$ образующих $\mathbf{R}_2^1, \ldots, \mathbf{R}_{k+1}^1$ (соответствующих полям $\operatorname{sgrad} f_i$, $2\leqslant i\leqslant k+1$) не являются «почти замкнутыми» траекториями на торе T_a^n. Обозначим Π_i соответствующие ребра параллелепипеда Π, т. е. $\Pi_i=\Pi\cap\mathbf{R}_i^1$, $2\leqslant i\leqslant k+1$. При действии Π_i на точку h она успевает пробежать лишь половину полного оборота на торе T_a^n. Для того чтобы она сделала почти полный оборот, следует еще раз подействовать на нее ребром параллелепипеда Π_i. Другими словами, чтобы заставить точку h сделать полный оборот на торе T_a^n, к ней следует применить преобразования из $2\Pi_i$, т. е. удвоить соответствующую сторону параллелепипеда Π. Итак, мы подходим к следующей схеме.

Нужно удвоить все стороны параллелепипеда $\Pi_2, \ldots, \Pi_{k+1}$. В результате получится новый (вытянутый) параллелепипед $\tilde{\Pi}$, растянутый в k направлениях в два раза. Теперь подействуем этим растянутым параллелепипедом $\tilde{\Pi}$ на точку h. В результате мы получим некоторую орбиту $\tilde{\Pi}(h)$. Ясно, что теперь эта орбита изображается (в переменных действие — угол на торе Лиувилля) линейной плоскостью, которая «почти замкнута» после факторизации куба на тор. Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения ориентируемого случая. Лемма доказана.

23. Доказательство теорем 11, 14. После доказательства основных лемм дальнейшая схема повторяет соответствующие рассуждения для четырехмерного случая, см. [283].

24. Теорема (А. В. Браилов, А. Т. Фоменко [54]). *Пусть X^{n+1} — компактное замкнутое ориентируемое многообразие, получающееся склейкой произвольного числа элементарных многообразий типов* 1, 2 *и* 3 *(т. е. диссипативных полноторий, цилиндров и штанов) по любым диффеоморфизмам их граничных торов T^n. Тогда всегда существует гладкое компактное* *симплектическое многообразие M^{2n} с краем, диффеоморфным несвязному объединению некоторого числа многообразий вида $S^{n-1}\times T^n$, и полный инволютивный набор гладких функций $f_1, \ldots, f_n$ на M^{2n} такой, что $X^{n+1}=\{x\in M^{2n}\mid f_2(x)=\ldots=f_n(x)=0\}$.*

Доказательство. Искомое многообразие M^{2n} конструируется из симплектических многообразий, соответствующих тем «элементарным кирпичам», из которых склеено многообразие X^{n+1}. Поэтому на первом шаге доказательства мы построим примеры интегрируемых систем, в которых реализуются перестройки типов 1, 2, 3.

Пусть ω_n — симплектическая структура на торе $T^{2n}=\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}) \bmod 2\pi\}$, $\omega_n=\sum\limits_{i=1}^{n} d\varphi_{2i-1}\,d\varphi_{2i}$. На торе T^2 можно, очевидно, построить гладкие функции $\varphi^{[s]}$, где $s=1, 2, 3$ и подмногообразия $M_s\subset T^2$ так, что N_1 — точка невырожденного максимума для $f^{[1]}$, N_2 — невырожденная седловая точка для $f^{[2]}$ и N_3 — невырожденная критическая окружность для $f^{[3]}$. Можно, например, взять $f^{[1]}=f^{[2]}=\cos(\varphi_1+2\varphi_2)$, $N_1=\{(0, 0)\}$, $N_2=\{(\pi, 0)\}$, $f^{[3]}=\cos\varphi_1$, $N_3=\{(0, \varphi_2) \bmod 2\pi\}$. Если $c_s=f^{[s]}(N_s)$ — критическое значение, то $c_1=c_3=1$, $c_2=-1$.

Построим примеры s, $s=1, 2, 3$. Многообразие $M^{2n}=T^{2n}$, ω_n — симплектическая структура на нем. Для $i=2, \ldots, n$ имеем $f_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n})=\sin\varphi_{2i+1}$. Для $i=1$ имеем $f_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n})=f^{[s]}(\varphi_1, \varphi_2)$. Тогда гамильтонова система $v=\operatorname{sgrad} f_1$ вполне интегрируема на M^{2n} с полным инволютивным набором интегралов f_i, а $N=N_s\times T^{2n-2}$ — невырожденное критическое подмногообразие функции $f_1\mid X^{n+1}$, где $X^{n+1}=\{f_2=\ldots=f_n=0\}$. Критическое значение $f_1(N)=c_s$.

Пусть многообразие $X^{n+1}=\bigcup\limits_{j=1}^{m} X_j$ склеено из «кирпичей» X_j и $s(j)$ — тип X_j. Если многообразие X_j типа 2 склеивается с различными многообразиями X_{j_1} и X_{j_2} по диффеоморфизмам d_1 и d_2, то из разбиения X^{n+1} можно удалить X_j, склеив X_{j_1} и X_{j_2} по диффеоморфизму $d_2d_1^{-1}$. Описанный процесс назовем *сокращением* разложения многообразия X^{n+1} на элементарные кирпичи. Обратный процесс, при котором в разложении X^{n+1} добавляется новый кирпич типа 2, назовем *вставкой*. Оба процесса не меняют многообразия X^{n+1} с точностью до диффеоморфизма. Далее очевидно, что путем подходящей последовательности сокращений и вставок из исходного разложения многообразия X^{n+1} можно получить такое разложение, для которого будут выполнены следующие условия: 1) для любого кирпича X_j типа 2 номера склеенных с X_j кирпичей либо оба больше j, либо оба меньше j; 2) для любого кирпича X_j типа 3 номера всех трех склеенных с X_j кирпичей не могут быть одновременно больше или меньше j.

Итак, пусть $X^{n+1}=\bigcup_{j=1}^{m} X_j$ — разложение, удовлетворяющее этим двум условиям. Для каждого $j=1, ..., m$ копии объектов f_i, N, M^{2n} из примера $s=s(j)$ обозначим соответственно f_{ij}, N_j, M_j^{2n}. Путем подходящей линейной замены $f_{1,j}\to f'_{1,j}=a_j f_{1,j}+b_j$ можно добиться того, чтобы отображение моментов $F_j(x)=(f_{1j}(x), ..., f_{nj}(x))$ удовлетворяло следующим условиям: 1) для каждого $j=1, ..., m$ при движении точки $y\in\mathbf{R}^n$ вдоль первой координатной оси от 0 до $m+1$ точка y пересекает бифуркационное множество Σ_j отображения F_j только один раз — в точке $\xi_j=(j, 0, ..., 0)$; 2) если $s(j)=1$ и кирпич X_j склеен с кирпичом X_{j_1}, то при указанном движении в точке $y=\xi_j$ происходит рождение тора $F_j^{-1}(y)$ в случае $j_1>j$ и уничтожение в случае $j_1<j$; 3) если $s(j)=2$ и кирпич X_j склеен с X_{j_1} и X_{j_2}, то в точке $y=\xi_j$ происходит рождение двух торов $F_j^{-1}(y)$ в случае j_1, $j_2>j$ и уничтожение двух торов в случае j_1, $j_2<j$; 4) если $s(j)=3$ и кирпич X_j склеен с X_{j_1}, X_{j_2}, X_{j_3}, то при $j_1<j<j_2$, j_3 в точке $y=\xi_j$ происходит перестройка одного тора в два тора, а при j_1, $j_2<j<j_3$ — перестройка двух торов в один.

Для любых $r>0$, $a<b$ определим цилиндр

$$C_r(a, b)=\{y\in\mathbf{R}^n \mid \sum_{i=2}^{n} y_i^2<r^2,\ a<y_1<b\}. \tag{812}$$

Нетрудно видеть, что $\Sigma_j\cap C_{1/2}(0, m+1)=\Pi_j\cap C_{1/2}(0, m+1)$, где $\Pi_j=\{y\in\mathbf{R}^n \mid y_1=j\}$ — гиперплоскость. Многообразие M^{2n} получается из многообразий

$$M'_j=M_j\setminus F_j^{-1}\left(C_{1/2}\left(0, j-\frac{1}{2}\right)\right)\cup C_{1/2}\left(j+\frac{1}{3},\ m+1\right) \tag{813}$$

приклеиванием соединяющих их трубок. Возможность приклеивания трубок вытекает из следующей леммы.

25. Лемма. *Пусть заданы числа* $a_1<b_1<c_1<a_2<b_2<c_2$, $r>0$. *Предположим, что для каждого* $j=1, 2$ *имеется симплектическое многообразие* M_j^{2n} *и на нем полный инволютивный набор гладких функций* f_{ij}, *где* $j=1, ..., n$ *такой, что отображение моментов* F_j *является расслоением со слоем — тором* T^n *над цилиндром* $C_r(a_i, c_i)$. *Тогда для достаточно малого* $\varepsilon>0$ *существует симплектическое многообразие* Z, *содержащее в качестве открытых подмногообразий прообразы* $V_1=F_1^{-1}(C_\varepsilon(a_1, b_1))$ *и* $V_2=F_2^{-1}(C_\varepsilon(b_2, c_2))$ *и полный инволютивный набор гладких функций* f_i *на* V *такой, что соответствующее отображение моментов* F *является расслоением со слоем* T^n *над* $C_\varepsilon(a_1, c_2)$ *и* $F\mid V_j=E_j\mid V_j$ *для* $j=1, 2$.

Доказательство. Пусть $b_1<d_1<c_1$ и $a_2<d_2<c_2$, $D_j=(d_j, 0, ..., 0)$, $j=1, 2$. Выберем в окрестности $\bar{O}_j$ тора

$T_j^n=F_j^{-1}(D_j)$ переменные I_{ij}, φ_{ij} типа действие — угол. Уменьшая при необходимости $\bar{O}_j$, мы будем считать, что переменные I_{ij} задают расслоение I_j: $\bar{O}_j\to B_\delta$ над малым шаром $B_\delta=\{y\in\mathbf{R}^n \mid |y|<\delta\}$. Таким образом, переменные I_{ij}, φ_{ij} задают диффеоморфизм $I_j\times\varphi_j$: $\bar{O}_j\to B_\delta\times T^n$.

Положим $\bar{P}=(I_2\times\varphi_2)^{-1}(I_1\times\varphi_1)$. Очевидно, что $\bar{P}$: $\bar{O}_1\to\bar{O}_2$ — симплектический диффеоморфизм. Поскольку переменные I_{ij} выражаются через f_{ij} и независимы, то существует диффеоморфизм J_j: $B_\delta\to O_j=F_j(\bar{O}_j)$ такой, что $F_j=J_jI_i$. Пусть, наконец, $P=J_2J_1^{-1}$. В итоге имеем коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & B_\delta\times T^n & \\
O_1 \arrow[ur, "I_1\times\varphi_1"] \arrow[rr, "\bar{P}"] \arrow[dr, "I_1"] \arrow[dd, "F_1"'] & & O_2 \arrow[ul, "I_2\times\varphi_2"'] \arrow[dl, "I_2"'] \arrow[dd, "F_2"] \\
 & B_\delta \arrow[dl, "J_1"'] \arrow[dr, "J_2"] & \\
O_1 \arrow[rr, "P"] & & O_2
\end{tikzcd}
\quad . \tag{814}
$$

Ее построение неоднозначно, поскольку введение переменных типа действие — угол зависит от выбора базиса циклов на торе, в окрестности которого эти переменные вводятся, см. п. 18 § 29. Обсудим характер этой неоднозначности. Пусть (h_i) и $(h'_i)=\Lambda(h_i)$ — два различных базиса в группе $H_1(F_2^{-1}(D_2);\ \mathbf{Z})=\mathbf{Z}^n$. Тогда $h'_i=\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{ik}h_k$ для подходящей матрицы $\Lambda=\|\Lambda_{ik}\|\in GL(n,\ \mathbf{Z})$. Поскольку переменные I_i типа действие определяются путем интегрирования фиксированной 1-формы по циклам h_i, то замена $h_i\to h'_i$ приводит к линейной замене $I_i=I'_i=\sum_{k=1}^{n}\Lambda_{ik}I_k$. Замена угловых переменных производится при помощи обратной матрицы $\varphi_i\to\varphi'_i=\sum_{k=1}^{n}(\Lambda^{-1})_{ik}\varphi_k$. Заменяя при необходимости h_1 на $h'_1=-h_1$, мы можем считать, что якобиан диффеоморфизма P больше нуля.

Пусть $C_\varepsilon(a,e)$ — такой цилиндр, что правый его торец находится внутри O_1, а точка D_1 — внутри $C_\varepsilon(a,e)$ (рис. 87). Соединим цилиндр $C_\varepsilon(b_2,c_2)$ трубкой T с образом цилиндра $C_\varepsilon(a_1,\varepsilon)$ при диффеоморфизме P так, чтобы трубка T была гладким продолжением обоих цилиндров и имела открытые непустые пересечения с ними. Пусть

$$A_1=C_\varepsilon(a_1,e),\quad A_2=T\cup C_\varepsilon(b_2,c_2),\quad Z_j=F_j^{-1}(A_j),\quad j=1,2. \tag{815}$$

Диффеоморфизм $\bar{P}$ симплектический, следовательно, склеивая Z_1 и Z_2 при помощи $\bar{P}$, мы получим симплектическое многообразие $Z = Z_1 \bigcup_{\bar{P}} Z_2$. Для $A = A_1 \bigcup_{P} A_2$, учитывая положительность якобиана диффеоморфизма P, имеем, что существует

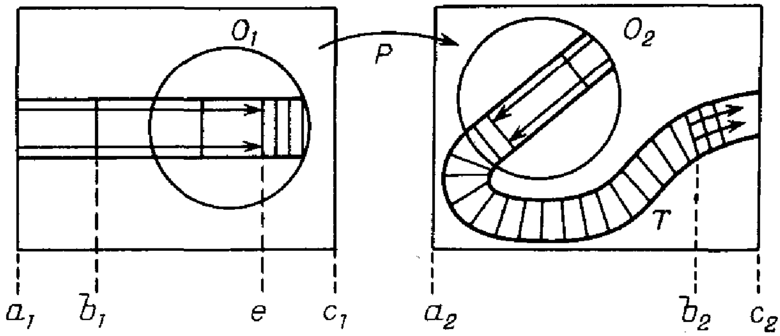


Рис. 87

диффеоморфизм L: $A \to C_\varepsilon(a_1, c_2)$, тождественный на $C_\varepsilon(a_1, b_1)$ и $C_\varepsilon(b_2, c_2)$. Отображение $F(x) = L(F_j(x))$, $x \in Z_j$, является искомым расслоением.

26. Вернемся к доказательству теоремы 24. Для каждого $j = 1, \ldots, m$ ограничение отображения моментов F_j на M'_j будем обозначать F'_j. Для любых $a < b$ пусть $[a, b]_1$ — отрезок первой координатной оси в $\mathbf{R}^n$ от a до b. Нетрудно видеть, что прообраз $(F'_j)^{-1}([0, m+1]_1) = (F'_j)^{-1}\left(\left[j - \frac{1}{3}, j + \frac{1}{3}\right]_1\right)$ диффеоморфен кирпичу X_j. Далее эти многообразия отождествляются. При этом каждый тор T_{k_1}, ограничивающий X_j, является, очевидно, связной компонентой множества

$$(F'_j)^{-1}\left(j - \frac{1}{3}, 0, \ldots, 0\right) \cup (F'_j)^{-1}\left(j + \frac{1}{3}, 0, \ldots, 0\right). \tag{816}$$

Для кирпичей X_{j_1}, X_{j_2}, $j_1 < j_2$, склеенных по торам $T_{k_1} \subset \partial X_{j_1}$, $T_{k_2} \subset \partial X_{j_2}$, положим $\alpha = (X_{j_1}, T_{k_1}, X_{j_2}, T_{k_2})$. Для любой такой четверки α, используя лемму 25, можно построить симплектическое многообразие Z_α, имеющее непустые (размерности $2n$) пересечения V_{k_1} и V_{k_2} с M_{j_1} и M_{j_2} соответственно, а также отображение моментов F_α: $Z_\alpha \to \mathbf{R}^n$, продолжающее отображения $F_{j_1} | V_{k_1}$ и $F_{j_2} | V_{k_2}$.

Более подробно: пусть V_{k_1} — связная компонента прообраза $(F'_{j_1})^{-1}\left(\bar{C}_\varepsilon\left(j_1 + \frac{1}{5}, j_1 + \frac{1}{3}\right)\right)$, содержащая тор $T_{k_1} \subset F_{j_1}^{-1}\left(j_1 + \frac{1}{3}, 0,\right.$

$0, \ldots, 0\Big)$; V_{k_2} — связная компонента прообраза $F_{j_1}^{-1}\Big(\bar{C}_\varepsilon\Big(j_2-\frac{1}{3}, j_2-\frac{1}{5}\Big)\Big)$, содержащая тор $T_{k_2} \subset F_{j_2}^{-1}\Big(j_2-\frac{1}{3}, 0, \ldots, 0\Big)$. Здесь черта сверху обозначает топологическое замыкание в $\mathbf{R}^n$. Из леммы 25 вытекает, что существует симплектическое многообразие Z_α и отображение моментов F_α: $Z_\alpha \to \bar{C}_\varepsilon\Big(j_1+\frac{1}{5}, j_2-\frac{1}{5}\Big)$ такие, что для каждого $t=1, 2$ пересечение $M'_{j_t} \cap Z_\alpha$ совпадает с V_{k_t}, $F_\alpha | V_{k_t} = F'_{j_t} | V_{k_t}$ и отображение F_α является расслоением со слоем T^n.

Пусть F''_α: $M'_{j_1} \cup Z_\alpha \cup M'_{j_2} \to \mathbf{R}^n$ — отображение, совпадающее с F'_{j_1} на M'_{j_1}, с F_α на Z_α и с $\bar{F}'_{j_2}$ на M'_{j_2}. Тогда прообраз $(F''_\alpha)^{-1}([0, m+1]_1)$ диффеоморфен склейке $X_{j_1} \underset{\theta}{\cup} X_{j_2}$ кирпичей X_{j_1} и X_{j_2} по диффеоморфизму граничных торов θ: $T_{k_1} \to T_{k_2}$. Возможно, однако, что диффеоморфизм θ неизотопен диффеоморфизму θ_α, при помощи которого торы T_{k_1} и T_{k_2} отождествляются в многообразии X^{n+1}. В этом случае при построении многообразия Z_α необходимо изменить выбор базисных циклов h_i в $H_1(T_{k_2}; Z)$, $h_i \to h'_i = \sum_{t=1}^{n} \Lambda_{it} h_t$, $\Lambda = \| \Lambda_{it} \| \in \mathrm{SL}(n, Z)$ так, чтобы диффеоморфизм $\theta' = \Lambda^{-1}\theta$ стал изотопен θ_α.

Таким образом, мы можем считать, что каждое многообразие $(F''_\alpha)^{-1}([0, m+1]_1)$ диффеоморфно объединению X_{j_1} и X_{j_2} в X^{n+1}. Следовательно, для многообразия $M' = (\bigcup_j M'_j) \cup (\bigcup_\alpha Z_\alpha)$ и отображения F, совпадающего по определению с F'_j на M'_j и с F_α на Z_α, имеем $F^{-1}([0, m+1]_1) \cong X^{n+1}$. К сожалению, многообразие M' является многообразием с кусочно-гладким краем и поэтому не удовлетворяет требованиям теоремы. Однако можно гладким образом обрезать углы многообразия M' и получить многообразие $M \subset M'$, сколь угодно мало отличающееся от M' и уже с гладким краем ∂W. Вырезаемое множество W необходимо взять в виде $W = M' \setminus M = F^{-1}(Y)$, $Y \subset F(M')$. Тогда край ∂M тривиально расслаивается над $F(\partial M)$ со слоем T^n. Образ $F((\partial M)_\alpha)$ каждой компоненты связности $(\partial M)_\alpha$ края ∂M является связной суммой двух $(n-1)$-мерных сфер и, следовательно, диффеоморфен S^{n-1}. Следовательно, край ∂M диффеоморфен несвязной сумме r копий многообразия $S^{n-1} \times T^n$, где r — число пар склеиваемых торов в данном разложении многообразия X^{n+1}. Теорема доказана.

27. В заключение этого параграфа приведем работы, по которым читатель может познакомиться с темами, близкими к затронутым в этой главе: [2], [4], [9], [29], [34], [37], [38],

[41], [44], [69], [77], [108]—[111], [127]—[129], [131], [132], [134], [136], [137], [142], [153]—[156], [197], [210], [218]—[221], [241], [242], [244], [315], [330], [331], [342], [345], [367], [414], [421], [458], [468], [469], [509], [526].

Глава 11

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ

§ 62. Характеристические классы лагранжевых слоений

1. Определение. Пусть M^{2n+r} — многообразие, ω — замкнутая 2-форма постоянного ранга $2n$. Слоение F^{n+r} на M^{2n+r}, удовлетворяющее условию $\omega|F=0$, называется *лагранжевым*. Для лагранжевых слоений имеют смысл обычные понятия теории слоений: бордантность, конкордантность, индуцируемость (последнее предполагает трансверсальность отображения распределению $\operatorname{Ker}\omega$). Обозначим $\operatorname{Ker}\omega$ буквой K, нормальное расслоение $TM|F$ — символом $\nu(F)$. Необходимые сведения из теории слоений см. в книге [291].

2. Лемма. а) *Распределение K интегрируемо и $K\subset F$*; б) *в каждой малой окрестности форма ω задает в многообразии слоев $M|K$ структуру симплектического многообразия с лагранжевым слоением $F|K$*; в) $\nu(F)^*\cong F|K$; г) *форма ω принадлежит идеалу 1-форм, задающих слоение.*

3. Замечание. Итак, локально лагранжево слоение (M, F, ω) изоморфно произведению r-мерного пространства на p-расслоение $(q=\text{const})$ в карте Дарбу U^{2n}, в которой $\omega=dp\wedge dq$. Для лагранжевых слоений имеется аналог теоремы Ботта.

4. Предложение. *Одночлены от вещественных классов Понтрягина расслоения $\nu(F)$ и класса формы $[\omega]\in H^2(M;\mathbf{R})$, имеющие степень больше $2\operatorname{codim}F$, равны нулю.*

5. Определение. Пусть на многообразии M существует такая невырожденная 1-форма λ, что $\omega=d\lambda$ и $\operatorname{Ker}\lambda$ трансверсально K. В этом случае лагранжево слоение называется *колежандровым*. Обозначим распределение $\operatorname{Ker}\lambda\cap K$ буквой L.

6. Лемма. а) *Распределение L интегрируемо*; б) *в каждой достаточно малой окрестности форма λ задает в многообразии $M|L$ контактную форму, характеристики которой касаются слоения $F|L$*; в) *$F\cap\operatorname{Ker}\lambda|L$ — лагранжево подрасслоение симплектического расслоения $\operatorname{Ker}\lambda|L$*; г) *распределение $F\cap\operatorname{Ker}\lambda$ интегрируемо.*

7. Замечание. Локально, тем самым, колежандрово слоение изоморфно произведению $(r-1)$-мерного пространства на (p, u)-расслоение $(q=\text{const})$ в карте Дарбу U^{2n+1} с $\lambda=pdq-du$.

8. Конструкция. Оснащенное слоение F коразмерности n задает на многообразии W_n-структуру и характеристические классы F отвечают элементам группы $H^*(W_n)$. Для лагранжевых слоений роль W_n играет алгебра G_n формальных векторных полей в $\mathbf{R}^{2n}$, сохраняющих форму $\omega = dp \wedge dq$, и лагранжево p-слоение; для колежандровых слоений роль W_n играет алгебра $\widetilde{G}_n$ векторных полей в $\mathbf{R}^{2n+1}$, сохраняющих форму $\lambda = pdq - du$, и (p, u)-слоение. Обозначим символом F_n модуль формальных рядов в $\mathbf{R}^n$, на котором W_n действует дифференцированием Ли, и символом M_n — его фактормодуль по постоянным функциям.

9. Предложение. а) *Алгебра Ли G_n порождена полями*

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i(q)\frac{\partial}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{817}$$

$$U(g) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g(q)}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial q_i}, \tag{818}$$

а $\widetilde{G}_n$ — полями $V(f)$ и

$$W(h) = h(q)\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h(q)}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{819}$$

б) *Имеем точные последовательности* $0 \to M_n \xrightarrow{i} G_n \to W_n \to 0$, $0 \to F_n \xrightarrow{j} \widetilde{G}_n \to W_n \to 0$, *где вложения* i: $M_n \to G_n$ *и* j: $F_n \to \widetilde{G}_n$ *заданы формулами* $i(g) = U(g)$, $j(h) = W(h)$.

10. Конструкция. Построение G_n-структуры по оснащенному лагранжеву слоению F повторяет известную конструкцию для W_n со следующими изменениями: рассматриваются многообразия S_i, состоящие из i-струй субмерсий M на карту Дарбу U^{2n}, отображающих слои F в слои p-расслоения, и определяющие симплектоморфизмы $M/K \cong U^{2n}$. Расслоение $S_1 \to S_0$ гомотопически эквивалентно расслоению реперов в $\nu(F) \to M$ и $TS_\infty \cong G_n$, что позволяет определить G_n-значную 1-форму на многообразии M.

Более геометрическое описание G_n-структуры таково. Фиксируем в каждой точке $x \in M$ лагранжеву трансверсаль T_x к F (т. е. $\omega | T_x = 0$) и отождествим все T_x с $\mathbf{R}^n$. Для близкой точки y площадка T_y задается в $M/K \cong T^*\mathbf{R}^n$ как график дифференциала производящей функции g_y, а слои F определяют росток диффеоморфизма φ_y: $\mathbf{R} = T_x \to T_y = \mathbf{R}^n$, близкий к тождественному. Дифференциал отображения $y \to (g_y, \varphi_y)$ задает на M 1-форму со значениями в $M_n + W_n \cong G_n$.

Аналогичным образом колежандрово слоение задает G_n-структуру (трансверсаль задается как 1-график функции в $J^1\mathbf{R}^1$).

11. Замечание. Итак, характеристические классы оснащенных лагранжевых и колежандровых слоений отвечают элементам групп когомологий $H^*(G_n)$ и $H^*(\tilde{G}_n)$. Опишем эти группы. Обозначим символом Y_n прообраз $2n$-остова базы в произведении универсального $U(n)$-расслоения на тривиальное расслоение $\mathrm{BU}(1)\to\mathrm{BU}(1)$, а символом Z_n — прообраз $2n$-остова базы в универсальном $\mathrm{U}(n)\times\mathrm{U}(1)$-расслоении.

12. Теорема. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^*(G_n)\cong H^*(Y_n),\quad H^*(\tilde{G}_n)\cong H^*(Z_n). \tag{820}$$

Доказательство. Так же как и в случае алгебры Ли W_n, надо применить спектральную последовательность Серра — Хохшильда к подалгебре $\mathrm{gl}(n)\subset G_n$.

13. Следствие. *Пространство когомологий $H^i(G_n)$ при $i\leqslant 2n$ порождено степенями некоторого двумерного класса. Этому классу отвечает класс когомологий 2-формы ω. При $j\leqslant 2n$ выполняется равенство $H^j(\tilde{G}_n)=0$.*

14. Конструкция. Рассмотрим подробнее случай $n=1$. Пространство $H^1(G_n)$ имеет одну двумерную и две трехмерные образующие. Прямая конструкция соответствующих классов такова. Пусть лагранжево слоение коразмерности 1 задано 1-формой α. Тогда $d\alpha=\alpha\wedge\eta$ и $\omega=\alpha\wedge\beta$. Трехмерные характеристические классы — это *класс Годбийона — Вея* $[\eta\wedge d\eta]$ и $[\omega\wedge\eta]$. Для колежандровых слоений коразмерности 1 характеристические классы таковы: $[\lambda\wedge d\lambda]$, $[\eta\wedge d\eta]$, $[\eta\wedge d\lambda]$, $[\lambda\wedge\eta\wedge d\eta]$, $[\lambda\wedge\eta\wedge d\lambda]$.

15. Пример. Примером колежандрова слоения коразмерности 1 является известное орициклическое слоение на поверхности рода g, $g\geqslant 2$, с метрикой постоянной отрицательной кривизны. В этом случае класс $[\eta\wedge d\lambda]$ кратен классу Годбийона — Вея.

16. Пример. Обозначим буквой P группу гиперболических поворотов и параллельных переносов плоскости. Базис инвариантных 1-форм составляют формы α_1, α_2, α_3 с $d\alpha_1=\alpha_3\wedge\alpha_1$, $d\alpha_2=\alpha_2\wedge\alpha_3$ и $d\alpha_3=0$. Эти формы опускаются на компактный фактор по дискретной подгруппе, т. е. на P/π. Форма α_1 задает там слоение, лагранжевое относительно 2-формы $\omega=\alpha_1\wedge\alpha_2$. Класс Годбийона — Вея этого слоения равен нулю, а класс $[\omega\wedge\eta]=[\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3]\neq 0$.

Существование колежандровых слоений накладывает ограничения на топологию многообразия.

17. Предложение. *На трехмерных замкнутых многообразиях с конечной фундаментальной группой не существует колежандровых слоений.*

Доказательство. Характеристическое векторное поле бездивергентно, поэтому предложение вытекает из теоремы 18.

18. Теорема. *Бездивергентное векторное поле v на замкнутом трехмерном многообразии с конечной фундаментальной группой не включается в слоение коразмерности один.*

Доказательство. Пусть слоение существует. По теореме Новикова оно имеет рибовскую компоненту. По теореме Пуанкаре о возвращении в открытом рибовском полнотории найдется такая малая окрестность U точки x, в которую траектория точки x возвращается бесконечно много раз. На слое $F_x \cong \mathbf{R}^2$ существует такая ограниченная область V, что $(F \setminus V) \cap U = \varnothing$ и поле v, касающееся F_x, за конечное время покидает V. Поэтому траектория не может возвращаться в U.

19. Замечание. Доказанная теорема верна и в дискретном случае, поле при этом заменяется на диффеоморфизм, сохраняющий объем и переводящий каждый слой слоения в себя.

20. Замечание. Результаты, изложенные в этом параграфе, получены С. Л. Табачниковым. Доказательство теоремы 18 указано В. Л. Гинзбургом.

§ 63. Обобщенные классы Маслова лагранжевых подмногообразий и симплектические связности

1. Изучение минимальных лагранжевых поверхностей в кэлеровых многообразиях M^{2n} было начато Харви и Лоусоном [380] для случая $M^{2n} = \mathbf{R}^{2n} = \mathbf{C}^n$ со стандартной кэлеровой структурой. Они обнаружили, что любая минимальная лагранжева поверхность $L \subset \mathbf{R}^{2n}$ является глобально минимальной (следовательно, и устойчивой). Известно, что лагранжево подмногообразие в симплектическом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ (а также в некоторых других кэлеровых многообразиях M^{2n}) обладает топологическим инвариантом — индексом Маслова и, более общо, характеристическими классами α_i Маслова — Арнольда, см. [169], [6], [290], [152]. А. Т. Фоменко сформулировал гипотезу о том, что для многих кэлеровых многообразий у минимальных лагранжевых подмногообразий характеристические классы Маслова — Арнольда должны быть нулевыми. Эта гипотеза была доказана им и Ле Хонг Ваном [86], [159] для случая $M^{2n} = \mathbf{R}^{2n}$. Она вытекает из общего критерия минимальности Ф-лагранжевых подмногообразий в эрмитовых многообразиях [158]. А. Т. Фоменко выдвинул гипотезу, что «разумно определенные» характеристические классы (аналоги классов Маслова) для минимальных лагранжевых подмногообразий в симплектических многообразиях значительного класса (с естественными римановыми метриками, согласованными с симплектическими структурами) должны быть равны нулю.

2. Конструкция. Если N — лагранжево подмногообразие стандартного симплектического пространства $\mathbf{R}^{2n}$, то сопоставление с точкой $x \in N$ перенесенного в начало координат касательного пространства $T_x N$ определяет отображение $f\colon N \to LG_n^{\mathbf{R}}$ многообразия N в лагранжев грассманиан $LG_n^{\mathbf{R}}$, которое позволяет определить характеристические классы лагранжевых подмногообразий. Мы обобщим эту конструкцию на случай лагранжевых подмногообразий. Другое определение индекса Маслова лагранжева подмногообразия в произвольном симплектическом многообразии дано в работе [10], см. также [368], [447]—[451], [161], [120].

Построенное отображение $f\colon N \to LG_n^{\mathbf{R}}$ индуцирует отображение $f^*\colon H^*(LG_n^{\mathbf{R}}) \to H^*(N)$ в когомологиях, и каждый класс когомологий $\alpha \in H^*(LG_n^{\mathbf{R}})$ определяет характеристический класс $f^*(\alpha) \in H^*(N)$ лагранжева подмногообразия $N \subset \mathbf{R}^{2n}$.

3. Напомним определение выделенного класса когомологий $\mu \in H^1(LG_n^{\mathbf{R}})$, который называется *классом Маслова*. Пусть $\det\colon U(n) \to S^1$ — отображение, ставящее каждому преобразованию его определитель. Поскольку $\det(\mathrm{O}(n)) = \{\pm 1\} = S^0$, то определено отображение $\det^2\colon \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) \to S^1$, являющееся расслоением со слоем $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$. На окружности S^1 рассмотрим дифференциальную форму $dz/2\pi iz$, класс когомологий которой порождает $H^1(S^1; \mathbf{R})$. Тогда на $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ определена дифференциальная форма $(\det^2)^*(dz/2\pi iz)$. Пространство $LG_n^{\mathbf{R}}$ можно отождествить с $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$, это отождествление зависит от выбора эрмитовой метрики и лагранжева подпространства, см. § 17. Имеет место следующее утверждение.

4. Теорема. *Определенный в п. 3 класс когомологий $\mu = [(\det^2)^*(dz/2\pi iz)]$ не зависит от элементов произвола, участвующих в его определении.*

Доказательство см., например, в [74].

5. Пусть $N \subset \mathbf{R}^{2n}$ — лагранжево подмногообразие и γ — кривая на N. Ей отвечает кривая, составленная из лагранжевых подпространств $X(t) = T_{\gamma(t)} N$. Если γ — замкнутая кривая, то определено число

$$l = \oint_{\gamma} (\det^2)^* \frac{dz}{2\pi iz}. \qquad (821)$$

В действительности мы определили элемент из $H^1(N; \mathbf{Z})$. Он называется *классом Арнольда — Маслова* для лагранжева подмногообразия N, см. [74].

6. Пусть M — гладкое многообразие, а ω — симплектическая структура на T^*M. Каждое касательное пространство $T_z(T^*M)$, $z \in T^*M$, является симплектическим векторным пространством, и в нем можно взять лагранжево подпространство V_z, касательное к вертикали, т. е. состоящее из таких касательных векторов ξ, что $d\pi_z \xi = 0$, где буквой π обозначена стандартная проекция $\pi\colon T^*M \to M$. Выбор римановой метрики на M индуцирует положительно определенное скалярное произведение на V_z, позволяющее отождествить $LG(T_z(T^*M))$ с $U(n)/O(n)$. Значит, $(\det^2)^*(dz/2\pi iz)$ — корректно определенная дифференциальная форма на расслоении $LG(T^*M)$, где $LG(T^*M)$ — расслоение над T^*M, у которого слой над точкой z состоит из всех лагранжевых подпространств в $T_z(T^*M)$. Если N — лагранжево подмногообразие в T^*M, то для любой кривой γ на N определена естественным образом кривая на $LG(T^*M)$. В этом случае, воспользовавшись (821), определим целое число; таким образом, получим элемент из $H^1(N; \mathbf{Z})$, который называется *классом Арнольда — Маслова* подмногообразия N. Этот класс не зависит от выбора римановой метрики.

7. Определение. Пусть (M^{2n}, ω) — почти симплектическое многообразие, т. е. гладкое многообразие M^{2n} размерности $2n$, снабженное невырожденной 2-формой ω. Связность Γ^i_{jk} на M^{2n} называется *почти симплектической связностью* (или *связностью, согласованной с* ω), если $\nabla\omega=0$.

Связностей, согласованных с симплектической структурой, бесконечно много. Они изучались в работах [56], [147]—[149], [318], [326], [381], [420], [476], [477], [508], [512], [514], [515].

8. Конструкция почти симплектических связностей. Пусть ∇^0 — произвольная связность на M. Положим

$$\theta(X, Y)=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}(\nabla^0_X\omega)(Y, E_{i^*})E_i-\sum_{i=1}^{n}(\nabla^0_X\omega)(Y, E_i)E_{i^*}\right], \tag{822}$$

где (E_i, E_{i^*}), $i=1, \ldots, n$, $i^*=i+n$, — произвольный локальный симплектический базис на M, т. е. $\omega(E_i, E_j)=\omega(E_{i^*}, E_{j^*})=0$, $\omega(E_i, E_{j^*})=-\omega(E_{j^*}, E_i)=\delta_{ij}$. Легко видеть, что θ характеризуется равенством $\omega(\theta(X, Y), Z)=\frac{1}{2}(\nabla^0_X\omega)(Y, Z)$, что доказывает независимость определения θ от выбора симплектического базиса. Непосредственное вычисление показывает, что $\nabla^1_X Y=\nabla^0_X Y+\theta(X, Y)$ — почти симплектическая связность.

Если есть другая связность $\nabla_X Y=\nabla^1_X Y+A(X, Y)$, то равенство $\nabla\omega=0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\omega(A(X, Y), Z)+\omega(Y, A(X, Z))=0$. Положим $B(X, Y, Z)=\omega(A(X, Y), Z)$, тогда $\nabla\omega=0$ эквивалентно свойству симметрии $B(X, Y, Z)=B(X, Z, Y)$.

Обратно, пусть имеется произвольное тензорное поле $B(X, Y, Z)$, удовлетворяющее соотношению $B(X, Y, Z)=B(X, Z, Y)$. Тогда $B(X, Y, Z)=\omega(A(X, Y), Z)$ можно решить относительно A и построить почти симплектическую связность $\nabla_X Y=\nabla^1_X Y+A(X, Y)$. В качестве такого решения можно взять

$$A(X, Y)=\sum_{i=1}^{n}B(X, Y, E_{i^*})E_i-\sum_{i=1}^{n}B(X, Y, E_i)E_{i^*}. \tag{823}$$

Итак, для почти симплектических связностей на многообразии M имеем формулу $\nabla_X Y = \nabla_X^0 Y + \theta(X, Y) + A(X, Y)$.

9. Лемма. *Многообразие (M, ω) допускает почти симплектическую связность без кручения тогда и только тогда, когда $d\omega = 0$, т. е. (M, ω) — симплектическое многообразие.*

10. Определение. Почти симплектическая связность с нулевым кручением называется *симплектической связностью.*

11. Предложение. *Пусть M — (почти) симплектическое многообразие, на котором симплектически действует группа Ли P (т. е. $g^*\omega = \omega$ для каждого диффеоморфизма $g \in P$). Тогда M имеет P-инвариантную (почти) симплектическую связность тогда и только тогда, когда M допускает P-инвариантную аффинную связность.*

12. Определение. Пусть $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ — тензор кривизны. По аналогии с римановым случаем определим *симплектический тензор кривизны* $S(X_1, X_2, X_3, X_4) = \omega(R(X_3, X_4) X_2, X_1)$.

13. Предложение. *Симплектический тензор кривизны S обладает следующими симметриями:*

$$S(X_1, X_2, X_3, X_4) = -S(X_1, X_2, X_4, X_3), \tag{824}$$

$$S(X_1, X_2, X_3, X_4) + S(X_1, X_3, X_4, X_2) + S(X_1, X_4, X_2, X_3) = 0, \tag{825}$$

$$S(X_1, X_2, X_3, X_4) = S(X_2, X_1, X_3, X_4). \tag{826}$$

14. Определение. *Тензор Риччи* $\sigma(X, Y)$ определяется обычной формулой

$$\sigma(X, Y) = \mathrm{tr}(V \to R(V, X) Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i (R(E_i, X) Y), \tag{827}$$

где E_i — симплектический базис, а ε^j — дуальный кобазис, т. е. $\varepsilon^i(E_j) = \delta^i_j$.

15. Лемма. *Тензор Риччи симплектической связности симметричен.*

16. Пример. Основной пример симплектической связности — связность Леви — Чивита на кэлеровом многообразии M с метрикой g и комплексной структурой J. Симплектическая структура ω определена равенством $\omega(X, Y) = g(X, JY)$. Далее, $S(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(JX_1, X_2, X_3, X_4)$ и $\sigma(X, Y) = r(X, Y)$, где R — риманов тензор кривизны, а r — тензор Риччи метрики g.

За дальнейшей информацией о симплектическом тензоре кривизны отсылаем читателя к работам И. Вайсмана.

17. Конструкция. Излагаемая ниже конструкция характеристических классов, обобщающих классы Маслова, принадлежит В. В. Трофимову [260] — [262]. На симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) рассмотрим связность Γ^i_{jk}, согласованную с симплектической структурой ω. Обозначим $C(x_0)$ множество путей, начинающихся и кончающихся в точке $x_0 \in M^{2n}$. Операция параллельного переноса вдоль путей $\gamma \in C(x_0)$ порождает группу $H_{x_0}(M^{2n})$ линейных преобразований пространства $T_{x_0}M^{2n}$. Эта группа называется *группой голономии* данной связности Γ^i_{jk}. Поскольку связность Γ^i_{jk} согласована с симплектической структурой ω, то группа $H_{x_0}(M^{2n})$ переводит лагранжево подпространство в $T_{x_0}M^{2n}$ в лагранжево подпространство, т. е. имеем действие группы голономии $H_{x_0}(M^{2n})$ на лагранжевом грассманиане $LG^{\mathbb{R}}_n$. Поэтому можно определить *приведенный лагранжев грассманиан* $\mathrm{HL}(T_{x_0}M^{2n}) = \mathrm{LG}^{\mathbb{R}}_n / H_{x_0}(M^{2n})$.

Предположим теперь, что $N^n \subset M^{2n}$ — лагранжево подмногообразие симплектического многообразия M^{2n}. Перенесем касательное пространство $T_x N$ вдоль произвольного пути $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, параллельно относительно симплектической связности Γ^i_{jk} в точку $x_0 \in N$, причем путь γ соединяет точку $x = \gamma(0) \in N$ с точкой $x_0 = \gamma(1)$. В итоге получим подпространство $\tau_\gamma(T_x N) \in LG(T_{x_0}M^{2n})$, которое естественно зависит от выбора пути γ. Подпространство $\tau_\gamma(T_x N)$ является лагранжевым, так как связность Γ^i_{jk} согласована с симплектической структурой ω. Возникает отображение f_γ: $N \to \mathrm{LG}(T_{x_0}M^{2n})$. Если взять другой путь β, соединяющий точку $x = \beta(0)$ с $x_0 = \beta(1)$, то подпространство $\tau_\beta(T_x N)$ отличается от $\tau_\gamma(T_x N)$ на некоторое преобразование из группы голономии $H_{x_0}(M^{2n})$, т. е. имеется корректно определенное отображение f: $N \to \mathrm{HL}(T_{x_0}M^{2n})$ лагранжева подмногообразия N в приведенный грассманиан $\mathrm{HL}(T_{x_0}M^{2n})$. Отображение f порождает индуцированное отображение f^*: $H^*(\mathrm{HL}(T_{x_0}M^{2n})) \to H^*(N)$ в когомологиях. Если $a \in H^*(\mathrm{HL}(T_{x_0}M^{2n}))$, то определен характеристический класс $a(N) = f^*(a) \in H^*(N)$ лагранжева подмногообразия $N \subset M^{2n}$.

18. Определение. Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие. $N \subset M^{2n}$ — лагранжево подмногообразие. Тогда каждый класс когомологий $a \in H^*(HL(T_{x_0}M^{2n}))$ приведенного грассманиана $\mathrm{HL}(T_{x_0}M^{2n})$ (относительно некоторой симплектической связности) определяет естественный *характеристический класс* $a(N) \in H^*(N)$ *типа Маслова* лагранжева подмногообразия $N \subset M^{2n}$.

19. Замечание. Симплектические связности определены с точностью до преобразования $\pi^i_j = 2^{-1}(\tau^i_j - \omega_{jk}\tau^k_s\omega^{si})$, где τ^i_j — произвольная тензорная форма, см., например, [508]. При таких деформациях группа голономии, вообще говоря, меняется. Например, верхняя полусфера $S^2_+ = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$ с формой площади и диск $D^2 = \{x^2 + y^2 < 1\}$ с формой площади симплектически диффеоморфны. Стандартные связности на диске и на сфере являются симплектическими. Однако их группы голономии различны: $H_{x_0}(D^2) = \{e\}$, но $H_{x_0}(S^2_+) \neq \{e\}$.

20. Теорема (В. В. Трофимов [262]). *Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} выбрана симплектическая связность с группой голономии G. Тогда каждый класс когомологий $a \in H^*(\mathrm{LG}(T_{x_0}M^{2n})/G)$ приведенного лагранжева грассманиана $\mathrm{LG}(T_{x_0}M^{2n})/G$ однозначно определяет характеристический класс $a(N) \in H^*(N)$ лагранжева подмногообразия $N \subset M^{2n}$.*

21. Замечание. В общем случае группа голономии есть полная симплектическая группа. Она действует транзитивно на лагранжевом грассманиане (см. § 17), и, следовательно, приведенный лагранжев грассманиан в этом случае тривиален. Другой крайний случай связан с классическими классами в $\mathbf{R}^{2n}$. В этом случае группа голономии $G = H_{x_0}(\mathbf{R}^{2n})$ тривиальна, т. е. $G = \{e\}$ и приведенный грассманиан есть лагранжев грассманиан $\mathrm{LG}_n^{\mathbf{R}}$. При увеличении группы голономии G приведенный грассманиан HL_n уменьшается пока в случае общей связности не превратится в точку. Итак, запас характеристических классов лагранжевых подмногообразий измеряется группой голономии симплектической связности. Классификацию групп голономии многообразий с аффинной связностью см. в работе М. Берже [320] или в [495].

22. Частный случай. Предположим, что связность, согласованная с симплектической структурой, плоская и многообразие M^{2n} односвязно. Тогда группа голономии $H_{x_0}(M^{2n})$ действует на лагранжевом грассманиане тривиально и приведенный грассманиан $\mathrm{HL}(T_{x_0}M^{2n})$ совпадает с лагранжевым грассманианом $\mathrm{LG}(T_{x_0}M^{2n})$. Известно, что $H^*(\mathrm{LG}(T_{x_0}M^{2n}); \mathbf{Z}_2) = Z_2[w_1, \ldots, w_n]/(w_1^2, \ldots, w_n^2)$. Поэтому характеристические классы Маслова лагранжевых подмногообразий плоских односвязных симплектических многообразий принимают значения в кольце $f^*(\mathbf{Z}_2[w_1, \ldots, w_n]/(w_1^2, \ldots, w_n^2)) \subset H^*(N; \mathbf{Z}_2)$.

23. Конструкция. Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} задан полный инволютивный набор функций $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Совместные поверхности уровня $N = \{f_1 = c_1, \ldots, f_n\}$ являются лагранжевыми подмногообразиями, связные компактные компоненты которых диффеоморфны торам T^n, см. [8], [102]. В этом случае можно применить предыдущую конструкцию к N и получить *характеристические классы $a(F) \in \wedge(w_1, \ldots, w_s)$ полного инволютивного семейства F*, здесь $\wedge(w_1, \ldots, w_s)$ — внешняя алгебра над $w_1, \ldots, w_s$.

24. Замечание. Алгебра Ли группы голономии в силу классической теоремы Амброузера, Зингера [126] определяется в терминах тензора кривизны, поэтому фактически характеристические классы лагранжевых подмногообразий описываются тензором кривизны симплектической связности. Грубо говоря, чем «больше» кривизны, тем «меньше» приведенный лагранжев грассманиан, а следовательно, тем меньше характеристических классов. Для модельных примеров S_+^2 и D^2

имеем $\mathrm{HL}(S^2_+)=\{pt\}$, $\mathrm{HL}(D^2)=S^1$. Пространство S^2_+ имеет постоянную ненулевую кривизну, а кривизна диска D^2 равна нулю (относительно стандартных связностей). Геодезические линии в обоих примерах имеют нулевой индекс (в соответствии с гипотезой А. Т. Фоменко), так как в первом случае тривиальны когомологии приведенного лагранжева грассманиана, а во втором — тривиально отображение $f\colon N\to \mathrm{LG}(T_{x_0}D^2)=S^1$.

25. Теорема. *Пусть M — кэлерово многообразие, N — вполне геодезическое лагранжево подмногообразие. Тогда все характеристические классы типа Маслова $a(N)$ подмногообразия $N\subset M$ равны нулю.*

Доказательство. Действительно, если g_{ij} — кэлерова структура на M, то связность, согласованная с g_{ij}, дает аффинную связность, одновременно риманову и симплектическую. Поэтому распределение касательных плоскостей T_xN, $x\in N$, на N дает параллельное распределение относительно симплектической связности. Следовательно, отображение $f\colon N\to LG(T_{x_0}M)$ тривиально, и поэтому все классы типа Маслова равны нулю.

26. Обобщение. Конструкция характеристических классов, изложенная выше, обобщается на лагранжевы подрасслоения в векторных расслоениях с симплектической структурой. Предположим, что в векторном расслоении $p\colon E\to B$ в каждом слое $p^{-1}(x)$ задана симплектическая структура $\omega_{ij}(x)$, гладко зависящая от точки $x\in B$ базы B. Пусть $\pi\colon X\to B$ — такое локально тривиальное подрасслоение в E, $X\subset E$, что все слои $\pi^{-1}(b)$ являются лагранжевыми подмногообразиями в слоях расслоения $p\colon E\to B$. Зададим в расслоении $p\colon E\to B$ связность $\Gamma^i_{\alpha k}$, согласованную с кососимметрическим скалярным произведением $\omega_{ij}(x)$. Тогда касательное пространство $T_x(\pi^{-1}(b))\subset p^{-1}(b)$ к слою $\pi^{-1}(b)$ сначала параллельно сдвигаем в начало координат $0\in p^{-1}(b)$, а затем, используя связность $\Gamma^i_{\alpha k}$, это пространство параллельно переносим в фиксированный слой $p^{-1}(b_0)$, $b_0\in B$. Получаем корректно определенное отображение $f\colon X\to \mathrm{LG}(p^{-1}(b_0))/G$, которое позволяет определить *характеристические классы* $a(\pi)=f^*(a)\in H^*(X)$, где $a\in H^*(\mathrm{LG}(p^{-1}(b_0))/G)$ — произвольный класс когомологий приведенного лагранжева грассманиана $\mathbf{LG}(p^{-1}(b_0))/G$ в слое $p^{-1}(b_0)$, $b_0\in B$, $G=H_{b_0}(p)$ — группа голономии связности $\Gamma^i_{\alpha k}$. В случае касательного расслоения $p=TM$ к симплектическому многообразию M получим характеристические классы, описанные выше.

27. На лагранжевом подмногообразии в $T^*\mathbf{R}^n$, лагранжево изотопном нулевому сечению, определена целозначная функция, сопоставляющая точке общего положения индекс Маслова пути из этой точки на бесконечность. Наша цель — описать нули этой функции.

28. Определение. Пусть M — связное гладкое многообразие без края, $N \subset T^*M$ — лагранжево подмногообразие, изотопное нулевому сечению в классе лагранжевых подмногообразий, совпадающих с ним вне компакта. *Индексом регулярной точки* проекции $N \to M$ называется индекс Маслова ориентированного пути на N, соединяющего эту точку с отмеченной.

29. Определение. *Производящим семейством лагранжевой иммерсии* $i: N \to T^*M$ называется такая гладкая функция $(x, q) \to S(x, q)$, $S: \mathbf{R}^n \times M \to \mathbf{R}$, что: 1) $S_x: \mathbf{R}^n \times M \to \mathbf{R}^n$ трансверсально к $\{0\} \subset \mathbf{R}^n$; 2) $i(N) = \{(p, q) \in T^*M \mid S_x(x, q) = 0,\ p = S_q(x, q)$ для некоторого $x \in \mathbf{R}^n\}$.

Производящее семейство называется *квадратичным на бесконечности*, если для любой точки $q \in M$ функция $f_q(x) = S(x, q)$, $f_q: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, совпадает вне некоторого шара с невырожденной квадратичной формой.

30. Теорема (А. Б. Гивенталь [73]). *При подходящем выборе отмеченной точки прообраз каждого регулярного значения проекции $N \to M$ содержит точку индекса нуль.*

Доказательство теоремы 30 вытекает из следующей глубокой теоремы 31 симплектической топологии (подробности см. в работе [73]).

31. Теорема (Сикорав [494]). *Лагранжево подмногообразие $N \subset T^*M$, совпадающее с нулевым сечением вне компакта и гамильтоново, изотопное ему, можно задать производящим семейством, квадратичным на бесконечности.*

32. Замечание. *Гамильтонова изотопия* задается семейством симплектоморфизмов, определяемых глобальным гамильтонианом с компактным носителем.

§ 64. Вполне интегрируемая гамильтонова система, торы Лиувилля которой имеют нетривиальные индексы Арнольда — Маслова

1. В этом параграфе мы построим примеры вполне интегрируемых систем, для которых инварианты, определенные в п. 6 § 63, отличны от нуля. Эти результаты принадлежат З. Тевдорадзе.

2. Обозначения. Рассмотрим пример сферического маятника. Для него фазовое пространство — это кокасательное расслоение к двумерной сфере $S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Пользуясь римановой метрикой на S^2, отождествим T^*S^2 с касательным расслоением TS^2. Гамильтониан системы имеет вид $E(x, v) = 2^{-1}\langle v, v\rangle + x_3$, $x \in S^2$, $v \in T_xS^2$, $\langle x, v\rangle = 0$. Кинетический момент относительно оси x_3 имеет вид $I(x, v) = \langle Qx, v\rangle$, где $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. $I(x, v) = x_1 v_2 - v_1 x_2$.

3. В точках $(x, v)\in TS^2$, где выполняются соотношения

$$\langle x, dx\rangle=0,\quad \langle dx, v\rangle+\langle x, dv\rangle=0, \tag{828}$$

$$\langle v, dv\rangle+dx_3=0, \tag{829}$$

$$\langle Qdx, v\rangle+\langle Qx, dv\rangle=0, \tag{830}$$

функции E и I функционально зависимы. Пусть $e_3=(0, 0, 1)$. Тогда точками, где имеет место функциональная зависимость, являются $x=\pm e_3$, $v=0$ и $v=\alpha\cdot Qx$, $1+\alpha^2 x_3=0$, $x_3=\pm 1$. Они соответствуют горизонтальному действию на сфере, т. е. $-1<x_3<0$, $\|v\|=(1-x_3^2)^{1/2}(-x_3)^{-1/2}$. Соответствующие сингулярные значения отображения $f(I, E)$:

$$f=(0, \pm 1),\quad f=\left(\alpha-\alpha^{-3},\ \ \frac{1}{2}\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha^{-2}\right). \tag{831}$$

Действительно, поскольку $v=\alpha(-x_2, x_1, 0)$, то

$$I=-x_2v_1+x_1v_2=\alpha\left(1-x_3^2\right)=\alpha\left(1-\alpha^{-4}\right)=\alpha-\alpha^{-3}, \tag{832}$$

$$E=\frac{1}{2}\langle v, v\rangle+x_3=\frac{1}{2}\alpha^2\left(1-x_3^2\right)+x_3=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha^2\left(1-\alpha^{-4}\right)-\alpha^2=\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha^{-2}. \tag{833}$$

Если α стремится к ± 1, то (831) стремится к $(0, -1)$. При $I\neq 0$ имеем $Qx\neq 0$, т. е. $x\neq\pm e_3$ и мы можем ввести полярные координаты $x_1=\sin\varphi\cos\theta$, $x_2=\sin\varphi\sin\theta$ и $x_3=\cos\varphi$, где $\theta\in\in\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, $\varphi\in(0, \pi)$. Риманова метрика имеет вид $ds^2=d\varphi^2+{}+\sin^2\varphi\, d\theta^2$. Если $P_1=\partial/\partial\varphi$, $P_2=\partial/\partial\theta$, то соответствующие координаты на T^*S^2 обозначим φ, θ, p_1, p_2. Каноническая 1-форма на T^*S^2 имеет вид $\alpha=p_1d\varphi+p_2d\theta$. Эта форма с помощью указанной римановой метрики переписывается на TS^2 в виде $\beta=\sin^2\varphi\cdot\dot\theta d\theta+\dot\varphi d\varphi$, где φ, θ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$ — координаты на TS^2 (если $X=a_1\dfrac{\partial}{\partial\varphi}+a_2\dfrac{\partial}{\partial\theta}\in TS^2$, то $\dot\varphi(X)=a_1$, $\dot\theta(X)=a_2$). Симплектическая форма на TS^2 принимает вид

$$\omega=d\dot\varphi\wedge d\varphi+\sin 2\varphi\cdot\dot\theta\, d\varphi\wedge d\theta+\sin^2\varphi\, d\dot\theta\wedge d\theta. \tag{834}$$

В этих координатах функции E и I выражаются следующим образом:

$$I=\dot\theta\sin^2\varphi, \tag{835}$$

$$E=2^{-1}\dot\theta^2\sin^2\varphi+2^{-1}\dot\varphi^2+\cos\varphi=2^{-1}\dot\varphi^2+V_I(\varphi), \tag{836}$$

где

$$V_I(\varphi)=\frac{1}{2}\,\frac{I^2}{\sin^2\varphi}+\cos\varphi \tag{837}$$

— эффективный потенциал. Из (834)—(836) следуют равенства

$$\operatorname{sgrad} I = \frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{838}$$

$$\operatorname{sgrad} E = \dot\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + \dot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi\cdot\dot\theta^2 + \right.$$

$$\left. + \sin\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\dot\varphi} - \frac{\dot\varphi\,\dot\theta\sin 2\varphi}{\sin^2\varphi}\,\frac{\partial}{\partial\dot\theta}. \tag{839}$$

Если отождествить плоскость $(\varphi, \dot\varphi)$ с пространством $I=\mathrm{const}$, факторизованным по орбитам $\operatorname{sgrad} I$ (θ-окружностям), то наша система индуцирует на этой плоскости систему с гамильтонианом E, см. (833), (836). Редуцированная симплектическая форма на $(\varphi, \dot\varphi)$ принимает вид $d\dot\varphi\wedge d\varphi$. Особые точки редуцированной системы задаются соотношениями

$$\dot\varphi = 0, \quad I^2(\sin\varphi)^{-3}\cos\varphi + \sin\varphi = 0. \tag{840}$$

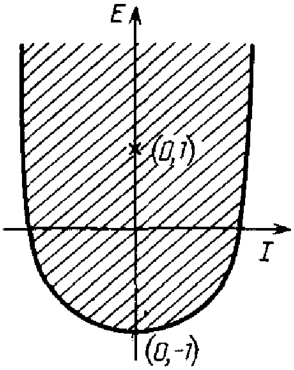


Рис. 88

Для редуцированной системы существует единственная особая точка, и так как $E\to+\infty$ при $\varphi\to 0$, $\varphi\to\pi$ или $|\dot\varphi|\to\infty$, то эта точка является точкой глобального минимума E. Отсюда вытекает, что образ отображения f задается соотношениями $I=\alpha-\alpha^{-3}$, $E\geqslant\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha^{-2}$ (рис. 88).

4. Фиксируя $(I_0, E_0)\in\mathbf{R}^2$, $I_0\neq 0$, мы получим гладкую кривую, диффеоморфную окружности

$$\gamma_1 = \left\{(\varphi, \dot\varphi)\in(0, \pi)\times\mathbf{R} \mid E_0 = \frac{1}{2}\dot\varphi^2 + V_{I_0}(\varphi)\right\}. \tag{841}$$

Для $(\varphi, \dot\varphi)\in\gamma_1$ из (835), (836) найдем $\dot\theta$, $\theta\in[0, 2\pi]$ фиксировано. Обозначим γ_2 окружность, получающуюся, если фиксированы φ, $\dot\varphi$, $\dot\theta$ и θ пробегает отрезок $[0, 2\pi]$. Гомотопические классы окружностей γ_1 и γ_2 являются базисом для $H_1(f^{-1}(I_0, E_0))$. Вычислим индекс для тора

$$T^2 = f^{-1}(I_0, F_0), \quad I_0\neq 0. \tag{842}$$

5. Т е о р е м а (З. Тевдорадзе). *Имеет место равенство* $\alpha_{T^2} = (2, 2)\in\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} = H^1(T^2 = f^{-1}(I_0, E_0);\ \mathbf{Z})$, *где* $I_0\neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим окружность γ_2 в TS^2, которая определяется соотношениями $\varphi=\varphi_0\neq 0$, $\dot\varphi=\dot\varphi_0$, $\dot\theta=\dot\theta_0\neq 0$, $\theta\in[0, 2\pi]$. Построим в явном виде отображение $P\colon T^2\to \mathrm{LG}(TS^2)$ и вычислим интеграл (821). Из формул (838),

(839) вытекает, что

$$P(\gamma_1)(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi_0,\theta,\dot\varphi_0,\dot\theta_0),\ \dot\varphi_0\frac{\partial}{\partial\varphi}(\varphi_0,\theta,\dot\varphi_0,\dot\theta_0)+\right.$$

$$\left.+\dot\theta_0\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi_0,\theta,\dot\varphi_0,\dot\theta_0)+A_0\frac{\partial}{\partial\dot\varphi}(\varphi_0,\theta,\dot\varphi_0,\dot\theta_0)+B_0\frac{\partial}{\partial\dot\theta}(\varphi_0,\theta,\dot\varphi_0,\dot\theta_0)\right), \tag{843}$$

где

$$A_0=\frac{1}{2}\sin 2\varphi_0\cdot\dot\theta_0^2+\sin\varphi_0, \tag{844}$$

$$B_0=-\frac{\sin 2\varphi_0\cdot\dot\varphi_0\cdot\dot\theta_0}{\sin^2\varphi_0}. \tag{845}$$

Окружность изотопна окружности, для которой $\dot\varphi_0=0$. Заметим, что $\gamma_2\in TS_+^2=D^2\times\mathbf{R}^2$, где S_+^2 — верхняя полусфера. Поскольку $\mathrm{LG}(TS_+^2)=D^2\times\mathbf{R}^2\times\mathrm{LG}(\mathbf{R}^4)$, то мы ограничимся рассмотрением $\mathrm{LG}(\mathbf{R}^4)$. Индекс не зависит от выбора метрики на S^2, поэтому можно считать, что $\frac{\partial}{\partial\dot\varphi}$ ортогонально $\frac{\partial}{\partial\theta}$ относительно метрики. Отображение P тогда принимает вид

$$P(\gamma_2)(\theta)=\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{\partial}{\partial\dot\varphi}\right) \tag{846}$$

($A_0\neq 0$ в силу (840)). Из (846) следует, что $P(\gamma_2)(\theta)$ определяется вектором $e=\partial/\partial\dot\varphi$ и точкой θ на окружности γ_2 (рис. 89).

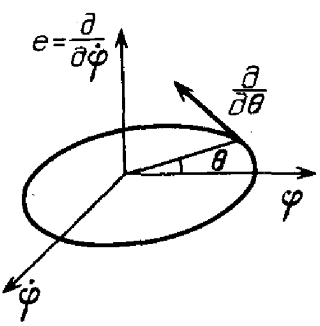


Рис. 89

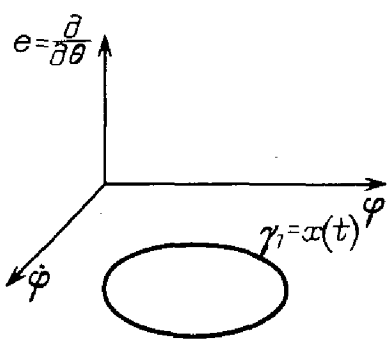


Рис. 90

Если в $\mathbf{R}^4$ фиксируем лагранжеву плоскость (e, e_0), где $e_0=\frac{\partial}{\partial\theta}(\theta=0)$, то $P(\gamma_2)(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}$. В силу (840) имеем $l(\gamma_2)=2$.

Рассмотрим окружность γ_1 в плоскости $(\varphi,\dot\varphi)$, над которой расслоение опять тривиально. Поскольку $\dot\theta=I/\sin^2\varphi$, то

$\frac{\partial}{\partial\theta}=-\frac{\sin^4\varphi}{I\sin 2\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Если t — параметр на кривой γ, то гауссово отображение P принимает вид

$$P(\gamma_1(t))=\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(x(t), 2\dot\varphi(x(t))\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(x(t))+A(x(t))\frac{\partial}{\partial\dot\varphi}(x(t))), \qquad (847)$$

где $A(x(t))=2^{-1}\sin 2\varphi(x(t))\cdot\dot\theta^2(x(t))+\sin\varphi(x(t))$. Снова отображение $P(\gamma_1)$ определено вектором $e=\partial/\partial\theta$ и точкой на кривой $x(t)$ (рис. 90). Непосредственное вычисление дает равенство $l(\gamma_1)=2$. Окончательно получаем требуемое равенство $\alpha_{T^2}=(2, 2)\in\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}=H^1(f^{-1}(I_0, E_0); \mathbf{Z})$, где $I_0\neq 0$. Теорема доказана.

Приложение. НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ

На семинаре «Современные геометрические методы» был сформирован список задач, представляющих интерес с точки зрения развития идей и тем, затронутых в книге. Он является результатом совместного обсуждения всеми участниками семинара. Здесь мы частично воспроизводим его.

1. Две скобки Пуассона называются *согласованными*, если любая их линейная комбинация с постоянными коэффициентами снова является скобкой Пуассона. Имеется ли какой-нибудь аналог теоремы Дарбу для таких скобок, т. е. существует ли локальная система координат, в которой обе скобки имеют простой вид? Рассмотреть простейшие ситуации.

2. Пусть на симплектическом многообразии задана пара коммутирующих функций h и f. Если функции независимы, то справедлива теорема Лиувилля и можно определить переменные «действие — угол». Пусть пара функций h и f имеет боттовскую особенность. Что остается от теоремы Лиувилля, могут ли быть определены аналоги переменных «действие — угол»?

3. Понятие боттовости хорошо определено на изоэнергетической поверхности. Дать определение боттовских особенностей в целом на симплектическом многообразии M^4 (сначала локально). Дать определение боттовости полного инволютивного набора функций на симплектическом многообразии M^{2n} в целом.

4. Является ли боттовость условием общего положения? Более точно, пусть f — первый интеграл гамильтоновой системы $\dot{x}=\operatorname{sgrad} h_x$ на изоэнергетической поверхности $Q^3=\{x\in M^4 \mid h(x)=\text{const}\}$. Можно ли мало возмутить гамильтониан с сохранением интегрируемости (или возмутить симплектическую структуру) так, чтобы новый первый интеграл был боттовским? Справедливо ли утверждение для M^4.

5. Пусть дана интегрируемая гамильтонова система $\dot{x}=\operatorname{sgrad} h_x$ на M^4 с дополнительным первым интегралом f. Рассмотрим отображение моментов $F=(h, f)$: $M^4 \to \mathbf{R}^2$ и бифуркационную диаграмму $\Sigma=\{F(x) \mid \operatorname{rk} dF(x)<2\}$. В силу теоремы Лиувилля на множестве $F^{-1}(K\backslash\Sigma)$, где $K=\operatorname{Im} F$, могут быть определены переменные действия, которые являются функциями от h и f, $s_1=s_1(h, f)$, $s_2=s_2(h, f)$. Поэтому линии уровня переменных действия могут быть нарисованы на множестве $K\backslash\Sigma$. Требуется нарисовать качественную картину их поведения, выбрав в качестве циклов на торах Лиувилля циклы, пришедшие с Σ.

6. Пусть A — алгебра Горенштейна (например, алгебра инвариантов связной полупростой группы Ли). Тогда ее минимальная свободная резольвента обладает следующим свойством симметрии: если s — длина этой резольвенты, то ранги i-го и $(s-i)$-го свободных модулей в этой резольвенте совпадают для всех i. Обобщить алгоритм (t) на тензорные произведения $L\otimes A$ алгебры Ли L и алгебры Горенштейна A.

7. Можно ли продолжить действие функтора (t) с алгебр Ли на симплектические многообразия? Более точно, пусть M — симплектическое многообразие, на котором в пространстве $C^\infty(M)$ выделена конечномерная подалгебра F, удовлетворяющая условиям некоммутативной теоремы Лиувилля. Существует ли симплектическое многообразие N, которое «канонически» строится по M, с алгеброй Ли функций (t) (F), удовлетворяющей некоммутативной теореме Лиувилля уже автоматически.

8. Дать классификацию S-представлений полупростых групп Ли. Выяснить вопрос о полной интегрируемости полученных гамильтоновых систем.

9. Построить в явном виде секционные операторы для всех конечномерных представлений полупростых алгебр Ли. Выяснить вопрос о гамильтоновости полученных уравнений, а также вопрос о полной интегрируемости.

10. Выписать в явном виде через θ-функции римановых поверхностей решения уравнений Эйлера $\dot{x}=\{C(x), x\}$ на пространстве $\Omega(G)^*$ для полупростых алгебр Ли G.

11. Задачи о допустимом виде бифуркационных диаграмм. Пусть f, h — коммутирующие функции на компактном симплектическом многообразии M^4, $F\colon M^4\to\mathbf{R}^2$ — отображение моментов. Пусть особенности отображения моментов устроены максимально просто: это либо минимаксные боттовские окружности, либо невырожденные точки типа «центр — центр». Тогда образ отображения моментов диффеоморфен либо кольцу, либо многоугольнику. Могут ли быть дырки в образе $F(M^4)$ в общем случае (кроме кольца; этот случай, по-видимому, является исключительным)? Может ли бифуркационная диаграмма содержать петли?

12. Известно, что образ отображения моментов при действии тора является многоугольником. Верно ли обратное утверждение (при условии, что сторонам отвечают минимаксные боттовские окружности, а вершинам — невырожденные точки типа «центр — центр»). Описать четырехмерные симплектические многообразия, допускающие гамильтоновы действия тора T^2. Описать изоэнергетические поверхности, допускающие гамильтоновы действия тора T^2.

13. Пусть задана система кусочно гладких кривых $\Sigma\subset\mathbf{R}^2$, и мы интересуемся возможностью ее реализации в виде бифуркационной диаграммы отображения момента некоторой интегрируемой системы. Как показывают примеры, вообще говоря, этого сделать нельзя. Рассмотрим окрестность $U(\Sigma)$ множества Σ в $\mathbf{R}^2$. Может ли быть реализована эта окрестность, т. е. существует ли некомпактное многообразие M^4 и пара коммутирующих на нем функций f, h таких, что $\operatorname{Im} F=U(\Sigma)$ и Σ — настоящая бифуркационная диаграмма?

14. Пусть $M^4=T^2\times[0,1]\times[0,1]$, f, g — параметры на отрезках $[0,1]$ и $[0,1]$. Пусть на $M_1=T^2\times[0,1]\times[0,\varepsilon]$ и $M_2=T^2\times[0,1]\times[1-\varepsilon,1]$ заданы симплектические структуры ω_1 и ω_2 соответственно такие, что $\{f,g\}_1\equiv 0$ и $\{f,g\}_2\equiv 0$. Известно (Браилов А. В.), что если косые градиенты имеют одинаковую ориентацию на торах в смысле двух скобок, то можно продолжить симплектические структуры ω_1, ω_2 в единую симплектическую структуру ω на M^4 с сохранением условия $\{f,g\}=0$. Пусть теперь $M^4=T^2\times[0,1]\times S^1$, где $[0,1]\times S^1$ — кольцо. Пусть симплектические структуры ω_1 и ω_2 заданы на множествах $T^2\times[0,\varepsilon]\times S^1$ и $T^2\times[1-\varepsilon,1]\times S^1$ соответственно, причем f и g коммутируют (здесь f и g параметры на $[0,1]$ и S^1). Определить необходимые и достаточные условия сшивания этих структур в единую структуру ω на M^4.

15. Вариационные задачи на симплектическом многообразии (M^{2n},ω). Хорошо известно, что на M^{2n} можно определить почти комплексную структуру J, $J^2=-\mathrm{id}$, согласованную с ω, т. е. такую J, что $\omega(JX, JY)=\omega(X, Y)$ и $g(X, Y)=\omega(X, JY)$ — риманова метрика. Напомним явную конструкцию для J. На M^{2n} зададим произвольную метрику k и определим оператор A: $T_xM^{2n}\to T_xM^{2n}$ равенством $\omega(X, Y)=k(AX, Y)$ для любых $X, Y\in T_xM^{2n}$. Оператор $(-A^2)$ является положительно определенным самосопряженным оператором относительно скалярного произведения k, т. е. $k(-A^2X, Y)=$ $=k(X, -A^2Y)$ и $k(-A^2X, X)>0$, $X\neq 0$. В этой ситуации определен оператор $(-A^2)^{1/2}$. Тогда $J=(-A^2)^{-1/2}A$ — искомая почти комплексная структура. Обозначим через $J(M^{2n},\omega)$ пространство почти комплексных структур, согласованных с ω.

а) Пусть $N^k\subset M^{2n}$ — подмногообразие в M^{2n}, vol — форма объема на N^k для метрики $g(X, Y)|_N=\omega(X, JY)|N$. На пространстве $J(M^{2n},\omega)$ рассмотрим функционал $V=\int\limits_N \mathrm{vol}$. Найти его критические точки, построив соответствующий формализм. Какие свойства функционала V отражают лагранжевость подмногообразия N?

б) На пространстве $J(M^{2n}, \omega)$ можно рассмотреть функционал Янга — Миллса

$$JM=\int\limits_{M^{2n}} \mathrm{tr}\, F\wedge *F,$$

где F — форма кривизны, а $*$ — оператор Ходжа для метрики $\omega(X, JY)$, $J\in J(M^{2n}, \omega)$. Найти его критические точки. Выяснить их связь с уравнениями Янга — Миллса $d*F=0$ и условием автодуальности $*F=F\wedge\omega\wedge\ldots\wedge\omega$ и антиавтодуальности $*F=-F\wedge\omega\wedge\ldots\wedge\omega$. Разобрать случай кэлеровых многообразий. В этой ситуации естественно возникает задача построения пространства модулей.

в) Фиксируем некоторую почти комплексную структуру $J\in J(M^{2n}, \omega)$. Рассмотрим функционал $V(N)$ из п. а. Найти его критические точки. Справедлива ли гипотеза Фоменко об обращении в ноль классов Маслова критического подмногообразия. Рассмотреть отдельно кэлеров случай и орбиты коприсоединенного представления компактных групп Ли.

г) В работе M. Gromov, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds // Invent. Math.— 1985.— V. 82.— P. 307—347 доказаны теоремы существования J-голоморфных кривых и показано, что они являются минимальными. Вычислить для них обобщенные классы Маслова.

16. Вычислить классы Маслова торов Лиувилля для классических вполне интегрируемых гамильтоновых систем, например, для трех классических случаев движения твердого тела, закрепленного в одной точке.

17. *Вычислить обобщенные классы Маслова торов Лиувилля для многомерного обобщения уравнений движения твердого тела на случай полупростых алгебр Ли (секционные операторы $\varphi_{a,b,D}$).*

18. Выяснить возможность перенесения результатов с тензорных расширений на случай расширений вида $\mathrm{Tor}^i(G, A)$.

19. Обобщить конструкцию Ле Нгок Тьеуена на случай оператора Ω такого, что $\Omega^k=\mathrm{id}$.

20. Изучить расширения $G\otimes A$, удовлетворяющие условиям

$$\{f^a, g^b\}=a_1\{f, g\}^{\pi_1(a,b)}+\ldots+a_n\{f, g\}^{\pi_n(a,b)},$$

$$\{f^a, g^b\}=\sum_{(i_1,\ldots,i_n)} a_{i_1\ldots i_n}\{f, g\}^{\pi_{i_1}(a,b)}\ldots\{f, g\}^{\pi_{i_n}(a,b)}.$$

21. Выяснить связь перестроек торов Лиувилля с вещественными частями комплексных перестроек в особых точках.

22. Проанализировать, какие методы построения функций в инволюции дают боттовские интегралы. Указать эффективный критерий боттовости.

23. Дать регулярный способ построения согласованных скобок Пуассона.

24. Существует ли вложенное (но не иммерсированное) компактное лагранжево подмногообразие в $T^*\mathbf{R}^n$, классы Маслова которого равны нулю (проблема М. Аудин)?

25. Построить аналог теории уравнений Эйлера для других классов алгебр (например, для коммутативных алгебр).

26. Один из простейших многомерных интегрируемых случаев — это аналог уравнения движения твердого тела на компактных алгебрах Ли (так называемая компактная серия секционных операторов). Интегрируемость связана здесь с наличием пары согласованных скобок Пуассона, а в этой ситуации первые интегралы обладают рядом хороших свойств. Простейший пример в этой серии — уравнения Эйлера на алгебре Ли su(3). Орбиты компактны и шестимерны. Образ отображения моментов — это некоторая фигура в $\mathbf{R}^3$, ограниченная кусками бифуркационной диаграммы. Внутри фигуры нет никаких перегородок (это следствие общей теории), но могут быть одномерные куски. Задача состоит в полном исследовании этого случая. Какая связь имеется между точками типа «фокус — фокус» и одномерными кусками бифуркационной диаграммы?

27. Рассмотрим уравнения движения 4-мерного твердого тела на алгебре Ли $so(4)$. *Топологическая структура этого случая полностью исследована* А. А. Ошемковым. Известно, что множество критических точек отображения моментов совпадает с объединением множества сингулярных элементов некоторых алгебр Ли, отвечающих скобкам из семейства согласованных скобок Пуассона. Эти алгебры Ли разбиваются на несколько принципиально различных типов. Найти связь с бифуркационной диаграммой, т. е. охарактеризовать бифуркационную диаграмму в терминах семейства алгебр Ли.

28. Установить связь теории Фоменко с теорией Вальдхаузена.

29. Можно ли дать определение и построить теорию разложения на зейфертовы компоненты в неботтовском случае?

30. Пусть на Q^3 задано лиувиллево слоение. Пусть это слоение естественным образом продолжено на $M^4 = Q^3 \times I$. Доказать, что на M^4 может быть задана симплектическая структура таким образом, что гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} h$ (где h — параметр отрезка I) была интегрируема и соответствующее лиувиллево слоение совпадало бы с наперед заданным.

31. Пусть Q^3 фиксировано. Какие условия накладывает топология Q^3 на граф и на метки. Рассмотреть случай, когда Q^3 простое: сфера S^3, тор T^3, *произведение* $S^2 \times S^1$, *проективное пространство* $\mathbf{R}P^3$.

32. В примерах из механики метки очень простые. В чем причина этого? Что отвечает за простоту или сложность меток?

33. *Можно дать два определения резонансной системы:* а) система резонансная, если все траектории замкнуты; б) система резонансная, если существует дополнительный интеграл. Какова связь между этими определениями? Исследовать два случая: на изоэнергетической поверхности Q^3 и на всем симплектическом многообразии M^4.

34. Пусть Q^3 — глобальное расслоение Зейферта без особых слоев, т. е. это обычное локально тривиальное расслоение над двумерной поверхностью P^2 со слоем окружности S^1. Известны 4 типа таких расслоений. Какие из них возникают в задачах механики и математической физики (Лагранж, Кеплер, He^3, ...)?

35. Пусть Q^3 — произвольное слоение Зейферта. Реализовать это слоение как слоение на траектории интегрируемой резонансной гамильтоновой системы.

36. Разобраться, что происходит с теорией топологической классификации при малом возмущении интегрируемой гамильтоновой системы. Выявить связь с КАМ-теорией.

37. Пусть имеется интегрируемая гамильтонова система на $M^{2n} = T^*P$, где P — группа Ли. Имеется стандартная процедура редукции для таких систем, *позволяющая понизить порядок. Рассмотрим систему на* $(\tilde{M}^{2k}, \tilde{\omega})$ *после* понижения порядка. Как связаны между собой инварианты этих двух систем?

38. Имеется теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых систем, построенная А. Т. Фоменко и А. В. Болсиновым. В рамках этой теории имеются следующие задачи. Пусть Q^3 — произвольное трехмерное многообразие. Известно, что $Q^3 \times I$ — симплектическое многообразие. Существует ли вложение Q^3 в компактное симплектическое многообразие? Может ли Q^3 служить краем симплектического многообразия M^4, если $Q^3 \in \{H\}$?

39. Пусть $Q^3 \in \{H\}$. Существует ли компактное симплектическое многообразие M^4 с интегрируемой гамильтоновой системой $v = \operatorname{sgrad} h$ такой, что Q^3 — изоэнергетическая поверхность? Может ли Q^3 быть краем симплектического многообразия M^4 с интегрируемой системой $v = \operatorname{sgrad} h$ такой, что $Q^3 = \{x \in M^4 \mid h(x) = \mathrm{const}\}$?

40. Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие. Определим симплектический класс i-мерного объема $\lambda^i(M^{2n}) \in \operatorname{Hom}(\pi_{2i}(M^{2n}), \mathbf{R})$, $i = 1, \ldots, n$, равенством

$$\lambda^i(M^{2n})(a) = \int_{S^{2i}} f^*(\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{i}),$$

где $f\colon S^{2i} \to M^{2n}$ — представитель класса $a \in \pi_{2i}(M^{2n})$. Вычислить $\lambda^i(M^{2n})$ для известных примеров симплектических многообразий.

41. Пусть N^n — лагранжево подмногообразие в симплектическом многообразии (M^{2n}, ω). Определим относительный симплектический класс i-мерного объема $\lambda^i(M^{2n}, N^n) \in \operatorname{Hom}(\pi_{2i}(M^{2n}, N^n), \mathbf{R})$, $i=1, \ldots, n$, равенством

$$\lambda^i(M^{2n}, N^n)(a) = \int_{D^{2i}} f^*(\underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{i}),$$

где $f\colon (D^{2i}, \partial D^{2i}) \to (M^{2n}, N^n)$ — представитель класса $a \in \pi_{2i}(M^{2n}, N^n)$. Вычислить эти классы для торов Лиувилля известных вполне интегрируемых гамильтоновых систем, например, на орбитах присоединенного представления компактных групп Ли. Имеется ли связь между инвариантами $\lambda^i(M^{2n}, N^n)$ и классами Маслова? В случае четырехмерного симплектического многообразия (M^4, ω) для торов Лиувилля T^2 вполне интегрируемой гамильтоновой системы на M^4 найти связь между $\lambda^i(M^4, T^2)$ и инвариантом Фоменко.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.— М.: Мир, 1987.
2. Абраров Д. Л. Топологические препятствия к существованию условно-линейных интегралов//Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1984.— № 6.— С. 72—75.
3. Андреев Е. М., Винберг Э. Б., Элашвили А. Г. Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли//Функцион. анализ и его прил.— 1961.— Т. 1, № 4.— С. 3—7.
4. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых многообразиях отрицательной кривизны//Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова.— 1967.— Т. 90.— С. 3—209.
5. Аносов Д. В. О типичных свойствах замкнутых геодезических//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982.— Т. 46, № 4.— С. 675—709.
6. Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условие квантования//Функцион. анализ и его прил.— 1967.— Т. 1, № 1.— С. 1—14.
7. Арнольд В. И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела в идеальной жидкости//УМН.— 1969.— Т. 24, № 3.— С. 225—226.
8. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
9. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений: Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.— М.: Наука, 1982.
10. Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— 1985.— Т. 4.— С. 7—139.
11. Архангельский А. А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц//Мат. сб.— 1979.— Т. 108, № 1.— С. 134—142.
12. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика.— М.: Наука, 1987.
13. Бабич М. В., Бобенко А. И., Матвеев В. Б. Решения нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи в тэта-функциях Якоби, и симметрии алгебраических кривых//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1985.— Т. 49, № 3.— С. 511—529.
14. Балинский А. А., Новиков С. П. Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли//ДАН СССР.— 1985.— Т. 283, № 5.— С. 1036—1039.
15. Барбашов Б. М., Нестеренко В. В. Геометрический анализ нелинейных уравнений в теории релятивистской струны//Физика элементарных частиц и атомного ядра.— 1984.— Т. 15, вып. 5.— С. 1032—1072.
16. Белавин А. А., Дринфельд В. Г. О решениях классического уравнения Янга—Бакстера для простых алгебр Ли//Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, № 3.— С. 1—29.

17. Белоколос Е. Д. Задачи Пайерлса — Фрелиха и конечнозонные потенциалы I, II//Теорет. и мат. физика.— 1981.— Т. 48, № 1.— С. 60—69.
18. Беляев А. В. О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести//Мат. сб.— 1981.— Т. 114, № 3.— С. 465—470.
19. Беляев А. В. О движении n-мерного твердого тела с группой симметрий $SO(k)\otimes SO(N-k)$ в поле с линейным потенциалом. Инварианты коприсоединенного представления некоторых алгебр Ли//ДАН СССР.— 1985.— Т. 282, № 5.— С. 1038—1042.
20. Беляев А. В. Инварианты коприсоединенного представления алгебр Ли вида $\mathfrak{h}\oplus V$//Анализ на многообразиях и дифференциальные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.— С. 139—145.
21. Березин Ф. А. Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли//Функцион. анализ и его прил.— 1967.— Т. 1, № 2.— С. 1—14.
22. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1986.
23. Березин Ф. А., Голо В. Л., Путко Б. А. Редукция киральной суперсимметричной σ-модели//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1982.— № 3.— С. 16—19.
24. Березин Ф. А., Переломов А. М. Теоретико-групповая интерпретация уравнений Кортевега — де Фриза//Функцион. анализ и его прил.— 1980.— Т. 14, № 2.— С. 50—51.
25. Бессе А. Л. Многообразия с замкнутыми геодезическими.—М.: Мир, 1981.
26. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию.—М.: Гостехиздат, 1957.
27. Бобенко А. И. Об интегрировании уравнений Эйлера на $e(3)$ и $so(4)$// Функцион. анализ и его прил.— 1985.— Т. 19, № 6.— С. 553—564.
28. Бобенко А. И. Уравнения Эйлера на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$. Изоморфизм интегрируемых случаев//Функцион. анализ и его прил.— 1986.— Т. 20, № 1.— С. 64—65.
29. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.— М.: Наука 1980.
30. Богоявленский О. И. Новые алгебраические конструкции уравнений Эйлера//ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 2.— С. 277—280.
31. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера, связанные с фильтрациями алгебр Ли//Мат. сб.— 1983.— Т. 121, № 2.— С. 233—242.
32. Богоявленский О. И. Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью//ДАН СССР.— 1983.— Т. 272, № 6.— С. 1364—1367.
33. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— Т. 48, № 5.— С. 883—938.
34. Богоявленский О. И. Периодические решения в модели вращения пульсара//ДАН СССР.— 1984.— Т. 276, № 2.— С. 343—347.
35. Богоявленский О. И. Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1985.— Т. 49, № 5.— С. 899—915.
36. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера//ДАН СССР.— 1986.— Т. 287, № 5.— С. 1105—1108.
37. Богоявленский О. И., Ивах Г. Ф. Топологический анализ интегрируемых случаев В. А. Стеклова//УМН.— 1985.— Т. 40, № 4.— С. 145—146.
38. Болотин С. В. Неинтегрируемость задачи n центров при $n>2$//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1984.— № 3.— С. 65—68.
39. Болсинов А. В. Вполне интегрируемые системы на сжатиях алгебр Ли//Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.—М.: Изд-во МГУ, 1985.— Вып. 22.— С. 8—16.
40. Болсинов А. В. Новые примеры вполне интегрируемых систем на алгебрах Ли//Геометрия, дифференциальные уравнения и механика.—М.: Изд-во МГУ, 1986.— С. 54—58.

41. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности//УМН.— 1990.— Т. 45, № 2.— С. 49—77.
42. Болсинов А. В. Инволютивные семейства функций на некоторых алгебрах Ли//Современные вопросы механики и технологии машиностроения.—М.: ВИНИТИ, 1986.— С. 57.
43. Болсинов А. В. О полноте инволютивного семейства функций, построенного методом сдвига аргумента//Бакинская Международная топологическая конференция.— Баку: Изд-во Коммунист.— 1987.— С. 49.
44. Болсинов А. В. Некоторые свойства интегрируемых систем, связанных с компактными группами Ли//Всесоюз. конф. по геометрии «в целом».— Новосибирск: Изд-во НГУ, 1987.— С. 15.
45. Болсинов А. В. Инволютивные семейства функций на двойственных пространствах к алгебрам Ли тпа $G \underset{\rho}{+} V$//УМН.— 1987.— Т. 42, № 6.— С. 183—184.
46. Болсинов А. В. О полноте семейств функций в инволюции, связанных с согласованными скобками Пуассона//Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.—М.: Изд-во МГУ, 1988. Вып. 23.— С. 18—38.
47. Браилов А. В. Инволютивные наборы на алгебрах Ли и расширения кольца скаляров//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1983.— № 1.— С. 47—51.
48. Браилов А. В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения//ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 5.— С. 1043—1046.
49. Браилов А. В. Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутирующими интегралами//ДАН СССР.— 1983.— Т. 271, № 2.— С. 273—276.
50. Браилов А. В. Серия вполне интегрируемых гамильтоновых систем на полупрямом произведении $\mathrm{so}(n) \times \mathbf{R}^n$//Геометрия и топология в глобальных нелинейных задачах.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984.— С. 145—148.
51. Браилов А. В. Полная интегрируемость с некоммутирующими интегралами некоторых уравнений Эйлера//Применение топологии в современном анализе.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1985.— С. 22—41.
52. Браилов А. В. Некоторые конструкции полных семейств функций, находящихся в инволюции//Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.—М.: Изд-во МГУ, 1985.— Вып. 22.— С. 17—24.
53. Браилов А. В. Построение вполне интегрируемых геодезических потоков на компактных симметрических пространствах//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— Т. 50, № 4.— С. 661—674.
54. Браилов А. В., Фоменко А. Т. Топология интегральных многообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем//Мат. сб.— 1987.— Т. 133, № 3.— С. 375—385.
55. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса, группы, порожденные отражениями, системы корней.—М.: Мир, 1972.
56. Буслаев В. С., Налимова Е. А. Формула следа в лагранжевой механике//Теорет. и мат. физика.— 1984.— Т. 61, № 1.— С. 52—63.
57. Веселов А. П. О гамильтоновом формализме для уравнения Новикова — Кричевера коммутации двух операторов//Функцион. анализ и его прил.— 1979.— Т. 13, № 1.— С. 1—7.
58. Веселов А. П. Конечнозонные потенциалы и интегрируемые системы на сфере с квадратичным потенциалом//Функцион. анализ и его прил.— 1980.— Т. 14, № 1.— С. 48—50.

59. Веселов А. П. Уравнение Ландау—Лифщица и интегрируемые системы классической механики//ДАН СССР.—Т. 270, № 5.—С. 1094—1097.
60. Веселов А. П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на so(4)//ДАН СССР.—1983.—Т. 270, № 6.—С. 1298—1300.
61. Веселов А. П., Новиков С. П. Конечнозонные двумерные периодические операторы Шрёдингера: явные формулы и эволюционные уравнения//ДАН СССР.—1984.—Т. 279, № 1.—С. 20—24.
62. Веселов А. П., Новиков С. П. Скобки Пуассона и компактные торы//Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова.—1984.—Т. 165.—С. 49—61.
63. Веселова Л. Е. О динамике тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.—1985.—№ 3.—С. 64—67.
64. Винберг Э. Б. О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры//Изв. АН СССР. Сер. мат.—1990.—Т. 56, № 1.—С. 891—1021.
65. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.—М.: Наука 1988.
66. Виноградов А. М., Купершмидт Б. А. Структура гамильтоновой механики//УМН.—1987.—Т. 42, № 4.—С. 175—236.
67. Вишик С. В., Должанский Ф. В. Аналоги уравнений Эйлера—Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли//ДАН СССР.—Т. 238, № 5.—С. 1032—1035.
68. Владимиров В. С., Волович И. В. Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений//Теорет. и мат. физика.—1985.—Т. 62, № 1.—С. 3—29.
69. Гайдуков Е. В. Асимптотические геодезические на римановом многообразии, не гомеоморфном сфере//ДАН СССР.—1986.—Т. 169, № 5.—С. 999—1001.
70. Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы//Функцион. анализ и его прил.—1976.—Т. 10, № 4.—С. 13—29.
71. Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Интегрируемые нелинейные уравнения и теорема Лиувилля//Функцион. анализ и его прил.—1979.—Т. 13, № 1.—С. 8—20.
72. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры//Функцион. анализ и его прил.—1979.—Т. 13, № 4.—С. 13—30.
73. Гивенталь А. Б. Глобальные свойства индекса Маслова и теория Морса//Функцион. анализ и его прил.—1988.—Т. 22, № 2.—С. 69—70.
74. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики.—М.: Мир, 1981.
75. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. С., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их приложения.—М.: Наука 1981.
76. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.—М.: Мир, 1973.
77. Голо В. Л. Геометрические идеи в теории сверхтекучего гелия-3//Топологические и геометрические методы в математической физике.—Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983.—С. 26—41.
78. Голод П. И. Гамильтоновы системы, связанные с анизотропными алгебрами Ли и высшие уравнения Ландау—Лифшица//ДАН УССР.—1980.—Сер. А, № 5.—С. 5—8.
79. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.—М.: Гостехиздат, 1953.
80. Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела.—Киев: Наукова думка, 1978.
81. Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли.—М.: Мир, 1981.

82. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии.— Т. 1, 2.—М.: Мир, 1982.
83. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.—М.: Наука, 1968.
84. Гуревич Г. Б. Основы алгебраической теории инвариантов.—М.: Гостехиздат, 1948.
85. Дао Чонг Тхи. Интегрируемость уравнений Эйлера на однородных симплектических многообразиях//Мат. сб.—1978.—Т. 106, № 2.—С. 154—161.
86. Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато.—М.: Наука 1987.
87. Дикий Л. А. Замечание о гамильтоновых системах, связанных с группой вращений//Функцион. анализ и его прил.—1972.—Т. 6, № 4.—С. 83—84.
88. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры.—М.: Мир, 1978.
89. Дирак Л. М. Обобщенная гамильтонова динамика//Вариационные принципы механики.—М.: Физматгиз, 1959.
90. Дирак П. Лекции по квантовой механике.—М.: Мир, 1968.
91. Дирак П. Принципы квантовой механики.—М.: Наука, 1979.
92. Дринфельд В. Г. О постоянных квазиклассических решениях уравнения Янга—Бакстера//ДАН СССР.—1983.—Т. 273, № 3.—С. 667—671.
93. Дринфельд В. Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга—Бакстера// ДАН СССР.—1983.—Т. 268, № 2.—С. 285—287.
94. Дринфельд В. Г. Квантовые группы//Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика VIII. Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР.— 1986.—Т. 155.—С. 18—49.
95. Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Уравнения типа Кортевега—де Фриза и простые алгебры Ли//ДАН СССР.—1981.—Т. 259, № 1.— С. 11—16.
96. Дрюма В. С. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега—де Фриза//Письма в ЖЭТФ.—1974.—Т. 19, № 12.—С. 219—225.
97. Дубровин Б. А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия//Функцион. анализ и его прил.—1977.—Т. 11, № 4.—С. 28—41.
98. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения//УМН.— 1981.—Т. 36, № 2.—С. 11—80.
99. Дубровин Б. А. Матричные конечнозонные операторы//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.—М.: ВИНИТИ, 1983.— Т. 23.—С. 33—78.
100. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега—де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия//УМН.—1976.—Т. 31, № 1.—С. 55—136.
101. Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа//ДАН СССР.—1984.—Т. 279, № 2.—С. 294—297.
102. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия.—2-е изд.—М.: Наука 1986.
103. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий.—М.: Наука 1984.
104. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи/Под общей ред. С. П. Новикова.—М.: Наука 1980.
105. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега—де Фриза— вполне интегрируемая гамильтонова система//Функцион. анализ и его прил.—1971.—Т. 5, № 4.—С. 18—27.
106. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах//ЖЭТФ.— 1971.—Т. 61, № 1.—С. 118—134.

107. Зельманов Е. И. Об одном классе локальных трансляционно инвариантных алгебр Ли//ДАН СССР.—1987.—Т. 292, № 6.—С. 1294—1297.
108. Зенков Д. В., Козлов В. В. Геометрическое представление Пуансо в динамике многомерного твердого тела//Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.—М.: Изд-во МГУ, 1988.—Вып. 23.—С. 202—204.
109. Зиглин С. Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела//Тр. Московск. мат. о-ва.—1980.—Т. 41.—С. 287—303.
110. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике I//Функцион. анализ и его прил.—1982.—Т. 16, № 3.—С. 30—41.
111. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике II//Функцион. анализ и его прил.—1983.—Т. 17, № 1.—С. 8—23.
112. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике.—М.: Наука 1983.
113. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики//Мат. заметки.—1992.—Т. 52, в. 2.—С. 43—51.
114. Итс А. Р. «Изомонодромные» решения уравнений нулевой кривизны//Изв. АН СССР. Сер. мат.—1985.—Т. 49, № 3.—С. 530—565.
115. Итс А. Р., Энольский В. З. О динамике системы Калоджеро — Мозера и редукции гиперэллиптических интегралов к эллиптическим интегралам//Функцион. анализ и его прил.—1986.—Т. 20, № 1.—С. 75—76.
116. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны.—М.: Мир, 1985.
117. Кантор И. Л., Персиц Д. Б. О замкнутых пучках линейных скобок Пуассона//IX Всесоюзная геометрическая конференция.—Кишинев: Штиинца, 1988.—С. 141.
118. Карасев М. В. Условия квантования Маслова в высших когомологиях и аналогов объектов теории Ли для канонических расслоений симплектических многообразий/МИЭМ.—М.: 1981.—Деп. в ВИНИТИ, № 1092—82, 1093—82.
119. Карасев М. В. Аналоги объектов теории групп Ли для нелинейных скобок Пуассона//Изв. АН СССР. Сер. мат.—1986.—Т. 50, № 3.—С. 508—538.
120. Карасев М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование.—М.: Наука, 1991.
121. Карасев М. В., Маслов В. П. Асимптотическое и геометрическое квантование//УМН.—1984.—Т. 39, № 6.—С. 115—173.
122. Картан Э. Интегральные инварианты.—М.; Л.: Гостехиздат, 1940.
123. Кириллов А. А. Локальные алгебры Ли//УМН.—1976.—Т. 31, № 4.—С. 57—76.
124. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.—М.: Наука, 1978.
125. Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических.—М.: Мир, 1982.
126. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1981.
127. Козлов В. В. Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.—1975.—№ 1.—С. 105—110.
128. Козлов В. В. Расщепление сепаратрис возмущенной задачи Эйлера — Пуансо//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.—1976.—№ 6.—С. 99—104.
129. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела.—М.: Изд-во МГУ, 1980.
130. Козлов В. В. Две интегрируемые задачи классической динамики//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.—1981.—№ 4.—С. 80—84.

131. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике//УМН.— 1983.— Т. 38, № 1.— С. 3—67.
132. Козлов В. В. Интегрируемые случаи задачи о движении точки по трехмерной сфере в силовом поле с потенциалом четвертой степени//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1985.— № 3.— С. 93—95.
133. Козлов В. В., Колесников Н. Н. Об интегрируемости гамильтоновых систем//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1979.— № 6.— С. 88—91.
134. Козлов В. В., Онищенко Д. А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа//ДАН СССР.— 1982.— Т. 266, № 6.— С. 1298—1300.
135. Колесников Н. Н. Натуральные системы с разрешимой группой симметрий//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1978.— № 5.— С. 99—103.
136. Колокольцев В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982.— № 5.— С. 994—1010.
137. Колокольцев В. Н. Новые примеры многообразий с замкнутыми геодезическими//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1984.— № 4.— С. 80—82.
138. Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений//УМН.— 1977.— Т. 32, № 6.— С. 183—208.
139. Кричевер И. М. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения//УМН.— 1978.— Т. 33, № 4.— С. 215—216.
140. Кричевер И. М. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.— М.: ВИНИТИ, 1983.— Т. 23.— С. 79—136.
141. Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП) I//Функцион. анализ и его прил.— 1978.— Т. 12, № 4.— С. 41—52.
142. Кронрод А. С. О функциях двух переменных//УМН.— 1950.— Т. 5, № 1.— С. 24—134.
143. Кулиш П. П., Склянин Е. К. О решениях уравнения Янга — Бакстера//Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.— 1980.— Т. 95.— С. 129—160.
144. Лакс П. Д. Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны//Математика.— 1969.— Т. 13, № 5.— С. 128—150.
145. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика.— М.: Наука, 1968.
146. Лебедев Д. Р., Манин Ю. И. Гамильтонов оператор Гельфанда — Дикого и коприсоединенное представление группы Вольтерра//Функцион. анализ и его прил.— 1979.— Т. 13, № 4.— С. 40—46.
147. Левин Ю. И. Об аффинных связностях, присоединенных к кососимметрическому тензору//ДАН СССР.— 1959.— Т. 128, № 4.— С. 668—671.
148. Лемлейн В. Г. О пространствах симметричной почти симплектической связности//ДАН СССР.— 1957.— Т. 115, № 4.— С. 655—658.
149. Лемлейн В. Г. Тензор кривизны и некоторые типы пространств симметричной почти симплектической связности//ДАН СССР.— 1957.— Т. 117, № 5.— С. 755—758.
150. Ле Нгок Тьеуен. Коммутативные наборы функций на орбитах общего положения конечномерных алгебр Ли//УМН.— 1983.— Т. 38, № 1.— С. 179—180.
151. Ле Нгок Тьеуен. Полные инволютивные наборы функций на расширениях алгебр Ли, связанных с алгебрами Фробениуса//Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1985.— Вып. 22.— С. 69—106.
152. Лере Ж. Лагранжев анализ и квантовая механика.— М.: Мир, 1981.
153. Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Структура пуассоновского действия на четырехмерном симплектическом многообразии//Методы качественной теории дифференциальных уравнений.— Горький: Изд-во ГГУ, 1982.— С. 3—19.

154. Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Необходимые условия существования гетероклинических траекторий в интегрируемой гамильтоновой системе с двумя степенями свободы//УМН.— 1983.— Т. 38, № 5.— С. 195—196.
155. Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Интегрируемые гамильтоновы системы и пуассоновские действия//Методы качественной теории дифференциальных уравнений.— Горький: Изд-во ГГУ, 1984.— С. 126—139.
156. Лерман Л. М., Уманский Я. Л. О гладких канонических заменах переменных//Методы качественной теории дифференциальных уравнений.— Горький: Изд-во ГГУ, 1984.— С. 140—147.
157. Ле Хонг Ван. Абсолютно минимальные поверхности и калибровки на орбитах присоединенного представления классических групп Ли//ДАН СССР.— Т. 298, № 6.— С. 1308—1311.
158. Ле Хонг Ван, Фоменко А. Т. Критерий минимальности лагранжевых подмногообразий в кэлеровых многообразиях//Мат. заметки.— 1987.— Т. 42, № 4.— С. 559—571.
159. Ле Хонг Ван, Фоменко А. Т. Лагранжевы многообразия и индекс Маслова в теории минимальных поверхностей//ДАН СССР.— 1988.— Т. 299, № 1.— С. 42—45.
160. Лоос О. Симметрические пространства.— М.: Наука, 1985.
161. Лосик М. В. О характеристических классах структур на многообразиях//Функцион. анализ и его прил.— 1987.— Т. 21, № 3.— С. 38—52.
162. Лунев В. В. Гидродинамическая аналогия задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца//ДАН СССР.— 1984.— Т. 276, № 2.— С. 351—355.
163. Лэмб Дж. Элементы теории солитонов.— М.: Мир, 1983.
164. Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях.— М.: Мир, 1988.
165. Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела//Функцион. анализ и его прил.— 1976.— Т. 10, № 4.— С. 93—94.
166. Манин Ю. И. Матричные солитоны и расслоения над кривыми с особенностями//Функцион. анализ и его прил.— 1978.— Т. 12, № 4.— С. 53—63.
167. Манин Ю. И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений//Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.— М.: ВИНИТИ, 1978.— Т. 11.— С. 5—152.
168. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия.— М.: Наука, 1984.
169. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во МГУ, 1965.
170. Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1987.
171. Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий//УМН.— 1988.— Т. 43, № 1.— С. 5—22.
172. Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.— М.: Изд-во МГУ, 1991.
173. Матвеев С. В., Фоменко А. Т., Шарко В. В. Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем//Мат. заметки.— 1988.— Т. 43, № 3.— С. 325—345.
174. Мещеряков М. В. Замечание о динамических системах на полупростых алгебрах Ли//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1980.— № 6.— С. 17—19.
175. Мещеряков М. В. Интегрирование уравнений геодезических левоинвариантных метрик на полупростых группах Ли с помощью специальных функций//Мат. сб.— 1982.— Т. 117, № 4.— С. 481—493.
176. Мещеряков М. В. О характеристическом свойстве тензора инерции многомерного твердого тела//УМН.— 1983.— Т. 38, № 5.— С. 201—202.

177. Мещеряков М. В. Решение уравнений Эйлера на особых орбитах простых групп Ли//Геометрия и топология в глобальных нелинейных задачах.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984.— С. 158—162.
178. Мещеряков М. В. Несколько замечаний о гамильтоновых потоках на однородных пространствах//УМН.— 1985.— Т. 40, № 3.— С. 215—216.
179. Миллер У. Симметрия и разделение переменных.— М.: Мир, 1981.
180. Милнор Дж. Теория Морса.— М.: Мир, 1971.
181. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы.— М.: Мир, 1979.
182. Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н., Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты.— Киев: Наукова думка, 1987.
183. Мищенко А. С. Интегралы геодезических потоков на группах Ли// Функцион. анализ и его прил.— 1970.— Т. 4, № 3.— С. 73—78.
184. Мищенко А. С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах//Мат. заметки.— 1982.— Т. 31, № 2.— С. 257—262.
185. Мищенко А. С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах//Труды семинара по векторному и тензорному анализу.— 1983.— Вып. 21.— С. 13—22.
186. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Об интегрировании уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли//ДАН СССР.— 1976.— Т. 231, № 3.— С. 536—538.
187. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем//Функцион. анализ и его прил.— 1987.— Т. 12, № 2.— С. 46—56.
188. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— Т. 42, № 2.— С. 396—415.
189. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли//Труды семинара по векторному и тензорному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1979.— Вып. 19.— С. 3—94.
190. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии.— М.: Изд-во МГУ, 1980.
191. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями//Труды семинара по векторному и тензорному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1981.— Вып. 20.— С. 5—54.
192. Мозер М. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем// УМН.— 1981.— Т. 36, № 6.— С. 109—151.
193. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость.— М.: Наука, 1965.
194. Нехорошев Н. Н. О переменных действие — угол и их обобщения//Тр. Московск. мат. о-ва.— 1972.— Т. 26.— С. 181—198.
195. Николенко Н. В. О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шрёдингера//Функцион. анализ и его прил.— 1977.— Т. 10, № 3.— С. 55—69.
196. Новиков С. П. Периодическая задача Кортевега — де Фриза I//Функцион. анализ и его прил.— 1974.— Т. 8, № 3.— С. 54—66.
197. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса//УМН.— 1982.— Т. 37, № 5.— С. 3—49.
198. Новиков С. П. Вариационные методы и периодические решения уравнения типа Кирхгофа II//Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 15, № 4.— С. 3—49.
199. Новиков С. П. Двумерные операторы Шрёдингера//Итоги науки и техники. *Современные проблемы математики*.— М.: ВИНИТИ, 1983.— Т. 23.— С. 3—32.
200. Новиков С. П., Гриневич П. Г. О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами//Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, № 1.— С. 23—26.
201. Новиков С. П., Фоменко А. Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии.— М.: Наука, 1987.

202. Новиков С. П., Шмельцер И. Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твердого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника — Шнирельмана — Морса (ЛМШ) 1//Функцион. анализ и его прил.— 1981.— Т. 15, № 3.— С. 54—66.
203. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.— М.: Мир, 1989.
204. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М. Явные решения некоторых вполне интегрируемых гамильтоновых систем//Функцион. анализ и его прил.— 1977.— Т. 11, № 1.— С. 75—76.
205. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М. Цепочка Тоды как редуцированная система//Теорет. и мат. физика.— 1980.— Т. 45, № 1.— С. 3—18.
206. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М., Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А. Интегрируемые системы II//Итоги науки и техники. Фундаментальные направления.— М.: ВИНИТИ, 1987.— Т. 16.— С. 86—227.
207. Ошемков А. А. Боттовские интегралы некоторых интегрируемых гамильтоновых систем//Геометрия, дифференциальные уравнения и механика.— М.: Изд-во МГУ, 1986.— С. 115—117.
208. Ошемков А. А. Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационная диаграмма интегрируемых случаев динамики твердого тела на so (4)//УМН.— 1987.— Т. 42, № 6.— С. 199—200.
209. Ошемков А. А. Описание изоэнергетических поверхностей некоторых интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы//Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.— Вып. 23.— М.: Изд-во МГУ, 1988.— Вып. 23.— С. 122—132.
210. Павленко Ю. Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике.— М.: Изд-во МГУ, 1985.
211. Павленко Ю. Г. Задачи по теоретической механике.— М.: Изд-во МГУ, 1988.
212. Певцова Т. А. Симплектическая структура орбит коприсоединенного представления алгебр Ли типа $E|\underset{\rho}{\times}|G$//Мат. сб.— 1984.— Т. 123, № 2.— С. 276—286.
213. Переломов А. М. Несколько замечаний об интегрировании уравнений твердого тела в идеальной жидкости//Функцион. анализ и его прил.— 1981.— Т. 15, № 2.— С. 83—85.
214. Переломов А. М. Решения типа инстантонов в киральных моделях//УФН.— 1981.— Т. 134, № 4.— С. 577—609.
215. Переломов А. М. Представление Лакса для систем типа С. Ковалевской//Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, № 2.— С. 80—81.
216. Пидкуйко С. И., Степин А. М. О решении одного дифференциально-функционального уравнения//Функцион. анализ и его прил.— 1976.— Т. 10, № 2.— С. 84—85.
217. Пидкуйко С. И., Степин А. М. Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем//ДАН СССР.— 1978.— Т. 293, № 1.— С. 719—812.
218. Погосян Т. И. Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твердого тела//Изв. АН СССР: МТТ.— 1980.— Т. 12.— С. 9—16.
219. Погосян Т. И. Критические интегральные поверхности в задаче Клебша//Изв. АН СССР: МТТ.— 1983.— Т. 16.— С. 19—24.
220. Погосян Т. И., Харламов М. П. Бифуркационное множество и интегральные многообразия задачи о движении твердого тела в линейном поле сил//ПММ.— 1979.— Т. 43, № 3.— С. 419—428.
221. Погосян Т. И., Харламов М. П. Области возможности движения в некоторых механических системах//ПММ.— 1981.— Т. 45, № 4.— С. 605—610.
222. Попов В. Л. Классификация спиноров размерности четырнадцать//Тр. Московск. мат. о-ва.— 1978.— Т. 37.— С. 173—217.
223. Потемкин Г. В. О скобках Пуассона дифференциально-геометрического типа//ДАН СССР.— 1986.— Т. 286, № 1.— С. 39—42.

224. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики//Избранные труды. Т. 1.— М.: Наука, 1971.
225. Пуанкаре А. О проблеме трех тел и об уравнениях динамики// Избранные труды. Т. 2.— М.: Наука, 1972.
226. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.— М.: Мир, 1985.
227. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений в частных производных.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
228. Рейман А. Г. Интегрируемые системы, связанные с градуированными алгебрами Ли//Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.— 1980.— Т. 95.— С. 3—54.
229. Рейман А. Г. Орбитная интерпретация гамильтоновых систем типа ангармонического осциллятора//Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.— 1986.— Т. 155.— С. 187—189.
230. Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных//ДАН СССР.— 1980.— Т. 251, № 6.— С. 1310—1314.
231. Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А., Френкель И. И. Градуированные алгебры Ли и вполне интегрируемые системы//ДАН СССР.— 1979.— Т. 247, № 4.— С. 802—805.
232. Семенов-Тян-Шанский М. А. Что такое классическая r-матрица?// Функцион. анализ и его прил.— 1983.— Т. 17, № 4.— С. 17—33.
233. Семенов-Тян-Шанский М. А. Пуассоновы группы и одевающие преобразования//Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.— 1986.— Т. 150.— С. 119—141.
234. Склянин Е. К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга — Бакстера//Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, № 4.— С. 27—34.— Т. 17, № 4.— С. 34—48.
235. Смейл С. Топология и механика//УМН.— 1972.— Т. 27, № 2.— С. 77—133.
236. Солитоны/Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри.— М.: Мир, 1983.
237. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости.— Харьков, 1983.
238. Степин А. М. Интегрируемые гамильтоновы системы. I: Методы интегрирования гамильтоновых систем. II: Серии интегрируемых систем//Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.
239. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.— М.: Мир, 1970.
240. Тарасов В. О., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Л. Локальные гамильтонианы для моделей на решетке//ТМФ.— 1983.— Т. 57, № 2.— С. 163—181.
241. Татаринов Я. В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1974.— № 6.— С. 99—105.
242. Татаринов Я. В. Геометрический формализм классической динамики; канонические первообразные//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1983.— № 4.— С. 85—95.
243. Татаринов Я. В. Лекции по классической динамике.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
244. Татаринов Я. В. Разделяющиеся переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах//Труды семинара по векторному и тензорному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1988.— Вып. 23.— С. 160—174.
245. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.— М.: Наука, 1986.
246. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1979.— Т. 43, № 3.— С. 160—174.

247. Трофимов В. В. О полной интегрируемости уравнений Эйлера на борелевских подалгебрах простых алгебр Ли//Тез. докл. 7-й Всесоюз. геометрической конф. по современным проблемам геометрии.— Минск, 1979.— С. 201.
248. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— Т. 44, № 5.— С. 1191—1199.
249. Трофимов В. В. Конечномерные представления алгебр Ли и вполне интегрируемые системы//Мат. сб.— 1980.— Т. 11, № 4.— С. 610—621.
250. Трофимов В. В. Теоретико-групповая интерпретация уравнений магнитной гидродинамики идеально проводящей жидкости//Нелинейные колебания и теория управления.— Ижевск, 1981.— № 3.— С. 118—124.
251. Трофимов В. В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными градуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре//ДАН СССР.— 1982.— Т. 263, № 4.— С. 812—816.
252. Трофимов В. В. Первые интегралы приближений Галеркина уравнений магнитной гидродинамики//Некоторые вопросы прикладной математики и программного обеспечения ЭВМ.— М.: Изд-во МГУ, 1982.— С. 7—8.
253. Трофимов В. В. Расширения алгебр Ли и гамильтоновы системы//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— Т. 47, № 6.— С. 1303—1321.
254. Трофимов В. В. Коммутативные градуированные алгебры с двойственностью Пуанкаре и гамильтоновы системы//Топологические и геометрические методы в математической физике.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983.— С. 128—132.
255. Трофимов В. В. О вполне интегрируемых геодезических потоках на группе движений евклидова пространства//Некоторые вопросы математики и механики.— М.: Изд-во МГУ, 1983.— С. 8—9.
256. Трофимов В. В. Методика построения S-представлений//Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.— 1984.— № 1.— С. 3—9.
257. Трофимов В. В. Группа голономии и обобщенные классы Маслова подмногообразий в пространствах аффинной связности//Мат. заметки.— 1991.— Т. 49, № 2.— С. 113—123.
258. Трофимов В. В. Плоские симметрические пространства с некомпактными группами движений и гамильтоновы системы//Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.— Вып. 22.— М.: Изд-во МГУ, 1985.— Вып. 22.— С. 162—174.
259. Трофимов В. В. Деформации интегрируемых систем//Анализ на многообразиях и дифференциальные уравнения.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.— С. 156—164.
260. Трофимов В. В. Геометрические инварианты вполне интегрируемых систем//Тез. докл. Всесоюз. конф. по геометрии «в целом».— Новосибирск, 1987.— С. 121.
261. Трофимов В. В. Индекс Маслова лагранжевых подмногообразий симплектических многообразий//Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1988.— Вып. 23.— С. 190—194.
262. Трофимов В. В. Симплектические связности, индекс Маслова и гипотеза Фоменко//ДАН СССР.— 1989.— Т. 304, № 6.— С. 1302—1305.
263. Трофимов В. В. Введение в геометрию многообразий с симметриями.— М.: Изд-во МГУ, 1989.
264. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем//ДАН СССР.— 1980.— Т. 254, № 6.— С. 1349—1353.
265. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. О реализации механических систем на орбитах разрешимых алгебр Ли//Изв. АН СССР. МТТ.— 1981.— № 3.— С. 163.

266. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Групповые неинвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах//Труды семинара по векторному и тензорному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1983.— Вып. 21.— С. 23—83.
267. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Динамические системы на орбитах линейных представлений групп Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем//Функцион. анализ и его прил.— 1983.— Т. 17, № 1.— С. 31—39.
268. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли//УМН.— 1984.— Т. 39, № 2.— С. 3—56.
269. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах// Итоги науки и техники. Новейшие достижения.— М.: ВИНИТИ, 1986.— Т. 29.— С. 3—108.
270. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли//Итоги науки и техники. Фундаментальные направления.— М.: ВИНИТИ, 1987.— Т. 16.— С. 227—299.
271. Тюрина Ю. А. О функциональной независимости двух семейств гамильтонианов на G_2^*//Труды семинара по векторному и тензорному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1988.— Вып. 23.— С. 195—198.
272. Фоменко А. Т. Групповые симплектические структуры на однородных пространствах//ДАН СССР.— 1980.— Т. 253, № 5.— С. 1062—1067.
273. Фоменко А. Т. Алгебраическая структура некоторых классов вполне интегрируемых гамильтоновых систем на алгебрах Ли//Геометрическая теория функций и топология.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 85—126.
274. Фоменко А. Т. О симплектических структурах и интегрируемых системах на симметрических пространствах//Мат. сб.— 1981.— Т. 115, № 2.— С. 263—280.
275. Фоменко А. Т. Вариационные методы в топологии.— М.: Наука, 1982.
276. Фоменко А. Т. Алгебраические свойства некоторых интегрируемых гамильтоновых систем//Тез. докл. Ленинградской междунар. топологической конф.— Ленинград, 1982.— С. 46.
277. Фоменко А. Т. Полная интегрируемость некоторых классических гамильтоновых систем//Моногенные функции и отображения.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 3—19.
278. Фоменко А. Т. Алгебраическая структура некоторых интегрируемых гамильтоновых систем//Топологические и геометрические методы в математической физике.— Воронеж: ВГУ, 1983.— С. 84—110.
279. Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
280. Фоменко А. Т. Симметрические пространства и интегрирование некоторых гамильтоновых систем//Приложение к книге: Лоос О. Симметрические пространства.— М.: Наука, 1985.— С. 183—201.
281. Фоменко А. Т. Топология трехмерных многообразий и интегрируемые механические гамильтоновы системы//V Тираспольский симпоз. по общей топологии и ее приложениям.— Кишинев, 1985.— С. 235—237.
282. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем// ДАН СССР.— 1986.— Т. 287, № 5.— С. 1071—1075.
283. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— Т. 50, № 6.— С. 1276—1307.
284. Фоменко А. Т. Качественная теория интегрируемых систем, классификация изоэнергетических поверхностей и бифуркаций торов Лиувилля при критических значениях энергии//Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987.— С. 118—139.

285. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функцион. анализ и его прил.— 1988.— Т. 22, № 4.— С. 38—51.
286. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия.— М.: Изд-во МГУ, 1988.
287. Фоменко А. Т., Цишанг X. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // ДАН СССР.— 1987.— Т. 294, № 2.— С. 283—287.
288. Фоменко А. Т., Цишанг X. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1988.— Т. 52, № 2.— С. 378—407.
289. Фоменко А. Т., Шарко В. В. Точные круглые функции Морса, неравенства типа Морса и интегралы гамильтоновых систем // Глобальный анализ и нелинейные уравнения.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1988.— С. 92—107.
290. Фукс Д. Б. О характеристических классах Маслова — Арнольда // ДАН СССР.— 1968.— Т. 178, № 2.— С. 303—306.
291. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.— М.: Наука, 1984.
292. Харламов М. П. Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела // ДАН СССР.— 1983.— Т. 273.— № 6.— С. 1322—1325.
293. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.— М.: Мир, 1964.
294. Цишанг X., Фогт Э., Колдевай Д. Поверхности и разрывные группы.— М.: Наука, 1988.
295. Чередник И. В. Об условиях вещественности в «конечнозонном интегрировании» // ДАН СССР.— 1980.— Т. 252, № 5.— С. 1104—1108.
296. Шв ая К. Геометрия орбит коприсоединенного представления некоторых групп Ли // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1988.— Вып. 23.— С. 199—201.
297. Элашвили А. Г. Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли // Функцион. анализ и его прил.— 1972.— Т. 6, № 1.— С. 51—62.
298. Элашвили А. Г. Фробениусовы алгебры Ли // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, № 4.— С. 94—95.
299. Якоби К. Лекции по динамике.— М.; Л.: ГТТИ, 1933.
300. Ablowitz M. A., Chakravarty S., Clarkson P. A. Reduction of self-dual Gang — Mills fields and classical systems // Pys. Rev. Lett.— 1990.— V. 65, № 9.— P. 1085—1087.
301. Abraham R., Marsden J. Foundation of mechanics.— Reading (Mass.): Addison-Wesley, 1978.
302. Adler M. Some finite-dimensional systems and their scattering behavoir // Comm. Math. Physics.— 1977.— V. 55.— P. 112—162.
303. Adler M. On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure for Korteweg — de Vries type equation // Invent. Math.— 1979.— V. 50.— P. 219—248.
304. Adler M. On a trace functional for pseudodifferential operators and the Hamiltonian structure of Korteweg — de Vries type equation // Lecture Notes in Math.— 1979.— V. 755.— P. 1—16.
305. Adler M., van Moerbeke P. Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves // Adv. Math.— 1980.— V. 3, № 3.— P. 267—317.
306. Adler M., van Moerbeke P. Linearization of Hamiltonian systems. Jakoby varieties and representation theory // Adv. Math.— 1980.— V. 38, № 3.— P. 318—379.
307. Adler M., van Moerbeke P. The algebraic integrability of geodesic flow on SO(4) // Invent. Math.— 1982.— V. 67.— P. 297—331.
308. Adler M., van Moerbeke P. Kowalewski's asymptotic method, Kac — Moody Lie algebras and regularization // Comm. Math. Phys.— 1982.— V. 83.— P. 83—106.

309. Adler M., van Moerbeke P. Geodesic flow on SO(4) and the integration of quadrics // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1984.— V. 81.— P. 4613—4616.
310. Adler M., Moser J. On a class of polinomials connected with the Korteweg — de Vries equation // Comm. Math. Phys.— 1978.— V. 61.— P. 1—30.
311. Airault H., McKean H. P., Moser J. Rational and elliptic solution of the Korteweg — de Vries equation and related many body problem // Comm. Pure Appl. Math.— 1977.— V. 30, № 1.— P. 95—148.
312. Arnold V. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinite et ses applications à l'hydrodynamiques des fluides pur faits // Ann. Inst. Fourier.— 1966.— V. 16, № 1.— P. 319—361.
313. Atiyah M. F. Convexity and commuting Hamiltonians // Bull. London Math. Soc.— 1982.— V. 14.— P. 1—15.
314. Atiyah M. F. Angular momentum, convex polyhedra and algebraic geometry // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2.— 1983.— V. 26.— P. 121—133.
315. Atiyah M. F., Bott R. The moment map and equivariant cohomology // Topology.— 1984.— V. 23, № 1.— P. 1—28.
316. Atkin C. J. A note on the algebra of Poisson brackets // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1984.— V. 96, № 1.— P. 45—60.
317. Avez A., Lichnerowicz A., Diaz-Miranda A. Sur l'algèbre des automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique // J. Diff. Geometry.— 1974.— V. 9, № 1.— P. 1—40.
318. Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D. Deformation theory and quantization // Ann. Phys.— 1978.— V. 111, № 1.— P. 61—151.
319. Berezin F. A., Perelomov A. M. Group-theoretical interpretation of the Korteweg — de Vries type equations // Comm. Math. Phys.— 1986.— V. 74, № 2.— P. 129—140.
320. Berger M. Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniens // Bull. Soc. Math. France.— 1955.— V. 83.— P. 279—330.
321. Bogoyavlensky O. J. On perturbation of periodic Toda lattice // Comm. Math. Phys.— 1976.— V. 51.— P. 201—209.
322. Bogoyavlensky O. J. A completely integrable problem of classical mechanics // Comm. Math. Phys.— 1984.— V. 1.— P. 265—269.
323. Bogoyavlensky O. J. Integrable Euler equations of SO(4) and their physical applications // Comm. Math. Phys.— 1984.— V. 93.— P. 417—436.
324. Borho W., Gabriel P., Rentschler R. Primideal in Einhullenden auflosbaren Lie-Algebren // Lecture Notes in Math.— 1973.— V. 357.— P. 117—136.
325. Bott R. Non-degenerate critical manifolds // Ann. Math. Ser. 2.— 1954.— V. 60, № 2.— P. 248—261.
326. Büchner K. Affinzusammenhänge in symplektischen Räume // Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.— 1977.— S. 13—52.
327. Burchnall J. L., Chaundy T. W. Commutative ordinary differential operators // Proc. London Math. Soc. Ser. 2.— 1923.— V. 21, № 6.— P. 420—440.— Proc. Roy. Soc. London (A).— 1928.— V. 118.— P. 557—593.— Proc. Roy. Soc. London (A).— 1931.— V. 134.— P. 471—485.
328. Calogero F. Solution of the one-dimensional n-body problems with guadratic and / or inversely guadratic pair potentials // J. Math. Phys.— 1971.— V. 12.— P. 419—436.
329. Channell P. J., Scovel C. Symplectic integration of Hamiltonian systems // Los Alamos (USA): Los Alamos National Laboratory, 1988.— Preprint LA-UR-88-1828.
330. Chuschill R. C., Kumes M., Rod D. L. On averaging reduction, and symmetry in Hamiltonian systems // J. Diff. Equations.— 1983.— V. 49, № 3.— P. 359—414.

331. Conley C., Zehnder E. Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations//Comm. Pure. Appl. Math.— 1984.— V. 37, № 2.— P. 207—255.
332. Date E., Jimba M., Kashiwara M., Miwa T. Operator approach to the Kadomtsev—Petviashvili equation. Transformation groups for solution equations III//J. Phys. Soc. Japan.— 1981.— V. 50.— P. 3806—3812.
333. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. A new hierarchy of solution of KP-type. Transformation groups for solution equations IV//Physics.— 1982.— V. 4D.— P. 343—365.
334. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. Transformation groups for solution equations. Euclidean Lie algebras and reduction of the KP hierarchy//Publ. RIMS, Kyoto University.— 1982.— V. 18.— P. 1077—1110.
335. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. Transformation groups for solution equations//Proc. RIMS symposium.— 1983.— P. 39—120.
336. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. Landau—Lifschitz equation solutions, quasi-periodic solutions and infinite-dimensional Lie algebras//J. Phys. A.— 1983.— V. 16.— P. 221—236.
337. Deift P., Lund F., Trubowitz E. Non-linear wave equations and constrained harmonic motion//Comm. Math. Phys.— 1980.— V. 74, № 2.— P. 141—188.
338. Dickson L. E. Differential equations from the group standpoint//Ann. Math.— 1924.— V. 25, № 4.— P. 287—378.
339. Dixmier J., Duflo M., Vergne M. Sur la representation coadjointe d'une algèbre de Lie//Compositio Math.— 1974.— V. 29, № 3.— P. 309—323.
340. Duflo M., Vergne M. Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie//C.r. Acad. Sci. Paris.— 1969.— V. 268.— P. 583—585.
341. Duistermaat J. J. On global action—angle coordination//Comm. Pure Appl. Math.— 1980.— V. 33, № 6.— P. 687—706.
342. Duistermaat J. J., Heckman G. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space//Invent. Math.— 1982.— V. 69, № 2.— P. 259—268.
343. Ebin D. Integrability of perfect fluid motion//Comm. Pure Appl. Math.— 1983.— V. 36, № 1.— P. 37—54.
344. Ebin D., Marsden J. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid//Ann. Math.— 1970.— V. 92.— P. 102—163.
345. Ekelend I. A perturbation theory near convex Hamiltonian systems//J. Diff. Equations.— 1983.— V. 50, № 3.— P. 407—440.
346. Flaschka H. Toda lattice I, II//Progr. Theor. Phys.— 1974.— V. 51.— P. 703—716.— Phys. Rev.— 1974.— B9.— P. 1924—1925.
347. Flaschka H., Newell A. C., Ratiu T. Kac—Moody Lie algebras and soliton equations//Physica D.— 1983.— V. 9, № 3.— P. 300—332.
348. Flato M., Lichnerowicz A. Cohomologie des représentations définies par la derivation de Lie et la valeur dans les formes de l'algébre de Lie des chaps de vecteurs d'une variété différentiable premiers espaces de cohomologie applications//C.r. Acad. Sci. Paris.— 1986.— V. 291.— P. 331—335.
349. Fomenko A. T. The integrability of some Hamiltonian systems//Ann. global analisis geometry.— 1983.— V. 1, № 2.— P. 1—10.
350. Fomenko A. T. Algebraic structure of certain integrable Hamiltonian systems//Lecture Notes in Math.— 1984.— V. 1108.— P. 103—127.
351. Fomenko A. T. Algebraic properties of some integrable Hamiltonian systems//Lecture Notes in Math.— 1984.— V. 1060.— P. 246—257.
352. Fomenko A. T. New topological invariant of integrable Hamiltonian//Baku. International Topological Conference. Abstracts, part 2.— 1987.— P. 316.
353. Fomenko A. T., Trofimov V. V. Integrable systems on Lie algebras and symmetric spaces.— London; New Jork: Gordon and Breach science publischers, 1988.
354. Fordy A., Wojciechowski S., Marshall I. A family of integrable quartic potentials related to symmetric spaces//Phys. Lett.— 1986.— V. 113 A.— P. 395—400.

355. Frenkel I. B. Representations of affine Lie algebras, Hecke modular forms and Korteweg—de Vries type equations//Lecture Notes in Math.— 1982.— V. 933.— P. 71—110.
356. Fuchssteiner B. The Lie algebra structure of non-linear evolution equations admitting infinite-dimensional abelian symmetry groups//Progr. Theor. Phys.— 1981.— V. 65.— № 3.— P. 861—876.
357. Fuchssteiner B. The Lie algebra structure of degenrgate Hamiltonian and bi-Hamiltonian systems//Progr. Theor. Phys.— 1982.— V. 68, № 4.— P. 1082—1104.
358. Gardner C. S. Korteweg—de Vries equation and generalization I. The Korteweg—de Vries equation as a Hamiltonian system//J. Math. Phys.— 1971.— V. 12, № 8.— P. 1548—1551.
359. Gardner C. S., Green J., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg—de Vries equation//Phys. Rev. Lett.— 1967.— V. 19.— P. 1095—1098.
360. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M., Miura R. Korteweg—de Vries equation and generalization VI. Method for exact solution//Comm. Pure Appl. Math.— 1974.— V. 27.— P. 97—133.
361. Gatti V., Viniberghi E. Spinors of 13-dimensional space//Adv. Math.— 1978.— V. 30, № 2.— P. 137—155.
362. Gibbons J. G., Holm D. D., Kupershmidt B. Gauge-invariant Poisson brackets for chromohydrodynamics//Phys. Letters.— 1982.— V. 90 A, № 6.
363. Golo V. L. Non-linear regimes in spin dynamics of superfluid ^{3}He//Lett. Math. Phys.— 1981.— V. 5.— P. 155—159.
364. Goodman R., Wallach N. R. Classical and quantum-mechanical systems of Toda lattice type I//Comm. Math. Phys.— 1982.— V. 83.— P. 355—386.
365. Goodman R., Wallach N. Classical and quantum-mechanical systems of Toda lattice type II//Comm. Math. Phys.— V. 94.— P. 177—217.
366. Gotay M. M., Lashof R., Sniatycki J., Weinstein A. Closed forms on symplectic fibre bundles//Comm. Math. Helv.— 1983.— V. 58.— P. 617—621.
367. Grangier G. Recherche d'orbites periodiques d'un champ hamiltonien en presence d'un potentiel vecteurs//C. r. Acad. Sci. Paris.— 1983.— V. 297, № 8.— P. 489—492.
368. Grifoke J. Classe de Maslov pour les fibres quaternioniens//C. r. Acad. Sci. Paris.— 1984.— V. 299, № 1.— P. 29—39.
369. Gromov M. A topological technique for construction of solutions of differential equations and inequalities, v. 2//Acta congr. Intern. Math. (Nice, 1970).— Paris: Gauthier-Villars, 1971.— P. 221—225.
370. Guillemin V., Sternberg S. The moment map and collective motion// Ann. Phys.— 1980.— V. 127.— P. 220—253.
371. Guillemin V., Sternberg S. Geometric quantization and multiplicities of group representations//Invent. Math.— 1982.— V. 67, № 3.— P. 515—538.
372. Guillemin V., Sternberg S. Convexity properties of the moment mapping// Invent. Math.— 1982.— V. 67, № 3.— P. 491—513.
373. Guillemin V., Sternberg S. Multiplicity-free spaces//J. Diff. Geometry.— 1984.— V. 19, № 1.— P. 31—56.
374. Guillemin V., Sternberg S. Symplectic techniques in physics.— L.; N. Y.; Cambridge: Cambridge University press, 1984.
375. Guillemin V., Sternberg S. Convexity properties of the moment mapping II//Invent. Math.— 1984.— V. 77, № 3.— P. 533—546.
376. Haefliger A. Lecture on a theorem on Gromov//Lecture Notes in Math.— 1971.— V. 209.— P. 128—141.
377. Hahn P. Haar measure grouppoids//Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— V. 242, № 1.— P. 1—33.
378. Haine L. Geodesic flow on SO(4) and abelian surfaces//Math. Ann.— 1983.— V. 263, № 4.— P. 435—472.
379. Haine L. The algebraic completely integrability of geodesics flow on SO(n)//Comm. Math. Phys.— 1984.— V. 94, № 2.— P. 271—287.

380. Harvey R., Lawson H. B. Calibrated geometry // Acta Math.— 1982.— V. 148.— P. 47—157.
381. Hess H. Connections on symplectic manifolds and geometric quantization // Lecture Notes in Math.— 1980.— V. 836.— P. 153—166.
382. Holm D., Kupershmidt B. A. Poisson structures of superfluids // Phys. Lett.— 1982.— V. 91 A.— P. 425—430.
383. Holm D., Kupershmidt B. A. Poisson brackets and Clebsch representations for magnetohydrodynamics, multifluid plasmas and ellasticity // Physica.— 1983.— V. 6 D.— P. 347—363.
384. Holm D., Kupershmidt B. A. Non-canonical Hamiltonian formulation of magnetohydrodynamics // Physica.— 1983.— V. 7 D.— P. 330—333.
385. Iacob A., Sternberg S. Coadjoint structures, solitons and integrability // Lecture Notes in Phys.— 1980.— V. 120.
386. Igusa J. A classification of spinors up to dimension twelve // Amer. J. Math.— 1970.— V. 92, № 4.— P. 997—1028.
387. Inozemtsev V. I., Meshcheryakov D. V. Extention of the class of integrable dynamical systems connected with semi-simple Lie algebras // Lett. Math. Phys.— 1985.— V. 9.— P. 13—18.
388. Jimbo M. Theory of τ-functions in integrable systems // Lecture Notes in Phys.— 1982.— V. 153.— P. 232—237.
389. Kac V. G. Infinite-dimensional Lie algebras.— Boston, Basel; Stuttgart: Birhauser, 1983.— Progress in Mathematics.— V. 44.
390. Kac V. G., Peterson D. H. Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms // Adv. Math.— 1983.— V. 50.
391. Kalnins E. G., Miller W., Winternitz P. The group O(4), separation of variables and the hydrogen atom // J. Appl. Math.— 1976.— V. 30, № 4.— P. 630—664.
392. Kamalin S. A., Perelomov A. M. Construction of canonical coordinates on polarized coadjoint orbits of Lie groups // Comm. Math. Phys.— 1985.— V. 97.— P. 553—568.
393. Kazhdan D., Kostant B., Sternberg S. Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type // Comm. Pure Appl. Math.— 1978.— V. 31, № 4.— P. 481—507.
394. Kirwan F. Convexity properties of the moment mapping III // Invent. Math.— 1984.— V. 77, № 3.— P. 547—552.
395. Knop F., Littelmann P. Der Crad erzeugender Funktionen von Invarianten ringer // Preprint.— 1986.
396. Knörrer H. Geodesics on the ellipsoid // Invent. Math.— 1980.— V. 59, № 2.— P. 119—143.
397. Kobayashi O., Yoshioka A., Maeda Y., Omori H. The theory of infinite-dimensional Lie groups and its applications // Acta Appl. Math.— 1985.— V. 3.— P. 71—106.
398. Kostant B. On differential geometry and homogeneous spaces.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1956.— V. 42, № 5.— P. 258—261.
399. Kostant B. On convexity, the Weil group and the Iwasawa decomposition // Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. Sér. 4.— 1973.— V. 6, № 4.— P. 413—455.
400. Kostant B. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory // Adv. Math.— 1979.— V. 34, № 3.— P. 195—338.
401. Kostant B. Poisson commutativity and generalized periodic Toda lattice // Lecture Notes in Math.— 1982.— V. 905.— P. 12—28.
402. Krämer M. Sphärische Untergruppen in kompakten zuzammenhangenden Lie Gruppen // Composito Math.— 1979.— V. 38, № 2.— P. 129—153.
403. Kruskal M. D. The Korteweg—de Vries equation and related evolution equations // Lecture Notes in Math.— 1974.— V. 15.— P. 61—83.
404. Kummer M. On the construction of the reduced phase space of a Hamiltonian system with symmetry // Indiana Univ. Math. J.— 1981.— V. 30, № 2.— P. 281—291.

405. Kupershmidt B. A. Geometry of jet bundles and the structure of Lagrangian and Hamiltonian formalisms // Lecture Notes in Math.— 1980.— V. 775.— P. 162—218.
406. Kupershmidt B. A. On the nature of the Gardner transformation // J. Math. Phys.— 1981.— V. 22.— P. 449—451.
407. Kupershmidt B. A. Korteweg — de Vries surfaces and Bucklund curves // J. Math. Phys.— 1982.— V. 23.— P. 1427—1432.
408. Kupershmidt B. On algebraic models of dynamical systems // Lett. Math. Phys.— 1982.— V. 6.— P. 85—89.
409. Kupershmidt B. A. On dual spaces of differential Lie algebras // Physica.— 1983.— V. 7 D.— P. 334—337.
410. Kupershmidt B. A. Deformations of integrable systems // Proc. Roy. Irish Academy, sec. A.— 1983.— V. 83, № 1.— P. 45—74.
411. Kupershmidt B. A. Discrete Lax equations and differential-difference calculus // Asterisque.— 1985.— № 123.
412. Kupershmidt B. A., Ratiu T. Canonical maps between sem-direct products with applications // Comm. Math. Phys.— 1983.— V. 90.— P. 235—250.
413. Kupershmidt B. A. Modifying Lax equations and the second Hamiltonian structure // Invent. Math.— 1981.— V. 62, № 3.— P. 403—436.
414. Lacomba E. Mechanical systems with symmetry on homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— V. 185.— P. 477—491.
415. Langlois M. Contribution à l'étude du mouvement du coups rigide à N dimensions auto d'un point fixe // Thèses presentée à la faculté des sciences de l'université de Besancon — Besencon, 1971.
416. Lax P. D. Integrals of non-linear equations and solitary waves // Comm. Pure Appl. Math.— 1968.— V. 21, № 5.— P. 467—490.
417. Lax P. D. Periodic solutions of Korteweg — de Vries equations // Comm. Pure Appl. Math.— 1975.— V. 28.— P. 141—188.
418. Ležnev A. N., Saveliev M. V. Two-dimensional exactly and completely integrably dynamical systems // Comm. Math. Phys.— 1983.— V. 89.— P. 59—75.
419. Liberman P., Marle C. M. Symplectic geometry and analytical mechanics.— Dordrecht: D. Reidel Publishing Comp., 1987.
420. Lichnerowicz A. Deformations of algebras assaciated with a sympelectic manifold // Diff. Geom. Phys.— 1983.— V. 3.— P. 69—84.
421. Lojasiewicz S. Triangulation of semi-analytic sets // Ann. Scuola Normale Superiore Pisa Ser. 3.— 1964.— V. 13, № 4.— P. 449—474.
422. Losco L. Integrability in mechanique celeste // J. Mechanique.— 1974.— V. 13, № 2.— P. 197—223.
423. MacLane S. Hamiltonian mechanics and geometry // Amer. Math. Monthly.— 1970.— V. 77.— P. 570—585.
424. Magri F. A symple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys.— 1978.— V. 19.— P. 1156—1162.
425. Magri F. A geometrical approach to the non-linear solvable equations // Lecture Notes in Phys.— 1980.— V. 120.— P. 233—263.
426. Marsden J. A group-theoretic approach to the equations of plasma physics // Canad. Math. Bull.— 1982.— V. 25, № 2.— P. 129—142.
427. Marsden J. E., Morrison P. J. Non-canonical Hamiltonian field theory and reduced MHD // Contemp. Math.— 1984.— V. 28.— P. 133—150.
428. Marsden J. E., Ratiu T. S. Hamiltonian systems with symmetry, fluid and plasma dynamics.— University of California, Berkeley and Canta Cruz, 1988.
429. Marsden J., Ratiu T., Weinstein A. Reduction and Hamiltonian structures on duals of semi-direct product Lie algebras // Contemp. Math.— 1984.— V. 28.— P. 55—100.
430. Marsden J., Ratiu T., Weinstein A. Semi-direct product and reduction in mechanics // Trans. Amer. Math. Soc.— 1984.— V. 281, № 1.— P. 147—178.

431. Marsden J., Weinstein A. Reduction of manifolds with symmetry // Rep. Math. Phys.— 1974.— V. 5, № 1.— P. 121—130.
432. Marsden J. E., Weinstein A. The Hamiltonian structure of the Maxwell — Vlasov equations // Physica.— 1982.— V. 7 D.— P. 394—406.
433. Marsden J., Weinstein A. Coadjoint orbits, vertices and Clebsch variables for incompressible fluids // Physica.— 1983.— V. 7 D.— P. 305—323.
434. McDuff D. Examples of simply-connected symplectic non-Kählerian manifolds // J. Diff. Geom.— 1984.— V. 20, № 1.— P. 267—277.
435. McKay W. J., Patera J. Tables of dimensions, indices and branching rules for representatins of simple Lie algebras.— Marses Dekker, Inc., 1981.
436. McKean H. P. Integrable systems and algebraic curves, I // Global Analysis.— Lecture Notes in Math.— 1979.— V. 755.— P. 83—200.
437. McKean H. P., van Moerbeke P. The spectrum of Hill's equation // Invent. Math.— 1975.— V. 30.— P. 217—274.
438. McKean H. P., Trubowitz E. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinetely many branch points // Comm. Pure Appl. Math.— 1977.— V. 29.— P. 143—226.
439. Medina A. Structure ortogonale sur une algèbre de Lie et structure de Lie — Poisson associée // Séminaire de Géométrie differentielle, 1983—1984.— Université des Sciences et Techniques du Languedoc.— 1985.— P. 113—121.
440. Milnor J. Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math.— 1976.— V. 21.— P. 293—329.
441. Mischenko A. S., Fomenko A. T. Symplectic Lie group action // Lecture Notes in Math.— 1979.— V. 763.— P. 504—539.
442. van Moerbeke P. The spectrum of Jacobi matrices // Invent. Math.— 1976.— V. 37.— P. 45—81.
443. van Moerbeke P., Mumford D. The spectrum of difference operators and algebraice curves // Acta Math.— 1979.— V. 143.— P. 93—154.
444. Molino P. Structure transverse aux orbites de la représentation coadjointe: la cas des orbites réductives // Séminaire de Géometrie différentielle, 1983—1984.— Université des Sciences et Techniques du Languedoc.— P. 55—62.
445. Montgomery R., Marsden J., Ratiu T. Gauged Lie — Poisson structures // Contemp. Math.— 1984.— V. 28.— P. 101—114.
446. Moody B. A new class of Lie algebras // J. Algebra.— 1968.— V. 10.— P. 211—230.
447. Morvan J. M. Calsses de Maslov d'une immersion lagrangienne et minimalité // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1981.— V. 292, Sér. 1.— P. 633—636.
448. Morvan J. M. Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique // Ann. Inst. Henri Poincaré.— 1983.— V. 38, № 4.— P. 364—370.
449. Morvan J. M. Sur la transversalité de deux champs de plans lagrangiens // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1983.— V. 296, Sér. 1.— P. 997—1000.
450. Morvan J. M. Obstructions à la transversalité de deux champs de plans lagrangiens. Travaux en cours // Seminaire Sand — Rhodanien en Géométrie, II.— Paris: Hermann, 1984.— P. 55—72.
451. Morvan J. M., Niglio L. Classes de Maslov d'ordres supérieurs // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1985.— V. 300, № 9.— P. 271—274.
452. Moser J. On the volume elements on a manifolds // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— V. 120, № 2.— P. 286—294.
453. Moser J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations // Adv. Math.— 1975.— V. 16, № 2.— P. 197—220.
454. Moser J. Geometry of quadrics and spectral theory // Chern. Symposium.— 1979.— P. 147—188.
455. Moser J. Various aspect of integrable Hamiltonian systems // Dynamical systems. Progress in Math.— 1980.— P. 233—289.
456. Moser J. On examples of a Schoredinger equation with almost periodic potential and nowhere dense spectrum // Comment. Math. Helv.— 1981.— V. 56, № 2.— P. 198—224.

457. Mulase M. Algebraic geometry of soliton equations // Proc. Jap. Acad. A.— 1983.— V. 59, № 6.— P. 258—288.
458. Mulase M. Cohomology structure in soluton equations and Jacobian varieties // J. Diff. Geom.— 1984.— V. 19, № 2.— P. 403—430.
459. Mumford D. An algebro-geometric construction of commuting operators and of solution to the Toda lattice equation and related non-linear equations // Proc. Intern. Symp. on Algebraic Geometry.— Kyoto, 1977.— P. 115—153.
460. Narasimham M., Ramanan S. Existence of universal connections // Amer. J. Math.— 1961.— V. 83.— P. 563—572.
461. Ness L. A stratification of the null cone via the moment map // Amer. J. Math.— 1984.— V. 106, № 6.— P. 1281—1325.
462. Neumann C. De problemate quidam mecanic quod ad primam integralium ultraellipicorum classem revocatur // J. reine angew. Math.— 1859.— V. 56.— P. 46—63.
463. Okassa E. Prolongements des champs de vecteurs à des variétés // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1985.— V. 300, № 6.— P. 173—176.
464. Okassa E. Prolongement des champs de vecteurs à des varietés de points proches // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.— 1986—1987.— V. 8, № 3.— P. 349—366.
465. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Completely integrable Hamiltonian systems connected with semi-simple Lie algebras // Invent. Math.— 1976.— V. 37, № 2.— P. 93—108.
466. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Explicit solutions of the classical generalized Toda models // Invent. Math.— 1979.— V. 56.— P. 261—269.
467. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Quantum integbrable systems related to Lie algebras // Phys. Reports.— 1983.— V. 94.— P. 313—404.
468. Orlik P., Vogt E., Zieschang H. Zur Topologie gefasserter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten // Topology.— 1967.— V. 6, № 1.— P. 49—65.
469. Oshemkov A. A. The phase topology of some integrable Hamiltonian systems on $SO(n)$ // Бакинская междунар. топологическая конф. Ч. 2: Тезисы / Математический ин-т АН СССР им. В. А. Стеклова; Ин-т математики и механики АН Азерб. ССР.— Баку, 1987.— С. 230.
470. Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariant of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys.— 1976.— V. 17, № 6.— P. 986—994.
471. Perelomov A. M. The simple relation between certain dynamical systems // Comm. Math. Phys.— 1978.— V. 63.— P. 9—11.
472. Perelomov A. M. Lax representation for the systems of S. Kowalevski type // Comm. Math. Phys.— 1981.— V. 81.— P. 239—241.
473. Perroud M. The fundamental invariants of homogeneous classical groups // J. Math. Phys.— 1983.— V. 24, № 6.— P. 1381—1391.
474. Peterson D. H. Affine Lie algebras and theta functions // Lecture Notes in Math.— 1982.— V. 933.— P. 166—175.
475. Pohlmeyer K. Integrable Hamiltonian systems with interaction through quadratic constrains // Comm. Math. Phys.— 1976.— V. 46.— P. 267—273.
476. Radu M., Vasil O. Almost cosymplectic and conformal almost cosymplectic connections, I // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.— 1971.— V. 16, № 6.— P. 893—902.
477. Radu M., Vasil O. Almost cosymplectic and conformal almost cosymplectic connections, II // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.— 1971.— V. 16, № 6.— P. 903—912.
478. Rais M. La représentation coadjointe du groupe affine // Ann. Inst. Fourier.— 1978.— V. 28, № 1.— P. 207—237.
479. Rais M. L'indice des produits semi-directs $E \times_{\rho} \mathfrak{G}$ // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1978.— V. 287, № 4.— P. 195—197.
480. Ratiu T. Involution theorem // Lecture Notes in Math.— 1980.— V. 775.— P. 219—257.

481. Ratiu T. The motion of the free n-dimensional rigid body // Indiana Univ. Math. J.— 1980.— V. 29, № 4.— P. 609—629.
482. Ratiu T., The C. Neumann problem as a completely integrable system on an adjoint orbit // Trans. Amer. Math. Soc.— 1981.— V. 264, № 2.— P. 321—329.
483. Ratiu T. Euler—Poisson equations on Lie algebras and the N-dimensional heavy rigid body // Amer. J. Math.— 1982.— V. 103, № 3.— P. 409—448.
484. Ratiu T., van Moerbeke P. The Lagrange ridgid body motion // Ann. Inst. Fourier.— 1982.— V. 32, № 1.— P. 211—234.
485. Renault J. A grouppoint approach to C^*-algebras // Lecture Notes in Math.— 1980.— V. 793.— P. 1—160.
486. Rentschler R., Vergne M. Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie // Ann. Sci. Ec. Norm. Supér.— 1973.— V. 6.— P. 380—405.
487. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations // Invent. Math.— 1979.— V. 54, № 1.— P. 81—100.
488. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations // Invent. Math.— 1981.— V. 63, № 3.— P. 423—432.
489. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body // Comm. Math. Phys.— 1986.— V. 105.— P. 461—472.
490. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Lax representation with a spectral parametre for the S. Kowalevski type and its generalizations // Lett. Math. Phys.— 1987.— V. 14.— P. 55—61.
491. Samir Saad. Représentation co-adjointe et idéaux primitifs pour une classe d'algèbre de Lie // Thèses presentées à l'Université de Poitiers U.E.R. des Sci. Foundamentales et Appliquées.— 1977.
492. Sarlet W. Contribution to the study of symmetries, first integrals and the inverse problem in theoretical mechanics // Acad. Analecta.— 1987.— V. 49, № 1.— P. 27—57.
493. Schouten J. A. Klassifizierreng der alternierenden Grössen dritten Grades in 7 Dimensionen // Rend. Circ. Mat. Palermo.— 1931.
494. Sicoraw J. C. Sur les immersions lagrangiennes dans un fibre contangent admettant une phase génératric global // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1986.— V. 302, № 3.— P. 119—122.
495. Simons J. On transitivity of holonomy systems // Ann. Math.— 1962.— V. 76.— P. 213—234.
496. Sourian J. M. Géométrie simplectique et physique mathématique.— Paris, 1975.
497. Sternberg S. Symplectic homogeneuos spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— V. 212.— P. 113—130.
498. Sutherland B. Exact results for a quantum many body problem in one dimension // Phys. Rev.— 1971.— V. A4.— P. 2019—2021.
499. Symes W. W. Systems of Toda type, inverse spectral problems and representations theory // Invent. Math.— 1980.— V. 59.— P. 13—51.
500. Symes W. W. Hamiltonian group actions and integrable systems // Physica.— 1980.— V. Dl.— P. 339—374.
501. Takiff S. J. Rings of invariant polynomials for a class of Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— V. 160.— P. 249—262.
502. Thimm A. Integrable geodesic flows on homogeneous spaces // Ergod. Theory. Dyn. Syst.— 1981.— V. 1, № 4.— P. 495—517.
503. Tischler D. Closed 2-forms and embedding theorem for symplectic manifolds // J. Diff. Geom.— 1977.— V. 12.— P. 229—235.
504. Tits J. Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples // Publ. Math. Paris.— 1966.— V. 31.— P. 21—58.
505. Thompson G. Polynomial constants of motion in flat space // J. Math. Phys.— 1984.— V. 25, № 12.— P. 3474—3478.

506. Thurston W. Some simple examples of symplectic manifolds // Proc. Amer. Math. Soc.— 1976.— V. 55.— P. 467—468.
507. Toda M. Wave propagation in anharmonic lattices // J. Phys. Soc. Japan.— 1967.— V. 23.— P. 501—506.
508. Tondeur Ph. Affine Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten mit fast symplektischer Strukture // Comm. Math. Helv.— 1961.— V. 36, № 1.— P. 234—244.
509. Topological classification of integrabte systems // Advances in Soviet Math.— 1991.— V. 6.— P. 1—345 (American Math. Society).
510. Trofimov V. V. On the geometric properties of the complete commutative set of functions on symplectic manifold // Бакинская Международная топологическая конференция. Часть 2: Тезисы.— Баку: Математический ин-т АН СССР им. В. А. Стеклова, ин-т математики и механики АН Азерб. ССР.— 1987.— С. 297.
511. Trofimov V. V. Connections on Manifolds and new characteristic classes // Acta Applicandae Mathematicae.— 1991.— V. 22.— P. 283—312.
512. Vaisman J. Symplectic geometry and secondary characteristic classes.— Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1987.
513. Vergne M. La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente // Bull. Soc. Math. France.— 1972.— V. 100, № 3.— P. 301—335.
514. Vey J. Déformation du crochet de Poisson sur les varietes symplectiques // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1975.— V. 280.— P. 725—727.
515. Vey J. Déformation du crochet de Poisson sur une varieté symplectique // Comm. Math. Helv.— 1975.— V. 50, № 4.— P. 421—454.
516. Waldhausen F. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I // Invent. Math.— 1967.— V. 33, № 4.— P. 88—117.
517. Ward R. S. Multy-dimensional integrable systems // Lect. Notes Rhys.— 1987.— V. 280— P. 106—116.
518. Weil A. Théorie des points proches sur les varietés différentiables // Coll. Géom. Diff. Strasbourg.— 1953.— P. 111—117.
519. Weinstein A. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds // Adv. Math.— 1971.— V. 6.— P. 329—346.
520. Weinstein A. On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed // J. Diff. Geom.— 1974.— V. 9.— P. 513—517.
521. Weinstein A. Lectures on sumplectic manifolds // CBMS Conf. Series, № 27. Amer. Math. Soc, 1977.
522. Weinstein A. Flat bundeles and symplectic manifolds // Adv. Math.— 1980.— V. 37.— P. 239—250.
523. Weinstein A. Symplectic geometry // Bull. Amer. Math. Soc.— 1981.— V. 5.— P. 1—13.
524. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds // J. Diff. Geom.— 1983.— V. 18, № 3.— P. 523—557.
525. Weinstein A. Symplectic gruppoids and Poisson manifolds // Bull. Amer. Math. Soc.— 1987.— V. 16, № 1.
526. Wilson G. Commuting flows and conservation laws for Lax equations // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1979.— V. 86.— P. 131—143.
527. Wilson G. The modified Lax and two-dimensional Toda lattice equations associated with simple Lie algebras // Ergod. Theory Dyn. Syst.— 1981.— V. 1.— P. 361—380.
528. Wojciechowsky S. Involutive set of integrals for completele integrable many body problems with pair interections // Lett. Nuovo Cimento.— 1977.— V. 18.— P. 103—107.
529. Zieschang H., Vogt E., Coldeway H. D. Surfaces and planar discontinuous groups // Lecture Notes in Math.— 1980.— V. 835.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ 2 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЧАСТЬ 3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ